

N° d'ordre : 17/2019-C/MT

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène**

**Faculté de Mathématiques**



**THÈSE**

**Présentée pour l'obtention du diplôme de DOCTEUR**

**En : Mathématiques**

**Spécialité : Mathématiques Financières et Actuariat**

**Par : DJELLADJ Wafaa**

**Sujet**

**Comportement asymptotique d'un estimateur à noyau  
du quantile pour des données censurées et associées**

Soutenue publiquement le 25/04/2019, devant le jury composé de :

Mr.	Kamal BOUKHETALA	Professeur	U.S.T.H.B, Algérie	Président
Mr.	Abdelkader TATACHAK	Professeur	U.S.T.H.B, Algérie	Directeur de Thèse
Mme.	Zohra GUESSOUM	Professeur	U.S.T.H.B, Algérie	Examinatrice
Mr.	Elias OULD SAÏD	Professeur	Univ. du Littoral, France	Examinateur
Mme.	Ourida SADKI	Professeur	U.S.T.H.B, Algérie	Examinatrice
Mme.	Karima BELAIDE	Maître de conférences	Univ. Bejaia, Algérie	Examinatrice

---

*Une dédicace à mon père sans lequel tout ce parcours n'aurait pas été possible.*

---

# Résumé

Cette thèse est axée sur les propriétés asymptotiques dans le cadre de l'estimation non paramétrique par noyaux du quantile conditionnel pour des données de survie. Nous nous plaçons dans un modèle de données censurées à droite. Nous considérons une suite de variables aléatoires (v.a.) stationnaires, présentant une structure de dépendance de type associé. Nous étendons les travaux réalisés par Ould Saïd et Sadki (2008) aux données associées. Nous introduisons dans un premier chapitre les quantiles simple et conditionnel tout en présentant quelques résultats existants susceptibles d'étayer les démonstrations données par la suite. Les chapitres suivants présentent :

- L'estimation non paramétrique de la fonction quantile conditionnel par la méthode du noyau dans le cas de données complètes.
- La convergence presque sûre de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des variables censurées et associées : Cet article a fait l'objet d'une publication acceptée dans Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. Les preuves s'appuient essentiellement sur les calculs de covariance pour lesquelles nous utiliserons principalement l'inégalité exponentielle proposée par Doukhan et Neumann (2007) qui se trouve être la plus appropriée sous l'hypothèse d'association.
- La normalité asymptotique dudit estimateur sous le même modèle : les preuves qui illustrent que l'estimateur en question est asymptotiquement gaussien se basent sur la méthode des grands et des petits blocs.

Des simulations viennent appuyer le bon comportement de l'estimateur étudié.

**Mots et phrases clés :** Association, Censure droite, Convergence forte, Estimation non paramétrique, Kaplan-Meier, Quantile conditionnel, Normalité asymptotique.

---

# Abstract

This thesis focuses on asymptotic properties in the context of nonparametric kernel estimation of the conditional quantile for survival data. We place ourselves in a right censored model. We consider a sequence of stationary random variables (r.v.), having a dependency structure of associated type. We extend the work done by Ould Saïd and Sadki (2008) to the associated data. We introduce in a first chapter the simple and the conditional quantiles while presenting some existing results likely to support the demonstrations given later. The following chapters present :

- The nonparametric estimation of the conditional quantile function by the kernel method in the case of complete data.
- The almost sure convergence of the kernel estimator of the conditional quantile for censored and associated variables : This article was the subject of an accepted publication in Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics. The proofs rely mainly on the covariance calculations for which we will mainly use the exponential inequality proposed by Doukhan and Neumann (2007) and which is appropriate under the assumption of association.
- The asymptotic normality of this estimator under the same model : the proofs that illustrate that the estimator in question is asymptotically Gaussian are based on the method of large and small blocks.

Simulations support the good behavior of the studied estimator.

**Key words and phrases :** Association, Asymptotic normality, Conditional quantile, Kaplan-Meier, Non-parametric estimation, Right censorship, Strong convergence.

---

# Articles et communications

1. Djelladj, W., Tatachak, A., "Strong uniform consistency of a kernel conditional quantile estimator for censored and associated data". DOI : 10.15672/HJMS.2018.609
2. Djelladj, W., Tatachak, A., "Asymptotics for a conditional quantile estimator under censoring and association", *ASMDA'2017 Conference*, 06-09 June 2017, LONDON, UK.
3. Djelladj, W., Tatachak, A., "Estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des variables censurées et dépendantes", *Congrès des Mathématiciens Algériens (CMA'2016)*, 08-09 Novembre 2016, Université de Batna II, Batna.

---

# Avant-propos

Il est difficile de m'exprimer avec clarté et précision parfaites pour manifester ma déférence et rendre hommage à la pléiade d'augustes personnages pour l'intérêt apporté à cette tâche.

Je manifeste cette attitude déférente en guise de reconnaissance et de très sincères remerciements à tous ceux dont le dévouement avait été exemplaire, celui qui m'avait permis de tirer avantage de leurs conseils.

Que cette exclamation de reconnaissance et de gratitude adressée respectueusement fasse l'objet d'acceptation ou d'acquiescement.

Que Monsieur le directeur de thèse, Abdelkader TATACHAK, Professeur digne d'estime, aux qualités multiples qui allient rigueur et droiture, soit sincèrement remercié pour son dévouement en toutes circonstances. Je le remercie également pour avoir été attentif tout en me prodiguant de précieux conseils qui m'indiquaient ce qui convenait de faire.

Monsieur le Professeur Kamal BOUKHETALA, trouve ici toute ma gratitude pour avoir accepté à présider ce remarquable jury au détriment de ses précieuses activités, la marque de ma plus haute considération vous est adressée et vous remercie pour les égards inhérents à mon travail durant cette ultime étape.

Mesdames les Professeurs, GUESSOUM Zohra et SADKI Ourida, ne sont pas en reste puisqu'elles étaient remarquables et disponibles à souhait. Elles ne ménagèrent aucun effort pour m'apporter l'aide nécessaire, me permettant ainsi d'aller de l'avant. Pour cela, qu'elles trouvent ici toute mon affection et profonde considération.

Mes remerciements s'adressent aussi à Monsieur le Professeur Elias OULD-SAID pour m'avoir fait honneur en acceptant d'être mon examinateur et également membre du Jury. Aussi, je lui réitère ma sincère gratitude pour avoir eu l'amabilité de me recevoir à Lille.

Aussi, mes remerciements s'adressent à Madame Karima BELAIDE, Docteur à l'Université de Béjaïa, pour avoir fait l'effort de venir d'aussi loin honorer de sa présence le jury.

J'exprime également ma gratitude à l'égard de mes collègues du groupe de travail du département de Probabilité et Statistique.

A mes parents, humbles comme ils le sont, s'accrochent à leur humilité en me renvoyant les éloges, prétendant ainsi être dans l'obligation morale de se dévouer à leurs enfants. Je leur dis simplement que votre fierté à mon égard est perceptible sans que vous ne l'ayez à l'extérioriser. Cela me suffit amplement et me comble de bonheur !

Aux autres membres de ma famille pour avoir cru en moi ainsi qu'à mes petits anges Lycia, Yacine et Nazim.

Pour m'aider dans mes différentes tâches, mon époux avait été si habile et conciliant, que sa patience d'ange contribua à surmonter toutes les épreuves. Sans sa précieuse aide, ce parcours aurait été difficilement envisageable. Si mérite il y a, il s'emparera de la part du lion.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>10</b>
1.1	Présentation . . . . .	10
1.2	Données incomplètes . . . . .	10
1.3	La dépendance . . . . .	14
1.4	Inégalités exponentielles . . . . .	18
1.5	La fonction quantile . . . . .	19
1.6	La fonction quantile conditionnelle . . . . .	22
1.7	Résumé succinct des différents chapitres . . . . .	24
<b>2</b>	<b>Estimation de la fonction de répartition et du quantile conditionnels</b>	<b>25</b>
2.1	La densité . . . . .	25
2.2	La fonction quantile conditionnel dans le cas complet . . . . .	27
2.3	Les propriétés asymptotiques du quantile conditionnel dans le cas complet et associé .	29
2.3.1	Hypothèses et résultats . . . . .	29
2.3.2	Etude de simulation . . . . .	31
2.3.3	Preuves . . . . .	33
2.3.3.1	Partie consistance . . . . .	33
2.3.3.2	Partie normalité asymptotique . . . . .	39
2.4	La fonction quantile conditionnelle dans un modèle de censure droite . . . . .	49
2.4.1	L'estimateur de Nelson-Aalen . . . . .	50
2.4.2	L'estimateur de Kaplan-Meier . . . . .	51
2.4.2.1	Propriétés asymptotiques de l'estimateur de Kaplan-Meier . . . . .	52
2.4.3	La convergence forte du quantile conditionnel dans le cas de données censurées et i.i.d. . . . .	53
2.4.4	Les propriétés asymptotiques du quantile conditionnel dans le cas de données censurées et $\alpha$ -mélangeantes . . . . .	54
<b>3</b>	<b>Propriétés asymptotiques de l'estimateur du quantile conditionnel pour des don- nées incomplètes et associées</b>	<b>57</b>

---

3.1	Introduction . . . . .	57
3.2	Notations et estimateurs . . . . .	59
3.3	Hypothèses et résultats principaux . . . . .	61
3.3.1	Convergence uniforme forte . . . . .	63
3.3.2	Normalité asymptotique . . . . .	64
3.4	Etude de simulation . . . . .	65
3.4.1	Consistance . . . . .	65
3.4.1.1	Description du modèle . . . . .	65
3.4.1.2	Résultats de simulation . . . . .	66
3.4.2	Normalité asymptotique . . . . .	69
3.5	Preuves . . . . .	72
3.5.1	Preuves pour la consistance . . . . .	72
3.5.2	Preuves pour la normalité asymptotique . . . . .	82
<b>4</b>	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>104</b>



# Liste de notations

- v.a. : variable aléatoire
- f.d.r. : fonction de répartition
- E.K.M : Estimateur de Kaplan-Meier
- p.s. : presque sûrement
- i.i.d. : indépendantes et identiquement distribuées
- $\mathbb{1}_A$  désigne la fonction indicatrice de A, c'est-à-dire que  $\mathbb{1}_A = 1$  si A est vrai et 0 sinon.
- $\|\cdot\|_\infty$  désigne la norme infinie.

# Chapitre 1

## Introduction

### 1.1 Présentation

La modélisation des durées de vie est décrite comme un domaine devenu très actif. Il s'agit de modéliser le temps écoulé entre deux évènements, représenté par une variable aléatoire généralement positive en fonction de facteurs explicatifs éventuels. Initialement, les durées de vie concernaient les applications biologiques (biostatistiques, épidémiologie), médicales et démographiques (espérance de vie aux divers âges, âge au mariage). Désormais, cela s'applique aux domaines économiques (durée de vie d'une entreprise, instant d'un défaut de paiement . . . ), en fiabilité (durée de vie d'un matériel) et en finance (défaillance d'un crédit).

L'analyse statistique est d'une complexité telle que les durées de vie sont rarement complètes, il semble difficile d'observer en continu les données, cela est dû aux phénomènes de censure et/ou de troncature pour ne citer que celles qui s'avèrent les plus connues.

Les méthodes de statistique paramétrique usuelles proposent des modèles connus, avec des paramètres inconnus à estimer. L'un des exemples les plus courants est le modèle de régression linéaire. Ces méthodes ne s'adaptent pas aux données de survie. Le traitement des durées de vie requiert l'utilisation de méthodes semi et non-paramétrique afin d'aboutir sur des résultats plus réalistes.

L'objet principal de cette thèse est d'établir des résultats asymptotiques pour l'estimateur à noyau du quantile conditionnel (consistance et normalité asymptotique) lorsque les durées de vie sont incomplètes (l'accès à l'information n'est pas complet) et sont soumises à des perturbations (structure de dépendance). Ces concepts seront décrits par la suite.

### 1.2 Données incomplètes

Une particularité bien connue des données de survie est l'incapacité d'accéder à toutes les observations. Les procédures statistiques classiques ne sont alors plus valables, la modélisation de ces données incomplètes nécessite des techniques statistiques plus complexes. Les données incomplètes

les plus courantes étant les données censurées et les données tronquées.

Initialement apparue en astronomie, la troncature à gauche s'est ensuite étendue aux domaines de la médecine, de l'épidémiologie, de la biométrie et de l'économie. Elle survient lorsque le temps d'origine de la durée de vie précède le temps d'origine de l'étude. Nous n'observons alors que les durées de vie  $T$  pour lesquelles  $\{T > Z\}$ , où  $Z$  est la variable de troncature. A l'inverse, dans la troncature droite la variable  $T$  n'est observable que si elle est inférieure à  $Z$ . On observe alors le couple  $(T, Z)$ , avec  $T \leq Z$  ou inversement.

Prenons l'exemple de la société protectrice des animaux qui cherche à étudier la durée de vie des chats. Elle dispose de l'âge de chacun des chats à son arrivée  $Z$  ainsi que de son âge à son décès  $T$ . La population représentée n'est pas complète. En effet, les chats confiés soit trop jeunes soit trop vieux ne seront pas forcément représentés. On dispose alors d'un échantillon de réalisations de  $T$  tronquées à gauche par une v.a.  $Z$ . Sur les  $N$  cas de l'échantillon, il est possible uniquement d'observer les  $n$  chats suffisamment grands.

Ce type de données incomplètes a suscité l'intérêt de nombreux auteurs, Lemdani et al. (2009) et Ould-Saïd et al. (2009) ont étudié les propriétés asymptotiques du quantile conditionnel pour des données tronquées à gauche dans les cas i.i.d. et  $\alpha$ -mélangeant, respectivement.

Par ailleurs, l'autre type de données incomplètes est celui des données censurées, bien connu dans la modélisation des cadres d'études expérimentales comme c'est le cas pour certaines maladies. Ce type de données trouve également un usage important en assurance et en finance. Dans ce cas, une durée  $T$  montrant l'évènement d'intérêt est dite censurée à droite par une v.a. positive  $C$  n'ayant pas encore montré l'évènement d'intérêt si, au lieu de  $T$  on observe le couple  $(Y, \delta)$  avec  $Y = \min(T, C)$  et  $\delta = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}$ . A l'inverse, elle est censurée à gauche si, au lieu de  $T$ , on observe le couple  $(Y, \delta)$  avec  $Y = \sup(T, C)$  et  $\delta = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}$ . Ces deux types de censure peuvent être combinées, on parle alors de la double censure. Concrètement, nous disposons des variables  $Y_1, \dots, Y_n$  pour lesquelles nous distinguerons deux types d'observations : celles pour lesquelles  $\delta_i = 1$  donc  $Y_i = T_i$  représentant les vraies durées de vie (durées complètes), et celles pour lesquelles  $\delta_i = 0$  donc  $Y_i = C_i$  qui sont des données censurées (durées incomplètes).

A titre illustratif, nous nous intéressons à l'âge d'acquisition de la marche chez des jeunes enfants âgés entre 10 et 16 mois habitant la même ville. La durée d'intérêt est donc l'intervalle de temps entre la naissance et les premiers pas. Nous distinguons trois cas de figures : soit l'enfant sait déjà marcher avant 10 mois on parle alors de censure fixe à gauche. Soit il ne sait toujours pas marcher à 16 mois, on parle alors de censure fixe à droite. Soit il apprend à marcher entre 10 et 16 mois, on constate dans ce cas que les données sont complètes.

Un autre type de censure existe, il s'agit de la censure par intervalle dans laquelle nous ne connaissons que les bornes aléatoires  $(C_1, C_2)$  entre lesquelles l'évènement d'intérêt a lieu.

Prenons l'exemple d'un processus de production industrielle pour lequel nous cherchons les composants défectueux, nous effectuons les contrôles à des dates aléatoires. Lorsqu'un composant est à

changer, nous connaissons seulement qu'il a failli entre les dates de deux contrôles successifs. C'est donc une censure par intervalle.

Nous nous intéressons dans cette thèse au cas des données censurées à droite considérées comme étant les plus fréquentes. Ce type de censure où sont observées les variables d'intérêt  $T_1, \dots, T_n$  lorsque  $Y_i \leq C$ , le cas échéant on observe  $C$  est dénommée censure de type I.

La généralisation de cette censure donne la censure de type II pour laquelle nous nous intéressons au processus d'observation jusqu'au  $r$ -ième décès. En effet, pour les statistiques d'ordre  $T_{(1)}, T_{(2)}, \dots, T_{(n)}$ , nous observerons l'échantillon  $(Y_i, \delta_i)$  avec  $Y_i = \min(T_i, T_{(r)})$  et  $\delta_i = \mathbb{1}_{\{T_i \leq T_{(r)}\}}$  (en supposant l'absence d'ex-aequo). Dreesbeke et al. (1989) indiquent un exemple de censure de type II en testant la fiabilité d'un système complexe, ils mettent en état de fonctionnement  $n$  systèmes du même type, et s'arrêtent lorsque la  $r$ -ième panne est observée.

Il est traité dans cette thèse les données sujettes à une censure de type III dénommée également censure aléatoire de type I. Dans ce contexte, les variables de censure  $C_1, \dots, C_n$  sont aléatoires et i.i.d. Les variables réellement observées  $Y_1, \dots, Y_n$  sont telles que  $Y_i = \min(T_i, C_i)$  et  $\delta_i = \mathbb{1}_{\{T_i \leq C_i\}}$  pour  $i = 1 \dots n$ .

A titre d'exemple, lors d'un essai thérapeutique sur des individus, la censure à droite peut être due à la perte de vue d'un patient (pour cause de déménagement ou bien le patient décide de se faire soigner ailleurs), l'arrêt ou le changement du traitement (pour cause d'effets secondaires ou de l'inefficacité du traitement) ou alors en raison de la fin de l'étude (certains patients n'ont pas encore subi l'évènement).

Avoir des données incomplètes constitue une perte d'information, se pose alors le problème d'identifiabilité autrement dit nous nous demandons si la loi de nos observations nous permet d'identifier la loi de  $T$ . Est-il possible de déterminer de manière unique la loi de  $T$  (exemple : la densité ou la survie) ?

La perte d'information due à la censure fait que la réponse est souvent négative, il n'est de ce fait pas évident d'identifier la loi de  $T$  à partir des observations, ce qui nous ramène à supposer les durées de vie indépendantes des censures.

La v.a.  $T$  possède une f.d.r. notée  $F$ . Il s'agit de l'une des plus importantes caractéristiques de cette durée de vie avec  $F(t) = \mathbb{P}(T \leq t)$ . D'autres fonctions viennent s'ajouter dans l'analyse des données de survie lorsque la durée de vie  $T$  est une v.a. positive :

- La fonction de survie au moins jusqu'à l'instant  $t$  est  $S(t) = \mathbb{P}(T > t) = 1 - F(t) = \int_t^{+\infty} f(u)du$ , où  $f$  représente la densité de probabilité ,
- La fonction de hasard  $\lambda(t) = f(t)/S(t) = -d \log S(t)/dt$ ,
- La fonction de hasard intégrée  $\Lambda(t) = \int_0^t \lambda = -\log S(t)$ .

Dans ce contexte, Kaplan et Meier (1958) donnent un estimateur produit limite de la fonction de survie  $S(t)$  et démontrent sa convergence uniforme presque sûre ainsi que sa normalité asymptotique sous certaines conditions d'identifiabilité. Ils proposent d'estimer la survie de la variable d'intérêt

$T$  à partir des observations incomplètes. Pour ce faire, les temps d'évènements (décès et censure) distincts  $T_{(i)}$  ( $i=1 \dots n$ ) sont ordonnés par ordre croissant. L'idée de Kaplan-Meier étant "survivre après un temps  $t$  c'est être en vie juste avant  $t$  et ne pas mourir au temps  $t$ ". Prenons la définition des deux variables

- $d_i$  = nombre de décès observés au temps  $T_{(i)}$ ,
- $R_i$  = nombre d'individus à risque de décéder juste avant le temps  $T_{(i)}$ , d'où

$$R_i = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{t_j \geq T_{(i)}\}}. \quad (1.1)$$

L'E.K.M est alors donné par

$$\hat{S}_T(t) = \begin{cases} \prod_{i:T_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{d_i}{R_i}\right) & \text{si } t \geq T_{(1)} \\ 1 & \text{si } t < T_{(1)}, \end{cases}$$

Les temps d'évènements étant supposés distincts, nous avons

$$\begin{aligned} d_i = 0 & \text{ cas de censure en } T_{(i)}, \text{ implique } \delta_i = 0, \\ d_i = 1 & \text{ cas de décès en } T_{(i)}, \text{ implique } \delta_i = 1. \end{aligned}$$

L'écriture de l'estimateur devient

$$\hat{S}_T(t) = \prod_{i:T_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{1}{n - (i - 1)}\right)^{\delta_{(i)}} = \prod_{i:T_{(i)} \leq t} \left(\frac{n - i}{n - i + 1}\right)^{\delta_{(i)}}$$

En l'absence de censure, l'E.K.M se réduit à la fonction de survie empirique usuelle. Il est à noter également que cet estimateur est une fonction en escalier décroissante, ce n'est rien d'autre que l'estimateur du maximum de vraisemblance non paramétrique. Il n'est pas possible d'obtenir l'E.K.M dans le cas de la censure par intervalle (les temps de censure n'étant pas connus).

De nombreux auteurs se sont penchés sur les différents types de convergence de l'E.K.M, nous citerons les travaux de Peterson (1977) et Gill (1980) qui ont étendu les propriétés de convergence et de normalité asymptotique à l'E.K.M. Cai et Roussas (1998) ont établi les propriétés asymptotiques (convergence uniforme et normalité asymptotique) de l'E.K.M de la f.d.r. sous un modèle censuré à droite et associé. Par ailleurs, Stute et Wang (1993) ont établi un résultat du type loi forte des grands nombres de l'E.K.M.

Il existe une pléiade d'auteurs qui ont porté leur intérêt aux données censurées, à titre indicatif Ould-Saïd et Cai (2005) ont traité le mode conditionnel dans le cas i.i.d. Khardani et al. (2010) ont présenté les propriétés asymptotiques d'un estimateur lissé du mode conditionnel dans le cadre de données dépendantes. Ferrani et al. (2014) ont étudié la convergence uniforme presque sûre de l'estimateur à noyau de la densité et du mode avec vitesse de convergence pour des données dépendantes.

### 1.3 La dépendance

Dans les usages, il est plus fréquent d'être exposé à des données de survie dépendantes. Pour corroborer cela et à titre d'exemple, une personne résidant dans une zone épargnée par un virus particulier aura moins de chance d'y être infectée; contrairement à celle résidant dans une zone présentant plus de risques. Cependant, il est à remarquer que ces données présentent une structure de dépendance bien qu'elles soient asymptotiquement indépendantes. En effet, si l'on ordonne la provenance géographique d'individus issus d'un même échantillon, nous constaterons une dépendance entre deux individus proches géographiquement et une indépendance entre deux individus éloignés. Ceci est mathématiquement modélisé par des données mélangeantes. Il existe plusieurs formes de mélange, l' $\alpha$ -mélange est la forme la plus répandue et la moins restrictive car la plus faible. Ce type de dépendance est notamment utilisé dans les processus ARMA en particulier dans l'analyse des séries temporelles.

Le coefficient  $\alpha$  est tel que  $0 \leq \alpha \leq 1/4$ , il est plus faible que les autres coefficients de mélange (Voir Doukhan (1994), Rio (2000)). De multiples travaux existent dans la littérature dans le cadre de la structure de dépendance de type  $\alpha$ -mélange pour des données tronquées, Sun et Zhou (2001) ont établi des résultats pour l'estimation de la f.d.r. Par ailleurs, Lemdani et al. (2005) se sont intéressés à la consistance de la fonction quantile pour des données tronquées à gauche. Ould-Saïd et Sadki (2008) ont établi la convergence presque sûre de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour un modèle censuré à droite. En outre, ils ont établi la normalité asymptotique de ce même estimateur pour le même modèle (2011). D'autres travaux récents existent, il s'agit de ceux de Liang et de Uña -Álvarez (2011) qui donnent la convergence uniforme ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur du quantile conditionnel dans le cas  $\alpha$ -mélangeant pour des données censurées.

L'association est une forme particulière de dépendance positive, elle a deux origines : la physique mathématique avec les inégalités FKG (Fortuin, Kasteleyn et Ginibre) appliquées en théorie de percolation, ... et l'autre statistique (Esary, Proschan et Walkup) avec des applications en fiabilité.

Pour illustrer ce type de dépendance, nous donnons l'exemple d'un malade hospitalisé fréquemment, ce dernier reçoit à chaque hospitalisation un traitement et séjourne à l'hôpital. Ces durées d'hospitalisation sont associées du fait que le traitement administré à chaque hospitalisation dépend de ce qui lui avait été administré lors de ses hospitalisations antérieures.

Comme deuxième exemple, nous donnons celui de la durée de vie d'un équipement. Si les composants d'un équipement subissent le même stress (exemple : chute de tension), elles ont alors des durées de vie associées.

Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont considérées associées si pour tout sous-ensemble  $I \in \{1 \dots n\}$

$$Cov(\Psi_1(X_1, \dots, X_n), \Psi_2(X_1, \dots, X_n)) \geq 0,$$

pour toutes fonctions non décroissantes  $\Psi_1, \Psi_2$  de  $\mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$  pour lesquelles la covariance existe. Parmi les propriétés de l'association (Esary et al.(1967)), nous citerons les plus importantes :

- Tout sous ensemble d'un ensemble fini de variables aléatoires réelles associées est aussi associé.
- Une suite infinie de variables aléatoires est associée si toute sous suite finie est associée.
- Si deux ensembles de variables associées sont indépendants l'un de l'autre, leur union est un ensemble associé.
- Tout singleton formé d'une variable aléatoire réelle est associé.
- Si  $X = (X_1, \dots, X_n)$  est un vecteur associé et si  $g_1, \dots, g_l$  sont des fonctions toutes croissantes de  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  (ou toutes décroissantes), alors le vecteur  $Y = (g_1(X), \dots, g_l(X))$  est associé.
- Si  $X^{(l)} = (X_1^{(l)}, \dots, X_n^{(l)})$  est associé pour tout  $l$  et si  $X^{(l)}$  converge en loi vers  $X = (X_1, \dots, X_n)$  lorsque  $l$  tend vers  $+\infty$ , alors  $X$  est associé.

Nous citons quelques exemples de vecteurs et processus associés

- Tout vecteur composé de v.a. indépendantes est associé.
- Tout vecteur gaussien positivement corrélé ( $Cov(X_i, X_j) \geq 0$ ) pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  est associé.
- Considérons un processus stationnaire autorégressif d'ordre  $p$  noté  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  défini pour tout  $k \in \mathbb{Z}$  par

$$X_k = \Psi(X_{k-1} + \dots + X_{k-p}) + \epsilon_k,$$

avec  $(\epsilon_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes. La suite  $(X_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  est associée si  $\Psi$  est croissante sur  $\mathbb{R}$ .

De nombreux auteurs ont porté un intérêt particulier à l'estimation non paramétrique sous des données associées. Lehmann (1966) fut l'un des premiers à aborder le thème des données positivement associées. Le concept a ensuite été généralisé par Esary, Proschan et Walkup (1967). Newman (1980) a établi le théorème central limite (TCL) pour des variables strictement stationnaires pour le généraliser en 1981 au cas fonctionnel. D'autre part, Birkel (1989) donna la loi forte des grands nombres pour des suites associées.

Dans le cas des données complètes, Roussas (1991) a élaboré sous certaines conditions de régularité, la convergence uniforme de l'estimateur à noyau de la densité sous des données vectorielles associées et a donné la vitesse de convergence. Par ailleurs, Bagai et Prakasa Rao (1995) ont étudié la convergence uniforme de l'estimateur à noyau de la densité pour un processus associé et stationnaire, sans donner la vitesse de convergence. Roussas (2000) a établi la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau de la densité et Masry (2002) a étendu les travaux de Roussas, il a prouvé la convergence uniforme et la normalité asymptotique avec vitesse de convergence de la densité d'une variable vectorielle.

Lin et Li (2007) ont étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau de la médiane conditionnelle pour la norme  $L1$ .

Les travaux existant sur les données incomplètes et associées sont relativement récents, Ferrani et al. (2014) ont étudié la convergence uniforme presque sûre de l'estimateur à noyau de la densité et du mode avec vitesse de convergence. La convergence uniforme presque sûre de l'estimateur à noyau de la fonction de régression dans un modèle censuré et associé a été établie par Menni et Tatachak (2016).

Cette structure de dépendance a donné naissance à d'autres formes d'association de type : négative, positive et quasi-association.

◦ L'association négative a été introduite par Joag-Dev et Proschan (1983). Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont dites négativement associées si pour tous sous-ensembles disjoints  $I$  et  $J \in \{1 \dots n\}$

$$\text{Cov}(\Psi_1(X_i, i \in I), \Psi_2(X_j, j \in J)) \leq 0,$$

pour toutes fonctions non décroissantes  $\Psi_1$  de  $\mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Psi_2$  de  $\mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$  pour lesquelles la covariance existe. Une suite infinie de variables aléatoires est négativement associée si toute sous suite finie est négativement associée. Pour ce type d'association, nous référons le lecteur aux travaux de Bozorgnia et al. (1996), Patterson et Taylor (1997), . . . .

Parmi les distributions multivariées, les lois gaussiennes négativement corrélées, les lois multinomiales et les lois de Dirichlet possèdent des propriétés de l'association négative.

Les variables associées et négativement associées vérifient l'équivalence entre la non corrélation et l'indépendance. Cette propriété provient de l'inégalité de covariance suivante

$$|\text{Cov}(\Psi_1(X_i, i \in I), \Psi_2(X_j, j \in J))| \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} \left\| \frac{\partial \Psi_1}{\partial x_i} \right\|_{\infty} \left\| \frac{\partial \Psi_2}{\partial x_j} \right\|_{\infty} |\text{Cov}(X_i, X_j)|$$

pour  $I$  et  $J \in \{1 \dots n\}$  et  $\Psi_1, \Psi_2$  deux fonctions réelles à dérivées bornées.

Cette inégalité a été établie par Birkel (1988) pour les variables associées, par Bulinski (1996) pour les variables négativement associées et par Doukhan et Louhichi (1999) pour les variables gaussiennes.

◦ Les v.a.  $X_1, \dots, X_n$  sont dites positivement (faiblement) associées si pour tous sous-ensembles disjoints  $I$  et  $J \in \{1 \dots n\}$

$$\text{Cov}(\Psi_1(X_i, i \in I), \Psi_2(X_j, j \in J)) \geq 0,$$

pour toutes fonctions non décroissantes  $\Psi_1$  de  $\mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\Psi_2$  de  $\mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$  pour lesquelles la covariance existe. Une suite infinie de variables aléatoires est positivement associée si toute sous suite finie est positivement associée. Remarquons que la définition de l'association positive est très proche de l'association. Néanmoins, cette dernière est plus forte et implique l'association positive.

En effet, dire que  $X$  et  $Y$  sont associées implique que  $\text{Cov}(\Psi_1(X), \Psi_2(Y)) \geq 0$ , ce qui implique que  $\text{Cov}(X, Y) \geq 0$  pour toutes fonctions non décroissantes  $\Psi_1, \Psi_2$ .

Notons également qu'un vecteur  $(X_1, X_2, \dots, X_2)$  de v.a. gaussiennes est associé si est seulement s'il était positivement corrélé (i.e.  $\text{Cov}(X_i, X_j) \geq 0$ ). Cette propriété a été démontrée par Pitt (1982).



◦ Dans le cas de la quasi-association, on considère une famille de v.a. réelles  $X = \{X_n, n \in \mathbb{N}\}$  telle que  $\mathbb{E}(X_j^2) < \infty$  pour tout  $j \in \mathbb{N}$ . La famille  $X$  est dite quasi-associée si pour toutes fonctions lipschitziennes  $\Psi_1, \Psi_2$  définies respectivement de  $\mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $I$  et  $J$  deux sous-ensembles finis disjoints de  $\mathbb{R}$ , on a

$$|Cov(\Psi_1(X_i, i \in I), \Psi_2(X_j, j \in J))| \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} lip_i(\Psi_1) lip_j(\Psi_2) |Cov(X_i, X_j)|. \quad (1.2)$$

Les constantes de lipschitz  $Lip_i(\Psi_1)$  sont telles que pour  $x = (x_i, i \in I), y = (y_i, i \in I)$  dans  $\mathbb{R}^{|I|}$

$$|\Psi_1(x) - \Psi_1(y)| \leq \sum_{i \in I} Lip_i(\Psi_1) |x_i - y_i|$$

et

$$Lip_i(\Psi_1) = \sup_{x_i \neq x'_i} \frac{|\Psi_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{|I|}) - \Psi_1(x_1, \dots, x_{i-1}, x'_i, x_{i+1}, \dots, x_{|I|})|}{|x_i - x'_i|},$$

le sup étant pris pour  $x_1, x_2, \dots, x_{|I|}, x'_i \in \mathbb{R}$ .

Cette forme de dépendance à été établie par Bulinski et Suquet (2001). Les travaux de Bulinski et Sabanovitch (1998) démontrent que l'inégalité 1.2 est vérifiée dans le cas des v.a. positivement associées et négativement associées. Ces deux dernières impliquent alors la quasi-association.

**Théorème 1.1.** (*Bulinski et Shashkin (2007)*)

Soit  $\{X_t; t \in \mathbb{Z}\}$  une suite de v.a. associées, positivement associées ou négativement associées, telles que  $\mathbb{E}(X_t^2) < \infty$  pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ . Soit  $I$  et  $J$  deux sous-ensembles finis de  $\mathbb{Z}$ . Dans l'association positive ou négative.  $I$  et  $J$  sont supposés disjoints. Pour toutes fonctions lipschitziennes  $f : \mathbb{R}^{|I|} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}^{|J|} \rightarrow \mathbb{R}$ , nous avons

$$|Cov(f(X_i, i \in I), g(X_j, j \in J))| \leq \sum_{i \in I} \sum_{j \in J} Lip_i(f) Lip_j(g) |Cov(X_i, X_j)|.$$

◦ Pour la faible association, Doukhan et Louhichi (1999) choisissent de traiter la dépendance faible par une approche unifiée :

**Définition 1.1.** (*Doukhan et Louhichi (1999)*)

Si  $\{X_t; t \in \mathbb{N}\}$  est une suite de v.a.  $(\gamma, \varphi)$ -faiblement dépendante, s'il existe une suite  $(\gamma_r)_{r \in \mathbb{N}}$  décroissante vers zéro à l'infini, et une fonction  $\varphi : \mathbb{R}_+^2 \times \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ , telles que pour tous  $(u)$ -uplets  $(i_1, \dots, i_u)$  et  $(v)$ -uplets  $(j_1, \dots, j_v)$  avec

$$i_1 \leq \dots \leq i_u < i_u + r \leq j_1 \leq \dots \leq j_v,$$

alors

$$Cov(h(X_{i_1}, \dots, X_{i_u}), k(X_{j_1}, \dots, X_{j_v})) \leq \varphi(Lip(h), Lip(k), u, v) \gamma_r,$$

pour toutes fonctions  $h, k \in \mathcal{L}_1$  définies respectivement sur  $\mathbb{R}^u$  et  $\mathbb{R}^v$  ( $\mathcal{L}$  étant l'ensemble de toutes les fonctions lipschitziennes définies sur  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$  et  $\mathcal{L}_1$  le sous-ensemble défini par  $\mathcal{L}_1 = \{h \in \mathcal{L}; \|h\|_\infty \leq 1\}$ ).

$Lip(h)$  désigne le module de continuité lipschitzien de  $h$ , et

$$Lip(h) = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{\|x - y\|_1},$$

avec  $\|x\|_1 = |x_1| + \dots + |x_u|$  pour  $x = (x_1, \dots, x_u)$ .

## 1.4 Inégalités exponentielles

De multiples inégalités exponentielles existent dans l'estimation non paramétrique fonctionnelle, elles permettent de déterminer les vitesses de convergence des différents estimateurs.

La construction des inégalités exponentielles s'inspire principalement du théorème central limite et de la loi forte des grands nombres. Cette construction requiert l'utilisation de l'inégalité exponentielle de Markov, il s'agit de définir une borne supérieure idéale de la fonction génératrice des moments.

Les auteurs ont énoncé plusieurs types d'inégalités exponentielles selon le modèle utilisé. Dans le cas où les v.a. sont i.i.d., Bernstein (1924) propose une inégalité trouvant un usage particulier pour la démonstration de la convergence forte en estimation non paramétrique, celle de Hoeffding (1963) est adaptée pour les sommes de v.a. indépendantes et bornées et l'inégalité de Fuk Nagaev (1971) qui a pour avantage de n'exiger aucune condition sur les v.a. contrairement aux autres inégalités proposées.

Il existe d'autres types d'inégalités exponentielles dans le cas des données i.i.d.

Dans le cas des v.a.  $\alpha$ -mélangeantes, nous citerons quelques inégalités qui s'avèrent être les plus pertinentes dans les durées de vie à savoir celle de Roussas (1996) qui utilise la technique de Markov et celle de Bosq (1998) utilisant la technique de couplage.

Des travaux portant sur les inégalités exponentielles dans un modèle de données associées existent et sont relativement récents, nous citons l'inégalité de Ioannides et Roussas (1999) qui a permis de donner un taux de convergence pour des v.a. associées et obtiennent un taux de convergence dans la loi forte des grands nombres. Parmi les inégalités les plus récentes, celle d'Oliveira (2005) est appropriée pour les v.a. non bornées et celle de Douge (2007) utilise une décroissance géométrique des covariances.

Deux inégalités exponentielles ont un intérêt particulier dans l'association, il s'agit de celle de Neumann et Kallabis (2006) qui est une adaptation de l'inégalité de Bernstein aux données associées et celle de Doukhan et Neumann (2007) venue généraliser l'inégalité de Neumann et Kallabis (2006).

Dans cette thèse l'accent est mis sur l'inégalité exponentielle de Doukhan et Neumann (2007) qui s'adapte le mieux au modèle de données associées. En effet, la vitesse optimale du terme de fluctuation (terme aléatoire) représentant l'écart entre un estimateur donné et le paramètre étudié est

donnée par l'inégalité exponentielle extraite du théorème de Doukhan et Neumann (2007). A noter que cette inégalité s'applique sur des v.a. centrées.

**Théorème 1.2.** (Doukhan et Neumann (2007)) Soient  $X_1, \dots, X_n$  des v.a. réelles de moyenne nulle définies sur un espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  et  $\Psi : \mathbb{N}^2 \rightarrow \mathbb{N}$  définie par l'une des fonctions suivantes :

- (i)  $\Psi(u, v) = 2v$ ,
- (ii)  $\Psi(u, v) = u + v$ ,
- (iii)  $\Psi(u, v) = uv$ ,
- (iv)  $\Psi(u, v) = a(u + v) + (1 - a)uv, \forall a \in (0, 1)$ .

Soient les constantes  $K, M, L_1, L_2 < \infty, \mu, \nu \geq 0$  et  $u, v \geq 0$ . On suppose une suite non décroissante de coefficients réels  $(\Phi(n))_{n \geq 0}$  telle que pour tous  $u$ -uplets  $(s_1, \dots, s_u)$  et  $v$ -uplets  $(t_1, \dots, t_v)$  avec  $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_u \leq t_1 \leq \dots \leq t_v \leq n$ , l'inégalité suivante est vérifiée :

$$|Cov(X_{s_1} \cdots X_{s_u}, X_{t_1} \cdots X_{t_v})| \leq K^2 M^{u+v-2} ((u+v)!)^\nu \Psi(u, v) \Phi(t_1 - s_u),$$

avec

$$\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^k (\Phi(s)) \leq L_1 L_2^k (k!)^\mu, \forall k \geq 0$$

et

$$\mathbb{E}(|X_t|^k) \leq M^k (k!)^\nu, \forall k \geq 0.$$

Alors,  $\forall t \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n X_i \geq t\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2/2}{A_n + B_n^{1/(\mu+\nu+2)} t^{(2\mu+2\nu+3)/(\mu+\nu+2)}}\right)$$

où  $A_n \geq \sigma_n^2$  avec  $\sigma_n^2 := Var\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)$  et

$$B_n = 2(K \vee M)L_2 \left(\frac{2^{4+\mu+\nu} n K^2 L_1}{A_n} \vee 1\right).$$

## 1.5 La fonction quantile

Les statistiques robustes ont connu un intérêt grandissant depuis le papier fondateur de Huber (1967). Les problématiques de la robustesse proviennent d'une observation de l'estimateur de la moyenne. En effet, la moyenne empirique est grandement affectée par la présence de données aberrantes (outliers). Une estimation alternative serait celle du quantile qui est une estimation robuste. Le problème de l'estimation des quantiles est très répandu notamment pour des applications en médecine, en finance ou en fiabilité. Dans le domaine médical, les quantiles sont utilisés pour comparer un patient à des normes prédéfinies. Une application mécanique est la minimisation des quantiles en présence d'incertitudes gaussiennes ceci s'exprime mathématiquement à travers le quantile de

performance. Soit un échantillon de  $n$  observations d'une durée de survie représentée par une v.a.  $\{T_i; i = 1, \dots, n\}$  et soit  $p$  dans un intervalle  $(0, 1)$ . L'une des caractéristiques principales de cette v.a. étant sa f.d.r.  $F$  inconnue. Lorsque  $T$  est complètement observée, un estimateur naturel de  $F$  est la f.d.r. empirique donnée par

$$F_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}.$$

On définit  $\xi_p$  le quantile d'ordre  $p$  comme étant un réel tel que la probabilité qu'une réalisation de  $T$  soit inférieure ou égale à  $\xi_p$  soit  $p$ . Le quantile n'étant pas forcément unique.

Les propriétés de continuité et de limite de la f.d.r. permettent de définir la fonction quantile comme étant l'inverse de la f.d.r. soit

$$\xi_p = F^{-1}(p) = \inf\{t, F(t) \geq p\}.$$

Cette définition occupe une place prépondérante en probabilités et statistiques, elle est motivée par l'obtention de la médiane et des différents quartiles selon la valeur de  $p$  ( $p = 1/2$  étant la médiane,  $p = 1/4$  le premier quartile et  $p = 3/4$  le troisième quartile). Elle permet également la construction des intervalles de confiance dans  $\mathbb{R}$  pour une probabilité  $1 - p$ . Cette approche est utilisable pour la détection des valeurs considérées "hors-norme".

Dans le cas où les données sont complètement observées, la fonction quantile est estimée par l'inverse généralisée de la f.d.r.  $F_n^{-1}(p) = \inf\{t, F_n(t) \geq p\}$ . Néanmoins, ce schéma est rarement utilisé dans la pratique en raison de l'impossibilité d'observer complètement les durées de vie.

Bahadur (1966) fût le premier à exprimer l'estimateur du quantile comme une somme de v.a. (liée à la f.d.r. empirique) moyennant un terme d'erreur relativement petit. Cette expression, dite de Bahadur, permet d'étudier cet estimateur avec les méthodes classiques des processus empiriques. Cela remédie partiellement au fait que cet estimateur n'ait pas forcément de forme explicite. En effet, l'estimateur du quantile hérite de plusieurs propriétés de la f.d.r. empirique. En particulier lorsque les v.a.  $T_i$  sont i.i.d., le fait que la v.a.  $nF_n(t)$  soit une binomiale  $\mathcal{B}(n, F(t))$  permet d'utiliser l'inégalité exponentielle ponctuelle de type Hoeffding.

Serfling (1980) a montré que la vitesse de convergence de l'estimateur du quantile est similaire à celle de l'estimateur  $F_n$  dans le cas des données complètes (d'ordre  $n^{-1/2}$ ). Il a également présenté la normalité asymptotique de la différence  $F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)$ . Il a par ailleurs eu recours au théorème ci-dessous

**Théorème 1.1.** (*Serfling (1980)*)

Soit  $0 < \alpha < 1$ . Si  $F$  est continue dans un voisinage de  $\xi_p$ , alors pour tout  $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \varepsilon) \leq \exp(-2n\zeta_\varepsilon),$$

avec  $\zeta_\varepsilon = \min(F(\xi_p + \varepsilon) - \alpha, \alpha - F(\xi_p - \varepsilon))$ .

La preuve du théorème nécessite le constat suivant

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p)| > \varepsilon) &\leq \mathbb{P}(F_n^{-1}(p) > F^{-1}(p) + \varepsilon) + \mathbb{P}(F_n^{-1}(p) < F^{-1}(p) - \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}(F_n(F^{-1}(p) - \varepsilon) \geq \alpha) + \mathbb{P}(F_n(F^{-1}(p) - \varepsilon) < \alpha). \end{aligned}$$

Par cette inégalité, il devient à présent possible d'appliquer l'inégalité de Hoeffding sur les variables binomiales  $nF_n(\xi_p - \varepsilon)$  et  $nF_n(\xi_p + \varepsilon)$ . Bahadur (1966) a mis l'accent sur une importante représentation construite pour différents types d'estimateurs des quantiles de distributions. Ses résultats ont été adaptés par la suite aux données incomplètes mais ont continué à subsister comme étant des résultats de type Bahadur. Ci-après l'énoncé du théorème

**Théorème 1.2.** (*Bahadur(1966)*)

Soit  $F$  une f.d.r. deux fois dérivable de dérivée seconde continue et bornée dans un voisinage de  $\xi_p$  telle que  $f(\xi_p) > 0$ . On définit

$$R_n(\alpha) := F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p) + \frac{F_n(F^{-1}(p)) - \alpha}{f(F^{-1}(p))},$$

nous avons

$$R_n(\alpha) := O_{p.s.} \left( \frac{\log^{3/4}(n)}{n^{3/4}} \right),$$

lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

Par ce théorème, il est possible d'avoir la normalité asymptotique de  $\sqrt{n}(F_n^{-1}(p) - F^{-1}(p))$  en étudiant le processus empirique  $F_n(F^{-1}(p))$ . De ce constat découle le corollaire ci-après

**Corollaire 1.1.** *Sous les conditions du théorème 1.2, nous avons*

$$\sqrt{n}(F_n^{-1} - F^{-1}) \longrightarrow \mathcal{N} \left( 0, \frac{\alpha(1-\alpha)}{f^2(\xi_p)} \right).$$

Par le théorème de la limite centrale et le Théorème 1.2, nous pouvons établir la preuve du Corollaire 1.1 de sorte que

$$\sqrt{n}R_n(\alpha) := o_{p.s.}(1).$$

Par la suite, Kiefer (1967) est venu apporter du changement au Théorème 1.2 par l'apport de l'ordre optimal du reste  $R_n(\alpha)$  et en diminuant le nombre d'hypothèses.

De manière analogue aux données complètes, l'expression de l'estimateur de  $\xi_p$  dans le cadre de la censure est donnée par

$$\xi_{p,n} = F_n^{-1}(p) = \inf\{t, F_n(t) \geq p\}.$$

L'un des premiers à avoir utilisé l'estimation de la fonction quantile par l'inverse généralisé fut Sander (1975) dans le cas de données censurées et i.i.d. L'estimation de la médiane fut traitée par Reid (1981) et la représentation presque sûre par K.F. Cheng (1984). Par la suite, des estimateurs à noyau du quantile ont été donnés par Lio et Padgett (1986), Padgett et Thombs (1989) et Lio et Padgett (1987).

## 1.6 La fonction quantile conditionnelle

Lors d'études pratiques sur les durées de vie, nous nous intéressons à tous les facteurs pouvant influencer sur la durée de vie des patients (antécédents familiaux, taux de cholestérol, ...). Ces informations sont alors regroupées dans un vecteur de dimension  $d$  représentant la variable explicative  $\mathbf{X}$ . L'idée alors est de construire un estimateur non paramétrique des quantiles conditionnels de  $Y$  sachant  $\mathbf{X}$  par la méthode des noyaux. En outre, il arrive que la moyenne conditionnelle seule ne suffise pas à donner une représentation convenable de l'impact de la covariable  $\mathbf{X}$  sur la variable dépendante  $T$ . Il devient alors plus judicieux d'avoir recours aux quantiles conditionnels.

Contrairement à la fonction de régression et au mode conditionnel qui ne donnent aucune information sur la variable conditionnée, la f.d.r. conditionnelle nous donne la probabilité que la variable d'intérêt appartienne à un intervalle donné.

La régression par le quantile peut être un outil très efficace pour analyser les extrémités d'une distribution et sert en outre à connaître le comportement des queues d'une distribution. Dans la modélisation financière, cette régression quantile est un outil de finance quantitative qui est appliquée pour estimer les paramètres d'un modèle de valorisation des actifs immobilisés (CAPM) de certains titres. La régression quantile est très utile pour prédire les rendements quantiles inférieurs pour un stock donné, une exigence pour l'identification des futurs sous-performances ou sur-performances. La régression quantile peut également être utilisée pour comparer les coefficients entre quantiles, appelée régression inter-quantile, qui compare l'amplitude du coefficient d'un quantile à l'autre.

Par ailleurs, les quantiles conditionnels permettent la construction d'intervalles de prédiction et viennent compléter les informations sur le comportement des variables d'intérêt. Une autre application bien connue des quantiles conditionnels est la construction des courbes de référence servant à comparer un individu  $i$  à la population de référence afin de détecter si cet individu est "hors-norme" (si le point représentant cet individu se situe en dessous de la courbe de référence inférieure ou au dessus de la courbe de référence supérieure), ce résumé graphique est d'une grande utilité. De telles courbes sont utilisées dans les applications industrielles ainsi que dans les études biomédicales et biométriques.

Deux types d'approches ont été utilisés dans la littérature pour l'estimation des quantiles conditionnels, soient :

- L'approche directe : Basées sur l'utilisation de la fonction de perte introduite par Koenker et Bassett (1978). Classée en méthodes paramétriques et méthodes non paramétriques.

La méthode paramétrique est adaptée pour des échantillons de petites tailles, il s'agit de la régression quantile paramétrique. Dans cette approche la f.d.r. conditionnelle est supposée gaussienne. Néanmoins, cette méthode est fortement sensible aux valeurs aberrantes. Lorsque la régression quantile paramétrique n'est pas appropriée il est recommandé d'utiliser la régression quantile non paramétrique. De nombreuses méthodes non paramétriques existent, nous citerons la méthode de la régres-

sion constante locale ainsi que la méthode de la régression linéaire locale qui s'avère être meilleure que la régression constante.

- L'approche indirecte : consiste à utiliser l'inverse de la f.d.r.  $F(y|x)$ . Comportant des méthodes paramétriques dans lesquelles la f.d.r. dépend d'un paramètre estimé et les méthodes non paramétriques dans lesquels la forme de la f.d.r. est inconnue et de ce fait l'estimateur du quantile conditionnel est obtenu à partir d'estimateurs à noyaux.

Parmi les estimateurs à noyaux, nous citons :

- L'estimateur à double noyaux proposé par Yu et Jones (1998). Il s'agit d'un estimateur linéaire local qui a le défaut de prendre des valeurs en dehors de l'intervalle  $[0, 1]$  et peut ne pas être monotone.

- L'estimateur de Nadaraya-Watson pondéré est présenté par Hall et al.(1999). Ce dernier règle le soucis du biais et des effets de bords, préserve la monotonie et est à valeurs dans  $[0, 1]$ . Néanmoins cet estimateur n'est pas continu.

- L'estimateur de CAI et WANG (2008) est un estimateur à double noyau qui regroupe les qualités des estimateurs précédents.

Soit  $F(.|\cdot)$  la f.d.r. conditionnelle de  $T$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$ , le quantile conditionnel d'ordre  $p$  de la variable  $T$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  se définit de la manière suivante

$$\xi_p(\mathbf{x}) = F^{-1}(p|\mathbf{x}) = \inf\{t, F(t|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

La f.d.r. conditionnelle  $F(.|\mathbf{x})$  a pour estimateur à noyau la fonction continue notée  $F_n(.|\mathbf{x})$ . Ce qui définit l'estimateur naturel de  $\xi_p$  par

$$\xi_{p,n}(\mathbf{x}) = \inf\{t, F_n(t|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

L'un des pionniers de l'estimation non paramétrique des quantiles conditionnels fut Roussas (1969), il a montré la convergence et la normalité asymptotique des estimations à noyau dans le cas de processus de Markov. Pour des références sur le sujet, nous renvoyons tout particulièrement à Samanta (1989) qui étudia la consistance forte et la normalité asymptotique d'un estimateur à noyau du quantile conditionnel dans le cas i.i.d. et Stone (1977) montre la convergence faible des estimateurs à noyau pour des données i.i.d. et complètes. Honda (2000) traita l'estimation de la fonction quantile conditionnel pour des processus  $\alpha$ -mélangeants. Par ailleurs, Berline et al. (2001) ont établi des résultats sur la convergence et la normalité asymptotique de la fonction quantile conditionnel dans le cas dépendant pour le mélange fort. Plus récemment, Ould-Saïd (2006) a établi la convergence uniforme presque sûre du quantile conditionnel dans le cas de la censure droite pour des données i.i.d. et Ould-Saïd et Sadki (2008) ont présenté les propriétés asymptotiques des quantiles conditionnels dans le cas de la censure à droite pour des données i.i.d, ils ont utilisé la forme lissée de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel. Dans le cadre de la troncature, Lemdani et al. (2009) ont étudié les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quantile conditionnel dans le cas i.i.d., Ould-Saïd et

al. (2009) ont étendu ce travail au cas  $\alpha$ -mélangeant.

Considérons la présence de la covariable  $\mathbf{X}$ , la séquence observée sera alors  $\{(Y_i, \delta_i, \mathbf{X}_i), i = 1, \dots, n\}$ . De plus, les variables de censure  $\{C_i, i \geq 1\}$  seront supposées indépendantes du couple  $\{(\mathbf{X}_i, T_i), i \geq 1\}$ . L'écriture de notre estimateur lissé  $F_n(\cdot|\mathbf{x})$  est analogue à celle proposée par Ould-Saïd et Sadki (2008). Pour ce même estimateur, nous établissons la vitesse de convergence presque sûre sur un compact sous certaines hypothèses de régularité et dans le cadre de l'association. Nous déduisons la vitesse de convergence de l'estimateur du quantile conditionnel. Ces deux estimateurs convergent avec une même vitesse qui est de  $O\left\{(h_1^2 + h_2^2) + n^{-\theta} + \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}}\right\}$ ,  $h_1$  et  $h_2$  étant les fenêtres. Par des simulations, nous viendrons appuyer le bon comportement de notre estimateur.

Par ailleurs, d'autres hypothèses supplémentaires permettent de montrer la normalité asymptotique du processus  $\sqrt{nh_n^d}(F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x}))$  et par conséquent celle de  $\sqrt{nh_n^d}(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}))$ .

## 1.7 Résumé succinct des différents chapitres

Ce manuscrit est axé sur trois chapitres principaux.

- Le chapitre 1 permet de poser les fondements statistiques nécessaires liés à l'estimation non paramétrique, en insistant sur les principales définitions permettant de mettre l'accent sur le comportement du quantile simple ainsi que celui du quantile conditionnel. De plus, il apporte une définition brève des différents axes sur lesquels porte l'étude de notre estimateur. Sont rappelées les définitions liées aux données (dépendance, complétude, inégalité exponentielle ...).
- Le chapitre 2 aborde la définition ainsi que la convergence de la densité qui intervient dans l'écriture de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel. En outre, Il traite du problème de l'estimation de la f.d.r. conditionnelle ainsi que du quantile conditionnel. Quelques estimateurs connus intervenant dans les preuves des théorèmes et corollaires sont énoncés. L'accent est mis sur les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel sous un modèle de données complètes et associées. Enfin, Un historique des travaux réalisés dans notre cadre d'étude est donné.
- Le chapitre 3 réunit l'ensemble des travaux réalisés, soumis à publication et parus. Il s'agit de la consistance avec vitesse de convergence de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel dans le cadre des données censurées à droite présentant une structure de dépendance de type associé. Dans une seconde partie, la normalité asymptotique de notre estimateur est mise en évidence, nous présentons les détails des calculs et des preuves.

Ce travail présente par ailleurs des études de simulations conséquentes tant pour la partie consistance que la partie normalité asymptotique.

- Un dernier chapitre de conclusion permet de fixer les points mis en avant lors de cette thèse. Par ailleurs, en tirant avantage des résultats obtenus, nous proposons un aperçu des projets envisageables pour des études ultérieures liées à l'estimateur du quantile conditionnel.



# Chapitre 2

## Estimation de la fonction de répartition et du quantile conditionnels

### 2.1 La densité

Nous nous intéressons dans cette partie à l'estimation non paramétrique de la densité de probabilité basée sur la méthode du noyau appelée aussi méthode de Parzen-Rosenblatt (1962-1956), ces deux derniers furent les pionniers dans les travaux d'estimation de la densité. En outre, sa courbe donne des informations sur la loi utilisée.

Pour un échantillon  $\{X_i; i = 1, \dots, n\}$  de v.a. de densité  $l$  inconnue, l'estimateur à noyau de  $l$  est donné par la formule ci-dessous

$$l_n(x) = \frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - X_i}{h_n}\right),$$

avec  $h_n$  est la fenêtre qui représente une suite de réels positifs tendant vers zéro avec  $n$ ,  $K$  est un noyau borné et intégrable présentant les propriétés suivantes :

- $\int_{\mathbb{R}} K(u)du = 1$ ,
- $\int_{\mathbb{R}} uK(u)du = 0$ .

Parmi les noyaux fréquemment utilisés, nous citerons le noyau rectangulaire, triangulaire, noyau d'Epanechnikov et le noyau gaussien. Le choix du noyau bien qu'important n'a pas d'impact majeur sur la qualité de l'estimateur comme pourrait l'avoir le choix de la fenêtre, ce constat est directement démontrable par des simulations.

Dans le cadre multivarié, l'estimateur de Parzen-Rosenblatt devient

$$l_n(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh_n^d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n}\right).$$

Ici,  $x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d$  et  $K_d$  est une fonction multivariée dans  $\mathbb{R}^d$ .

De nombreux auteurs se sont penchés sur la consistance de la densité et ont énoncé le taux de convergence. Dans le cas des données associées, nous présentons les résultats de consistance établis par Menni et Tatachak (2016).

**Théorème 2.1.** (Menni et Tatachak (2016))

Sous des conditions de régularité, des conditions standards sur  $h_n$  et  $K$  ainsi qu'une décroissance géométrique des covariances, nous avons

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| = O \left( \max \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{nh_n^d}}, h_n^2 \right\} \right) \text{ p.s.}$$

**Preuve du Théorème 2.1** L'idée de la preuve est d'utiliser l'inégalité triangulaire ci-après :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| \leq \underbrace{\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - \mathbb{E}[l_n(\mathbf{x})]|}_{M_1} + \underbrace{\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbb{E}[l_n(\mathbf{x})] - l(\mathbf{x})|}_{M_2}$$

avec  $\Omega$  un compact dans  $\mathbb{R}^d$ . D'une part, on a

$$\begin{aligned} M_2 &= \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \frac{1}{nh_n^d} \mathbb{E} \left[ \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \right] - l(\mathbf{x}) \right| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \frac{1}{h_n^d} \left[ \int_{\mathbb{R}^d} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - t}{h_n} \right) l(t) dt \right] - l(\mathbf{x}) \right| \\ &= \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \int_{\mathbb{R}^d} K_d(u) l(\mathbf{x} - uh_n) du - l(\mathbf{x}) \right| \end{aligned}$$

Pour  $n$  assez grand et en utilisant un développement de Taylor à l'ordre 2 pour  $l(\cdot)$ , nous trouvons

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\mathbb{E}[l_n(\mathbf{x})] - l(\mathbf{x})| = O(h_n^2).$$

D'autre part, pour calculer  $M_1$ , nous posons

$$\Delta_i(\mathbf{x}) = K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) - \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_n} \right) \right]$$

Les détails des calculs sont similaires aux calculs de la consistance de l'estimateur du quantile conditionnel sous un modèle associé et censuré (Chapitre 3).

La convergence uniforme presque sûre de l'estimateur de la densité avec vitesse de convergence a été donnée par plusieurs auteurs. Nous citerons les travaux de Cai et Roussas (1992) lesquels ont trouvé un taux égal à  $O \left( \max \left\{ \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n^2}}, h_n \right\} \right)$  pour des données  $\alpha$ -mélangeantes. Ould Saïd (2006) avait donné un taux de convergence égal à  $O \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}} \right)$  pour des données i.i.d. dans un cadre unidimensionnel. Par ailleurs, Roussas (1991) a étudié la consistance uniforme forte des estimateurs à noyau des dérivées d'ordre  $r$  de la densité pour des suites strictement stationnaires et Masry (2002) a étendu cette étude au cas multivarié quant à Ferrani et al. (2014), ils ont étudié l'estimation non paramétrique de la densité dans le cadre de données associées et censurées à droite. Nous citons

également les travaux de Douge (2007) qui donna une nouvelle inégalité exponentielle et Oliveira (2012) qui a établi la convergence uniforme presque sûre de l'estimateur à noyau de la densité dans un cadre unidimensionnel pour des données associées. L'écriture de notre estimateur comporte la densité marginale dans le cas multivarié.

## 2.2 La fonction quantile conditionnel dans le cas complet

Nous considérons une suite de v.a  $\{T_i; i = 1, \dots, n\}$  représentant les durées de vie de  $n$  individus pratiquement identiques, strictement stationnaire, associée, caractérisée par une même f.d.r continue et inconnue  $F$ . Il est d'usage que ces v.a. dépendent d'autres variables, nous évoquons alors le quantile conditionnel ou quantile de régression et notons la présence du vecteur aléatoire  $\mathbf{X}$  de dimension  $d$  représentant la covariable associée et strictement stationnaire. Il arrive que la moyenne conditionnelle seule ne permette pas de représenter de façon optimale l'impact de la covariable  $\mathbf{X}$  sur la variable d'intérêt  $T$ . Dans ce cas précis, il devient plus intéressant d'étudier les quantiles conditionnels. Une application pertinente des quantiles et des quantiles conditionnels en finance est la prévision des valeurs futures du marché, la volatilité ou le calcul de la VaR (Value at Risk). En outre, la prévision du risque dépend de la perte et de l'investissement et la VaR n'est rien d'autre que le quantile d'ordre  $\alpha$ . L'identification et la qualification du risque a connu de l'ampleur notamment après la crise immobilière de 2007 qui a fait chuter les places boursières mondiales. Cette connaissance du risque est à présent fortement recommandée par les comités de Bâle et Bâle II.

En pratique, la f.d.r conditionnelle de  $T$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  est inconnue. Elle s'écrit sous la forme

$$F(t|\mathbf{x}) = \mathbb{P}\{T \leq t | \mathbf{X} = \mathbf{x}\} = \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{T \leq t\}} | \mathbf{X} = \mathbf{x}].$$

Il est à noter également que la f.d.r conditionnelle de  $T$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  s'écrit comme le rapport de deux fonctions

$$F(t|\mathbf{x}) = \frac{F_1(\mathbf{x}, t)}{l(\mathbf{x})},$$

où  $F_1(.,.)$  est la dérivée par rapport à  $\mathbf{x}$  de la loi jointe  $F(.,.)$  et  $l(.)$  est la densité marginale de  $\mathbf{X}$ . L'estimateur à noyau de la f.d.r conditionnelle  $F(t|\mathbf{x})$  que l'on notera  $F_n(t|\mathbf{x})$  s'obtient à partir des poids de Nadaraya-Watson définis par

$$\omega_{in}(\mathbf{x}) = \frac{K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}} \right)}{\sum_{j=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_{n,1}} \right)} = \frac{1}{nh_{n,1}^d} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}} \right),$$

où  $K_d$  est une fonction noyau prenant ses valeurs de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ .  $h_{n,1}$  est une suite de réels positifs tendant vers 0 lorsque  $n$  tend vers l'infini. Le dénominateur n'est rien d'autre que l'estimateur de

Parzen-Rozenblatt de la densité  $l(\mathbf{x})$  de la covariable.

Ce qui permet d'écrire

$$F_n(t|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_{in}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}} =: \frac{F_{1,n}(\mathbf{x}, t)}{l_n(\mathbf{x})}. \quad (2.1)$$

Notons que pour un choix de  $\omega_{in} = 1/n$ , on obtient l'expression classique de la f.d.r empirique. Nous considérons la version lissée de l'estimateur de (2.1) qui s'obtient en remplaçant la fonction indicatrice par une fonction de lissage qui n'est rien d'autre qu'une densité de probabilité symétrique, on parle alors de l'estimation par la méthode du noyau produit dans laquelle  $F_{1,n}(\mathbf{x}, t)$  est donnée par

$$F_{1,n}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{nh_{n,1}^d} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}} \right) \int_{-\infty}^t K_0 \left( \frac{u - T_i}{h_{n,2}} \right) du,$$

où  $K_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction noyau vérifiant  $\int_{\mathbb{R}} K_0(z) dz = 1$ , la fenêtre  $h_{n,2}$  n'est pas nécessairement égale à  $h_{n,1}$ , le choix de ces deux fenêtres a une grande influence sur la qualité de notre estimateur, Yu et Jones (1998) ont proposé une méthode empirique pour le choix des fenêtres. Dans ce qui suit, nous noterons  $h_1 := h_{n,1}$  et  $h_2 := h_{n,2}$ . En l'absence de censure, l'estimateur lissé à noyau  $F_n(t|\mathbf{x})$  de  $F(t|\mathbf{x})$  est alors donné par

$$F_n(t|\mathbf{x}) = \frac{\frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - T_i}{h_2} \right)}{\frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right)}, \quad (2.2)$$

avec  $H$  est le noyau intégré.

L'estimateur de la densité de probabilité conditionnelle  $f(t|\cdot)$  est défini par

$$f_n(t|\mathbf{x}) = \frac{f_n(\mathbf{x}, t)}{l_n(\mathbf{x})}. \quad (2.3)$$

La dérivée partielle première par rapport à la deuxième composante sera donnée par

$$f_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial F_{1,n}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{nh_1^d h_2} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right)$$

où  $H^{(1)}$  est la première dérivée de  $H$ . Par un développement de Taylor de  $F_n(\cdot|\cdot)$  au voisinage de  $\xi_p$ , on obtient

$$F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})) f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}),$$

tel que  $\xi_{p,n}^*$  est entre  $\xi_p$  et  $\xi_{p,n}$ . Cette approche donne les résultats asymptotiques de  $(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}))$  à partir du comportement de  $(F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}))$ . Si  $f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = 0$ , nous devons accroître l'ordre dans le développement de Taylor et modifier les preuves en conséquence.

L'estimation non paramétrique du quantile conditionnel se déduit de celle de la f.d.r conditionnelle.

En effet, il suffira d'inverser cette dernière pour obtenir l'estimateur du quantile conditionnel.

Soit  $p$  dans l'intervalle  $(0, 1)$ , le quantile conditionnel d'ordre  $p$  de  $F$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  s'écrit

$$\xi_p(\mathbf{x}) = F^{-1}(p|\mathbf{x}) = \inf\{t, F(t|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

Nous souhaitons construire un estimateur à noyau du quantile conditionnel  $\xi_{p,n}(\mathbf{x})$  à partir de (2.2). Cet estimateur naturel s'écrira sous la forme

$$\xi_{p,n}(\mathbf{x}) = \inf\{t, F_n(t|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

De nombreux auteurs se sont penchés sur l'étude de l'estimation du quantile conditionnel dans le cadre des données complètes. Roussas (1969) a été l'un des pionniers sur le sujet en présentant la convergence ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur du quantile conditionnel sous des conditions de Markov quant à Xiang (1996), il a établi la normalité asymptotique de l'estimateur du quantile conditionnel dans le cas i.i.d. Par ailleurs, Gannoun (1989) a énoncé les propriétés de l'estimateur de Collomb dans le cas de données i.i.d. puis  $\alpha$ -mélangeantes. Il a par ailleurs donné la convergence uniforme. La consistance faible dans le cas où les v.a. sont i.i.d. a été démontrée par Stone (1977). Dans le cas i.i.d., Samanta (1989) a présenté des résultats de consistance forte et de normalité asymptotique pour ledit estimateur. Les travaux sur les données associées pour l'estimateur du quantile conditionnel sont assez récents et concernent particulièrement le cas des données incomplètes. Dans ce qui suit, nous présentons les propriétés asymptotiques du quantile conditionnel dans le cas complet et associé, ces résultats n'ont par ailleurs pas été étudiés auparavant.

## 2.3 Les propriétés asymptotiques du quantile conditionnel dans le cas complet et associé

Soient  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  deux ensembles compacts définis respectivement sur  $\Omega_0$  et  $[0, \tau]$  tels que  $\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d / l(\mathbf{x}) \geq m_0 := \inf_x l(\mathbf{x}) > 0\}$  et  $\tau < \tau_G$  avec  $\tau_G := \sup\{y; G(y) < 1\}$  pour une f.d.r  $G$  quelconque. Dans ce qui suit,  $m$  dénotera une constante pouvant prendre différentes valeurs.

### 2.3.1 Hypothèses et résultats

Il est d'usage d'utiliser les hypothèses citées ci-après

**A1.** Les fenêtres  $h_1$  et  $h_2$  satisfont

- (i)  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $nh_1^{2\alpha+d(1-\alpha)} \rightarrow +\infty$  avec  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\frac{\log^5 n}{nh_1^d} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,
- (ii)  $h_2 \rightarrow 0$  et  $nh_1^d h_2 \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , (iii)  $nh_1^d h_2^4 \rightarrow 0$  et  $nh_1^{d+4} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ;

**A2.** Le noyau  $K_d$  est une densité de probabilité bornée, à support compact et admet :

- (i)  $K_d$  est Hölderienne, continue d'ordre  $\alpha$ ,
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}^d} u_j K_d(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 0$ , pour tout  $j = 1, \dots, d$  avec  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^\top$ ,
- (iii) Le noyau  $K_d$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 bornées;

**A3.** La fonction  $H$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Par ailleurs, sa dérivée  $H^{(1)}$  est supposée à support compact et satisfait les propriétés d'un noyau de second ordre et

$$(i) \int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha H^{(1)}(t) dt < +\infty;$$

**A4.** La densité marginale  $l(\cdot)$  est bornée et deux fois différentiable avec :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \frac{\partial^k l(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j^{k-1}}(x) \right| < \infty \text{ pour } i, j = 1, \dots, d \text{ et } k = 1, 2;$$

**A5.** La densité de probabilité conjointe  $f(\cdot, \cdot)$  est bornée et trois fois continûment différentiable et

(i) La f.d.r conditionnelle  $F(t|x)$  satisfait la condition de lipschitz d'ordres  $u_1$  et  $u_2$  aux voisinages de  $\mathbf{x}$  et  $t$  avec

$$\forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \Omega^2, \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, |F(t_1|\mathbf{x}_1) - F(t_2|\mathbf{x}_2)| \leq m(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{u_1} + |t_1 - t_2|^{u_2}),$$

$$(ii) \forall \mathbf{x} \in \Omega, \int_{\mathbb{R}} |t| f(t|\mathbf{x}) dt < +\infty;$$

**A6.** La densité de probabilité conjointe  $l_{i,j}(\cdot, \cdot)$  de  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$  est bornée ;

**A7.** La densité de probabilité conjointe  $f(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  de  $(\mathbf{X}_i, T_i, \mathbf{X}_j, T_j)$  est bornée ;

**A8.** Définissons  $\Lambda_{ij}$  comme suit :

$$\Lambda_{ij} := \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d Cov(X_i^k, X_j^l) + 2 \sum_{k=1}^d Cov(X_i^k, T_j) + Cov(T_i, T_j),$$

avec  $X_i^k$  la  $k$ -ième composante de  $\mathbf{X}_i$ , telle que pour tous  $j \geq 1$  et  $r > 0$

$$\sup_{i: |j-i| \geq r} \Lambda_{ij} =: \rho(r) \leq \gamma_0 e^{-\gamma r}, \text{ pour tous } \gamma_0, \gamma > 0.$$

Pour la partie normalité asymptotique, nous faisons usage de la condition supplémentaire citée ci-après

**N1.** Soit  $0 < p_n < n$ ,  $0 < q_n < n$  des entiers tendant vers  $\infty$  avec  $n$  tels que  $p_n + q_n \leq n$ . Soit  $k_n$  l'entier le plus large pour lequel  $k_n(p_n + q_n) \leq n$  et

$$(i) \frac{k_n p_n}{n} \rightarrow 1 \quad (ii) p_n h_1^d \rightarrow 0 \text{ et } \frac{p_n^2}{n h_1^d} \rightarrow 0 \quad (iii) \frac{e^{-\gamma q_n}}{h_1^{d+2} h_2^2} \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

**Remarque 2.1.** • L'hypothèse **A1** permet de choisir les fenêtres, ici  $h_1$  n'est pas nécessairement égal à  $h_2$ . L'hypothèse **A2** est classique dans l'estimation du noyau. L'hypothèse **A3** donne des conditions sur le noyau intégré. Pour ce qui est des hypothèses **A4-A7**, elles sont courantes dans le cadre de l'estimation non paramétrique sous la condition de dépendance. Pour le calcul de la covariance dans le cadre de l'association, on utilisera la condition **A8**. La condition **N1** est propre à la technique des grands et des petits blocs.

• Les hypothèses **A1(iii)**, **A2(iii)**, **A3(i)** et **A5(i)** et (ii) concernent la partie normalité asymptotique.

La convergence uniforme presque sûre de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel donnée dans le Corollaire 2.1 découle de celle de la f.d.r. conditionnelle énoncée dans le Théoreme 2.2.

**Théorème 2.2.** *Sous les hypothèses A1-A8, pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})| = O \left\{ (h_1^2 + h_2^2) + \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right\}, \text{ p.s.}$$

**Corollaire 2.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 2.2, et pour tout  $p \in (0, 1)$  fixé et  $\mathbf{x} \in \Omega$ , si  $\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$ , alors pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})| = O \left\{ (h_1^2 + h_2^2) + \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right\}, \text{ p.s.}$$

Le Théorème 2.3 traite la normalité asymptotique de (2.2) convenablement normalisé. Par le théorème de Slutsky, la normalité asymptotique de  $(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}))$  dans le Corollaire 2.2 se déduit de la normalité asymptotique de  $(F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}))$  et la convergence en probabilité de  $f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x})$ .

**Théorème 2.3.** *Sous les hypothèses A1-A8 et N1, pour tous  $\mathbf{x} \in \Omega_0$  et  $l(\mathbf{x}) > 0$ , nous avons*

$$\sqrt{nh_1^d}(F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

où  $\mathcal{L}$  est la convergence en loi. Le terme de la variance est donné par

$$\sigma^2(\mathbf{x}, t) = \frac{\kappa F(t|\mathbf{x})(1 - F(t|\mathbf{x}))}{l(\mathbf{x})}$$

et  $\kappa = \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{u}) d\mathbf{u} < +\infty$ .

**Corollaire 2.2.** *En assumant que  $p \in (0, 1)$ . Sous les conditions du Théorème 2.3 et pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega_0$  tel que  $f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \neq 0$ , nous avons*

$$\sqrt{nh_1^d}(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

avec

$$\sigma_\xi^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x})) = \frac{\sigma^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))}{f^2(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})}.$$

### 2.3.2 Etude de simulation

Le but de cette partie est de mettre en évidence la performance de l'estimateur du quantile conditionnel. On choisit une probabilité ( $p = 1/2$ ) et on se place dans un modèle unidimensionnel. Les variables  $T$  et  $X$  sont générées comme suit :

- Génération de  $n + 1$  v.a. i.i.d.  $Z_i \sim \Gamma(5, 0.5)$  ;
- Génération de  $n$  v.a. i.i.d.  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$  ;

– Génération de la  $n$ -séquence associée  $(X_i, T_i)$  suivante

$$\begin{cases} X_i = \exp(Z_{i-1} + Z_{i-2})/2, \\ T_i = 3X_i/2 + 0.45 \varepsilon_i. \end{cases}$$

avec  $X_i \sim \Gamma(10, 0.5)$ . Il est possible de démontrer que le modèle choisi est associé en se basant sur les travaux de Chaubey et al. (2011) et les exemples de modèles associés donnés par Nagaraj et Reddy (1993).

Par un choix approprié de la fenêtre  $h$ , le procédé est répété  $B = 300$  fois pour différentes tailles de l'échantillon. Nous calculons l'estimateur du quantile conditionnel pour des valeurs de  $x$  dans l'intervalle  $[1.5, 4]$ . Nous illustrons la performance de notre estimateur par un calcul de GMSE (Global Mean Square Error), il représente le MSE global. Les très faibles valeurs obtenues montrent la bonne performance de notre estimateur.

Les graphiques obtenus dans la Figure 2.1 montrent que la performance de l'estimateur n'est pas

TABLE 2.1 – Valeurs du  $GMSE$  pour  $\xi_{p,n}$  avec  $p = 0.5$  dans le cas complet

$n = 50$	$n = 100$	$n = 500$
0.0052	0.0020	0.0010

très sensible à la taille de l'échantillon contrairement au cas des données incomplètes. En effet, on constate que la qualité de l'ajustement est bonne quelque soit la taille de notre échantillon.

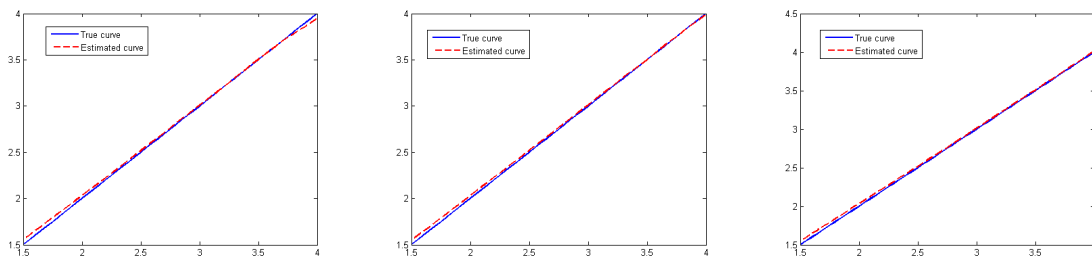


FIGURE 2.1 – Cas complet :  $n = 50$ ,  $n = 100$  et  $n = 500$  respectivement



### 2.3.3 Preuves

Les preuves qui suivent se rapprochent de celles présentées par Djelladj et Tatachak (2018), elles seront adaptées au cas de données complètes dans lesquelles le coefficient de pénalisation dû à l'effet de la censure ne figure pas dans l'écriture de l'estimateur du quantile conditionnel.

#### 2.3.3.1 Partie consistance

**Preuve du Théorème 2.2** Pour établir la preuve du Théorème 2.2, nous faisons usage de la décomposition ci-après

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} (l_n(\mathbf{x}))} \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)] - F_1(\mathbf{x}, t)| \right. \\ &\quad + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)]| \\ &\quad \left. + m_0^{-1} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} F_1(\mathbf{x}, t) \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| \right\} \\ &=: \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_3. \end{aligned}$$

Notons que

$$\frac{1}{l_n(\mathbf{x})} \leq \frac{1}{m_0 - \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})|}.$$

Dans un premier temps, nous énonçons la démonstration du terme de fluctuation  $\mathcal{L}_2$ . Nous utiliserons dans nos démonstrations l'expression suivante :

$$\Delta_i(\mathbf{x}, t) = K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - T_i}{h_2} \right) - \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H \left( \frac{t - T_1}{h_2} \right) \right],$$

Il est clair que

$$F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)] = \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}, t). \quad (2.4)$$

Nous démontrons la proposition ci-après pour faire appel à l'inégalité exponentielle (Théorème 1 dans Doukhan et Neumann (2007)) servant à donner la preuve du terme aléatoire.

**Proposition 2.1.** *Soient  $\Delta_1(\mathbf{x}, t), \Delta_2(\mathbf{x}, t), \dots, \Delta_n(\mathbf{x}, t)$  définis comme ci-dessus. Alors, il existe les constantes  $M, L_1, L_2, \mu \geq 0, \lambda \geq 0$  et une séquence non décroissante de coefficients réels  $(\Upsilon(n))_{n \geq 0}$  tels que pour tous  $p$ -tuplets  $(s_1, \dots, s_p)$  et tous  $q$ -tuplets  $(v_1, \dots, v_q)$  avec  $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq v_1 \leq \dots \leq v_q \leq n$ , nous avons*

$$a) \text{Cov} \left( \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i(\mathbf{x}, t), \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j(\mathbf{x}, t) \right) \leq m^{p+q} h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} pq \Upsilon(v_1 - s_p),$$

$$b) \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{k_0} \Upsilon(s) \leq L_1 L_2^{k_0} (k_0!)^\mu, \forall k_0 \geq 0,$$

$$c) \mathbb{E} [|\Delta_i(\mathbf{x}, t)|^{k_0}] \leq (k_0!)^\lambda M^{k_0}.$$

**Preuve de la Proposition 2.1** Le lemme ci-dessous sera utilisé pour établir la preuve de la Proposition 2.1.

**Lemme 2.1.** *Sous les conditions A2, A5, A7 et A8, nous avons*

$$\begin{aligned} i) \text{Cov} \left( \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i(\mathbf{x}, t), \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j(\mathbf{x}, t) \right) &=: C_1 \leq m^{p+q} h_1^{-2} h_2^{-2} p q \rho(v_1 - s_p), \\ ii) \text{Cov} \left( \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i(\mathbf{x}, t), \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j(\mathbf{x}, t) \right) &=: C_2 \leq m^{p+q} h_1^{2d} h_2^2. \end{aligned}$$

**Preuve du Lemme 2.1** Pour établir la preuve du Lemme 2.1, nous aurons besoin du Théorème 5.3, p.89 dans Bulinski et Shashkin (2007), soit

$$\text{Cov}(\Phi_p, \Phi_q) \leq \sum_{i=s_1}^{s_p} \sum_{j=v_1}^{v_q} \text{Lip}_i(\Phi_p) \text{Lip}_j(\Phi_q) \Lambda_{ij}, \quad (2.5)$$

avec

$$\Phi_p =: \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i \quad \text{et} \quad \Phi_q =: \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j.$$

Notons que

$$\text{Lip}_i(\Phi_m) = \sup_{\substack{z_1, \dots, z_m, z'_i \in \mathbb{R} \\ z_i \neq z'_i}} \frac{|\Phi_m(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_m) - \Phi_m(z_1, \dots, z_{i-1}, z'_i, z_{i+1}, \dots, z_m)|}{|z_i - z'_i|},$$

avec  $\Phi_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\text{Lip}(\Phi_m)$  représente le module de continuité lipschitzien de  $\Phi_m$ , à savoir

$$\text{Lip}(\Phi_m) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|\Phi_m(\mathbf{x}) - \Phi_m(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1},$$

avec  $\|(z_1, \dots, z_n)\|_1 = |z_1| + \dots + |z_n|$ .

De (2.5) et la condition A8, par stationnarité nous obtenons

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\Phi_p, \Phi_q) &\leq \frac{M^2}{h_1^2 h_2^2} \left( \frac{2}{\overline{G}(\tau)} \right)^{p+q} \|K_d\|_\infty^{p+q-2} \sum_{i=s_1}^{s_p} \sum_{j=v_1}^{v_q} \Lambda_{ij} \\ &\leq \frac{m^{p+q}}{h_1^2 h_2^2} p q \rho(v_1 - s_p). \end{aligned}$$

avec  $M = \max \left\{ h_2 \text{Lip}(K) \|K\|_\infty^{d-1}, h_1 (\text{Lip}(H) + h_2) \|K_d\|_\infty \right\}$ .

Ce qui achève la preuve (i).

Nous passons à présent à la preuve de (ii). Nous avons

$$\begin{aligned}
 & |Cov(\Delta_i(\mathbf{x}, t), \Delta_j(\mathbf{x}, t))| \\
 & \leq \left| \int_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^2} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - v}{h_2} \right) \right. \\
 & \quad \times f(\mathbf{u}, s, \mathbf{r}, v) \mathbf{d}\mathbf{u} \mathbf{d}s \mathbf{d}\mathbf{r} \mathbf{d}v \left. \right| \\
 & + \left| \int_{\mathbb{R}^{d+1}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) f(\mathbf{u}, s) \mathbf{d}\mathbf{u} \mathbf{d}s \right. \\
 & \quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^{d+1}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - v}{h_2} \right) f(\mathbf{r}, v) \mathbf{d}\mathbf{r} \mathbf{d}v \right|.
 \end{aligned}$$

Sous les conditions **A2**, **A5** et **A7** et un changement de variable, nous avons

$$|Cov(\Delta_i(\mathbf{x}, t), \Delta_j(\mathbf{x}, t))| = O(h_1^{2d} h_2^2). \quad (2.6)$$

On déduit par un simple calcul la preuve de la deuxième partie du Lemme 2.1.  $\square$

Posons maintenant  $\Upsilon(\cdot) = \rho^{\frac{d}{2d+2}}(\cdot)$  et faisons un calcul simple à partir des points (i) et (ii) du Lemme 2.1, à savoir

$$\begin{aligned}
 C_1^{\frac{d}{2d+2}} C_2^{\frac{d+2}{2d+2}} & \leq m^{p+q} h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} (pq)^{\frac{d}{2d+2}} \rho^{\frac{d}{2d+2}} (v_1 - s_p) \\
 & \leq m^{p+q} h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} pq \Upsilon(v_1 - s_p).
 \end{aligned}$$

Ce calcul aboutit directement sur la preuve de la partie (a) de la Proposition 2.1. De plus, sous la condition **A8** et en choisissant  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $L_1 = L_2 = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\gamma d}{2d+2}}}$ , les preuves dans (b) et (c) sont similaires à celles utilisées dans la démonstration de la Proposition 8 dans Doukhan et Neumann (2007). La preuve de la Proposition 2.1 est ainsi terminée.  $\square$

Dans ce qui suit et pour démontrer la convergence du terme de fluctuation, nous faisons appel aux techniques de recouvrement d'un compact.  $\Omega$  peut être recouvert par un nombre fini  $d_{x,n}$  de boules  $B_k(\mathbf{x}_k, a_n^d)$  centrées en  $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,d})$  et  $\mathcal{C}$  est divisé en  $d_{t,n}$  sous-intervalles  $J_1, \dots, J_{d_{t,n}}$  de longueurs  $b_n$ , centrés en  $t_\ell$ . Pour tous  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in \mathcal{C}$ , il existe des entiers  $k \in \{1, \dots, d_{x,n}\}$  et  $\ell \in \{1, \dots, d_{t,n}\}$  tels que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq a_n^d$  et  $|t - t_\ell| \leq b_n$ , avec  $a_n^d = (n^{-1} h_1^{2\alpha+d})^{1/2\alpha}$  et  $b_n = (n h_1^d)^{-1/2} h_2$ . Alors, comme  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  sont bornés, soient  $c_1$  et  $c_2$  des constantes positives satisfaisant  $d_{x,n} a_n^d \leq c_1$  et  $d_{t,n} b_n \leq c_2$ .

**Remarque 2.2.** Pour établir nos résultats, nous faisons appel au Lemme 2.2 traitant la convergence uniforme forte avec taux de convergence de l'estimateur à noyau  $l_n(\cdot)$ , démontrée précédemment (voir le Lemme 3 dans Menni et Tatachak (2016)), nous rappellerons le résultat sans preuve.

**Lemme 2.2.** Sous les conditions **A1**, **A2**, **A4**, **A6** et **A8**, pour  $n$  assez grand nous avons

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| = O \left( \max \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{n h_1^d}}, h_1^2 \right\} \right) \text{ p.s.}$$

Nous considérons la décomposition ci-après

$$\begin{aligned}
& \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)]| \\
& \leq \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \sup_{\mathbf{x} \in B_k} \sup_t |F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t)| \\
& \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \sup_{\mathbf{x} \in B_k} \sup_t |\mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t)] - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)]| \\
& \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \sup_{t \in J_\ell} |F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) - F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)| \\
& \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \sup_{t \in J_\ell} |\mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)] - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t)]| \\
& \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} |F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)]| \\
& =: W_1 + W'_1 + W_2 + W'_2 + W_3.
\end{aligned}$$

Par un SLLN pour des séquences associées (voir Newman (1984)) et l'hypothèse **A2(i)**, nous aurons pour  $W_1$  et  $W'_1$

$$\begin{aligned}
& |F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t)| \\
& = \left| \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n H\left(\frac{t - T_i}{h_2}\right) \left[ K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) - K_d\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) \right] \right| \\
& \leq \frac{m \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^\alpha}{h_1^d h_1^\alpha} \\
& \leq m \frac{a_n^{d\alpha}}{h_1^{d+\alpha}} \\
& = O\left(\frac{1}{\sqrt{nh_1^d}}\right). \tag{2.7}
\end{aligned}$$

Pour  $W_2$  et  $W'_2$ , nous utilisons l'hypothèse **A3** et le Lemme 2.2. Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
& |F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) - F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)| \\
& = \left| \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) \left[ H\left(\frac{t - T_i}{h_2}\right) - H\left(\frac{t_\ell - T_i}{h_2}\right) \right] \right| \\
& \leq m \frac{|t - t_\ell|}{h_2} \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) \\
& \leq m \frac{b_n}{h_2} l_n(\mathbf{x}_k) \\
& = O\left(\frac{1}{\sqrt{nh_1^d}}\right). \tag{2.8}
\end{aligned}$$

Pour ce qui est du terme  $W_3$ , nous aurons besoin d'une inégalité exponentielle établie pour des v.a. faiblement dépendantes (voir Théorème 1, p.19 dans Doukhan et Neumann (2007)). Pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell) \geq \varepsilon\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2/2}{A_n + B_n^{1/(\mu+\lambda+2)} \varepsilon^{(2\mu+2\lambda+3)/(\mu+\lambda+2)}}\right), \tag{2.9}$$

où  $A_n$  est un nombre quelconque plus grand que  $\sigma_n^2$  et

$$\sigma_n^2 := \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right) \text{ et } B_n = 2mL_2 \max \left( \frac{2^{4+\mu+\lambda} m n h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} L_1}{A_n}, 1 \right). \quad (2.10)$$

Notons que  $\sigma_n^2 = (nh_1^d)^2 \text{Var}(F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell))$ ,

avec

$$\begin{aligned} (nh_1^d)^2 \text{Var}(F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)) &= n \text{Var}(K_{d,\mathbf{x}_k,1} H_{t_\ell,1}) + \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{Cov}(K_{d,\mathbf{x}_k,i} H_{t_\ell,i}, K_{d,\mathbf{x}_k,j} H_{t_\ell,j}) \\ &=: V + S. \end{aligned}$$

Calculons d'abord  $V$ .

$$\begin{aligned} V &= n \mathbb{E} \left[ K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H^2 \left( \frac{t_\ell - T_1}{h_2} \right) \right] - n \mathbb{E}^2 \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H \left( \frac{t_\ell - T_1}{h_2} \right) \right] \\ &=: n(D_1 - D_2). \end{aligned}$$

Sous les conditions **A1(i)** et **A2**, par un changement de variable et un développement de Taylor au voisinage de  $\mathbf{x}_k$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} D_1 &\leq \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{u}}{h_1} \right) \int_{\mathbb{R}} f(\mathbf{u}, v) dv d\mathbf{u}, \quad \text{car } H(\cdot) \text{ est une f.d.r;} \\ &= O(h_1^d). \end{aligned}$$

De même pour  $D_2$ , les hypothèses **A1(i)**, **A2** et **A4** nous donnent  $D_2 = O(h_1^{2d})$ . Par conséquent,  $V = O(nh_1^d)$ .

Le calcul de  $S$  requiert l'utilisation des techniques de Masry (1986). Soit

$$B_1 = \{(i, j); 1 \leq |i - j| \leq \eta_n\} \text{ et } B_2 = \{(i, j); \eta_n + 1 \leq |i - j| \leq n - 1\},$$

avec  $\eta_n = o(n)$ . Ceci aboutit à l'écriture ci-dessous

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{B_1} \text{Cov}(K_{d,\mathbf{x}_k,i} H_{t_\ell,i}, K_{d,\mathbf{x}_k,j} H_{t_\ell,j}) + \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \text{Cov}(K_{d,\mathbf{x}_k,i} H_{t_\ell,i}, K_{d,\mathbf{x}_k,j} H_{t_\ell,j}) \\ &=: S_1 + S_2. \end{aligned}$$

De (2.6), il est clair que

$$S_1 = n\eta_n O(h_1^{2d} h_2^2) = O(n\eta_n h_1^{2d} h_2^2). \quad (2.11)$$

Pour ce qui est du terme  $S_2$ , nous utilisons le résultat *a)* de la Proposition 2.1 et la condition **A8**,

on obtient

$$\begin{aligned}
S_2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} m^2 h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \rho^{\frac{d}{2d+2}} (|i-j|) \\
&\leq nm^2 h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \sum_{B_2} \gamma_0^{\frac{d}{2d+2}} e^{-\frac{\gamma|i-j|d}{2d+2}} \\
&\leq nm^2 h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \int_{\eta_n}^n e^{-\frac{\gamma ud}{2d+2}} du \\
&= O\left(nh_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} e^{-\frac{\gamma \eta_n d}{2d+2}}\right). \tag{2.12}
\end{aligned}$$

Par **A1** et en prenant  $\eta_n = O(h_1^{\nu_1-d} h_2^{\nu_2-1})$  avec  $0 < \nu_1 < d$  et  $0 < \nu_2 < 1$ , les bornes dans (2.11) et (2.12) deviennent de l'ordre de  $o(nh_1^d h_2)$  et  $o(nh_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}})$ , respectivement. Par conséquent  $A_n = O(nh_1^d)$ . Par ailleurs, de (2.10) et par le bon choix de  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $L_1$  et  $L_2$  on obtient  $B_n = O(1)$ .

Pour ce qui est de  $W_3$ , en vue de (2.4), (2.9) et en posant  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} |F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)]| \geq \varepsilon\right) \\
&\leq \sum_{k=1}^{d_{x,n}} \sum_{\ell=1}^{d_{t,n}} \mathbb{P}\left(\left|\sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell)\right| \geq nh_1^d \varepsilon\right) \\
&\leq 2 \frac{c_1}{a_n^d} \frac{c_2}{b_n} \exp\left(\frac{-\frac{\varepsilon_0^2}{2} \log n}{m + \varepsilon_0^{5/3} \left(\frac{\log n^5}{nh_1^d}\right)^{1/6}}\right) \\
&\leq m (n^{-1} h_1^{2\alpha+d})^{-1/2\alpha} (nh_1^d)^{1/2} h_2^{-1} n^{-m\varepsilon_0^2} \\
&= m \left(nh_1^{2\alpha+d(1-\alpha)}\right)^{-1/2\alpha} (nh_2)^{-1} n^{-m\varepsilon_0^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{3}{2}}. \tag{2.13}
\end{aligned}$$

Sous la condition **A1**,  $\varepsilon_0^2 > \frac{1}{m} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{5}{2}\right)$  dans (2.13) est le terme général d'une série convergente. Alors

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} |F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell)]| \geq \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}}\right) < \infty.$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons

$$W_3 = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}}\right). \tag{2.14}$$

A partir de (2.7), (2.8) et (2.14), nous déduisons que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)]| = O\left(\sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}}\right).$$

Le lemme suivant énonce la convergence du terme de biais  $\mathcal{L}_2$ .

**Lemme 2.3.** *Sous les conditions **A1**, **A2**, **A3** et **A5**, pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)] - F_1(\mathbf{x}, t)| = O(h_1^2 + h_2^2), \text{ p.s.}$$

**Preuve du Lemme 2.3** La démonstration de ce lemme nécessite une intégration par parties ainsi qu'un changement de variables.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)] &= \frac{1}{h_1^d} \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ H \left( \frac{t - T_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] \right] \\ &= \frac{1}{h_1^d} \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} K_d(\mathbf{r}) H^{(1)}(z) F_1(\mathbf{x} - \mathbf{r}h_1, t - zh_2) d\mathbf{r} dz. \end{aligned}$$

Par un développement de Taylor de  $F_1(\mathbf{x} - \mathbf{r}h_1, t - zh_2)$  jusqu'à l'ordre 2 au voisinage de  $(\mathbf{x}, t)$  et par les conditions **A1**, **A2**, **A3** et **A5** nous déduisons que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[F_{1,n}(\mathbf{x}, t)] - F_1(\mathbf{x}, t)| \leq m(h_1^2 + h_2^2).$$

□

**Preuve du Corollaire 2.1** Soit l'inégalité triangulaire

$$\begin{aligned} |F(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})| &\leq |F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x})| \\ &\quad + |F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})| \\ &\leq 2 \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})|. \end{aligned}$$

D'une part, la première partie du corollaire est directement déduite du Théorème 2.2. D'autre part, un développement de Taylor de  $F(\cdot|\mathbf{x})$  au voisinage de  $\xi_p(\mathbf{x})$  permet d'avoir

$$F(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})) f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}),$$

où  $\xi_{p,n}^*$  est entre  $\xi_p$  et  $\xi_{p,n}$ . Nous pouvons à présent écrire

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})| f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \leq 2 \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})|.$$

Pour conclure, la convergence uniforme du quantile conditionnel s'obtient sous l'hypothèse **A5** et le Théorème 2.2. □

### 2.3.3.2 Partie normalité asymptotique

Nous commençons cette partie par l'étude de la convergence uniforme p.s. de la densité de probabilité conditionnelle  $f_n(t|\mathbf{x})$  vers  $f(t|\mathbf{x})$  définie dans (2.3). Ce calcul servira dans la preuve de la normalité asymptotique de l'estimateur du quantile conditionnel.

**Proposition 2.2.** *Sous les conditions **A1-A8**, nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |f_n(t|\mathbf{x}) - f(t|\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ p.s. quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve de la Proposition 2.2** Soit la décomposition ci-après

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |f_n(t|\mathbf{x}) - f(t|\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} (l_n(\mathbf{x}))} \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |f_n(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}[f_n(\mathbf{x}, t)]| \right. \\ &\quad + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |\mathbb{E}[f_n(\mathbf{x}, t)] - f(\mathbf{x}, t)| \\ &\quad \left. + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |f(t|\mathbf{x})| \right\} \\ &= : \frac{1}{m_0 - \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})|} [\mathcal{I}_1 + \mathcal{I}_2 + \mathcal{I}_3]. \end{aligned}$$

Pour  $\mathcal{I}_1$ , nous avons

$$Q_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{nh_1^d h_2} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{nh_1^d h_2} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \right],$$

avec

$$\sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) = f_n(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}[f_n(\mathbf{x}, t)].$$

La preuve utilise les techniques de recouvrement. Le sous-ensemble compact  $\mathcal{C}$  est recouvert par un nombre fini  $\mu_n$  d'intervalles de longueur  $\varrho_n$ , respectivement centrés en  $t_1, \dots, t_{\mu_n}$  avec  $\mu_n \varrho_n \leq m$ . Il existe  $t_j$  quelque soit  $t$  tel que  $|t - t_j| \leq \varrho_n$ .

$$\left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| + \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| \quad (2.15)$$

Sous les conditions **A2** et **A3**, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| &\leq \left| \frac{2}{nh_1^d h_2} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \left[ H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - H^{(1)} \left( \frac{t_j - Y_i}{h_2} \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{m}{h_1^d h_2} \left| \frac{t - t_j}{h_2} \right| \\ &\leq \frac{m}{h_1^d h_2^2 \mu_n} \end{aligned}$$

Par (2.15) conjointement avec un choix de  $\mu_n = O(n)$ , nous obtenons

$$\mathcal{I}_1 \leq \frac{m}{nh_1^d h_2^2} + \max_{1 \leq j \leq \mu_n} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right|.$$

Reste à montrer que

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq j \leq \mu_n} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| > \varepsilon \right) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (2.16)$$



Pour la majoration de (2.16), il convient d'utiliser une inégalité exponentielle due à Doukhan & Neumann (2007), les étapes de calcul sont ainsi similaires à celles utilisées dans la partie consistance démontrée précédemment.

Pour la démonstration du terme de biais  $\mathcal{I}_2$ , nous constatons que

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[f_n(\mathbf{x}, t)] &= \frac{1}{h_1^d h_2} \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ H^{(1)} \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] \right] \\ &= \frac{1}{h_1^d h_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} h_2 K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H^{(1)}(z) f(t - h_2 z | \mathbf{u}) l(\mathbf{u}) d\mathbf{u} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} K_d(\mathbf{r}) H^{(1)}(z) f(\mathbf{x} - h_1 \mathbf{r}, t - h_2 z) dr dz.\end{aligned}$$

Un développement de Taylor de  $f_n(\cdot, \cdot)$  au voisinage de  $(\mathbf{x}, t)$  conjointement avec les conditions **A2** et **A5** nous permet de déduire que  $I_2 = O(h_1^2 + h_2^2)$ . Quant à l'expression  $\mathcal{I}_3$ , sous les hypothèses **A1**, **A2**, **A4**, **A6** et **A8**, il apparait à partir du Lemme 3 dans Menni et Tatachak (2016) que l'estimateur à noyau  $l_n(\mathbf{x}) \rightarrow l(\mathbf{x})$  p.s. quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ajouter à cela la première partie de l'hypothèse **A5** alors nous obtenons  $I_3 = o(1)$ . Ce point achève la preuve de la Proposition 2.2.  $\square$

**Preuve du Théorème 2.3** Soit la décomposition standard suivante

$$\begin{aligned}F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x}) &= \frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})} \left[ \frac{F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}(F_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x})(l_n(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})))}{l(\mathbf{x})} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{F_1(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}(F_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x})(l(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})))}{l_n(\mathbf{x})} \right] \\ &=: \frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})} \mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t) + \mathcal{U}_n(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Notons que

$$\sqrt{nh_1^d}(F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})) =: \frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})} \left[ \sqrt{nh_1^d} \mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t) \right] + \sqrt{nh_1^d} \mathcal{U}_n(\mathbf{x}, t) \quad (2.17)$$

Nous démontrons dans le Lemme 2.4 la convergence en probabilité de  $\sqrt{nh_1^d} \mathcal{U}_n(\mathbf{x}, t)$  vers 0 et nous établissons les résultats asymptotiques de  $\sqrt{nh_1^d} \mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t)$  en déterminant le terme de la variance et en utilisant la procédure de Bernstein autrement dit celle des grands et des petits blocs pour prouver la normalité asymptotique de  $\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t)$ . La convergence du terme  $\frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})}$  vers 1 est évidente.

**Lemme 2.4.** *Les hypothèses **A1-A5** et **A8** entraînent que*

$$\sqrt{nh_1^d} \mathcal{U}_n(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{P} 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty,$$

où  $P$  est la convergence en probabilité.

**Preuve Lemme 2.4** Notons que

$$\begin{aligned}\sqrt{nh_1^d} \mathcal{U}_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{\sqrt{nh_1^d}}{l_n(\mathbf{x})} [F_1(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}(F_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x})(l(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})))] \\ &=: \mathcal{X}_{n,1} + \mathcal{X}_{n,2}.\end{aligned} \quad (2.18)$$

Le taux de convergence de chacun des termes de (2.18) est obtenu grâce aux lemmes 2.2 et 2.3, respectivement. En réalité, en utilisant **A1**(iii) nous montrons que

$$\mathcal{X}_{n,1} = O\left(\sqrt{nh_1^d(h_1^2 + h_2^2)}\right) = o(1);$$

$$\mathcal{X}_{n,2} = O\left(\sqrt{nh_1^{d+4}}\right) = o(1).$$

Ceci achève la preuve du Lemme 2.4. □

Il est à présent question de la normalité asymptotique du terme principal  $\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t)$ , soit

$$\begin{aligned} \mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{nh_1^d l(\mathbf{x})} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - F(t|\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) - \mathbb{E} \left( K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \right) \right] \right\} \\ &=: \frac{1}{nh_1^d l(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \Psi_i(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (2.19)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_i(\mathbf{x}, t) &= K_{d,i} [H_i - F(t|\mathbf{x})] - \mathbb{E} [K_{d,i} (H_i - F(t|\mathbf{x}))], \\ K_{d,i} &:= K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \quad \text{et} \quad H_i := H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right). \end{aligned}$$

Nous portons à présent intérêt au terme de variance

$$\begin{aligned} nh_1^d \text{Var} \mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^{d+2} l^2(\mathbf{x})} \text{Var}(\Psi_1(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{nh_1^{d+2} l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1: j \neq i}^n \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) \quad (2.20) \\ &= \sigma_n^2(\mathbf{x}, t) + \varpi_n(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Le lemme qui suit rapporte les résultats intermédiaires utilisés dans les calculs ultérieurs liés au terme de la variance.

**Lemme 2.5.** *Les hypothèses **A3**(i), **A5**(i),(ii) et **N1** donnent que*

$$\text{Var} \left[ H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] \rightarrow F(t|\mathbf{x}) [1 - F(t|\mathbf{x})] \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve du Lemme 2.5**

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] &= \mathbb{E} \left[ H^2 \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] - \mathbb{E} \left[ H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right]^2 \\ &=: \mathcal{L1} + \mathcal{L2} \end{aligned}$$

Une intégration par parties ainsi qu'un changement de variable donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] &= \int_{\mathbb{R}} H \left( \frac{t - u}{h_2} \right) f(u|\mathbf{X}_1) du \\ &= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) (F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x})) dz + \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t|\mathbf{x}) dz \end{aligned}$$

Il est clair que  $\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z)F(t|\mathbf{x})dz \rightarrow F(t|\mathbf{x})$ . Pour ce qui est du terme à gauche de l'expression ci-dessus, par les hypothèses **A3(i)** et **A5(i)**, nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z)(F(t - zh_2|\mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x}))dz &\leq \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z)m(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}|^{u_1} + |zh_2|^{u_2})dz \\ &= m|\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}|^{u_1} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z)dz + m|h_2|^{u_2} \int_{\mathbb{R}} |z|^{u_2} H^{(1)}(z)dz \\ &= O(h_2^{\min(u_1, u_2)}). \end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{L}_2 \rightarrow F^2(t|\mathbf{x})$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Concernant  $\mathcal{L}_1$ , par un changement de variable nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \int_{\mathbb{R}} H^2\left(\frac{t-y}{h_2}\right) f(y|\mathbf{X}_1)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} h_2 H^2(z) f(t - zh_2|\mathbf{X}_1)dz. \end{aligned}$$

Par une intégration par parties, nous aurons

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)F(t - zh_2|\mathbf{X}_1)dz \\ &= \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)(F(t - zh_2|\mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x}))dz + \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)F(t|\mathbf{x})dz \end{aligned}$$

Idem, en utilisant **A5(i)** alors

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)(F(t - zh_2|\mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x}))dz &\leq \int_{\mathbb{R}} m(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}|^{u_1} + |zh_2|^{u_2})[H(z)^2]'dz \\ &= O(h_2^{\min(u_1, u_2)}). \end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)F(t|\mathbf{x})dz = F(t|\mathbf{x}).$$

D'où  $\mathcal{L}_1 \rightarrow F(t|\mathbf{x})$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Nous en déduisons que

$$\text{Var} \left[ H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] \rightarrow F(t|\mathbf{x})(1 - F(t|\mathbf{x})).$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 2.5. □

**Lemme 2.6.** *Sous les hypothèses **A2-A4** et **A6-A7**, nous avons*

$$\sigma_n^2(\mathbf{x}, t) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t) \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ et } \varpi_n(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve du Lemme 2.6** De (2.20), nous définissons

$$\begin{aligned} \sigma_n^2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E}[\Psi_1^2(\mathbf{x}, t)] \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} [K_{d,1}^2 (H_1 - F(t|\mathbf{x}))^2] - \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \{ \mathbb{E} [K_{d,1} (H_1 - F(t|\mathbf{x}))] \}^2 \\ &=: \mathcal{R}_1(\mathbf{x}, t) + \mathcal{R}_2(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Pour le terme  $\mathcal{R}_2(\mathbf{x}, t)$ , nous écrivons

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} [\mathbb{E}(K_{d,1} H_1) - \mathbb{E}(K_{d,1} F(t|\mathbf{x}))]^2 \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} [h_1^d \mathbb{E}(F_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - h_1^d F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x}))]^2 \\ &= \frac{1}{l^2(\mathbf{x})} [\mathbb{E}(F_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x}))]^2.\end{aligned}$$

A partir du Lemme 2.3, il est possible d'écrire que

$$\mathbb{E}(\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) \rightarrow F_1(\mathbf{x}, t) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Et

$$F_1(\mathbf{x}, t) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) = F(t|\mathbf{x})[l(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x}))] \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

D'autre part

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} [\mathbb{E} [K_{d,1}^2 (H_1 - F(t|\mathbf{x}))^2 | \mathbf{X}_1]] \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} [K_{d,1}^2 \text{Var}(H_1 | \mathbf{X}_1)] + \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} [K_{d,1}^2 \mathbb{E} ((H_1 | \mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x}))^2].\end{aligned}$$

A partir du Lemme 2.5, la seconde partie entre parenthèses tend vers zéro quand  $n$  tend vers l'infini.

Pour ce qui est de la première partie, nous avons

$$\begin{aligned}\frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} [K_{d,1}^2 \text{Var}(H_1 | \mathbf{X}_1)] &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} [K_{d,1}^2 F(t|\mathbf{x}) (1 - F(t|\mathbf{x}))] \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} F(t|\mathbf{x}) (1 - F(t|\mathbf{x})) \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) l(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &\rightarrow \frac{1}{l(\mathbf{x})} F(t|\mathbf{x}) (1 - F(t|\mathbf{x})) \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \frac{\kappa F(t|\mathbf{x}) (1 - F(t|\mathbf{x}))}{l(\mathbf{x})} \\ &= \sigma^2(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Concernant (2.20), nous avons

$$\varpi_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1: j \neq i}^n \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t))$$

que l'on écrit comme suit

$$\begin{aligned}\varpi_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_1} \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) \\ &=: \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2,\end{aligned}$$

avec

$$B_1 = \{(i, l); 1 \leq |i - l| \leq \eta_n\} \text{ et } B_2 = \{(i, l); \eta_n + 1 \leq |i - l| \leq n - 1\}.$$

Concernant  $\mathcal{M}_1$ , en considérant que la covariance est calculée selon la formule

$$\text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) \leq \mathbb{E}[K_{d,i}K_{d,j}(H_i - F(t|\mathbf{x}))(H_j - F(t|\mathbf{x}))] + \mathbb{E}[K_{d,i}(H_i - F(t|\mathbf{x}))]^2.$$

Par des calculs simples, on aura que  $\mathcal{M}_1 = o(1)$  (voir les détails dans la partie des données incomplètes).

La seconde partie peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \text{cov}(K_{d,i}H_i - K_{d,i}F(t|\mathbf{x}), K_{d,j}H_j - K_{d,j}F(t|\mathbf{x})) \\ &=: \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &=: \text{cov}(K_{d,i}H_i, K_{d,j}H_j) - F(t|\mathbf{x})\text{cov}(K_{d,i}H_i, K_{d,j}) \\ &\quad - F(t|\mathbf{x})\text{cov}(K_{d,i}, K_{d,j}H_j) + F(t|\mathbf{x})^2\text{cov}(K_{d,i}, K_{d,j}). \end{aligned}$$

Par des techniques de calcul de l'espérance conditionnelle ainsi que les intégrales, nous concluons que

$$\varpi_n(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty$$

ce qui achève la preuve du Lemme 2.6. □

Par (2.17) et le Lemme 2.6 et afin de justifier le Théorème 2.3, il suffira de montrer que

$$\sqrt{nh_1^d}(\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (2.21)$$

La procédure de Bernstein des grands et des petits blocs est ainsi utilisée. Dans ce qui suit et afin de simplifier les choses, nous normaliserons  $\psi_i$ . A partir de (2.19), nous aurons

$$\begin{aligned} \sqrt{nh_1^d}(\mathcal{Z}_n(\mathbf{x}, t)) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\Psi_i(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{h_1^d l(\mathbf{x})}} \\ &=: \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t) \\ &=: \frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

Aussi, (2.20) et le Lemme 2.6 donnent

$$\text{var}(\tilde{\psi}_i) = \frac{\text{var}(\psi_i)}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} =: \sigma_n^2(\mathbf{x}, t) \text{ et } \text{var}(\tilde{\psi}_i) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Alors, (2.21) est équivalent à démontrer que

$$\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \quad (2.22)$$

La normalité asymptotique de  $\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}$  s'obtient par le moyen du théorème centrale limite pour des v.a. dépendantes, en écrivant ce terme comme la somme de grands blocs séparés par des petits blocs, c'est la technique de Bernstein qui consiste à partitionner l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en  $2k_n + 1$  sous-ensembles

$I_m = \{i; i = (m-1)(p_n+q_n)+1, \dots, (m-1)(p_n+q_n)+p_n\}$  avec  $p_n$  éléments pour chaque  $m = 1, \dots, k_n$ .

$J_m = \{j; j = (m-1)(p_n+q_n)+p_n+1, \dots, m(p_n+q_n)\}$  avec  $q_n$  éléments pour chaque  $m = 1, \dots, k_n$ .

Les points restants sont définis dans l'ensemble  $\{l; k_n(p_n+q_n)+1 \leq l \leq n\}$  qui peut être égal à  $\emptyset$ , et  $p_n, q_n$  et  $k_n$  sont donnés dans l'hypothèse **N1**. Soient les v.a.  $U_{nm}, U'_{nm}$  et  $U''_{nm}$  définies comme suit :

$$U_{nm} = \sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} \tilde{\Psi}_i, \quad U'_{nm} = \sum_{j=(m-1)(p_n+q_n)+p_n+1}^{m(p_n+q_n)} \tilde{\Psi}_j, \quad U''_{nk} = \sum_{l=k_n(p_n+q_n)+1}^n \tilde{\Psi}_l$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \sum_{m=1}^{k_n} U_{nm} + \sum_{m=1}^{k_n} U'_{nm} + U''_{nk_n} \right] \\ &=: \frac{1}{\sqrt{n}} [T_n + T_n' + T_n'']. \end{aligned}$$

Alors, dans le but d'établir la convergence de (2.22), il faudra montrer que

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (2.23)$$

ainsi que

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} [T_n'^2] + \frac{1}{n} \mathbb{E} [T_n''^2] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (2.24)$$

Pour les preuves de (2.23) et (2.24), les étapes sont identiques à celles utilisées pour les données incomplètes (voir Lemmes 3.8 et 3.9), de ce fait nous énonçons ci-après les lemmes néanmoins les démonstrations sont omises.

**Lemme 2.7.** *L'hypothèse **N1** entraîne que*

- (i)  $\frac{k_n}{n} \text{var}(U'_{n1}) \rightarrow 0$
- (ii)  $\frac{1}{n} |\text{cov}(U'_{n1}, U'_{n,l+1})| \leq \frac{q_n m}{n l^2(\mathbf{x})} \frac{1}{h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(q_n-1)} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)|$
- (iii)  $\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U'_{ni}, U'_{nj})| \rightarrow 0$

**Lemme 2.8.** *Si la condition **N1** est vérifiée, nous avons*

- (i)  $\frac{k_n}{n} \text{var}(U_{n1}) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t)$
- (ii)  $\frac{1}{n} |\text{cov}(U_{n1}, U_{n,l+1})| \leq \frac{p_n m}{n l^2(\mathbf{x})} \frac{1}{h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{r=l(p_n+q_n)-p_n}^{l(p_n+q_n)+p_n} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)|$

$$(iii) \frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U_{ni}, U_{nj})| \rightarrow 0$$

$$(iv) \text{var} \left( \frac{T_n}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t)$$

Il reste à démontrer que les v.a.  $\{U_{nm}, m = 1, \dots, k\}$  sont asymptotiquement indépendantes. Pour ce faire, nous faisons appel aux fonctions caractéristiques et démontrons que

$$\left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{1}{\sqrt{n}} U_{nm}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{1}{\sqrt{n}} U_{nm}} \right) \right| \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

Par des calculs détaillés dans le chapitre 3, nous trouvons que

$$\left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \leq \left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \right| + \left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-2} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_n-1}}{\sqrt{n}}} \right) \right| + \dots + \left| \text{cov} \left( e^{it \frac{U_{n1}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{n2}}{\sqrt{n}}} \right) \right|. \quad (2.25)$$

Le Lemme 1 dans Bulinski (1996) est utilisé pour chacun des termes dans (2.25). Pour cela, nous avons besoin de calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction  $\mathcal{V}_m : \mathbb{R}^{p_n(d+1)} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $m = 1, \dots, k_n$  définie par  $V_m(\mathbf{x}_l, y_l) = e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}$  pour tout  $l$  entre  $(m-1)(p_n + q_n) + 1$  et  $(m-1)(p_n + q_n) + p_n$ , où  $\mathbf{x}_l = (x_{(m-1)(p_n+q_n)+1}^1, \dots, x_{(m-1)(p_n+q_n)+1}^d, \dots, x_{(m-1)(p_n+q_n)+p_n}^1, \dots, x_{(m-1)(p_n+q_n)+p_n}^d)$  et  $y_l = (y_{(m-1)(p_n+q_n)+1}, \dots, y_{(m-1)(p_n+q_n)+p_n})$ .

La première dérivée partielle de la fonction  $\mathcal{V}_m$  au voisinage de  $y_l$  pour  $l = (m-1)(p_n + q_n) + 1, \dots, (m-1)(p_n + q_n) + p_n$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial y_l}(\mathbf{x}_l, y_l) &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left( it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}} \right) e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left( \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} \tilde{\Psi}_l \right) e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{it}{\sqrt{n}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ \frac{1}{\sqrt{h_1^d l(\mathbf{x})}} (K_{d,l} [H_l - F(t|\mathbf{x})]) \right] \\ &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d l(\mathbf{x})}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \frac{\partial}{\partial y_l} H \left( \frac{t - y_l}{h_2} \right) \\ &= -\frac{it}{\sqrt{nh_1^d h_2^2 l(\mathbf{x})}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - y_l}{h_2} \right). \end{aligned}$$

De plus, la première dérivée partielle de la fonction  $\mathcal{V}_m$  au voisinage de  $x_l^j$  pour  $l = (m-1)(p_n + q_n) + 1, \dots, (m-1)(p_n + q_n) + p_n$  et  $j = 1, \dots, d$  est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_l^j}(\mathbf{x}_l, y_l) &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} [H_l - F(t|\mathbf{x})] \frac{\partial}{\partial x_l^j} \left[ \frac{1}{l(\mathbf{x})} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \right] \\ &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} [H_l - F(t|\mathbf{x})] \left[ -\frac{l^{(1)}(\mathbf{x})}{l^2(\mathbf{x})} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l^j} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \frac{1}{l(\mathbf{x})} \right] \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l^j} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) &= \prod_{i=1, i \neq j}^d K \left( \frac{\mathbf{x}^i - x_l^i}{h_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_l^j} K \left( \frac{\mathbf{x}^j - x_l^j}{h_1} \right) \\ &= \prod_{i=1, i \neq j}^d K \left( \frac{\mathbf{x}^i - x_l^i}{h_1} \right) \left( -\frac{1}{h_1} \right) K^{(1)} \left( \frac{\mathbf{x}^j - x_l^j}{h_1} \right). \end{aligned}$$

Alors, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_l^j}(\mathbf{x}_l, y_l) &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^{d+2}}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} [H_l - F(t|\mathbf{x})] \\ &\times \left[ -h_1 \frac{l^{(1)}(\mathbf{x})}{l^2(\mathbf{x})} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) - \prod_{i=1, i \neq j}^d K \left( \frac{\mathbf{x}^i - x_l^i}{h_1} \right) K^{(1)} \left( \frac{\mathbf{x}^j - x_l^j}{h_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sous les conditions **A2-A4** et **A7**, il existe  $A > 0$  tel que

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial y_l}(\mathbf{x}_l, y_l) \right\|_{\infty} \leq \frac{At}{\sqrt{nh_1^d h_2^2}} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_l^j}(\mathbf{x}_l, y_l) \right\|_{\infty} \leq \frac{At}{\sqrt{nh_1^{d+2}}}.$$

En utilisant le Lemme 1 dans Bulinski (1996), on trouve

$$\left| \text{cov} \left( e^{it \frac{U_{n2}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{n1}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)|.$$

Par stationnarité, on déduit que

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| &\leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} \left[ (k_n - 1) \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| + (k_n - 2) \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_3} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_{k_n}} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| \right]. \end{aligned}$$

De nouveau, par stationnarité nous avons

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| &\leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} p_n k_n \sum_{j=(k_n-1)(p_n+q_n)-(p_n-2)}^{(k_n-1)(p_n+q_n)+p_n} |\Lambda_{1,j}(\mathbf{x}, t)| \\ &\leq mt^2 \frac{p_n k_n}{n} \frac{1}{h_1^{d+1} h_2} \sum_{j=q_n}^{\infty} |\Lambda_{1,j}(\mathbf{x}, t)| \\ &\leq mt^2 \frac{p_n k_n}{n} \frac{\gamma_0}{1 - e^{-\gamma}} \frac{e^{-\gamma q_n}}{h_1^{d+1} h_2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Sous les conditions **N1(i)** et **(iii)**, (2.26) tend vers zero.

Par la condition standard de Lindeberg-Feller, nous montrons que  $\frac{T_n}{\sqrt{n}}$  est asymptotiquement normale :

$$k_n \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} U_{n1}^2 \mathbf{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} U_{n1} \right| > \varepsilon \sigma(\mathbf{x}, t) \right\}} \right) \rightarrow 0.$$



Sous l'hypothèse **A2**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |U_{n1}| &= \left| \sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{\sqrt{h_1^d} l(\mathbf{x})} \{K_{d,i} [H_i - F(t|\mathbf{x})] - \mathbb{E} [K_{d,i} (H_i - F(t|\mathbf{x}))]\} \right| \\ &\leq \frac{2p_n \|K_d\|_\infty}{\sqrt{h_1^d} l(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

De ce fait, par l'inégalité de Tchebychev et les hypothèses **A4** et **N1(ii)** nous aurons

$$\begin{aligned} k_n \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} U_{n1}^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} U_{n1} \right| > \varepsilon \sigma(\mathbf{x}, t) \right\}} \right) &\leq \frac{4k_n p_n^2 \|K_d\|_\infty^2}{n h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} |U_{n1}| > \varepsilon \sigma(\mathbf{x}, t) \right) \\ &\leq \frac{4 \|K_d\|_\infty^2}{l^2(\mathbf{x})} \frac{k_n \text{Var}(U_{n1})}{n \varepsilon^2 \sigma^2(\mathbf{x}, t)} \frac{p_n^2}{n h_1^d} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Par ce résultat, nous achevons la preuve du Théorème 2.3. □

### Preuve du Corollaire 2.2

Par l'utilisation d'un développement de Taylor de  $F_n(\cdot|\mathbf{x})$  au voisinage de  $\xi_p$  et la propriété  $F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = p$ , nous aurons

$$\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}) = \frac{F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})}{f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x})},$$

où  $\xi_{p,n}^*$  est entre  $\xi_p$  et  $\xi_{p,n}$ . La convergence uniforme presque sûre de  $\xi_{p,n}(\mathbf{x})$  vers  $\xi_p(\mathbf{x})$ , la Proposition 2.2 et la continuité de  $f(\cdot|\mathbf{x})$  donne la convergence en probabilité de  $f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x})$  vers  $f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})$ . La preuve est donc établie en utilisant le Théorème 2.3. □

## 2.4 La fonction quantile conditionnelle dans un modèle de censure droite

Il est très fréquent que les durées de vie ne soient pas complètes, elles sont souvent censurées par des variables positives que l'on notera  $C_1, \dots, C_n$  supposées indépendantes dans les études biomédicales ayant une f.d.r.  $G$  et une fonction de survie  $H$ . Ces durées de vie positives notées  $T_1, \dots, T_n$  ont une même fonction de répartition  $F$  inconnue et une fonction de survie  $S$ . Dans le modèle de censure droite, nous définissons les v.a. réellement observées  $Y_1, \dots, Y_n$  avec  $Y = \min(T, C)$  et on note  $\delta = \mathbb{1}_{\{T \leq C\}}$  c'est à dire que l'on observe le véritable temps de survie que s'il est inférieur à l'instant de censure  $C$ . Dans ce cas, la variable n'est pas censurée et  $\delta = 1$ . Le couple  $(Y, \delta)$  est l'échantillon réellement observé et les v.a.  $\{C_i, 1 \leq i \leq n\}$  sont indépendantes des  $\{T_i, 1 \leq i \leq n\}$ . La f.d.r conditionnelle de  $T$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  s'écrit comme suit

$$F(t|\mathbf{x}) = \mathbb{P}\{T \leq t | \mathbf{X} = \mathbf{x}\} = \mathbb{E} [\mathbb{1}_{\{T \leq t\}} | \mathbf{X} = \mathbf{x}].$$

Elle peut aussi se mettre sous la forme suivante

$$F(t|\mathbf{x}) = \frac{F_1(\mathbf{x}, t)}{l(\mathbf{x})},$$

où  $F_1(.,.)$  est la dérivée par rapport à  $\mathbf{X}$  de la loi jointe  $F(.,.)$  et  $l(.)$  est la densité marginale de  $\mathbf{X}$ . Soit  $p \in (0, 1)$ , le quantile conditionnel a pour expression :

$$\xi_p(\mathbf{x}) = F^{-1}(p|\mathbf{x}) = \inf\{t, F(t|\mathbf{x}) \geq p\}.$$

Son estimateur s'écrit :  $\xi_{p,n}(\mathbf{x}) = \inf\{t, F_n(t|\mathbf{x}) \geq p\}$ , où  $F_n(t|x)$  est l'estimateur de  $F(t|x)$ .

Dans ce contexte, Beran (1981) propose des estimateurs pour la fonction de hasard cumulative et la fonction de survie.

### 2.4.1 L'estimateur de Nelson-Aalen

A l'instant  $t$ , un indicateur de présence à risque est

$$Z_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \geq t\}}$$

avec comme processus ponctuel

$$N_n(t) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbb{1}_{\{Y_i \leq t, \delta_i = 1\}}.$$

Nous avons que

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(N_n(t)) &= \mathbb{P}(Y_i \leq t, \delta_i = 1) \\ &= \mathbb{P}(Y_i \leq t, T_i \leq C_i) \\ &= \int_0^t \int_x^\infty d\mathbb{P}_{(T,C)}(x, y) dx dy \\ &= \int_0^t H(x_-) dF(x) dx. \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Z_n(t)) &= \mathbb{P}(Y_i \geq t) \\ &= \mathbb{P}(T_i \wedge C_i \geq t) \\ &= \mathbb{P}(T_i \geq t) \mathbb{P}(C_i \geq t) \\ &= S(t_-) H(t_-). \end{aligned}$$

De ce fait

$$\begin{aligned} \int \frac{d\mathbb{E}(N_n(t))}{\mathbb{E}(Z_n(t))} &= \int \frac{H(t_-) dF(t)}{S(t_-) H(t_-)} \\ &= \int \frac{dF(t)}{S(t_-)} \\ &= \Lambda(t) \end{aligned}$$

d'où une estimation de  $\Lambda(t)$  par l'estimateur de Nelson-Aalen (Nelson (1972), Aalen (1978)) qui s'écrit

$$\widehat{\Lambda}_n(t) = \int_0^t \frac{dN_n(t)}{Z_n(t)}.$$

Il s'agit de l'estimateur de la fonction de hasard cumulative  $\lambda(t) = f(t)/S(t) = -d \log S(t)/dt$ , où  $f$  est la densité de probabilité. Cet estimateur a de meilleures propriétés que celui de Peterson.

## 2.4.2 L'estimateur de Kaplan-Meier

Appelé également estimateur Produit-Limite car il s'obtient comme le produit d'une limite. Il représente l'estimateur adaptée à la fonction de survie. Pour  $t_1 < t_2$ , nous notons

$$\begin{aligned} S(t) &= 1 - F(t) = \mathbb{P}(T > t_2) \\ &= \mathbb{P}(T > t_2/T > t_1) \cdot \mathbb{P}(T > t_1) \\ &= \mathbb{P}(T > t_2/T > t_1) \cdot S(t_1) \end{aligned}$$

Si l'on considère une date ultérieure  $t_0 < t_1$ , on obtient

$$S(t_1) = \mathbb{P}(T > t_1/T > t_0) S(t_0)$$

Ce qui nous donne

$$S(t) = \mathbb{P}(T > t/T > t_n) \mathbb{P}(T > t_n/T > t_{n-1}) \dots \mathbb{P}(T > t_0)$$

pour  $t_0 < t_1 < \dots < t_n < t$ .

Si l'on considère des temps d'évènements distincts (qu'il s'agisse d'un décès ou d'une censure) nommés  $Y_{(i)}$  ( $i = 1, \dots, n$ ) et rangés par ordre croissant, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(T > Y_{(i+1)}) &= \prod_{j=1}^i \mathbb{P}(T > Y_{(j+1)}/T > Y_{(j)}) \\ &= \prod_{j=1}^i p_j, \end{aligned}$$

avec  $p_i$  la probabilité de survivre au-delà de l'intervalle  $I_i = ]Y_{(i)}, Y_{(i+1)}]$  sachant qu'il était vivant au début de cet intervalle.  $q_i$  est la probabilité qu'un individu meurt pendant l'intervalle  $I_i$  sachant qu'il était vivant au début de cet intervalle. L'estimateur naturel de  $q_i$  sera alors

$$\widehat{q}_i = \frac{M_i}{R_i}$$

avec  $M_i$  le nombre de morts à l'instant  $Y_i$  et  $R_i$  le nombre d'individus à risque de mourir juste avant l'instant  $Y_i$ .

L'estimateur de Kaplan-Meier sera alors donné par

$$\widehat{S}(t) = \prod_{Y_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{M_i}{R_i}\right).$$

S'il n'ya pas d'ex-aequo, à  $Y_i$  s'associe un indicateur de censure noté  $\delta_{(i)}$  qui est égal à 1 s'il y a eu un décès en  $Y_{(i)}$  et dans ce cas  $M_i = 1$  et 0 s'il y eu censure en  $Y_{(i)}$  et dans ce cas  $M_i = 0$ . Comme  $R_{(i)} = n - i + 1$ , l'écriture de l'estimateur devient

$$\widehat{S}_T(t) = \prod_{i: Y_{(i)} \leq t} \left(1 - \frac{1}{n - (i - 1)}\right)^{\delta_{(i)}}.$$

Cet estimateur prend également l'écriture ci-dessous

$$\widehat{S}(t) = \begin{cases} \prod_{i=1}^n \left(1 - \frac{\delta_{(i)}}{n-i+1}\right)^{\mathbf{1}_{\{Y_{(i)} \leq t\}}} & \text{si } t < Y_{(n)} \\ 0 & \text{si } t \geq Y_{(n)}, \end{cases}$$

Notons qu'en l'absence de censure, l'E.K.M se réduit à la fonction de survie empirique. Cette dernière possède de bonnes propriétés en terme de convergence :

- La convergence p.s. par le théorème de Glivenko-Cantelli qui assurent que

$$\sup_{t \in \mathbb{R}} |F_n(t) - F(t)| \longrightarrow 0, \text{ p.s.}$$

où  $F_n$  dénote la f.d.r. empirique et  $F$  la f.d.r. de la loi recherchée.

- La convergence en loi du processus empirique associé vers un point brownien.

#### 2.4.2.1 Propriétés asymptotiques de l'estimateur de Kaplan-Meier

Les propriétés asymptotiques de l'E.K.M se rapprochent de celles de la f.d.r. empirique, elles ont fait l'objet de plusieurs études et plusieurs auteurs ont traité le sujet notamment Peterson (1977), Shorack et Wellner (1986). Ci-après des propriétés de consistance et de normalité asymptotique de l'E.K.M.

##### **Théorème 2.4.** (Shorack et Wellner (1986))

Soit la variable de survie  $T$ , de f.d.r.  $F$  et la censure  $C$  de f.d.r.  $G$ . Ces deux variables étant indépendantes entre elles, alors

$$\sup_{0 \leq t \leq \tau} |F_n(t) - F(t)| \rightarrow 0 \text{ p.s. quand } n \rightarrow +\infty.$$

Pour plus de détails, se référer au livre de Shorack et Wellner (1986), p.304.

On définit le processus ci-dessous

$$R_n(t) = \sqrt{n}(F_n(t) - F(t)),$$

pour tout  $0 \leq t \leq \tau$ .

**Théorème 2.5.** (Breslow et Crowley, 1974) Si  $\tau < +\infty$  et si  $F$  et  $G$  sont continues, alors  $R_n \xrightarrow{\mathcal{L}} R$  quand  $n \rightarrow +\infty$  où  $R$  est un processus Gaussien centré de fonction de covariance

$$\text{cov}(R(s), R(t)) = (1 - F(s))(1 - F(t)) \cdot \int_0^{s \wedge t} \frac{dH(x)}{(1 - F(x))^2}.$$

### 2.4.3 La convergence forte du quantile conditionnel dans le cas de données censurées et i.i.d.

Les durées de vie bien qu'elles soient le plus souvent dépendantes dans la réalité peuvent être considérées i.i.d. Les propriétés asymptotiques de l'estimateur du quantile conditionnel ont fait l'objet d'études nombreuses notamment dans le cas de données i.i.d. Ould-Saïd (2006) avait établi la consistance de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel écrit avec la fonction indicatrice dans un modèle de censure droite pour des données i.i.d. dans un cadre unidimensionnel. Il utilise l'écriture de la f.d.r. suivante :

$$F(t|x) =: \frac{F_1(x, t)}{l(x)},$$

avec  $F_1(x, \cdot)$  la première dérivée de la f.d.r. conjointe  $F(x, \cdot)$  par rapport à  $x$  et  $l(\cdot)$  est la densité marginale de  $x$ . Ce qui lui a permis d'écrire l'estimateur du quantile conditionnel comme suit

$$F_n(t|x) =: \frac{F_{1,n}(x, t)}{l_n(x)} = \frac{\frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i \mathbb{1}_{\{Y_i \leq C_i\}}}{\bar{G}_n(Y_i)} K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)}{\frac{1}{nh_n} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h_n}\right)}, \quad (2.27)$$

et  $l_n(x)$  est l'estimateur de Parzen-Rosenblatt. Un estimateur naturel du quantile conditionnel serait

$$\xi_{p,n}(x) = \inf\{t, F_n(t|x) \geq p\}. \quad (2.28)$$

Pour les calculs, il a fait appel aux hypothèses suivantes

- Conditions standards sur le noyau  $K$  ainsi que sur la fenêtre  $h_n$ ,
- Des conditions sur la densité marginale,
- Des conditions sur  $F_1(\cdot, \cdot)$ ,
- Une condition sur la f.d.r. conditionnelle.

Il avait ainsi établi les vitesses de convergence de (2.27) et de (2.28), soient

$$\sup_{x \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|x) - F(t|x)| = O \left\{ \max \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}}, h_n^2 \right) \right\}, \text{ p.s.}$$

et

$$\sup_{x \in \Omega} |\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x)| = O \left\{ \max \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}}, h_n^2 \right) \right\}, \text{ p.s.}$$

où  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  sont deux ensembles compacts.

Dans cette thèse, nous étendons les travaux de Ould-Saïd et Sadki (2008) qui avaient énoncé les propriétés asymptotiques de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel dans sa forme lissée (en remplaçant la fonction indicatrice par une fonction de lissage de type noyau intégré) dans le cas de données censurées et i.i.d. au cas de données censurées à droite et associées dans un cadre multivarié. Ci-dessous l'écriture proposée pour la f.d.r. conditionnelle

$$F_n(t|x) =: \frac{F_{1,n}(x, t)}{l_n(x)} = \frac{\sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}_n(Y_i)} K_d \left( \frac{x - x_i}{h_n} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_n} \right)}{\sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{x - x_i}{h_n} \right)}, \quad (2.29)$$

Nous énonçons ci-après les vitesses de convergence obtenues dans leurs travaux pour (2.29) et (2.28), respectivement sous certaines conditions de régularité. Les grandes lignes des hypothèses et conditions utilisées dans les démonstrations sont :

- Conditions standards sur le noyau  $K$  ainsi que sur la fenêtre  $h_n$ ,
- Des conditions sur la densité marginale ainsi que la f.d.r. conditionnelle,
- Des conditions sur la fonction  $H$ .

Ceci a permis d'établir les résultats suivants

$$\sup_{x \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|x) - F(t|x)| = O \left\{ \max \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}}, h_n \right) \right\}, \text{ p.s.}$$

et

$$\sup_{x \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |\xi_{p,n}(t|x) - \xi_p(t|x)| = O \left\{ \max \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n}}, h_n \right) \right\}, \text{ p.s.}$$

où  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  sont deux ensembles compacts.

#### 2.4.4 Les propriétés asymptotiques du quantile conditionnel dans le cas de données censurées et $\alpha$ -mélangeantes

Il est peu fréquent d'avoir des durées de vie indépendantes dans la réalité, les résultats présentés par Ould-Saïd (2006) se basant sur un modèle de censure droite ont été étendus à des données de survie dépendantes et plus précisément  $\alpha$ -mélangeantes. Ces travaux ont été établis par Liang et de Uña -Álvarez (2011), ces derniers ont étudié la convergence uniforme ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur du quantile conditionnel pour des données censurées à droite.

L'écriture de l'estimateur est analogue à celle proposée par Ould-Saïd (2006).

Ci-dessous les conditions principales ayant permis de donner leurs résultats

- Conditions sur la densité jointe  $l(., .)$ ,
- Conditions standards sur le noyau  $K$  ainsi que sur la fenêtre  $h_n$ ,
- Conditions sur  $F_1(., .)$ ,
- Conditions sur la densité marginale ainsi que la f.d.r. conditionnelle.

Sous une condition sur le coefficient de mélange, les résultats obtenus sont donnés ci-dessous

$$\sup_{x \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|x) - F(t|x)| = O \left\{ \max \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n^2}}, h_n^2 \right) \right\}, \text{ p.s.}$$

et

$$\sup_{x \in \Omega} |\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x)| = O \left\{ \max \left( \sqrt{\frac{\log \log n}{nh_n^2}}, h_n^2 \right) \right\}, \text{ p.s.}$$

Dans la partie normalité asymptotique, d'autres hypothèses s'ajoutent, soient

- Conditions sur la séquence de mélange  $\alpha(n)$ ,
- Conditions sur la continuité de la densité de probabilité jointe  $f_1(., .)$ .

Ci-dessous le résultat obtenu

$$\sqrt{nh_n}(\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x))$$

La variance est telle que

$$\sigma^2(x) = \frac{\Delta^2(x)}{f_1^2(x, \xi_p(x))} > 0$$

et

$$\Delta^2(x) = \int_{\mathbb{R}} K^2(s) ds \int_0^{\xi_p(x)} \frac{f_1(x, t) dt}{1 - G(t)}.$$

Ould-Saïd et Sadki (2011) ont en outre établi la normalité asymptotique de la version lissée de l'estimateur du quantile conditionnel dans le cas censuré et  $\alpha$ -mélangeant. Ils utilisent pour cela l'écriture (2.29) pour l'estimateur à noyau du quantile conditionnel. Pour ce faire, ils exploitent les conditions suivantes

- Conditions standards sur le noyau  $K$  ainsi que sur la fenêtre  $h_n$ ,
- Conditions sur la séquence de mélange  $\alpha$ ,
- Conditions sur la densité marginale ainsi que la f.d.r. conditionnelle.
- Conditions sur la fonction de lissage  $H$ ,
- Condition sur la densité jointe  $l(., .)$ ,
- Conditions sur  $F_1(., .)$ ,
- Condition sur la f.d.r.  $G$ .

Ceci a permis d'établir les résultats ci-après

$$\sqrt{nh_n}(F_n(t|x) - F(t|x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(x, t)) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

La variance est telle que

$$\sigma^2(x, t) = \frac{\kappa F(t|x)(1 - \overline{G}(t)F(t|x))}{l(x)\overline{G}(t)}$$

et  $\kappa = \int_{\mathbb{R}} K^2(u) du < +\infty$ .

De plus

$$\sqrt{nh_n}(\xi_{p,n}(x) - \xi_p(x)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_{\xi}^2(x, \xi_p(x))) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

avec

$$\sigma_{\xi}^2(x, \xi_p(x)) = \frac{\sigma^2(x, \xi_p(x))}{f^2(\xi_p(x)|x)}.$$



# Chapitre 3

## Propriétés asymptotiques de l'estimateur du quantile conditionnel pour des données incomplètes et associées

Dans l'analyse des durées de vie ou en fiabilité, il est courant de traiter des données qui en plus d'être incomplètes sont faiblement dépendantes. La censure aléatoire droite et la troncature aléatoire gauche sont deux formes courantes de ces données lorsqu'elles ne sont ni indépendantes, ni fortement mixées mais associées. Dans cet article, nous nous intéressons à l'estimateur à noyau de la fonction quantile conditionnel d'une variable aléatoire associée strictement stationnaire  $T$  étant donné un vecteur de covariables  $d$ -dimensionnel noté  $\mathbf{X}$ , dans un modèle de censure à droite. Comme résultats principaux, nous établissons la convergence uniforme presque sûre de l'estimateur avec vitesse de convergence ainsi que la normalité asymptotique de l'estimateur. Par la suite, la performance dudit estimateur est illustrée dans une étude de simulation.

### 3.1 Introduction

Soit  $\{T_n, n \geq 1\}$  une suite strictement stationnaire de v.a d'intérêt associées ayant une f.d.r absolument continue et inconnue  $F_T$ . Cette variable peut être considérée comme une durée de vie dans le cadre d'études biomédicales. La principale caractéristique du temps de survie est l'incomplétude. Dans l'analyse de survie, en particulier dans les études médicales, nous rencontrons des modèles de censure aléatoire qui constituent l'une des hypothèses fondamentales de la théorie de l'analyse de survie. La censure aléatoire droite est un phénomène bien connu qui peut être présent lors de l'observation des données de survie. La variable de durée de vie peut ne pas être complètement observée si le patient est toujours en vie à la fin de l'étude ou s'il est décédé pour une autre raison ou en raison du départ d'un patient avant l'achèvement de l'expérience. Par conséquent, les données disponibles fournissent des informations partielles. Dans ce cas, la variable d'intérêt  $T$  est soumise à une cen-

sure à droite par une autre v.a non négative  $C$ . Dans la suite, nous supposons les temps de censure i.i.d, possédant une f.d.r lipschitzienne  $G$  inconnue. Nous prenons en considération la présence d'une covariable strictement stationnaire et associée  $\mathbf{X}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ . Dans ce modèle, la séquence observable est  $\{(Y_i, \delta_i, \mathbf{X}_i), 1 \leq i \leq n\}$ , avec  $Y_i = \min(T_i, C_i)$ ,  $\delta_i = \mathbb{1}_{\{T_i \leq C_i\}}$ .

Dans la censure aléatoire, il est commun de supposer les temps de censure  $\{C_i, 1 \leq i \leq n\}$  indépendants du vecteur  $\{(\mathbf{X}_i, T_i), 1 \leq i \leq n\}$ . Cela signifie que le mécanisme de censure ne dépend pas de l'événement en cours. Une telle condition assure l'identifiabilité du modèle.

Il est bien connu que la f.d.r conditionnelle  $F(\cdot|\mathbf{x})$  de  $T|\mathbf{X} = \mathbf{x}$  est définie par

$$F(t|\mathbf{x}) = \frac{1}{l(\mathbf{x})} \int_{-\infty}^t f(\mathbf{x}, z) dz =: \frac{F_1(\mathbf{x}, t)}{l(\mathbf{x})}, \quad (3.1)$$

où  $f(\cdot, \cdot)$  est la densité de probabilité conjointe de  $(\mathbf{X}, T)$ ,  $l(\cdot)$  est la densité marginale de  $\mathbf{X}$  et  $F_1(\mathbf{x}, \cdot)$  est la première dérivée de la f.d.r conjointe  $F(\mathbf{x}, \cdot)$  par rapport à  $\mathbf{x}$ . La densité de probabilité conditionnelle sera notée  $f(\cdot|\mathbf{x})$ . Alors, pour tout  $p \in (0, 1)$ , le  $p$ -ième quantile conditionnel de  $T$  sachant  $\mathbf{X} = \mathbf{x}$  est défini par

$$\xi_p(\mathbf{x}) := \inf\{t, F(t|\mathbf{x}) \geq p\}. \quad (3.2)$$

Par conséquent, pour l'obtention d'un estimateur non paramétrique du quantile conditionnel, nous devons clairement estimer  $F_1(\mathbf{x}, t)$  par un estimateur à noyau non biaisé et  $l(\mathbf{x})$  est estimée par le célèbre estimateur à noyau de la densité marginale.

De nombreuses recherches ont été menées concernant l'estimateur du quantile en raison de ses propriétés pertinentes. Cet estimateur est réputé pour sa bonne description des données (voir Chaudhuri et al. (1997)) et a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs.

Dans le cas complet, Samanta (1989) a établi la convergence forte et la normalité asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des données i.i.d. Bhattacharya et Gangopadhyay (1990) ont donné une représentation de type Bahadur du quantile conditionnel ainsi que des modèles asymptotiques. De plus, Mehra et al.(1991) et Xiang (1996) ont donné la convergence presque sûre d'un estimateur à noyau du quantile conditionnel, ils ont également établi sa normalité asymptotique. Honda (2000) a traité la convergence uniforme et la normalité asymptotique du quantile conditionnel en utilisant une approche d'ajustement polynomiale locale tandis qu'Abberger (1997) a étudié le lissage du quantile dans les séries temporelles financières.

Dans le même sujet pour des données censurées, Dabrowska (1992) a établi une représentation de type Bahadur de l'estimateur par régression quantile. En outre, Qin et Wu (2001) ont donné la normalité asymptotique d'un estimateur du quantile conditionnel lorsque certaines informations auxiliaires sont disponibles en utilisant la méthode de vraisemblance empirique et un ajustement linéaire. Ould-Saïd et Sadki (2005) ont établi la forte représentation de l'estimateur du quantile conditionnel dans un modèle de censure droite et la condition de mélange fort. Pour sa part, Ould-Saïd (2006) a donné le taux de convergence uniforme forte dans le cas i.i.d. Plus récemment, Liang et de Uña -Álvarez (2011) ont évalué la forte convergence uniforme ainsi que la normalité asymptotique du même estimateur dans

le cas  $\alpha$ -mélangeant. Ould-Saïd et Sadki (2011) ont quant à eux établi la normalité asymptotique de la version lissée de l'estimateur du quantile conditionnel dans le cas censuré et  $\alpha$ -mélangeant.

Deux types de dépendance sont largement utilisés dans la littérature : le mixage (Doukhan (1994)) et l'association (Esary et al.(1967)). La notion d'association a d'abord été introduite par Esary et al.(1967) principalement pour une application en fiabilité. Pour plus de détails sur le sujet, nous renvoyons le lecteur aux monographies de Bulinski et Shashkin (2007), Oliveira (2012) et Prakasa Rao (2012). Ces deux concepts ne sont pas complètement dissociés (voir Doukhan et Louhichi (1999)). En effet, nous pouvons trouver des séquences qui sont associées mais non mélangeantes, associées et mélangeantes, mélangeantes et non associées. Le principal avantage du concept de l'association par rapport au mélange réside dans le fait que les conditions des théorèmes limites sont plus faciles à vérifier : en effet, une covariance est beaucoup plus facile à calculer qu'un coefficient de mélange. Rappelons qu'un ensemble de familles finies de v.a.  $(T_1, \dots, T_n)$  est dit associé si pour toutes les fonctions non décroissantes  $\Psi_1, \Psi_2$

$$Cov(\Psi_1(T_1, \dots, T_n), \Psi_2(T_1, \dots, T_n)) \geq 0,$$

chaque fois que la covariance existe. Une famille infinie de v.a. est associée si une sous-famille finie est un ensemble de v.a. associées et que toute séquence indépendante est associée. Dans l'inférence statistique classique, les v.a. observées sont supposées i.i.d. Cependant, il est plus courant d'avoir des variables dépendantes dans certaines situations réelles. Les variables dépendantes sont présentes dans plusieurs domaines tels que la médecine, la biologie et les sciences sociales. Les v.a. associées présentent un intérêt considérable pour les problèmes de fiabilité, la théorie de la percolation et certains modèles en mécanique statistique.

Il n'existe à notre connaissance aucune étude dédiée au problème de l'inférence non paramétrique de la fonction quantile conditionnel sous un modèle associé et censuré, ce qui a motivé notre étude. Le présent chapitre traite donc de la convergence uniforme presque sûre avec taux de convergence de l'estimateur défini dans (3.6). L'article est structuré comme suit : l'expression de l'estimateur étudié est présentée dans la section 2. La section 3 rassemble les hypothèses nécessaires avec quelques commentaires. Une étude de simulation est donnée dans la section 4. La dernière section rassemble les preuves des résultats principaux ainsi que celles des résultats auxiliaires.

## 3.2 Notations et estimateurs

Pour rappel, dans le cas de données complètes (non censurées), l'écriture traditionnelle de l'estimateur à noyau de  $F(t|\mathbf{x})$  est donnée par

$$F_n(t|\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^n \omega_{in}(\mathbf{x}) \mathbb{1}_{\{T_i \leq t\}}, \quad (3.3)$$

où  $\omega_{in}(\cdot)$  sont des fonctions mesurables. Ces fonctions nommées poids ont été introduites par Nadaraya-Watson dans le contexte de la régression du noyau et définies par

$$\omega_{in}(\mathbf{x}) = \frac{K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}}\right)}{\sum_{j=1}^n K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_{n,1}}\right)} = \frac{1}{nh_{n,1}^d} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}}\right) / l_n(\mathbf{x}),$$

avec la convention  $0|0 = 0$ . Ici  $K_d$  est une fonction noyau multivariée dans  $\mathbb{R}^d$  tel que pour tout  $\mathbf{z}_l = (z_l^1, z_l^2, \dots, z_l^d)$  appartenant à  $\mathbb{R}^d$  et  $K$  étant un noyau univarié à valeurs réelles, on a

$$\frac{1}{h_{n,1}^d} K_d\left(\frac{\mathbf{z}_l}{h_{n,1}}\right) := \prod_{k=1}^d \frac{1}{h_{n,1}} K\left(\frac{z_l^k}{h_{n,1}}\right),$$

alors que  $h_{n,1}$  est une séquence positive de fenêtres tendant vers 0 avec  $n$  et  $l_n(\cdot)$  est l'estimateur de Parzen-Rosenblatt de  $l(\cdot)$ .

Dans ce qui suit, nous faisons usage de l'idée de la Probabilité Inverse de la Censure Pondérée (IPCW) de Koul et al. (1981) afin de définir les poids utilisés ultérieurement dont la formule est donnée par

$$\omega_{in}(\mathbf{x}) = \frac{1}{nh_{n,1}^d} \frac{\delta_i}{\bar{G}(Y_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}}\right). \quad (3.4)$$

Il est bien connu que la f.d.r empirique classique n'estime pas correctement les f.d.r  $F_T$  et  $G$  dans le modèle de censure droite. De ce fait, Kaplan et Meier (1958) ont proposé des estimateurs consistants  $\hat{F}_{T,n}$  et  $\hat{G}_n$  pour  $F_T$  et  $G$ , respectivement. Ces derniers sont définis par

$$\hat{F}_{T,n}(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{\delta_{(i)}}{n - i + 1} \right]^{\mathbb{1}_{\{Y_{(i)} \leq t\}}}$$

et

$$\hat{G}_n(t) = 1 - \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{1 - \delta_{(i)}}{n - i + 1} \right]^{\mathbb{1}_{\{Y_{(i)} \leq t\}}},$$

avec  $Y_{(1)}, Y_{(2)}, \dots, Y_{(n)}$  sont les statistiques d'ordre de  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  et  $\delta_{(i)}$  est le concomitant de  $Y_{(i)}$ . L'estimateur de Kaplan-Meier a fait l'objet d'études approfondies et a suscité l'intérêt de plusieurs auteurs. Pour plus de détails, nous nous référons à Stute et Wang (1993) dans le cas i.i.d, Cai (1998) dans le cas  $\alpha$ -mélangeant et Cai et Roussas (1998) dans le cas associé.

Nous rappelons qu'en utilisant les poids définis dans (3.4), Ould-Saïd (2006) avait établi la consistance forte avec vitesse de convergence de l'estimateur défini dans (3.3) dans le cas i.i.d et unidimensionnel.

La version lissée de  $F_n(\cdot|\cdot)$ , notamment

$$F_n(t|\mathbf{x}) =: \frac{F_{1,n}(\mathbf{x}, t)}{l_n(\mathbf{x})} = \frac{\frac{1}{nh_{n,1}^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\bar{G}_n(Y_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}}\right) H\left(\frac{t - Y_i}{h_{n,2}}\right)}{\frac{1}{nh_{n,1}^d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_{n,1}}\right)}, \quad (3.5)$$

a également été étudiée (consistance forte et normalité) par Ould-Saïd et Sadki (2008) dans le cas i.i.d. Ici la fenêtre  $h_{n,2}$  n'est pas nécessairement égale à  $h_{n,1}$ , nous écrivons  $h_1 := h_{n,1}$  et  $h_2 := h_{n,2}$ . Notons que (3.5) est une version de Yu et Jones (1998) adaptée au cas censuré. A l'origine, cet estimateur lissé dans le cas de données complètes (sans la IPCW  $\frac{\delta_i}{\overline{G}_n(Y_i)}$ ) avait été proposé et discuté par ces derniers auteurs principalement afin d'éviter les problèmes de croisement se produisant lors de l'utilisation de la fonction indicatrice à la place d'une f.d.r continue.

En vue de (3.5), un estimateur naturel de (3.2) peut être calculé par

$$\xi_{p,n}(\mathbf{x}) = \inf\{t, F_n(t|\mathbf{x}) \geq p\}. \quad (3.6)$$

Afin de démontrer nos résultats, un pseudo estimateur auxiliaire sera d'un grand intérêt :

$$\tilde{F}_n(t|\mathbf{x}) =: \frac{\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)}{l_n(\mathbf{x})} = \frac{\frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}_n(Y_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) H\left(\frac{t - Y_i}{h_2}\right)}{\frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1}\right)}. \quad (3.7)$$

Noter que (3.7) ne peut être calculé du fait que l'on suppose  $\overline{G}(\cdot)$  inconnue.

Nous utiliserons également la densité de probabilité conditionnelle  $f(t|\cdot)$  définie par  $f(t|\cdot) = \frac{\partial}{\partial t} F(t|\cdot)$ .

Par conséquent, les estimateurs correspondants sont donnés par

$$f_n(t|\mathbf{x}) = \frac{f_n(\mathbf{x}, t)}{l_n(\mathbf{x})} \quad \text{et} \quad \tilde{f}_n(t|\mathbf{x}) = \frac{\tilde{f}_n(\mathbf{x}, t)}{l_n(\mathbf{x})}, \quad (3.8)$$

avec comme premières dérivées partielles par rapport à la deuxième composante

$$f_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial F_{1,n}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{nh_1^d h_2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}_n(Y_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) H^{(1)}\left(\frac{t - Y_i}{h_2}\right) \quad (3.9)$$

et

$$\tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = \frac{1}{nh_1^d h_2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}_n(Y_i)} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1}\right) H^{(1)}\left(\frac{t - Y_i}{h_2}\right)$$

où  $H^{(1)}$  est la première dérivée de  $H$ . Par un développement de Taylor de  $F_n(\cdot|\cdot)$  au voisinage de  $\xi_p$ , on obtient

$$F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})) f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}),$$

tel que  $\xi_{p,n}^*$  est entre  $\xi_p$  et  $\xi_{p,n}$ . Cette approche donne les résultats asymptotiques de  $(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}))$  à partir du comportement de  $(F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}))$ . Si  $f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = 0$ , nous devons accroître l'ordre dans le développement de Taylor et modifier les preuves en conséquence.

### 3.3 Hypothèses et résultats principaux

Dans ce qui suit,  $m$  est une constante positive prenant des valeurs différentes et  $\tau$  est un nombre réel positif satisfaisant  $\tau < \tau_F < \tau_G$  tel que pour toute f.d.r  $W$ ,  $\tau_W := \sup\{y; W(y) < 1\}$ . Soit

$\Omega_0 = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d / l(\mathbf{x}) \geq m_0 := \inf_x l(\mathbf{x}) > 0\}$  tel que  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  soient deux ensembles compacts inclus dans  $\Omega_0$  et  $[0, \tau]$ , respectivement. Les principaux résultats seront établis en utilisant les hypothèses suivantes :

**A1.** Les fenêtres  $h_1$  et  $h_2$  satisfont

- (i)  $h_1 \rightarrow 0$ ,  $nh_1^{2\alpha+d(1-\alpha)} \rightarrow +\infty$  avec  $\alpha \in (0, 1)$  et  $\frac{\log^5 n}{nh_1^d} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,
- (ii)  $h_2 \rightarrow 0$  et  $nh_1^d h_2 \rightarrow +\infty$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,
- (iii)  $nh_1^d h_2^4 \rightarrow 0$  et  $nh_1^{d+4} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ ,
- (iv)  $v_s h_1^d \rightarrow 0$  et  $v_s$  est une séquence de nombres réels ;

**A2.** Le noyau  $K_d$  est une densité de probabilité bornée, à support compact et admet

- (i)  $K_d$  est Hölderienne, continue d'ordre  $\alpha$ ,
- (ii)  $\int_{\mathbb{R}^d} u_j K_d(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = 0$ , pour tout  $j = 1, \dots, d$  avec  $\mathbf{u} = (u_1, \dots, u_d)^\top$ ,
- (iii) Le noyau  $K_d$  admet des dérivées partielles d'ordre 1 bornées ;

**A3.** La fonction  $H$  dans (3.5) est de classe  $\mathcal{C}^1$ . Par ailleurs, sa dérivée  $H^{(1)}$  est bornée, à support compact et satisfait les propriétés d'un noyau de second ordre et

- (i)  $\int_{\mathbb{R}} |t|^\alpha H^{(1)}(t) dt < +\infty$  ;

**A4.** La densité marginale  $l(\cdot)$  est bornée et deux fois différentiable avec :

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \frac{\partial^k l(\mathbf{x})}{\partial x_i \partial x_j^{k-1}}(x) \right| < \infty \text{ pour } i, j = 1, \dots, d \text{ et } k = 1, 2 ;$$

**A5.** La densité de probabilité conjointe  $f(\cdot, \cdot)$  est bornée et trois fois continûment différentiable, de plus

- (i) La f.d.r conditionnelle  $F(t|x)$  satisfait la condition de lipschitz d'ordres  $u_1$  et  $u_2$  aux voisinages de  $\mathbf{x}$  et  $t$  avec

$$\forall (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2) \in \Omega^2, \forall (t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2, |F(t_1|\mathbf{x}_1) - F(t_2|\mathbf{x}_2)| \leq m(|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2|^{u_1} + |t_1 - t_2|^{u_2}),$$

- (ii)  $\forall \mathbf{x} \in \Omega, \int_{\mathbb{R}} |t| f(t|\mathbf{x}) dt < +\infty$  ;

**A6.** La densité de probabilité conjointe  $l_{i,j}(\cdot, \cdot)$  de  $(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$  est bornée ;

**A7.** La densité de probabilité conjointe  $f(\cdot, \cdot, \cdot, \cdot)$  de  $(\mathbf{X}_i, Y_i, \mathbf{X}_j, Y_j)$  est bornée ;

**A8.** Définissons  $\Lambda_{ij}$  comme suit :

$$\Lambda_{ij} := \sum_{k=1}^d \sum_{l=1}^d Cov(X_i^k, X_j^l) + 2 \sum_{k=1}^d Cov(X_i^k, Y_j) + Cov(Y_i, Y_j), \quad (3.10)$$

avec  $X_i^k$  la k-ième composante de  $\mathbf{X}_i$ , telle que pour tous  $j \geq 1$  et  $r > 0$

$$\sup_{i:|j-i| \geq r} \Lambda_{ij} =: \rho(r) \leq \gamma_0 e^{-\gamma r}, \text{ pour tous } \gamma_0, \gamma > 0;$$

**A9.** La fonction  $\varsigma(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{G(v)} f(\mathbf{x}, v) dv$  est bornée, continûment différentiable et  $\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \left| \frac{\partial \varsigma}{\partial x_i}(\mathbf{x}) \right| < \infty$  pour  $i = 1, \dots, d$ .

Des hypothèses supplémentaires viennent s'ajouter pour établir les preuves relatives à la partie normalité asymptotique

**N1.** La fonction de survie  $G$  des v.a. censurées admet une dérivée première bornée  $g$ ;

**N2.** Soit  $0 < p_n < n$ ,  $0 < q_n < n$  des entiers tendant vers  $\infty$  avec  $n$  tels que  $p_n + q_n \leq n$ . Soit  $k_n$  l'entier le plus large pour lequel  $k_n(p_n + q_n) \leq n$  et

(i)  $\frac{k_n p_n}{n} \rightarrow 1$  (ii)  $p_n h_1^d \rightarrow 0$  et  $\frac{p_n^2}{n h_1^d} \rightarrow 0$  (iii)  $\frac{e^{-\gamma q_n}}{h_1^{d+2} h_2^2} \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow \infty$ .

**Remarque 3.1.** L'hypothèse **A1** donne un choix classique de fenêtres dans l'estimation fonctionnelle. Pour des raisons de simplicité, de nombreux auteurs considèrent  $h_1 = h_2$ , ce qui est généralement non justifié. A noter que la condition **A1** (ii) implique la première condition dans **A1** (i) si  $d \geq 2$ . Pour  $d = 1$ , la comparaison n'est pas simple et dépend de l'ordre de grandeur de  $h_2$  par rapport à  $h_1^\alpha$ . L'hypothèse **A2** est assez courante dans l'estimation du noyau. Les hypothèses **A3-A7** sont classiques dans le cadre de l'estimation non paramétrique sous l'hypothèse de dépendance alors que **A8** est utilisée pour le calcul de la covariance dans une structure associée. De plus, cette hypothèse donne une tendance progressive à l'indépendance asymptotique du "passé" et du "futur". Enfin, la condition **A9** est principalement technique. La condition **N1** est utilisée pour des calculs techniques de la normalité asymptotique. Finalement, l'hypothèse **N2** est particulièrement utile pour des données dépendantes dans le cadre d'études de la normalité asymptotique notamment dans les grands et petits blocs. La condition **N2**(ii) et le fait que  $\frac{k_n(p_n+q_n)}{n} \rightarrow 1$  impliquent que  $\frac{k_n q_n}{n} \rightarrow 0$ . Remarquons que  $\frac{k_n q_n/n}{k_n p_n/n} \rightarrow 0$  permet de déduire que  $q_n < p_n$ . Ajouter à cela la première partie de l'hypothèse **N2**(ii), nous obtenons que  $q_n h_n^d \rightarrow 0$ .

• Les hypothèses **A1**(iii) et (iv), **A2**(iii), **A3**(i) et **A5**(i) et (ii) concernent la partie normalité asymptotique.

### 3.3.1 Convergence uniforme forte

Le premier résultat établit le taux de convergence du terme de fluctuation  $\left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right|$ . Cela se fera en appliquant une inégalité de type Bernstein énoncée par Doukhan et Neumann (2007) pour les v.a. faiblement dépendantes. Le résultat donné dans le Théorème 3.2 indique un taux de convergence uniforme presque sûre de  $F_n(t|x)$  vers  $F(t|x)$ , qui sera donné par le moyen du Théorème 3.1. Par la suite, comme résultat immédiat, le comportement asymptotique de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel sera déduit comme présenté dans le corollaire 3.1.

**Théorème 3.1.** Si les conditions **A1-A5** et **A7-A9** sont satisfaites et pour  $n$  assez grand, nous avons

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right| = O \left( \sqrt{\frac{\log n}{n h_1^d}} \right), \text{ p.s.} \quad (3.11)$$

**Théorème 3.2.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 et **A6**, pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})| = O \left\{ (h_1^2 + h_2^2) + n^{-\theta} + \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right\}, \text{ p.s.}$$

avec  $0 < \theta < \gamma/(2\gamma + 9 + 3/2\kappa)$  pour tout  $\kappa > 0$ .

**Corollaire 3.1.** *Sous les hypothèses du Théorème 3.2, et pour tout  $p \in (0, 1)$  fixé et  $\mathbf{x} \in \Omega$ , si  $\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) > 0$ , alors pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})| = O \left\{ (h_1^2 + h_2^2) + n^{-\theta} + \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right\}, \text{ p.s.}$$

**Remarque 3.2.** *La condition de positivité uniforme de la densité conditionnelle dans le corollaire 3.1 garantit l'unicité uniforme du quantile conditionnel. Par conséquent*

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \beta > 0, \forall \eta_p : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\xi_p(\mathbf{x}) - \eta_p(\mathbf{x})| \geq \varepsilon \Rightarrow \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\eta_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})| \geq \beta.$$

**Remarque 3.3.** *Nous rappelons que le taux dans le corollaire 3.1 dépend du paramètre  $\theta$  relatif à la dépendance de type associé. De plus, remarquons que pour  $\gamma$  assez grand, le paramètre  $\theta$  se rapproche de sa limite supérieure ( $\theta=1/2$ ), puis les covariances deviennent négligeables, ce qui permet de comparer notre taux à ceux donnés dans les cas de mélange fort et i.i.d.*

### 3.3.2 Normalité asymptotique

Le Théorème 3.3 traite la normalité asymptotique de (3.5) convenablement normalisé. Par le théorème de Slutsky, la normalité asymptotique de  $(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}))$  dans le Corollaire 3.2 se déduit de la normalité asymptotique de  $(F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}))$  et la convergence en probabilité de  $f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x})$ .

**Théorème 3.3.** *Sous les hypothèses **A1-A8** et **N1-N2**, pour tous  $\mathbf{x} \in \Omega_0$  et  $l(\mathbf{x}) > 0$ , nous avons*

$$\sqrt{nh_1^d}(F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

La variance est telle que

$$\sigma^2(\mathbf{x}, t) = \frac{\kappa F(t|\mathbf{x})(1 - \overline{G}(t)F(t|\mathbf{x}))}{l(\mathbf{x})\overline{G}(t)} \quad (3.12)$$

et  $\kappa = \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{u})d\mathbf{u} < +\infty$ .

**Corollaire 3.2.** *En assumant que  $p \in (0, 1)$ . Sous les conditions du Théorème 3.3 et pour tout  $\mathbf{x} \in \Omega_0$  tel que  $f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \neq 0$ , nous avons*

$$\sqrt{nh_1^d}(\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma_\xi^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty$$

avec

$$\sigma_\xi^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x})) = \frac{\sigma^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))}{f^2(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})}.$$



**Remarque 3.4.** Si nous remplaçons  $l(\cdot)$ ,  $f(\cdot|\cdot)$ ,  $\overline{G}(\cdot)$  et  $\xi_p(\cdot)$  par leurs estimateurs  $l_n(\cdot)$ ,  $f_n(\cdot|\cdot)$ ,  $\overline{G}_n(\cdot)$  et  $\xi_{p,n}(\cdot)$ , respectivement alors un estimateur convergent de type plug-in dénoté  $\sigma_{\xi,n}^2(\mathbf{x}, \xi_{p,n}(\mathbf{x}))$  de  $\sigma_{\xi}^2(\mathbf{x}, \xi_p(\mathbf{x}))$  est facilement obtenu. Notons que

$$\sigma_{\xi,n}^2(\mathbf{x}, \xi_{p,n}(\mathbf{x})) = \frac{\kappa F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x})(1 - \overline{G}_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})))F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})\overline{G}_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x}))f_n^2(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x})}.$$

En utilisant les hypothèses du Théorème 3.3, l'intervalle de confiance de niveau  $(1 - \vartheta)$  pour  $\xi_p(\mathbf{x})$  qui représente une application de la normalité asymptotique est alors donné par

$$\left[ \xi_{p,n}(\mathbf{x}) - z_{1-\vartheta/2} \frac{\sigma_{\xi,n}(\mathbf{x}, \xi_{p,n}(\mathbf{x}))}{\sqrt{nh_1^d}}, \xi_{p,n}(\mathbf{x}) + z_{1-\vartheta/2} \frac{\sigma_{\xi,n}(\mathbf{x}, \xi_{p,n}(\mathbf{x}))}{\sqrt{nh_1^d}} \right]$$

avec  $z_{1-\vartheta/2}$  dénote le quantile d'ordre  $(1 - \vartheta/2)$  de la loi normale centrée réduite.

## 3.4 Etude de simulation

### 3.4.1 Consistance

#### 3.4.1.1 Description du modèle

Cette partie est établie dans l'intention de donner le comportement de l'estimateur du quantile conditionnel. Pour cela, nous ne considérons en détail que les cas de la moyenne conditionnelle ( $p = 1/2$ ) et de la covariable à une dimension ( $d = 1$ ). L'étude de simulation est réalisée pour différentes tailles de l'échantillon et différents taux de censure ( $CR$ ). La performance de notre estimateur est quantifiée via l'erreur quadratique moyenne globale (GMSE). Les données sont obtenues comme suit :

- Génération de  $n + 1$  v.a. i.i.d  $Z_i \sim \Gamma(5, 0.5)$  qui exprime une loi gamma ;
- Génération de  $n$  v.a. i.i.d  $\varepsilon_i \sim \mathcal{N}(0, 0.01)$  ;
- Etant donné  $Z_i$ , nous générons la  $n$ -séquence associée  $(X_i, T_i)$  par le modèle bi-dimensionnel associé suivant :

a) Cas linéaire

$$\begin{cases} X_i = (Z_{i-1} + Z_{i-2})/2, \\ T_i = 3X_i/2 + 0.45 \varepsilon_i. \end{cases}$$

b) Cas non linéaire

$$\begin{cases} X_i = (Z_{i-1} + Z_{i-2})/2, \\ T_i = \log(3X_i/2) + 0.45 \varepsilon_i, \end{cases}$$

Il est facile de voir que  $X_i \sim \Gamma(10, 0.5)$ . Pour plus de détails, Nous référons à Chaubey et al.(2011).

- Simulation de  $n$  v.a. i.i.d  $C_i \sim \exp(\lambda)$ . Le paramètre  $\lambda$  varie selon le  $CR$ . Alors, nous conservons la séquence observée  $(Y_i, X_i, \delta_i)$ .

- Pour le calcul des estimateurs, nous utilisons la f.d.r de la loi normale centrée réduite ainsi que le noyau gaussien pour  $H$  et  $K$ , respectivement.

Dans le but d'atténuer l'effet de bord tel qu'il est connu, nous utiliserons les fenêtres locales optimales. Pour ce faire, nous avons d'abord supposé que  $h_1 = h_2 =: h$ , cette fenêtre balaye l'intervalle  $[0.05, 0.8]$ . Pour chaque modèle, le processus ci-dessus est répété  $B = 300$  fois avec des valeurs fixes de  $n$  et  $CR$ . Ainsi, nous calculons l'estimateur du quantile conditionnel le long d'une grille de points dans  $[1.5, 4]$ . À la fin du processus, nous recherchons la fenêtre locale optimale qui minimise les erreurs d'estimation quantifiées par le  $MSE$  (erreur quadratique moyenne) et donne en outre le  $GMSE$  en conséquence. La formule de calcul du  $GMSE$  s'écrit

$$GMSE = \frac{1}{uB} \sum_{j=1}^u \sum_{i=1}^B [\xi_{p,n,i}(x_j) - \xi_p(x_j)]^2,$$

où  $\xi_{p,n,i}(x_j)$  est la valeur de  $\xi_{p,n}(x_j)$  à l'itération  $i$  et  $u$  est le nombre de points équidistants  $x_j = x$  appartenant à  $[1.5, 4]$ .

Afin d'afficher la qualité de l'ajustement, nous allons tracer l'estimateur du quantile conditionnel  $\xi_{p,n}(x)$  par rapport à  $\xi_p(x)$ .

### 3.4.1.2 Résultats de simulation

#### Cas linéaire :

Notons que sous ce modèle, la v.a. conditionnelle  $(T|X = x)$  suit  $\mathcal{N}(3x/2, 0.0045)$ . Afin de montrer l'influence du taux de censure et de la taille de l'échantillon sur la qualité de l'ajustement, nous traçons des courbes de différentes tailles d'échantillons  $n = 50, 100$  et  $300$  pour  $CR = 40\%, 25\%$  et  $10\%$  comme illustré dans les figures 3.1, 3.2 et 3.3. Les erreurs correspondantes sont résumées dans le tableau 3.1. On remarque que la qualité de l'ajustement augmente lorsque le CR diminue. Les courbes révèlent aussi que les effets de bord du côté droit ont tendance à diminuer pour les grandes valeurs de  $n$ . Bien entendu, la performance est tout à fait acceptable lorsque  $n = 50$  et devient plus importante pour  $n = 300$ . Cela signifie que l'influence du  $CR$  sur la qualité de l'ajustement devient de plus en plus insignifiante avec  $n$ .

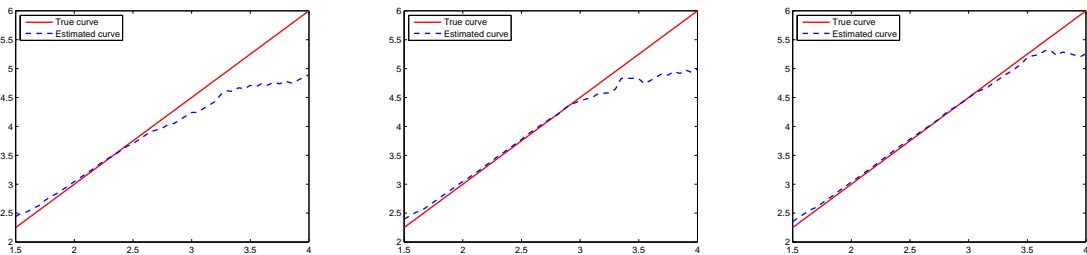


FIGURE 3.1 – Cas linéaire :  $n = 50$  et  $CR = 40\%, 25\%$  et  $10\%$ , respectivement

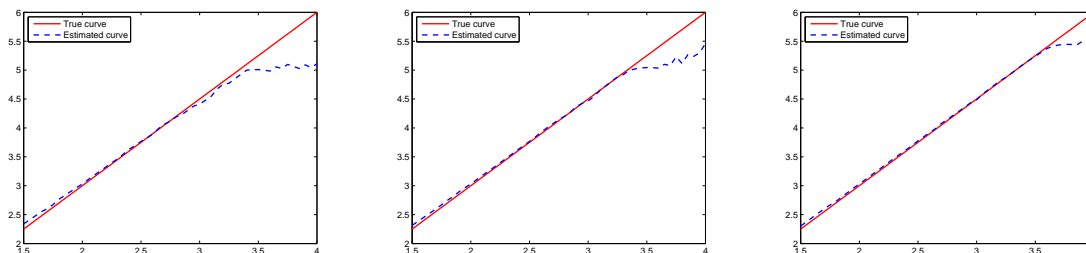


FIGURE 3.2 – Cas linéaire :  $n = 100$  et  $CR = 40\%$ ,  $25\%$  et  $10\%$ , respectivement

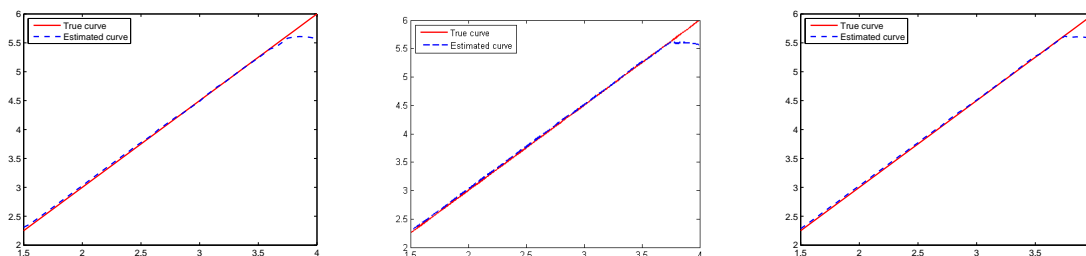


FIGURE 3.3 – Cas linéaire :  $n = 300$  et  $CR = 40\%$ ,  $25\%$  et  $10\%$ , respectivement

Dans la table 3.1, nous quantifions les erreurs au moyen du  $GMSE$ . Nous observons que la tendance à la baisse de la performance de notre estimateur est confirmée pour des petites tailles de l'échantillon et les valeurs croissantes du taux de censure.

**Cas non linéaire :**

TABLE 3.1 – Valeurs du  $GMSE$  pour  $\xi_{p,n}$  avec  $p = 0.5$

Cas linéaire	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$
$CR = 10\%$	0.0637	0.0245	0.0069
$CR = 25\%$	0.1591	0.0586	0.0113
$CR = 40\%$	0.2465	0.1059	0.0128

Nous suivons la même procédure que pour le cas linéaire. Nous choisissons la fonction log afin de garder la propriété d'association par monotonie. Cependant, la v.a.  $(T|X = x) \sim \mathcal{N}(\log(3x/2), 0.0045)$ . Nous traçons les courbes comme ci-dessus. Nous observons la même tendance que dans le cas linéaire et il y a une nette amélioration des courbes avec la taille de l'échantillon, de sorte que la qualité de l'estimation est aussi bonne que pour le cas linéaire. Dans le tableau 3.2, nous rapportons les valeurs du  $GMSE$ . Les petites valeurs obtenues montrent que notre estimateur se comporte bien et fonctionne mieux lorsque  $n$  devient important, comme le montrent les graphiques ci-dessus.

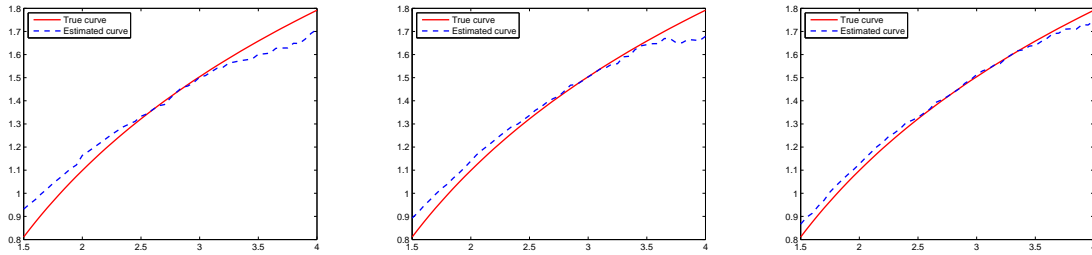


FIGURE 3.4 – Cas non linéaire :  $n = 50$  et  $CR = 40\%$ ,  $25\%$  et  $10\%$ , respectivement

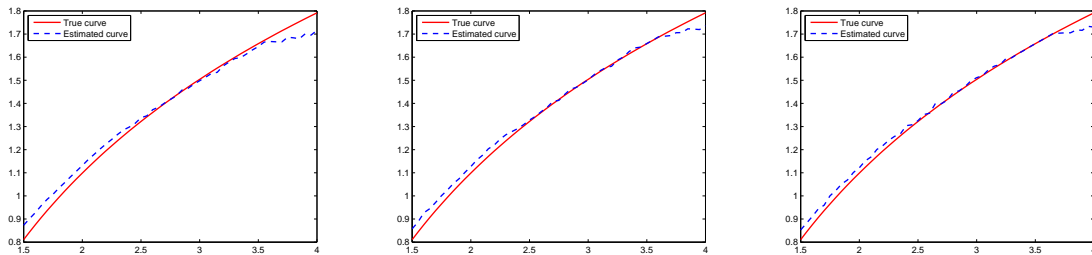


FIGURE 3.5 – Cas non linéaire :  $n = 100$  et  $CR = 40\%$ ,  $25\%$  et  $10\%$ , respectivement

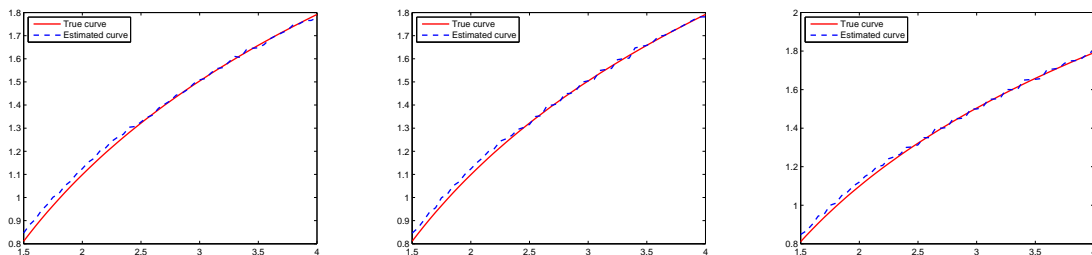


FIGURE 3.6 – Cas non linéaire :  $n = 300$  et  $CR = 40\%$ ,  $25\%$  et  $10\%$ , respectivement

Dans la figure 3.7, nous prenons respectivement  $p = 0.25$ ,  $p = 0.5$  et  $p = 0.75$  afin de mettre en évidence l'impact de la probabilité. La qualité de l'ajustement semble être la meilleure avec le quantile médian. Pour rappel,  $p = 0.25$  nous donne le quartile conditionnel inférieur tandis que pour  $p = 0.75$  nous obtenons le quartile conditionnel supérieur.

La figure 3.8 donne un aperçu des résultats obtenus lors de l'utilisation des fenêtres optimales globales  $(h_{1opt}, h_{2opt})$  prenant leurs valeurs dans l'ensemble  $\{n^{-1}, n^{-2}, \dots, n^{-9}\}^2$  pour  $p = 0.5$ . A la fin du processus, nous retenons les valeurs minimales du GMSE calculé ainsi que les paires  $(h_{1opt}, h_{2opt})$  optimales correspondantes. Les figures obtenues montrent un effet de bord à gauche qui s'atténue en augmentant la taille de l'échantillon.

TABLE 3.2 – Valeurs du  $GMSE$  pour  $\xi_{p,n}(\cdot)$  avec  $p = 0.5$

Cas non linéaire	$n = 50$	$n = 100$	$n = 300$
$CR = 10\%$	$24 \times 10^{-3}$	$15 \times 10^{-3}$	$5.54 \times 10^{-4}$
$CR = 25\%$	$69 \times 10^{-3}$	$25 \times 10^{-3}$	$8.23 \times 10^{-4}$
$CR = 40\%$	$11 \times 10^{-2}$	$51 \times 10^{-3}$	$16 \times 10^{-3}$

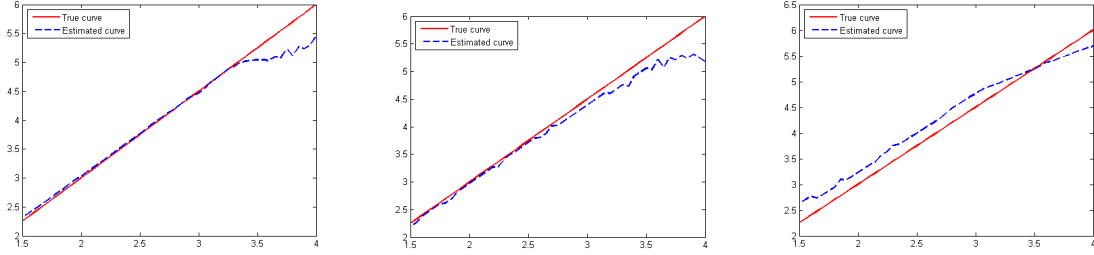


FIGURE 3.7 – Cas linéaire  $n = 100$  et  $p = 0.25$ ;  $p = 0.5$ ,  $p = 0.75$  respectivement et  $CR = 25\%$ .

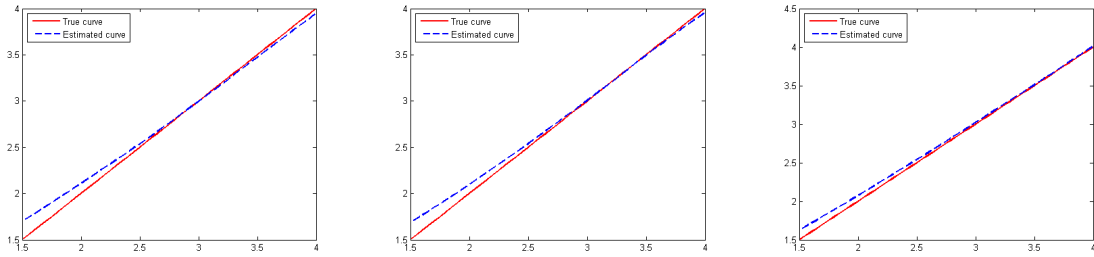


FIGURE 3.8 –  $p = 0.5$ ;  $n = 50$ ,  $100$  et  $300$  respectivement et  $CR = 10\%$ .

### 3.4.2 Normalité asymptotique

Ici, nous évaluons la normalité asymptotique de notre estimateur dans le cas unidimensionnel et pour des échantillons de tailles finie, nous modifions la taille de l'échantillon ( $n = 100, 300$ ), fixons le CR à 25% et prenons le modèle associé (a) donné précédemment. La fenêtre choisie est  $h = (\frac{\log n}{n})^{1/3}$ . Le quantile conditionnel est estimé de la même façon que pour la partie consistance.

La première façon de démontrer la bonne performance de notre estimateur est la comparaison de la forme de la densité normale centrée réduite à celle de l'écart normalisé entre notre estimateur et le quantile conditionnel théorique pour  $p = 1/2$  et en fixant  $x = 2$ , soit

$$\dot{\xi}_{1/2,n}(x) = \sqrt{nh} \left( \frac{\kappa 1/2 (1 - 1/2 \bar{G}_n(\xi_{1/2,n}(x)))}{l_n(x) \bar{G}_n(\xi_{1/2,n}(x)) f_n^2(\xi_{1/2,n}(x)|x)} \right)^{-1/2} (\xi_{1/2,n}(x) - \xi_{1/2}(x)).$$

La densité de probabilité de cet écart normalisé est estimée par la méthode du noyau avec le choix de la fenêtre appropriée, à savoir  $h_B = 0.01B^{-1/5}$  où  $B = 1000$  est le nombre d'itérations du processus.

TABLE 3.3 – Valeurs du  $GMSE$  et  $(h_{1opt}, h_{2opt})$  pour  $CR = 10\%$

p=0.5	$GMSE$	$h_{1opt}$	$h_{2opt}$
$n = 50$	$12 \times 10^{-2}$	0.457	0.1414
$n = 100$	$29 \times 10^{-3}$	0.3981	0.001
$n = 300$	$11 \times 10^{-3}$	0.593	0.028

Nous traçons les deux densités ensembles, les histogrammes ainsi que les QQ-plot. Les figures 3.9 et 3.10 montrent que l'estimateur affiche une légère amélioration pour des tailles d'échantillons plus importantes. Néanmoins la qualité d'ajustement reste bonne pour des échantillons de petites tailles.

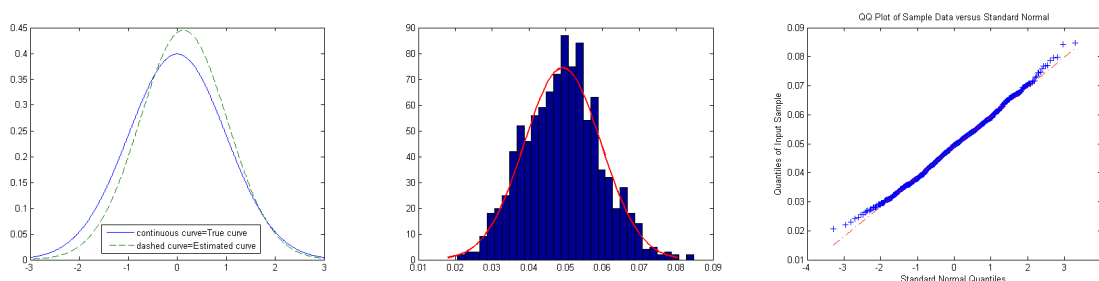


FIGURE 3.9 – Graphiques pour les densités, histogrammes et QQ-plot :  $n = 100$  et  $CR = 25\%$

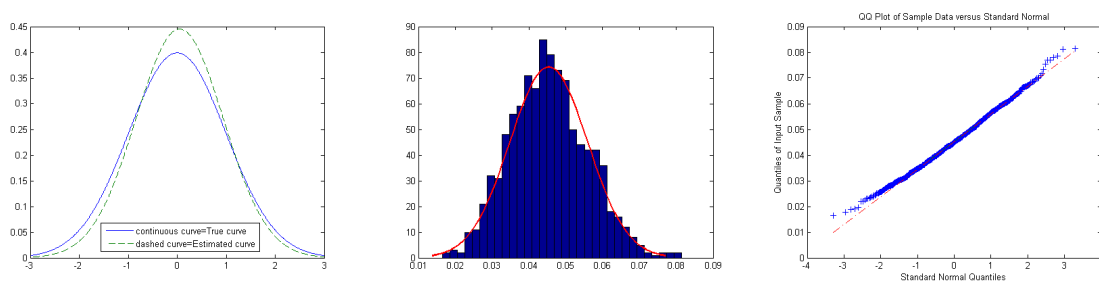


FIGURE 3.10 – Graphiques pour les densités, histogrammes et QQ-plot :  $n = 300$  et  $CR = 25\%$

A présent,  $x$  fluctue dans l'intervalle  $[1.5, 3.5]$  avec un pas de 0.05. La fenêtre locale optimale est utilisée et varie avec  $n$ . Nous construisons des intervalles de confiance à 95% pour le quantile conditionnel pour différentes valeurs de  $n$  (50, 100 et 300) et considérons  $B = 500$ , nous gardons  $p = 1/2$  et  $CR = 25\%$  soit

$$\xi_{1/2,n}(x) \pm 1.96 \times \frac{\sigma_{\xi,n}^2(x, \xi_{1/2,n}(x))}{\sqrt{nh}}.$$

Dans le même graphique, nous traçons l'estimateur du quantile conditionnel, le quantile conditionnel théorique ainsi que les bornes inférieures et supérieures de l'intervalle de confiance approximés à 97.5%. Les graphiques obtenus montrent une diminution de la largeur de l'intervalle lorsque la taille de l'échantillon observé  $n$  augmente.

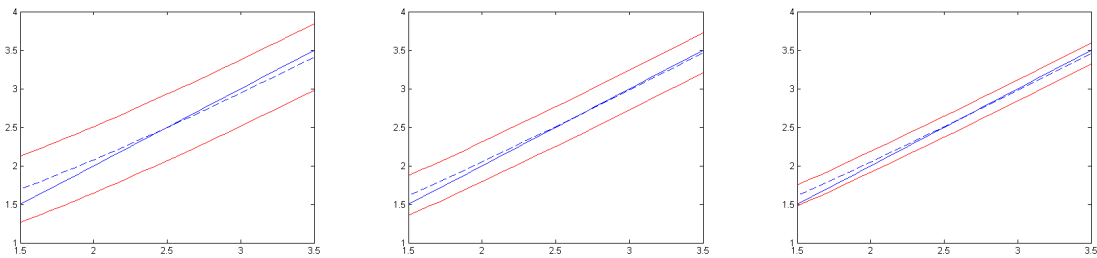


FIGURE 3.11 – Intervalles de confiance de  $\xi_{1/2,n}(x)$  à 95% pour  $n = 50, 100$  et  $300$  et  $CR = \%25$

## 3.5 Preuves

### 3.5.1 Preuves pour la consistance

Pour établir nos résultats, nous définissons

$$\Delta_i(\mathbf{x}, t) = \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \right],$$

Pour tout  $i = 1, \dots, n$ . Il est facile de voir que

$$\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] = \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}, t). \quad (3.13)$$

Les points de la proposition suivante sont similaires aux conditions du Théorème 1 dans Doukhan et Neumann (2007). Une fois les conditions remplies, il devient possible d'utiliser une inégalité exponentielle pour prouver le Théorème 3.1 lié au terme de fluctuation.

**Proposition 3.1.** *Soient  $\Delta_1(\mathbf{x}, t), \Delta_2(\mathbf{x}, t), \dots, \Delta_n(\mathbf{x}, t)$  définis comme ci-dessus. Alors, il existe les constantes  $M, L_1, L_2, \mu \geq 0, \lambda \geq 0$  et une séquence non décroissante de coefficients réels  $(\Upsilon(n))_{n \geq 0}$  tels que pour tous  $p$ -tuplets  $(s_1, \dots, s_p)$  et tous  $q$ -tuplets  $(v_1, \dots, v_q)$  avec  $1 \leq s_1 \leq \dots \leq s_p \leq v_1 \leq \dots \leq v_q \leq n$ , nous avons*

- a)  $Cov \left( \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i(\mathbf{x}, t), \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j(\mathbf{x}, t) \right) \leq m^{p+q} h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} pq \Upsilon(v_1 - s_p),$
- b)  $\sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{k_0} \Upsilon(s) \leq L_1 L_2^{k_0} (k_0!)^\mu, \forall k_0 \geq 0,$
- c)  $\mathbb{E} [ |\Delta_i(\mathbf{x}, t)|^{k_0} ] \leq (k_0!)^\lambda M^{k_0}.$

**Preuve de la Proposition 3.1** La démonstration du premier point de la Proposition 3.1 requiert l'utilisation du lemme ci-après :

**Lemme 3.1.** *Sous les conditions **A2**, **A5**, **A7** et **A8**, nous avons*

- i)  $Cov \left( \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i(\mathbf{x}, t), \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j(\mathbf{x}, t) \right) =: C_1 \leq m^{p+q} h_1^{-2} h_2^{-2} pq \rho (v_1 - s_p),$
- ii)  $Cov \left( \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i(\mathbf{x}, t), \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j(\mathbf{x}, t) \right) =: C_2 \leq m^{p+q} h_1^{2d} h_2^2.$

**Preuve du Lemme 3.1** Par la définition 5.1, p.88 dans Bulinski & Shashkin (2007), nous rappelons l'écriture des constantes lipschitziennes partielles :

$$Lip_i(\Phi_m) = \sup_{\substack{z_1, \dots, z_m, z'_i \in \mathbb{R} \\ z_i \neq z'_i}} \frac{|\Phi_m(z_1, \dots, z_{i-1}, z_i, z_{i+1}, \dots, z_m) - \Phi_m(z_1, \dots, z_{i-1}, z'_i, z_{i+1}, \dots, z_m)|}{|z_i - z'_i|}, \quad (3.14)$$



avec  $\Phi_m : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  et  $Lip(\Phi_m)$  représente le module de continuité lipschitzien de  $\Phi_m$ , à savoir

$$Lip(\Phi_m) = \sup_{\mathbf{x} \neq \mathbf{y}} \frac{|\Phi_m(\mathbf{x}) - \Phi_m(\mathbf{y})|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1},$$

avec  $\|(z_1, \dots, z_n)\|_1 = |z_1| + \dots + |z_n|$ .

Afin de démontrer la partie (i) du Lemme 3.1, nous faisons appel au Théorème 5.3, p.89 dans Bulinski et Shashkin (2007). Posons tout d'abord

$$\Phi_p =: \prod_{i=s_1}^{s_p} \Delta_i \quad \text{et} \quad \Phi_q =: \prod_{j=v_1}^{v_q} \Delta_j.$$

Comme  $K_d$ ,  $H$  et  $G$  sont des fonctions Lipschitziennes, alors

$$Cov(\Phi_p, \Phi_q) \leq \sum_{i=s_1}^{s_p} \sum_{j=v_1}^{v_q} Lip_i(\Phi_p) Lip_j(\Phi_q) \Lambda_{ij},$$

La définition dans (3.14) mène à

$$Lip_i(\Phi_p) \leq \frac{M_0}{h_1 h_2} \left( \frac{2}{\overline{G}(\tau)} \right)^p \|K_d\|_\infty^{p-1}$$

et

$$Lip_j(\Phi_q) \leq \frac{M_0}{h_1 h_2} \left( \frac{2}{\overline{G}(\tau)} \right)^q \|K_d\|_\infty^{q-1},$$

où  $M_0 = \max \left\{ h_2 Lip(K) \|K\|_\infty^{d-1}, h_1 \left( Lip(H) + h_2 \frac{Lip(\overline{G})}{\overline{G}(\tau)} \right) \|K_d\|_\infty \right\}$ .

Notons que les fonctions lipschitziennes partielles sont obtenues comme suit :

$$\begin{aligned} Lip_i(\Phi_p) &\leq \frac{M_0}{h_1 h_2} \left( \frac{2}{\overline{G}(\tau)} \right)^{p-1} \|K_d\|_\infty^{p-1} \frac{1}{\overline{G}(\tau)} \\ &\leq \frac{M_0}{h_1 h_2} \left( \frac{2}{\overline{G}(\tau)} \right)^p \|K_d\|_\infty^{p-1}. \end{aligned}$$

Si la condition **A8** est vérifiée, par stationnarité nous avons

$$\begin{aligned} Cov(\Phi_p, \Phi_q) &\leq \frac{M_0^2}{h_1^2 h_2^2} \left( \frac{2}{\overline{G}(\tau)} \right)^{p+q} \|K_d\|_\infty^{p+q-2} \sum_{i=s_1}^{s_p} \sum_{j=v_1}^{v_q} \Lambda_{ij} \\ &\leq \frac{m^{p+q}}{h_1^2 h_2^2} pq \rho(v_1 - s_p). \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve (i). Dans le but de prouver la seconde partie du Lemme 3.1, nous aurons recours au calcul du terme de covariance comme montré ci-après en utilisant le fait que

$$\mathbb{E}[\delta_i \delta_j | T_i, T_j] = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{\{T_i \leq C_i\}} \mathbb{1}_{\{T_j \leq C_j\}} | T_i, T_j] = \overline{G}(T_i) \overline{G}(T_j).$$

Nous utiliserons également les notations simplifiées suivantes

$$K_{d,\mathbf{x},i} := K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \quad \text{et} \quad H_{t,i} := H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right).$$

De ce fait, nous avons

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\Delta_i(\mathbf{x}, t), \Delta_j(\mathbf{x}, t)) &= \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_i \delta_j}{\overline{G}(Y_i) \overline{G}(Y_j)} K_{d,\mathbf{x},i} H_{t,i} K_{d,\mathbf{x},j} H_{t,j} \right] \\
&- \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_{d,\mathbf{x},i} H_{t,i} \right] \times \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} K_{d,\mathbf{x},j} H_{t,j} \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ K_{d,\mathbf{x},i} K_{d,\mathbf{x},j} \mathbb{E} \left( \frac{\delta_i \delta_j}{\overline{G}(Y_i) \overline{G}(Y_j)} H_{t,i} H_{t,j} \middle| \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \right) \right] \\
&- \mathbb{E} \left[ K_{d,\mathbf{x},i} \mathbb{E} \left( \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} H_{t,i} \middle| \mathbf{X}_i \right) \right] \times \mathbb{E} \left[ K_{d,\mathbf{x},j} \mathbb{E} \left( \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} H_{t,j} \middle| \mathbf{X}_j \right) \right] \\
&= \mathbb{E} \left[ K_{d,\mathbf{x},i} K_{d,\mathbf{x},j} \mathbb{E} \left( H_{t,i} H_{t,j} \frac{\mathbb{E}[\delta_i \delta_j | T_i, T_j]}{\overline{G}(T_i) \overline{G}(T_j)} \middle| \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \right) \right] \\
&- \mathbb{E} \left[ K_{d,\mathbf{x},i} \mathbb{E} \left( H_{t,i} \frac{\mathbb{E}[\delta_i | T_i]}{\overline{G}(T_i)} \middle| \mathbf{X}_i \right) \right] \mathbb{E} \left[ K_{d,\mathbf{x},j} \mathbb{E} \left( H_{t,j} \frac{\mathbb{E}[\delta_j | T_j]}{\overline{G}(T_j)} \middle| \mathbf{X}_j \right) \right].
\end{aligned}$$

Nous obtenons alors

$$\begin{aligned}
&|\text{Cov}(\Delta_i(\mathbf{x}, t), \Delta_j(\mathbf{x}, t))| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^{2d} \times \mathbb{R}^2} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - v}{h_2} \right) \right. \\
&\quad \times f(\mathbf{u}, s, \mathbf{r}, v) \mathbf{d}\mathbf{u} \mathbf{d}s \mathbf{d}\mathbf{r} \mathbf{d}v \left. \right| \\
&+ \left| \int_{\mathbb{R}^{d+1}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) f(\mathbf{u}, s) \mathbf{d}\mathbf{u} \mathbf{d}s \right. \\
&\quad \times \left. \int_{\mathbb{R}^{d+1}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{r}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - v}{h_2} \right) f(\mathbf{r}, v) \mathbf{d}\mathbf{r} \mathbf{d}v \right|.
\end{aligned}$$

De plus, sous les conditions **A2**, **A5** et **A7** et un changement de variable, nous avons

$$|\text{Cov}(\Delta_i(\mathbf{x}, t), \Delta_j(\mathbf{x}, t))| = O(h_1^{2d} h_2^2). \quad (3.15)$$

Finalement, la deuxième partie du Lemme 3.1 se déduit par un calcul simple.  $\square$

Nous avons besoin de notations auxiliaires afin d'établir la preuve de la Proposition 3.1. Imposons

$\Upsilon(\cdot) = \rho^{\frac{d}{2d+2}}(\cdot)$  et utilisons les bornes supérieures du Lemme 3.1, à savoir

$$C_1^{\frac{d}{2d+2}} \leq m^{\frac{(p+q)d}{2d+2}} h_1^{\frac{-2d}{2d+2}} h_2^{\frac{-2d}{2d+2}} (pq)^{\frac{d}{2d+2}} \rho^{\frac{d}{2d+2}} (v_1 - s_p), \quad (3.16)$$

$$C_2^{\frac{d+2}{2d+2}} \leq m^{(p+q)\frac{d+2}{2d+2}} h_1^{\frac{2d(d+2)}{2d+2}} h_2^{\frac{2(d+2)}{2d+2}}. \quad (3.17)$$

En combinant (3.16) et (3.17), nous obtenons

$$\begin{aligned}
C_1^{\frac{d}{2d+2}} C_2^{\frac{d+2}{2d+2}} &\leq m^{p+q} h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} (pq)^{\frac{d}{2d+2}} \rho^{\frac{d}{2d+2}} (v_1 - s_p) \\
&\leq m^{p+q} h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} pq \Upsilon(v_1 - s_p).
\end{aligned}$$

Cette inégalité achève la preuve de la partie (a) de la Proposition 3.1. De plus, sous la condition **A8** et en choisissant  $\lambda = 0$ ,  $\mu = 1$ ,  $L_1 = L_2 = \frac{1}{1 - e^{-\frac{\gamma d}{2d+2}}}$ , les preuves dans (b) et (c) sont similaires à

celles utilisées dans la démonstration de la Proposition 8 dans Doukhan et Neumann (2007). Sous l'hypothèse **A8** et pour tout  $k_0 \geq 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)^{k_0} \rho^{\frac{d}{2d+2}}(s) &\leq \sum_{s=0}^{\infty} (s+1)\dots(s+k_0) e^{\frac{-\gamma s d}{2d+2}} \\ &= \frac{d^{k_0}}{du^{k_0}} \left( \frac{1}{1-u} \right) \Big|_{u=e^{\frac{-\gamma d}{2d+2}}} \\ &= k_0! \left( \frac{1}{1 - e^{\frac{-\gamma d}{2d+2}}} + 1 \right)^{k_0}. \end{aligned}$$

En prenant  $k_0 = 0$ ,  $\mu = 1$  et  $L_1 = L_2 = \frac{1}{1 - e^{-\gamma \frac{d}{2d+2}}}$ . Pour tout  $k_0 \geq 0$ , la démonstration du point (c) est illustrée comme ci-dessous

$$\begin{aligned} \mathbb{E} [|\Delta_i(\mathbf{x}, t)|^{k_0}] &\leq (C \|K_d\|_{\infty})^{k_0} \\ &\leq (k_0!)^{\lambda} M^{k_0}. \end{aligned}$$

Ceci complète la preuve de la Proposition 3.1. □

**Preuve du Théorème 3.1** Dans le but d'établir l'expression asymptotique uniforme du terme de fluctuation  $\left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right|$ , nous faisons appel à l'inégalité triangulaire et aux techniques classiques de recouvrement d'un compact. De ce fait,  $\Omega$  peut être recouvert par un nombre fini  $d_{x,n}$  de boules  $B_k(\mathbf{x}_k, a_n^d)$  centrées en  $\mathbf{x}_k = (x_{k,1}, \dots, x_{k,d})$  et  $\mathcal{C}$  est divisé en  $d_{t,n}$  sous-intervalles  $J_1, \dots, J_{d_{t,n}}$  de longueurs  $b_n$ , centrés en  $t_\ell$ . En d'autres termes, pour tous  $\mathbf{x} \in \Omega$ ,  $t \in \mathcal{C}$ , il existe des entiers  $k \in \{1, \dots, d_{x,n}\}$  et  $\ell \in \{1, \dots, d_{t,n}\}$  tels que  $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\| \leq a_n^d$  et  $|t - t_\ell| \leq b_n$ , avec  $a_n^d = (n^{-1} h_1^{2\alpha+d})^{1/2\alpha}$  et  $b_n = (n h_1^d)^{-1/2} h_2$ . Alors, comme  $\Omega$  et  $\mathcal{C}$  sont bornés, soient  $m_1$  et  $m_2$  des constantes positives satisfaisant  $d_{x,n} a_n^d \leq m_1$  et  $d_{t,n} b_n \leq m_2$ .

**Remarque 3.5.** *Pour établir nos résultats, nous faisons appel au Lemme 3.2 traitant la convergence uniforme forte avec taux de convergence de l'estimateur à noyau  $l_n(\cdot)$ , démontrée précédemment (voir le Lemme 3 dans Menni et Tatachak (2016)), nous rappellerons le résultat sans preuve.*

**Lemme 3.2.** *Sous les conditions **A1**, **A2**, **A4**, **A6** et **A8**, pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| = O \left( \max \left\{ \sqrt{\frac{\log n}{n h_1^d}}, h_1^2 \right\} \right) \text{ p.s.}$$

En utilisant des arguments basiques, le terme à gauche dans (3.11) est majoré comme suit

$$\begin{aligned}
 & \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right| \\
 & \leq \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \sup_{\mathbf{x} \in B_k} \sup_t \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) \right| \\
 & \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \sup_{\mathbf{x} \in B_k} \sup_t \left| \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) \right] - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right| \\
 & \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \sup_{t \in J_\ell} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right| \\
 & \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \sup_{t \in J_\ell} \left| \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right] - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) \right] \right| \\
 & \quad + \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right] \right| \\
 & =: I_{1n} + I'_{1n} + I_{2n} + I'_{2n} + I_{3n}.
 \end{aligned}$$

Concernant  $I_{1n}$  et  $I'_{1n}$ , nous faisons appel au SLLN pour des séquences associées (voir Newman (1984)) et l'hypothèse **A2(i)**. Nous aurons

$$\begin{aligned}
 & \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) \right| \\
 & = \left| \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) - K_d \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \right] \right| \\
 & \leq \frac{m}{h_1^d \overline{G}(\tau)} \frac{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_k\|^\alpha}{h_1^\alpha} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \\
 & \leq \frac{m}{\overline{G}(\tau)} \frac{a_n^{d\alpha}}{h_1^{d+\alpha}} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \delta_i \\
 & = O \left( \frac{1}{\sqrt{nh_1^d}} \right). \tag{3.18}
 \end{aligned}$$

Pour traiter les termes  $I_{2n}$  et  $I'_{2n}$ , nous utilisons l'hypothèse **A3** et le Lemme 3.2. Nous aurons alors

$$\begin{aligned}
 & \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right| \\
 & = \left| \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_d \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \left[ H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - H \left( \frac{t_\ell - Y_i}{h_2} \right) \right] \right| \\
 & \leq \frac{m}{\overline{G}(\tau)} \frac{|t - t_\ell|}{h_2} \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \\
 & \leq \frac{m}{\overline{G}(\tau)} \frac{b_n}{h_2} l_n(\mathbf{x}_k) \\
 & = O \left( \frac{1}{\sqrt{nh_1^d}} \right). \tag{3.19}
 \end{aligned}$$

Nous nous focalisons à présent sur la majoration du terme  $I_{3n}$ . Pour ce faire, nous adaptons aux séquences associées une inégalité exponentielle établie pour des v.a. faiblement dépendantes (voir

Théorème 1, p.19 dans Doukhan et Neumann (2007)). Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ , nous avons

$$\mathbb{P} \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell) \geq \varepsilon \right) \leq \exp \left( - \frac{\varepsilon^2/2}{A_n + B_n^{1/(\mu+\lambda+2)} \varepsilon^{(2\mu+2\lambda+3)/(\mu+\lambda+2)}} \right), \quad (3.20)$$

où  $A_n$  est un nombre quelconque plus grand que  $\sigma_n^2$  et

$$\begin{aligned} \sigma_n^2 &:= \text{Var} \left( \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right), \\ B_n &= 2mL_2 \max \left( \frac{2^{4+\mu+\lambda} m n h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} L_1}{A_n}, 1 \right). \end{aligned} \quad (3.21)$$

D'une part, nous devons calculer  $\sigma_n^2$ . Nous avons  $\sigma_n^2 = (nh_1^d)^2 \text{Var} \left( \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right)$ .

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} (nh_1^d)^2 \text{Var} \left( \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right) &= n \text{Var} \left( \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} K_{d,\mathbf{x}_k,1} H_{t_\ell,1} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \text{Cov} \left( \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_{d,\mathbf{x}_k,i} H_{t_\ell,i}, \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} K_{d,\mathbf{x}_k,j} H_{t_\ell,j} \right) \\ &=: V + S. \end{aligned}$$

Commençons par calculer  $V$ .

$$\begin{aligned} V &= n \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)^2} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H^2 \left( \frac{t_\ell - Y_1}{h_2} \right) \right] \\ &- n \mathbb{E}^2 \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} K_d \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H \left( \frac{t_\ell - Y_1}{h_2} \right) \right] \\ &=: n(D_1 - D_2). \end{aligned}$$

Concernant  $D_1$ , nous utilisons les techniques de l'espérance conditionnelle classiques. Donc, sous les conditions **A1(i)**, **A2** et **A9**, par un changement de variable et un développement de Taylor au voisinage de  $\mathbf{x}_k$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} D_1 &= \mathbb{E} \left[ K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)^2} H^2 \left( \frac{t_\ell - Y_1}{h_2} \right) | T_1 \right] | \mathbf{X}_1 \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{u}}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ H^2 \left( \frac{t_\ell - T_1}{h_2} \right) \frac{1}{\overline{G}(T_1)} | \mathbf{X}_1 = \mathbf{u} \right] l(\mathbf{u}) d\mathbf{u} \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{u}}{h_1} \right) \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\overline{G}(v)} f(\mathbf{u}, v) dv d\mathbf{u}, \quad \text{car } H(\cdot) \text{ est une f.d.r;} \\ &= h_1^d \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{z}) \varsigma(\mathbf{x}_k - \mathbf{z}h_1) d\mathbf{z} \\ &= h_1^d \int_{\mathbb{R}^d} \varsigma(\mathbf{x}_k) K_d^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} - h_1^{d+1} \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{z}) \left[ z_1 \frac{\partial \varsigma(\mathbf{x}_k^*)}{\partial x_{k,1}} + \dots + z_d \frac{\partial \varsigma(\mathbf{x}_k^*)}{\partial x_{k,d}} \right] d\mathbf{z} \\ &= O(h_1^d). \end{aligned}$$

Ici  $\mathbf{x}_k^*$  fluctue entre  $\mathbf{x}_k - \mathbf{z}h_1$  et  $\mathbf{x}_k$ . De nouveau, pour majorer  $D_2$  nous procédons comme précédemment. Par un changement de variable, un développement de Taylor et les hypothèses **A1(i)**, **A2** et **A4**, nous avons

$$\begin{aligned} D_2 &= \mathbb{E}^2 \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t_\ell - Y_1}{h_2} \right) | T_1 \right] | \mathbf{X}_1 \right] \right] \\ &= O(h_1^{2d}). \end{aligned}$$

Par conséquent, nous obtenons

$$V = O(nh_1^d).$$

Dans un second temps, afin d'évaluer  $S$ , nous définissons en premier lieu

$$B_1 = \{(i, j); 1 \leq |i - j| \leq \eta_n\} \text{ et } B_2 = \{(i, j); \eta_n + 1 \leq |i - j| \leq n - 1\},$$

avec  $\eta_n = o(n)$ . De ce fait, nous avons

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^n \sum_{B_1} Cov \left( \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_{d, \mathbf{x}_k, i} H_{t_l, i}, \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} K_{d, \mathbf{x}_k, j} H_{t_l, j} \right) \\ &+ \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} Cov \left( \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_{d, \mathbf{x}_k, i} H_{t_l, i}, \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} K_{d, \mathbf{x}_k, j} H_{t_l, j} \right) \\ &= : S_1 + S_2. \end{aligned}$$

De (3.37), il est clair que

$$S_1 = n\eta_n O(h_1^{2d} h_2^2) = O(n\eta_n h_1^{2d} h_2^2). \quad (3.22)$$

Par la suite, le terme  $S_2$  sera majoré en utilisant le résultat a) dans la Proposition 3.1 et la condition **A8**, ce qui permet d'écrire

$$\begin{aligned} S_2 &\leq \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} m^2 h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \rho^{\frac{d}{2d+2}} (|i - j|) \\ &\leq nm^2 h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \sum_{B_2} \gamma_0^{\frac{d}{2d+2}} e^{-\frac{\gamma|i-j|d}{2d+2}} \\ &\leq nm^2 h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \int_{\eta_n}^n e^{-\frac{\gamma ud}{2d+2}} du \\ &= O \left( nh_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} e^{-\frac{\gamma \eta_n d}{2d+2}} \right). \end{aligned} \quad (3.23)$$

de ce fait, par **A1** et en prenant  $\eta_n = O(h_1^{\nu_1 - d} h_2^{\nu_2 - 1})$  avec  $0 < \nu_1 < d$  et  $0 < \nu_2 < 1$ , les bornes dans (3.22) et (3.23) deviennent de l'ordre de  $o(nh_1^d h_2)$  et  $o(nh_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}})$ , respectivement. Par conséquent

$$\sigma_n^2 = V + S = O(nh_1^d) + o(nh_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}}) = O(nh_1^d).$$

En outre, nous obtenons  $A_n = O(nh_1^d)$ . Ensuite, de (3.21) et par le choix de  $\mu$ ,  $\lambda$ ,  $L_1$  et  $L_2$  similaires à ceux pris dans la preuve de la Proposition 3.1, on obtient  $B_n = O(1)$ .

Pour ce qui est de  $I_{3n}$ , en vue de (3.13), (3.20) et en posant  $\varepsilon = \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}}$ , nous obtenons

$$\begin{aligned}
 & \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right] \right| \geq \varepsilon \right) \\
 &= \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right| \geq nh_1^d \varepsilon \right) \\
 &\leq \sum_{k=1}^{d_{x,n}} \sum_{\ell=1}^{d_{t,n}} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{i=1}^n \Delta_i(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right| \geq nh_1^d \varepsilon \right) \\
 &\leq 2d_{x,n} d_{t,n} \exp \left( \frac{-(nh_1^d)^2 \frac{\varepsilon_0^2}{2} \frac{\log n}{nh_1^d}}{mnh_1^d + \varepsilon_0^{5/3} (nh_1^d)^{5/3} \left( \frac{\log n}{nh_1^d} \right)^{5/6}} \right) \\
 &\leq 2 \frac{m_1}{a_n^d} \frac{m_2}{b_n} \exp \left( \frac{-\frac{\varepsilon_0^2}{2} \log n}{m + \varepsilon_0^{5/3} \left( \frac{\log n^5}{nh_1^d} \right)^{1/6}} \right) \\
 &\leq m (n^{-1} h_1^{2\alpha+d})^{-1/2\alpha} (nh_1^d)^{1/2} h_2^{-1} n^{-m\varepsilon_0^2} \\
 &= m (nh_1^{2\alpha+d(1-\alpha)})^{-1/2\alpha} (nh_2)^{-1} n^{-m\varepsilon_0^2 + \frac{1}{\alpha} + \frac{3}{2}}. \tag{3.24}
 \end{aligned}$$

Alors, sous la condition **A1** et en prenant  $\varepsilon_0^2 > \frac{1}{m} \left( \frac{1}{\alpha} + \frac{5}{2} \right)$ , le terme dans (3.24) est le terme général d'une série convergente. On en déduit que

$$\sum_{n \geq 1} \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq d_{x,n}} \max_{1 \leq \ell \leq d_{t,n}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}_k, t_\ell) \right] \right| \geq \varepsilon_0 \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right) < \infty.$$

En ayant recours au lemme de Borel-Cantelli, nous obtenons

$$I_{3n} = O \left( \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right). \tag{3.25}$$

En impliquant (3.18), (3.19) et (3.25), nous déduisons que

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right| = O \left( \sqrt{\frac{\log n}{nh_1^d}} \right).$$

La preuve du Théorème 3.1 est terminée. □

**Preuve du Théorème 3.2** Dans un premier temps, nous observons

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})| &\leq \frac{1}{\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} (l_n(\mathbf{x}))} \left\{ \sup_{x \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] - F_1(\mathbf{x}, t) \right| \right. \\ &\quad + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right| \\ &\quad + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] \right| \\ &\quad \left. + m_0^{-1} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} F_1(\mathbf{x}, t) \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| \right\}. \end{aligned}$$

Comme  $m_0 := \inf_x l(\mathbf{x})$ , il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \frac{1}{l_n(\mathbf{x})} &\leq \frac{1}{l(\mathbf{x}) - |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})|} \\ &\leq \frac{1}{m_0 - \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})|}. \end{aligned}$$

Ceci permet d'écrire

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})| \leq \frac{1}{m_0 - \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})|} \left\{ \vartheta_1 + \vartheta_2 + \vartheta_3 + \vartheta_4 m_0^{-1} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} F_1(\mathbf{x}, t) \right\}.$$

Les lemmes suivants établissent respectivement le résultat de  $\vartheta_1$ ,  $\vartheta_2$  et  $\vartheta_4$ .

Le terme de biais  $\vartheta_1$  sera énoncé dans le Lemme 3.3 en utilisant des techniques de l'espérance conditionnelle et un développement de Taylor d'ordre 2, tandis que Lemme 3.4 donne la majoration de  $\vartheta_2$ .

**Lemme 3.3.** *Sous les conditions A1, A2, A3 et A5, pour  $n$  assez grand nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] - F_1(\mathbf{x}, t) \right| = O(h_1^2 + h_2^2), \text{ p.s.}$$

**Preuve du Lemme 3.3** La preuve suivante ne dépend pas de la structure de dépendance.

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] &= \frac{1}{h_1^d} \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1^d} \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_1 \right] \right]. \end{aligned}$$



En utilisant une intégration par parties, un changement de variables et l'hypothèse **A3**, nous obtenons

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | T_1 \right] | \mathbf{X}_1 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\overline{G}(T_1)} H \left( \frac{t - T_1}{h_2} \right) \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{C_1 \geq T_1\}}] | \mathbf{X}_1 \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[ H \left( \frac{t - T_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}} H \left( \frac{t - y}{h_2} \right) f(y | \mathbf{X}_1) dy \\
 &= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz.
 \end{aligned}$$

De nouveau, par un changement de variable, on obtient

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] &= \frac{1}{h_1^d} \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz \right] \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{h_1^d} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1 = \mathbf{u}) l(\mathbf{u}) d\mathbf{u} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{h_1^d} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H^{(1)}(z) F_1(\mathbf{u}, t - zh_2) d\mathbf{u} dz \\
 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} K_d(\mathbf{r}) H^{(1)}(z) F_1(\mathbf{x} - \mathbf{r}h_1, t - zh_2) d\mathbf{r} dz.
 \end{aligned}$$

Alors, en développant  $F_1(\mathbf{x} - \mathbf{r}h_1, t - zh_2)$  jusqu'à l'ordre 2 au voisinage de  $(\mathbf{x}, t)$  nous aurons

$$\begin{aligned}
 F_1(\mathbf{x} - \mathbf{r}h_1, t - zh_2) &= F_1(\mathbf{x}, t) \\
 &- h_1 \left[ r_1 \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \dots + r_d \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, t)}{\partial x_d} \right] - h_2 \left[ z \frac{\partial F_1(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \\
 &+ \frac{h_1^2}{2} \left[ r_1^2 \frac{\partial^2 F_1(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial x_1^2} + \dots + r_d^2 \frac{\partial^2 F_1(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial x_d^2} + 2 \sum_{i,j;i \neq j} r_i r_j \frac{\partial^2 F_1(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\
 &+ \frac{h_2^2}{2} \left[ z^2 \frac{\partial^2 F_1(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial t^2} \right] + h_1 h_2 \left[ r_1 z \frac{\partial^2 F_1(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial x_1 \partial t} + \dots + r_d z \frac{\partial^2 F_1(\mathbf{x}^*, t^*)}{\partial x_d \partial t} \right].
 \end{aligned}$$

Ici,  $(\mathbf{x}^*, t^*)$  est compris entre  $(\mathbf{x} - \mathbf{r}h_1, t - zh_2)$  et  $(\mathbf{x}, t)$ . Finalement, les conditions **A1**, **A2**, **A3** et **A5** entraînent

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \mathbb{E} \left[ \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right] - F_1(\mathbf{x}, t) \right| \leq m(h_1^2 + h_2^2).$$

Ceci nous donne le résultat voulu. □

**Lemme 3.4.** *Sous les hypothèses **A2**, **A4** et **A8**, pour  $n$  assez grand, nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) \right| = o(n^{-\theta}), \text{ p.s.}$$

**Preuve du Lemme 3.4** Nous avons

$$\begin{aligned}
& |F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)| \\
&= \left| \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n \delta_i K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \left( \frac{1}{\overline{G}_n(Y_i)} - \frac{1}{\overline{G}(Y_i)} \right) \right| \\
&\leq \frac{1}{nh_1^d} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \left| \frac{1}{\overline{G}_n(Y_i)} - \frac{1}{\overline{G}(Y_i)} \right| \\
&\leq \frac{l_n(x)}{\overline{G}_n(\tau)\overline{G}(\tau)} \sup_{t \in \mathcal{C}} |\overline{G}_n(t) - \overline{G}(t)|.
\end{aligned}$$

De même, d'après le Théorème 1.4 dans Cai et Roussas (1998), nous obtenons

$$\sup_{t \in \mathcal{C}} |\overline{G}_n(t) - \overline{G}(t)| = o(n^{-\theta}) \quad \text{p.s. quand } n \rightarrow \infty,$$

Rappelons que  $0 < \theta < \gamma/(2\gamma + 9 + 3/2\kappa)$  pour tout réel  $\kappa > 0$  et  $\gamma$  est celui donné dans l'hypothèse **A8**. La preuve du Lemme 3.4 est à présent terminée.  $\square$

La dernière étape consiste à démontrer le résultat sur le comportement de l'estimateur du quantile conditionnel  $\xi_{p,n}(\mathbf{x})$ , présenté dans le corollaire 3.1.

**Preuve du Corollaire 3.1** La preuve est standard. Il suffit d'utiliser l'inégalité triangulaire ci-après conjointement avec des arguments basiques. Soit

$$\begin{aligned}
|F(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})| &\leq |F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x})| \\
&\quad + |F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})| \\
&\leq 2 \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})|.
\end{aligned} \tag{3.26}$$

Alors, la première partie du corollaire est directement déduite du théorème 3.2. D'un autre côté, un développement de Taylor de  $F(\cdot|\mathbf{x})$  au voisinage de  $\xi_p(\mathbf{x})$  permet d'avoir

$$F(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = (\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}))f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}),$$

où  $\xi_{p,n}^*$  est entre  $\xi_p$  et  $\xi_{p,n}$ . Alors à partir de (3.26), on obtient

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x})| f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \leq 2 \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})|.$$

Notons que si la condition  $f(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x}) \neq 0$  dans le corollaire 3.1 n'est pas vérifiée, il faudra dans ce cas augmenter l'ordre en développant  $F(\cdot|\mathbf{x})$ . Finalement, le résultat voulu s'obtient directement sous la condition **A5** et le Théorème 3.2.  $\square$

### 3.5.2 Preuves pour la normalité asymptotique

Nous commençons cette partie par l'étude de la convergence uniforme p.s. de la densité de probabilité conditionnelle  $f_n(t|\mathbf{x})$  vers  $f(t|\mathbf{x})$  définie dans (3.8).

**Proposition 3.2.** *Sous les conditions A1-A8, nous avons*

$$\sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |f_n(t|\mathbf{x}) - f(t|\mathbf{x})| \rightarrow 0 \text{ p.s. quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve de la Proposition 3.2** Afin d'établir la preuve de la densité de probabilité conditionnelle, nous utilisons la décomposition ci-dessous

$$f_n(t|\mathbf{x}) - f(t|\mathbf{x}) = \left( f_n(t|\mathbf{x}) - \tilde{f}_n(t|\mathbf{x}) \right) + \left( \tilde{f}_n(t|\mathbf{x}) - f(t|\mathbf{x}) \right). \quad (3.27)$$

Pour la partie gauche de la décomposition (3.27), nous avons

$$\begin{aligned} \left| f_n(t|\mathbf{x}) - \tilde{f}_n(t|\mathbf{x}) \right| &= \frac{1}{l_n(\mathbf{x})} \left| f_n(\mathbf{x}, t) - \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) \right| \\ &\leq \frac{m}{l_n(\mathbf{x})} \frac{\sup_{t \in \mathcal{C}} |\overline{G}_n(t) - \overline{G}(t)|}{\overline{G}_n(\tau) \overline{G}(\tau)} \frac{1}{nh_1^d h_2} \sum_{i=1}^n K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right). \end{aligned}$$

Par A1(ii), A2 et A3, nous obtenons la convergence de la partie gauche de (3.27). Pour ce qui est de la partie droite de (3.27), nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \tilde{f}_n(t|\mathbf{x}) - f(t|\mathbf{x}) \right| &\leq \frac{1}{\inf_{\mathbf{x} \in \Omega} (l_n(\mathbf{x}))} \left\{ \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) \right] \right| \right. \\ &\quad + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} \left| \mathbb{E} \left[ \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) \right] - f_n(\mathbf{x}, t) \right| \\ &\quad \left. + \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})| \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} \sup_{t \in \mathcal{C}} |f(t|\mathbf{x})| \right\} \\ &=: \frac{1}{m_0 - \sup_{\mathbf{x} \in \Omega} |l_n(\mathbf{x}) - l(\mathbf{x})|} [I_1 + I_2 + I_3]. \end{aligned}$$

Traitons chacun des termes ci-dessus. Concernant  $I_1$ , nous faisons le choix de l'expression suivante :

$$Q_i(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{nh_1^d h_2} \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - \mathbb{E} \left[ \frac{1}{nh_1^d h_2} \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \right]$$

telle que

$$\sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) = \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E} \left[ \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) \right].$$

La preuve utilise les techniques de recouvrement. Le sous-ensemble compact  $\mathcal{C}$  est recouvert par un nombre fini  $\mu_n$  d'intervalles de longueur  $\varrho_n$ , respectivement centrés en  $t_1, \dots, t_{\mu_n}$  avec  $\mu_n \varrho_n \leq c$ . Il existe  $t_j$  quelque soit  $t$  tel que  $|t - t_j| \leq \varrho_n$ .

$$\left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) \right| \leq \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| + \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| \quad (3.28)$$

D'après les hypothèses **A2** et **A3**, nous avons

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t) - \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| &\leq \left| \frac{2}{nh_1^d h_2} \sum_{i=1}^n \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \left[ H^{(1)} \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) - H^{(1)} \left( \frac{t_j - Y_i}{h_2} \right) \right] \right| \\ &\leq \frac{m}{h_1^d h_2 \overline{G}(\tau)} \left| \frac{t - t_j}{h_2} \right| \\ &\leq \frac{m}{h_1^d h_2^2 \mu_n} \end{aligned}$$

Par (3.28) et en choisissant  $\mu_n = O(n)$ , nous obtenons

$$I_1 \leq \frac{m}{nh_1^d h_2^2} + \max_{1 \leq j \leq \mu_n} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right|$$

Nous montrons à présent que

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq j \leq \mu_n} \left| \sum_{i=1}^n Q_i(\mathbf{x}, t_j) \right| > \varepsilon \right) \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (3.29)$$

Comme  $Q_i(\mathbf{x}, t_j)$  sont associés, l'utilisation d'une inégalité exponentielle due à Doukhan & Neumann (2007) convient pour la majoration de (3.29). Un travail analogue à celui établi pour la preuve de la consistance plus haut est fait. Nous passons maintenant à la démonstration du terme de biais  $I_2$ .

Nous pouvons facilement constater que

$$\mathbb{E} \left[ \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) \right] = \frac{1}{h_1^d h_2} \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_1}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H^{(1)} \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \mid \mathbf{X}_1 \right] \right].$$

Nous avons

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H^{(1)} \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \mid \mathbf{X}_1 \right] &= \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H^{(1)} \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \mid T_1 \right] \mid \mathbf{X}_1 \right] \\ &= h_2 \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) f(t - h_2 z \mid \mathbf{X}_1) dz. \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[ \tilde{f}_n(\mathbf{x}, t) \right] &= \frac{1}{h_1^d h_2} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} h_2 K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H^{(1)}(z) f(t - h_2 z \mid \mathbf{u}) l(\mathbf{u}) d\mathbf{u} dz \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} K_d(\mathbf{r}) H^{(1)}(z) f(\mathbf{x} - h_1 \mathbf{r}, t - h_2 z) dr dz. \end{aligned}$$

avec  $f(\mathbf{x} - h_1 \mathbf{r}, t - h_2 z) = F_1'(\mathbf{x} - h_1 \mathbf{r}, t - h_2 z)$ . L'hypothèse **A5** et un développement de Taylor de  $f_n(\cdot, \cdot)$  au voisinage de  $(\mathbf{x}, t)$  donne

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x} - h_1 \mathbf{r}, t - h_2 z) &= f(\mathbf{x}, t) - h_1 \left[ r_1 \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_1} + \dots + r_d \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial x_d} \right] - h_2 \left[ z \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} \right] \\ &+ \frac{h_1^2}{2} \left[ r_1^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x_1^2} + \dots + r_d^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x_d^2} + 2 \sum_{i \neq j} r_i r_j \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x_i \partial x_j} \right] \\ &+ \frac{h_2^2}{2} \left[ z^2 \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}, t^*)}{\partial t^2} \right] + h_1 h_2 \left[ r_1 z \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x_1 \partial t} + \dots + r_d z \frac{\partial^2 f(\mathbf{x}^*, t)}{\partial x_d \partial t} \right]. \end{aligned}$$

Notons que  $\mathbf{x}^*$  varie entre  $\mathbf{x} - rh_1$  et  $\mathbf{x}$  et  $t^*$  est entre  $t - zh_2$  et  $t$ . Par les conditions **A2** et **A5**  $I_2 = O(h_1^2 + h_2^2)$ . Concernant  $I_3$ , sous les hypothèses **A1**, **A2**, **A4**, **A6** et **A8**, il apparait à partir du Lemme 3 dans Menni et Tatachak (2016) que l'estimateur à noyau  $l_n(\mathbf{x}) \rightarrow l(\mathbf{x})$  p.s. quand  $n \rightarrow +\infty$ . Ajouter à cela la première partie de l'hypothèse **A5** alors nous obtenons  $I_3 = o(1)$ . Ce point achève la preuve de la Proposition 3.2.  $\square$

**Preuve du Théorème 3.3** Soit la décomposition ci-après

$$F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x}) = (F_n(t|\mathbf{x}) - \tilde{F}_n(t|\mathbf{x})) + (\tilde{F}_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})).$$

Et

$$\begin{aligned} \tilde{F}_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x}) &= \frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})} \left[ \frac{\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}(\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x})(l_n(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})))}{l(\mathbf{x})} \right] \\ &\quad - \left[ \frac{F_1(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}(F_1(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x})(l(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})))}{l_n(\mathbf{x})} \right] \\ &=: \frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})} Z_n(\mathbf{x}, t) - R_n(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Notons que

$$\sqrt{nh_1^d}(F_n(t|\mathbf{x}) - F(t|\mathbf{x})) =: \frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})} \left[ \sqrt{nh_1^d} Z_n(\mathbf{x}, t) \right] + \sqrt{nh_1^d} U_n(\mathbf{x}, t) \quad (3.30)$$

avec

$$U_n(\mathbf{x}, t) =: (F_n(t|\mathbf{x}) - \tilde{F}_n(t|\mathbf{x})) - R_n(\mathbf{x}, t). \quad (3.31)$$

L'idée est de donner les résultats asymptotiques de  $\sqrt{nh_1^d} Z_n(\mathbf{x}, t)$ . Pour ce faire, nous donnons la convergence en probabilité du terme négligeable  $\sqrt{nh_1^d} U_n(\mathbf{x}, t)$  vers zéro comme indiqué dans le Lemme 3.5 et déterminons la variance asymptotique apparaissant dans (3.12) (voir Lemme 3.7). Enfin, nous utilisons la procédure de Bernstein autrement dit celle des grands et des petits blocs afin d'obtenir la normalité asymptotique du terme principal  $Z_n(\mathbf{x}, t)$ . En ce qui concerne le terme  $\frac{l(\mathbf{x})}{l_n(\mathbf{x})}$ , il converge évidemment vers 1.

**Lemme 3.5.** *Les hypothèses **A1-A5** et **A8** donnent que*

$$\sqrt{nh_1^d} U_n(\mathbf{x}, t) \xrightarrow{P} 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve Lemme 3.5** Observons que (3.31) peut s'écrire

$$\begin{aligned} \sqrt{nh_1^d} U_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{\sqrt{nh_1^d}}{l_n(\mathbf{x})} \left[ (F_{1,n}(\mathbf{x}, t) - \tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - (F_1(\mathbf{x}, t) - \mathbb{E}(\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t))) \right] \\ &\quad + \frac{\sqrt{nh_1^d}}{l_n(\mathbf{x})} [F(t|\mathbf{x})(l(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})))] \\ &=: \mathcal{X}_{n,1} + \mathcal{X}_{n,2} + \mathcal{X}_{n,3}. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Le taux de convergence de chacun des termes de (3.32) est obtenu grâce aux lemmes 3.2, 3.3 et 3.4 respectivement. En réalité, en utilisant **A1**(iii),(iv) nous montrons que

$$\mathcal{X}_{n,1} = o\left(\sqrt{n^{1-2\theta}h_1^d}\right) =: o\left(\sqrt{v_s h_1^d}\right) = o(1);$$

$$\mathcal{X}_{n,2} = O\left(\sqrt{nh_1^d}(h_1^2 + h_2^2)\right) = o(1);$$

$$\mathcal{X}_{n,3} = O\left(\sqrt{nh_1^{d+4}}\right) = o(1);$$

Ceci achève la preuve du Lemme 3.5.  $\square$

Traisons de la normalité asymptotique du terme principal  $Z_n(\mathbf{x}, t)$ . Nous utiliserons les notations ci-dessous

$$\begin{aligned} Z_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{nh_1^d l(\mathbf{x})} \left\{ \sum_{i=1}^n \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} \right] \right] \right. \\ &\quad \left. - F(t|\mathbf{x}) \sum_{i=1}^n \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) - \mathbb{E} \left( K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \right) \right] \right\} \\ &=: \frac{1}{nh_1^d l(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \Psi_i(\mathbf{x}, t) \end{aligned} \quad (3.33)$$

avec

$$\begin{aligned} \Psi_i(\mathbf{x}, t) &= K_{d,i} \left[ H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - F(t|\mathbf{x}) \right] - \mathbb{E} \left[ K_{d,i} \left( H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - F(t|\mathbf{x}) \right) \right], \\ K_{d,i} &:= K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \quad \text{et} \quad H_i := H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right). \end{aligned}$$

Nous portons à présent intérêt au terme de variance

$$\begin{aligned} nh_1^d \text{Var} Z_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \text{Var}(\Psi_1(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1: j \neq i}^n \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) \quad (3.34) \\ &=: \sigma_n^2(\mathbf{x}, t) + \Xi_n(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Le lemme qui suit rapporte les résultats intermédiaires utilisés dans les calculs ultérieurs liés au terme de la variance.

**Lemme 3.6.** *Les hypothèses **A3**(i), **A5**(i),(ii) et **N1** donnent que*

$$\text{Var} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_1 \right] \rightarrow F(t|\mathbf{x}) \left[ \frac{1}{\overline{G}(t)} - F(t|\mathbf{x}) \right] \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve du Lemme 3.6**

$$\begin{aligned} \text{Var} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_1 \right] &= \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}^2(Y_1)} H^2 \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_1 \right] - \mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_1 \right]^2 \\ &=: \mathcal{L1} + \mathcal{L2} \end{aligned}$$

Une intégration par parties ainsi qu'un changement de variable donnent

$$\begin{aligned}
\mathbb{E} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_1 \right] &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\overline{G}(T_1)} H \left( \frac{t - T_1}{h_2} \right) \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{T_1 \leq C_1\}} | T_1] \middle| \mathbf{X}_1 \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} H \left( \frac{t - u}{h_2} \right) f(u | \mathbf{X}_1) du \\
&= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz \\
&= \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) (F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) - F(t | \mathbf{x})) dz + \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t | \mathbf{x}) dz
\end{aligned}$$

Il est clair que  $\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) F(t | \mathbf{x}) dz \rightarrow F(t | \mathbf{x})$ . Pour ce qui est du terme à gauche de l'expression ci-dessus, par les hypothèses **A3(i)** et **A5(i)**, nous avons que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) (F(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) - F(t | \mathbf{x})) dz &\leq \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) m(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}|^{u_1} + |zh_2|^{u_2}) dz \\
&= m|\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}|^{u_1} \int_{\mathbb{R}} H^{(1)}(z) dz + m|h_2|^{u_2} \int_{\mathbb{R}} |z|^{u_2} H^{(1)}(z) dz \\
&= O(h_2^{\min(u_1, u_2)}).
\end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{L}_2 \rightarrow F^2(t | \mathbf{x})$  quand  $n \rightarrow +\infty$ . Concernant  $\mathcal{L}_1$ , par un changement de variable nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &= \mathbb{E} \left[ \frac{1}{\overline{G}^2(T_1)} H^2 \left( \frac{t - T_1}{h_2} \right) \mathbb{E} [\mathbf{1}_{\{T_1 \leq C_1\}} | T_1] \middle| \mathbf{X}_1 \right] \\
&= \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\overline{G}(y)} H^2 \left( \frac{t - y}{h_2} \right) f(y | \mathbf{X}_1) dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} h_2 \frac{1}{\overline{G}(t - zh_2)} H^2(z) f(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz.
\end{aligned}$$

A présent, par un développement de Taylor au voisinage de  $t$  et les techniques du conjugué, nous aurons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\overline{G}(t - zh_2)} &= \frac{1}{\overline{G}(t) - zh_2 g(t^*)} \times \frac{\overline{G}(t) + zh_2 g(t^*)}{\overline{G}(t) + zh_2 g(t^*)} \\
&= \frac{\overline{G}(t) + zh_2 g(t^*)}{\overline{G}^2(t) - (zh_2 g(t^*))^2} \\
&\leq \frac{\overline{G}(t) + zh_2 g(t^*)}{\overline{G}^2(t)}
\end{aligned} \tag{3.35}$$

Notons que  $t^*$  est entre  $t$  et  $t - zh_2$ . En substituant (3.35) dans  $\mathcal{L}_1$  nous obtenons

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_1 &\leq \frac{h_2}{\overline{G}(t)} \int_{\mathbb{R}} H^2(z) f(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz - \frac{h_2^2}{\overline{G}^2(t)} g(t^*) \int_{\mathbb{R}} z H^2(z) f(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz \\
&=: \mathcal{A}_1 - \mathcal{A}_2.
\end{aligned}$$

Majorer  $\mathcal{A}_2$  nous donne

$$\mathcal{A}_2 \leq \frac{h_2^2 \sup_{t \in \mathcal{C}} g(t)}{\overline{G}^2(\tau)} \int_{\mathbb{R}} |z| f(t - zh_2 | \mathbf{X}_1) dz$$

En faisant appel aux hypothèses **A5(ii)** et **N1**, on conclut que  $\mathcal{A}_2 = O(h_2^2)$ . Par une intégration par parties sur le terme  $\mathcal{A}_1$ , nous aurons

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_1 &= \frac{1}{\overline{G}(t)} \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)F(t - zh_2|\mathbf{X}_1)dz \\ &= \frac{1}{\overline{G}(t)} \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)(F(t - zh_2|\mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x}))dz + \frac{1}{\overline{G}(t)} \int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)F(t|\mathbf{x})dz\end{aligned}$$

Idem, en utilisant **A5(i)** alors

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)(F(t - zh_2|\mathbf{X}_1) - F(t|\mathbf{x}))dz &\leq \int_{\mathbb{R}} m(|\mathbf{X}_1 - \mathbf{x}|^{u_1} + |zh_2|^{u_2})[H(z)^2]'dz \\ &= O(h_2^{\min(u_1, u_2)}).\end{aligned}$$

De plus,

$$\int_{\mathbb{R}} 2H^{(1)}(z)H(z)F(t|\mathbf{x})dz = F(t|\mathbf{x}).$$

De ce fait  $\mathcal{A}_1 \rightarrow \frac{F(t|\mathbf{x})}{\overline{G}(t)}$  quand  $n \rightarrow \infty$ . Nous en déduisons que

$$\text{Var} \left[ \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} H \left( \frac{t - Y_1}{h_2} \right) | \mathbf{X}_1 \right] \rightarrow \frac{F(t|\mathbf{x})}{\overline{G}(t)} - O(h_2^2) - F(t|\mathbf{x})^2.$$

Ce qui achève la preuve du Lemme 3.6. □

**Lemme 3.7.** *Sous les hypothèses **A2-A4** et **A6-A7**, nous avons*

$$\sigma_n^2(\mathbf{x}, t) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t) \text{ quand } n \rightarrow +\infty \text{ et } \Xi_n(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

**Preuve du Lemme 3.7** De (3.34), nous définissons

$$\begin{aligned}\sigma_n^2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E}[\Psi_1^2(\mathbf{x}, t)] \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 \left( H_1 \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} - F(t|\mathbf{x}) \right)^2 \right] - \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \left\{ \mathbb{E} \left[ K_{d,1} \left( H_1 \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} - F(t|\mathbf{x}) \right) \right] \right\}^2 \\ &=: \mathcal{R}_1(\mathbf{x}, t) + \mathcal{R}_2(\mathbf{x}, t).\end{aligned}$$

Pour le terme  $\mathcal{R}_2(\mathbf{x}, t)$ , nous écrivons

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_2(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \left[ \mathbb{E} \left( \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} K_{d,1} H_1 \right) - \mathbb{E}(K_{d,1} F(t|\mathbf{x})) \right]^2 \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \left[ h_1^d \mathbb{E}(\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - h_1^d F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) \right]^2 \\ &= \frac{1}{l^2(\mathbf{x})} \left[ \mathbb{E}(\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) \right]^2.\end{aligned}$$



A partir du Lemme 3.3, il est possible d'écrire que

$$\mathbb{E}(\tilde{F}_{1,n}(\mathbf{x}, t)) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) \rightarrow F_1(\mathbf{x}, t) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Et

$$F_1(\mathbf{x}, t) - F(t|\mathbf{x}) \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x})) = F(t|\mathbf{x})[l(\mathbf{x}) - \mathbb{E}(l_n(\mathbf{x}))] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

D'autre part

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_1(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 \left( H_1 \frac{\delta_1}{\bar{G}(Y_1)} - F(t|\mathbf{x}) \right)^2 \middle| \mathbf{X}_1 \right] \right] \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 \text{Var} \left( H_1 \frac{\delta_1}{\bar{G}(Y_1)} \middle| \mathbf{X}_1 \right) \right] + \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 \mathbb{E} \left( \left( H_1 \frac{\delta_1}{\bar{G}(Y_1)} \middle| \mathbf{X}_1 \right) - F(t|\mathbf{x}) \right)^2 \right]. \end{aligned}$$

En procédant de la même façon que dans le Lemme 3.6, la seconde partie entre parenthèses tend vers zero quand  $n$  tend vers l'infini. Pour ce qui est de la première partie, nous avons

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 \text{Var} \left( H_1 \frac{\delta_1}{\bar{G}(Y_1)} \middle| \mathbf{X}_1 \right) \right] &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 F(t|\mathbf{x}) \left( \frac{1}{\bar{G}(t)} - F(t|\mathbf{x}) \right) \right] \\ &= \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} F(t|\mathbf{x}) \left( \frac{1 - \bar{G}(t)F(t|\mathbf{x})}{\bar{G}(t)} \right) \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) l(\mathbf{u}) d\mathbf{u}. \end{aligned}$$

Par un changement de variables, l'hypothèse **A3** et un développement de Taylor au voisinage de  $\mathbf{x}$ , on trouve

$$\int_{\mathbb{R}^d} K_d^2 \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) l(\mathbf{u}) d\mathbf{u} = h_1^d \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{z}) l(\mathbf{x} - h_1 \mathbf{z}) d\mathbf{z}$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \mathbb{E} \left[ K_{d,1}^2 \text{Var} \left( H_1 \frac{\delta_1}{\bar{G}(Y_1)} \middle| \mathbf{X}_1 \right) \right] &\rightarrow \frac{1}{l(\mathbf{x})} F(t|\mathbf{x}) \left( \frac{1 - \bar{G}(t)F(t|\mathbf{x})}{\bar{G}(t)} \right) \int_{\mathbb{R}^d} K_d^2(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \\ &= \frac{\kappa F(t|\mathbf{x})(1 - \bar{G}(t)F(t|\mathbf{x}))}{l(\mathbf{x})\bar{G}(t)} \\ &= \sigma^2(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

Traisons à présent la deuxième partie de (3.34)

$$\Xi_n(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1: j \neq i}^n \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)).$$

Sous cette écriture, nous utilisons la décomposition suivante

$$\begin{aligned} \Xi_n(\mathbf{x}, t) &= \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_1} \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) + \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) \\ &=: \mathcal{M}_1 + \mathcal{M}_2 \end{aligned}$$

avec

$$B_1 = \{(i, l); 1 \leq |i - l| \leq \eta_n\} \text{ et } B_2 = \{(i, l); \eta_n + 1 \leq |i - l| \leq n - 1\}.$$

Concernant  $\mathcal{M}_1$ , en considérant que la covariance est calculée selon la formule

$$\begin{aligned} \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) &= \mathbb{E}[\Psi_i(\mathbf{x}, t) \cdot \Psi_j(\mathbf{x}, t)] \\ &\leq \mathbb{E}\left[K_{d,i}K_{d,j} \left(H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - F(t|\mathbf{x})\right) \left(H_j \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} - F(t|\mathbf{x})\right)\right] \\ &+ \mathbb{E}\left[K_{d,1} \left(H_1 \frac{\delta_1}{\overline{G}(Y_1)} - F(t|\mathbf{x})\right)\right]^2. \end{aligned}$$

Clairement, nous avons

$$\left|H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - F(t|\mathbf{x})\right| \leq \frac{1}{\overline{G}(\tau)} + 1.$$

Par conséquent

$$\text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) \leq \left(\frac{1}{\overline{G}(\tau)} + 1\right)^2 \mathbb{E}(K_{d,i}K_{d,j}) + O(1)\mathbb{E}(K_{d,1})^2.$$

Les hypothèses **A2** et **A6** donnent

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(K_{d,i}K_{d,j}) &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1}\right) K_d\left(\frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}}{h_1}\right) l_{i,j}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\ &= h_1^{2d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_d(\mathbf{s}) K_d(\mathbf{z}) l_{i,j}(\mathbf{x} - h_1\mathbf{s}, \mathbf{x} - h_1\mathbf{z}) d\mathbf{s}d\mathbf{z} \\ &= O(h_1^{2d}). \end{aligned}$$

Aussi, par un développement de Taylor et les hypothèses **A2(i)** et **A4**, nous avons

$$\mathbb{E}(K_{d,1}) = O(h_1^d).$$

En majorant  $\mathcal{M}_1$ , nous obtenons

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 &\leq \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_1} \left[ m \left(\frac{1}{\overline{G}(\tau)} + 1\right)^2 h_1^{2d} + O(1)h_1^{2d} \right] \\ &= m \frac{h_1^d \eta_n}{l^2(\mathbf{x})} + O(1) \frac{h_1^d \eta_n}{l^2(\mathbf{x})}. \end{aligned}$$

En supposant que  $h_1^d \eta_n \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ , on aura  $\mathcal{M}_1 = o(1)$ .

La seconde partie peut s'écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_2 &= \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \text{cov} \left( K_{d,i} H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - K_{d,i} F(t|\mathbf{x}), K_{d,j} H_j \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} - K_{d,j} F(t|\mathbf{x}) \right) \\ &=: \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \mathcal{W}. \end{aligned}$$

Observons que

$$\begin{aligned} \mathcal{W} &= \text{cov} \left( K_{d,i} H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}, K_{d,j} H_j \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} \right) - F(t|\mathbf{x}) \text{cov} \left( K_{d,i} H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)}, K_{d,j} \right) \\ &\quad - F(t|\mathbf{x}) \text{cov} \left( K_{d,i}, K_{d,j} H_j \frac{\delta_j}{\overline{G}(Y_j)} \right) + F(t|\mathbf{x})^2 \text{cov}(K_{d,i}, K_{d,j}) \\ &=: \mathcal{W}_1 - F(t|\mathbf{x}) \mathcal{W}_2 - F(t|\mathbf{x}) \mathcal{W}_3 + F(t|\mathbf{x})^2 \mathcal{W}_4. \end{aligned}$$

Par les mêmes arguments qu'en (3.23)

$$\begin{aligned} \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} \mathcal{W}_1 &\leq \frac{1}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{B_2} m h_1^d h_2^{\frac{2}{d+1}} \rho^{\frac{d}{2d+2}} (|i-j|) \\ &\leq \frac{m}{l^2(\mathbf{x})} \sum_{B_2} h_2^{\frac{2}{d+1}} \gamma_0^{\frac{d}{2d+2}} e^{-\frac{\gamma|i-j|d}{2d+2}} \\ &\leq \frac{m h_2^{\frac{2}{d+1}}}{l^2(\mathbf{x})} \int_{\eta_n}^m e^{-\frac{\gamma u d}{2d+2}} du \\ &\leq O(h_2^{\frac{2}{d+1}} e^{-\frac{\gamma \eta_n d}{2d+2}}). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Choissant  $\eta_n = O(h_2^{\nu-1})$  avec  $0 < \nu < 1$ , (3.36) est de l'ordre de  $o(h_2^{\frac{2}{d+1}})$ .

Concernant  $\mathcal{W}_2$  et  $\mathcal{W}_3$ , rappelons que

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_2 &= \mathbb{E} \left[ K_{d,i} K_{d,j} H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} \right] - \mathbb{E} \left[ K_{d,i} H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} \right] \mathbb{E}[K_{d,j}] \\ &=: \mathcal{W}'_2 - \mathcal{W}''_2. \end{aligned}$$

En utilisant les techniques de l'espérance conditionnelle, on aura

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'_2 &= \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} \middle| \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_1} \right) \mathbb{E} \left[ \mathbb{E} \left( \frac{\mathbf{1}_{\{T_i \leq C_i\}}}{\overline{G}(Y_i)} H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \middle| T_i \right) \middle| \mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, s) d\mathbf{u} d\mathbf{v} ds \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \mathcal{W}''_2 &= \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \mathbb{E} \left( \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \middle| \mathbf{X}_i \right) \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_1} \right) \right] \right] \\ &= \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_i}{h_1} \right) \mathbb{E} \left( \mathbb{E} \left( \frac{\mathbf{1}_{\{T_i \leq C_i\}}}{\overline{G}(Y_i)} H \left( \frac{t - Y_i}{h_2} \right) \middle| T_i \right) \middle| \mathbf{X}_i \right) \mathbb{E} \left[ K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{X}_j}{h_1} \right) \right] \right] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) f(\mathbf{u}, s) d\mathbf{u} ds \int_{\mathbb{R}^d} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}}{h_1} \right) l(\mathbf{v}) d\mathbf{v}. \end{aligned}$$

Sous les hypothèses **(A2)**, **(A7)**, un changement de variables et le fait que  $H$  soit bornée par 1, la soustraction nous donne

$$\begin{aligned} \mathcal{W}'_2 - \mathcal{W}''_2 &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{u}}{h_1} \right) K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{v}}{h_1} \right) H \left( \frac{t - s}{h_2} \right) [f(\mathbf{u}, \mathbf{v}, s) - f(\mathbf{u}, s)l(\mathbf{v})] d\mathbf{u} d\mathbf{v} ds \\ &= O(h_1^{2d} h_2). \end{aligned}$$

Dans le même esprit, par les hypothèses **(A2)**, **(A4)** et **A6** on a

$$\begin{aligned} \mathcal{W}_4 &= \mathbb{E}[K_{d,i}K_{d,j}] - \mathbb{E}[K_{d,i}]\mathbb{E}[K_{d,j}] \\ &= \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{u}}{h_1}\right) K_d\left(\frac{\mathbf{x}-\mathbf{v}}{h_1}\right) [l(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - l(\mathbf{u})l(\mathbf{v})] d\mathbf{u}d\mathbf{v} \\ &= O(h_1^{2d}). \end{aligned}$$

Toutes ces étapes permettent de conclure que

$$\Xi_n(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty \tag{3.37}$$

ce qui achève la preuve du Lemme 3.7. □

Par le moyen de (3.30) et le Lemme 3.7, afin de justifier le Théorème 3.3, il suffira de montrer que

$$\sqrt{nh_1^d}(Z_n(\mathbf{x}, t)) \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \tag{3.38}$$

Pour ce faire, comme mentionné auparavant, nous utiliserons la procédure de Bernstein des grands et des petits blocs. Dans ce qui suit, nous normaliserons  $\psi_i$ . De ce fait, de (3.33), nous obtenons

$$\begin{aligned} \sqrt{nh_1^d}(Z_n(\mathbf{x}, t)) &= \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \frac{\Psi_i(\mathbf{x}, t)}{\sqrt{h_1^d l(\mathbf{x})}} \\ &=: \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t) \\ &=: \frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}. \end{aligned}$$

De plus, nous remarquons depuis (3.34) et le Lemme 3.7 que

$$\text{var}(\tilde{\psi}_i) = \frac{\text{var}(\psi_i)}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} =: \sigma_n^2(\mathbf{x}, t) \text{ et } \text{var}(\tilde{\psi}_i) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t) \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Notons également que

$$\sum_{i=1}^n \sum_{j=1: j \neq i}^n \text{cov}\left(\tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t)\right) = \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1: j \neq i}^n \text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t)) = o(1).$$

Clairement, (3.38) est équivalent à dire que

$$\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \text{ quand } n \rightarrow +\infty. \tag{3.39}$$

Le but principal consiste à établir la normalité asymptotique de  $\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}$  en utilisant le théorème centrale limite pour des v.a. dépendantes et ceci en écrivant  $\frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}}$  comme étant la somme de grands blocs séparés par des petits blocs, c'est la technique de Bernstein qui consiste à partitionner l'ensemble  $\{1, \dots, n\}$  en  $2k_n + 1$  sous-ensembles

$I_m = \{i; i = (m-1)(p_n+q_n)+1, \dots, (m-1)(p_n+q_n)+p_n\}$  avec  $p_n$  éléments pour chaque  $m = 1, \dots, k_n$ .

$J_m = \{j; j = (m-1)(p_n+q_n)+p_n+1, \dots, m(p_n+q_n)\}$  avec  $q_n$  éléments pour chaque  $m = 1, \dots, k_n$ .

Les points restants sont définis dans l'ensemble  $\{l; k_n(p_n+q_n)+1 \leq l \leq n\}$  qui peut être égal à  $\emptyset$ , et  $p_n, q_n$  et  $k_n$  sont donnés dans l'hypothèse **N2**. Soient les v.a.  $U_{nm}, U'_{nm}$  et  $U''_{nm}$  définies comme suit :

$$U_{nm} = \sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} \tilde{\Psi}_i, \quad U'_{nm} = \sum_{j=(m-1)(p_n+q_n)+p_n+1}^{m(p_n+q_n)} \tilde{\Psi}_j, \quad U''_{nk} = \sum_{l=k_n(p_n+q_n)+1}^n \tilde{\Psi}_l$$

avec

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{S}_n}{\sqrt{n}} &= \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ \sum_{m=1}^{k_n} U_{nm} + \sum_{m=1}^{k_n} U'_{nm} + U''_{nk_n} \right] \\ &=: \frac{1}{\sqrt{n}} \left[ T_n + T_n' + T_n'' \right]. \end{aligned}$$

Alors, dans le but d'établir la convergence de (3.39), il faudra montrer que

$$\frac{T_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathcal{N}(0, \sigma^2(\mathbf{x}, t)) \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty \quad (3.40)$$

ainsi que

$$\frac{1}{n} \mathbb{E} [T_n'^2] + \frac{1}{n} \mathbb{E} [T_n''^2] \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow +\infty. \quad (3.41)$$

Afin de prouver (3.40) et (3.41), nous utilisons les lemmes suivants

**Lemme 3.8.** *L'hypothèse **N2** entraîne que*

- (i)  $\frac{k_n}{n} \text{var}(U'_{n1}) \rightarrow 0$
- (ii)  $\frac{1}{n} |\text{cov}(U'_{n1}, U'_{n,l+1})| \leq \frac{q_n m}{n l^2(\mathbf{x})} \frac{1}{h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(q_n-1)} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)|$
- (iii)  $\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U'_{ni}, U'_{nj})| \rightarrow 0$

**Preuve du Lemme 3.8**

(i) Nous observons que

$$\begin{aligned} \frac{k_n}{n} \text{var}(U'_{n1}) &= \frac{k_n}{n} \text{var} \left( \sum_{j=p_n+1}^{p_n+q_n} \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{k_n q_n}{n} \text{var}(\tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t)) + \frac{2k_n}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq q_n} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\ &= \frac{k_n q_n}{n} \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \text{var}(\Psi_1(\mathbf{x}, t)) + \frac{2k_n}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq q_n} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\ &=: \mathcal{J}_1 + \mathcal{J}_2. \end{aligned}$$

Pour ce qui est du premier terme  $\mathcal{J}_1$ , nous faisons appel à l'hypothèse **N2(i)**, (3.34) ainsi qu'au Lemme 3.7. Alors

$$\mathcal{J}_1 = \frac{k_n q_n}{n} \sigma_n^2(\mathbf{x}, t) \rightarrow 0 \text{ quand } n \rightarrow +\infty.$$

Concernant le terme  $\mathcal{J}_2$ , par stationnarité nous pouvons noter que

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_2 &= \frac{2k_n}{n} \sum_{l=1}^{q_n-1} (q_n - l) \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\ &\leq \frac{2k_n q_n}{n} \sum_{l=1}^{q_n-1} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\ &\leq \frac{2k_n q_n}{n} q_n \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \left| \text{cov} \left( \Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_{l+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\ &\leq m \frac{k_n q_n}{n} q_n h_1^d. \end{aligned}$$

A partir de la deuxième partie du Lemme 3.7 et l'hypothèse **N2(i)-(ii)**, nous obtenons que  $\mathcal{J}_2 \rightarrow 0$  quand  $n \rightarrow +\infty$ .

(ii) Par stationnarité et le théorème 5.3, p.89 dans Bulinski et Shashkin (2007), nous avons

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{n} |\text{cov}(U'_{n1}, U'_{n,l+1})| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=p_n+1}^{p_n+q_n} \sum_{j=l(p_n+q_n)+p_n+1}^{(l+1)(p_n+q_n)} \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{r=1}^{q_n} \sum_{j=l(p_n+q_n)+p_n+1}^{(l+1)(p_n+q_n)} \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_{p_n+r}(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{r=1}^{q_n} (q_n - r + 1) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)+r}(\mathbf{x}, t) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{r=1}^{q_n-1} (q_n - r) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_{r+1}(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &= \frac{1}{n} \left| \sum_{r=1}^{q_n} (q_n - r + 1) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)+r}(\mathbf{x}, t) \right) \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{r=1}^{q_n-1} (q_n - r) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)-r+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &\leq \frac{q_n}{n} \sum_{r=l(p_n+q_n)+1}^{l(p_n+q_n)+q_n} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_r(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &\quad + \frac{q_n}{n} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-2)}^{l(p_n+q_n)} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_r(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &= \frac{q_n}{n} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-2)}^{l(p_n+q_n)+q_n} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_r(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &= \frac{q_n}{n} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(q_n-1)} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{r+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
 &= \frac{q_n}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(q_n-1)} \left| \text{cov}(\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_{r+1}(\mathbf{x}, t)) \right| \\
 &= \frac{q_n M_0}{nh_1^{d+2} h_2^2 l^2(\mathbf{x})} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(q_n-1)} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)|
 \end{aligned}$$

où  $M_0 = \max \left\{ h_2 \text{Lip}(K) \|K\|_\infty^{d-1}, h_1 \left( \text{Lip}(H) + h_2 \frac{\text{Lip}(\bar{G})}{\bar{G}(\tau)} \right) \|K_d\|_\infty \right\}$ , la démonstration de (ii) est alors terminée.

(iii) Par stationnarité, nous rappelons que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U'_{ni}, U'_{nj})| &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{k_n-1} (k_n - l) |\text{cov}(U'_{n1}, U'_{n,l+1})| \\
&\leq \frac{k_n}{n} \sum_{l=1}^{k_n-1} |\text{cov}(U'_{n1}, U'_{n,l+1})| \\
&\leq m \frac{q_n k_n}{n} \frac{1}{l^2(\mathbf{x}) h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{l=1}^{k_n-1} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(q_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(q_n-1)} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)| \quad (\text{par (ii)}) \\
&\leq m \frac{q_n k_n}{n} \frac{1}{l^2(\mathbf{x}) h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{r=p_n}^{\infty} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)| \\
&\leq m \frac{q_n k_n}{n} \frac{1}{l^2(\mathbf{x})} \frac{\gamma_0}{1 - e^{-\gamma}} \frac{e^{-\gamma p_n}}{h_1^{d+2} h_2^2} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Le résultat s'obtient à partir de l'hypothèse **A8**, **N2(i)** et **(iii)**. □

**Lemme 3.9.** *Si la condition **N2** est vérifiée, nous avons*

$$\begin{aligned}
(i) \quad &\frac{k_n}{n} \text{var}(U_{n1}) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t) \\
(ii) \quad &\frac{1}{n} |\text{cov}(U_{n1}, U_{n,l+1})| \leq \frac{p_n m}{n l^2(\mathbf{x})} \frac{1}{h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{r=l(p_n+q_n)-p_n}^{l(p_n+q_n)+p_n} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)| \\
(iii) \quad &\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U_{ni}, U_{nj})| \rightarrow 0 \\
(iv) \quad &\text{var} \left( \frac{T_n}{\sqrt{n}} \right) \rightarrow \sigma^2(\mathbf{x}, t)
\end{aligned}$$

**Preuve du Lemme 3.9**

(i) Observons que

$$\begin{aligned}
\frac{k_n}{n} \text{var}(U_{n1}) &= \frac{k_n}{n} \text{var} \left( \sum_{i=1}^{p_n} \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t) \right) \\
&= \frac{p_n k_n}{n} \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \text{var}(\Psi_1(\mathbf{x}, t)) + \frac{2k_n}{n h_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{1 \leq i < j \leq p_n} |\text{cov}(\Psi_i(\mathbf{x}, t), \Psi_j(\mathbf{x}, t))|.
\end{aligned}$$

Par les mêmes arguments que le Lemme 3.8(i) et l'hypothèse **N2(i)-(ii)**, nous obtenons le résultat.



(ii) Un raisonnement analogue à celui du Lemme 3.8(ii) donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} |\text{cov}(U_{n1}, U_{n,l+1})| &= \frac{1}{n} \left| \sum_{i=1}^{p_n} \sum_{j=l(p_n+q_n)+1}^{l(p_n+q_n)+p_n} \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
&= \frac{1}{n} \left| \sum_{r=1}^{p_n} (p_n - r + 1) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)+r}(\mathbf{x}, t) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^{p_n-1} (p_n - r) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_{r+1}(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
&= \frac{1}{n} \left| \sum_{r=1}^{p_n} (p_n - r + 1) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)+r}(\mathbf{x}, t) \right) \right. \\
&\quad \left. + \sum_{r=1}^{p_n-1} (p_n - r) \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l(p_n+q_n)-r+1}(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
&\leq \frac{p_n}{n} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(p_n-2)}^{l(p_n+q_n)+p_n} \left| \text{cov} \left( \tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_r(\mathbf{x}, t) \right) \right| \\
&= \frac{p_n}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} \sum_{r=l(p_n+q_n)-(p_n-1)}^{l(p_n+q_n)+(p_n-1)} |\text{cov}(\Psi_1(\mathbf{x}, t), \Psi_{r+1}(\mathbf{x}, t))| \\
&\leq \frac{p_n m}{nh_1^{d+2} h_2^2 l^2(\mathbf{x})} \sum_{r=l(p_n+q_n)-p_n}^{l(p_n+q_n)+p_n} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)|
\end{aligned}$$

(iii) Par stationnarité et le point (ii), nous avons

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U_{ni}, U_{nj})| &= \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{k_n-1} (k_n - l) |\text{cov}(U_{n1}, U_{n,l+1})| \\
&\leq \frac{k_n}{n} \sum_{l=1}^{k_n-1} |\text{cov}(U_{n1}, U_{n,l+1})| \\
&\leq m \frac{p_n k_n}{n} \frac{1}{l^2(\mathbf{x}) h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{l=1}^{k_n-1} \sum_{r=l(p_n+q_n)-p_n}^{l(p_n+q_n)+p_n} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)| \\
&\leq m \frac{p_n k_n}{n} \frac{1}{l^2(\mathbf{x}) h_1^{d+2} h_2^2} \sum_{r=p_n}^{\infty} |\Lambda_{1,r+1}(\mathbf{x}, t)| \\
&\leq m \frac{p_n k_n}{n} \frac{1}{l^2(\mathbf{x})} \frac{\gamma_0}{1 - e^{-\gamma}} \frac{e^{-\gamma q_n}}{h_1^{d+2} h_2^2} \rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Idem que dans le Lemme 3.8(ii) et à partir des hypothèses **8**, **N2(i)** et **(iii)**, nous obtenons le résultat.

(iv) Observons que

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \frac{T_n}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{1}{n} \text{var} \left( \sum_{m=1}^{k_n} U_{nm} \right) \\ &= \frac{k_n}{n} \text{var}(U_{n1}) + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U_{ni}, U_{nj})|. \end{aligned}$$

Par (i) et (iii), on achève la preuve du Lemme 3.9.  $\square$

Concernant la démonstration de (3.41), nous utiliserons les mêmes arguments que ceux utilisés dans le Lemme 3.9(iii)

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \frac{T'_n}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{1}{n} \text{var} \left( \sum_{m=1}^{k_n} U'_{nm} \right) \\ &= \frac{k_n}{n} \text{var}(U'_{n1}) + \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq k_n} |\text{cov}(U'_{ni}, U'_{nj})| \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ceci résulte des points (i) et (iii) du Lemme 3.8. De même,

$$\begin{aligned} \text{var} \left( \frac{T_n''}{\sqrt{n}} \right) &= \frac{1}{n} \text{var} \left( U''_{nk_n} \right) \\ &= \frac{1}{n} \text{var} \left( \sum_{l=k_n(p_n+q_n)+1}^n \tilde{\Psi}_l(\mathbf{x}, t) \right) \\ &= \frac{n - k_n(p_n + q_n)}{n} \text{var}(\tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t)) + \frac{2}{n} \sum_{k_n(p_n+q_n)+1 \leq i < j \leq n} |\text{cov}(\tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t))| \\ &=: \mathcal{I}_{n1} + \mathcal{I}_{n2}. \end{aligned}$$

Nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{n1} &= \frac{n - k_n(p_n + q_n)}{n} \frac{1}{h_1^d l^2(\mathbf{x})} \text{var}(\Psi_1(\mathbf{x}, t)) \\ &\leq \frac{p_n}{n} \sigma_n^2(\mathbf{x}, t). \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse **N2** et le Lemme 3.7, nous obtenons que  $\mathcal{I}_{n1} = o(1)$ . Remarquons que

$n - k_n(p_n + q_n) \leq p_n$ . Concernant le deuxième terme, nous avons

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}_{n2} &= \frac{2}{n} \sum_{k_n(p_n+q_n)+1 \leq i < j \leq n} |\text{cov}(\tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t))| \\
&= \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq n - k_n(p_n+q_n)} |\text{cov}(\tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t))| \quad (\text{par stationnarité}) \\
&\leq \frac{2}{n} \sum_{1 \leq i < j \leq p_n} |\text{cov}(\tilde{\Psi}_i(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_j(\mathbf{x}, t))| \\
&= \frac{2}{n} \sum_{l=1}^{p_n-1} (p_n - l) |\text{cov}(\tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l+1}(\mathbf{x}, t))| \\
&\leq \frac{2p_n}{n} \sum_{l=1}^{p_n-1} |\text{cov}(\tilde{\Psi}_1(\mathbf{x}, t), \tilde{\Psi}_{l+1}(\mathbf{x}, t))| \\
&\leq \frac{p_n(p_n - 1)}{nh_1^d l^2(\mathbf{x})} mh_1^{2d} \\
&= O\left(\frac{p_n}{n} p_n h_1^d\right).
\end{aligned}$$

Alors, sous la condition **N2**, la preuve de (3.41) est achevée.

Afin de finaliser la preuve de (3.40), il reste à démontrer que les v.a.  $\{U_{nm}, m = 1, \dots, k\}$  sont asymptotiquement indépendantes. Dans ce but, nous aurons recours aux fonctions caractéristiques et montrerons que

$$\left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{1}{\sqrt{n}} U_{nm}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{1}{\sqrt{n}} U_{nm}} \right) \right| \rightarrow 0 \quad \text{quand } n \rightarrow \infty.$$

Notons que

$$\begin{aligned}
 I_{k_n}(t) &= \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &= \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n-1} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \mathbb{E} \left( e^{it \frac{1}{\sqrt{n}} U_{nk_n}} \right) \right| \\
 &= \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &+ \left| \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n-1} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &\leq \left| \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n-1} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &+ \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &\leq \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n-1} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &+ \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &= : I_{k_n-1}(t) + \left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \right|.
 \end{aligned}$$

De façon analogue  $I_{k_n-1}(t) \leq I_{k_n-2}(t) + \left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-2} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_{n-1}}}{\sqrt{n}}} \right) \right|$ .

Donc

$$\begin{aligned}
 \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| &\leq \left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \right| + \left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-2} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_{n-1}}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \\
 &+ \dots + \left| \text{cov} \left( e^{it \frac{U_{n1}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{n2}}{\sqrt{n}}} \right) \right|. \tag{3.42}
 \end{aligned}$$

Dans ce qui suit, nous ferons appel au Lemme 1 dans Bulinski (1996) pour chacun des termes à droite dans (3.42). Pour cela, nous avons besoin de calculer les dérivées partielles du premier ordre de la fonction

$$\mathcal{V}_m : \mathbb{R}^{p_n(d+1)} \rightarrow \mathbb{R}, m = 1, \dots, k_n$$

definie par  $V_m(\mathbf{x}_l, y_l) = e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}$  pour tout  $l$  entre  $(m-1)(p_n + q_n) + 1$  et  $(m-1)(p_n + q_n) + p_n$ , où

$$\mathbf{x}_l = (x_{(m-1)(p_n+q_n)+1}^1, \dots, x_{(m-1)(p_n+q_n)+1}^d, \dots, x_{(m-1)(p_n+q_n)+p_n}^1, \dots, x_{(m-1)(p_n+q_n)+p_n}^d)$$

et

$$y_l = (y_{(m-1)(p_n+q_n)+1}, \dots, y_{(m-1)(p_n+q_n)+p_n}).$$

Notons que la première dérivée partielle de la fonction  $\mathcal{V}_m$  au voisinage de  $y_l$  pour  $l = (m-1)(p_n + q_n) + 1, \dots, (m-1)(p_n + q_n) + p_n$  est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial y_l}(\mathbf{x}_l, y_l) &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left( it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}} \right) e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{\partial}{\partial y_l} \left( \frac{it}{\sqrt{n}} \sum_{i=(m-1)(p_n+q_n)+1}^{(m-1)(p_n+q_n)+p_n} \tilde{\Psi}_l \right) e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \\ &= \frac{it}{\sqrt{n}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ \frac{1}{\sqrt{h_1^d l(\mathbf{x})}} \left( K_{d,l} \left[ H_l \frac{\delta_l}{\bar{G}(y_l)} - F(t|\mathbf{x}) \right] \right) \right] \\ &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d l(\mathbf{x})}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \delta_l \frac{\partial}{\partial y_l} \left[ H \left( \frac{t - y_l}{h_2} \right) \frac{1}{\bar{G}(y_l)} \right] \\ &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d h_2^2 l(\mathbf{x})}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \delta_l \left[ -h_2 \frac{g(y_l)}{\bar{G}^2(y_l)} H \left( \frac{t - y_l}{h_2} \right) - H^{(1)} \left( \frac{t - y_l}{h_2} \right) \frac{1}{\bar{G}(y_l)} \right]. \end{aligned}$$

De plus, la première dérivée partielle de la fonction  $\mathcal{V}_m$  au voisinage de  $x_l^j$  pour  $l = (m-1)(p_n + q_n) + 1, \dots, (m-1)(p_n + q_n) + p_n$  et  $j = 1, \dots, d$  est

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_l^j}(\mathbf{x}_l, y_l) &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \left[ \frac{H_l \delta_l}{\bar{G}(y_l)} - F(t|\mathbf{x}) \right] \frac{\partial}{\partial x_l^j} \left[ \frac{1}{l(\mathbf{x})} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \right] \\ &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^d}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \left[ \frac{H_l \delta_l}{\bar{G}(y_l)} - F(t|\mathbf{x}) \right] \left[ -\frac{l^{(1)}(\mathbf{x})}{l^2(\mathbf{x})} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) + \frac{\partial}{\partial x_l^j} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) \frac{1}{l(\mathbf{x})} \right] \end{aligned}$$

telle que

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_l^j} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) &= \prod_{i=1, i \neq j}^d K \left( \frac{\mathbf{x}^i - x_l^i}{h_1} \right) \frac{\partial}{\partial x_l^j} K \left( \frac{\mathbf{x}^j - x_l^j}{h_1} \right) \\ &= \prod_{i=1, i \neq j}^d K \left( \frac{\mathbf{x}^i - x_l^i}{h_1} \right) \left( -\frac{1}{h_1} \right) K^{(1)} \left( \frac{\mathbf{x}^j - x_l^j}{h_1} \right). \end{aligned}$$

Alors, nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_l^j}(\mathbf{x}_l, y_l) &= \frac{it}{\sqrt{nh_1^{d+2}}} e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \left[ \frac{H_l \delta_l}{\bar{G}(y_l)} - F(t|\mathbf{x}) \right] \\ &\quad \times \left[ -h_1 \frac{l^{(1)}(\mathbf{x})}{l^2(\mathbf{x})} K_d \left( \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}_l}{h_1} \right) - \prod_{i=1, i \neq j}^d K \left( \frac{\mathbf{x}^i - x_l^i}{h_1} \right) K^{(1)} \left( \frac{\mathbf{x}^j - x_l^j}{h_1} \right) \right]. \end{aligned}$$

Sous les conditions **A2-A4** et **A7**, il existe  $A > 0$  tel que

$$\left\| \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial y_l}(\mathbf{x}_l, y_l) \right\|_{\infty} \leq \frac{At}{\sqrt{nh_1^d h_2^2}} \quad \text{et} \quad \left\| \frac{\partial \mathcal{V}_m}{\partial x_l^j}(\mathbf{x}_l, y_l) \right\|_{\infty} \leq \frac{At}{\sqrt{nh_1^{d+2}}}.$$

En utilisant le Lemme 1 dans Bulinski (1996), on trouve

$$\left| \text{cov} \left( e^{it \frac{U_{n2}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{n1}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)|.$$

De plus,

$$\left| \text{cov} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n-1} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}}, e^{it \frac{U_{nk_n}}{\sqrt{n}}} \right) \right| \leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} \sum_{i \in I_1 + \dots + I_{k_n-1}} \sum_{j \in I_{k_n}} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)|.$$

Nous concluons que

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| &\leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} \left[ \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| + \sum_{i \in I_1 + I_2} \sum_{j \in I_3} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{i \in I_1 + \dots + I_{k_n-1}} \sum_{j \in I_{k_n}} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| \right]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Par stationnarité, l'inégalité (3.43) devient

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| &\leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} \left[ (k_n - 1) \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_2} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| + (k_n - 2) \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_3} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| \right. \\ &\quad \left. + \dots + \sum_{i \in I_1} \sum_{j \in I_{k_n}} |\Lambda_{i,j}(\mathbf{x}, t)| \right]. \end{aligned}$$

De nouveau, sous la condition **A8** et par stationnarité nous avons

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{E} \left( e^{it \sum_{m=1}^{k_n} \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) - \prod_{m=1}^{k_n} \mathbb{E} \left( e^{it \frac{U_{nm}}{\sqrt{n}}} \right) \right| &\leq \frac{A^2 t^2}{nh_1^{d+1} h_2} p_n k_n \sum_{j=(k_n-1)(p_n+q_n)-(p_n-2)}^{(k_n-1)(p_n+q_n)+p_n} |\Lambda_{1,j}(\mathbf{x}, t)| \\ &\leq mt^2 \frac{p_n k_n}{n} \frac{1}{h_1^{d+1} h_2} \sum_{j=q_n}^{\infty} |\Lambda_{1,j}(\mathbf{x}, t)| \\ &\leq mt^2 \frac{p_n k_n}{n} \frac{\gamma_0}{1 - e^{-\gamma}} \frac{e^{-\gamma q_n}}{h_1^{d+1} h_2} \rightarrow 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Notons que (3.44) tend vers zéro sous les hypothèses **N2(i)** et **(iii)**.

Il reste à montrer que  $\frac{T_n}{\sqrt{n}}$  est asymptotiquement normale, cela par la condition standard de Lindeberg-Feller.

$$k_n \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} U_{n1}^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} U_{n1} \right| > \varepsilon \sigma(\mathbf{x}, t) \right\}} \right) \rightarrow 0.$$

Sous l'hypothèse **A2**, nous pouvons écrire

$$\begin{aligned} |U_{n1}| &= \left| \sum_{m=1}^{p_n} \frac{1}{\sqrt{h_1^d l(\mathbf{x})}} \left\{ K_{d,i} \left[ H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - F(t|\mathbf{x}) \right] - \mathbb{E} \left[ K_{d,i} \left( H_i \frac{\delta_i}{\overline{G}(Y_i)} - F(t|\mathbf{x}) \right) \right] \right\} \right| \\ &\leq \frac{2p_n \|K_d\|_{\infty}}{\sqrt{h_1^d l(\mathbf{x})} \overline{G}(\tau)}. \end{aligned}$$

De ce fait, par l'inégalité de Tchebychev et les hypothèses **A4** et **N2(ii)** nous aurons

$$\begin{aligned} k_n \mathbb{E} \left( \frac{1}{n} U_{n1}^2 \mathbb{1}_{\left\{ \left| \frac{1}{\sqrt{n}} U_{n1} \right| > \varepsilon \sigma(\mathbf{x}, t) \right\}} \right) &\leq \frac{4k_n p_n^2 \|K_d\|_{\infty}^2}{nh_1^d l^2(\mathbf{x}) \overline{G}^2(\tau)} \mathbb{P} \left( \frac{1}{\sqrt{n}} |U_{n1}| > \varepsilon \sigma(\mathbf{x}, t) \right) \\ &\leq \frac{4 \|K_d\|_{\infty}^2}{l^2(\mathbf{x}) \overline{G}^2(\tau)} \frac{k_n \text{Var}(U_{n1})}{n \varepsilon^2 \sigma^2(\mathbf{x}, t)} \frac{p_n^2}{nh_1^d} \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.3. □

### Preuve du Corollaire 3.2

Par l'utilisation d'un développement de Taylor de  $F_n(\cdot|\mathbf{x})$  au voisinage de  $\xi_p$  et la propriété  $F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = F(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x}) = p$ , nous aurons

$$\xi_{p,n}(\mathbf{x}) - \xi_p(\mathbf{x}) = \frac{F_n(\xi_{p,n}(\mathbf{x})|\mathbf{x}) - F_n(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})}{f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x})}$$

où  $\xi_{p,n}^*$  est entre  $\xi_p$  et  $\xi_{p,n}$ . La convergence uniforme presque sûre de  $\xi_{p,n}(\mathbf{x})$  vers  $\xi_p(\mathbf{x})$ , la Proposition 3.2 et la continuité de  $f(\cdot|\mathbf{x})$  donne la convergence en probabilité de  $f_n(\xi_{p,n}^*(\mathbf{x})|\mathbf{x})$  vers  $f(\xi_p(\mathbf{x})|\mathbf{x})$ . La preuve est donc établie en utilisant le Théorème 3.3. □

# Chapitre 4

## Conclusion et perspectives

Les durées de survie sont à l'origine liées aux applications en biologie, en médecine et en démographie et se propagent à présent aux études économiques, à la finance et à la fiabilité. Ces données sont traitées soit par des processus ponctuels (processus stochastique) soit par des méthodes d'inférence statistique qui restent les plus classiques. Ces durées de vie sont supposées positives et sont rarement complètes, elles sont soumises à des phénomènes de censure ou de troncature pour ne citer que les plus fréquents qui perturbent les études classiques et invitent à revoir les méthodes de l'inférence statistique. Des méthodes semi ou non paramétriques s'adaptent parfaitement à ce type d'études. Les phénomènes de censure ou de troncature sont typiques aux durées de vie.

Les propriétés asymptotiques constituent un axe central dans cette thèse. Les études ont essentiellement porté sur l'estimation des quantiles simple et conditionnel en rappelant les propriétés fondamentales de ces derniers. Ce travail fait un panorama de l'approche non paramétrique, notamment celle de l'estimation par noyau du quantile conditionnel pour des données de survie incomplètes et dépendantes. Cela oriente vers un modèle de données censurées à droite et associées et laisse à considérer une suite de v.a. stationnaires.

Les travaux réalisés par Ould-Saïd (2006) dans le cas des données censurées à droite et i.i.d. et par Ould-Saïd et Sadki (2008) dans le cadre des données censurées à droite et  $\alpha$ -mélangeantes sont étendus aux données associées, nous donnons la vitesse de convergence de l'estimateur à noyau de la f.d.r. conditionnelle ainsi que celle du quantile conditionnel. Nous énonçons par ailleurs la normalité asymptotique de l'estimateur convenablement normalisé et présentons le terme de la variance en utilisant la méthode des grands et des petits blocs. Des études de simulation viendront conforter la qualité de nos estimations. Dans ces études, nous faisons le choix de calculer la fenêtre optimale. Dans le chapitre premier, nous déroulons quelques généralités et définitions en relation avec notre cadre d'étude et en mesure d'étayer les démonstrations données par la suite tout en introduisant le quantile simple ainsi que le quantile conditionnel. Les chapitres suivants pointent du doigt l'estimation des quantiles et s'en rapportent à :

- o L'estimation non paramétrique de la fonction quantile conditionnel par la méthode du noyau dans



le cas de données complètes pour un modèle censuré à droite,

- La convergence presque sûre de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel pour des variables censurées et associées, pour ce faire nous avons recours à une inégalité exponentielle de type Bernstein, il s'agit de celle de Doukhan et Neumann (2007). La normalité asymptotique sous le même modèle est démontrée, elle appuie le fait que notre estimateur soit asymptotiquement normal en se basant sur la méthode des grands et des petits blocs.

Les champs d'application portant de notre estimateur sont vastes et s'appliquent sur un grand nombre d'études pratiques.

La thèse et son évolution vise à contribuer à la production de connaissances complémentaires liées à la recherche de nouvelles perspectives d'action susceptibles de trouver des éléments nouveaux qui faciliteraient les études relatives aux durées de survie.

Dans la continuité des travaux entrepris, nous présentons quelques études envisageables en rapport direct avec la présente thèse :

- L'utilisation d'autres méthodes non paramétriques dans l'étude de la normalité asymptotique. Par ailleurs, un résultat de type Berry Esseen pour l'estimateur du quantile conditionnel. Nous pensons également à la méthode des polynômes locaux.

- En vue d'obtenir de meilleurs résultats, nous pensons au calcul de la fenêtre optimale intervenant dans l'écriture de l'estimateur à noyau du quantile conditionnel.

- Les résultats obtenus peuvent être adaptés au cas de données fonctionnelles, ainsi la variable explicative serait donc dans un espace infini.

- Une étude comparative des taux obtenus pour les vitesses de convergence dans les différents modèles viendrait expliquer l'impact des données incomplètes et notamment, celui de la structure de dépendance.

- Bien que le choix du noyau n'ait pas d'influence majeure sur la qualité de nos estimations, il serait quand même judicieux de faire une étude de simulation avec divers noyaux afin de faire un choix qui permettrait de parfaire la qualité de nos estimations. Cependant, le choix de la fenêtre étant crucial, il est possible de pousser les simulations en faisant le choix de fenêtres optimales globales, noter que la fenêtre optimale de la covariable n'est pas forcément égale à celle de la variable observée.

- L'étude d'estimateurs à noyaux par des méthodes non paramétriques a été largement étudiée, notamment en présence d'une covariable. Une méthode comparative avec les résultats obtenus pour le mode conditionnel permettrait de donner le meilleur prédicteur.

# Bibliographie

- Aalen, O. (1978). Nonparametric inference for a family of count process. *Ann. Statist.* 6, 701–726.
- Abberger, K. (1997). Quantile smoothing in financial time series. *Statist. Papers.* 38, 125–148.
- Bagai, I. and Prakasa Rao, B.L.S. (1995). Kernel-type density and failure rate estimation for associated sequences. *Ann. Inst. Statist. Math.* 47, 253–266.
- Bahadur, R.R. (1966). A note on quantiles in large samples. *Ann. Math. Statist.* 37, 577–580.
- Beran, R. (1981). nonparametric regression with randomly censored survival data. *Technical Report university of California.* Berkley.
- Bhattacharya, P.K. and Gangopadhyay, A. (1990). Kernel and nearest neighbour estimation of conditional quantile. *Ann. Statist.* 18, 1400–1415.
- Berlinet, A., Gannoun, A. and Matzner-Løber, E. (2001). Asymptotic normality of convergent estimates of conditional quantiles. *Statist.* 35, 139–168.
- Bernstein S. N (1924). Sur une modification de l'inégalité de Tchebichev. *Ann. Sci. Inst. Sav. Ukraine, Sect. Math. I.*
- Birkel, T. (1988). On the convergence rate in the central limit theorem for associated processes. *Ann. Probab.* 16(4), 1685–1698.
- Birkel, T. (1989). A note on strong law of large numbers for positively dependent random variables. *Statist. Probab. Lett.* 7, 17–20.
- Bozorgnia, A., Patterson, R.F., and Taylor, R.L. (1996). Limit theorems for negatively dependent random variables. Proceedings of the First World Congress of Nonlinear Analysis. *Tampa, Florida, August.* 19–26.
- Breslow, N. and Crowley, J. (1974). A large sample study of the life table and product limit estimates under random censorship. *Ann. Statist.* 2, 437–443.
- Bulinski, A. (1996). On the convergence rates in the CLT for positively and negatively dependent random fields. *I. A. Ibragimov and A. Yu. Zaitsev (Eds.), Gordon and Breach.* 3–14.
- Bulinski, A. and Sabanovitch, E. (1998). Asymptotical behaviour of some functionals of positively and negatively random fields. *Fundam. Appl. Math.* 4, 479–492.

- Bulinski, A. and Shashkin, A. (2007). Limit theorems for associated random fields and related systems. *Vol 10, Advanced series on statistical science & applied probability*.
- Bulinski, A. and Suquet, C. (2001). Normal approximation for quasi-associated random fields. *Statist. Probab. Lett.* 54, 215–226.
- Cai, Z. and Roussas, G.G. (1992). Uniform strong estimation under  $\alpha$ -mixing with rates. *Statist. Probab. Lett.* 15, 47–55.
- Cai, Z. and Roussas, G.G. (1998). Kaplan-Meier estimator under association. *J. Multivariate Anal.* 67, 318–348.
- Chaubey, Y.P., Dewan, I., and Li, J. (2011). Smooth estimation of survival and density functions for a stationary associated process using Poisson weights. *Statist. and Probab. Lett.* 81, 267–276.
- Cheng, K.F. (1984). On almost sure representation for quantiles of the product limit estimator with applications. *Sankhya.* 46, Series A, 426–443.
- Dabrowska, D. (1992). Nonparametric quantile regression with censored data. *Sankhya.* 54, 252–259.
- Djelladj, W. and Tatachak, A. (2018). Strong uniform consistency of a kernel conditional quantile estimator for censored and associated data. DOI : 10.15672/HJMS.2018.609  
URL : <http://dergipark.gov.tr/hujms>.
- Douge, L. (2007). Vitesses de convergence dans la loi forte des grands nombres et dans l'estimation de la densité pour des variables aléatoires associées. *C. R. Acad. Sci. Paris. Ser. I.* 344, 515–518.
- Doukhan, P. (1994). Mixing : Properties and Examples. *vol. 85. Springer-Verlag, New York.*
- Doukhan P. and Louhichi S. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stochastic Processes and their Appl.* 84, 313–342.
- Doukhan, P. and Neumann, M. (2007). Probability and moment inequalities for sums of weakly dependent random variables, with applications. *Stochastic Processes and their Appl.* 117, 878–903.
- Droesbeke, J.J., Fichet, B. and Tassi, P. (1989). Analyse Statistique des Durées de Vie. *Economica.*
- Esary, J., Proschan, F. and Walkup, D. (1967). Association of random variables with applications. *Ann. Math. Statist.* 38, 1466–1476.
- Ferrani, Y., Ould Saïd ,E. and Tatachak, A. (2016). On kernel density and mode estimates for associated and censored data. *Com. Statist. Theory & Meth.* 45, 1853–1862.
- Fortuin, C., Kasteleyn, P. and Ginibre, J. (1971). Correlation inequalities on some partially ordered sets. *Comm. Math. Phys.* 22, 89–103.
- Fuk D. Kh and Nagaev S. V (1971). Probability inequalities for sums of independent random variables. *Theory. probab. Appl.* 16, 643–660.

- Gannoun, A. (1989). Estimation de la médiane conditionnelle, *Thèse de doctorat de l'université de Paris VI*.
- Gill, R. D. (1980). Censoring and stochastic integrals. *Mathematical center tracts, 124, Mathematics centrum, Amsterdam*.
- Hoeffding W.(1963). Probability inequalities for sums of bounded random variables. *J. Amer. Statist. Assoc.* 58, 13–30.
- Honda, T. (2000). Nonparametric estimation of a conditional quantile for  $\alpha$ - mixing processes. *Ann. Inst. Statist. Math.* 52, 459–470.
- Huber P.J. (1967). Robust regression, asymptotics, conjectures and Monte-Carlo. *Ann. Statist.* 1, 799–821.
- Ioannides, D. A., and Roussas, G. G. (1999). Exponential inequality for associated random variables. *Statist. Probab. Lett.* 42(4), 423–431.
- Joag-Dev, K. and Proschan, F. (1983). Negative association of random variables, with applications. *Ann. Statist.* 11(1), 286–295.
- Kallabis R and Neumann M (2006). An exponential inequality under weak dependence. *Bernoulli* 12(2), 333–350.
- Kaplan, E.M. and Meier, P. (1958). Nonparametric estimation from incomplete observations. *J. Amer. Statist. Assoc.* 53, 457–481.
- Khardani, S., Lemdani, M. and Ould Saïd, E. (2010). Some asymptotic properties for a smooth kernel estimator of the conditional mode under random censorship. *J. of the Korean Statistical Society.* 39, 455-469.
- Kiefer, J. (1967). On Bahadur's representation of sample quantiles. *Ann. Math. Statist.* 38, 1323–1342.
- Koenker, R. and Basset, JR. (1978). Regression quantiles. *Econometrica J. of the econometric Society.* 20, 24, 25, 33–50.
- Koul, H., Susarla, V. and Van Ryzin, J. (1981). Regression analysis with randomly right censored data. *Ann. Statist.* 9, 1276–1288.
- Lehmann, E. L. (1966). Some concepts of dependence. *Ann. Math. Statist.* 37, 1137–1153.
- Lemdani, M., Ould Saïd, E. and Poulin, N. (2009). Asymptotic properties of a conditional quantile estimator with randomly truncated data, *J. of Multivariate Analysis.* 100, 546–559.
- Lemdani, M., Ould Saïd, E. and Poulin, N. (2005). Strong representation of the quantile function for left truncated and dependent data. *Math. Meth. Statist.* 14, 332–345.
- Liang, H.-Y. and de Uña-Álvarez, J. (2011). Asymptotic properties of conditional quantile estimator for censored dependent observations. *Ann. Inst. Statist. Math.* 63, 267–289.

- Lin, Z. and Li, D. (2007). Asymptotic normality for L1-norm kernel estimator of conditional median under association dependence. *J. Multivariate Anal.* 98, 1214–1230.
- Lio, Y. L. and Padgett, W. J. (1987). On the mean squared error of nonparametric quantile estimators under random right-censorship. *Commun. Statist. Theory Meth.* 16, 1617–1628.
- Lio, Y. L. and Padgett, W. J. (1986). Some convergence results for kernel-type quantile estimators under censoring. *Statist. and Probab. letters.* 53, 457–481.
- Masry, E. (2002). Multivariate probability density estimation for associated processes : strong consistency and rates. *Statist. Probab. Lett.* 58, 205–219.
- Masry, E. (1986). Recursive probability density estimation for weakly dependent processes. *IEEE Trans. Inform. Theory* 32, 254–267.
- Mehra, K.L., Rao M.S. and Upadrasta S.P. (1991). A smooth conditional quantile estimator and related applications of conditional empirical processes. *J. Multivar. Anal.* 37, 151–179.
- Menni, N. and Tatachak, A. (2018). A note on estimating the conditional expectation under censoring and association : strong uniform consistency. *Stat. Papers.* 59, 1009–1030.
- Nagaraj, N.K. and Reddy, C.S. (1993). Asymptotic null distributions of tests for change in level in correlated data. *Sankhya Ser. A* 55, 3748.
- Nelson, W. (1972). Theory and applications of hazard plotting for censored failure data. *Technometrics.* 14, 945–965.
- Newman, C. M. (1984). Asymptotic independence and limit theorems for positively and negatively dependent random variables. *Inequalities in statistics and probability (Lincoln, Neb., 1982), IMS Lecture Notes Monogr. Ser., 5, Inst. Math. Statist. (Hayward, CA).* 127–140.
- Newman, C. M. (1980). Normal fluctuations and the FKG inequalities. *Comm. Math. Phys.* 74, 119–128.
- Newman, C. M. and Wright, A. L. (1981). An invariance principle for certain dependent sequences. *Ann. Probab.* 9(4), 671–675.
- Oliveira, P.E. (2005). An exponential inequality for associated variables. *Statist. Probab. Lett.* 73, 189–197.
- Oliveira, P.E. (2012). Asymptotics for Associated Random Variables. *Springer Verlag.*
- Ould Saïd, E. (2006). A strong uniform convergence rate of kernel conditional quantile estimator under random censorship. *Statist. Probab. Lett.* 76, 579–586.
- Ould-Saïd, E. and Cai, Z. (2005). Strong uniform consistency of nonparametric estimation of the conditional mode function. *J. Nonparametric Statist.* 17, 797–806.
- Ould-Saïd, E. and Sadki, O. (2011). Asymptotic normality for a smooth kernel estimator of the conditional quantile for censored time series. *South African Statist. J.* 45, 65–98.

- Ould Saïd and Sadki, O. (2008). Prediction via the conditional quantile for right censorship model. *Far East J. Theory Statist.* 25(2), 145–179.
- Ould-Saïd, E. and Sadki, O. (2005). Strong approximation of quantile function for strong mixing and censored processes. *Comm. Statist. Theory and Methods.* 34, 1449–1459.
- Ould Saïd, E., Yahia, D., Necir, A. (2009). A strong uniform convergence rate of a kernel conditional quantile estimator under random left-truncation and dependent data. *Elect. J. Statist.* 3, 426–445.
- Padgett, W. T., Thombs, L. A. (1989). A smooth nonparametric quantile estimation from right censored data. *Statist. Probab. Lett.* 7, 113–121.
- Parzen, E. (1962). On estimation of a probability density function and mode. *The Annals of Math. Statist.* 33, 1065–1076.
- Patterson, R. F. and Taylor, R. L. (1997). Strong laws of large numbers for negatively dependent random elements. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Appl.* 30, 4229–4235.
- Peterson, A. V. (1977). Expressing the Kaplan-Meier estimator as a function of subsurvival function. *J. Amer. statist. Assoc.* 72, 854–858.
- Pitt, L.D. (1982). Positively correlated normal variables are associated. *Ann. Probab.* 10, 496–499.
- Prakasa Rao, B.L.S. Associated Sequences, Demimartingales and Nonparametric Inference (2012). Probability and its Applications. *Springer Basel AG.*
- Qin, Y.S. and Wu, Y. (2001). An estimator of a conditional quantile in the presence of auxiliary information. *J. Statist. Plan. Inference.* 99, 59–70.
- Reid, N. (1981). Estimating the median survival time. *Bimetrika.* 68, 601–608.
- Rio, E. (2000). Théorie Asymptotique des Processus Aléatoires Faiblement Dépendants (In French). *Math. and Appl., 31, Springer-Verlag, New York.*
- Rosenblatt, M. (1956). A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Natl. Acad. Sci. USA.* 42, 43–47.
- Roussas, G.G. (2000). Asymptotic normality of the kernel estimate of a probability density function under association. *Statist. Probab. Lett.* 50, 1–12.
- Roussas, G. G. (1991). Kernel estimates under association : strong uniform consistency. *Statist. Probab. Lett.* 12, 393–403.
- Roussas, G.G. (1969), Nonparametric estimation of the transition distribution function of a Markov process. *Ann. Math. Statist.*
- Samanta, M. (1989). Nonparametric estimation of conditional quantiles. *Statist Probab. Lett.* 7, 407–412.

- Sander, J. (1975). The weak convergence of quantiles of the product limit estimator. *Technical report Number 5, Stanford University. Department of Statistics.*
- Serfling, R.J. (1980). Approximation Theorems of Mathematical Statistics. *Wiley, New York.*
- Shorack, G. R. and Wellner, J.A . (1986). Empirical processes with applications to statistics. *Wiley, New York.*
- Stone, C. J. (1977). Consistent nonparametric regression. *Ann. Statist.* 5, 595–645.
- Stute, W., and Wang, J.L. (1993). The strong law under random censorship. *The Annals of statistics.* 21(3), 1591–1607.
- Sun, L. et ZHOU, X. (2001). Survival function and density estimation for truncated dependent data. *Statist. Probab. Lett.* 52, 47–57.
- Xiang, X. (1996). A kernel estimator of a conditional quantile. *J. Multivar. Anal.* 59, 206–216.
- Yu, K. and Jones, M.C. (1998). Local linear quantile regression. *J. Am. Statist. Assoc.* 93, 228–238.