

N° d'ordre 01/2019-D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire  
Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique  
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene



Faculté de Mathématiques

Thèse présentée pour l'Obtention du Grade de Docteur en Mathématiques

Option : Méthodes stochastiques pour la recherche opérationnelle

par : KESSIRA Abderrahim

**Thème**

**Structure Probabiliste et Estimation dans une  
Classe de Modèles *GARCH* en Puissance  
Périodiques et à Seuil**

Présenté et soutenu publiquement le 13/05/2019

Devant le jury composé de :

Ourida SADKI	Professeur à l'USTHB	Présidente
Hafida GUERBYENNE	Professeur à l'USTHB	Directrice de thèse
Youcef BERKOUN	Professeur à l'UMM-Tizi Ouzou	Examineur
Abdelouahab BIBI	Professeur à l'ULBM-Oum El Bouaghi	Examineur
Ahmed GHEZAL	MCA au centre Universitaire Mila	Examineur
Fayçal HAMDİ	Professeur à l'USTHB	Examineur

# Remerciements

Louange à Dieu, le miséricordieux, sans lui rien de tout cela n'aurait pu être.

Je tiens à exprimer ici toute ma reconnaissance au Professeur Hafida Guerbyenne, ma directrice de thèse. Je la remercie pour sa contribution à l'aboutissement de ce travail, pour ses qualités pédagogiques, ses précieux conseils, son stimulant encouragement et sa disponibilité, Elle m'a apporté tout le soutien nécessaire.

Je remercie Professeur Ourida Sadki, pour l'honneur qu'elle m'a fait en acceptant de présider le jury de cette thèse.

Les Professeurs Youcef Berkoun, Abdelouahab Bibi, Ahmed Ghezal et Fayçal Hamdi, m'ont fait l'honneur d'accepter de faire partie de mon jury de soutenance. Je les en remercie très vivement.

Je tiens enfin à remercier mes parents, ma femme et mes deux petites filles, mon frère et mes sœurs qui m'ont constamment soutenu durant ce travail.

## Abstract

In this thesis, we introduce and study the Power Periodic Threshold GARCH Model (*PPTGARCH*). We give the necessary and sufficient conditions for the existence of the unique strictly periodically stationary solution of the model and the necessary and sufficient conditions for the existence of moments. A sufficient condition for the periodic geometric ergodicity and  $\beta$ -mixing property using the *uniform countable additivity* condition is given; (see [Tweedie, 2001](#); [Fonseca et Tweedie, 2002](#)). We prove the consistency and the asymptotic normality of the Quasi-Maximum Likelihood estimator (*QMLE*) of the parameters. Simulation studies to illustrate consistency and asymptotic normality of the estimators for different underlying error distributions are presented.

**Keywords.** Threshold *GARCH*; Power transformation; Periodic coefficients; Geometric ergodicity;  $\beta$ -mixing; Uniform countable additivity condition; Moments; Strict stationarity; Asymptotic normality; Quasi-maximum likelihood estimator.

## Résumé

Dans cette thèse, nous présentons et étudions le modèle *GARCH* en puissance périodique et à seuil (*PPTGARCH*). Nous donnons les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de l'unique solution strictement périodiquement stationnaire du modèle et les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence des moments. Une condition suffisante pour l'ergodicité géométrique périodique et la propriété de  $\beta$ -mélange utilisant la condition d'*additivité dénombrable uniforme* est donnée (voir [Tweedie, 2001](#); [Fonseca et Tweedie, 2002](#)). Nous prouvons la consistance et la normalité asymptotique de l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance (*QMV*) des paramètres. Des études de simulation pour illustrer la consistance et la normalité asymptotique des estimateurs pour différentes distributions sous-jacentes du processus bruit blanc sont présentées.

**Mots clés.** *GARCH* à seuil; Transformation en puissance; Coefficients périodiques; Ergodicité géométrique;  $\beta$ -mélange; Condition d'additivité dénombrable uniforme; Moments; Stationarité stricte; Normalité asymptotique; Estimateur du quasi-maximum de vraisemblance.

---

# TABLE DES MATIÈRES

<b>Table Des Matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction Générale</b>	<b>3</b>
<b>1 Quelques modèles asymétriques</b>	<b>11</b>
1.1 Modèle <i>GARCH</i> exponentiel . . . . .	12
1.2 Modèles <i>GARCH</i> à seuil . . . . .	14
1.3 Modèle <i>GARCH</i> transformé en puissance asymétrique . . . . .	17
1.4 Modèles <i>GARCH</i> transformé en puissance asymétrique et à seuil . . . . .	20
1.5 Modèle <i>GARCH</i> asymétrique de mélange gaussien . . . . .	24
<b>2 Modèle PPTGARCH et structure probabiliste</b>	<b>27</b>
2.1 La représentation markovienne . . . . .	30
2.2 Stationnarité stricte . . . . .	31
2.3 Existence des moments . . . . .	36
2.4 Ergodicité géométrique et $\beta$ -mélange . . . . .	38
<b>3 Estimation</b>	<b>47</b>

	2
3.1 Estimation par la méthode du quasi-maximum vraisemblance . . . . .	49
3.2 Preuves des Théorème 3.1.1 et Théorème 3.1.2 . . . . .	54
3.3 Simulation . . . . .	62
<b>Conclusion Générale</b>	<b>68</b>
<b>Appendices</b>	<b>70</b>
<b>Annexe A Stabilité des chaînes de Markov</b>	<b>71</b>
A.1 Noyau de transition et définition d'une chaîne de Markov . . . . .	71
A.2 Irréductibilité et apériodicité . . . . .	73
A.3 Chaîne récurrente, chaîne transitoire . . . . .	76
A.4 Existence des mesures invariantes . . . . .	79
A.5 Ergodicité . . . . .	81
A.6 Critères de classification . . . . .	84
<b>Annexe B Conditions pour l'additivité dénombrable uniforme</b>	<b>89</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>92</b>

---

# Introduction Générale

**E**ngle (1982) et Bollerslev (1986) ont introduit la modélisation (G) ARCH où la variance conditionnelle a été formulée comme une combinaison linéaire des innovations au carré. Des preuves empiriques montrent que les modèles *GARCH* ne peuvent pas s'adapter de manière adéquate à la volatilité des données boursières. Ceci est dû aux dépendances non linéaires qui nécessitent des modèles moins réguliers pour s'adapter aux faits stylisés qui caractérisent les données financières (voir, par exemple, Scheinkman et LeBaron, 1989), en particulier, l'asymétrie, en ce sens qu'une augmentation de la volatilité due à une baisse des prix est généralement plus élevée que celle résultant d'une hausse de même ampleur. Celle-ci est connue sous le nom d'effet de levier. Il y a eu une floraison de recherches sur la modélisation de type *GARCH* non linéaire, y compris l'asymétrie. Le modèle log-*GARCH*, suggéré indépendamment sous des formes légèrement différentes par Geweke (1986), Pantula (1986) et Milhøj (1987), paramétrise la variance conditionnelle logarithmique en fonction des variances logarithmiques décalées et du logarithme des innovations décalées dans le temps au carré. Le modèle *GARCH* asymétrique (*AGARCH*) a été introduit par Engle (1990) pour permettre des effets asymétriques sur la volatilité. Rabemananjara et Zakoïan (1993) et Li et Li (1996) ont introduit dans différentes

formulations le concept d'asymétrie-seuil dans la volatilité. Une autre tentative de modélisation de l'asymétrie est le modèle *beta - ARCH* introduit par [Guégan et Diebolt \(1994\)](#) qui ont étudié ses propriétés probabilistes.

Les développements dans la littérature sur le modèle *ARCH* se sont concentrés sur le terme de puissance par lequel les données doivent être transformées car il a été remarqué ([Ding, Granger et Engle, 1993](#)) que les rendements d'actifs élevés à une puissance montrent des autocorrélations significatives pour des retards plus importants reflétant ainsi la présence de mémoire longue. La présence d'un regroupement de volatilité de la volatilité n'est en aucun cas la seule caractéristique des rendements au carré du prix d'un actif. En général, les variations absolues du prix des actifs se caractérisent par une volatilité et l'inclusion d'un terme puissance accentue les périodes de tranquillité et de volatilité relatives en amplifiant les valeurs aberrantes de cette série. Il est possible de spécifier n'importe quel terme de puissance pour compléter cette tâche à partir d'une multitude d'options incluant toutes les valeurs positives. L'utilisation courante d'un terme au carré dans ce rôle est très probablement le reflet de l'hypothèse de normalité traditionnellement invoquée concernant les données. Si une série de données est normalement distribuée, nous sommes en mesure de caractériser complètement sa distribution par ses deux premiers moments. En tant que tel, il convient de se concentrer sur un terme au carré et donc sur une mesure de la variance. Cependant, si nous acceptons que les données puissent avoir une distribution d'erreur non normale, il faut transcender ce cadre et aller vers les moments d'ordres plus élevés, de kurtosis et au-delà pour décrire correctement les données. Dans ce cas, la supériorité d'un terme au carré n'est plus de mise et d'autres transformations de puissance peuvent être plus appropriées. En fait, pour les données non normales, en élevant au carré, on impose effectivement une structure sur les données qui peut potentiellement fournir des performances de modélisation et de prévision sous-optimales par rapport aux autres termes de puissance. Reconnaisant



la possibilité qu'un terme de puissance au carré ne soit pas nécessairement optimal, [Ding, Granger et Engle \(1993\)](#) ont introduit une nouvelle classe de modèle *ARCH* appelée modèle Power *ARCH* (*APARCH*) ou *ARCH* en puissance asymétrique. Plutôt que d'imposer une structure aux données, la classe de modèles Power *ARCH* estime le terme de puissance optimal. Ainsi, ce modèle permet une gamme virtuellement infinie de transformations incluant toutes les valeurs positives. Cela inclut la classe standard du modèle *ARCH* qui spécifie l'utilisation d'un terme au carré et également le modèle *GARCH* de [Taylor \(1986\)](#) qui relie l'écart-type conditionnel en fonction des résidus absolus et des écarts-types passés. [Ding, Granger et Engle \(1993\)](#) ont spécifié cette version asymétrique généralisée du modèle *ARCH* et l'ont appliquée aux données du *S&P500* pour la période allant du 3 janvier 1928 au 30 Août 1991. Les auteurs ont constaté que le modèle fournissait un bon ajustement des données et que le terme de puissance optimal était de 1,43. [Hentschel \(1995\)](#) a proposé une classe plus générale du modèle Power *ARCH* et l'a également appliquée à des données boursières américaines où la valeur optimale du terme de puissance s'est avérée être 1,524.

La classe des modèles asymétriques transformés en puissance (power-transformed) *GARCH* a reçu beaucoup d'attention de la part de nombreux chercheurs et praticiens. Les transformations de Box-Cox ont motivé de nombreux auteurs, parmi lesquels [Higgings et Bera \(1992\)](#) qui ont introduit les modèles power-transformed *ARCH* (*NARCH*), [Hwang et Kim \(2004\)](#) qui ont généralisé le modèle de [Higgings et Bera \(1992\)](#) au modèle power-transformed threshold *ARCH* et étudié l'ergodicité géométrique, l'existence de moments stationnaires, et proposé des tests asymptotiques via l'approche de normalité asymptotique locale. [Hwang et Basawa \(2004\)](#) ont proposé la transformation Box-Cox du modèle *GARCH* (1,1) à seuil et ont étudié la stationnarité et la structure des moments ; [Hwang et Kim \(2004\)](#) ont proposé une nouvelle classe de modèles power-transformed *ARCH* à seuil et étudié l'ergodi-

cité géométrique et l'existence des moments, ils ont utilisé l'approche de la normalité asymptotique locale (*LAN*) pour dériver des tests asymptotiques pour des structures *ARCH*. Dans une forme légèrement différente du modèle de [Ding, Granger et Engle \(1993\)](#), [Pan, Wang et Tong \(2008\)](#) ont proposé une extension *GARCH* du modèle de [Hwang et Kim \(2004\)](#). Ils ont étudié la stationnarité stricte, l'existence des moments et le comportement de queue de leur modèle. Ils ont obtenu et comparé empiriquement les propriétés des estimateurs du quasi-maximum vraisemblance (*QMV*) et des moindres déviations absolues (*LAD*) des paramètres. [Lee \(2011\)](#), en faisant une extension du modèle *ARCH*(1) à seuil de puissance aléatoire de [Kim et Hwang \(2005\)](#), a considéré un processus asymétrique power-transformed *GARCH*(1, 1) à seuil dans lequel des paramètres de puissance aléatoires ont été considérés selon le régime et a donné les conditions d'existence d'une solution strictement stationnaire, d'ergodicité géométrique et de propriété de  $\beta$ -mélange. [Hamadeh et Zakoïan \(2011\)](#) ont établi les propriétés asymptotiques des estimateurs *QMV* pour une classe de processus power-transformed *GARCH* à seuil lorsque la puissance de la transformation est connue et inconnue sous des conditions non standard. Ils ont également donné les propriétés asymptotiques des estimateurs des moindres carrés (*LS*) lorsque la puissance de la transformation est donnée. [Francq et Zakoïan \(2013\)](#) ont étudié la classe des modèles asymétriques power-transformed *GARCH* (1,1) en présence d'une possible explosivité. [Francq et Zakoïan \(2012\)](#) ont examiné les prédictions optimales de la volatilité en utilisant une classe de modèles power-transformed *GARCH*. [Ak-nouche et Touche \(2015\)](#) ont évalué une estimation des moindres carrés pondérés en deux étapes par rapport aux estimateurs *QMV* des paramètres pour le modèle  $\delta$ -*TARCH* stable et instable avec un  $\delta$  connu. Ceci reflète tout l'intérêt porté à ces processus en puissance et à leur volatilité.

Ces modèles invariants dans le temps ne s'adaptent pas adéquatement aux données ayant une tendance périodique dans la volatilité. Afin de pouvoir modéliser

l'effet de la fréquence d'enregistrement des actifs, [Bollerslev et Ghysels \(1996\)](#) ont introduit le modèle *GARCH* périodique. Par la suite, de nombreux auteurs ont greffé ce concept à de nombreux modèles. [Bentarzi et Hamdi \(2008a, b\)](#) ont introduit le modèle *ARCH* périodique de mélange (*MPARCH*) étendu au modèle *GARCH* périodique de mélange (*MPGARCH*) par [Hamdi et Souam \(2018\)](#), qui ont donné des propriétés probabilistes de ce modèle et estimer les paramètres à l'aide de la méthode du maximum de vraisemblance. [Bibi et Aknouche \(2008\)](#) et [Aknouche et Bibi \(2009\)](#) ont étudié les propriétés probabilistes et les propriétés asymptotiques des estimateurs du *QMV* du modèle *GARCH* périodique. [Lee et Shin \(2010\)](#) ont introduit un modèle *GARCH* saisonnier à coefficients périodiques et étudié la stationnarité stricte, l'ergodicité géométrique et l'existence de moments de leur modèle. [Aliat et Hamdi \(2018\)](#) ont proposé le modèle *ARMA* périodique à changement de régime Markovien (*MS - PARMA*) comme une généralisation des modèles classiques *ARMA* à changement de régime Markovien au cas où les coefficients sont périodiquement évolutifs dans le temps. D'autres travaux intégrant la périodicité dans d'autres modèles de volatilité peuvent être trouvés dans [Aliat \(2018\)](#), [Boussaha \(2018\)](#) et [Boussaha et Hamdi \(2018\)](#). [Bibi et Ghezal \(2017\)](#) ont proposé l'extension des processus *GARCH* à seuil (*TGARCH*) à coefficients invariants dans le temps au modèle *PTGARCH* dans lequel les coefficients varient périodiquement dans le temps. Ils ont donné les propriétés asymptotiques des estimateurs *QMV* dans le cas où le processus bruit blanc sous-jacent est fort et semi-fort. [Aknouche, Demmouche et Touche \(2018\)](#) ont donné quelques propriétés probabilistes du modèle *GARCH* périodique transformé en puissance où la puissance change périodiquement dans le temps (*PAP - GARCH*), proposé une méthode d'estimation basée sur le Griddy-Gibbs sampler pour différentes distributions, conduit une étude de simulation et fait une application sur la série de données de l'indice S&P500.

## Apport et présentation de la thèse

Cette thèse se situe dans la continuité des travaux de recherche cités précédemment. Son objectif principal est d'étudier, pour la classe des Modèles *GARCH* en Puissance Périodiques et à Seuil, les propriétés probabilistes en particulier l'existence d'une solution strictement périodiquement stationnaire, en termes du plus grand exposant de Lyapounov, l'existence des moments d'ordres supérieurs, la propriété d'ergodicité géométrique qui est un outil clé pour obtenir la propriété de  $\beta$ -mélange indispensable pour le second volet de cette thèse et qui est, d'établir le comportement asymptotique des estimateurs du maximum de vraisemblance. Cette thèse est organisée comme suit

### Chapitre 1 : Quelques modèles asymétriques

Ce chapitre reprend quelques modèles existants dans la littérature et rappelle les conditions d'existence d'une solution strictement stationnaire. Ces modèles sont à coefficients invariants dans le temps et ont le pouvoir de capturer certaines caractéristiques asymétriques des séries financières. Il s'agit de la classe des modèles *GARCH* exponentiel (*EGARCH*) introduite par Nelson (1991), la classe des modèles *GARCH* à seuil introduite par Zakoïan (1994), la classe des modèles *GARCH* transformé en puissance asymétrique introduite par Ding, Granger et Engle (1993), la classe des modèles (*G*)*ARCH* transformé en puissance asymétrique et à seuil d'abord introduite par Hwang et Kim (2004) puis généralisé par Pan, Wang et Tong (2008) Ce chapitre s'achève avec la classe des modèles *GARCH* de mélange gaussien (*MixN - GARCH*) qui a été proposée et étudiée par Haas et al. (2004a, b).

## Chapitre 2 : Modèle PPTGARCH et structure probabiliste

Ce chapitre présente notre classe de modèles *PPTGARCH* ainsi que les conditions pour l'obtention de la stationnarité périodique stricte, l'existence des moments, l'ergodicité géométrique et le  $\beta$ -mélange. Nous commençons par présenter le modèle ainsi que sa représentation markovienne, nous étudions ensuite les propriétés de cette chaîne de Markov écrite sous une forme vectorielle. Ceci nous a permis d'établir dans la première section, à partir du critère du plus grand exposant de Lyapunov  $\gamma^S(\cdot)$  introduit par [Aknouche et Guerbyenne \(2009\)](#) la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique unique pour laquelle nous donnons dans la section suivante la condition pour l'existence de ses moments fractionnaires et fractionnaires d'ordres supérieurs pour terminer ensuite en donnant dans la dernière section de ce deuxième chapitre, la condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov soit géométriquement ergodique en établissant indirectement la condition de  $\phi$ -irréductibilité – souvent difficile à établir – et ce, à l'aide de la condition d'*additivité dénombrable uniforme* ([Tweedie, 2001](#)) et de déduire la propriété de  $\beta$ -mélange. Les résultats et les preuves nécessaires sont donnés.

## Chapitre 3 : Estimation

Ce chapitre concerne l'estimation du modèle *PPTGARCH*. Il est composé de trois sections. La première section est consacrée à la méthode du maximum de vraisemblance et aux propriétés de convergence presque sûre et de normalité asymptotique des estimateurs des paramètres. La deuxième section contient les preuves des théorèmes et des lemmes des résultats principaux formulés dans la première section. Une étude de simulation intensive fait l'objet de la section trois. Elle conforte les résultats théoriques obtenus dans la première section.

Nous achevons ce travail par une conclusion générale qui contient quelques perspectives et par deux annexes contenant des résultats et des définitions sur les chaînes de Markov et La condition d'*additivité dénombrable uniforme* dont nous avons besoin dans ce travail.

---

---

# CHAPITRE 1

---

## Quelques modèles asymétriques

La vie économique est sujette à de nombreux changements résultant de la conjoncture. Aussi il est peu évident de pouvoir modéliser les séries chronologiques macroéconomiques et financières à l'aide de modèles qui se caractérisent par une stabilité dans les paramètres étant donné que ces modèles sont incapables de capturer certains faits stylisés de ces séries, en particulier les changements de régime et la périodicité qui est un changement de régime déterministe. Le souci d'intégrer ces changements dans les modèles dits classiques a suscité un grand intérêt de la part de nombreux chercheurs qui ont proposé des modèles dans lesquels les paramètres changent avec le temps. Ainsi sont nés les modèles à seuils, les modèles à changement de régime markovien, les modèles de mélange. D'autres extensions ont vu le jour et dans lesquelles a été incorporé le concept de périodicité pour tenir compte du double changement, l'un dû à l'effet d'une transition endogène ou exogène observable ou non observable, et l'autre à l'effet du jour par exemple. Dans ce chapitre, nous présentons quelques modèles non périodiques qui tentent de saisir le caractère asymétrique dans la volatilité de certaines séries de données.

## 1.1 Modèle *GARCH* exponentiel

Soit  $(\eta_t)$  une suite de variables *i.i.d* telles que  $E(\eta_t) = 0$  et  $Var(\eta_t) = 1$ . On dit que  $(\varepsilon_t)$  est un processus *GARCH* exponentiel (*EGARCH*( $p, q$ ), [Nelson, 1991](#)) s'il vérifie une équation de la forme

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ et } \log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i g(\eta_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log \sigma_{t-j}^2 \quad (1.1)$$

où

$$g(\eta_{t-i}) = \theta \eta_{t-i} + \xi (|\eta_{t-i}| - E|\eta_{t-i}|), \quad (1.2)$$

$\omega, \alpha_i, \beta_j, \theta$  et  $\xi$  sont des réels.

Un autre choix pour modéliser la volatilité est

$$\sigma_t^2 = e^\omega + \prod_{i=1}^q \exp\{\alpha_i g(\eta_{t-i})\} + \prod_{j=1}^p (\sigma_{t-j}^2)^{\beta_j},$$

ce choix permet d'éviter les conditions de positivité sur les coefficients, le logarithme pouvant être de signe quelconque ([Francq, Wintenberger et Zakoïan, 2013](#)).

L'interprétation usuelle selon laquelle des innovations de grand module accroissent la volatilité impose cependant des contraintes sur les coefficients, par exemple si  $\log \sigma_t^2 = \omega + \theta \eta_{t-1} + \xi (|\eta_{t-1}| - E|\eta_{t-1}|)$ ,  $\sigma_t^2$  est une fonction croissante de  $|\eta_{t-1}|$ , à signe de  $\eta_{t-1}$  fixé, si et seulement si  $-\xi < \theta < \xi$ . Dans le cas général il suffit d'imposer

$$-\xi < \theta < \xi, \quad \alpha_i \geq 0, \quad \beta_j \geq 0.$$

Dans le modèle (1.1), l'asymétrie est prise en compte par l'intermédiaire du coefficient  $\theta$ . Prenons par exemple le cas où  $\theta < 0$  et  $\log \sigma_t^2 = \omega + \theta \eta_{t-1}$  : il est clair que si  $\eta_{t-1} < 0$ , c'est à dire  $\varepsilon_{t-1} < 0$ , la variable  $\log \sigma_t^2$  sera au dessus de sa moyenne  $\omega$  tandis qu'elle sera en dessous si  $\varepsilon_{t-1} > 0$ , ce qui caractérise généralement les séries



financières.

Un modèle assez proche est le log  $-GARCH$  dans lequel on pose

$$\log \sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \log(|\varepsilon_{t-1}| - \xi_i \varepsilon_{t-1}) + \sum_{j=1}^p \beta_j \log \sigma_{t-j}^2$$

où, évidemment, on doit imposer  $|\xi_i| < 1$ .

La stationnarité du modèle  $EGARCH$  ne dépend pas de la spécification retenue pour  $g(\cdot)$ . On suppose néanmoins que  $E\{g(\eta_t)\}$  existe et vaut 0. On suppose que  $g(\eta_t)$  n'est pas presque sûrement nul et que les polynômes

$$\alpha(z) = \sum_{i=1}^q \alpha_i z^i \text{ et } \beta(z) = \sum_{j=1}^p \beta_j z^j$$

n'ont pas de racine commune, avec  $\alpha(z)$  non identiquement nul. Alors, le modèle  $EGARCH(p, q)$  défini en (1.1) admet une solution strictement stationnaire et non anticipative si et seulement si les racines de  $\beta(z)$  sont de module strictement supérieur à 1. Cette solution vérifie  $E\{\log(\varepsilon_t^2)\} < \infty$  dès que  $E\{\log(\eta_t^2)\} < \infty$  et  $E\{g(\eta_t)\} < \infty$ . De plus, si pour un entier  $m$  positif

$$\mu_{2m} = E\{\eta_t^{2m}\} < \infty, \quad \prod_{i=1}^{\infty} E\{\exp(|m\lambda_i g(\eta_t)|)\} < \infty,$$

$(\varepsilon_t^2)$  admet un moment d'ordre  $m$  donné par

$$E\{\varepsilon_t^{2m}\} = \mu_{2m} \exp(m\omega^*) \prod_{i=1}^{\infty} g_{\eta}(m\lambda_i)$$

où les  $\lambda_i$  sont définis par  $\frac{\alpha(L)}{\beta(L)} = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i L^i$ ,  $\omega^* = \frac{\omega}{\beta(1)}$  et  $g_{\eta}(x) = E\{\exp(xg(\eta_t))\}$ .

## 1.2 Modèles *GARCH* à seuil

Une façon d'introduire l'asymétrie est de spécifier la variance conditionnelle en fonction des composantes positive et négative des innovations passées.

On a  $\varepsilon_t = \varepsilon_t^+ + \varepsilon_t^-$  avec  $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$  et  $\varepsilon_t^- = \min(\varepsilon_t, 0)$ . Soit  $(\eta_t)$  une suite de variables *i.i.d* telles que  $E(\eta_t) = 0$  et  $Var(\eta_t) = 1$ . On dit que  $(\varepsilon_t)$  est un processus *GARCH*( $p, q$ ) à seuil (*TGARCH*( $p, q$ ), [Zakoïan,1994](#)) s'il vérifie une équation de la forme

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ et } \sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_{i,+} \varepsilon_{t-i}^+ - \alpha_{i,-} \varepsilon_{t-i}^- + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j} \quad (1.3)$$

où  $\omega > 0$  et  $\alpha_{i,+}, \alpha_{i,-}$  et  $\beta_j$  sont des réels positifs.

Sous les contraintes  $\omega > 0, \alpha_{i,+} \geq 0, \alpha_{i,-} \geq 0$  et  $\beta_j \geq 0$  la variable  $\sigma_t$  est toujours strictement positive et s'interprète comme l'écart-type conditionnel de  $\varepsilon_t$ .

A travers les coefficients  $\alpha_{i,+}$  et  $\alpha_{i,-}$ , la volatilité dépend à la fois de la magnitude et du signe des innovations passées. La modélisation est suffisamment souple pour permettre une asymétrie différente selon l'écart  $i$  entre la date passée et la date présente. Cette classe contient comme cas particuliers des modèles ne présentant pas d'asymétrie et dont les propriétés sont similaires à celles des *GARCH*. Il suffit en effet d'imposer pour tout  $i = 1, \dots, q$ ,  $\alpha_{i,+} = \alpha_{i,-} := \alpha_i$  pour obtenir

$$\sigma_t = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i |\varepsilon_{t-i}| + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}$$

qui est le modèle *AVGARCH* (Absolute Value *GARCH*, voir, [Taylor,1986](#) et [Schwert,1989](#)).

Il est difficile de trancher s'il est préférable de modéliser la variance ou l'écart-type conditionnels. Dans le cas d'un modèle de régression à erreurs hétéroscédastiques non gaussiennes, il a été montré que les valeurs absolues des résidus permettent de construire des estimateurs plus efficaces de la variance que leurs carrés ([Davidian et Carroll, 1987](#)).

Pour donner les conditions de stationnarité du modèle  $TGARCH(p, q)$ , on pose

$$\underline{B}(\eta_t) = \begin{pmatrix} \omega\eta_t^+ \\ -\omega\eta_t^- \\ 0 \\ \vdots \\ \omega \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+2q}, \quad \underline{Z}_t = \begin{pmatrix} \varepsilon_t^+ \\ -\varepsilon_t^- \\ \vdots \\ \varepsilon_{t-q+1}^+ \\ -\varepsilon_{t-q+1}^- \\ \sigma_t \\ \vdots \\ \sigma_{t-p+1} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{p+2q}$$

et

$$A(\eta_t) = \begin{pmatrix} \eta_t^+ \boldsymbol{\alpha}_{1:q-1} & \alpha_{q,+} \eta_t^+ & \alpha_{q,-} \eta_t^+ & \eta_t^+ \boldsymbol{\beta}_{1:p-1} & \beta_p \eta_t^+ \\ -\eta_t^- \boldsymbol{\alpha}_{1:q-1} & -\alpha_{q,+} \eta_t^- & -\alpha_{q,-} \eta_t^- & -\eta_t^- \boldsymbol{\beta}_{1:p-1} & -\beta_p \eta_t^- \\ \mathbf{I}_{(2q-2)} & \mathbf{0}_{(2q-2) \times 1} & \mathbf{0}_{(2q-2) \times 1} & \mathbf{0}_{(2q-2) \times (p-1)} & \mathbf{0}_{(2q-2) \times 1} \\ \boldsymbol{\alpha}_{1:q-1} & \alpha_{q,+} & \alpha_{q,-} & \boldsymbol{\beta}_{1:p-1} & \beta_p \\ \mathbf{0}_{(p-1) \times (2q-2)} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} & \mathbf{I}_{(p-1)} & \mathbf{0}_{(p-1) \times 1} \end{pmatrix}_{(p+2q) \times (p+2q)}$$

où

$$\boldsymbol{\alpha}_{1:q-1} = (\alpha_{1,+}, \alpha_{1,-}, \dots, \alpha_{q-1,+}, \alpha_{q-1,-}) \in \mathbb{R}^{2q-2},$$

$$\boldsymbol{\beta}_{1:p-1} = (\beta_1, \dots, \beta_{p-1}) \in \mathbb{R}^{p-1}.$$

le modèle (1.3) est équivalent à

$$\underline{Z}_t = \underline{B}(\eta_t) + A(\eta_t) \underline{Z}_{t-1}. \quad (1.4)$$

Une condition nécessaire et suffisante d'existence d'un processus  $TGARCH(p, q)$

strictement stationnaire, solution non anticipative du modèle (1.3) est que le plus grand exposant de Lyapounov de la suite  $\{A(\eta_t), t \in \mathbb{Z}\}$  soit négatif. Cette solution stationnaire non anticipative est unique et ergodique.

D'autre part, soit  $m \in \mathbb{N}^*$ . Supposons que  $E\{|\eta_t|^m\} < \infty$  et posons  $A^{(m)} := E\{A(\eta_t)^{\otimes m}\}$ . Si le rayon spectral

$$\rho(A^{(m)}) < 1$$

alors, pour tout  $t \in \mathbb{Z}$ , la série  $(\underline{Z}_t)$ , solution strictement stationnaire de (1.4) converge dans  $\mathbb{L}^m$  et le processus  $(\varepsilon_t)$ , défini par la  $(2q + 1)$ -ème composante de  $\underline{Z}_t \eta_t$ , est une solution strictement stationnaire du modèle  $TGARCH(p, q)$  défini par (1.3), et admet des moments jusqu'à l'ordre  $m$ . Inversement, si  $\rho(A^{(m)}) \geq 1$ , il n'existe pas de solution strictement stationnaire  $(\varepsilon_t)$  de (1.3) satisfaisant la condition de moment  $E\{|\varepsilon_t|^m\} < \infty$ .

Le modèle  $GJR - GARCH$  (Glosten, Jagannathan and Runkle, 1993) est une variante où on pose

$$\sigma_t^2 = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \gamma_i \varepsilon_{t-i}^2 \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{t-i} < 0\}} + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^2$$

ce qui revient à mettre au carré les variables aléatoires qui interviennent dans la seconde équation de (1.3).

Bibi et Ghezal (2017) ont étendu le processus  $GARCH$  à seuil ( $TGARCH$ ) à coefficients invariants dans le temps au processus  $PTGARCH$  dans lequel les coefficients varient périodiquement dans le temps. Ils ont donné les conditions nécessaires et suffisantes qui garantissent la stationnarité stricte et l'ergodicité périodique du processus  $PTGARCH$ . Ils ont aussi montré et évalué empiriquement les propriétés asymptotiques des estimateurs  $QMV$  pour le modèle  $GARCH$  à seuil périodique dans les cas fort (quand les innovations sont *i.i.d*) et semi-forts.

### 1.3 Modèle *GARCH* transformé en puissance asymétrique

La classe des modèles asymétriques power-transformed *GARCH* a reçu beaucoup d'attention de la part de nombreux auteurs.

Elle contient par exemple les modèles *GARCH* ordinaires, les modèles *TGARCH* et les modèles *Log – GARCH*.

Soit  $(\eta_t)$  une suite de variables *i.i.d* telles que  $E(\eta_t) = 0$  et  $Var(\eta_t) = 1$ . On dit que  $(\varepsilon_t)$  est un processus *GARCH* en puissance asymétrique (Asymmetric Power *ARCH*( $p, q$ ), [Ding, Granger et Engle, 1993](#)) s'il vérifie une équation de la forme

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ et } \sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i (|\varepsilon_{t-i}| - \xi_i \varepsilon_{t-i})^\delta + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-j}^\delta \quad (1.5)$$

où  $\omega > 0, \delta > 0, \alpha_i \geq 0, \beta_j \geq 0$  et  $|\xi_i| \leq 1$ . Le modèle *GARCH*( $p, q$ ) classique est obtenu pour  $\delta = 2$  et  $\xi_1 = \dots = \xi_q = 0$ .

Pour étudier l'effet du paramètre  $\xi_i$ , on considère le cas le plus simple d'un *ARCH*(1) asymétrique avec  $\delta = 2$ . On a alors

$$\sigma_t^2 = \begin{cases} \omega + \alpha_1(1 - \xi_1)^2 \varepsilon_{t-1}^2 & \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0 \\ \omega + \alpha_1(1 + \xi_1)^2 \varepsilon_{t-1}^2 & \text{si } \varepsilon_{t-1} \leq 0. \end{cases} \quad (1.6)$$

Ainsi, pour qu'une innovation négative ait plus d'impact sur la volatilité qu'une innovation positive de même module, il suffit de choisir  $\xi_i > 0$ . Il est facile de voir que même pour des modèles *APARCH* plus complexes, il est toujours naturel d'imposer des  $\xi_i \geq 0$  et puisque

$$\alpha_i |1 \pm \xi_i|^\delta \varepsilon_{t-i}^\delta = \alpha_i |\xi_i|^\delta \left| 1 \pm \frac{1}{\xi_i} \right|^\delta \varepsilon_{t-i}^\delta,$$

$|\xi_i| \leq 1$  est une contrainte d'identifiabilité non restrictive (voir [Ding, Granger et Engle, 1993](#)).

Le cas où  $\delta = 1$  dans l'écriture (1.6) correspond au modèle *TGARCH*. En utilisant le fait que  $\log \sigma_t = \lim_{\delta \rightarrow 0} (\sigma_{t-1}^\delta - 1)/\delta$ , on voit que le modèle *log-GARCH* est obtenu comme limite du modèle *APARCH* quand  $\delta \rightarrow 0$ . La nouveauté des modèles *APARCH* réside donc dans l'introduction du paramètre  $\delta$ . Ceci est pleinement justifié par le fait que la valeur  $\delta = 2$  dans la formulation standard des *GARCH*,  $\delta = 0$  de la formulation *log-GARCH*, ou  $\delta = 1$  de la formulation *TGARCH*, peut sembler arbitraire. Empiriquement cela se justifie par le fait que l'on constate souvent de plus fortes corrélations sur les valeurs absolues des rendements que sur leurs carrés. De plus, [Ding, Granger et Engle \(1993\)](#) ont modélisé les données du S&P500 pour la période allant du 3 janvier 1928 au 30 Août 1991 à l'aide de leur modèle *APARCH* et ont trouvé que le paramètre d'asymétrie est  $\delta = 1.43$ .

Le modèle *APARCH* donné par (1.5) peut s'écrire comme suit

$$\sigma_t^\delta = \omega + \sum_{i=1}^{\max(p,q)} a_i(\eta_{t-i}) \sigma_{t-i}^\delta \quad (1.7)$$

où

$$\begin{aligned} a_i(x) &= \alpha_i(|x| - \xi_i x)^\delta + \beta_i \\ &= \alpha_i(1 - \xi_i)^\delta |x|^\delta \mathbf{1}_{\{x>0\}} + \alpha_i(1 + \xi_i)^\delta |x|^\delta \mathbf{1}_{\{x<0\}} + \beta_i \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, \max(p, q)$ .

La condition nécessaire et suffisante de stricte stationnarité est

$$E\{\log(a_1(\eta_t))\} < 0. \quad (1.8)$$

Pour le modèle  $APARCH(1, 0)$  on a

$$\log(a_1(\eta_t)) = \log(1 - \xi_1)^\delta \mathbf{1}_{\{\eta_t > 0\}} + \log(1 + \xi_1)^\delta \mathbf{1}_{\{\eta_t < 0\}} + \log(\alpha_1) |\eta_t|^\delta$$

donc, si  $(\eta_t)$  est de loi symétrique la condition de stationnarité stricte devient

$$|1 - \xi_1|^{\delta/2} |1 + \xi_1|^{\delta/2} \alpha_1 < \exp(-E\{\log |\eta_t|^\delta\}).$$

Notons que dans le cas limite où  $|\xi_1| = 1$  le modèle est strictement stationnaire pour toute valeur de  $\alpha_1$ . Sous la condition (1.8), la solution strictement stationnaire est

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ et } \sigma_t^\delta = \omega + \sum_{k=1}^{\infty} a_1(\eta_t) \dots a_1(\eta_{t-k+1}) \omega.$$

En supposant que  $E\{|\eta_t|^\delta\} < \infty$ , la condition d'existence de  $E\{\varepsilon_t^\delta\}$  (et de  $E\{\sigma_t^\delta\}$ ) est

$$E\{a_1(\eta_t)\} < 1 \tag{1.9}$$

et devient

$$\frac{1}{2} E\{|\eta_t|^\delta\} \alpha_1 ((1 - \xi_1)^\delta + (1 + \xi_1)^\delta) + \beta_1 < 1.$$

quand la loi de  $\eta_t$  est symétrique, avec

$$E\{|\eta_t|^\delta\} = \sqrt{\frac{2^\delta}{\pi}} \Gamma\left(\frac{1 + \delta}{2}\right)$$

quand  $\eta_t$  est gaussien ( $\Gamma$  désigne la fonction Gamma d'Euler).

Si  $\delta \geq 2$  alors la condition (1.9) est suffisante (mais non nécessaire, voir [Ding, Granger et Engle, 1993](#)) pour que l'équation  $APARCH(1, 1)$  ait une solution strictement stationnaire et stationnaire au second ordre. Si  $\delta < 2$  alors la condition (1.9) est nécessaire (mais non suffisante, voir [Ding, Granger et Engle, 1993](#)) pour

l'existence d'une solution stationnaire au second ordre.

## 1.4 Modèles *GARCH* transformé en puissance asymétrique et à seuil

Le modèle *ARCH* à seuil transformé en puissance a été introduit par [Hwang et Kim \(2004\)](#). Il est défini par

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ et } \sigma_t^{2\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_{1,i} (\varepsilon_{t-i}^+)^{\delta} + \alpha_{2,i} (\varepsilon_{t-i}^-)^{\delta} \quad (1.10)$$

où  $\delta, \alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i} \geq 0$  pour  $i = 1, \dots, q$  avec  $\varepsilon_t^+ = \max(\varepsilon_t, 0)$  et  $\varepsilon_t^- = \max(-\varepsilon_t, 0)$ . Pour simplifier la notation, on pose  $\varepsilon_t^{\pm 2} = (\varepsilon_t^{\pm})^2$

Ici  $(\eta_t)$  représente une suite de variables aléatoires *i.i.d* de moyenne nulle et variance unitaire avec une densité marginale  $f(\cdot)$  qui n'est pas nécessairement gaussienne. (1.10) comprend comme cas spéciaux le *TARCH*( $q$ ) quand  $\delta = 1/2$ , la transformation de Box-Cox du modèle *ARCH*( $q$ ) quand  $\delta = 2$  et si de plus  $\alpha_{1,i} = \alpha_{2,i}$ , on obtient l'équation (1.1) dans [Higgings et Bera \(1992\)](#), quand  $\delta \rightarrow 0$  on a un log-*GARCH*( $p, q$ ) à seuil (voir [Geweke 1986](#), [Pantula 1986](#) et [Milhøj 1987](#)).

Les conditions suivantes sont imposées :

(C1) La densité (par rapport à la mesure de Lebesgue)  $f(\cdot)$  de  $\eta_t$  est strictement positive sur  $\mathbb{R}$ .

(C2)  $E\{|\eta_t|^{2\delta}\} < \infty$  pour  $\delta > 0$ .

Soit

$$\eta = \left[ \sum_{i=1}^q \alpha(i) \right] E\{|\eta_t|^{2\delta}\}$$

où  $\alpha(i) = \max(\alpha_{1,i}, \alpha_{2,i})$  pour  $i = 1, \dots, q$ . Sous (C1), si  $\eta < 1$ ,  $(\varepsilon_t)$  est géométriquement ergodique et admet une unique solution strictement stationnaire avec



$E\{|\varepsilon_t|^{2\delta}\} < \infty$ . La condition  $\eta < 1$  peut être allégée pour le modèle du premier ordre (1.10). Notons  $\tau_t = \alpha_{1,1}(\varepsilon_t^{+2})^\delta + \alpha_{2,1}(\varepsilon_t^{-2})^\delta$ , on a  $E\{\tau_t\} \leq \eta$ , ainsi, sous la condition (C1) et si  $E\{\tau_t\} < 1$ ,  $(\varepsilon_t)$  donné par (1.10) est strictement stationnaire et  $E\{|\varepsilon_t|^{2\delta}\} < \infty$ .

Pan, Wang et Tong (2008) on généralisé le modèle *ARCH* à seuil à transformation en puissance de Hwang et Kim (2004) en un modèle *GARCH* à seuil à transformation en puissance et ils l'ont défini comme suit :

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t \text{ et } \sigma_t^{2\delta} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_{1,i}(\varepsilon_{t-i}^{+2})^\delta + \alpha_{2,i}(\varepsilon_{t-i}^{-2})^\delta + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^{2\delta} \quad (1.11)$$

avec les mêmes conditions de positivité que pour le modèle (1.10) et  $\beta_j \geq 0$  pour  $j = 1, \dots, q$ . Cette classe de modèle est encore plus large que celle de Hwang et Kim (2004) et elle inclut plusieurs autres modèles.

Le modèle (1.11) peut être représenté sous forme Markovienne. On note

$$\nu_t = \beta_1 + \alpha_{1,1}(\eta_t^+)^{2\delta} + \alpha_{2,1}(\eta_t^-)^{2\delta},$$

$$Y_t = (\sigma_{t+1}^{2\delta}, \dots, \sigma_{t-q+2}^{2\delta}, (\varepsilon_t^{+2})^\delta, (\varepsilon_t^{-2})^\delta, \dots, (\varepsilon_{t-p+2}^{+2})^\delta, (\varepsilon_{t-p+2}^{-2})^\delta)' \in \mathbb{R}^\kappa,$$

$$B = (\alpha_0, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^\kappa \text{ et}$$

$$A_t = \begin{pmatrix}
 \nu_t & \beta_2 & \cdots & \beta_{q-1} & \beta_q & \alpha_{1,2} & \alpha_{2,2} & \cdots & \alpha_{1,p-1} & \alpha_{2,p-1} & \alpha_{1,p} & \alpha_{2,p} \\
 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \eta_t^{+2\delta} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \eta_t^{-2\delta} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0
 \end{pmatrix} \tag{1.12}$$

avec  $\kappa = 2p + q - 2$ . Alors,  $\varepsilon_t$  est une solution pour l'équation (1.11) si et seulement si  $Y_t$  est une solution pour l'équation

$$Y_t = A_t Y_{t-1} + B. \tag{1.13}$$

Le plus grand exposant de Lyapunov associé à la suite  $(A_t)$  donnée par (1.13) est défini comme suit :

$$\gamma(A) = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \log \|A_0 A_{-1} \dots A_{-t}\|. \tag{1.14}$$

Le modèle (1.11) admet une unique solution stationnaire et ergodique si et seulement si (1.14) est strictement négatif. D'autre part, s'il existe une solution strictement stationnaire pour le modèle (1.11), alors  $\sum_{j=1}^q \beta_j < 1$  et il existe  $\tau > 0$  tel que

$$E\{|\varepsilon_t|^\tau\} < \infty.$$

D'autre part, pour tout entier  $k$  tel que  $E\{|\eta_t|^{2k\delta}\} < \infty$  et  $E\{\|A_t\|^k\} < 1$ , alors,

$$E\{|\varepsilon_t|^{2k\delta}\} < \infty.$$

Kim et Hwang (2005) ont examiné une classe de modèles possédant une variance conditionnelle asymétrique à seuil pour laquelle des paramètres de transformation en puissance distincts sont appliqués selon le signe de  $\eta_t$ . Le modèle est donné par

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (1.15)$$

$$\sigma_t^{2\delta_1} = \alpha_0 + \alpha_{1,1}(\varepsilon_{t-1}^2)^{\delta_1} \quad \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0, \quad (1.16)$$

$$\sigma_t^{2\delta_2} = \alpha_0 + \alpha_{1,2}(\varepsilon_{t-1}^2)^{\delta_2} \quad \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0. \quad (1.17)$$

Lee (2011) a étendu le modèle de Kim et Hwang (2005) à un modèle *GARCH*(1, 1) transformé en puissances asymétriques distinctes selon le régime, il est défini par

$$\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \quad (1.18)$$

$$\sigma_t^{2\delta_1} = \alpha_0 + \alpha_{1,1}(\varepsilon_{t-1}^2)^{\delta_1} + \beta \sigma_{t-1}^{2\delta_1} \quad \text{si } \varepsilon_{t-1} \geq 0, \quad (1.19)$$

$$\sigma_t^{2\delta_2} = \alpha_0 + \alpha_{1,2}(\varepsilon_{t-1}^2)^{\delta_2} + \beta \sigma_{t-1}^{2\delta_2} \quad \text{si } \varepsilon_{t-1} < 0. \quad (1.20)$$

avec  $\alpha_0 > 0, \alpha_{1,1}, \alpha_{1,2}, \beta \geq 0$  et  $\delta_1, \delta_2 > 0$  dans les équations (1.15)-(1.17) et (1.18)-(1.20).

Notons  $I_{1t} = \mathbf{1}_{\{\eta_t \geq 0\}}$  et  $I_{2t} = 1 - I_{1t}$ . Si l'une des conditions suivantes est vérifiée pour un entier  $m \geq 1$

(a)  $E\{\eta_t^{2m}\} < \infty, \delta_1 > 1, \delta_2 > 1$  et

$$E\left\{\left(\beta^{1/\delta_1} I_{1t} + \beta^{1/\delta_2} I_{2t} + \alpha_{1,1}^{1/\delta_1} \eta_t^{+2} + \alpha_{1,2}^{1/\delta_2} \eta_t^{-2}\right)^m\right\} < 1;$$

(b)  $E\{\eta_t^{2\delta_1 m}\} < \infty, 0 < \delta_1 \leq 1, \delta_2 > 1$  et

$$E\left\{\left(\beta I_{1t} + \beta^{\delta_1/\delta_2} I_{2t} + \alpha_{1,1} \eta_t^{+2\delta_1} + \alpha_{1,2}^{\delta_1/\delta_2} \eta_t^{-2\delta_1}\right)^m\right\} < 1;$$

(c)  $E\{\eta_t^{2\delta_2 m}\} < \infty, \delta_1 > 1, 0 < \delta_2 \leq 1$  et

$$E\left\{\left(\beta I_{2t} + \beta^{\delta_2/\delta_1} I_{1t} + \alpha_{1,1}^{\delta_2/\delta_1} \eta_t^{+2\delta_2} + \alpha_{1,2} \eta_t^{-2\delta_2}\right)^m\right\} < 1;$$

(d)  $E\{\eta_t^{2\delta_1\delta_2 m}\} < \infty$ ,  $0 < \delta_1 \leq 1$ ,  $0 < \delta_2 \leq 1$  et

$$E\left\{\left(\beta^{\delta_1} I_{2t} + \beta^{\delta_2} I_{1t} + \alpha_{1,1}^{\delta_2} \eta_t^{+2\delta_1\delta_2} + \alpha_{1,2}^{\delta_1} \eta_t^{-2\delta_1\delta_2}\right)^m\right\} < 1,$$

alors, le modèle donné par les équations (1.18)-(1.20) est strictement stationnaire, géométriquement ergodique et  $\beta$ -mélangeant avec un taux exponentiel. De plus,  $E\{\sigma_t^{2m}\}$ ,  $E\{\sigma_t^{2\delta_1 m}\}$ ,  $E\{\sigma_t^{2\delta_2 m}\}$  et  $E\{\sigma_t^{2\delta_1\delta_2 m}\}$  sont finis.

## 1.5 Modèle *GARCH* asymétrique de mélange gaussien

Le modèle *GARCH* de mélange gaussien, ou *MixN - GARCH*, est une classe de modèle de type *GARCH* qui combine les caractéristiques des distributions d'un mélange de distributions gaussiennes et celles d'un modèle *GARCH*. Elle a été proposée et étudiée de manière indépendante par Alexander et Lazar (2006) et Haas et al. (2004a, b), en couplant un  $k$ -mélange de distributions normales avec une structure dynamique de type *GARCH* qui relie les  $k$  densités. Dans le modèle *GARCH* de mélange gaussien (*MixN - GARCH*), la densité conditionnelle des rendements  $x_t$  est supposée être une distribution de mélange gaussien à  $k$  composantes. C'est-à-dire, avec  $f_t$  désignant une densité conditionnelle basée sur les informations qu'on possède à l'instant  $t$ ; on a

$$f_t(x; \lambda_{1t}, \dots, \lambda_{kt}, \mu_{1t}, \dots, \mu_{kt}, \sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{kt}^2) = \sum_{i=1}^k \lambda_{it} \phi(x; \mu_{it}, \sigma_{it}^2), \quad (1.21)$$

où  $\phi(x; \mu_{it}, \sigma_{it}^2)$  est la densité de la loi  $\mathcal{N}(\mu_{it}, \sigma_{it}^2)$ ,  $i = 1, \dots, k$ . les poids (ou probabilités) de mélange  $\lambda_{it}$  sont strictement positifs et satisfont  $\sum_i \lambda_{it} = 1$ . Le vecteur

$\sigma_t^{(2)} = (\sigma_{1t}^2, \dots, \sigma_{kt}^2)'$  est un processus *GARCH*( $p, q$ ) de la forme

$$\sigma_t^{(2)} = \omega + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \sigma_{t-1}^{(2)}, \quad (1.22)$$

avec  $\varepsilon_t = x_t - \sum_{i=1}^k \lambda_{it} \mu_{it}$ ,  $\omega$  et  $\alpha_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , sont des vecteurs de  $\mathbb{R}^k$  et les  $\beta_j$ ,  $j = 1, \dots, p$ , sont des matrices de taille  $k \times k$  de paramètres qui doivent obéir à des restrictions pour garantir que  $\sigma_t^{(2)}$  reste positif pour tout  $t$ .

Divers faits stylisés des rendements des actifs peuvent être modélisés avec succès, tels que les queues épaisses et le regroupement de la volatilité, mais également l'asymétrie et la kurtosis. Il a été montré dans les travaux susmentionnés que le modèle offre une décomposition plausible des contributions à la volatilité du marché, ainsi que des prévisions extrêmement compétitives. Pour plus de détails et des extensions, voir [Haas et Paoletta \(2012\)](#).

Afin de capturer l'effet de levier, [Alexander et Lazar \(2009\)](#) proposent deux extensions asymétriques du modèle *MixN – GARCH* définies par (1.21) et (1.22). La première de ces extensions, *MixNGARCH – ASYM*, utilise la spécification *GARCH* asymétrique d'[Engle \(1990\)](#), c'est-à-dire que le processus *GARCH* déterminant la variance du composant de mélange  $j$  est donné par

$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + \alpha_j (\varepsilon_{t-1} - \theta_j)^2 + \beta_j \sigma_{j(t-1)}^2, \quad j = 1, \dots, k \quad (1.23)$$

où les  $\theta_j$  sont les paramètres surveillant l'effet de levier. En particulier, si  $\theta_j > 0$ , un choc négatif augmentera les  $\sigma_{jt}^2$  de la période suivante plus qu'un choc positif; une version multivariée de *MixN – GARCH – ASYM* a été étudiée dans [Haas et al. \(2009\)](#). La seconde variante, *MixN – GARCH – GJR*, utilise le modèle de [Glosten, Jagannathan and Runkle \(1993\)](#), largement connu sous le nom de *GJR – GARCH*,

et spécifie le processus de variance de la composante  $j$  par

$$\sigma_{jt}^2 = \omega_j + (\alpha_j + \theta_j \mathbf{1}_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}}) \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_j \sigma_{j(t-1)}^2, \quad j = 1, \dots, k$$

Comme en (1.23), un  $\theta_j$  positif implique que  $\sigma_{jt}^2$  réagit plus intensément aux chocs négatifs qu'aux chocs positifs.

Hass *et al* (2013) ont proposé une classe plus générale de modèles permettant des poids de mélange variables dans le temps.

---

---

## CHAPITRE 2

---

### Modèle PPTGARCH et structure probabiliste

**D**ans la vie économique, il est bien connu qu'un changement soudain affecte profondément la structure sous-jacente des données industrielles et financières, en particulier la structure de volatilité de ces données. Aussi il est peu évident de pouvoir modéliser les séries chronologiques macroéconomiques et financières à l'aide de modèles qui se caractérisent par une stabilité des paramètres et/ou une structure linéaire, étant donné que ces modèles sont incapables de capturer certains faits stylisés de ces séries, notamment les changements de régime, la multimodalité, l'effet de la fréquence d'enregistrement des données etc. Ainsi, l'instabilité des paramètres peut généralement être due à l'existence de différents états du monde qui peuvent affecter l'évolution d'une série chronologique. Ces états du monde sont qualifiés de régimes. On peut distinguer un changement stochastique dans le régime qui peut être drivé par un processus non observable, d'un changement déterministe qui peut être calendaire par exemple le jour de la semaine, ou bien causé par un état de la nature,

par exemple la température. Ces régimes peuvent aussi être les états d'une chaîne de Markov exogène et conduire à des modèles à changements de régime Markovien. Un pionnier dans ce domaine est [Hamilton \(1988, 1989\)](#) pour les modèles autorégressifs à changement de régime markovien ; (voir aussi, [Haas, Mittnik & Paoletta, 2004b](#) pour les modèles *GARCH*).

La classe des modèles *GARCH* transformé en puissance asymétrique a reçu beaucoup d'attention de la part de nombreux chercheurs et praticiens ([Higgings et Bera, 1992](#) ; [Ding, Granger et Engle, 1993](#) ; [Hwang et Kim, 2004](#) ; [Hwang et Basawa, 2004](#) ; [Pan, Wang et Tong, 2008](#) ; [Lee, 2011](#) ; [Kim et Hwang, 2005](#) ; [Hamadeh et Zakoïan 2011](#) ; [Francq et Zakoïan, 2012, 2013](#) ; [Aknouche et Touche, 2015](#) et bien d'autres). Ceci reflète tout l'intérêt porté à ces processus en puissance et à leur volatilité.

Dans le cadre périodique, de nombreux auteurs ont cherché à intégrer l'effet de la fréquence d'enregistrement des actifs dans leurs modèles depuis les travaux pionniers de [Bollerslev et Ghysels \(1996\)](#) pour le modèle *GARCH*. De nombreux auteurs ont, par la suite, considéré des modèles de volatilité à coefficients évolutifs dans le temps de façon périodique ; ([Bentarzi et Hamdi, 2008a, b](#) ; [Hamdi et Souam, 2018](#) ; [Bibi et Aknouche, 2008](#) ; [Aknouche et Bibi, 2009](#) ; [Lee et Shin, 2010](#) ; [Bibi et Ghezal, 2017](#) et bien d'autres).

Dans ce chapitre, nous présentons d'abord le modèle  $PPTGARCH(p_t, q_t)$  ainsi que sa représentation markovienne, nous étudions ensuite les propriétés de cette chaîne de Markov écrite sous une forme vectorielle. Dans la première section, à partir du critère du plus grand exposant de Lyapunov  $\gamma^S(\cdot)$  introduit par [Aknouche et Guerbyenne \(2009\)](#), nous donnons la condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une solution strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique unique pour laquelle nous donnons dans la section suivante la condition pour l'existence de ses moments fractionnaires et d'ordres supérieurs fractionnaires.



Dans la dernière section de ce chapitre, nous donnons la condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne de Markov soit géométriquement ergodique en établissant indirectement la condition de  $\phi$ -irréductibilité –souvent difficile à établir– et ce, à l'aide de la condition d'*additivité dénombrable uniforme*; (Tweedie, 2001; Fonseca et Tweedie, 2002) et de déduire ensuite la propriété de  $\beta$ -mélange.

Nous définissons le modèle  $PPTGARCH(p_t, q_t)$  par :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sqrt{h_t} \eta_t \\ h_t^\delta = \omega_t + \sum_{i=1}^{p_t} \gamma_{t,i}^+ (\varepsilon_{t-i}^+)^{2\delta} + \gamma_{t,i}^- (\varepsilon_{t-i}^-)^{2\delta} + \sum_{j=1}^{q_t} \beta_{t,j} h_{t-j}^\delta \end{cases} \quad (2.1)$$

où  $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d), définies sur le même espace de probabilité. Posons  $t = s + S\tau$ ;  $\varepsilon_{s+S\tau}$  se réfère à l'observation de la saison  $s, s = 1, \dots, S$ , dans la période  $\tau, \tau \in \mathbb{Z}$ . Dans l'expression ci-dessus,  $(\varepsilon_{s+S\tau}^+)^{2\delta} = h_{s+S\tau}^\delta (\eta_{s+S\tau}^+)^{2\delta}$  et  $(\varepsilon_{s+S\tau}^-)^{2\delta} = h_{s+S\tau}^\delta (\eta_{s+S\tau}^-)^{2\delta}$ , où  $(x^+)^{2\delta} = \max(0, x)^{2\delta}$  et  $(x^-)^{2\delta} = \max(0, -x)^{2\delta}$ . Pour la commodité de notation, dans la suite, on note  $(x^+)^r = x^{+r}$  et  $(x^-)^r = x^{-r}$  pour  $r > 0$ . Nous supposons que  $\varepsilon_t$  est indépendant de  $\eta_{t'}$  quand  $t < t'$ , et que  $\delta > 0$ . Les coefficients et les ordres sont  $S$ -périodiques (c'est-à-dire,  $\theta_{s+S\tau} = \theta_s$ , où  $\theta$  est n'importe quel paramètre). Sans perte de généralité, nous supposons que les ordres sont invariants dans le temps; sinon, nous pouvons définir  $p = \max_s p_s$  et  $q = \max_s q_s$  et prendre  $\gamma_{s,i}^+ = \gamma_{s,i}^- = 0$  pour  $p_s < i \leq p$  et  $\beta_{s,j} = 0$  pour  $q_s < j \leq q$ . Alors, (2.1) peut être réécrit comme

$$\begin{cases} \varepsilon_{s+S\tau} = \sqrt{h_{s+S\tau}} \eta_{s+S\tau} \\ h_{s+S\tau}^\delta = \omega_s + \sum_{i=1}^p \gamma_{s,i}^+ \varepsilon_{s-i+S\tau}^{+2\delta} + \gamma_{s,i}^- \varepsilon_{s-i+S\tau}^{-2\delta} + \sum_{j=1}^q \beta_{s,j} h_{s-j+S\tau}^\delta \end{cases} \quad (2.2)$$

$\omega_s > 0, \gamma_{s,i}^+ \geq 0, \gamma_{s,i}^- \geq 0$  et  $\beta_{s,j} \geq 0, s = 1, \dots, S, i = 1, \dots, p$  et  $j = 1, \dots, q$ .

Dans le cas où  $S = 1$ , le modèle (2.2) se réduit à celui de Pan, Wang et Tong (2008) qui est une extension du modèle de Hwang et Kim (2004) quand  $q > 0$ , et au modèle  $NARCH(P)$  de Higgins et Bera (1992) quand  $\gamma_i^+ = \gamma_i^-$  et  $q = 0$ . Pour

$S \geq 2$ ,  $\delta = 1$  et  $\gamma_i^+ = \gamma_i^-$ , le modèle *GARCH* périodique de [Bollerslev et Ghysels \(1996\)](#) est obtenu.

## 2.1 La représentation markovienne

Un outil clé pour obtenir certaines propriétés probabilistes est la représentation markovienne du modèle. Pour  $s = 1, \dots, S$  et  $\tau \in \mathbb{Z}$ . Posons

$$y_{s+S\tau} := \left( h_{s+S\tau}^\delta, h_{s-1+S\tau}^\delta, \dots, h_{s-q+1+S\tau}^\delta, \varepsilon_{s+S\tau}^{+2\delta}, \varepsilon_{s+S\tau}^{-2\delta}, \dots, \varepsilon_{s-p+1+S\tau}^{+2\delta}, \varepsilon_{s-p+1+S\tau}^{-2\delta} \right)',$$

$$\beta_s := \begin{pmatrix} \beta_{s,1} & \dots & \beta_{s,q-1} & \beta_{s,q} \\ \mathbf{I}_{(q-1)} & & & \mathbf{0}_{(q-1) \times 1} \end{pmatrix}, \quad \gamma_s := \begin{pmatrix} \gamma_{s,1}^+ & \gamma_{s,1}^- & \dots & \gamma_{s,p}^+ & \gamma_{s,p}^- \\ & & & \mathbf{0}_{(q-1) \times 2p} & \end{pmatrix},$$

$$\beta_s(\eta_{s+S\tau}) := \begin{pmatrix} C_s(\eta_{s+S\tau}) \\ \mathbf{0}_{2(p-1) \times q} \end{pmatrix} \text{ où } C_s(\eta_{s+S\tau}) := \begin{pmatrix} \beta_{s,1} & \dots & \beta_{s,q} \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \eta_{s+S\tau}^{+2\delta} \\ \eta_{s+S\tau}^{-2\delta} \end{pmatrix}$$

$$\gamma_s(\eta_{s+S\tau}) := \begin{pmatrix} D_s(\eta_{s+S\tau}) \\ \mathbf{I}_{2(p-1)} & \mathbf{0}_{2(p-1) \times 2} \end{pmatrix} \text{ où } D_s(\eta_{s+S\tau}) := \begin{pmatrix} \gamma_{s,1}^+ & \gamma_{s,1}^- & \dots & \gamma_{s,p}^+ & \gamma_{s,p}^- \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} \eta_{s+S\tau}^{+2\delta} \\ \eta_{s+S\tau}^{-2\delta} \end{pmatrix}$$

$$A_s(\eta_{s+S\tau}) := \begin{pmatrix} \beta_s & \gamma_s \\ \beta_s(\eta_{s+S\tau}) & \gamma_s(\eta_{s+S\tau}) \end{pmatrix},$$

$$B_s(\eta_{s+S\tau}) := (\omega'_s, \omega_s(\eta_{s+S\tau})')'.$$

$A_s(\eta_{s+S\tau})$  et  $B_s(\eta_{s+S\tau})$  sont respectivement une matrice aléatoire d'ordre  $(2p+q) \times (2p+q)$  et un  $(2p+q)$ -vecteur aléatoire où  $\omega_s := (\omega_s, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^q$  et  $\omega_s(\eta_{s+S\tau}) := (\omega_s \eta_{s+S\tau}^{+2\delta}, \omega_s \eta_{s+S\tau}^{-2\delta}, 0, \dots, 0)' \in \mathbb{R}^{2p}$ . ( $I_k$  est la matrice d'identité d'ordre  $k \times k$  et  $0_{m \times n}$  la matrice nulle d'ordre  $m \times n$  et  $\otimes$  est le produit de Kronecker). Le Modèle (2.2) est équivalent à

$$y_{s+S\tau} = A_s(\eta_{s+S\tau})y_{s-1+S\tau} + B_s(\eta_{s+S\tau}) \quad (2.3)$$

qui est une chaîne de Markov périodiquement homogène. En itérant (2.3)  $S$ -fois on obtient

$$y_{s+S\tau} = \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})y_{s+S(\tau-1)} + \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}), \quad (2.4)$$

avec  $\underline{\eta}_{s,\tau} = (\eta_{s+S\tau}, \eta_{s-1+S\tau}, \dots, \eta_{s+1+S(\tau-1)})'$ ,

$$\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) := \prod_{k=0}^{S-1} A_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}) \text{ et } \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) := \sum_{k=0}^{S-1} \left( \prod_{i=0}^{k-1} A_{s-i}(\eta_{s-i+S\tau}) \right) B_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}),$$

avec, par convention,  $A_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}) = A_{S+s-k}(\eta_{S+s-k+S(\tau-1)})$  et  $B_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau}) = B_{S+s-k}(\eta_{S+s-k+S(\tau-1)})$  si  $s-k \leq 0$ .

Pour une valeur fixée  $s$ , la suite  $(\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}), \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}))_{\tau \in \mathbb{Z}}$  est *i.i.d.* et la chaîne de Markov  $(y_{s+S\tau})_{\tau \in \mathbb{Z}}$  associée à (2.2) donnée par (2.4) est homogène.

## 2.2 Stationnarité stricte

Dans cette section, nous nous intéressons à établir les conditions d'existence de l'unique solution strictement stationnaire, non anticipative et ergodique de (2.4) et de ses moments.

### 2.2.1 Stationnarité stricte

Soit  $\|\cdot\|$  n'importe quelle norme sur  $M^{2p+q}$ , l'espace des matrices réelles carrées de dimension  $2p+q$ . Le théorème suivant est basé sur les résultats de [Bougerol et Picard \(1992\)](#). On peut prouver que  $E\{\log^+ \|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,0})\|\} < +\infty$ , où  $\log^+ x = \max(\log x, 0)$ , ce qui assure que le plus grand exposant de Lyapunov  $\gamma^S(\cdot)$  introduit par [Aknouche et Guerbyenne \(2009\)](#), associé à une suite *i.i.d* de matrices  $(\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}))_{\tau \in \mathbb{Z}}$ , est bien défini.

**Théorème 2.2.1** ([Guerbyenne et Kessira, 2018](#)) *L'équation (2.4) a une solution unique strictement stationnaire et ergodique si et seulement si*

$$\gamma^S(A) = \inf_{\tau > 0} \left\{ E \frac{1}{\tau} \log \|\prod_{i=0}^{\tau-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i})\| \right\} < 0. \quad (2.5)$$

*L'unique solution stationnaire et ergodique est causale et est donnée par*

$$y_{s+S\tau} = \sum_{k \geq 0} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}), \quad (2.6)$$

*elle converge presque sûrement et  $(\varepsilon_{s+S\tau})$  donnée par (2.2) est strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique.*

**Remarque 2.2.1** *La définition de  $\gamma^S(A)$  ne dépend pas du choix de la norme. En vertu du théorème ergodique sous-additif ([Kingman, 1973 Theorem 6](#)), il s'ensuit que*

$$\gamma^S(A) \stackrel{p.s.}{=} \lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \log \|\prod_{i=0}^{\tau-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i})\| \right\}. \quad (2.7)$$

*D'après [Kesten et Spitzer \(1984\)](#),*

$$\lim_{\tau \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{\tau} \log \|\prod_{i=0}^{\tau-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i})\| \right\} \leq \log \left( \rho \left[ E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] \right)$$

ce qui donne, si  $\rho \left[ E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] < 1$ , une condition suffisante pour l'existence d'une solution strictement stationnaire et ergodique pour  $(y_{s+S\tau})_\tau$  donnée par (2.4).

La proposition suivante donne une condition nécessaire à l'existence d'une solution strictement périodiquement stationnaire pour (2.2).

**Proposition 2.2.1 (Guerbyenne et Kessira, 2018)** *S'il existe une solution strictement périodiquement stationnaire pour (2.2), alors*

$$\rho \left[ \prod_{k=0}^{S-1} \beta_{s-k} \right] < 1. \quad (2.8)$$

**Preuve.** La preuve est similaire à celle du corollaire 1 de Aknouche et Bibi (2009) et par conséquent, elle est omise. ■

## 2.2.2 Preuve du Théorème 2.2.1

Tout d'abord, nous prouvons que  $E\{\log^+ \|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,0})\|\} < +\infty$ . On peut montrer que

$$\begin{aligned} \|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\| &\leq \prod_{k=0}^{S-1} \|A_{s-k}(\eta_{s-k+S\tau})\| \\ &\leq C \prod_{k=0}^{S-1} \left( \sum_{j=1}^q \beta_{s-k,j} + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^+ + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^- + \sum_{j=1}^q \beta_{s-k,j} \eta_{s-k+S\tau}^{+2\delta} + \sum_{j=1}^q \beta_{s-k,j} \eta_{s-k+S\tau}^{-2\delta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^+ \eta_{s-k+S\tau}^{+2\delta} + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^- \eta_{s-k+S\tau}^{+2\delta} + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^+ \eta_{s-k+S\tau}^{-2\delta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^- \eta_{s-k+S\tau}^{-2\delta} + 2p + q - 3 \right) \\ &= C \prod_{k=0}^{S-1} \left( \sum_{j=1}^q \beta_{s-k,j} + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^+ + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^- + \sum_{j=1}^q \beta_{s-k,j} |\eta_{s-k+S\tau}|^{2\delta} + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^+ |\eta_{s-k+S\tau}|^{2\delta} \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^p \gamma_{s-k,i}^- |\eta_{s-k+S\tau}|^{2\delta} + 2p + q - 3 \right) \\ &\leq C \prod_{k=0}^{S-1} (1 + |\eta_{s-k+S\tau}|^{2\delta}). \end{aligned}$$

Sous l'hypothèse [A1](#) et la condition (ii) du Théorème [2.3.1](#), pour  $\tilde{\Delta} = \min(1, \frac{\kappa}{2\delta})$ , il existe un  $M > 0$  tel que  $\log^+ x \leq x^{\tilde{\Delta}}$  pour  $x > M$ ; ainsi,

$$E\{\log^+ \|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,0})\|\} \leq E\{\|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,0})\|^{\tilde{\Delta}}\} \leq C \prod_{k=0}^{S-1} (1 + E\{|\eta_{s-k}|^{\min(2\delta, \kappa)}\}) < \infty. \quad (2.9)$$

ce qui implique que le plus grand exposant de Lyapunov est bien défini.

Nous supposons maintenant que  $(y_{s+S\tau})_{\tau \in \mathbb{Z}}$  est une solution strictement stationnaire de [\(2.4\)](#). En itérant [\(2.4\)](#)  $n$  fois, on a pour tout  $\tau$

$$y_{s+S\tau} = \sum_{k=0}^n \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}) + \prod_{i=0}^{n+1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) y_{s+S(\tau-n-1)}. \quad (2.10)$$

Pour tout  $\tau > 0$ ,  $\sum_{k=0}^n \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}) \leq y_{s+S\tau}$  de par la positivité de tous les éléments de  $\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})$ ,  $\mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})$  et  $y_{s+S\tau}$ . Ceci implique que  $\sum_{k=0}^n \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k})$  converge presque sûrement quand  $n \rightarrow \infty$ . Par conséquent,  $\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}) \xrightarrow{p.s} 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Comme dans [Bougerol et Picard \(1992\)](#) (Lemme 2.1), il suffit de prouver que  $\prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \xrightarrow{p.s} 0$  quand  $k \rightarrow \infty$ . Nous illustrons cette partie pour  $p = q = S = 2$  et nous prouvons que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) e_j = 0, \quad p.s \quad (2.11)$$

où  $\{e_j\}$  est la base canonique de  $\mathbb{R}^6$  ( $y_{s+S\tau}$  est un vecteur  $2p+q$ ). Puisque  $\omega_1, \omega_2 > 0$ , et

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_2(\underline{\eta}_{2,\tau-k}) &= \tilde{\omega}_{\tau-k} e_1 + \omega_1 e_2 + \tilde{\omega}_{\tau-k} \eta_{2+2(\tau-k)}^{+2\delta} e_3 + \omega_1 \eta_{2+2(\tau-k)}^{-2\delta} e_4 \\ &\quad + \omega_1 \eta_{1+2(\tau-k)}^{+2\delta} e_5 + \omega_1 \eta_{1+2(\tau-k)}^{-2\delta} e_6 \end{aligned}$$

où  $\tilde{\omega}_{\tau-k} := \omega_1(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+ \eta_{1+2(\tau-k)}^{+2\delta} + \gamma_{2,1}^- \eta_{1+2(\tau-k)}^{-2\delta}) + \omega_2 > 0$ , si  $\eta_{1+2(\tau-k)} > 0$  et

$\eta_{2+2(\tau-k)} > 0$ , on obtient (2.11) pour  $j = \{1, 2, 3, 5\}$ . De plus,

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\underline{\eta}_{2,\tau-k})e_4 &= \left( \gamma_{1,1}^-(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+\eta_{1+2(\tau-k)}^{+2\delta}) + \gamma_{2,2}^- \right) \left( e_1 + \eta_{2+2(\tau-k)}^{+2\delta} e_3 \right) \\ &\quad + \gamma_{1,1}^- e_2 + \gamma_{1,1}^-\eta_{1+2(\tau-k)}^{+2\delta} e_5 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_2(\underline{\eta}_{2,\tau-k})e_6 &= \gamma_{1,2}^-(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+\eta_{1+2(\tau-k)}^{+2\delta}) \left( e_1 + \eta_{2+2(\tau-k)}^{+2\delta} e_3 \right) + \gamma_{1,2}^- e_2 \\ &\quad + \gamma_{1,2}^-\eta_{1+2(\tau-k)}^{+2\delta} e_5 \end{aligned}$$

qui montre (2.11) pour  $j = \{4, 6\}$ . Nous procédons de même pour le cas où  $\eta_{1+2(\tau-k)} > 0$  et  $\eta_{2+2(\tau-k)} < 0$ ,  $\eta_{1+2(\tau-k)} < 0$  et  $\eta_{2+2(\tau-k)} > 0$  ou lorsque  $\eta_{1+2(\tau-k)} < 0$  et  $\eta_{2+2(\tau-k)} < 0$ .

Supposons maintenant que  $\gamma^S(A) < 0$ . Alors, la série  $\sum_{k \geq 0} \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k})$  en vertu de (2.7), converge presque sûrement pour tout  $\tau$ . Définissons la suite  $(y_{s+S\tau})_{\tau \in \mathbb{Z}}$  par

$$y_{s+S\tau} = \sum_{k \geq 0} \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}).$$

Notons que  $h_{s+S\tau} = (y_{s+S\tau}(1))^{1/\delta}$ , où  $y_{s+S\tau}(1)$  est la première composante de  $y_{s+S\tau}$ . Ainsi  $\varepsilon_{s+S\tau} = \sqrt{h_{s+S\tau}} \eta_{s+S\tau}$  est une solution de (2.2). La stationnarité périodique stricte et l'ergodicité périodique de  $(\varepsilon_{s+S\tau})$  sont héritées de ses facteurs. Pour l'unicité de la solution, nous supposons qu'il existe une autre solution de (2.4), disons  $y_{s+S\tau}^*$ ; par (2.10) nous avons

$$\|y_{s+S\tau} - y_{s+S\tau}^*\| \leq \left\| \prod_{i=0}^{n+1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\| \|y_{s-n-1+S\tau} - y_{s-n-1+S\tau}^*\| \xrightarrow{P} 0.$$

Par conséquent,  $y_{s+S\tau} \stackrel{P}{=} y_{s+S\tau}^*$ . Cela montre que (2.4) a une solution stationnaire unique une fois que les  $\eta_{s+S\tau}$  sont donnés.  $\blacksquare$

## 2.3 Existence des moments

A des fins d'estimation, nous avons besoin de conditions qui garantissent l'existence de moments d'un processus strictement stationnaire et périodique pour lequel (2.5) est vérifié.

Le théorème suivant donne les conditions pour lesquelles les moments du processus strictement périodiquement stationnaire  $PPTGARCH(p, q)$  existent. Pour cela, nous avons besoin de la condition suivante.

A1.  $P(\eta_t > 0) \in ]0, 1[$  et si  $P(\eta_t \in S)$  pour un ensemble  $S$ , alors  $S$  a un cardinal  $|S| > 2$  (i.e.  $\eta_t$  est non dégénérée) et il existe  $\kappa > 0$  tel que  $E(|\eta_t|^\kappa) < \infty$ .

**Théorème 2.3.1 (Guerbyenne et Kessira, 2018)** (i) Si  $(\varepsilon_{s+S\tau})$  est une solution strictement périodiquement stationnaire de (2.2), sous A1, alors il existe une constante  $\Delta > 0$  tel que

$$E\{|\varepsilon_{s+S\tau}|^\Delta\} < +\infty$$

(ii) Soit  $(y_{s+S\tau})_{\tau \in \mathbb{Z}}$  une solution stationnaire de (2.4), on suppose que  $E\{|\eta_{s+S\tau}|^{2\delta}\} < +\infty$ , alors  $y_{s+S\tau}$  est dans  $L^1$  si et seulement si

$$\rho \left[ E \left\{ \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) \right\} \right] < 1. \quad (2.12)$$

(iii) De plus, si  $E\{|\eta_{s+S\tau}|^{2\delta\nu}\} < +\infty$  pour un entier  $\nu \geq 2$ , alors  $y_{s+S\tau}$  est dans  $L^\nu$  si et seulement si

$$\rho \left[ E \left\{ \mathcal{A}_s^{\otimes \nu}(\underline{\eta}_{s,\tau}) \right\} \right] < 1. \quad (2.13)$$

Dans ce qui suit,  $C$  représente une constante positive générique qui peut changer d'un endroit à l'autre.

**Remarque 2.3.1** Pour  $p = q = 1$ , la condition (2.12) est  $\rho \left[ E \left\{ \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) \right\} \right] =$



$\prod_{i=0}^{S-1} (\beta_{S-i} + \gamma_{S-i}^+ E \{ \eta_{s+S\tau}^{+2\delta} \} + \gamma_{S-i}^- E \{ \eta_{s+S\tau}^{-2\delta} \}) < 1$  qui coïncide, pour  $S = 1$ , avec celle de *Hwang et Basawa (2004)*.

### 2.3.1 Preuve du Théorème 2.3.1

(i) D'après (2.5), il existe un entier  $m \geq 1$  tel que

$$E \left\{ \log \left\| \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\| \right\} < 0.$$

De (2.9), il s'ensuit que  $E \left\{ \left\| \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\| \tilde{\Delta} \right\} \leq E \left\{ \left\| \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,0}) \right\| \tilde{\Delta} \right\}^m < \infty$  pour  $m \geq 1$ . Nous introduisons une fonction  $H_s(x) = E \left\{ \left\| \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\|^x \right\}$  pour  $0 < x \leq \tilde{\Delta}$ . Puisque  $H'_s(0) = E \left\{ \log \left\| \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\| \right\} < 0$ ,  $H_s$  est une fonction décroissante dans un voisinage de 0.  $H_s(0) = 1$  donc, il existe  $\Delta^*$  tel que  $0 < \Delta^* < \tilde{\Delta}$  et

$$E \left\{ \left\| \prod_{i=0}^{m-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\|^{\Delta^*} \right\} < 1 \quad (2.14)$$

De (2.6), on a

$$\|y_{s+S\tau}\|^{\Delta^*} \leq \left\| \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) \right\|^{\Delta^*} + \sum_{k \geq 1} \left( \prod_{i=0}^{k-1} \left\| \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\|^{\Delta^*} \right) \left\| \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-k}) \right\|^{\Delta^*}$$

et par suite de (2.14) il en résulte qu'il existe un  $C > 0$  et  $0 < \rho < 1$  tel que  $E \left\{ \left\| \prod_{i=0}^{k-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i}) \right\|^{\Delta^*} \right\} < C\rho^k$  ce qui implique que  $E \left\{ \|y_{s+S\tau}\|^{\Delta^*} \right\} < \infty$ . On choisit  $\Delta = 2\delta\Delta^*$  ce qui complète la preuve.

(ii) Définissons la suite aléatoire suivante

$$S_n(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{if } n < 0 \\ \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) S_{n-1}(\tau-1) + \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau}) & \text{if } n \geq 0 \end{cases}$$

qui est stationnaire pour  $\tau \in \mathbb{Z}$ . On pose pour tout  $n \geq 0$

$$\Delta_n(\tau) := S_n(\tau) - S_{n-1}(\tau) = \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\Delta_{n-1}(\tau - 1)$$

qui est également stationnaire ; alors, on peut facilement montrer que, pour  $n > 0$ ,

$$\Delta_n(\tau) = \prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i})\mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-n})$$

ainsi  $E\{\Delta_n(\tau)\} = E\left\{\prod_{i=0}^{n-1} \mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-i})\right\} \times E\left\{\mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau-n})\right\}$ , et  $S_n(\tau)$  converge presque sûrement et dans  $L^1$  si

$$\rho\left[E\left\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\right\}\right] < 1.$$

Par contre, de (2.10) nous avons

$$E\{y_{s+s\tau}\} \geq \sum_{k=0}^{\infty} E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\}^k \times E\{\mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\}$$

et le résultat suit.

(iii) La preuve est similaire à celle de (ii). ■

## 2.4 Ergodicité géométrique et $\beta$ -mélange

L'ergodicité géométrique et le  $\beta$ -mélange sont des hypothèses courantes sur le processus stochastique. L'ergodicité géométrique implique le  $\beta$ -mélange. L'ergodicité géométrique est établie lorsque la  $\phi$ -irréductibilité, l'apériodicité et la condition de Foster-Lyapunov de la chaîne de Markov associée sont vérifiées. La propriété de la  $\phi$ -irréductibilité est difficile à établir (voir par exemple, [Fonseca et Tweedie, 2002](#)). Nous rappelons d'abord quelques définitions que l'on peut trouver aussi dans [Tong \(1990\)](#) et [Meyn et Tweedie \(1993\)](#).

Soit  $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  une chaîne de Markov homogène avec un espace d'état métrique

complet séparable localement compact  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$ . Pour  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $A \in \mathcal{B}$ ,  $P^n(x, A) = \Pr(X_n \in A \mid X_0 = x)$ , est la probabilité de transition à  $n$  étapes. La chaîne de Markov  $(X_t)$  est  $\phi$ -irréductible si, pour une certaine mesure,  $\phi$  sur  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$  et pour un  $x \in \mathbb{R}^k$ ,  $\sum_{n>0} P^n(x, A) > 0$  chaque fois que  $\phi(A) > 0$ . Notons  $\|\cdot\|_V$  la norme de la variation totale.

La définition suivante de l'ergodicité géométrique peut être trouvée dans [Meyn et Tweedie \(1993\)](#).

**Définition 2.4.1** *La chaîne de Markov  $(X_t)$  est géométriquement ergodique s'il existe une mesure de probabilité  $\pi$  sur  $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B})$  et une constante  $0 < \rho < 1$  telle que*

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V = o(\rho^n), \quad \forall x \in \mathbb{R}^k.$$

L'une des conséquences de l'ergodicité géométrique est la propriété de  $\beta$ -mélange à un taux exponentiel. Comme défini dans [Davydov \(1973\)](#), la propriété de  $\beta$ -mélange d'une chaîne de Markov stationnaire est la suivante.

**Définition 2.4.2** *Supposons que  $(X_t)$  soit une chaîne de Markov stationnaire avec sa mesure invariante  $\pi$  comme distribution initiale. Alors  $(X_t)$  est stationnaire et  $\beta$ -mélangeante à un taux exponentiel s'il existe  $0 < \rho < 1$  et  $c > 0$  tel que, pour tout  $n \in \mathbb{Z}_+$ ,*

$$\int \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_V \pi(dx) \leq c\rho^n.$$

Un ensemble  $B \in \mathcal{B}$  est dit petit par rapport à  $\phi$ , si  $\phi > 0$  et pour tout  $A \in \mathcal{B}$  avec  $\phi(A) > 0$  il existe  $j \geq 1$  tel que

$$\inf_{x \in B} \sum_{n=1}^j P^n(x, A) > 0.$$

Un outil puissant bien connu pour établir l'ergodicité géométrique est le critère de dérive ([Tweedie, 1975](#)).  $(X_t)$  vérifie la condition de dérive s'il existe une fonction

mesurable positive appelée fonction test  $g \geq 1$  sur  $\mathbb{R}^k$ , un small set  $K \in \mathcal{B}$  et des nombres réels  $\nu > 0$  et  $0 < \rho < 1$  tel que

$$E\{g(X_{t+1}) \mid X_t = x\} \leq \rho g(x) - \nu, \quad x \notin K \quad (2.15)$$

et

$$\sup_{x \in K} E\{g(X_{t+1}) \mid X_t = x\} < \infty. \quad (2.16)$$

Le résultat suivant est donné dans [Tweedie \(1983\)](#).

**Théorème 2.4.1 ([Tweedie, 1983](#))** *Supposons que  $(X_t)$  est une chaîne de Markov  $\phi$ -irréductible satisfaisant (2.15)-(2.16) avec une fonction test  $g$  et un small set  $K$ . Alors  $(X_t)$  est géométriquement ergodique et  $E_\pi\{g(X_0)\} < \infty$ .*

Le théorème ci-dessus montre que la  $\phi$ -irréductibilité est nécessaire dans un premier temps pour prouver l'ergodicité géométrique. Elle est souvent pénible à établir. La condition d'additivité dénombrable uniforme ([Tweedie, 2001](#)) peut être exploitée pour remédier aux difficultés ; (voir également [Fonseca et Tweedie, 2002](#)).

Nous introduisons maintenant la condition d'additivité dénombrable uniforme. Si  $B_n$  est une suite dans  $\mathcal{B}$  telle que  $B_n \downarrow \emptyset$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in K} P(x, B_n) = 0$$

pour tout ensemble compact  $K \in \mathcal{B}$ .

Le théorème suivant montre que, sous la condition d'additivité dénombrable uniforme, l'existence d'une mesure invariante unique implique la  $\phi$ -irréductibilité.

**Théorème 2.4.2 ([Tweedie \(2001\)](#), [Theorem 3](#))** *Supposons que (2.15)-(2.16) sont vérifiées pour certains  $K$  et  $g$  fini et que la condition d'additivité dénombrable uniforme est vérifiée pour le même ensemble  $K$ . Il existe alors une mesure invariante unique pour  $(X_t)$  si et seulement si  $(X_t)$  est  $\phi$ -irréductible.*

Nous donnons maintenant le résultat principal de cette section.

**Théorème 2.4.3 (Guerbyenne et Kessira, 2018)**  $(y_{s+S\tau})_\tau$  est géométriquement ergodique si et seulement si  $\rho \left[ E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] < 1$ . Dans ce cas,  $(y_{s+S\tau})_\tau$  est  $\beta$ -mélangeant à un taux exponentiel.

### 2.4.1 Preuve du Théorème 2.4.3

Nous donnons les lemmes suivants

**Lemme 2.4.1** Les conditions de dérive (2.15)-(2.16) sont vérifiées pour  $(y_{s+S\tau})$  donné par (2.4).

**Preuve.** Définissons la fonction test  $g : \mathbb{R}^{2p+q} \rightarrow [1, \infty)$  par  $g(x) = \|x\|^r + 1$  en utilisant une norme multiplicative avec  $0 < r < 1$ , on a

$$\begin{aligned} E\{g(y_{s+S\tau})|y_{s+S(\tau-1)} = x\} &= E\left\{\left\|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})y_{s+S(\tau-1)} + \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\right\|^r + 1|y_{s+S(\tau-1)} = x\right\} \\ &\leq E\left\{\left\|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\right\|^r\right\} \|x\|^r + E\left\{\left\|\mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\right\|^r\right\} + 1. \end{aligned}$$

Choisissons  $\zeta, \xi$  et  $\lambda$  des constantes positives tel que  $\zeta \geq E\left\{\left\|\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\right\|^r\right\}$ ,  $\xi \geq E\left\{\left\|\mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\right\|^r\right\} + 1$  et  $1 - \lambda > \zeta$ . On pose  $M := \xi/(1 - \lambda - \zeta)$  et on considère le compact  $K = \{x \in \mathbb{R}^{2p+q} : \|x\| \leq M^{\frac{1}{r}}\}$ .

Lorsque  $x \notin K$ , on a

$$E\{g(y_{s+S\tau})|y_{s+S(\tau-1)} = x\} \leq \zeta \|x\|^r + (1 - \lambda - \zeta) \|x\|^r \leq (1 - \lambda)g(x).$$

Pour  $x \in K$ , clairement,  $E\{g(y_{s+S\tau})|y_{s+S(\tau-1)} = x\} \leq \sup_{x \in K} (\zeta \|x\|^r + \xi) < \infty$ . ■

**Lemme 2.4.2** Si  $\rho \left[ E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] < 1$ , il existe une distribution invariante unique de  $P(x, dy)$ .

**Preuve.** Si  $\rho[\mathcal{A}_s] < 1$ , alors  $\gamma^S(A) < 0$  (Kesten et Spitzer, 1984), ainsi, en vertu du Théorème 2.2.1, il existe une solution strictement stationnaire unique de (2.4). Puisque  $y_s$  et  $(\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,1}), \mathcal{B}_s(\underline{\eta}_{s,1}))$  sont indépendants, on peut montrer que pour tout ensemble de Borel  $B$ ,  $\pi(B) = \int P(x, B) d\pi(x)$ , où  $\pi$  est la distribution commune des  $y_{s+S\tau}$ , ce qui signifie que  $\pi$  est la distribution invariante unique de  $P(x, dy)$ . ■

Pour prouver la condition d'additivité dénombrable uniforme, on suppose que  $(\eta_t^{+2\delta})_{t \in \mathbb{Z}}$  et  $(\eta_t^{-2\delta})_{t \in \mathbb{Z}}$ , ont respectivement les fonctions de densité de probabilité  $f_1$  et  $f_2$  absolument continues par rapport à la mesure de Lebesgue et bornées sur les compacts.

**Lemme 2.4.3** *La condition d'additivité dénombrable uniforme est vérifiée pour  $(y_{s+S\tau})_\tau$ .*

**Preuve.** Nous montrons la preuve du lemme ci-dessus pour  $p = q = S = 2$ . Supposons que les probabilités de transition sont données par

$$P(x, A) = \int_A p(x, y) dy, x \in \mathbb{R}_+^6, A \in \mathfrak{B}$$

où  $p(x, y)$  est donnée ci-dessous. Comme dans Fonseca et Tweedie (2002), nous prouverons que  $p(x, y)$  est bornée sur les ensembles compacts ce qui conduira à la condition d'additivité dénombrable uniforme.

Posons

$$a(x) := \omega_1 + \beta_{1,1}x_1 + \beta_{1,2}x_2 + \gamma_{1,1}^+x_3 + \gamma_{1,1}^-x_4 + \gamma_{1,2}^+x_5 + \gamma_{1,2}^-x_6 > 0,$$

$$b(x) := \omega_2 + \beta_{2,2}x_1 + \gamma_{2,2}^+x_3 + \gamma_{2,2}^-x_4 > 0 \text{ et } c(x) := a(x)\beta_{2,1} + b(x).$$

Étant donné  $y_{2+2(\tau-1)} = x$ , nous avons

$$y_{2+2\tau} = \begin{pmatrix} a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+ \eta_{1+2\tau}^{+2\delta}) + b(x) \\ a(x) \\ \eta_{2+2\tau}^{+2\delta} (a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+ \eta_{1+2\tau}^{+2\delta}) + b(x)) \\ 0 \\ a(x)\eta_{1+2\tau}^{+2\delta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } \eta_{1+2\tau} > 0 \text{ et } \eta_{2+2\tau} > 0,$$

$$y_{2+2\tau} = \begin{pmatrix} a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+ \eta_{1+2\tau}^{+2\delta}) + b(x) \\ a(x) \\ 0 \\ \eta_{2+2\tau}^{-2\delta} (a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^+ \eta_{1+2\tau}^{+2\delta}) + b(x)) \\ a(x)\eta_{1+2\tau}^{+2\delta} \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{si } \eta_{1+2\tau} > 0 \text{ et } \eta_{2+2\tau} < 0,$$

$$y_{2+2\tau} = \begin{pmatrix} a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^- \eta_{1+2\tau}^{-2\delta}) + b(x) \\ a(x) \\ \eta_{2+2\tau}^{+2\delta} (a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^- \eta_{1+2\tau}^{-2\delta}) + b(x)) \\ 0 \\ 0 \\ a(x)\eta_{1+2\tau}^{-2\delta} \end{pmatrix} \quad \text{si } \eta_{1+2\tau} < 0 \text{ et } \eta_{2+2\tau} > 0$$

$$\text{et } y_{2+2\tau} = \begin{pmatrix} a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^- \eta_{1+2\tau}^{-2\delta}) + b(x) \\ a(x) \\ 0 \\ \eta_{2+2\tau}^{-2\delta} (a(x)(\beta_{2,1} + \gamma_{2,1}^- \eta_{1+2\tau}^{-2\delta}) + b(x)) \\ 0 \\ a(x) (\eta_{1+2\tau}^-)^{2\delta} \end{pmatrix} \quad \text{si } \eta_{1+2\tau} < 0 \text{ et } \eta_{2+2\tau} < 0.$$

Si  $\eta_{1+2\tau} > 0$  et  $\gamma_{2,1}^+ > 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} f_1 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_1 \left( \frac{y_3}{y_1} \right) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_4) \delta_{\frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^+}}(y_5) \delta_0(y_6) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} f_1 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_1 \left( \frac{y_3}{y_1} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} > 0, \\ p(x, y) &= \frac{1}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} f_1 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_2 \left( \frac{y_4}{y_1} \right) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_3) \delta_{\frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^+}}(y_5) \delta_0(y_6) \\ &\leq \frac{1}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} f_1 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_2 \left( \frac{y_4}{y_1} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} < 0, \end{aligned}$$

et si  $\gamma_{2,1}^+ = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned} p(x, y) &= \frac{1}{a(x)} f_1 \left( \frac{y_5}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_1 \left( \frac{y_3}{c(x)} \right) \delta_{c(x)}(y_1) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_4) \delta_0(y_6) \\ &\leq \frac{1}{a(x)} f_1 \left( \frac{y_5}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_1 \left( \frac{y_3}{c(x)} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} > 0, \\ p(x, y) &= \frac{1}{a(x)} f_1 \left( \frac{y_5}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_2 \left( \frac{y_4}{c(x)} \right) \delta_{c(x)}(y_1) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_3) \delta_0(y_6) \\ &\leq \frac{1}{a(x)} f_1 \left( \frac{y_5}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_2 \left( \frac{y_4}{c(x)} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} < 0. \end{aligned}$$



D'autre part, si  $\eta_{1+2\tau} < 0$  et  $\gamma_{2,1}^- > 0$ , alors

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \frac{1}{\gamma_{2,1}^- a(x)} f_2 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^- a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_1 \left( \frac{y_3}{y_1} \right) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_4) \delta_0(y_5) \delta_{\frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^-}}(y_6) \\
 &\leq \frac{1}{\gamma_{2,1}^- a(x)} f_2 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^- a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_1 \left( \frac{y_3}{y_1} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} > 0 \\
 p(x, y) &= \frac{1}{\gamma_{2,1}^- a(x)} f_2 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^- a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_2 \left( \frac{y_4}{y_1} \right) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_3) \delta_0(y_5) \delta_{\frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^-}}(y_6) \\
 &\leq \frac{1}{\gamma_{2,1}^- a(x)} f_2 \left( \frac{y_1 - c(x)}{\gamma_{2,1}^- a(x)} \right) \frac{1}{y_1} f_2 \left( \frac{y_4}{y_1} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} < 0,
 \end{aligned}$$

et si  $\gamma_{2,1}^- = 0$ , nous avons

$$\begin{aligned}
 p(x, y) &= \frac{1}{a(x)} f_2 \left( \frac{y_6}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_1 \left( \frac{y_3}{c(x)} \right) \delta_{c(x)}(y_1) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_4) \delta_0(y_5) \\
 &\leq \frac{1}{a(x)} f_2 \left( \frac{y_6}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_1 \left( \frac{y_3}{c(x)} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} > 0, \\
 p(x, y) &= \frac{1}{a(x)} f_2 \left( \frac{y_6}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_2 \left( \frac{y_4}{c(x)} \right) \delta_{c(x)}(y_1) \delta_{a(x)}(y_2) \delta_0(y_3) \delta_0(y_5) \\
 &\leq \frac{1}{a(x)} f_2 \left( \frac{y_6}{a(x)} \right) \frac{1}{c(x)} f_2 \left( \frac{y_4}{c(x)} \right) \quad \text{si } \eta_{2+2\tau} < 0.
 \end{aligned}$$

Pour tout compact  $A$ , si  $x, y \in A$ , nous avons

$$\frac{1}{\gamma_{2,1}^+ a(x)} \leq \frac{1}{\gamma_{2,1}^+ \omega_1}, \quad \frac{1}{\gamma_{2,1}^- a(x)} \leq \frac{1}{\gamma_{2,1}^- \omega_1}, \quad \frac{1}{a(x)} \leq \frac{1}{\omega_1}, \quad \frac{1}{c(x)} \leq \frac{1}{\omega_2} \quad \text{et} \quad \frac{1}{y_1} \leq \frac{1}{\omega_2}.$$

Ainsi, pour tout ensemble compact  $A$ ,

$$p(x, y) \leq M_A, \quad x, y \in A$$

pour un certains  $M_A < \infty$  qui implique que la condition d'additivité comptable uniforme est vérifiée ( [Fonseca et Tweedie, 2002](#)). ■

Maintenant, en vertu du Lemme 2.4.2,  $\rho \left[ E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] < 1$  assure que  $(y_{s+S\tau})_\tau$  a une mesure invariante unique. La condition de dérive et la condition d'additivité dénombrable uniforme sont garanties pour  $(y_{s+S\tau})_\tau$  respectivement par Lemme 2.4.1 et Lemme 2.4.3. En vertu du Théorème 2.4.2, il en résulte que  $(y_{s+S\tau})_\tau$  donné par (2.4) est  $\phi$ -irréductible. Il est facile de montrer que (2.4) est une chaîne de Feller, (voir Feigin et Tweedie, 1985) ainsi, tout ensemble compact dans  $\mathcal{B}$  est un small set. Par conséquent, d'après Théorème 2.4.1,  $(y_{s+S\tau})_\tau$  est géométriquement ergodique et  $\beta$ -mélangeante avec un taux exponentiel.

Si  $\rho \left[ E\{\mathcal{A}_s(\underline{\eta}_{s,\tau})\} \right] \geq 1$ , de (2.10), clairement, il n'y a pas de solution stationnaire.

---

---

## CHAPITRE 3

---

### Estimation

Diverses méthodes d'estimation de modèle ont été proposées et souvent comparées pour estimer, en particulier, un modèle de la classe des modèles conditionnellement hétéroscédastiques classique ou périodique. Sans chercher à être exhaustifs, nous citons à titre d'exemple la méthode *LAD* (least absolute deviations) ou moindres déviations absolues et la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (*QMV*) adoptées par [Pan, Wang et Tong \(2008\)](#) pour estimer leur modèle *PTTGARCH* ou modèle *GARCH* en puissance et à seuil. La première est basée sur la minimisation de la somme des écarts absolus entre le logarithme de la valeur absolue du processus et le logarithme d'une fonction non observable qui dépend linéairement d'une puissance du carré du passé du processus et de la puissance du passé de cette fonction non observable selon des régimes. La seconde est la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (*QMV*) qui est utilisée lorsque le bruit sous-jacent n'est pas nécessairement gaussien. Les estimateurs qui en résultent sont consistants même s'ils ne sont pas aussi efficaces que ceux du maximum de vraisemblance. [Bentarzi et Hamdi \(2008a, b\)](#) ont introduit le modèle *ARCH* périodique de

mélange (*MPARCH*) étendu au *GARCH* périodique de mélange (*MPGARCH*) par Hamdi et Souam (2018) qui ont établi certaines propriétés probabilistes de ce modèle et estimé les paramètres par la méthode du maximum de vraisemblance (*MV*). Hamadeh et Zakoïan (2011) ont adopté la méthode d'estimation par *QMV* pour le modèle *GARCH* asymétrique en puissance dans le cas où cette puissance est connue et inconnue ; pour le cas d'un modèle *ARCH* asymétrique en puissance, ils ont fait la comparaison entre les estimateurs obtenus par les méthodes *MCO* et *QMV* et ont montré asymptotiquement la supériorité de la méthode *MCO*. Aknouche et Touche (2015) ont utilisé la méthode des moindres carrées pondérée (*2SWLS*) pour estimer le modèle *ARCH* en puissance et à seuil  $\delta$  – *TARCH* dans le cas stationnaire et non stationnaire avec  $\delta$  connu. Boussaha et Hamdi (2018) ont proposé le modèle de volatilité stochastique périodique autorégressive (*PAR – SV*), généralisé aux cas multivariés par Boussaha, Hamdi et Souam. (2018). Dans les deux cas, ils ont étudié certaines propriétés probabilistes et adopté deux méthodes d'estimation fondées sur le filtrage de Kalman et le filtrage-lissage particulière. Xia, Wong, Liu et Liang (2017) ont proposé une approche d'estimation bayésienne pour estimer les paramètres et prédire les volatilités pour un modèle *GARCH* transformé en puissance asymétrique et à seuil (*PTTGARCH*, Pan, Wang et Tong, 2008) ; leurs résultats de simulation et sur les données réelles ont montré l'efficacité de la méthode Bayésienne. Bibi et Ghezal (2017) ont proposé l'extension des processus *GARCH* à seuil (*TGARCH*) à coefficients invariants dans le temps au processus *PTGARCH* dont les coefficients varient périodiquement. Ils ont donné les propriétés asymptotiques des estimateurs *QMV* dans les cas forts et semi-forts. Aknouche, Demmouche et Touche (2018), après avoir donné quelques propriétés probabilistes du modèle *GARCH* périodique transformé en puissance ont proposé une estimation MCMC bayésienne basée sur le Griddy-Gibbs sampler pour ce modèle pour différentes distributions, après, ils ont conduit une étude de simulation et une application sur la série de données de l'indice

S&P500.

Ce chapitre est composé de trois sections. La première section est consacrée à la méthode du maximum de vraisemblance et aux propriétés de convergence presque sûre et de normalité asymptotique des estimateurs des paramètres. La deuxième section contient les preuves des théorèmes et des lemmes des résultats principaux formulés dans la première section. Une étude de simulation intensive fait l'objet de la section trois. Elle conforte les résultats théoriques obtenus dans la première section.

### 3.1 Estimation par la méthode du quasi-maximum vraisemblance

Supposons que le processus générateur des données suive le modèle (2.2). Pour éviter les cas pathologiques, nous supposons que  $\gamma_{s,p}^-$  ou  $\gamma_{s,p}^+ > 0$  si  $p > 0$  et  $\beta_{s,q} > 0$  si  $q > 0$ .

Notons  $\varphi := (\delta, \phi'_1, \dots, \phi'_S)'$  où  $\phi'_s := (\omega_s, \gamma_{s,1}^+, \gamma_{s,1}^-, \dots, \gamma_{s,p}^+, \gamma_{s,p}^-, \beta_{s,1}, \dots, \beta_{s,q})$ ,  $s = 1, \dots, S$  et on note  $\varphi^0$  la vraie valeur du vecteur des paramètres. Supposons que  $\varphi \in \Phi$  l'espace des paramètres. Le logarithme de la fonction de quasi-vraisemblance est donné par

$$L_{NS}(\varphi) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S l_{s+S\tau}(\varphi) \text{ où } l_{s+S\tau}(\varphi) = -\frac{1}{2}(\log(h_{s+S\tau}(\varphi)) + \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{h_{s+S\tau}(\varphi)})$$

$h_{s+S\tau}(\varphi)$  est donné par (3.2). Définissons aussi  $L(\varphi) = E \left\{ \sum_{s=1}^S l_s(\varphi) \right\}$  et fixons  $\varepsilon_t = 0$  si  $t \leq 0$  puisque, en pratique, nous observons seulement  $\varepsilon_t$  pour  $t = 1, \dots, NS$ . La volatilité correspondante est notée  $\tilde{h}_t$  et la fonction de log-vraisemblance est notée  $\tilde{L}_{NS}(\varphi) = \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \tilde{l}_{s+S\tau}(\varphi)$  où  $\tilde{l}_{s+S\tau}(\varphi) = -\frac{1}{2} \left( \log(\tilde{h}_{s+S\tau}(\varphi)) + \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{\tilde{h}_{s+S\tau}(\varphi)} \right)$ .

On pose  $\Sigma_0 := \text{cov} \left\{ \sum_{s=1}^S l'_s(\varphi^0) \right\}$  et  $\Delta_0 := E \left\{ \sum_{s=1}^S l''_s(\varphi^0) \right\}$ . Nous avons besoin des hypothèses suivantes

A2. Pour un certains  $\mu > 0$  nous avons

$$\lim_{t \rightarrow 0} t^{-\mu} P\{\eta_0^2 \leq t\} = 0. \quad (3.1)$$

A3.  $\Phi$  est un sous-ensemble compact de  $\mathbb{R}^{S \times (2p+q+1)+1}$ ,  $\varphi^0$  est à l'intérieur de  $\Phi$ .

A4.  $E(\eta_t^4) < \infty$

Pour faciliter la notation, nous posons  $s + S\tau =: t$ . Supposons que la condition (2.5) est vérifiée. Sous les hypothèses A1-A3, de (2.2), on peut montrer que

$$\begin{aligned} h_t^\delta &= \omega_t + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \dots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k} \omega_{t-j_1-\dots-j_k} \\ &+ \sum_{i=1}^p \gamma_{t,i}^+ \varepsilon_{t-i}^{+2\delta} + \sum_{i=1}^p \gamma_{t,i}^- \varepsilon_{t-i}^{-2\delta} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \dots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j_1-\dots-j_k,i}^+ \varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_k}^{+2\delta} \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \dots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j_1-\dots-j_k,i}^- \varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_k}^{-2\delta} \end{aligned} \quad (3.2)$$

par convention,  $j_l = 0$  si  $l \leq 0$ . Dans la suite, nous avons besoin des dérivées suivantes de (3.2).

$$\begin{aligned} \frac{\partial h_t^\delta(\varphi)}{\partial \delta} &= \sum_{i=1}^p \gamma_{t,i}^+ \varepsilon_{t-i}^{+2\delta} \log(\varepsilon_{t-i}^{+2}) + \sum_{i=1}^p \gamma_{t,i}^- \varepsilon_{t-i}^{-2\delta} \log(\varepsilon_{t-i}^{-2}) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \dots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j_1-\dots-j_k,i}^+ \varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_k}^{+2\delta} \log(\varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_k}^{+2}) \\ &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \dots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j_1-\dots-j_k,i}^- \varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_k}^{-2\delta} \log(\varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_k}^{-2}) \\ &=: D_{1t}(\varphi) + D_{2t}(\varphi) + D_{3t}(\varphi) \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_t^\delta(\varphi)}{\partial \omega_t} &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^q \sum_{j_k=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-2},j_{k-1}} \\
 &\quad \times \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k S-j_1-\dots-j_{k-2}} \tag{3.4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_t^\delta(\varphi)}{\partial \gamma_{t,i}^+} &= \varepsilon_{t-i}^{+2\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^q \sum_{j_k=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-2},j_{k-1}} \\
 &\quad \times \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k S-j_1-\dots-j_{k-2}} \varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_{k-1}-j_k}^{+2\delta} \tag{3.5}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial h_t^\delta(\varphi)}{\partial \gamma_{t,i}^-} &= \varepsilon_{t-i}^{-2\delta} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{k-1}=1}^q \sum_{j_k=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-2},j_{k-1}} \\
 &\quad \times \beta_{t-j_1-\dots-j_{k-1},j_k S-j_1-\dots-j_{k-2}} \varepsilon_{t-i-j_1-\dots-j_{k-1}-j_k}^{-2\delta} \tag{3.6}
 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial h_t^\delta(\varphi)}{\partial \beta_{t,j}} = P_{1t}(\varphi) + P_{2t}(\varphi) + P_{3t}(\varphi) \quad \text{où} \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}
 P_{1t}(\varphi) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^q \cdots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t-j,j_2} \beta_{t-j-j_2,j_3} \cdots \beta_{t-j-j_2 \dots -j_{k-1},j_k} \omega_{t-j-j_2 \dots -j_k} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{l-1}=1}^q \sum_{j_l=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \sum_{j_{l+2}=1}^q \cdots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1 \dots -j_{l-1},j_l} S^{-j_1 \dots -j_{l-1}} \\
 &\times \beta_{t-j,j_{l+2}} \cdots \beta_{t-j-j_{l+2} \dots -j_{k-1},j_k} \omega_{t-j-j_2 \dots -j_k} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{k-2}=1}^q \sum_{j_{k-1}=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1 \dots -j_{k-3},j_{k-2}} \\
 &\times \beta_{t-j_1 \dots -j_{k-2},j_{k-1}} S^{-j_1 \dots -j_{k-2}} \omega_{t-i-j}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 P_{2t}(\varphi) &:= \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^q \cdots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t-j,j_2} \beta_{t-j-j_2,j_3} \cdots \beta_{t-j-j_2 \dots -j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j-j_2 \dots -j_k,i}^+ \varepsilon_{t-i-j-j_2 \dots -j_k}^{+2\delta} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{k-2} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{l-1}=1}^q \sum_{j_l=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \sum_{j_{l+2}=1}^q \cdots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1 \dots -j_{l-1},j_l} S^{-j_1 \dots -j_{l-1}} \\
 &\times \beta_{t-j,j_{l+2}} \cdots \beta_{t-j-j_{l+2} \dots -j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j-j_2 \dots -j_k,i}^+ \varepsilon_{t-i-j-j_2 \dots -j_k}^{+2\delta} \\
 &+ \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_1=1}^q \cdots \sum_{j_{k-2}=1}^q \sum_{j_{k-1}=\lceil 1+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rceil}^{\lfloor q+j_1+\dots+j_{k-1}/S \rfloor} \beta_{t,j_1} \beta_{t-j_1,j_2} \cdots \beta_{t-j_1 \dots -j_{k-3},j_{k-2}} \\
 &\times \beta_{t-j_1 \dots -j_{k-2},j_{k-1}} S^{-j_1 \dots -j_{k-2}} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j,i}^+ \varepsilon_{t-i-j}^{+2\delta}
 \end{aligned}$$

par convention  $\sum_x^y = 0$  if  $y < x$ .  $P_{3t}(\varphi)$  est comme  $P_{2t}(\varphi)$  en remplaçant respectivement  $\gamma_{t,i}^+$  et  $\varepsilon_t^{+2\delta}$  par  $\gamma_{t,i}^-$  et  $\varepsilon_t^{-2\delta}$ . Rappelons que  $\lfloor x \rfloor$  est le premier entier inférieur ou égal à  $x$  (floor function) et  $\lceil x \rceil$  est le premier entier supérieur ou égal à  $x$  (ceiling function).

Les théorèmes suivants montrent la consistance et la normalité asymptotique de  $\hat{\varphi}_{NS} = \arg \max L_{NS}(\varphi)$  et  $\tilde{\varphi}_{NS} = \arg \max \tilde{L}_{NS}(\varphi)$  respectivement.



**Théorème 3.1.1 (Guerbyenne et Kessira, 2018)** *Sous les hypothèses A1-A4 et si la condition (2.5) est vérifiée, nous avons*

$$\widehat{\varphi}_{NS} \rightarrow \varphi^0 \text{ p.s, quand } N \rightarrow \infty \quad (3.8)$$

et

$$\sqrt{N} (\widehat{\varphi}_{NS} - \varphi^0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\underline{0}, \Delta_0^{-1} \Sigma_0 \Delta_0^{-1}), \text{ quand } N \rightarrow \infty. \quad (3.9)$$

**Théorème 3.1.2 (Guerbyenne et Kessira, 2018)** *Sous les hypothèses A1-A4 et si la condition (2.5) est vérifiée, nous avons*

$$\widetilde{\varphi}_{NS} \rightarrow \varphi^0 \text{ p.s, quand } N \rightarrow \infty \quad (3.10)$$

et

$$\sqrt{N} (\widetilde{\varphi}_{NS} - \varphi^0) \xrightarrow{\mathcal{L}} N(\underline{0}, \Delta_0^{-1} \Sigma_0 \Delta_0^{-1}), \text{ quand } N \rightarrow \infty. \quad (3.11)$$

Nous rappelons les lemmes 5.1 et 5.2 (Berkes et al, 2003) qui ont été donnés pour un modèle  $GARCH(p, q)$

$$\begin{aligned} y_t &= \sigma_t \varepsilon_t \\ \sigma_t^2 &= \omega + \sum_{i=1}^p \alpha_i y_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^q \beta_j \sigma_{t-j}^2 \\ \omega &> 0, \alpha_i \geq 0, 1 \leq i \leq p, \beta_j \geq 0, 1 \leq j \leq q \end{aligned}$$

où  $\{\varepsilon_t, -\infty < t < \infty\}$  sont des v.a. *iid* et  $\sigma_t^2(\varphi_0) := \sigma_t^2$ ,  $\varphi_0$  étant la vraie valeur du paramètre. Ces lemmes seront adaptés à notre contexte.

**Lemme 3.1.1 (Berkes et al, 2003, Lemma 5.1)** *Sous les conditions A2 et A3 et si  $E(|\varepsilon_t^2|^\gamma) < \infty$  pour un certain  $\gamma > 0$ , alors pour tout  $0 < \nu < \gamma$ , on a*

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \frac{\sigma_t^2(\varphi_0)}{\sigma_t^2(\varphi)} \right\}^\nu < \infty$$

**Lemme 3.1.2 (Berkes et al, 2003, Lemma 5.2)** *Sous la condition A3 et  $E(|y_0^2|^\delta) < \infty$  pour un certain  $\delta > 0$ , on a pour tout  $\nu > 0$*

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \frac{\sum_{i=1}^{\infty} i^3 c_i(\varphi) y_{t-i}^2}{1 + \sum_{i=1}^{\infty} c_i(\varphi) y_{t-i}^2} \right\}^\nu < \infty$$

où les  $c_i(\varphi), 1 \leq i < \infty$  sont les coefficients de la représentation infinie de  $\sigma_t^2(\varphi)$ .

## 3.2 Preuves des Théorème 3.1.1 et Théorème 3.1.2

Avant de donner les preuves du Théorème 3.1.1 et du Théorème 3.1.2, nous avons besoin des lemmes suivants. Soit  $h$  un entier et supposons  $h_t^\delta \geq \delta_1$  où  $\delta_1$  est une constante positive.

**Lemme 3.2.1** *Sous les hypothèses A1-A3 et (2.5), on a*

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} |\log h_t^\delta(\varphi)|^h \right\} < \infty, \quad (3.12)$$

$$E \left\{ \left( \sup_{\varphi \in \Phi} \sum_{s=1}^S \left\| \frac{1}{h_s^\delta(\varphi)} \frac{\partial h_s^\delta(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \right)^h \right\} < \infty. \quad (3.13)$$

**Preuve.** Sous A1 et A3, il existe des constantes positives  $C > 0$  et  $0 < r < 1$  tel que

$$\delta_1 \leq h_t^\delta(\varphi) \leq \sup_{\varphi \in \Phi} h_t^\delta(\varphi) \leq C \sum_{j=1}^{\infty} r^j (|\varepsilon_{t-j}|^{2\delta} + 1). \quad (3.14)$$

Posons  $\tilde{h} = \min(1, \frac{\Delta}{2\delta})$ , pour tout  $\alpha > 0$  et  $x \geq M$  nous avons  $\log x \leq x^\alpha$ , soit  $\alpha = \frac{\tilde{h}}{h}$ ; ainsi  $(\log x)^h \leq x^{\tilde{h}}$  et par (3.14), nous avons

$$\begin{aligned} \sup_{\varphi \in \Phi} |\log h_t^\delta(\varphi)| &\leq |\log \delta_1| + \left| \log \left( C \sum_{j=1}^{\infty} r^j (|\varepsilon_{t-j}|^{2\delta} + 1) \right) \right| \\ &\leq |\log \delta_1| + |\log C| + \left| \log \left( \sum_{j=1}^{\infty} r^j (|\varepsilon_{t-j}|^{2\delta} + 1) \right) \right|^{h \times \frac{1}{h}} \\ &\leq C + \left( \sum_{j=1}^{\infty} r^{j\tilde{h}} (|\varepsilon_{t-j}|^{2\delta\tilde{h}} + 1) \right)^{\frac{1}{h}}; \end{aligned}$$

D'après le Théorème 2.3.1 (i) et (ii), nous pouvons montrer que

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} |\log h_t^\delta(\varphi)|^h \right\} < \infty.$$

Pour  $i = 2, \dots, S \times (2p + q + 1) + 1$ , (3.13) est obtenu directement à partir des dérivées (3.4) – (3.7) et Lemma 5.2 de Berkes, Horwáth et Kokoszka (2003). Pour  $i = 1$ , de (3.3) on peut trouver  $\rho > 0$  tel que

$$\begin{aligned} |D_{2t}(\varphi)| &\leq \rho \sum_{j=1}^q \left| \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^q \dots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t-j, j_2} \beta_{t-j-j_2, j_3} \dots \beta_{t-j-j_2-\dots-j_{k-1}, j_k} \right. \\ &\quad \times \left. \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j-j_2-\dots-j_k, i}^+ \varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+2\delta} \log(\varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+2}) \right| \\ &= \rho \sum_{j=1}^q |D_{2t, j}^*(\varphi)|. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Hölder, on obtient

$$\begin{aligned} E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{D_{2t, j}^*(\varphi)}{h_t^\delta(\varphi)} \right|^h \right\}^2 &\leq E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{D_{2t, j}^*(\varphi)}{P_{2t}(\varphi)} \right|^{2h} \right\} E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{P_{2t}(\varphi)}{h_t^\delta(\varphi)} \right|^{2h} \right\} \\ &\leq CE \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{D_{2t, j}^*(\varphi)}{P_{2t}(\varphi)} \right|^{2h} \right\}, \end{aligned}$$

où  $P_{2t}(\varphi)$  est donné dans (3.7). On peut trouver aussi  $\rho_1 > 0$  tel que

$$P_{2t}(\varphi) \geq \rho_1 \sum_{k=1}^{\infty} k \sum_{j_2=1}^q \cdots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t-j,j_2} \beta_{t-j-j_2,j_3} \cdots \beta_{t-j-j_2-\dots-j_{k-1},j_k} \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j-j_2-\dots-j_k,i}^+ \varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+2\delta}.$$

Posons  $I_1 = I(|\log(\varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^+)| \geq 1)$ . En utilisant l'inégalité suivante

$$\forall n \geq 1, \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{\sum_{i=1}^n y_i} \leq \max \left\{ \frac{x_i}{y_i}, i = 1, \dots, n \right\}, x_i > 0, y_i > 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{D_{2t,j}^*(\varphi)}{P_{2t}(\varphi)} \right|^{2h} \right\} &= E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{j_2=1}^q \cdots \sum_{j_k=1}^q \beta_{t-j,j_2} \beta_{t-j-j_2,j_3} \cdots \beta_{t-j-j_2-\dots-j_{k-1},j_k}}{\Delta P_{2t}(\varphi)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. \times \sum_{i=1}^p \gamma_{t-j-j_2-\dots-j_k,i}^+ \varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+2\delta} \log(\varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+2\Delta}) \right|^{2h} \right\} \\ &\leq C + CE \left\{ \max_i \max_{k \geq 1} \max_{j_1, \dots, j_k} \left| \frac{\log(\varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+\Delta}) I_1}{k} \right|^{2h} \right\} \\ &\leq C + C \int_1^{\infty} 2hy^{2h-1} P(\max_i \max_{k \geq 1} \max_{j_1, \dots, j_k} \left| \frac{\log(\varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+\Delta}) I_1}{k} \right| > y) dy \\ &\leq C + C \sum_{k=1}^{\infty} \int_1^{\infty} 2hy^{2h-1} P(\max_i \max_{j_1, \dots, j_k} \left| \frac{\log(\varepsilon_{t-i-j-j_2-\dots-j_k}^{+\Delta})}{k} \right| > y) dy \\ &\leq C + C \max_s \sum_{k=1}^{\infty} k \int_1^{\infty} 2hy^{2h-1} P\left( \left| \frac{\log(\varepsilon_s^{+\Delta})}{k} \right| > y \right) dy \\ &\leq C + C \max_s \sum_{k=1}^{\infty} k \int_1^{\infty} 2hy^{2h-1} \left( P(\varepsilon_s^{+\Delta} > e^{ky}) + P(\eta_s^+ < \frac{1}{\omega_s^{1/2\delta\Delta}} e^{-ky/\Delta}) \right) dy; \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Markov, (3.1) et en vertu du Théorème 2.3.1 (i) on obtient

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{D_{2t,j}^*(\varphi)}{P_{2t}(\varphi)} \right|^{2h} \right\} \leq C + C \max_s \sum_{k=1}^{\infty} k \int_1^{\infty} 2hy^{2h-1} (e^{-ky} E \{ \varepsilon_s^{+\Delta} \} + e^{-\mu ky/\Delta}) dy$$

$$< \infty. \quad \blacksquare$$

**Lemme 3.2.2** *Sous les hypothèses A1-A3, (2.5) et  $E\{(\eta_t^2)^{1+\lambda}\} < \infty$  pour certain  $\lambda > 0$ , on a*

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left\| \sum_{s=1}^S \frac{\partial l_s(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \right\} < \infty.$$

**Preuve.**

$$\sum_{s=1}^S \frac{\partial l_s(\varphi)}{\partial \varphi} = \frac{1}{2} \sum_{s=1}^S -\frac{1}{h_s(\varphi)} \frac{\partial h_s(\varphi)}{\partial \varphi} + \eta_s^2 \frac{h_s(\varphi^0)}{h_s(\varphi)} \frac{1}{h_s(\varphi)} \frac{\partial h_s(\varphi)}{\partial \varphi}. \quad (3.15)$$

Par des arguments similaires à Lemme 5.1 de Berkes, Horwáth et Kokoszka (2003) on peut montrer, pour un  $\lambda > 0$ , que

$$E \left\{ \left( \sup_{\varphi \in \Phi} \sum_{s=1}^S \frac{h_s(\varphi^0)}{h_s(\varphi)} \right)^{1+\lambda} \right\} < \infty.$$

En utilisant l'inégalité de Hölder et d'après le Lemme 3.2.1 nous avons

$$E \left\{ \sup_{\varphi \in \Phi} \left\| \sum_{s=1}^S \frac{h_s(\varphi^0)}{h_s(\varphi)} \frac{1}{h_s(\varphi)} \frac{\partial h_s(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \right\} \leq E \left\{ \left( \sup_{\varphi \in \Phi} \sum_{s=1}^S \frac{h_s(\varphi^0)}{h_s(\varphi)} \right)^{1+\lambda} \right\}^{\frac{1}{1+\lambda}}$$

$$\times E \left\{ \left( \sup_{\varphi \in \Phi} \sum_{s=1}^S \left\| \frac{1}{h_s(\varphi)} \frac{\partial h_s(\varphi)}{\partial \varphi} \right\| \right)^{\frac{1+\lambda}{\lambda}} \right\}^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}$$

$$< \infty$$

et le résultat suit.  $\blacksquare$

**Lemme 3.2.3** *Supposons que les conditions du lemme 3.2.1 sont vérifiées; alors, quand  $n \rightarrow \infty$ , nous avons*

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{N} L_{NS}(\varphi) - L(\varphi) \right| \xrightarrow{p.s} 0, \quad (3.16)$$

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{N} L'_{NS}(\varphi) - L'(\varphi) \right| \xrightarrow{p.s} 0, \quad (3.17)$$

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{N} L''_{NS}(\varphi) - L''(\varphi) \right| \xrightarrow{p.s} 0 \quad (3.18)$$

**Preuve.** Par l'ergodicité périodique, nous avons

$$\frac{1}{N} L_{NS}(\varphi) \xrightarrow{p.s} L(\varphi) \text{ quand } N \rightarrow \infty. \quad (3.19)$$

Notons que d'après le théorème de la valeur moyenne, nous avons

$$\frac{1}{\|\varphi_1 - \varphi_2\|} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S |\log(h_{s+S\tau}(\varphi_1)) - \log(h_{s+S\tau}(\varphi_2))| = \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \left\| \frac{1}{h_{s+S\tau}(\varphi_1^*)} \frac{\partial h_{s+S\tau}(\varphi_1^*)}{\partial \varphi} \right\|$$

et

$$\frac{1}{\|\varphi_1 - \varphi_2\|} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \left| \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{h_{s+S\tau}(\varphi_1)} - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{h_{s+S\tau}(\varphi_2)} \right| = \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \left\| \eta_{s+S\tau}^2 \frac{h_{s+S\tau}(\varphi^0)}{h_{s+S\tau}(\varphi_2^*)} \frac{1}{h_{s+S\tau}(\varphi_2^*)} \frac{\partial h_{s+S\tau}(\varphi_2^*)}{\partial \varphi} \right\|$$

où  $\varphi_1^*$  et  $\varphi_2^*$  satisfont  $\|\varphi_1 - \varphi_1^*\| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|$  et  $\|\varphi_2^* - \varphi_2\| \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|$ . utilisant

Lemme 3.2.1 et Lemme 3.2.2 nous obtenons

$$E \left\{ \sup_{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi} \frac{1}{\|\varphi_1 - \varphi_2\|} \sum_{s=1}^S |\log(h_{s+S\tau}(\varphi_1)) - \log(h_{s+S\tau}(\varphi_2))| \right\} < \infty$$

et

$$E \left\{ \sup_{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi} \frac{1}{\|\varphi_1 - \varphi_2\|} \sum_{s=1}^S \left| \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{h_{s+S\tau}(\varphi_1)} - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{h_{s+S\tau}(\varphi_2)} \right| \right\} < \infty,$$

ainsi, quand  $N \rightarrow \infty$

$$\sup_{\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi} \frac{1}{\|\varphi_1 - \varphi_2\|} \left| \frac{1}{N} L_{NS}(\varphi_1) - \frac{1}{N} L_{NS}(\varphi_2) \right| \stackrel{p.s.}{=} O(1)$$

ce qui montre que la suite  $\frac{1}{N} L_{NS}(\varphi)$  est équicontinue avec une probabilité un et par la compacité de  $\Phi$  et (3.19), (3.16) suit. (3.17) et (3.18) sont obtenus de manière similaire que pour (3.16). ■

**Lemme 3.2.4** *Sous les hypothèses A1-A3,  $L(\varphi) = E \left\{ \sum_{s=1}^S l_s(\varphi) \right\}$  est bien défini et son unique maximum est en  $\varphi^0$ .*

**Preuve.** Nous avons

$$E \left\{ \sum_{s=1}^S l_s(\varphi) \right\} = E \left\{ -\frac{1}{2} \sum_{s=1}^S \log(h_s(\varphi)) + \frac{h_s(\varphi^0) \eta_s^2}{h_s(\varphi)} \right\}$$

et par le Lemme 3.2.1,  $L(\varphi)$  est bien défini.

Nous avons

$$E \left\{ \sum_{s=1}^S l_s(\varphi^0) \right\} - E \left\{ \sum_{s=1}^S l_s(\varphi) \right\} = -\frac{S}{2} + \frac{1}{2} E \left\{ \sum_{s=1}^S \frac{h_s(\varphi^0)}{h_s(\varphi)} - \log \left( \frac{h_s(\varphi^0)}{h_s(\varphi)} \right) \right\},$$

montrant que  $L(\varphi)$  a un maximum global si et seulement si  $\varphi = \varphi^0$ , puisque, pour tout  $x_1, \dots, x_S > 0$ , la fonction  $\sum_{s=1}^S x_s - \log(x_s)$  possède un minimum global lorsque  $x_1 = \dots = x_S = 1$ , prouvant le lemme. ■

Hypothèse A3 garantit que l'espace des paramètres est compact, Lemme 3.2.3 montre la convergence uniforme de  $\frac{1}{NS} L_{NS}(\varphi)$  vers  $L(\varphi)$  presque sûrement et par Lemme 3.2.4, nous avons prouvé que l'unique maximum global de  $L(\varphi)$  est en  $\varphi^0$ . Par conséquent, (3.8) est obtenu.

Nous avons  $L'_{NS}(\widehat{\varphi}_{NS}) = \underline{0}$ , ainsi,  $L'_{NS}(\widehat{\varphi}_{NS}) - L'_{NS}(\varphi^0) = -L'_{NS}(\varphi^0)$  et par le théorème de la valeur moyenne, il existe  $\varphi^*$  entre  $\widehat{\varphi}_{NS}$  et  $\varphi^0$  tel que

$$L''_{NS}(\varphi^*) (\widehat{\varphi}_{NS} - \varphi^0) = -L'_{NS}(\varphi^0).$$

Utilisant le Lemme 3.2.3 et la continuité de  $L''_{NS}(\varphi)$ , nous obtenons

$$(\Delta_0 + o(1)) (\widehat{\varphi}_{NS} - \varphi^0) = -\frac{1}{N} L'_{NS}(\varphi^0) \text{ p.s.}$$

On peut voir de (3.15) que  $l'_{s+S\tau}(\varphi^0)$  est une suite stationnaire de différences de martingales, nous utilisons un théorème central limite de martingale (Hall et Heyde, 1980, Théorème 3.2, page 58) pour obtenir (3.9).

Avant donner la preuve du Théorème 3.1.2, nous avons également besoin du lemme suivant.

**Lemme 3.2.5** *Sous les hypothèses A1-A4, nous avons*

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} L_{NS}(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{N}} \widetilde{L}_{NS}(\varphi) \right| \xrightarrow{p.s} 0, \quad (3.20)$$

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} L'_{NS}(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{N}} \widetilde{L}'_{NS}(\varphi) \right| \xrightarrow{p.s} 0, \quad (3.21)$$

$$\sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} L''_{NS}(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{N}} \widetilde{L}''_{NS}(\varphi) \right| \xrightarrow{p.s} 0. \quad (3.22)$$

**Preuve.** D'après le théorème de la valeur moyenne, on peut trouver  $\xi$  entre  $h_{s+S\tau}^\delta(\varphi)$  et  $\widetilde{h}_{s+S\tau}^\delta(\varphi)$  tel que

$$h_{s+S\tau}(\varphi) - \widetilde{h}_{s+S\tau}(\varphi) = (h_{s+S\tau}^\delta(\varphi))^{\frac{1}{\delta}} - (\widetilde{h}_{s+S\tau}^\delta(\varphi))^{\frac{1}{\delta}} = \frac{1}{\delta} \xi^{\frac{1}{\delta}-1} (h_{s+S\tau}^\delta(\varphi) - \widetilde{h}_{s+S\tau}^\delta(\varphi)). \quad (3.23)$$

Utilisant (3.14), (3.23) et Théorème 2.3.1 (ii), nous obtenons



$$\begin{aligned}
 \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{\sqrt{N}} L_{NS}(\varphi) - \frac{1}{\sqrt{N}} \tilde{L}_{NS}(\varphi) \right| &\leq \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \log(h_{s+S\tau}(\varphi)) - \log(\tilde{h}_{s+S\tau}(\varphi)) \right| \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{h_{s+S\tau}(\varphi)} - \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2}{\tilde{h}_{s+S\tau}(\varphi)} \right| \\
 &= \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{\delta} \log\left(1 + \frac{h_{s+S\tau}^\delta(\varphi) - \tilde{h}_{s+S\tau}^\delta(\varphi)}{\tilde{h}_{s+S\tau}^\delta(\varphi)}\right) \right| \\
 &+ \frac{1}{2\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{\varepsilon_{s+S\tau}^2 (h_{s+S\tau}(\varphi) - \tilde{h}_{s+S\tau}(\varphi))}{h_{s+S\tau}(\varphi) \tilde{h}_{s+S\tau}(\varphi)} \right| \\
 &\leq \frac{C}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sup_{\varphi \in \Phi} \left| h_{s+S\tau}^\delta(\varphi) - \tilde{h}_{s+S\tau}^\delta(\varphi) \right| \\
 &\leq \frac{C}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S \sum_{j=s+S\tau}^{\infty} r^j (|\varepsilon_{s+S\tau-j}|^{2\delta} + 1) \\
 &\leq \frac{C}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S r^{s+S\tau} + \frac{C}{\sqrt{N}} \sum_{\tau=0}^{N-1} \sum_{s=1}^S r^{s+S\tau} \sum_{j=0}^{\infty} r^j |\varepsilon_{-j}|^{2\delta} \\
 &\rightarrow 0 \text{ p.s.}
 \end{aligned}$$

De même, on peut prouver (3.21) et (3.22). ■

En utilisant Lemme 3.2.3 et Lemme 3.2.5, nous avons

$$\begin{aligned}
 \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{N} \tilde{L}_{NS}(\varphi) - L(\varphi) \right| &\leq \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{N} L_{NS}(\varphi) - \frac{1}{N} \tilde{L}_{NS}(\varphi) \right| + \sup_{\varphi \in \Phi} \left| \frac{1}{N} L_{NS}(\varphi) - L(\varphi) \right| \\
 &\rightarrow 0 \text{ p.s.}
 \end{aligned}$$

De façon similaire à (3.8), nous pouvons montrer que  $\tilde{\varphi}_{NS} \rightarrow \varphi^0$  p.s.

Par le théorème de la valeur moyenne, il existe un  $\xi$  entre  $\hat{\varphi}_{NS}$  et  $\tilde{\varphi}_{NS}$ , tel que

$$\frac{1}{\sqrt{N}} L'_{NS}(\hat{\varphi}_{NS}) - \frac{1}{\sqrt{N}} L'_{NS}(\tilde{\varphi}_{NS}) = \frac{1}{\sqrt{N}} L''_{NS}(\xi)(\hat{\varphi}_{NS} - \tilde{\varphi}_{NS}) \text{ p.s.}$$

Utilisant Lemme 3.2.3 et la continuité de  $L''_{NS}(\varphi)$ , en imitant la preuve du Théorème 3.1.1, nous obtenons (3.11).

### 3.3 Simulation

Dans cette section, nous menons une étude de simulation afin de montrer, pour  $S = 5$ ,  $p = q = 1$  et  $\delta^0 = 0.5$ , la performance de l'estimateur  $QMV$  du vecteur paramètre  $\varphi := (\delta, \phi'_1, \dots, \phi'_5)'$  où  $\phi'_s := (\omega_s, \gamma_{s,1}^+, \gamma_{s,1}^-, \beta_{s,1})$ ,  $s = 1, \dots, 5$ .

Comme dans la pratique, nous ne pouvons garantir que la distribution du bruit blanc est standard (symétrique, centré et normalisé), nous examinons la précision et la robustesse du  $QMV$  lorsque la distribution sous-jacente de  $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est une gaussienne standard, la loi d'un mélange gaussien ( $0.1 \times N(-2, 1.5) + 0.9 \times N(0, 1)$ ) et la loi de Student 5 *ddl* ( $t_5$ ). Le vrai vecteur de paramètres  $\varphi^0$  est donné dans le tableau 1 et leurs estimations  $\widehat{\varphi}$  sont présentées dans les tableaux 2 à 5 pour 1000 répétitions, où  $\widehat{\varphi}_i = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \widehat{\varphi}_i^{(k)}$ ,  $\widehat{\varphi}_i^{(k)}$  représente la  $i$ -ème composante estimée du vecteur de paramètres  $\varphi$  pour la  $k$ -ème réplication. Les erreurs absolues moyennes pour chaque paramètre  $AAE_{1,i} = \frac{1}{1000} \sum_{k=1}^{1000} \left| \widehat{\varphi}_i^{(k)} - \varphi_i^0 \right|$ ,  $i = 1, \dots, 21$  sont données sous les coefficients estimés pour les longueurs des échantillons  $NS = 1500$  et  $NS = 5000$ . Le calcul parallèle a permis de réduire considérablement le temps de calcul.

$s$	$\omega_s^0$	$\gamma_{s,1}^{+0}$	$\gamma_{s,1}^{-0}$	$\beta_{s,1}^0$
1	0.1	0.1	0.6	0.1
2	0.3	0.4	0.2	0.5
3	0.36	0.3	0.35	0.25
4	0.25	0.25	0.14	0.3
5	0.4	0.15	0.5	0.4

Table 1. Les vraies valeurs des paramètres

	$N(0, 1)$		<i>Mixture</i>		<i>t5</i>	
$NS$	1500	5000	1500	5000	1500	5000
$\hat{\delta}$ <i>AAE</i>	0.5188 0.0975	0.5067 0.0493	0.5238 0.1104	0.5133 0.0612	0.5437 0.1764	0.5054 0.0774

Table 2. Estimation du paramètre d'asymétrie  $\delta$ .

$NS$	1500				5000			
$s$	$\hat{\omega}_s$	$\hat{\gamma}_{s,1}^+$	$\hat{\gamma}_{s,1}^-$	$\hat{\beta}_{s,1}$	$\hat{\omega}_s$	$\hat{\gamma}_{s,1}^+$	$\hat{\gamma}_{s,1}^-$	$\hat{\beta}_{s,1}$
1	0.0916 0.0507	0.0962 0.0302	0.5860 0.0567	0.1154 0.0633	0.0973 0.0312	0.0991 0.0160	0.5960 0.0300	0.1037 0.0394
2	0.2920 0.0467	0.3816 0.1182	0.1771 0.0869	0.5280 0.1311	0.2986 0.0244	0.3980 0.0681	0.1906 0.0476	0.5083 0.0674
3	0.3510 0.0708	0.2985 0.0804	0.3623 0.0907	0.2539 0.1204	0.3559 0.0380	0.3009 0.0438	0.3523 0.0462	0.2527 0.0650
4	0.2388 0.0801	0.2556 0.0658	0.1397 0.0571	0.3045 0.1313	0.2513 0.0461	0.2531 0.0330	0.1399 0.0294	0.2928 0.0716
5	0.4509 0.1021	0.1349 0.0764	0.4973 0.1223	0.3088 0.1816	0.4210 0.0601	0.1474 0.0426	0.5018 0.0700	0.3608 0.1065

Table 3. Estimation des paramètres du modèle *PPTGARCH*

quand  $\eta_t \sim N(0, 1)$ .

$NS$	1500				5000			
$s$	$\hat{\omega}_s$	$\hat{\gamma}_{s,1}^+$	$\hat{\gamma}_{s,1}^-$	$\hat{\beta}_{s,1}$	$\hat{\omega}_s$	$\hat{\gamma}_{s,1}^+$	$\hat{\gamma}_{s,1}^-$	$\hat{\beta}_{s,1}$
1	0.1213 0.0665	0.1130 0.0414	0.6899 0.1019	0.1121 0.0600	0.1206 0.0444	0.1149 0.0288	0.7052 0.1061	0.1070 0.03985
2	0.3370 0.0639	0.3950 0.1211	0.1646 0.0790	0.6140 0.1583	0.3451 0.0507	0.4303 0.0849	0.1769 0.0503	0.5941 0.1104
3	0.4099 0.1065	0.3486 0.1048	0.4222 0.1105	0.2920 0.1253	0.4152 0.0762	0.3640 0.0803	0.4294 0.0884	0.2848 0.0808
4	0.2315 0.0936	0.3220 0.1097	0.1718 0.0634	0.3775 0.1462	0.2350 0.0576	0.3265 0.0856	0.1794 0.0495	0.3728 0.1010
5	0.6137 0.2177	0.1126 0.0848	0.5729 0.1310	0.2639 0.1719	0.5875 0.1878	0.1097 0.0631	0.5897 0.1094	0.3019 0.1145

Table 4. Estimation des paramètres du modèle *PPTGARCH*

quand  $\eta_t \sim 0.1 \times N(-2, 1.5) + 0.9 \times N(0, 1)$ .

$NS$	1500				5000			
$s$	$\hat{\omega}_s$	$\hat{\gamma}_{s,1}^+$	$\hat{\gamma}_{s,1}^-$	$\hat{\beta}_{s,1}$	$\hat{\omega}_s$	$\hat{\gamma}_{s,1}^+$	$\hat{\gamma}_{s,1}^-$	$\hat{\beta}_{s,1}$
1	0.1427 0.0877	0.1203 0.0528	0.6886 0.1182	0.1068 0.0734	0.1331 0.0598	0.1214 0.0333	0.7115 0.1145	0.1092 0.0507
2	0.3294 0.0848	0.3815 0.1424	0.1337 0.1100	0.7044 0.2538	0.3442 0.0592	0.4288 0.0897	0.1467 0.0746	0.6548 0.1657
3	0.4115 0.1427	0.3509 0.1163	0.4426 0.1538	0.3048 0.1721	0.4226 0.0999	0.3677 0.0860	0.4429 0.1084	0.3012 0.1070
4	0.2260 0.1245	0.3359 0.1299	0.1734 0.0864	0.3918 0.1872	0.2283 0.0792	0.3410 0.1008	0.1848 0.0626	0.3966 0.1281
5	0.6591 0.2666	0.1340 0.0887	0.5597 0.1526	0.2412 0.2116	0.6347 0.2350	0.1309 0.0591	0.5926 0.1285	0.2712 0.1427

Table 5 : Estimation des paramètres du modèle  $PPTGARCH$  quand  $\eta_t \sim t5$ .

Le  $MV$  standard a produit de bonnes estimations de paramètres qui convergent à la fois pour les distributions sous-jacentes symétriques et asymétriques et même en présence de queues lourdes. Il est à noter que Hamadeh et Zakoïan (2011) ont mentionné que le paramètre d'asymétrie  $\delta$  est difficile à identifier dans la pratique. Le tableau 2 montre que  $\delta$  est bien estimé même dans les cas de mélange de loi gaussiennes et la loi de Student.

Les box-plots de  $AAE_2 = \frac{1}{21} \sum_{i=1}^{21} \left| \hat{\varphi}_i^{(k)} - \varphi_i^0 \right|$  sont présentés sur la Figure 1. Ils montrent clairement que l' $AAE_2$  diminue lorsque la taille de l'échantillon augmente. Bien que le mélange gaussien ne soit ni centré ni normalisé, les box-plots pour les deux longueurs d'échantillons montrent de bonnes performances et se comportent légèrement mieux que pour  $t5$ . Les Figures 2 à 4 montrent les distributions d'échantillonnage de tous les estimateurs de paramètres. On peut noter que ces distributions d'échantillonnage sont étroitement concentrées autour des vraies valeurs et que plus la taille de la série est grande, plus les distributions d'échantillonnage seront concentrées (la plage de valeurs dans l'axe des X se rétrécit et s'élargit dans l'axe des Y).

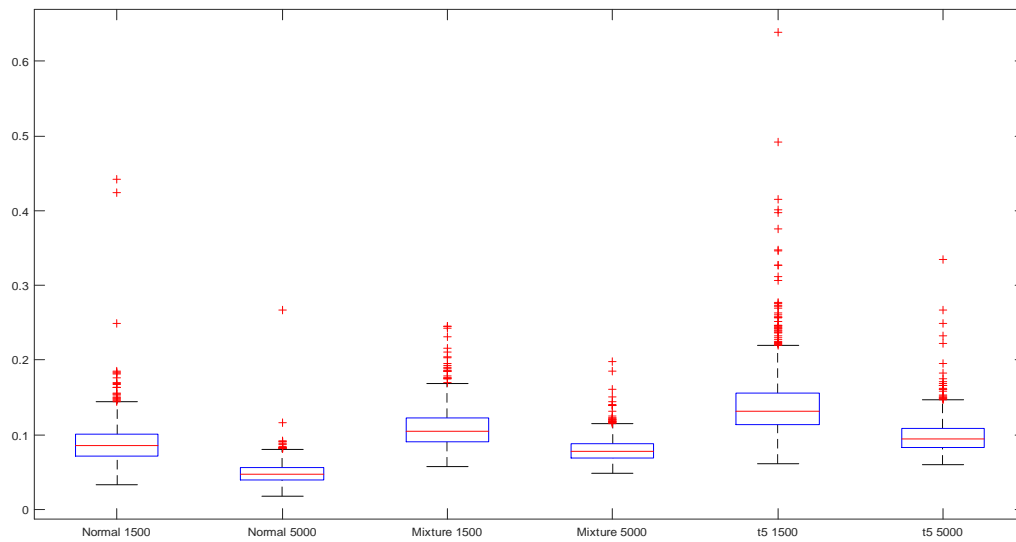


Figure 1. Box-plots des AAE pour  $\mathcal{N}(0, 1)$ , le mélange gaussien  $0.1 \times \mathcal{N}(-2, 1.5) + 0.9 \times \mathcal{N}(0, 1)$  et  $t_5$

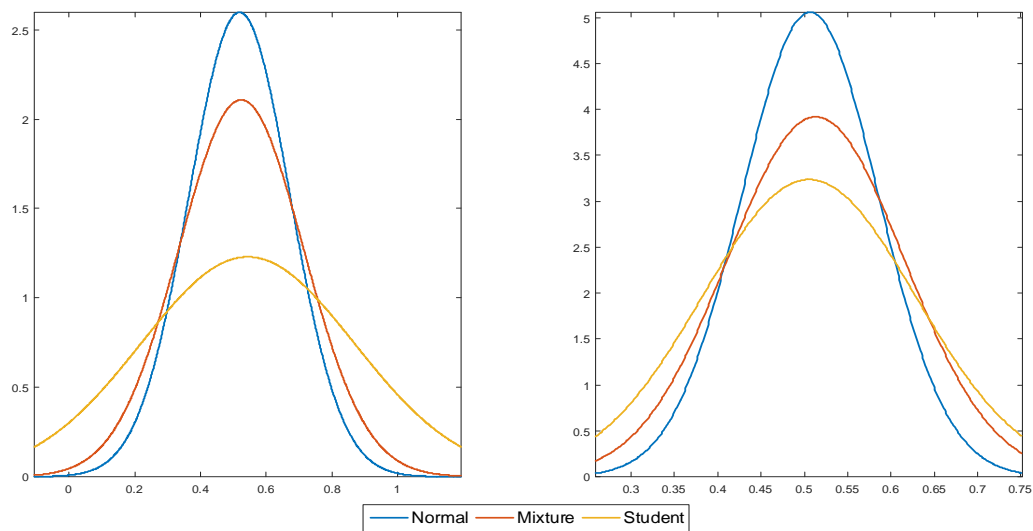


Figure 2. Distributions de  $\hat{\delta}$  pour  $NS = 1500$  (gauche) et  $NS = 5000$  (droite).

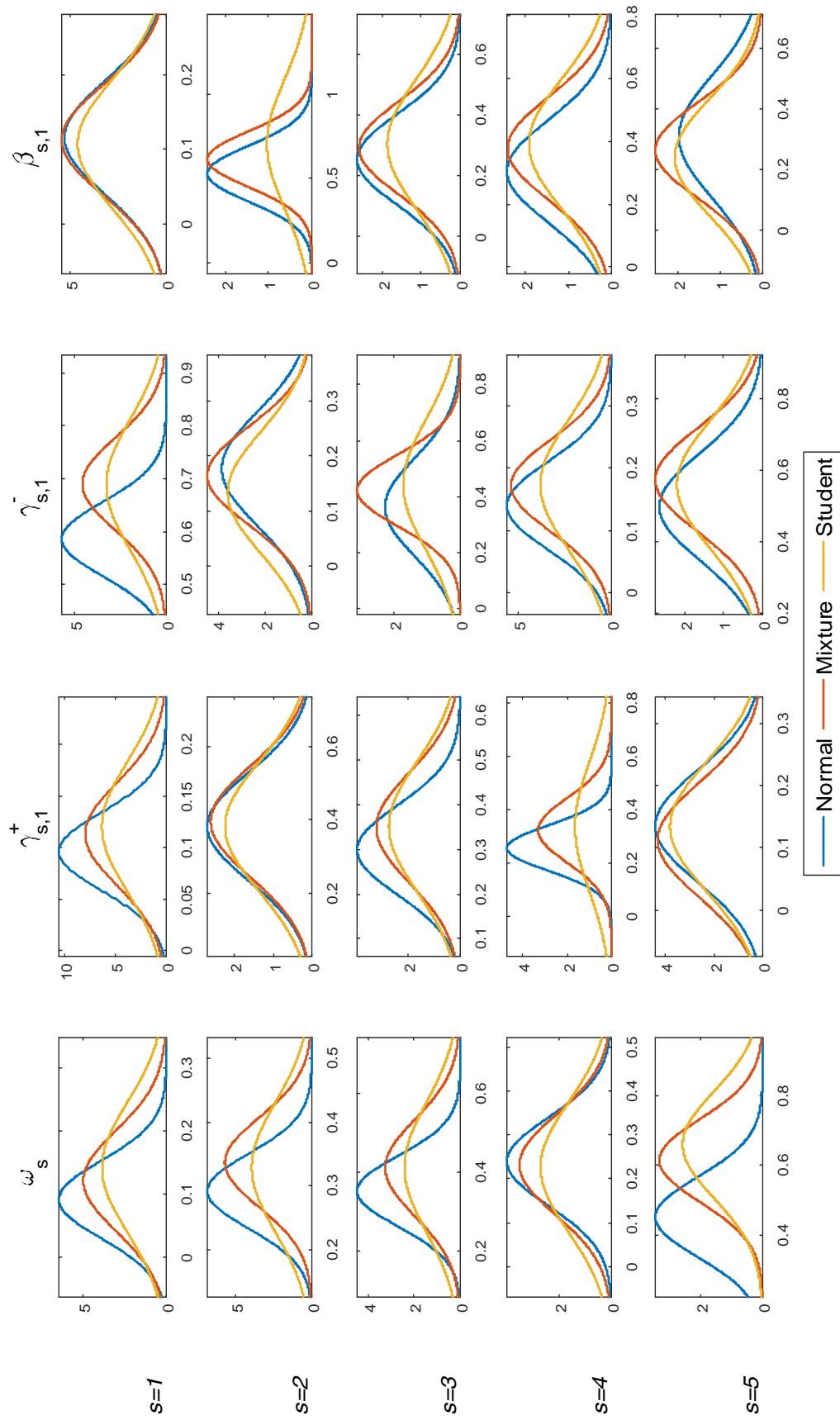


Figure 3. Distributions de  $\hat{\omega}_s, \hat{\gamma}_{s,1}^+, \hat{\gamma}_{s,1}^-$  et  $\hat{\beta}_{s,1}, s = 1, \dots, 5$  pour  $NS = 1500$

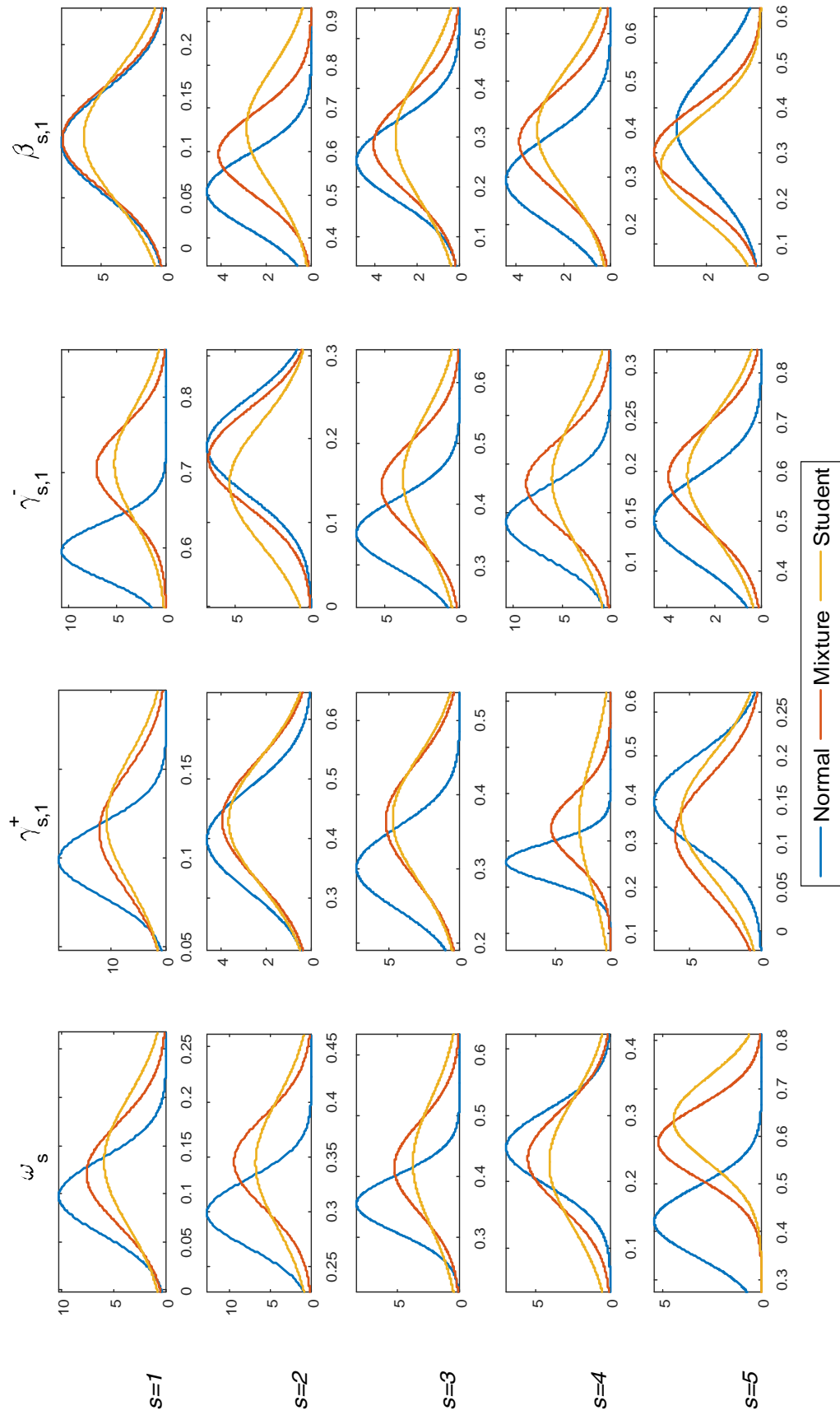


Figure 4. Distributions de  $\hat{\omega}_s$ ,  $\hat{\gamma}_{s,1}^+$ ,  $\hat{\gamma}_{s,1}^-$  et  $\hat{\beta}_{s,1}$ ,  $s = 1, \dots, 5$  pour  $NS = 5000$ .

---

## Conclusion Générale

Nous avons proposé, dans ce travail, la classe des modèles *GARCH* en puissance périodiques et à seuil. Il s'agit d'une classe de modèles très flexibles susceptibles de capturer à la fois le regroupement de volatilité, l'effet de levier et la périodicité. Le premier volet a consisté en l'obtention de conditions assurant l'existence d'une solution périodiquement strictement stationnaire, l'existence des moments d'ordres supérieurs fractionnaires ainsi que la propriété d'ergodicité géométrique. Il est bien connu que cette propriété implique celle de  $\beta$ -mélange qui est indispensable pour établir les propriétés statistiques asymptotiques des estimateurs des paramètres du modèle. L'ergodicité géométrique nécessite, en plus de l'obtention de la condition de Foster-Lyapounov, celle de l'irréductibilité de la chaîne de Markov sous-jacente qui est un problème sérieux en raison de la structure complexe du modèle considéré. La propriété d'additivité dénombrable uniforme a été suffisante pour arriver à conclure à l'existence d'une mesure de probabilité invariante unique pour la chaîne de Markov. Le second volet concerne d'une part l'estimation de cette classe de modèle et l'obtention des propriétés asymptotiques des estimateurs des paramètres. D'autre part, la qualité de ces estimateurs a été confirmée grâce à une étude de simulation intensive. Notons que ce travail ouvre la voie à des travaux



futurs que nous pouvons énumérer comme suit :

- Extension au processus multivarié
- Extension à des modèles qui contiennent une moyenne conditionnelle et des

seuils multiples

- Détermination de l'ordre d'un modèle PPTGARCH
- Considération de processus avec buffer
- Etude semi-paramétrique du modèle PPTGARCH
- Extension à une puissance aléatoire dépendant des régimes
- Extension à une puissance périodique

# Appendices

---

---

# ANNEXE A

---

## Stabilité des chaînes de Markov

De nombreux modèles de séries chronologiques acceptent une représentation markovienne et de là, les résultats connus sur les chaînes de Markov à espace d'états continu peuvent être appliqués pour l'étude de ces modèles. Une approche du problème de la stationnarité figure dans les travaux de Tweedie (1974, 1975, 1983, 1988) et dans l'ouvrage de Meyn et Tweedie (1993). Cette approche est, par exemple, utilisée lorsque la spécification du modèle comporte des effets de seuils excluant l'existence d'une représentation linéaire.

### A.1 Noyau de transition et définition d'une chaîne de Markov

La définition suivante introduit la notion de noyau de transition sur un ensemble quelconque  $\mathcal{X}$  muni d'une tribu  $\mathcal{B}$ .

**Définition A.1.1** *On appelle noyau de transition toute famille  $P = \{P(x, B), x \in$*

$\mathcal{X}, B \in \mathcal{B}\}$  telle que :

1. pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,  $x \longrightarrow P(x, B)$  est une fonction mesurable de  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  dans  $([0, 1], \mathcal{B}([0, 1]))$ ;
2. pour tout  $x \in \mathcal{X}$ ,  $P(x, \cdot)$  est une mesure de probabilité sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ .

Les  $P(x, B)$  sont appelées probabilités de transition (de  $x$  vers  $B$ ).

Etant donnée une mesure de probabilité initiale  $\mu$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ , la définition d'une chaîne de Markov homogène  $(X_n)$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  repose sur ses distributions fini-dimensionnelles. Pour tout entier  $n$  et tout  $(n + 1)$ -uplet  $(B_0, \dots, B_n)$  de parties de  $\mathcal{B}$ , on pose :

$$P_\mu [X_0 \in B_0, \dots, X_n \in B_n] = \int_{x_0 \in B_0} \dots \int_{x_{n-1} \in B_{n-1}} \mu(dx_0) P(x_0, dx_1) \dots P(x_{n-1}, B_n) \quad (\text{A.1})$$

pour les passages des lois fini-dimensionnelles aux probabilités d'événements impliquant un nombre quelconque de variable  $X_n$ , le théorème de Kolmogorov impose des conditions à l'espace d'état : il s'applique si  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  est : *i*)  $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}(\mathbb{R}^d))$ , ou *ii*) un espace dénombrable muni de la tribu de toutes ses parties, ou *iii*) un espace métrique complet possédant une base dénombrable d'ouverts muni de sa tribu borélienne. Nous nous placerons toujours dans l'un de ces cas par la suite. A condition de choisir comme espace  $\Omega$  l'espace  $\mathcal{X}^{\mathbb{N}}$ , muni de la tribu produit  $\mathcal{B}^{\otimes \mathbb{N}}$ , on peut construire un processus  $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et une probabilité  $P_\mu$  sur  $\mathcal{B}^{\mathbb{N}}$  telle que (A.1) soit vraie et pour tout  $B \in \mathcal{B}^{\mathbb{N}}, P_\mu(B)$  soit la probabilité de l'événement  $[X \in B]$ . Remarquons en particulier que, si  $\{x\} \in B$  et  $\mu(\{x\}) \neq 0$ ,  $P(x, B) = P_\mu[X_1 \in B \mid X_0 = x]$ .

**Définition A.1.2** *le processus  $X = (X_n)$  dont les lois fini-dimensionnelles satisfont (A.1) est appelé chaîne de Markov homogène de noyau de transition  $P$  et de mesure initiale  $\mu$ .*

Etant donnés deux noyaux de transition  $P = \{P(x, B)\}$  et  $Q = \{Q(x, B)\}$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ , il est utile d'introduire leur produit  $PQ = \{[PQ](x, B)\}$  défini par :

$$[PQ](x, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P(x, dy)Q(y, B), \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}$$

On vérifie facilement que cette égalité définit un nouveau noyau de transition sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ . En particulier, on notera  $P^n$  le noyau de transition obtenu en effectuant  $(n - 1)$  produits de  $P$  avec lui même. On a pour  $n \geq 1$  :  $\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}$ ,  $P^n(x, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P(x, dy)P^{n-1}(y, B)$ , en prenant pour  $P^0(y, B)$  la mesure de Dirac en  $y$ . On peut vérifier que  $P^n(x, B)$  s'interprète comme la probabilité de l'évènement  $X_n \in B$  conditionnellement à  $X_0 = x$ .

Une généralisation utile est la relation de Chapman-Kolmogorov :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall m, 0 \leq m \leq n, \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}$$

$$P^n(x, B) = \int_{y \in \mathcal{X}} P^m(x, dy)P^{n-m}(y, B)$$

On montre cette relation à partir de (A.1) en choisissant  $B_i = \mathcal{X}$  pour  $1 \leq i \leq n - 1$  et  $B_0 = \{x\}$ . Cette équation admet une interprétation intéressante : pour atteindre  $B$  en  $n$  étapes, partant de  $x$ , la chaîne doit nécessairement passer par une valeur  $y$  en  $m$  étapes, puis tout se passe comme si la chaîne redémarrait de  $y$ , pour atteindre  $B$  en  $n - m$  étapes. Les valeurs prises antérieurement en  $y$  n'ont donc plus d'importance pour ce qui est postérieur à l'étape  $m$ .

## A.2 Irréductibilité et apériodicité

L'irréductibilité traduit le fait que, partant de n'importe quel point, la chaîne peut atteindre toute partie de mesure positive de l'espace d'état, pour une mesure appropriée. Au préalable, nous définissons pour tout  $B \in \mathcal{B}$ ,

$$\text{- le temps de séjour dans } B : \eta_B = \sum_{n=1}^{\infty} 1_{X_n \in B}$$

où  $1_A$  désigne la variable indicatrice d'un événement  $A$ ;

- le temps de premier passage par  $B$  :  $\tau_B = \min\{n \geq 1, X_n \in B\}$ .

La durée moyenne de séjour dans  $B$  partant de  $x \in \mathcal{X}$  s'obtient par :

$$E[\eta_B \mid X_0 = x] = \sum_{n=1}^{\infty} P^n(x, B) = U(x, B)$$

La famille  $\{U(x, B)\}$  a des propriétés similaires à celles d'un noyau de transition mais les  $U(x, \cdot)$  ne sont pas des probabilités. On peut également utiliser la probabilité de premier passage par  $B$  partant de  $x$  :

$$L(x, B) = P(\tau_B < \infty \mid X_0 = x)$$

**Définition A.2.1** ( $\phi$ -irréductibilité) *On dit que la chaîne  $X = (X_n)$  est  $\phi$ -irréductible s'il existe une mesure  $\phi$  sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  telle que,  $\forall B \in \mathcal{B}$  avec  $\phi(B) > 0$ , nous ayons  $L(x, B) > 0$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ .*

les formulations alternatives suivantes sont équivalentes à la  $\phi$ -irréductibilité:

- (i)  $\forall x \in \mathcal{X}$ , quand  $\phi(B) > 0$ ,  $U(x, B) > 0$ ;
- (ii)  $\forall x \in \mathcal{X}$ , quand  $\phi(B) > 0$ , il existe  $n > 0$ , telle que  $P^n(x, B) > 0$ .

Définissons maintenant deux types d'ensembles d'importance majeure : les "small set" et "petite set" qui ont un comportement analogue à celui des atomes.

**Définition A.2.2 (Small sets)** *Un ensemble  $C \in \mathcal{B}$ , est dit small set s'il existe  $m > 0$ , et une mesure  $\nu_m$  non triviale sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$  telle que*

$$\forall x \in C, \forall B \in \mathcal{B}, P^m(x, B) \geq \nu_m(B)$$

*et on dit que  $C$  est  $\nu_m$ -small.*

**Proposition A.2.1** *Si  $C \in \mathcal{B}$  est  $\nu_n$ -small, et pour tout  $x \in D$  nous avons  $P^m(x, C) \geq \delta$ , ( $\delta > 0$ ), alors  $D$  est  $\nu_{n+m}$ -small, où  $\nu_{n+m}$  est un multiple de  $\nu_n$ .*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Proposition 5.2.4]

L'existence des small sets nous permet de montrer, même sur un espace quelconque, que nous avons une rupture périodique finie entre des ensembles cycliques pour la chaîne  $\phi$ -irréductible.

Supposons que  $C$  est un ensemble  $\nu_M$ -small, et que  $\nu_M(C) > 0$ , nous utilisons  $C$  et  $\nu_M$  pour définir un cycle d'une chaîne de Markov  $\phi$ -irréductible à espace d'état quelconque. Pour simplifier la notation, on enlève l'indice de  $\nu$ , alors on a  $\forall x \in C, P^M(x, \cdot) \geq \nu(\cdot)$ , et  $\nu(C) > 0$ , ainsi, quand la chaîne démarre de  $C$ , elle y revient avec une probabilité positive à l'instant  $M$ .

Soit

$$E_C = \{n \geq 1 : C \text{ est } \nu_n\text{-small, avec } \nu_n = \delta_n \nu, \text{ pour un } \delta_n > 0\}$$

l'ensemble des entiers  $n$  tels que  $C$  est  $\nu_n$ -small pour une mesure proportionnelle à  $\nu$ . Notons que, si pour un ensemble  $B \subseteq C$ ,  $n, m \in E_C$  on a

$$P^{n+m}(x, B) \geq \int_C P^m(x, dy) P^n(y, B) \geq [\delta_m \delta_n \nu(C)] \nu(B), \quad x \in C;$$

alors  $E_C$  est fermé par addition. D'où il existe une "période" naturelle pour l'ensemble  $C$ , donnée par le *p.g.c.d* de  $E_C$ , cette valeur est en effet, propriété de toute la chaîne, et elle ne dépend pas du choix de  $C$ .

**Définition A.2.3** *Soit  $X$  une chaîne de Markov  $\phi$ -irréductible. Le plus grand entier  $d$  pour lequel  $X$  soit  $d$ -cyclique est appelé période de la chaîne. Quand  $d = 1$ , la chaîne est dite apériodique. S'il existe un ensemble  $B$ ,  $\nu_1$ -small avec  $\nu_1(B) > 0$ , la chaîne est dite fortement apériodique.*

Les small sets existent toujours dans le cas  $\phi$ -irréductible, et ils nous fournissent la plupart des propriétés demandées.

Introduisons maintenant une généralisation des small sets, les petite sets, qui ont des propriétés plus manipulables, spécialement dans une analyse topologique.

**Définition A.2.4 (Petite sets)** On appelle  $\nu_a$ -petite set tout  $C \in \mathcal{B}$  tel que :

$$K_a(x, B) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n P^n(x, B) \geq \nu_a(B), \quad \forall x \in C, \forall B \in \mathcal{B}$$

où  $a = (a_n)$  une suite de constantes positives de somme égale à 1 et  $\nu_a$  est une mesure non triviale sur  $\mathcal{B}$ .

Nous pouvons remarquer de cette définition qu'un small set est un petite set si  $a$  prend la valeur  $\delta_m$  pour un certain  $m$ . D'où, la propriété d'être small set est plus forte que la propriété d'être petite set.

**Remarque A.2.1** Soit  $X$  une chaîne de Markov  $\phi$ -irréductible.

(ii) L'union de deux petite (resp. small) sets est également un petite (resp. small) set.

(iii) Il existe une suite croissante  $\{C_i\}$  de  $\nu_c$ -petite sets, tel que  $\mathcal{X} = \bigcup_{i=1}^{\infty} C_i$ .

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Proposition 5.5.5]

### A.3 Chaîne récurrente, chaîne transitoire

Lorsque  $\mathcal{X}$  est dénombrable et la chaîne  $(X_n)$  irréductible, un état est dit transitoire si le temps de séjour moyen dans cet état, partant de ce même état, est fini et il est dit récurrent dans le cas contraire. De plus, tous les états sont de même nature et la chaîne peut être qualifiée de récurrente ou transitoire.

On retrouve la même dichotomie pour un espace d'états quelconque, mais les définitions sont plus délicates. La classification repose sur le (pseudo) noyau de transition  $\{U(x, B)\}$ ,  $U(x, B)$  représentant le temps de séjour moyen dans  $B$  partant de  $x$ .



**Définition A.3.1** *L'ensemble  $B \in \mathcal{B}$  est dit*

- (i) *récurrent si  $U(x, B) = +\infty, \forall x \in B$ ;*
- (ii) *uniformément transitoire si  $\exists M < \infty$  t.q  $U(x, B) < M, \forall x \in B$ ;*
- (iii) *transitoire s'il existe une famille dénombrable  $(B_n)$  d'ensembles uniformément transitoires telle que  $B = \cup_n B_n$ .*

Avec cette définition, un ensemble récurrent peut également être transitoire. Ainsi  $\mathcal{X}$  est toujours récurrent et s'il est dénombrable, on peut évidemment l'écrire comme la réunion de tous les singletons qui sont uniformément transitoires et  $\mathcal{X}$  est transitoire.

. Le résultat suivant fournit une première dichotomie de l'ensemble des chaînes irréductibles.

**Définition A.3.2** *On note  $R$  la classe des chaîne récurrentes, définies par :*

$$(X_n) \in R \iff U(x, B) = +\infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}^+$$

*On note  $T$  la classe des chaînes transitoires, définie par :*

$$(X_n) \in T \iff \exists (B_j)_j, U(x, B_j) \leq M_j < \infty, \forall x \in \mathcal{X}.$$

**Théorème A.3.1** *Si  $(X_n)$  est une chaîne  $\phi$ -irréductible, elle est soit transitoire soit récurrente.*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 8.3.4]

Une notion de récurrence un peu plus forte est celle de récurrence au sens de Harris (Harris-récurrence) fondée sur le calcul de la probabilité que le temps de séjour soit infini.

**Définition A.3.3** *Un ensemble  $B$  est dit Harris-récurrent si*

$$Q(x, B) = P(\eta_B = +\infty \mid X_0 = x) = 1, \quad x \in B.$$

*Une chaîne  $X$  est dite Harris-récurrente si elle est  $\phi$ -irréductible et chaque ensemble dans  $B^+$  est Harris-récurrent.*

Il est clair de cette définition que si un ensemble est Harris-récurrent, alors il est récurrent. En effet, dans la formulation ci-dessus le renforcement de la récurrence vers la récurrence au sens de Harris est explicite car nous passons d'un nombre de visite espéré d'être infini vers l'infinité des visites pour un ensemble presque sûrement.

De manière équivalente, nous pouvons définir une condition pour vérifier si un ensemble est Harris-récurrent, basée seulement sur la probabilité du premier retour  $L(x, B)$ .

**Proposition A.3.1** *On suppose que pour un ensemble  $B \in \mathcal{B}$  on a  $L(x, B) \equiv 1$ ,  $x \in B$ . Alors  $Q(x, B) = L(x, B)$  pour tout  $x \in \mathcal{X}$ , et en particulier  $B$  est Harris récurrent.*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Proposition 9.1.1]

Le théorème suivant montre l'importance des petites sets.

**Théorème A.3.2** *Si  $X$  est une chaîne  $\phi$ -irréductible. Alors  $X$  est Harris récurrente s'il existe un petite set  $C \in \mathcal{B}$  tel que,  $\forall x \in \mathcal{X}$ ,  $L(x, C) \equiv 1$ .*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 8.3.4]

## A.4 Existence des mesures invariantes

Afin d'obtenir des propriétés de stabilité plus fortes, on est amené à pousser plus loin la classification des chaînes récurrentes. Pour plusieurs raisons, la forme de stabilité la plus forte possible que nous pouvons demander en présence d'une variation persistante est que la distribution de  $X_n$  ne change pas avec  $n$ . Si cela est le cas, alors, de par la propriété de Markov, les distributions finies dimensionnelles sont invariantes par translation dans le temps. Ceci nous amène à introduire la notion de mesure invariante.

**Définition A.4.1** Une mesure  $\sigma$ -finie  $\pi$  sur  $\mathcal{B}$  tel que

$$\pi(B) = \int_{\mathcal{X}} \pi(dx)P(x, B), \quad B \in \mathcal{B} \quad [\text{resp.} \quad \pi(B) \geq \int_{\mathcal{X}} \pi(dx)P(x, B)]$$

est dite *invariante* [resp. *sous-invariante*].

Si une chaîne  $X$ ,  $\phi$ -irréductible admet une mesure de probabilité invariante, alors  $X$  est dite *positive*, sinon elle est dite *nulle*.

Pour une chaîne récurrente, une mesure invariante peut ne pas exister. Lorsqu'une telle mesure existe et est finie, on peut toujours la normaliser pour obtenir une mesure de probabilité invariante. Remarquons qu'étant donnée une mesure de probabilité initiale  $\mu$ , on a

$$\int \mu(dx)P(x, B) = P_{\mu}[X_1 \in B].$$

Donc si  $\mu$  est invariante :

$$\begin{aligned}
 \mu(B) &= P_\mu[X_1 \in B] \\
 &= \int [\int \mu(dy)P(y, dx)]P(x, B) \\
 &= \int \mu(dy) \int P(y, dx)P(x, B) \\
 &= \int \mu(dy)P^2(y, B) \\
 &= P_\mu[X_2 \in B]
 \end{aligned}$$

Donc pour tout  $n$ ,  $P_\mu[X_n \in B] = \mu(B)$  ( $\forall B \in \mathcal{B}$ ). En utilisant la propriété de Markov, cela équivaut à la stricte stationnarité de la chaîne : la loi du processus  $(X_n, X_{n+1}, \dots, X_{n+k})$  est indépendante de  $n$ , pour tout entier  $k$ .

Inversement, si  $(X_n)$  est strictement stationnaire,  $X_1$  et  $X_0$  ont la même loi, ce qui s'écrit  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $\mu(B) = \int \mu(dx)P(x, B)$ , où  $\mu$  désigne la probabilité initiale. On a donc le résultat suivant.

**Propriété A.4.1** *La chaîne  $(X_n)$  est strictement stationnaire si et seulement si sa loi de probabilité initiale est invariante.*

Cette propriété rend cruciale la recherche de mesures invariantes de masse finie. Une autre raison de l'importance des mesures de probabilité invariantes est liée au comportement ergodique (ou de long terme) de la chaîne. Supposons en effet qu'il existe une mesure de probabilité limite  $\pi_\mu$ , définie par :  $\forall B \in \mathcal{B}$ ,  $P_\mu[X_n \in B] \longrightarrow \pi_\mu(B)$  quand  $n \longrightarrow \infty$ .

Alors

$$\begin{aligned}
 \pi_\mu(B) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) P^n(x, B) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) \int P^{n-1}(x, dy) P(y, B) \\
 &= \int P(y, B) \lim_{n \rightarrow \infty} \int \mu(dx) P^{n-1}(x, dy) \\
 &= \int P(y, B) \pi_\mu(dy)
 \end{aligned}$$

Donc  $\pi_\mu$  est invariante. En particulier, s'il existe une unique mesure de probabilité invariante, la probabilité limite sera indépendante de  $\mu$ . On a le résultat suivant :

**Théorème A.4.1** *Si  $(X_n)$  est récurrente, elle admet une unique mesure sous-invariante  $\pi$  (à une constante multiplicative près) et cette mesure est invariante.*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorèmes 10.4.4 et 10.4.9]

## A.5 Ergodicité

Jusqu'ici nous avons caractérisé la stabilité d'une chaîne en terme de récurrence. Une autre façon d'envisager la stabilité d'une chaîne consiste à étudier si elle converge vers un régime stationnaire quelque soit son point de départ. Nous avons déjà vu que l'existence d'une mesure de probabilité invariante était une condition nécessaire pour qu'une telle convergence ait lieu. Nous allons voir que pour les chaînes  $\phi$ -irréductibles et positives récurrentes la propriété est vérifiée pour une notion forte de la convergence que nous allons préciser.

Rappelons que la norme en variation totale d'une mesure  $\mu$  est définie par  $\|\mu\| = \sup_{f:|f|\leq 1} \left| \int f d\mu \right| = \sup_{B \in \mathcal{B}} \mu(B) - \inf_{B \in \mathcal{B}} \mu(B)$ , on définit aussi la  $f$ -norme par  $\|\mu\|_f = \sup_{g:|g|\leq f} \left| \int g d\mu \right|$ .

**Théorème A.5.1** *Si  $X$  est une chaîne de Markov Harris-récurrente, positive et apériodique, alors pour toute mesure initiale  $\mu$*

$$\left\| \int \mu(dx) P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot) \right\| \longrightarrow 0, \quad n \longrightarrow \infty.$$

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorèmes 13.3.3]

En prenant pour  $\mu$  la masse de Dirac en  $x$ , un corollaire de ce théorème est que pour toute fonction  $f$  bornée et mesurable :

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} E[f(X_n) \mid X_0 = x] = \int f d\pi. \quad (\text{A.2})$$

En particulier, pour  $f = 1_B$ ,  $B \in \mathcal{B}$  :  $P^n(x, B) \longrightarrow \pi(B)$ ,  $\forall x \in \mathcal{X}$ . Les chaînes vérifiant les hypothèses du théorème sont dites *ergodiques*. Lorsque  $f$  n'est pas supposée bornée, on a le résultat suivant :

**Théorème A.5.2** *Soit  $X$  une chaîne de Markov Harris-récurrente, positive de mesure invariante  $\pi$ , fortement apériodique, de mesure d'irréductibilité  $\phi$ , et soit  $f : \mathcal{X} \longrightarrow [1, +\infty[$ . Alors*

$$(i) \text{ si } \int f d\pi = +\infty, \quad E[f(X_n) \mid X_0 = x] \longrightarrow +\infty, \quad n \longrightarrow +\infty$$

$$(ii) \text{ si } \int f d\pi < +\infty, \text{ alors pour tout } x \in A, \text{ où } A \text{ est absorbant et tel que } \phi(A^c) = 0,$$

on a

$$\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f \longrightarrow 0 \quad \text{quand} \quad n \longrightarrow +\infty.$$

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 14.3.3]

On obtient en particulier, cette fois-ci pour  $f$  non nécessairement bornée (mais sous des hypothèse un peu plus fortes)

$$\forall x \in A, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} E[f(X_n) \mid X_0 = x] = \int f d\pi. \quad (\text{A.3})$$

Si dans le théorème A.5.2, la condition (ii) est vraie pour tout  $x$ , la chaîne est dite *f-ergodique*. Il est parfois nécessaire de connaître la vitesse de convergence de  $\|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f$ . Sous les hypothèses du théorème précédent, nous dirons que la chaîne est *f-géométriquement ergodique* (ou plus simplement géométriquement ergodique si  $f \equiv 1$ ) s'il existe une constante  $r_f > 1$  telle que

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_f^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\|_f < \infty, \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

Nous donnerons dans la partie suivante un critère assurant une telle propriété.

**Remarque A.5.1** *L'ergodicité géométrique n'assure pas seulement l'existence d'une unique distribution stationnaire pour  $(X_n)$ , mais aussi elle assure que les marginales convergent en un temps géométrique vers la distribution stationnaire.*

Sans avoir besoin de l'irréductibilité, on peut donner des critères qui garantissent l'existence d'une mesure de probabilité invariante et la finitude de ses moments.

**Définition A.5.1** *Une chaîne telle que, pour tout ouvert  $B$ , la fonction  $P(\cdot, B)$  est semi-continue inférieurement est dite Fellerienne ou de Feller.*

**Remarque A.5.2** *Dire que la fonction  $P(\cdot, B)$  est continue pour tout  $B \in \mathcal{B}$  est une contrainte trop forte, par exemple pour les dynamiques avec effets de seuil. Rappelons qu'une fonction  $h$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{R}$  est dite semi-continue inférieurement si l'ensemble  $\{x : h(x) \leq c\}$  (resp.  $\{x : h(x) > c\}$ ) est fermé (resp. ouvert) pour toute constante  $c$*

**Théorème A.5.3** *Supposons que  $(X_n)$  est une chaîne de Feller.*

(i) *S'il existe pour un ensemble compact  $B \in \mathcal{B}$ , une fonction  $g$  positive et un  $\varepsilon > 0$  tels que*

$$\int_{B^c} P(x, dy)g(y) \leq g(x) - \varepsilon, \quad x \in B^c,$$

*alors, il existe une mesure invariante  $\sigma$ -finie  $\mu$  pour  $P$  avec  $0 < \mu(B) < \infty$ .*

(ii) De plus, si

$$\int_B \mu(dx) \left[ \int_{B^c} P(x, dy) g(y) \right] < \infty$$

alors,  $\mu$  est finie et  $\pi = \mu/\mu(\mathcal{X})$  est une mesure de probabilité invariante.

(iii) De plus, si

$$\int_{B^c} P(x, dy) g(y) \leq g(x) - f(x), \quad x \in B^c,$$

alors,  $\mu$  admet un  $f$ -moment fini, i.e.  $\int_{\mathcal{X}} \mu(dy) f(y) < \infty$ .

Notons que la condition (i) n'est qu'un cas particulier de (iii) quand  $f(x) = \varepsilon$ . Le théorème A.5.3 établit que pour un modèle de série chronologique qui admet une représentation Markovienne où  $(X_n)$  est la chaîne de Markov sous-jacente, il existe une solution strictement stationnaire, et la distribution stationnaire est  $\pi$  si les conditions (i) et (ii) sont vérifiées.

## A.6 Critères de classification

Pour des modèles particuliers, il n'est généralement pas facile de vérifier directement les propriétés de chaîne de Markov transitoire, récurrente ou admettant une loi de probabilité invariante. Il existe heureusement des critères s'exprimant simplement à partir des conditions sur les probabilités de transition en une étape. Ces contraintes sont de deux types : de continuité et de dérive (Drift) moyenne. Pour simplifier la présentation, nous supposons dans cette partie que l'espace d'état  $\mathcal{X}$  est égal à  $\mathbb{R}^d$ , muni de sa topologie usuelle, où  $d$  est un entier.

La condition suivante est dite de forte continuité : la fonction  $P(\cdot, B)$  est continue pour tout  $B \in \mathcal{B}$ . Cette contrainte se révèle trop forte, par exemple pour les dynamiques avec effets de seuil. Rappelons qu'une fonction  $h$  de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{R}$  est dite semi-continue inférieurement si l'ensemble  $\{x : h(x) \leq c\}$  (resp.  $\{x : h(x) > c\}$ ) est fermé (resp. ouvert) pour toute constante  $c$ . Une chaîne telle que, pour tout ouvert



$B$ , la fonction  $P(\cdot, B)$  est semi-continue inférieurement est dite *Fellerienne* ou de Feller. On a la définition suivante

**Définition A.6.1** *S'il existe une application  $T(\cdot, \cdot)$  telle que*

- (i)  $\forall x \in \mathcal{X}, \forall B \in \mathcal{B}, P(x, B) \geq T(x, B)$ ;
  - (ii)  $T(\cdot, B)$  est semi-continue inférieurement pour tout  $B$  dans  $\mathcal{B}$ ;
  - (iii)  $\forall x \in \mathcal{X}, T(x, \cdot)$  est une mesure non nulle sur  $(\mathcal{X}, \mathcal{B})$ .
- $(X_n)$  est appelée *T-chaîne*.

Une chaîne vérifiant la forte continuité est évidemment une  $T$ -chaîne. La condition (i) peut être remplacée par des conditions moins fortes, portant sur toutes les probabilités de transition, du type

(i)' Il existe une suite  $(a_n)$  de constantes positives de somme égale à 1 telle que

$$K_a(x, B) = \sum_{n \geq 1} a_n P^n(x, B) \geq T(x, B).$$

$T$  est appelée composante continue de  $K_a$ .

Ces contraintes de continuité ne sont pas nécessaires pour la stabilité, mais elles permettent d'obtenir des caractérisations en se limitant aux ensembles compacts.

**Théorème A.6.1** *Si  $(X_n)$  est une  $T$ -chaîne  $\phi$ -irréductible, les compacts sont des petite sets.*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorèmes 6.2.5]

L'autre type de condition porte sur l'opérateur de dérive  $\Delta$ . A toute fonction  $V : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{R}^+$ , intégrable par rapport aux mesures  $P(x, \cdot)$  ( $\forall x \in \mathcal{X}$ ), on associe

$$\Delta V(x) = \int P(x, dy)V(y) - V(x) = E[V(X_{n+1}) - V(X_n) \mid X_n = x]$$

cet opérateur calcule, pour tout point initial  $x$ , la valeur moyenne de la variation de  $V(x)$  en une étape.

**Théorème A.6.2** *Soit  $X$  une chaîne de Markov  $\phi$ -irréductible,  $V$  une fonction de  $\mathcal{X}$  dans  $\mathbb{R}^+$ , intégrable par rapport aux mesures  $P(x, \cdot)$  pour tout  $x$ , et  $C$  un compact. Si la fonction  $P(\cdot, B)$  est continue pour tout  $B \in \mathcal{B}$ , ou si  $X$  est une  $T$ -chaîne, avec  $\Delta V(x) \leq 0$ ,  $\forall x \in C^c$ , alors la chaîne  $X$  est récurrente.*

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 8.4.3]

En pratique, il s'agit de trouver une telle fonction  $V$  dite fonction test ou fonction de Lyapunov, ainsi qu'un compact  $C$  permettant de conclure. L'existence d'une loi de probabilité invariante peut être obtenue à partir du résultat suivant.

**Théorème A.6.3** *Sous les hypothèses du théorème A.6.2 et si*

$$\begin{aligned} \Delta V(x) &\leq -1, & \forall x \in C^c \\ \Delta V(x) &\leq M, & \forall x \in C \end{aligned}$$

où  $M$  est une constante, la chaîne  $(X_n)$  est récurrente positive.

Dans la première inégalité, la valeur -1 peut être remplacée par n'importe quelle constante strictement négative. Le critère suivant permet d'obtenir l'existence des moments de la probabilité invariante.

**Théorème A.6.4** *Soit  $(X_n)$  une chaîne de Markov récurrente positive de loi de probabilité invariante  $\pi$ . Soient  $V$ ,  $f$  et  $s$  des fonctions positives telles que*

$$\Delta V(x) \leq -f(x) + s(x), \quad \forall x \in \mathcal{X}.$$

$$\text{Alors } \int f d\pi \leq \int s d\pi.$$

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 14.3.7]

Si dans ce théorème, nous choisissons  $s(x) = b1_C(x)$ , où  $b$  est une constante positive et  $C \in \mathcal{B}$ , on obtient

$$\int f d\pi \leq b\pi(C) < +\infty.$$

**Théorème A.6.5** *Sous les hypothèses du théorème A.6.2, si  $(X_n)$  est apériodique et s'il existe une fonction  $V : \mathcal{X} \rightarrow [1, +\infty[$ , et des constantes  $\beta > 0$  et  $b < +\infty$  et un petite set  $C$ , on a pour tout  $x \in \mathcal{X}$*

$$\Delta V(x) \leq -\beta V(x) + b1_C(x), \quad (\text{A.4})$$

alors il existe  $r > 1$  tel que

$$\sum_{n \geq 0} r^n \|P^n - \pi\|_V < +\infty \quad (\text{A.5})$$

où  $\|P^n - \pi\|_V = \sup_{x \in \mathcal{X}} \frac{\|P^n(x, \cdot) - \pi\|_V}{V(x)}$ . La chaîne est dite  $V$ -uniformément ergodique.

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 16.1.2]

**Remarque A.6.1** (i) *Sous les hypothèse du théorème A.6.5, on a  $\int V d\pi < +\infty$ , donc  $E_\pi[V(X_n)] < +\infty$ , en utilisant le théorème A.6.4 avec  $s(x) = b1_C(x)$ .*

(ii) *Une conséquence immédiate de (A.5) est que*

$$\forall x \in \mathcal{X}, \quad \sum_{n \geq 0} r^n \|P^n(x, \cdot) - \pi(\cdot)\| < RV(x) \quad (\text{A.6})$$

pour  $R$  finie. La chaîne est donc géométriquement ergodique.

Il est parfois utile de disposer de critère ne reposant pas sur les probabilités de transition en une étape. Le résultat suivant montre comment adapter ce qui précède.

**Théorème A.6.6** *Sous les hypothèses du théorème A.6.5, et si on remplace la condition (A.4) par*

$$E[V(X_{n+m})|X_n = x] \leq (1 - \beta)V(x) + b\mathbf{1}_C(x),$$

*alors (A.6) est vérifiée. La chaîne est ainsi géométriquement ergodique.*

Ce résultat peut être étendu en faisant dépendre de l'état  $x$  l'entier  $m$  et le réel  $\beta$ .

[Voir [Meyn et Tweedie \(1993\)](#), Théorème 19.1.3]

---

---

## ANNEXE B

---

# Conditions pour l'additivité dénombrable uniforme

L'évaluation des conditions de dérive dans des modèles spécifiques est devenue un standard même si elle est parfois fastidieuse (voir par exemple [Tanikawa \(1999\)](#) et [Cline et Pu \(1999a, b, c\)](#)). Ici, nous fournissons quelques approches indiquant comment la condition clé supplémentaire d'additivité dénombrable uniforme peut être évaluée; et nous montrons également que la conditions d'additivité dénombrable uniforme est de nature différente des autres conditions sous lesquelles la condition de dérive a été montrée pour impliquer l'existence d'une distribution stationnaire.

**Exemple B.0.1** *Dans ce premier exemple, nous considérons les conditions de bornitude qui mènent à l'additivité dénombrable uniforme. Supposons qu'il existe une*

fonction  $f : \mathcal{X} \rightarrow \mathbb{R}_+$  telle que

$$\sup_{x \in K} Pf = M_K < \infty, \quad (\text{B.1})$$

pour tout compact  $K$ . En outre, supposons que les lois de transition sont données par les densités  $P(x, A) = \int_A p(x, y) \nu(dy)$ ,  $x \in \mathcal{X}$ ,  $A \in \mathcal{B}$ , où  $\nu$  est une mesure quelconque finie sur les ensembles compacts, et aussi pour tout  $C$  compact

$$p(x, y) \leq B_C, \quad x, y \in C. \quad (\text{B.2})$$

Sous (B.1) et (B.2), nous pouvons montrer que la condition d'additivité dénombrable uniforme est vérifiée. Pour voir cela, soit  $K$  compact et  $\varepsilon > 0$ , et nous choisissons un ensemble compact  $K_1$  avec  $K_1 \subseteq K$  tel que  $f \geq M_K/\varepsilon$  sur  $K_1^c$ . Ainsi, de (B.1),

$$\sup_{x \in K} P(x, K_1^c) \leq \varepsilon. \quad (\text{B.3})$$

De plus, par (B.2),

$$\sup_{x \in K} P(x, A \cap K_1) \leq B_{K_1} \nu(A \cap K_1). \quad (\text{B.4})$$

Ainsi, pour toute suite d'ensembles  $A_n \searrow \emptyset$ , par (B.3) et (B.4),

$$\begin{aligned} \sup_{x \in K} P(x, A_n) &\leq \sup_{x \in K} \left[ \int_{A_n \cap K_1} p(x, y) \nu(dy) + P(x, K_1^c) \right] \\ &\leq B_{K_1} \nu(A_n \cap K_1) + \sup_{x \in K} P(x, K_1^c) \leq 2\varepsilon, \end{aligned}$$

pour  $n$  suffisamment grand tel que  $\nu(A_n \cap K_1) < \varepsilon/B_{K_1}$ .

Un choix approprié de  $f$  dans ce critère pourrait être fourni par la fonction  $V$  dans le critère de dérive, à condition que  $V$  soit borné sur les ensembles compacts,

puisque le critère de dérive implique que  $PV$  est borné sur les compacts aussi, et donc (B.1) est satisfait avec  $f \equiv V$ .

Ensuite, nous examinons si la condition d'additivité dénombrable uniforme se chevauche avec la  $T$ -chain ou les conditions de continuité de Feller utilisées dans Tweedie (1988) et ailleurs. Bien que, dans de nombreux cas, ils soient conjointement satisfaits, il existe des cas simples où la condition d'additivité dénombrable uniforme n'est liée à aucune condition de continuité.

**Exemple B.0.2** Nous présentons ici une chaîne de Markov sur  $\{0, 1/n, n \in \mathbb{Z}_+\}$  qui est un  $T$ -Chain, et Feller faible, et a une mesure stationnaire, mais ne satisfait pas la condition d'additivité dénombrable uniforme. Pour ce faire, prendre  $P(1/n, 1/(n+1)) = 1/2$ ,  $P(1/n, 0) = 1/2$ ,  $n \geq 1$ ;  $P(0, 0) = 1$ . C'est une  $T$ -chain avec  $T(x, 0) \equiv 1/2$ , puisque, quand  $x_n \rightarrow 0$ , clairement  $T(x_n, A) \rightarrow T(0, A)$ . Elle est Feller faible car si  $f$  est continu alors pour de telles suites  $f(x_n) \rightarrow f(0)$  et donc  $\int P(1/n, dy)f(y) = [f(0) + f(1/(n+1))]/2 \rightarrow f(0)$ . Mais si on prend  $A_r = \{1/r, 1/(r+1), 1/(r+2), \dots\}$  alors  $A_r \searrow \emptyset$ , mais pour tout  $r$  nous avons  $\sup_{x \in \mathcal{X}} P(x, A_r) = 1/2$ ; et donc la condition d'additivité dénombrable uniforme échoue car  $\mathcal{X}$  est compact.

---

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] Alexander, C. & Lazar, E. (2006). Normal mixture *GARCH*(1,1) : applications to exchange rate modelling. *J. Appl. Econ.* Vol 21, 307-336.
- [2] Alexander, C. & Lazar, E. (2009). Modelling Regime-specific Stock Price Volatility. *Oxford Bulletin of Economics and Statistics.* Vol 71, 761-797.
- [3] Aknouche, A. & Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic *GARCH* and periodic *ARMA – GARCH* processes, *Journal of Time Series Analysis*, Vol 30, issue 1, 19-46.
- [4] Aknouche, A., Demmouche, N. & Touche, N. (2018). Bayesian MCMC analysis of periodic asymmetric power *GARCH* models. <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/id/eprint/91136>.
- [5] Aknouche, A. & Guerbyenne, H. (2009). Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions, *Statistics and Probability Letters*, Vol. 79, issue 7, 990-996.
- [6] Aknouche, A. & Touche, N. (2015). Weighted least squares-based inference for stable and unstable threshold power *ARCH* processes, *Statistics & Probability Letters*, Vol. 97, 108–115.



- [7] Aliat, B. (2018). Sur les modèles de séries chronologiques à changement de régime Markovien. Thèse de doctorat.
- [8] Aliat, B. & Hamdi, F. (2018). On Markov-switching PARMA processes. *Communications in statistics-Theory and Methods*, 47, 344-364.
- [9] An, H., Chen, M., Huang, F. (1997). The geometric ergodicity and existence of moments for a class of non-linear time series model. *Statist. Probab. Lett.* 31 :213-224.
- [10] Bentarzi, M. & Hamdi, F. (2008a). Mixture periodic autoregression with periodic ARCH errors. *Advances and Applications in Statistics*, Vol 8, issue 2.
- [11] Bentarzi, M. & Hamdi, F. (2008b). Mixture periodic autoregressive conditional heteroskedastic models Sep 2008, *Computational Statistics & Data Analysis*, Vol 53, issue 1, 1-16.
- [12] Berkes, I., Horvath, L. & Kokoszka, P. (2003). *GARCH* processes : structure and estimation. *Bernoulli*. 9(2),201-227.
- [13] Bibi, A. & Aknouche, A. (2008). On Periodic *GARCH* Processes : Stationarity, Existence of Moments and Geometric Ergodicity. *Mathematical Methods of Statistics*, Vol. 17, No. 4, 305-316.
- [14] Bibi, A. & Ghezal, A. (2017). Asymptotic properties of QMLE for periodic asymmetric strong and semi-strong *GARCH* models. <https://mpra.ub.uni-muenchen.de/id/eprint/81126>.
- [15] Bollerslev, T. (1986). Generalized autoregressive conditional heteroskedasticity, *Journal of Econometrics* Vol. 31, 307-327.
- [16] Bollerslev, T., Ghysels, E. (1996). Periodic autoregressive conditional heteroscedasticity. *J. Bus. Econ. Statist.* 14(2) :139-151.
- [17] Bougerol, P. & Picard, N. (1992). Stationarity of *GARCH* processes and of some nonnegative time series, *Journal of Econometrics* Vol. 52, 115-127.

- [18] Boussaha, N. (2018). Sur les modèles à volatilité stochastique. Thèse de docteur.
- [19] Boussaha, N. & Hamdi, F. (2018). On periodic autoregressive stochastic volatility models : structure and estimation. *Journal of Statistical Computation and Simulation*. Vol 88. DOI : 10.1080/00949655.2017.1401626.
- [20] Boussaha, N., Hamdi, F. & Souam, S. (2018). Multivariate Periodic Stochastic Volatility Models : Applications to Algerian dinar exchange rates and oil prices modeling. Working Paper.
- [21] Chan, K. S., Tong, H. (1986) On estimating thresholds in autoregressive models. *J. Time Ser. Anal.* 7. 197-190.
- [22] Cline, D. B. H. & Pu, H. H. (1999a). Stability of nonlinear AR(1) time series with delay. *Stoch. Proc. Appl.* 82, 307-333.
- [23] Cline, D. B. H. & Pu, H. H. (1999b). Stability of threshold-like ARMA time series. Research report 308, Department of Statistics, Texas A&M University.
- [24] Cline, D. B. H. & Pu, H.-M. H. (1999c). Geometric ergodicity of nonlinear time series. *Statist. Sinica* 9, 1103-1118.
- [25] Davidian, M. & Carroll, R. J. (1987). Variance function estimation. *Journal of the American Statistical Association*. Vol82, 1079–1091.
- [26] Davydov, Y. (1973). Mixing conditions for Markov chains. *Theory of Probability and Its Applications XVIII*, 312-328.
- [27] Ding, Z., Granger, C. & R.F. Engle (1993). A long memory property of stock market returns and a new model. *Journal of Empirical Finance* 1, 83–106.
- [28] Engle, R.F. (1982). Autoregressive conditional heteroskedasticity with estimates of the variance of the United Kingdom inflation, *Econometrica* 50, 987-1007.

- [29] Engle, R.F., (1990). Discussion : stock market volatility and the crash of 87. *Review of Financial Studies* 3, 103-106.
- [30] Feigin, P. D. & Tweedie, R. L. (1985). Random coefficient autoregressive processes. *J. Time Ser. Anal.* 6, 1-14.
- [31] Fonseca, G. & Tweedie, R. L. (2002). Stationary measures for non-irreducible non-continuous Markov chains with time series applications. *Statistica Sinica* 12 :651–660.
- [32] Francq, C., Wintenberger, O. & Zakořian, J., M. (2013). GARCH models without positivity constraints : Exponential or Log GARCH?. <https://arxiv.org/abs/1211.2060v2>
- [33] Francq, C. & Zakořian, J-M. (2012). Optimal predictions of powers of conditionally heteroskedastic processes, *Journal of the Royal Statistical Society - Series B* 75, 345–367.
- [34] Francq, C. & Zakořian, J-M. (2013). Inference in non stationary asymmetric *GARCH* models, *Annals of Statistics* 41, 70-98.
- [35] Franses, P., H. & Paap, R. (2005). Random-Coefficient Periodic Autoregression. *Econometric Institute Report EI2005-34* (2005).
- [36] Geweke, J. (1986). Modeling the Persistence of Conditional Variances : A Comment, *Econometric Review*, 5, 57-61.
- [37] Glosten, L.R., Jagannathan, R. & Runkle, D.(1993), On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks. *Journal of Finance*. Vol48, 1779-1801.
- [38] Guégan, D. & Diebolt, J. (1994). Probabilistic properties of the  $\beta - ARCH$  model. *Statistica Sinica*. Vol 4, 71-87

- [39] Guerbyenne, H. & Kessira, A. (2018). Power periodic threshold *GARCH* model : Structure and estimation, Communications in Statistics - Theory and Methods, DOI :[10.1080/03610926.2018.1496258](https://doi.org/10.1080/03610926.2018.1496258)
- [40] Hall, P. C. & Heyde, C. C. (1980). *Martingale Limit Theory and its Applications*. Academic Press, New York.
- [41] Haas, M., Krause, J., Paoletta, M. S. & Steude, S. C. (2013). *Time-Varying Mixture *GARCH* Models and Asymmetric Volatility*. Swiss Finance Institute Research Paper No. 13-04
- [42] Haas, M., Mittnik, S., & Paoletta, M. S. (2004a). *Mixed Normal Conditional Heteroskedasticity*. *Journal of Financial Econometrics*. Vol2, issue 2, 211-250.
- [43] Haas, M., Mittnik, S., & Paoletta, M. S. (2004b). *A New Approach to Markov Switching *GARCH* Models*. *Journal of Financial Econometrics*. Vol 2, issue 4, 493-530.
- [44] Haas, M., Mittnik, S., and Paoletta, M. S. (2009). *Asymmetric Multivariate Normal Mixture GARCH*. *Computational Statistics and Data Analysis*. Vol 53, 2129-2154.
- [45] Haas, M. & Paoletta, M. S. (2012). *Mixture and Regime-switching *GARCH* Models*. In Bauwens, L., Hafner, C. M., and Laurent, S., editors, *Handbook of volatility models and their applications*, number 3.
- [46] Hamadeh, T., & J.M. Zakořan (2011). *Asymptotic properties of LS and QML estimators for a class of nonlinear *GARCH* Processes*, *Journal of Statistical Planning and Inference*, 141, 488–507.
- [47] Hamdi, F. & Souam, S. (2018). *Mixture periodic *GARCH* models : Theory and Applications*. *Empirical Economics*. Springer, vol. 55, issue 4, 1925-1956.
- [48] Hamilton, J., D (1988). *A Neoclassical Model of Unemployment and the Business Cycle*. *Journal of Political Economy*. Vol. 96, issue 3, 593-617.

- [49] Hamilton, J., D. (1989). A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle. *Econometrica*. Vol. 57, issue. 2, 357-384.
- [50] Hentschel, L. (1995). All in the family : Nesting symmetric and asymmetric *GARCH* models. *Journal of Financial Economics*. Vol 39. 71 - 104.
- [51] Higgins, M. L. & Bera, A. K. (1992). A class of nonlinear *ARCH* models. *Internat. Econom. Rev.* 33, 137-158.
- [52] Hwang, S. Y. & Basawa, I. V. (2004). Stationarity and moment structure for Box-Cox transformed threshold *GARCH*(1, 1) processes. *Statistics & Probability Letters* 68, 209-220.
- [53] Hwang, S. Y. & Kim, T. Y. (2004). Power transformation and threshold modeling for *ARCH* innovations with applications to tests for *ARCH* structure. *Stochastic Processes and Their Applications* 110, 295-314.
- [54] Kesten, H., Spitzer, F. (1984). Convergence in distribution for products of random matrices. *Zeitschrift für Wahrscheinlichkeitstheorie und Verwandte Gebiete* 67 :363–386.
- [55] Kingman, J.F.C., (1973). Subadditive ergodic theory, *Annals of Probability* 1, 883-909.
- [56] Kim, S. Y. & Hwang, S. Y. (2005). Binary random power approach to modeling asymmetric conditional heteroscedasticity. *Journal of the Korean Statistical Society*, 34, 61-71.
- [57] Lee, O. (2011). On geometric ergodicity and  $\beta$ -mixing property of asymmetric power transformed threshold *GARCH*(1, 1) process. *Journal of the Korean Data and Information Science Society*, Vol. 22, issue 2, 353-360.

- [58] Lee, O. & Shin, W. (2010). Geometric Ergodicity and Moment Conditions for a Seasonal *GARCH* Model with Periodic Coefficients, *Communications in Statistics - Theory and Methods*, 39 :1, 38-51.
- [59] Li, C. W. & Li, W. K. (1996). On a double-threshold autoregressive heteroscedastic time series model. *J. Appl. Econometrics*, 11, 253-274.
- [60] Lindgren, G. (1978). Markov Regime Models for Mixed Distributions and Switching Regressions. *Scandinavian Journal of Statistics*. Vol. 5, issue 2, 81-91.
- [61] Meyn, S.P., Tweedie, R.L., (1993). *Markov Chains and Stochastic Stability*. Springer-Verlag, London.
- [62] Milhøj, A. (1987). A Multiplicative Parameterization of ARCH Models, working paper, Department of Statistics, University of Copenhagen.
- [63] Nelson, D. B. (1991). Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns : A New Approach. *Econometrica*. Vol. 59, issue 2, 347-70
- [64] Pan, J., Wang, H. & Tong, H. (2008). Estimation and tests for power-transformed and threshold *GARCH* models. *Journal of Econometrics*, 142. 352-378.
- [65] Pantula, S. G. (1986). Modelling the Persistence of Conditional Variances : A Comment, *Econometric Reviews*, 5, 71-73.
- [66] Rabemananjara R. & J.M. Zakoïan (1993). Threshold *ARCH* Models and Asymmetries in Volatility, *Journal of Applied Econometrics*, 8, 31-49.
- [67] Scheinkman, J. A. & LeBaron, B. (1989). Nonlinear dynamics and stock returns. *J. Business* 62, 311-337.
- [68] Schwert, G.W. (1989). Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?. *Journal of Finance*. Vol 44, 1115-1153.
- [69] Tanikawa, A. (1999). Geometric ergodicity of nonlinear first order autoregressive models. *Stochastic Models* 15, 227-245.

- [70] Taylor, S. (1986). *Modeling Financial Time Series*. John Wiley and Sons, New York.
- [71] Tong, H. (1978) On threshold model. In *Pattern Recognition and Signal Processing*, ed. C. H. Chen, Sijhoof and Nordhoff, Alphen aan den Rijn, The Netherlands.
- [72] Tong, H. (1983) *Threshold Models in Non Linear Time series Analysis*. Lecture Notes in Statistics 21, Springer-Verlag, New York.
- [73] Tong, H., (1990). *Non-linear Time Series : A Dynamical System Approach*. Oxford University Press, Oxford.
- [74] Tong, H. & Lim, K. S. (1980) Threshold autoregression, limit cycles and cyclical data. *J. R. Statist. Soc. B42*, 245-292.
- [75] Tweedie, R. L. (1974) R-theory for Markov chains on a general state space II : r-subinvariant measures for r-transient chains, *Ann. Prob. 2*, 865-878.
- [76] Tweedie, R. L. (1975). Sufficient Conditions for Ergodicity and Recurrence of Markov Chains on a General State Space, *Stochastic Processes and Appl. 3*, 385-403.
- [77] Tweedie, R. L. (1983). Criteria for rates of convergence of Markov chains with application to queueing and storage theory. In : Kingman, J. F., Reuter, G. E. H., eds. *Probability, Statistics and Analysis*. Cambridge : Cambridge University Press.
- [78] Tweedie, R. L. (1988) Invariant measure for Markov chains with no irreducibility assumptions. *J. Appl. Prob. 25A*, 275-285.
- [79] Tweedie, R. L. (2001). Drift conditions and invariant measures for Markov chains. *Stochastic Proces. Applic. 92* :345–354.

- [80] Xia, Q., Wong, H., Liu, J. & Liang, R. (2017). Bayesian Analysis of Power-Transformed and Threshold *GARCH* Models : A Griddy-Gibbs Sampler Approach. *Comput Econ*. Vol 50. 353–372.
- [81] Zakoïan, J. M. (1994). Threshold heteroskedastic models. *Journal of Economic Dynamics and Control*. Vol. 18, issue 5, 931-955.