N° d'ordre : 33/2019-C/PH

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L.ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DE PHYSIQUE

THESE DE DOCTORAT

présentée pour l'obtention du diplôme de docteur

En : Physique

Spécialité : Physique Théorique

Par : CHOUTRI Bochra

Thème

Contribution à la résolution de quelques problèmes quantiques PT-symétriques et Pseudo-hermitiens

Soutenue publiquement, le 24/04/ 2019, devant le jury composé de:

Mr. M. HACHEMANE	Professeur	U.S.T.H.B	Président
Mr. O. CHERBAL	Professeur	U.S.T.H.B	Directeur de thèse
Mme. F.Z. IGHEZOU	Professeur	U.S.T.H.B	Co-directrice de thèse
Mr. A. CHOUCHAOUI	Professeur	U.S.T.H.B	Examinateur
Mr. R. MEZHOUD	Professeur	U.M.B.B	Examinateur
Mr. N. ZENINE	Directeur de Recherche	C.R.N.A	Examinateur

Remerciements

Je remercie tout d'abord Le Bon Dieu de m'avoir donné la volonté et la force pour compléter ce travail.

Ce travail a été effectué au sein du laboratoire de physique théorique de la faculté de physique de l'université des sciences et de la technologie HOUARI Boumediene USTHB, sous la direction de Monsieur CHERBAL Omar, professeur à l'USTHB, et Madame IGHEZOU Fatima Zohra, professeur à l'USTHB. Je tiens à les remercier vivement pour leur soutien, patience et encouragements pour la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à Monsieur HACHEMANE Mahmoud professeur à l'USTHB, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de soutenance de ma thèse.

Mes sincères remerciements à Messieurs CHOUCHAOUI Ahmed professeur à l'USTHB, ZENINE Nadjah Directeur de recherche (CRNA), MEZHOUD Reda professeur à l'UMBB, pour avoir accepter de juger mon travail.

Je remercie également mon collègue ZENAD Malek pour ses encouragements.

J'aimerais témoigner toute ma gratitude à mon mari, MOUSSAOUI Abderrezak, pour son aide et les conseils qu'il m'a prodigués tout le long de la réalisation de ce travail.

Je remercie vivement mon frère CHOUTRI Abd elaziz pour son soutien moral constant.

Dédicace

Je dédie ce travail à:

- Ma chère mère CHOUTRI FATIMA, l'esprit de mon père CHOUTRI Mohamed Elcherif.

- Mon mari, nos anges Ghaith Said et Dim Manar.

- Mes frères et mes sœurs.

- Tous mes collègues, mes élèves.

Contribution à la résolution de quelques problèmes quantiques $\mathcal{PT}$-symétriques et pseudo-hermitiens.

Résumé

Les travaux de recherche sur les systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques et pseudo-hermitiens à spectres réels ont focalisé un intérêt considérable durant ces deux dernières décennies [1, 2]. Une attention toute particulière est accordée à ces problèmes quantiques car ils interviennent dans différents domaines de la physique: optique quantique, physique de la matière condensée etc.

Cette thèse entre dans le cadre de développement de cette nouvelle configuration de la mécanique quantique qui s'intéresse aux aspects physiques et mathématiques des Hamiltoniens non-hermitiens.

Les travaux de Bender et Boettcher datant de 1998 ont permis d'introduire la notion de $\mathcal{PT}$-symétrie [3]. Ils ont montré que les Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques de type $H = p^2 - (ix)^\nu$, $\nu \geq 2$ ont un spectre réel, $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont respectivement les opérateurs de parité et de renversement du temps.

Plus tard en 2002, Mostafazadeh a introduit la notion de pseudo-hermiticité [4], il a montré que chaque Hamiltonien pseudo-hermitien obéit à la relation suivante: $H = \eta^{-1}H^\dagger\eta$, où η est un opérateur appelé opérateur métrique, linéaire, hermitien et inversible. Dans le cas où η est défini-positif, alors l'Hamiltonien H est dit quasi-hermitien ou crypto-hermitien.

Par ailleurs, il a été bien établi, dans le cadre de la mécanique quantique hermitienne, que si un Hamiltonien hermitien H est invariant par renversement du temps impair: $[H, \mathcal{T}] = 0$ et $\mathcal{T}^2 = -1$, alors le théorème de Kramers stipule que les niveaux d'énergie de H sont tous dégénérés, ce qu'on appelle la dégénérescence de Kramers [8]. Cependant, si H est invariant par renversement du temps pair: $[H, \mathcal{T}] = 0$ et $\mathcal{T}^2 = 1$, alors le théorème de Kramers ne s'applique pas.

Dans cette thèse, nous avons étudié la structure des Hamiltoniens pseudo-hermitiens à spectres réels et invariants par symétrie de renversement du temps $\mathcal{T}$ paire: $[H, \mathcal{T}] = 0$ et

$\mathcal{T}^2 = 1$. Nous montrons que, malgré que la symétrie de $\mathcal{T}$ est paire, ces derniers admettent une dégénérescence de Kramers généralisée, contrairement au cas des Hamiltoniens hermitiens.

Nous avons ensuite étendu notre étude aux Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec une symétrie $\mathcal{PT}$ paire ($\mathcal{P}^2 = 1$, $\mathcal{T}^2 = 1$). Nous avons montré aussi qu'une structure de dégénérescence de Kramers généralisée existe aussi pour ces derniers.

Dans ce contexte, nous montrerons que la structure des Hamiltoniens pseudo-hermitiens diffère complétement de celle des Hamiltoniens hermitiens en présence de dégénérescences [32, 47].

Mots-clés:

Pseudo-hermiticité, $\mathcal{PT}$-symétrie, dégénérescence, espace de Krein.

Table des matières

Introduction générale

La mécanique quantique est la théorie scientifique du XX ème siècle qui s'est lancée le défi de comprendre l'univers de l'infiniment petit; elle voit le jour au début des années vingt en dévoilant plusieurs phénomènes se produisant au niveau atomique non expliqués par la physique classique.

Les recherches sur la mécanique quantique hermitienne (dite usuelle) remontent à un siècle. Cela fait presque 80 ans que les chercheurs se sont penchés sur l'étude des systèmes quantiques décrits par des Hamiltoniens non-hermitiens. Depuis 1998, ce domaine de recherche a focalisé un intérêt particulier [1, 2]. Une nouvelle classe d'Hamiltoniens non-hermitiens à spectre réel a été introduite, ces derniers sont dits $\mathcal{PT}$-symétriques ou pseudo-hermitiens.

Notre travail qui porte sur une contribution à la résolution de quelques problèmes quantiques $\mathcal{PT}$-symétriques et pseudo-hermitiens entre dans ce contexte.

L'un des postulats les plus élémentaires de la mécanique quantique stipule que l'Hamiltonien H qui décrit le système physique doit être hermitien ($H = H^{\dagger}$) pour assurer un spectre d'énergie réel, $H^{\dagger}$ est le conjugué hermitique de H. Ceci implique que l'opérateur d'évolution est unitaire et que les normes des états sont conservées au cours du temps, ces dernières étant considérées comme des probabilités de présence des particules.

A ce moment-là, l'hermiticité des Hamiltoniens était nécessaire pour garantir la réalité des spectres d'énergie. Par contre, il existe maintenant d'autres classes d'Hamiltoniens qui sont non-hermitiens et qui assurent aussi la réalité des spectres d'énergie, ils sont appelés : Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques et pseudo-hermitiens. Ainsi, l'hermiticité d'un Hamiltonien devient suffisante mais non nécessaire afin d'assurer la réalité du spectre d'énergie.

Les systèmes physiques représentés par des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques sont définis comme des systèmes invariants par symétrie de réflexion d'espace-temps, c'est-à-dire $H = H^{\mathcal{PT}} \Leftrightarrow [H, \mathcal{PT}] = 0$ [3], où les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont, respectivement, les opérateurs de réflexion (parité) et de renversement du sens du temps.

Par ailleurs, on dit qu'un Hamiltonien H est pseudo-hermitien s'il obéit à la relation suivante: $H = \eta^{-1} H^{\dagger} \eta$ [4]. Cette dernière relation contient un opérateur métrique η qui est hermitien, linéaire et inversible.

On se propose, dans le présent travail, d'étudier la structure d'Hamiltoniens non-hermitiens (pseudo-hermitiens) à spectres réels et invariants par symétries de renversement du temps $\mathcal{T}$ et $\mathcal{PT}$ paires. Nous montrons que, bien que les symétries sont paires, ces derniers admettent une dégénérescence de Kramers généralisée, contrairement au cas des Hamiltoniens hermitiens**.** Dans ce contexte, nous montrerons que la structure des Hamiltoniens pseudo-hermitiens diffère complètement de celle des Hamiltoniens hermitiens en présence de dégénérescences.

Cette thèse est partagée en six chapitres comme suit:

Le premier chapitre consiste en un bref rappel sur la mécanique quantique usuelle et représente une introduction à la symétrie de renversement du temps $\mathcal{T}$. En effet, ce rappel contient des notions nécessaires à l'étude de notre travail: nous résumerons le formalisme général de la mécanique quantique qui nous servira pour expliquer notre travail. Nous insistons aussi, dans ce chapitre, sur la dégénérescence de Kramers, les quaternions et les Hamiltoniens de type SO(3,2), les fermions usuels et les opérateurs de création et d'annihilation qui sont nos outils de travail par la suite.

Dans le deuxième chapitre, nous établissons les propriétés essentielles des systèmes ayant des Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques qui sont des notions générales, indispensables afin de comprendre cette formulation quantique [3].

Le troisième chapitre est réservé à la pseudo-hermiticité [4], nous y présentons notamment quelques propriétés concernant cette dernière, tout en établissant un lien entre la $\mathcal{PT}$-symétrie et la pseudo-hermiticité: nous résumons ces deux derniers chapitres par des théorèmes importants récapitulant les notions les plus nécessaires dans cette extension.

Dans le quatrième chapitre, nous insistons sur l'intérêt suscité par la dégénérescence de Kramers généralisée [5], nous établissons plusieurs propriétés très importantes relatives aux Hamiltoniens pseudo-hermitiens invariants par symétrie de renversement du temps paire ($\mathcal{T}^2 = 1$) et nous montrons que les opérateurs de création et d'annihilation des systèmes considérés obéissent à l'algèbre fermionique.

Nous traitons la dégénérescence de Kramers généralisée pour dégager les deux points essentiels suivants:

1. Dégénérescence de Kramers et pseudo-hermiticité.
2. Dégénérescence de Kramers et métrique indéfinie.

En particulier, nous montrons que l'opérateur métrique η qui permet de réaliser la dégénérescence de Kramers généralisée est nécessairement indéfini.

Nous étudions, plus en détail, un système à quatre niveaux décrit par un Hamiltonien split-quaternionique de type SO(3,2) généralisé et nous présentons une illustration des développements effectués.

Nous exposons, pour la première fois, dans le cinquième chapitre, la notion de dégénérescence crypto-hermitienne qui est la dégénérescence de Kramers pour des Hamiltoniens quasi-hermitiens invariants par symétrie de renversement du temps paire ($\mathcal{T}^2 = 1$).

Nous montrons aussi qu'un Hamiltonien H avec un spectre réel possède une symétrie antilinéaire impaire induite de la symétrie de renversement du temps impaire de son Hamiltonien équivalent h; de ce fait, la dégénérescence de Kramers généralisée de H, est une dégénérescence de Kramers crypto-hermitienne.

Dans le sixième chapitre, nous étudions la dégénérescence des systèmes pseudo-hermitiens avec une $\mathcal{PT}$-symétrie paire. Nous présentons un aperçu sur la formulation de l'espace de Krein de l'espace de Hilbert.

Une récapitulation des principaux résultats de notre travail est présentée dans la conclusion générale.

CHAPITRE 1

Rappels sur la mécanique quantique hermitienne, les fermions et la symétrie de renversement du temps

1.1 Introduction

Dans ce chapitre préliminaire, nous passons en revue les principaux ingrédients utiles à notre travail. Ainsi, nous rappelons les concepts de base de la mécanique quantique conventionnelle définie par un Hamiltonien hermitien. Nous introduisons, également, les fermions usuels nécessaires pour la compréhension du concept des pseudo-fermions. Nous terminons ce chapitre par la présentation de la symétrie de renversement du temps et ses conséquences sur les systèmes quantiques compte tenu de l'importance de cette symétrie dans notre travail.

1.2 Rappels sur la mécanique quantique usuelle

Cette section a pour but la familiarisation avec les notions principales de la mécanique quantique usuelle définie par un Hamiltonien hermitien. Ces notions de base sont nécessaires pour la compréhension du travail présenté dans les chapitres suivants à propos de la mécanique quantique non-hermitienne. Dans ce contexte, une simple comparaison entre les théories quantiques hermitienne et non-hermitienne sera faite automatiquement au cours de ce travail.

Dans la mécanique quantique, chaque particule se trouvant dans un état physique est représentée par une fonction d'onde $\psi(\vec{r})$. Tout état physique représenté par un vecteur ket $|\psi\rangle$, l'ensemble des kets donne un espace vectoriel défini sur le corps des nombres complexes $\mathbb{C}$. Cet ensemble est appelé l'espace des états ξ du système, il est muni d'un produit scalaire; en outre, l'espace des états est un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

A tout vecteur ket $|\psi\rangle$ de l'espace des états ξ correspond un vecteur bra $\langle\phi|$ de l'espace dual ξ^*. Ces vecteurs bras sont associés aux fonctions complexes conjuguées des fonctions associées aux vecteurs d'état de l'espace des états ξ.

Nous pouvons aussi dénoter le bra et le ket conjugués avec la même lettre $\langle\phi| \leftrightarrow |\phi\rangle$ parce qu'il y a une correspondance biunivoque entre l'espace des états ξ et son espace dual ξ^*.

1.2.1 Produit scalaire

Le produit scalaire entre deux états est construit à partir d'un bra et un ket, l'application de ce bra $\langle\phi|$ sur ce ket $|\psi\rangle$ nous donne un nombre complexe.

$\forall\ |\psi\rangle\,,\ |\phi\rangle\,,\ |\chi\rangle \in \mathcal{H},\ \lambda \in \mathbb{C}$.

On a

$$\langle\phi|\,[|\psi\rangle] = \langle\phi \mid \psi\rangle\,. \tag{1.2.1}$$

$$\langle \phi \mid \psi_1 + \lambda \psi_2 \rangle = \langle \phi \mid \psi_1 \rangle + \lambda \langle \phi \mid \psi_2 \rangle . \tag{1.2.2}$$

Citons quelques propriétés du produit scalaire,

$$\langle \phi \mid \psi \rangle^* = \langle \psi \mid \phi \rangle , \tag{1.2.3}$$

$$\langle \phi \mid \lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2 \rangle = \lambda_1 \langle \phi \mid \psi_1 \rangle + \lambda_2 \langle \phi \mid \psi_2 \rangle . \tag{1.2.4}$$

$$\langle \lambda_1 \phi_1 + \lambda_2 \phi_2 \mid \psi \rangle = \lambda_1^* \langle \phi_1 \mid \psi \rangle + \lambda_2^* \langle \phi_2 \mid \psi \rangle . \tag{1.2.5}$$

λ^*est le complexe conjugué de λ.

$$\langle \psi \mid \psi \rangle = \| \psi \|^2 \geq 0, \text{ si } |\psi\rangle \neq 0, \ \langle \psi \mid \psi \rangle = 0 \Leftrightarrow |\psi\rangle = 0. \tag{1.2.6}$$

1.2.2 Opérateurs linéaires

Par définition, un opérateur A est un objet mathématique qui transforme un ket $|\psi\rangle$ en un autre ket $|\psi`\rangle$ soit

$$A |\psi\rangle = |\psi`\rangle . \tag{1.2.7}$$

Soit l'ensemble des opérateurs linéaires $\mathbb{L}(\mathcal{H})$, qui forme un espace vectoriel dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Un opérateur A est appelé opérateur linéaire si: $\forall \, |\psi_i\rangle , |\phi\rangle \in \mathcal{H}$, et $\lambda \in \mathbb{C}$, les relations suivantes sont vérifiées:

$$A [|\lambda_1 \psi_1 + \lambda_2 \psi_2\rangle] = \lambda_1 A |\psi_1\rangle + \lambda_2 A |\psi_2\rangle . \tag{1.2.8}$$

Notons que, si A_1 et A_2 sont des opérateurs linéaires, alors le produit $A_1 A_2$ est un opérateur linéaire.

L'opérateur identité I est un opérateur linéaire aussi,

$$I\left|\psi\right\rangle = \left|\psi\right\rangle. \tag{1.2.9}$$

Le produit d'un ket par un bra $\left|\psi\right\rangle\left\langle\phi\right|$ donne un opérateur, en effet, ce produit transforme un ket quelconque en un autre ket:

$$(\left|\psi\right\rangle\left\langle\phi\right|)\left|\chi\right\rangle = (\left\langle\phi \mid \chi\right\rangle)\left|\psi\right\rangle.$$

1.2.3 Opérateur antilinéaire

Un opérateur A est appelé opérateur antilinéaire, s'il satisfait la relation suivante:

$$A(a_1\left|\psi_1\right\rangle + a_2\left|\psi_2\right\rangle) = a_1^* A\left|\psi_1\right\rangle + a_2^* A\left|\psi_2\right\rangle, \tag{1.2.10}$$

où $\left|\psi_i\right\rangle \in \mathcal{H}$ et $a_i \in \mathbb{C}$,

1.2.4 Opérateur adjoint

L'adjoint d'un opérateur linéaire A est un opérateur linéaire, noté $A^\dagger$, tel que:

$$\left\langle\phi\right| A\left|\psi\right\rangle = \left\langle\phi \mid A\psi\right\rangle = \left\langle A^\dagger\phi \mid \psi\right\rangle = \left\langle\psi\right| A^\dagger\left|\phi\right\rangle^*. \tag{1.2.11}$$

Citons les propriétés suivantes des opérateurs et de leurs adjoints:

L'adjoint de l'adjoint de A donne l'opérateur A, cette opération est réciproque,

$$(A^\dagger)^\dagger = A. \tag{1.2.12}$$

L'adjoint d'une somme c'est la somme des adjoints,

$$(A+B)^\dagger = A^\dagger + B^\dagger. \tag{1.2.13}$$

L'adjoint d'un produit est donné par:

$$(AB)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger}. \tag{1.2.14}$$

$$(A^n)^{\dagger} = (A^{\dagger})^n, \text{ avec } n \in \mathbb{N}. \tag{1.2.15}$$

On remarque clairement que l'ordre des opérateurs change dans le cas de l'adjoint d'un produit d'opérateurs contrairement au cas de l'adjoint d'une somme d'opérateurs.

1.2.5 Opérateurs hermitiques et observables

Utilisons la relation (1.2.11),

$$\langle \phi \mid A\psi \rangle = \langle \psi | A^{\dagger} | \phi \rangle^{*}. \tag{1.2.16}$$

Si un opérateur A concorde avec son adjoint $A^{\dagger}$, $A = A^{\dagger}$, ceci implique que ce dernier est hermitique ou auto-adjoint.

Donc, l'adjoint d'un opérateur A, est le conjugué hermitique de A.

Le produit d'un opérateur hermitien avec un nombre λ n'est hermitien que si λ est réel.

$$(\lambda A)^{\dagger} = \lambda^{*}A^{\dagger}, \ \lambda \in \mathbb{C} \tag{1.2.17}$$

Pour obtenir le conjugué hermitique d'une expression, il est important de suivre les étapes suivantes:

· Inverser l'ordre des facteurs.

· Remplacer les kets par les bras associés et vice versa.

· Remplacer les constantes par leurs complexes conjuguées.

· Transformer les opérateurs par leurs adjoints.

L'action de deux opérateurs A et B est la suivante:

$$(AB)|\psi\rangle = A(B|\psi\rangle). \tag{1.2.18}$$

En effet, l'action de l'opérateur B est la première pour donner le ket $B|\psi\rangle$. Puis l'opérateur A agit sur le ket $B|\psi\rangle$ pour donner le ket $AB|\psi\rangle$, notons que l'ordre des opérateurs est important.

On définit le commutateur $[A, B]$ comme suit:

$$[A, B] = AB - BA. \tag{1.2.19}$$

Généralement $AB \neq BA$; lorsque $AB = BA$, on dit que les opérateurs A, B commutent.

1.2.6 Observables

Par définition, un opérateur A est dit observable:

s'il est hermitique et diagonalisable, donc les valeurs propres d'une observable sont réelles,

si le système orthonormé de ses vecteurs propres forme une base dans l'espace des états ξ: tout vecteur ket de ξ se décompose sous forme d'une combinaison linéaire de vecteurs propres de A.

Lorsqu'on a deux observables A et B commutent, $[A, B] = 0$, une base orthonormée peut être constituée par les vecteurs propres communs aux observables A et B.

1.2.7 Opérateurs unitaires

Un opérateur U est dit unitaire s'il satisfait la relation suivante:

$$U^\dagger U = UU^\dagger = 1, \tag{1.2.20}$$

ce qui signifie qu'il commute avec son adjoint, donc, l'opérateur U est **normal**.

Alors, l'opérateur inverse U^{-1} de l'opérateur U, coïncide avec l'opérateur adjoint $U^\dagger$: $U^\dagger = U^{-1}$

Notons que l'opérateur U conserve le produit scalaire,

$$\langle U\psi \mid U\phi\rangle = \left\langle \psi \mid U^\dagger U\phi\right\rangle = \langle \psi \mid \phi\rangle . \tag{1.2.21}$$

Il vérifie les propriétés suivantes:

· U est diagonalisable,

· le déterminant de l'opérateur unitaire U vaut 1,

· ses valeurs propres sont de module 1,

· ses vecteurs propres sont orthogonaux.

1.2.8 Opérateur antiunitaire

Par définition, on dit qu'un opérateur A est antiunitaire s'il est unitaire et antilinéaire; ainsi, tout opérateur antiunitaire A est un opérateur antilinéaire,

c'est-à-dire,

$$A^{\dagger} = A^{-1} \tag{1.2.22}$$

$$\langle A\phi \mid A\psi \rangle = \langle \phi \mid \psi \rangle^{*} = \langle \psi \mid \phi \rangle \,, \tag{1.2.23}$$

Dans la section suivante, nous revoyons la notion de fermions usuels utile, par la suite, pour la compréhension du chapitre portant sur les pseudo-fermions.

1.3 Fermions usuels, opérateurs de création et d'annihilation

Les particules de spin demi-entier obéissent à la statistique de Fermi-Dirac, elles sont appelées fermions tels que les quarks et les leptons. Deux fermions ne peuvent pas occuper le même état quantique car ils satisfont le principe d'exclusion de Pauli.

Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ du système ayant un seul fermion de spin $\frac{1}{2}$, cet espace à deux dimensions est décrit par les deux états notés $\{|0\rangle \,,\ |1\rangle\}$.

Les opérateurs de création et d'annihilation $c^{\dagger}$ et c, agissant sur l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ vérifient les relations **d'anticommutation** suivantes:

$$\left\{c,\ c^{\dagger}\right\} = cc^{\dagger} + c^{\dagger}c = 1, \quad \{c,\ c\} = \left\{c^{\dagger},\ c^{\dagger}\right\} = 0. \tag{1.3.1}$$

L'opérateur nombre de fermions N s'exprime comme: $N = c^{\dagger}c$.

Compte tenu des relations (1.3.1)

$$
\begin{aligned}
N^2 &= c^\dagger c c^\dagger c = c^\dagger c(1 - cc^\dagger), && (1.3.2)\\
&= c^\dagger c - c^\dagger c c c^\dagger, && (1.3.3)\\
&= c^\dagger c, && (1.3.4)\\
&= N. && (1.3.5)
\end{aligned}
$$

D'où,

$$N^2 - N = 0 \Rightarrow N(N-1) = 0. \tag{1.3.6}$$

En effet, les valeurs propres de N sont 0 où 1, alors, les nombres d'occupation permis pour les fermions sont $n = 0$ et $n = 1$.

En employant la relation suivante:

$$[AB, D] = A\{B,\ D\} - \{A,\ D\} B, \tag{1.3.7}$$

on calcule les relations de commutation et les opérateurs d'annihilation et de création.

On trouve,

$$
\begin{aligned}
[N,\ c] &= \left[c^\dagger c,\ c\right] = c^\dagger \{c,\ c\} - \left\{c^\dagger,\ c\right\} c, && (1.3.8)\\
&= -c. && (1.3.9)
\end{aligned}
$$

De la même manière, on obtient:

$$
\begin{aligned}
\left[N,\ c^\dagger\right] &= \left[c^\dagger c,\ c^\dagger\right] = c^\dagger \left\{c,\ c^\dagger\right\} - \left\{c^\dagger,\ c^\dagger\right\} c, && (1.3.10)\\
&= c^\dagger. && (1.3.11)
\end{aligned}
$$

Enfin, les transitions entre les états $|0\rangle$, $|1\rangle$ permises par les opérateurs de création et d'annihilation sont les suivantes:

$$c|0\rangle = 0, \quad c^\dagger |1\rangle = 0, \tag{1.3.12}$$

$$c|1\rangle = |0\rangle, \quad c^\dagger |0\rangle = |1\rangle. \tag{1.3.13}$$

1.4 Opérateur de renversement du temps

L'opérateur de renversement du sens du temps est noté $\mathcal{T}$. Ce dernier peut être décomposé en un produit d'un opérateur unitaire U et d'un opérateur antilinéaire K, où K est l'opérateur de conjugaison complexe [6]:

$$\mathcal{T} = UK. \tag{1.4.1}$$

L'action de l'opérateur $\mathcal{T}$ sur un état $|\psi\rangle$ s'écrit:

$$\mathcal{T}|\psi\rangle = UK|\psi\rangle = U|\psi\rangle^* . \tag{1.4.2}$$

Le produit de $\mathcal{T}$ par un opérateur A est:

$$\mathcal{T}A = UKA = UA^*. \tag{1.4.3}$$

Les relations précédentes impliquent que l'opérateur de renversement du temps est un opérateur antilinéaire.

En effet,

$$\mathcal{T}(a_1|\psi_1\rangle + a_2|\psi_2\rangle) = a_1^*\mathcal{T}|\psi_1\rangle + a_2^*\mathcal{T}|\psi_2\rangle, \quad a_1\text{et } a_2 \in \mathbb{C}. \tag{1.4.4}$$

D'autre part, l'opérateur $\mathcal{T}$ possède une propriété importante qui est l'antiunitarité,

$$\langle \mathcal{T}\phi \mid \mathcal{T}\psi\rangle = \langle \phi \mid \psi\rangle^* = \langle \psi \mid \phi\rangle, \tag{1.4.5}$$

Puisque $\mathcal{T}$ est une involution, donc la double action de $\mathcal{T}$ sur un état $|\psi\rangle$ laisse ce dernier inchangé à une phase près [5], à savoir

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^2|\psi\rangle &= e^{i\varphi}|\psi\rangle, && (1.4.6)\\ &= UKUK|\psi\rangle, && (1.4.7)\\ &= UKU|\psi\rangle^*, && (1.4.8)\\ &= UU^*|\psi\rangle. && (1.4.9) \end{aligned}$$

On obtient

$$e^{i\varphi} = UU^*, \tag{1.4.10}$$

prenons le transposé de cette dernière relation, que l'on note $()^t$, on trouve:

$$e^{i\varphi} = U^\dagger U^t. \tag{1.4.11}$$

Nous utilisons la propriété de l'unitarité de U, $UU^\dagger = U^\dagger U = 1$, nous arrivons à:

$$U^t = Ue^{i\varphi}, \tag{1.4.12}$$

prenons le transposé de (1.4.12), nous obtenons

$$U = U^t e^{i\varphi}, \tag{1.4.13}$$

En substituant (1.4.12) dans (1.4.13), nous aboutissons à: $U = Ue^{2i\varphi} \Longrightarrow e^{2i\varphi} = 1$, alors,

$$e^{i\varphi} = \pm 1, \tag{1.4.14}$$

ce qui signifie,

$$\mathcal{T}^2 \left|\psi\right\rangle = \pm 1 \left|\psi\right\rangle. \tag{1.4.15}$$

Enfin,

$$\mathcal{T}^2 = \pm 1. \tag{1.4.16}$$

Notons que, $\mathcal{T}^2 = \pm 1$ suivant le spin des particules, à savoir:

- $\mathcal{T}^2 = +1$: c'est le cas de la symétrie de renversement du temps **paire**, qui correspond au spin entier (cas bosonique).

- $\mathcal{T}^2 = -1$: c'est le cas de la symétrie de renversement du temps **impaire**, qui correspond au spin demi-entier (cas fermionique).

L'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$ agit sur les opérateurs de position x, d'impulsion p, et sur le nombre complexe i, comme suit [3]:

$$\mathcal{T}p\mathcal{T} = -p, \quad \mathcal{T}x\mathcal{T} = x, \quad \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \tag{1.4.17}$$

Dans le cas d'une symétrie paire ($\mathcal{T}^2 = +1$), $\mathcal{T}$ est donné pour un système à n-niveaux par [5]:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} K, \tag{1.4.18}$$

où σ_1 est une matrice de Pauli.

On remarque que, tous les termes diagonaux de $\mathcal{T}$ sont égaux à σ_1, les autres termes étant nuls.

Dans le cas d'une symétrie impaire ($\mathcal{T}^2 = -1$), $\mathcal{T}$ est donné pour un système à n-niveaux par [7]:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & i\sigma_2 & 0 & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & . & 0 \\ 0 & . & . & 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} K, \tag{1.4.19}$$

où σ_2 est une matrice de Pauli.

Dans ce cas, tous les termes diagonaux de $\mathcal{T}$ sont égaux à $i\sigma_2$, les termes non diagonaux étant nuls.

Notons que, dans notre travail, nous nous intéressons au cas d'une symétrie paire ($T^2 = +1$).

1.5 Dégénérescence de Kramers

Soit H l'Hamiltonien d'un système physique. On suppose que H est hermitien et invariant par symétrie de renversement du temps:

$$[H, \mathcal{T}] = 0, \tag{1.5.1}$$

si $|\psi\rangle$ est un état propre de H:

$$H|\psi\rangle = E|\psi\rangle\,, \tag{1.5.2}$$

alors,

$$H|\psi\rangle = H\mathcal{T}|\psi\rangle = \mathcal{T}H|\psi\rangle = \mathcal{T}E|\psi\rangle\,, \tag{1.5.3}$$

puisque H est hermitien, donc E est réelle, d'où

$$H\mathcal{T}|\psi\rangle = E\mathcal{T}|\psi\rangle\,, \tag{1.5.4}$$

c'est-à-dire que $|\phi\rangle = \mathcal{T}|\psi\rangle$ est aussi vecteur propre de H avec la même valeur propre E, alors [8, 9]:

$$\langle\psi \mid \phi\rangle = \langle\psi \mid \mathcal{T}\psi\rangle = \left\langle\mathcal{T}^2\psi \mid \mathcal{T}\psi\right\rangle, \tag{1.5.5}$$

cette égalité vient du fait que $\mathcal{T}$ est antiunitaire.

La question est donc de savoir si $|\phi\rangle$ et $|\psi\rangle$ sont colinéaires ou non.

- Cas 1: si $\mathcal{T}^2 = -1$: symétrie impaire, de (1.5.5) on tire que:

  $$\langle\psi \mid \phi\rangle = -\langle\psi \mid \mathcal{T}\psi\rangle = -\langle\psi \mid \phi\rangle\,, \tag{1.5.6}$$

  soit:

  $$\langle\psi \mid \phi\rangle = 0. \tag{1.5.7}$$

  donc $|\psi\rangle$ et $\mathcal{T}|\psi\rangle$ sont orthogonaux (non colinéaires) et E est deux fois dégénérée.

  De cette façon, les niveaux d'énergie d'un système physique invariant par symétrie de renversement du temps impaire ($\mathcal{T}^2 = -1$) sont tous dégénérés : c'est le théorème de Kramers.

Afin de décrire parfaitement la structure des systèmes quantiques invariants par symétrie de renversement du temps impaire, il est commode d'utiliser des variables hypercomplexes qui s'appellent les quaternions [10], que nous introduirons dans la section suivante.

- Cas 2: si $\mathcal{T}^2 = 1$: symétrie paire, le théorème de Kramers ne s'applique pas et on ne peut rien conclure sur la dégénérescence des niveaux d'énergie.

L'idée principale de notre travail est de montrer qu'un Hamiltonien non-hermitien (pseudo-hermitien), à spectre réel et invariant par symétrie de renversement du temps paire, peut admettre une structure de dégénérescence de Kramers.

1.6 Quaternions

Les quaternions ont été introduits, au 19ème siècle (exactement en 1843), par Sir William Rowan Hamilton [11]; cet astronome irlandais, a participé au développement du formalisme canonique de la mécanique quantique.

Les quaternions sont utilisés dans plusieurs domaines comme l'optique, l'informatique, et l'électromagnétisme.

Hamilton a essayé de trouver une interprétation géométrique pour la représentation des nombres complexes, il a étendu son travail pour des triplets et finalement, a créé les quadruplets qu'il a nommés "quaternions".

Ces derniers sont des éléments étudiés dans un espace à quatre dimensions $\mathbb{R}^4$, muni d'opérations d'addition, de soustraction et de multiplication. Le corps des quaternions est associatif, distributif et non commutatif.

Les quaternions se basent sur des équations contenant trois nombres imaginaires i, j, k tels que [12]:

$$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1. \tag{1.6.1}$$

$$ij = k, ki = j, jk = i. \tag{1.6.2}$$

$$ji = -k, ik = -j, kj = -i. \tag{1.6.3}$$

Les quaternions notés Q s'écrivent sous la forme suivante:

$$Q = w + ix + jy + kz, \tag{1.6.4}$$

où w, x, y, z sont des paramètres (constituants) réels.

Les quaternions obéissent aux opérations d'addition et de soustraction habituelles, comme suit:

$$Q^{\backprime} = w^{\backprime} + ix^{\backprime} + jy^{\backprime} + kz^{\backprime},$$

donc

$$Q + Q^{\backprime} = w + w^{\backprime} + i(x + x^{\backprime}) + j(y + y^{\backprime}) + k(z + z^{\backprime}). \tag{1.6.5}$$

$$Q - Q^{\backprime} = w - w^{\backprime} + i(x - x^{\backprime}) + j(y - y^{\backprime}) + k(z - z^{\backprime}). \tag{1.6.6}$$

La multiplication se fait comme suit:

$$QQ^{\backprime} = Q^{\backprime\backprime} = w^{\backprime\backprime} + ix^{\backprime\backprime} + jy^{\backprime\backprime} + kz^{\backprime\backprime}. \tag{1.6.7}$$

avec

$$w^{\backprime\backprime} = ww^{\backprime} - xx^{\backprime} - yy^{\backprime} - zz^{\backprime}. \tag{1.6.8}$$

$$x^{\backprime\backprime} = wx^{\backprime} + xw^{\backprime} + yz^{\backprime} - zy^{\backprime}. \tag{1.6.9}$$

$$y^{\backprime\backprime} = wy^{\backprime} + yw^{\backprime} + zx^{\backprime} - xz^{\backprime}. \tag{1.6.10}$$

$$z^{\backprime\backprime} = wz^{\backprime} + zw^{\backprime} + xy^{\backprime} - yx^{\backprime}. \tag{1.6.11}$$

Dans l'opération de multiplication, l'élément neutre est 1.

Le conjugué d'un quaternion est noté Q^*:

$$Q^* = w - ix - jy - kz. \tag{1.6.12}$$

L'inverse d'un quaternion est exprimé comme suit:

$$Q^{-1} = (1/QQ^*)Q^*. \tag{1.6.13}$$

La norme d'un quaternion Q est donnée par:

$$|Q|^2 = Q^*Q = x^2 + y^2 + z^2 + k^2. \tag{1.6.14}$$

Le quaternion peut être aussi représenté sous forme matricielle en exprimant les nombres i, j, k en fonction des matrices de Pauli $\sigma_n (n = 1, 2, 3)$ comme suit:

$$Q = w\sigma_0 + i\sigma_1 x + i\sigma_2 y + i\sigma_3 z, \tag{1.6.15}$$

où i représente le nombre complexe imaginaire pur ($i^2 = -1$), σ_0 est la matrice identité (2×2), les matrices de Pauli σ_i sont données par,

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{1.6.16}$$

Donc

$$Q = \begin{pmatrix} w + iz & i(x - iy) \\ i(x + iy) & w - iz \end{pmatrix}. \tag{1.6.17}$$

1.7 Split-Quaternions

En fait, il y a quatre familles de quaternions, à savoir:

Les quaternions, les quaternions hybrides, les split-quaternions, les quaternions hyperboliques.

Nous nous intéressons aux split-quaternions que nous utiliserons par la suite, en particulier, dans la construction des Hamiltoniens non-hermitiens.

Les split-quaternions (appelés aussi coquaternions), introduits par James Cockle en 1849, forment une algèbre associative.

Ils se basent sur des équations contenant trois nombres imaginaires i, j, k tels que:

$$i^2 = j^2 = +1, \, k^2 = -1. \tag{1.7.1}$$

$$ij = -ji = k, \;\; jk = -kj = -i, \tag{1.7.2}$$

$$ki = -ik = -j. \tag{1.7.3}$$

Remarquons que, $i^2 = j^2 = +1$, contrairement aux quaternions pour lesquels $i^2 = j^2 = -1$.

Les split-quaternions, notés S, s'écrivent sous la forme suivante:

$$S = w + ix + jy + kz. \tag{1.7.4}$$

La norme de S est donnée par:

$$|S|^2 = w^2 + x^2 + y^2 - z^2. \tag{1.7.5}$$

Les split-quaternions peuvent aussi s'écrire sous forme matricielle; ils sont générés par la matrice identité σ_0 (2×2) et par les matrices de Pauli SU(1,1) $(-\sigma_1, -\sigma_2, i\sigma_3)$, à savoir

$$S = w\sigma_0 - \sigma_1 x - \sigma_2 y + i\sigma_3 z, \tag{1.7.6}$$

où i est le nombre complexe imaginaire pur.

Les split-quaternions sont isomorphes à l'algèbre SU(1,1). Nous rappelons que l'algèbre SU(1,1) est engendrée par les trois générateurs $\{K_+, K_-, K_3\}$, $((K_+)^\dagger = K_-)$ qui satisfont les relations de commutation suivantes:

$$[K_3, K_+] = K_+, \quad [K_3, K_-] = -K_-, \quad [K_+, K_-] = -2K_3. \tag{1.7.7}$$

Nous présentons, dans la section suivante, un modèle typique d'Hamiltonien qui s'écrit en fonction des split-quaternions; cet Hamiltonien est de type SO(3,2).

1.8 Hamiltoniens de type SO(3,2)

L'algèbre SO(3,2) est une extension à quatre dimensions de l'algèbre SU(1,1), elle est engendrée par des matrices appelées matrices Gamma, Γ_a $(a = 1, 2, ..., 5)$, qui satisfont les relations d'anticommutation [5, 13]:

$$\{\Gamma_a, \Gamma_b\} = 2\delta_{ab}, \tag{1.8.1}$$

où δ_{ab} est une matrice diagonale à quatre dimensions, données par,

$$\delta_{ab} = \mathrm{diag}(-1, -1, 1, 1) \tag{1.8.2}$$

et les Γ_a sont données explicitement par,

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_1 \\ \sigma_1 & 0 \end{pmatrix}, \; \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sigma_2 \\ \sigma_2 & 0 \end{pmatrix}, \; \Gamma_3 = \begin{pmatrix} 0 & i\sigma_3 \\ -i\sigma_3 & 0 \end{pmatrix}, \tag{1.8.3}$$

$$\Gamma_4 = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_0 \\ \sigma_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Gamma_5 = \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \tag{1.8.4}$$

σ_0 étant la matrice identité (2×2).

Les Hamiltoniens de type SO(3,2) s'écrivent en fonction des matrices Gamma de la manière suivante [13]:

$$H = d_1\Gamma_1 + d_2\Gamma_2 + d_3\Gamma_3 + d_4\Gamma_4 + d_5\Gamma_5. \tag{1.8.5}$$

où $d_i (i = 0, 1, 2, 3, 4, 5)$ sont des nombres réels.

La forme matricielle de l'Hamiltonien H est exprimée comme suit:

$$H = \begin{pmatrix} d_5\sigma_0 & d_4\sigma_0 - d_1\sigma_1 - d_2\sigma_2 + id_3\sigma_3 \\ d_4\sigma_0 + d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 - id_3\sigma_3 & -d_5\sigma_0 \end{pmatrix}. \tag{1.8.6}$$

Posons:

$$a = d_5\sigma_0;$$

$$b = d_4\sigma_0 - d_1\sigma_1 - d_2\sigma_2 + id_3\sigma_3.$$

et

$$c = d_4\sigma_0 + d_1\sigma_1 + d_2\sigma_2 - id_3\sigma_3.$$

L'Hamiltonien SO(3,2) H s'écrit finalement en fonction des split-quaternions a, b et c comme suit,

$$H = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix}. \tag{1.8.7}$$

Jusqu'à présent, nous avons travaillé avec des Hamiltoniens hermitiens. Nous passons, maintenant, aux Hamiltoniens non-hermitiens à spectre réel, ces derniers étant soit $\mathcal{PT}$-symétriques soit pseudo-hermitiens. Nous nous proposons de présenter, dans le chapitre suivant, les notions de $\mathcal{PT}$-symétrie.

CHAPITRE 2

Symétrie $\mathcal{PT}$

2.1 Présentation historique sur l'utilisation des Hamiltoniens non-hermitiens

L'utilisation des Hamiltoniens non-hermitiens en physique remonte à la fin des années 50. Wu a décrit les sphères de Bose à l'aide d'un Hamiltonien non-hermitien [14]. Il a découvert que les énergies de ce système sont réelles, contrairement aux résultats antérieurs qui indiquaient que l'énergie fondamentale était divergente. Il avait noté que le remplacement d'un Hamiltonien hermitien par un autre non-hermitien réglait le problème de la divergence.

En se référant à la théorie des perturbations, en 1967, Wong a exposé des résultats concernant les spectres d'une famille d'Hamiltoniens non-hermitiens appelés physiquement "raisonnables" [15]. Wong a observé que, lorsqu'un Hamiltonien hermitien subit une perturbation extérieure non-hermitienne, son hermiticité est perdue; la forme de cette famille d'Hamiltoniens non-hermitiens s'écrit comme suit [16]:

$$H = H_0 + gH_1, \tag{2.1.1}$$

où H_1 est un Hamiltonien non-hermitien, g un paramètre réel et H_0 un Hamiltonien hermitien. Cette famille a été appelée: Hamiltoniens dissipatifs sans la définir complètement. Wong n'a pas donné d'explications claires concernant la réalité du spectre d'énergie [15].

Plus tard, en 1969, une approche de la méthode basée sur la théorie des perturbations était suggérée par Bender et Wu [17] afin de trouver les énergies de l'état fondamental. Ils ont pris comme modèle l'Hamiltonien suivant:

$$H = \frac{1}{2}p^2 + \frac{1}{2}x^2 + \lambda x^4, \tag{2.1.2}$$

qui est un Hamiltonien d'oscillateur anharmonique où λ est un paramètre complexe.

En 1975, des Hamiltoniens non-hermitiens sont utilisés par Haydock et Kelly [18] afin de déterminer la densité d'états d'un pseudo-potentiel chimique; ce dernier représente des interactions entre les électrons orbitaux dont la nature est non-hermitienne. Une détermination de la structure cristalline de l'Arsenic cristallin est illustrée comme résultat [18].

Ainsi l'hermiticité fut évoquée telle une condition suffisante mais pas nécessaire pour avoir un spectre réel [16, 18].

Plus tard, en 1980, dans le cadre des applications de la théorie des groupes, un article portant sur la symétrie de renversement du temps est annoncé par Stedman et Bulter [19]. Plus précisément, ils ont insisté sur l'effet des règles de sélection de renversement du temps dans le groupe de rotation SO(3). Cette étude est considérée comme une première publication reliant l'opérateur de renversement du temps et la conjugaison complexe tel qu'il est utilisé actuellement dans les $\mathcal{PT}$-symétries.

En 1981, une formulation quantique du processus de déclin a été établie par Faisal et Moloney [20], par la converion de l'équation de Schrödinger pour le cas des Hamiltoniens hermitiens au cas des Hamiltoniens non-hermitiens. Ils ont stipulé que l'état ne peut pas avoir une forte énergie, lorsqu'il subit le processus de déclin. La largeur du niveau d'énergie peut être représentée par une composante complexe; ainsi, ces énergies complexes correspondent aux valeurs propres des Hamiltoniens non-hermitiens.

En 1997, l'application d'un champ magnétique externe sur un semi-conducteur a engendré une partie imaginaire dans l'énergie de ce dernier. Hatano et Nelson ont tenté d'expliquer la signification des valeurs propres complexes obtenues [21].

Tous ces travaux qui utilisent des Hamiltoniens non-hermitiens n'appartiennent à aucune base fondamentale d'une théorie quantique non-hermitienne. En effet, les premières bases des théories quantiques non-hermitiennes n'ont vu le jour qu'à partir de 1998 [3].

En 1998, Bender et Boettcher [3], en se basant sur la conjecture de Bessis-Zinn Justin sur la réalité du spectre de l'Hamiltonien non-hermitien: $H = p^2 - (ix)^{2M}$ pour $M \geq 1$, ont prouvé avec une méthode numérique, que le spectre de l'Hamiltonien non-hermitien à une dimension: $H = p^2 + x^2(ix)^\nu, (\nu \in [0, +\infty[)$, est réel positif et discret. La réalité de ce spectre est une conséquence de $\mathcal{PT}$-symétrie de l'Hamiltonien H.

La $\mathcal{PT}$-symétrie est capitale: l'Hamiltonien $H = p^2 + ix^3 + ix$ est $\mathcal{PT}$-symétrique et les études numériques indiquent que son spectre est réel et positif, par contre, l'Hamiltonien $H = p^2 + ix^3 + x$ n'est pas $\mathcal{PT}$-symétrique et son spectre est complexe.

En 2002, Mostafazadeh a introduit la notion de pseudo-hermiticité [4] qui devient une extension de l'hermiticité. Dans la section suivante nous exposons l'essentiel des principaux résultats sur la $\mathcal{PT}$-symétrie.

2.2 $\mathcal{PT}$-symétrie

La $\mathcal{PT}$-symétrie (invariance) a été introduite par Bender et Boettcher en 1998 [3]. Cette symétrie porte sur des Hamiltoniens non-hermitiens.

On dit qu'un Hamiltonien est $\mathcal{PT}$-symétrique s'il est invariant sous l'action simultanée de $\mathcal{P}$ et de $\mathcal{T}$ où $\mathcal{P}$ est l'opérateur parité ou opérateur de réflexion d'espace qui consiste en une symétrie géométrique par rapport à l'origine, $\mathcal{T}$ est l'opérateur de renversement du sens du temps.

Ainsi, un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique satisfait à la relation suivante:

$$H = (\mathcal{PT})\, H\, (\mathcal{PT})^\dagger \Longleftrightarrow [H, \mathcal{PT}] = 0. \tag{2.2.1}$$

Cette relation signifie que H commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$ [3].

Cette relation est notée comme suit:

$$H = H^{\mathcal{PT}}. \tag{2.2.2}$$

2.2.1 Opérateur parité $\mathcal{P}$

$\mathcal{P}$ est l'opérateur de réflexion,

$$\mathcal{P}\left|\overrightarrow{r}\right\rangle = \left|-\overrightarrow{r}\right\rangle \tag{2.2.3}$$

l'action de $\mathcal{P}^2$ sur $\left|\overrightarrow{r}\right\rangle$ redonne $\left|\overrightarrow{r}\right\rangle$,

$$\mathcal{P}^2\left|\overrightarrow{r}\right\rangle = \mathcal{P}(\mathcal{P}\left|\overrightarrow{r}\right\rangle) = \mathcal{P}\left|-\overrightarrow{r}\right\rangle = \left|\overrightarrow{r}\right\rangle. \tag{2.2.4}$$

Cette relation nous permet d'identifier $\mathcal{P}^2$ comme l'opérateur identité (unité).

$$\mathcal{P}^2 = 1. \tag{2.2.5}$$

Comme

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-1}\mathcal{P} = 1. \tag{2.2.6}$$

il s'ensuit que:

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}. \tag{2.2.7}$$

$\mathcal{P}$ est un opérateur linéaire:

$$\mathcal{P}(a_1\left|\psi_1\right\rangle + a_2\left|\psi_2\right\rangle) = a_1\mathcal{P}\left|\psi_1\right\rangle + a_2\mathcal{P}\left|\psi_2\right\rangle, a_1 \text{ et } a_2 \in \mathbb{C}. \tag{2.2.8}$$

La relation de conjugaison hermitique de (2.2.3) donne:

$$\Rightarrow \left\langle\overrightarrow{r}\right|\mathcal{P}^\dagger = \left\langle-\overrightarrow{r}\right|, \tag{2.2.9}$$

Comme $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$, il s'ensuit que,

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}^{-1}. \tag{2.2.10}$$

Il en résulte que $\mathcal{P}$ est unitaire,

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^\dagger = \mathcal{P}^\dagger\mathcal{P} = 1. \tag{2.2.11}$$

L'action de l'opérateur $\mathcal{P}$ sur un état $\left|\psi\right\rangle$ s'écrit:

$$\mathcal{P}\left|\psi\right\rangle = S\left|\psi\right\rangle, \tag{2.2.12}$$

où S est une matrice représentant l'opérateur $\mathcal{P}$.

L'opérateur parité $\mathcal{P}$ agit sur les opérateurs de position x et d'impulsion p de la manière suivante [3]:

$$\mathcal{P}x\mathcal{P} = -x, \quad \mathcal{P}p\mathcal{P} = -p. \tag{2.2.13}$$

Notons que l'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$ a été déjà défini dans le premier chapitre. Nous rappelons que $\mathcal{T}$ est un opérateur antiunitaire, il agit sur les opérateurs de position x, d'impulsion p et sur le nombre complexe i comme suit [3]:

$$\mathcal{T}p\mathcal{T} = -p, \quad \mathcal{T}x\mathcal{T} = x, \quad \mathcal{T}i\mathcal{T} = -i. \tag{2.2.14}$$

2.2.2 Opérateur $\mathcal{PT}$

L'opérateur $\mathcal{PT}$ est un opérateur antilinéaire,

$$(\mathcal{PT})(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle) = \mathcal{P}\left[\mathcal{T}(a_1 |\psi_1\rangle + a_2 |\psi_2\rangle)\right], \tag{2.2.15}$$

$$= \mathcal{P}(a_1^*\mathcal{T} |\psi_1\rangle + a_2^*\mathcal{T} |\psi_2\rangle), \tag{2.2.16}$$

$$= a_1^*(\mathcal{PT}) |\psi_1\rangle + a_2^*(\mathcal{PT}) |\psi_2\rangle\,; \; a_1 \text{ et } a_2 \in \mathbb{C}. \tag{2.2.17}$$

Comme l'opérateur $\mathcal{P}$ est un opérateur unitaire et l'opérateur $\mathcal{T}$ est un opérateur antiunitaire, alors le produit $\mathcal{PT}$ est un opérateur antiunitaire:

$$\langle \mathcal{PT}\phi \mid \mathcal{PT}\psi \rangle = \langle \phi \mid \psi \rangle^* = \langle \psi \mid \phi \rangle\,, \tag{2.2.18}$$

L'opérateur $\mathcal{PT}$ agit sur les opérateurs de position x, d'impulsion p et sur le nombre complexe i comme suit [3]:

$$\begin{aligned} &(\mathcal{PT})x(\mathcal{PT}) = -x, \quad (\mathcal{PT})p(\mathcal{PT}) = p, \\ &(\mathcal{PT})i(\mathcal{PT}) = -i. \end{aligned} \tag{2.2.19}$$

Les opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ commutent,

$$[\mathcal{P},\ \mathcal{T}] = 0. \tag{2.2.20}$$

Le spectre d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est réel ou bien constitué de paires d'énergies complexes conjuguées l'une de l'autre [4]. Les deux théorèmes suivants nous en donnent la preuve.

Théorème 1 [1, 4]**:**

L'invariance (symétrie) d'un opérateur non-hermitien H sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ donne un spectre qui est constitué de paires d'énergies complexes conjuguées l'une de l'autre.

Preuve:

Considérons $\psi_n(x)$ une fonction propre de l'Hamiltonien H, l'équation aux valeurs propres s'écrit comme suit:

$$H\psi_n(x) = E_n\psi_n(x), \tag{2.2.21}$$

où E_n est une valeur propre complexe.

L'application de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur les membres de l'équation (2.2.21) nous donne:

$$(\mathcal{PT})H\psi_n(x) = (\mathcal{PT})E_n\psi_n(x). \tag{2.2.22}$$

Puisque l'opérateur $\mathcal{PT}$ est antilinéaire, alors:

$$(\mathcal{PT})H\psi_n(x) = E_n^*(\mathcal{PT})\psi_n(x), \tag{2.2.23}$$

où la valeur E_n^* est le complexe conjugué de la valeur propre E_n.

Utilisons la relation d'invariance $[H, \mathcal{PT}] = 0$, nous obtenons l'équation suivante:

$$H(\mathcal{PT}\psi_n(x)) = E_n^*(\mathcal{PT}\psi_n(x)). \tag{2.2.24}$$

Ce qui implique que $\mathcal{PT}\psi_n(x)$ est aussi une fonction propre de l'Hamiltonien H avec la valeur propre E_n^*.

Donc, le spectre de tout Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est constitué de paires d'énergie complexes conjuguées l'une de l'autre (E_n, E_n^*).

Théorème 2 [1, 4]**:**

Soit H un opérateur $\mathcal{PT}$-symétrique, s'il possède des fonctions propres invariantes sous l'opération de $\mathcal{PT}$, alors, le spectre des valeurs propres correspondant est réel.

Preuve:

L'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ sur une fonction d'onde $\psi_n(x)$ est donnée comme suit:

$$\mathcal{PT}\psi_n(x) = [\psi_n(-x)]^* \,. \tag{2.2.25}$$

Par hypothèse, $\psi_n(x)$ est invariante sous l'opération de $\mathcal{PT}$, c.à.d.

$$\mathcal{PT}\psi_n(x) = \psi_n(x), \tag{2.2.26}$$

donc l'équation (2.2.24) s'écrit,

$$H\psi_n(x) = E_n^*\psi_n(x). \tag{2.2.27}$$

En comparant (2.2.21) avec (2.2.27), il vient:

$$E_n = E_n^*, \tag{2.2.28}$$

ce qui implique que le spectre d'énergie est réel.

Donc, le spectre d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est réel ou bien constitué de paires d'énergies complexes conjuguées l'une de l'autre [1, 4].

2.2.3 Symétrie $\mathcal{PT}$ non-brisée

Si les états propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H sont états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, on dit que la symétrie $\mathcal{PT}$ est non-brisée [3] (unbroken $\mathcal{PT}$-symmetry).

$$\mathcal{PT}\,|\psi\rangle = \alpha\,|\psi\rangle \,. \tag{2.2.29}$$

Par application du théorème 2, les valeurs propres de H sont réelles.

Ainsi, le cas de symétrie $\mathcal{PT}$ non-brisée de H correspond aux valeurs propres réelles de H.

2.2.4 Symétrie $\mathcal{PT}$ brisée

Par contre, s'il existe des états propres de l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique qui ne sont pas états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, alors la symétrie $\mathcal{PT}$ est brisée (broken $\mathcal{PT}$-symmetry).

$$\mathcal{PT}\,|\psi\rangle \neq \alpha\,|\psi\rangle \,. \tag{2.2.30}$$

En vertu du théorème 1, les valeurs propres de H sont constituées de paires d'énergies complexes conjuguées l'une de l'autre.

Donc, le cas de symétrie $\mathcal{PT}$ brisée de H correspond aux valeurs propres de H constituées de paires d'énergies complexes conjuguées l'une de l'autre.

Dans le cas où le spectre d'énergie d'un Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique est constitué d'une partie réelle et de paires complexes conjuguées, la $\mathcal{PT}$-symétrie est partiellement brisée; par contre, si tout le spectre d'énergie est complexe, alors, la $\mathcal{PT}$-symétrie est totalement brisée.

2.2.5 Opérateur $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}$ est appelé opérateur de conjugaison; il est linéaire, complexe et il est représenté, dans l'espace des coordonnées, par une somme de produits des fonctions propres de l'Hamiltonien considéré comme suit [22]:

$$\mathcal{C}(x,y) = \sum_{0}^{\infty} \phi_n(x)\phi_n(y). \tag{2.2.31}$$

L'action de cet opérateur sur un ket $|\psi\rangle$ est:

$$\mathcal{C}\,|\psi\rangle = s_i\,|\psi\rangle\,, \tag{2.2.32}$$

où $s_i = \pm 1$. Comme $\mathcal{C}$ est linéaire, on peut le représenter par une matrice K:

$$\mathcal{C}\,|\psi\rangle = K\,|\psi\rangle\,, \tag{2.2.33}$$

On a $\mathcal{C}^2 = 1$, et $\mathcal{P}^2 = 1$, mais $\mathcal{P} \neq \mathcal{C}$ parce que $\mathcal{P}$ est réel et $\mathcal{C}$ est complexe.

L'opérateur $\mathcal{C}$ ne commute ni avec l'opérateur parité $\mathcal{P}$ ni avec l'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$; il commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$ et avec l'Hamiltonien H.

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0. \tag{2.2.34}$$

$$[\mathcal{C}, H] = 0. \tag{2.2.35}$$

Ces dernières propriétés seront prises en compte dans la construction de l'opérateur $\mathcal{C}$ sachant que ce dernier dépend du système étudié, contrairement aux opérateurs $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$.

Enfin, les valeurs propres de $\mathcal{C}$ sont $\pm$ 1.

Nous nous proposons, maintenant, d'introduire la classe d'Hamiltoniens non-hermitiens à spectre réel dits pseudo-hermitiens.

CHAPITRE 3

Pseudo-hermiticité

3.1 Introduction

L'introduction du concept de la pseudo-hermiticité remonte aux années 40 [23], où des états de normes négatives apparaissent lors de la normalisation. En 1992, Scholtz et ses collaborateurs [24] ont introduit la notion de quasi-hermiticité et ont mis au point la construction d'une transformation des opérateurs hermitiens vers les opérateurs quasi-hermitiens. Ils ont aussi développé les transformations correspondantes aux produits scalaires dans l'espace de Hilbert de dimension infinie. En 2002, Mostafazadeh a révolutionné le concept pseudo-hermiticité et a présenté plusieurs propriétés des Hamiltoniens pseudo-hermitiens [2, 4].

Nous allons nous intéresser tout d'abord à quelques résultats concernant la base propre d'un opérateur non-hermitien.

3.2 Hamiltonien non-hermitien ayant une base bi-orthonormée complète

Soit H un Hamiltonien non-hermitien diagonalisable avec un spectre discret et des vecteurs propres notés $\{|\psi_{n,a}\rangle\}$, on note $\{|\phi_{n,b}\rangle\}$ les vecteurs propres de $H^{\dagger}$.

Il se trouve que les vecteurs propres de H et $H^{\dagger}$ forment un système bi-orthonormé complet $\left\{\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \left|\phi_{n,b}\right\rangle\right\}$ [27], ils vérifient les relations suivantes dans les cas des valeurs propres dégénérées et non-dégénérées:

3.2.1 Cas des valeurs propres non-dégénérées

Dans le cas des valeurs propres non-dégénérées, $\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}$ vérifient les relations:

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle. \tag{3.2.1}$$

$$H^{\dagger}|\phi_n\rangle = E_n^*|\phi_n\rangle. \tag{3.2.2}$$

$$\langle\phi_n \mid \psi_m\rangle = \delta_{nm}. \tag{3.2.3}$$

$$\sum_n |\phi_n\rangle\langle\psi_n| = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\phi_n| = 1. \tag{3.2.4}$$

n décrit l'ensemble des valeurs propres.

Compte tenu des relations (3.2.1), (3.2.2) et (3.2.4), on peut écrire l'Hamiltonien H et son adjoint $H^{\dagger}$ comme suit:

$$H|\psi_n\rangle\langle\phi_n| = E_n|\psi_n\rangle\langle\phi_n|. \tag{3.2.5}$$

Soit

$$H = \sum_n E_n|\psi_n\rangle\langle\phi_n|. \tag{3.2.6}$$

De même,

$$H^{\dagger}|\phi_n\rangle = E_n^*|\phi_n\rangle. \tag{3.2.7}$$

donc

$$H^{\dagger}|\phi_n\rangle\langle\psi_n| = E_n^*|\phi_n\rangle\langle\psi_n|. \tag{3.2.8}$$

Ce qui implique

$$H^{\dagger} = \sum_n E_n^* \left|\phi_n\right\rangle \left\langle\psi_n\right| . \tag{3.2.9}$$

3.2.2 Cas des valeurs propres dégénérées

Dans le cas des valeurs propres dégénérées, on note par a et b les indices de dégénérescence, alors $\left\{\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \left|\phi_{n,b}\right\rangle\right\}$ forment aussi un système bi-orthonormé complet et dans ce cas, ils vérifient les relations [4]:

$$H\left|\psi_{n,a}\right\rangle = E_n \left|\psi_{n,a}\right\rangle, \tag{3.2.10}$$

$$H^{\dagger}\left|\phi_{n,a}\right\rangle = E_n^* \left|\phi_{n,a}\right\rangle, \tag{3.2.11}$$

$$\left\langle\phi_{m,b} \mid \psi_{n,a}\right\rangle = \delta_{mn}\delta_{ab}, \tag{3.2.12}$$

$$\sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \left|\phi_{n,a}\right\rangle \left\langle\psi_{n,a}\right| = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \left|\psi_{n,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n,a}\right| = 1, \tag{3.2.13}$$

où d_n est la multiplicité (degré de dégénérescence), n est la notation de spectre d'énergie.

Passons à présent au cas particulier des opérateurs pseudo-hermitiens.

3.3 Définition de la pseudo-hermiticité

Un opérateur linéaire non-hermitien H est dit pseudo-hermitien, s'il existe un opérateur η linéaire, hermitien et inversible tel que [4]:

$$H^{\#} = H, \tag{3.3.1}$$

avec

$$H^{\#} = \eta^{-1} H^{\dagger} \eta. \tag{3.3.2}$$

$H^{\#}$ désigne le pseudo-adjoint de H, $H^{\dagger}$ étant l'adjoint de H.

En égalant ces deux équations, nous obtenons

$$H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}, \tag{3.3.3}$$

relation reliant $H^\dagger$ et H d'un Hamiltonien pseudo-hermitien.

La métrique η peut être définie positive ou indéfinie. Rappelons qu'un opérateur η est défini positif si toutes ses valeurs propres sont positives. S'il existe, dans le spectre de η, des valeurs négatives, alors η est dit indéfini.

Dans le cas d'une métrique η définie positive, il existe un opérateur ρ tel que $\eta = \rho^2$, où ρ est un opérateur linéaire hermitien et inversible; H admet, alors, un Hamiltonien hermitien correspondant h vérifiant la relation de similarité $h = \rho H \rho^{-1}$. Dans ce cas, on dit que H est quasi-hermitien [2].

Notons que l'opérateur η n'est pas unique.

Remarquons que, si l'opérateur η est égal à l'opérateur identité I, alors $H^\dagger = H$ et la pseudo-hermiticité se réduit à l'hermiticité.

Si η est égal à l'opérateur parité $\mathcal{P}$, la condition $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ se réduit alors à $H^\dagger = \mathcal{P} H \mathcal{P}^{-1}$ et la pseudo-hermiticité se réduit, alors, à la $\mathcal{PT}$-symétrie [25]. Sachant que la $\mathcal{PT}$-symétrie est un cas particulier de la pseudo-hermiticité.

Mostafazadeh [2] a défini un nouveau produit scalaire, appelé η-produit scalaire, dénoté par $\langle . \mid . \rangle_\eta$, avec

$$\langle \psi_1 \mid \psi_2 \rangle_\eta = \langle \psi_1 \mid \eta \mid \psi_2 \rangle = \langle \psi_1 \mid \eta \psi_2 \rangle . \tag{3.3.4}$$

où $\langle . \mid . \rangle$ est le produit scalaire usuel.

3.4 Propriétés de la pseudo-hermiticité

Si I est l'opérateur identité, A_i des opérateurs linéaires et, α et β des nombres complexes, alors, on a les propriétés suivantes [4]:

$$I^\# = \eta^{-1} I^\dagger \eta = \eta^{-1} \eta = I, \tag{3.4.1}$$

$$(A^\#)^\# = \eta^{-1} (\eta^{-1} A^\dagger \eta)^\dagger \eta = \eta^{-1} \eta A \eta^{-1} \eta = A, \tag{3.4.2}$$

$$(A_1 A_2)^\# = \eta^{-1} (A_1 A_2)^\dagger \eta = \eta^{-1} A_2^\dagger \eta \eta^{-1} A_1^\dagger \eta = A_2^\# A_1^\#, \tag{3.4.3}$$

Notons que, l'ordre des opérateurs change dans le cas du pseudo-adjoint d'un produit d'opérateurs contrairement au cas du pseudo-adjoint d'une somme d'opérateurs.

$$(\alpha A_1 + \beta A_2)^{\#} = \eta^{-1}(\alpha^* A_1^{\dagger})\eta + \eta^{-1}(\beta^* A_2^{\dagger})\eta = \alpha^* A_1^{\#} + \beta^* A_2^{\#}. \tag{3.4.4}$$

Notons que l'opération de conjugaison pseudo-hermitienne se fait de la même manière que la conjugaison hermitienne c'est à dire en:

· Renversant l'ordre des différents termes.

· Transformant les nombres complexes en leurs conjugués.

· Changeant les kets en bras et inversement.

· Transformant les opérateurs en leurs pseudo-adjoints.

Dans la mécanique quantique hermitienne, afin de garantir une théorie quantique physiquement acceptable, le produit scalaire usuel de deux vecteurs quelconques, dans l'espace de Hilbert, doit être constant au cours du temps, cette condition assure une densité de probabilité indépendante du temps.

Soit

$$|\psi_i(t)\rangle = e^{-iHt}\,|\psi_i(0)\rangle\,, \tag{3.4.5}$$

alors

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_i(t) \mid \psi_j(t) \right\rangle &= \left\langle \psi_i(0) \mid e^{iH^{\dagger}t} e^{-iHt} \mid \psi_j(0) \right\rangle. & (3.4.6)\\
&= \left\langle \psi_i(0) \mid e^{iHt} e^{-iHt} \mid \psi_j(0) \right\rangle. & (3.4.7)\\
&= \left\langle \psi_i(0) \mid \psi_j(0) \right\rangle. & (3.4.8)
\end{aligned}$$

Par contre, dans la mécanique quantique pseudo-hermitienne, du fait que $H \neq H^{\dagger}$, le produit scalaire usuel ne présente plus les propriétés d'invariance au cours du temps et d'orthogonalité des états propres de l'Hamiltonien pseudo-hermitien H.

Afin de résoudre ce problème, le nouveau produit scalaire donné en équation (3.3.4) a été introduit par Mostafazadeh [2]. Il est invariant au cours du temps, comme nous allons le démontrer:

Soit

$$|\psi_i(t)\rangle = e^{-iHt}\,|\psi_i(0)\rangle \tag{3.4.9}$$

alors

$$\langle\psi_i(t) \mid \psi_j(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_i(t) \mid \eta \mid \psi_j(t)\right\rangle = \left\langle\psi_i(0) \mid e^{iH^\dagger t}\eta e^{-iHt} \mid \psi_j(0)\right\rangle. \tag{3.4.10}$$

Utilisons la propriété $\eta\eta^{-1} = 1$, on obtient:

$$\langle\psi_i(t) \mid \psi_j(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_i(0) \mid \eta\eta^{-1}e^{iH^\dagger t}\eta e^{-iHt} \mid \psi_j(0)\right\rangle. \tag{3.4.11}$$

En utilisant le résultat suivant (voir appendice 2):

$$M^{-1}e^A M = e^{M^{-1}AM},$$

où A et M sont des opérateurs linéaires, nous avons:

$$\langle\psi_i(t) \mid \psi_j(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_i(0) \mid \eta e^{i\eta^{-1}H^\dagger\eta t}e^{-iHt} \mid \psi_j(0)\right\rangle. \tag{3.4.12}$$

Sachant que, $H^\dagger = \eta H\eta^{-1}$ soit $H = \eta^{-1}H^\dagger\eta$, il vient:

$$\langle\psi_i(t) \mid \psi_j(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_i(0) \mid \eta e^{iHt}e^{-iHt} \mid \psi_j(0)\right\rangle, \tag{3.4.13}$$

$$= \left\langle\psi_i(0) \mid \eta \mid \psi_j(0)\right\rangle, \tag{3.4.14}$$

$$= \langle\psi_i(0) \mid \psi_j(0)\rangle_\eta. \tag{3.4.15}$$

Cette dernière équation montre que le nouveau produit scalaire est conservé au cours du temps.

Vérifions maintenant l'orthogonalité des vecteurs propres associés à l'Hamiltonien H [26] :

Soient $|\psi_i\rangle$ des vecteurs propres de H associés aux valeurs propres E_i,

$$H\psi_i = E_j\psi_j, \tag{3.4.16}$$

donc

$$\left\langle\psi_i \mid H\psi_j\right\rangle_\eta = \left\langle\psi_i \mid E_j\psi_j\right\rangle_\eta = E_j\left\langle\psi_i \mid \psi_j\right\rangle_\eta,$$

d'autre part, on a

$$\left\langle \psi_i \mid H\psi_j \right\rangle_\eta = \left\langle \psi_i \mid \eta H\psi_j \right\rangle = \left\langle \psi_i \mid \eta H\eta^{-1}\eta\psi_j \right\rangle = \left\langle \psi_i \mid H^\dagger \eta\psi_j \right\rangle, \tag{3.4.17}$$

$$= E_i^* \left\langle \psi_i \mid \eta \mid \psi_j \right\rangle = E_i^* \left\langle \psi_i \mid \psi_j \right\rangle_\eta . \tag{3.4.18}$$

donc

$$(E_j - E_i^*) \left\langle \psi_i \mid \psi_j \right\rangle_\eta = 0.$$

Premier cas: $i \neq j$ alors, $\left\langle \psi_i \mid \psi_j \right\rangle_\eta = 0$, ce qui implique que les vecteurs propres sont orthogonaux.

Deuxième cas: $i = j$: sachant que le η-produit scalaire est défini de manière à donner une norme positive non nulle, alors, $E_i - E_i^* = 0$, c.à.d. que les valeurs propres sont réelles.

3.5 Théorèmes fondamentaux de la pseudo-hermiticité

Théorème 1 [2]:

Soit H un Hamiltonien non-hermitien ayant un spectre discret et admettant une base bi-orthonormée complète. H est pseudo-hermitien si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1) Les valeurs propres de H sont réelles.

2) Les valeurs propres de H sont constituées de paires de valeurs propres complexes conjuguées l'une de l'autre.

Théorème 2 [2]:

Soit H un Hamiltonien non-hermitien ayant un spectre discret et admettant une base bi-orthonormée complète. H est quasi-hermitien si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1) H est pseudo-hermitien avec un opérateur métrique de la forme $\eta = \rho^2$, où ρ est un opérateur linéaire, inversible et hermitien.

2) H admet un spectre réel.

3) H admet un Hamiltonien hermitien h correspondant via la relation de similarité: $h = \rho H \rho^{-1}$ tel que H et h sont isospectraux.

3.6 Propriétés spectrales des Hamiltoniens pseudo-hermitiens

Soit H un Hamiltonien pseudo-hermitien à spectre discret. D'après les théorèmes 1 et 2, les valeurs propres de H sont réelles ou sont constituées de paires de valeurs propres complexes conjuguées l'une de l'autre avec la même multiplicité [2].

A partir des équations $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$, (3.2.10) et (3.2.11) on obtient:

$$H(\eta^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle) = \eta^{-1} H^\dagger \left|\phi_{n,a}\right\rangle = E_n^*(\eta^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle). \tag{3.6.1}$$

L'opérateur η^{-1} est inversible, $\eta^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle \neq 0$ est un vecteur propre de H avec la valeur propre E_n^*, donc E_n et E_n^* ont la même multiplicité.

On peut représenter l'Hamiltonien H spectralement, de la manière suivante:

$$H = \sum_{n_0} \sum_{a=1}^{d_{n_0}} E_{n_0} \left|\psi_{n_0,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n_0,a}\right| + \sum_{n_+} \sum_{a=1}^{d_{n_+}} (E_{n_+} \left|\psi_{n_+,\alpha}\right\rangle \left\langle\phi_{n_+,\alpha}\right| + E_{n_+}^* \left|\psi_{n_-,\alpha}\right\rangle \left\langle\phi_{n_-,\alpha}\right|), \tag{3.6.2}$$

Notons que, nous utilisons la notation n_0 pour les valeurs propres réelles et les états propres correspondants et la notation $n_\pm$ pour les valeurs propres complexes avec une partie imaginaire $\pm$ et les états propres associés.

Dans ce cas, les vecteurs propres de $H^\dagger$ sont reliés aux vecteurs propres de H par les relations suivantes:

$$\left|\phi_{n_0,a}\right\rangle = \eta\left|\psi_{n_0,a}\right\rangle, \qquad \left|\phi_{n_\pm,\alpha}\right\rangle = \eta\left|\psi_{n_\mp,\alpha}\right\rangle. \tag{3.6.3}$$

A partir des équations (3.6.3), nous pouvons exprimer explicitement les relations de l'opérateur métrique η et son inverse η^{-1} comme suit:

$$\eta = \sum_{n_0}\sum_{a=1}^{d_{n_0}}\left|\phi_{n_0,a}\right\rangle\left\langle\phi_{n_0,a}\right| + \sum_{n_+}\sum_{a=1}^{d_{n_+}}(\left|\phi_{n_-,\alpha}\right\rangle\left\langle\phi_{n_+,\alpha}\right| + \left|\phi_{n_+,\alpha}\right\rangle\left\langle\phi_{n_-,\alpha}\right|), \tag{3.6.4}$$

$$\eta^{-1} = \sum_{n_0}\sum_{a=1}^{d_{n_0}}\left|\psi_{n_0,a}\right\rangle\left\langle\psi_{n_0,a}\right| + \sum_{n_+}\sum_{a=1}^{d_{n_+}}(\left|\psi_{n_-,\alpha}\right\rangle\left\langle\psi_{n_+,\alpha}\right| + \left|\psi_{n_+,\alpha}\right\rangle\left\langle\psi_{n_-,\alpha}\right|), \tag{3.6.5}$$

En particulier, la combinaison des résultats (3.6.3) avec l'équation (3.2.12), nous conduit aux relations de l'η-orthonormalisation des états propres de l'Hamiltonien H.

$$\langle\psi_{n_0,a} \mid \psi_{m_0,b}\rangle_\eta = \delta_{n_0m_0}\delta_{ab}, \tag{3.6.6}$$

$$\langle\psi_{n_\pm,\alpha} \mid \psi_{m_\mp,\beta}\rangle_\eta = \delta_{n_\pm m_\mp}\delta_{\alpha\beta}. \tag{3.6.7}$$

Rappelons que, les équations (3.6.2), (3.6.4) et (3.6.5) satisfont la relation de pseudo-hermiticité: $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$.

Pour tout Hamiltonien H pseudo-hermitien à spectre discret tel que $\eta = \rho^2$, on peut définir un opérateur h tel que $h = \rho H \rho^{-1}$.

3.6.1 Cas du spectre réel

En vertu du théorème 2, à tout Hamiltonien pseudo-hermitien H ayant un spectre réel est associé un Hamiltonien hermitien h; ces deux Hamiltoniens sont iso-spectraux et sont reliés par la relation de similarité donnée précédemment [2]:

$$h = \rho H \rho^{-1}. \tag{3.6.8}$$

Montrons que h est hermitien:

$$h^{\dagger} = \rho^{-1\dagger} H^{\dagger} \rho^{\dagger}. \tag{3.6.9}$$

Comme ρ est hermitien, nous écrivons:

$$h^{\dagger} = \rho^{-1} H^{\dagger} \rho. \tag{3.6.10}$$

En introduisant la relation: $H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}$ dans (3.6.10), il vient:

$$h^{\dagger} = \rho^{-1} \eta H \eta^{-1} \rho. \tag{3.6.11}$$

Soit

$$h^{\dagger} = \rho^{-1} \rho^{2} H (\rho^{2})^{-1} \rho, \tag{3.6.12}$$

où encore

$$h^{\dagger} = \rho H \rho^{-1}. \tag{3.6.13}$$

Donc

$$h^{\dagger} = h. \tag{3.6.14}$$

A partir de cette relation (3.6.14), on aboutit à la relation de la pseudo-hermiticité.

$$h^{\dagger} = h \Longrightarrow \rho H \rho^{-1} = \rho^{-1} H^{\dagger} \rho \Longrightarrow H^{\dagger} = \rho^{2} H \left[\rho^{-1}\right]^{2} = \eta H \eta^{-1}. \tag{3.6.15}$$

Notons que, puisque h est hermitien, il préserve le produit scalaire standard $\langle \varphi_n \mid \varphi_m \rangle = \delta_{nm}$, où les $\{|\varphi_n\rangle\}$ sont les vecteurs propres de l'Hamiltonien équivalent h.

3.7 Correspondance de Dayson

Dans le cas du spectre réel, les vecteurs propres de H et $H^\dagger$ sont reliés à ceux de h. Soit les trois équations aux valeurs propres des ces Hamiltoniens, à savoir:

$$h|\varphi_n\rangle = E_n|\varphi_n\rangle, \tag{3.7.1}$$

$$H\left|\psi_{n,a}\right\rangle = E_n\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \tag{3.7.2}$$

$$H^\dagger\left|\phi_{n,a}\right\rangle = E_n\left|\phi_{n,a}\right\rangle, \tag{3.7.3}$$

La correspondance de Dayson [28] permet de relier les vecteurs propres de H et $H^\dagger$ à ceux de h comme suit:

$$\left|\psi_{n,a}\right\rangle = \rho^{-1}|\varphi_n\rangle, \tag{3.7.4}$$

$$\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \rho|\varphi_n\rangle, \tag{3.7.5}$$

L'avantage de la correspondance de Dayson est qu'elle permet de décrire un système représenté par un Hamiltonien pseudo-hermitien à spectre réel à l'aide de son correspondant hermitien.

3.8 Différentes approches de calcul de la métrique η

Il existe plusieurs méthodes de construction de l'opérateur métrique η. Parmi ces méthodes, nous décrirons les plus courantes.

3.8.1 Méthode spectrale

C'est une méthode simple, basée sur la représentation spectrale de l'opérateur η. Pour un Hamiltonien pseudo-hermitien, les états propres forment une base bi-orthonormée. L'opérateur métrique et son inverse peuvent être calculés explicitement de la manière suivante [27]:

$$\eta = \sum_n |\phi_n\rangle\langle\phi_n|\,. \tag{3.8.1}$$

$$\eta^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n| \,, \tag{3.8.2}$$

où les $\{|\phi_n\rangle\}$ sont les états propres de $H^\dagger$ et les $\{|\psi_n\rangle\}$ sont les états propres de H. Ces relations correspondent au cas des valeurs propres non-dégénérées.

Dans le cas des valeurs propres dégénérées, η et η^{-1} sont donnés par [29]:

$$\eta = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} |\phi_{n,a}\rangle \langle\phi_{n,a}|, \tag{3.8.3}$$

$$\eta^{-1} = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} |\psi_{n,a}\rangle \langle\psi_{n,a}|, \tag{3.8.4}$$

où a est l'indice de dégénérescence et d_n la multiplicité (degré de dégénérescence).

Notons que l'on peut exprimer la métrique η comme suit [30]:

$$\eta = (DD^\dagger)^{-1}, \tag{3.8.5}$$

où D est la matrice qui diagonalise l'Hamiltonien H.

3.8.2 Méthode de paramétrisation de l'opérateur $\mathcal{C}$

Cette méthode consiste à construire η à partir des opérateurs de conjugaison $\mathcal{C}$ et de parité $\mathcal{P}$ comme suit [7, 31]:

$$\eta = \mathcal{PC} \tag{3.8.6}$$

soit

$$\eta^{-1} = \mathcal{CP} \tag{3.8.7}$$

Pour construire l'opérateur $\mathcal{C}$, on peut paramétriser ce dernier comme suit:

$$\mathcal{C} = e^{Q(x,p)}\mathcal{P}. \tag{3.8.8}$$

où Q est un opérateur hermitien [1].

Ensuite nous déterminons Q en imposant les conditions suivantes (qui sont les propriétés de l'opérateur $\mathcal{C}$):

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \;\; [\mathcal{C}, H] = 0, \;\; \mathcal{C}^2 = 1. \tag{3.8.9}$$

L'Hamiltonien équivalent h de l'Hamiltonien H, défini dans (3.6.8) est en effet hermitien, [1]: $h = \rho H^{\dagger} \rho^{-1}$,

$$\begin{aligned} h^{\dagger} &= e^{\frac{Q}{2}} H^{\dagger} e^{-\frac{Q}{2}}, & (3.8.10) \\ &= e^{-\frac{Q}{2}} e^{Q} H^{\dagger} e^{-Q} e^{\frac{Q}{2}}. & (3.8.11) \end{aligned}$$

Etant donné que

$$e^{Q} = \eta^{-1} = \mathcal{CP} \tag{3.8.12}$$

et

$$e^{-Q} = \eta = \mathcal{PC}, \tag{3.8.13}$$

alors nous trouvons:

$$h^{\dagger} = e^{-\frac{Q}{2}} \mathcal{CP} H^{\dagger} \mathcal{PC} e^{\frac{Q}{2}}. \tag{3.8.14}$$

Nous avons aussi

$$H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1} = \mathcal{PC} H \mathcal{CP}, \tag{3.8.15}$$

Compte tenu de

$$[\mathcal{C}, H] = 0, \mathcal{C}^2 = 1, \tag{3.8.16}$$

nous obtenons,

$$H^{\dagger} = \mathcal{P} H \mathcal{P}. \tag{3.8.17}$$

En portant (3.8.17) dans (3.8.14), nous arrivons à:

$$h^{\dagger} = e^{-\frac{Q}{2}} H e^{\frac{Q}{2}} = h. \tag{3.8.18}$$

CHAPITRE 4

Systèmes pseudo-hermitiens avec une symétrie de renversement du temps paire $(\mathcal{T}^2 = 1)$ et algèbre fermionique

4.1 Introduction

Comme nous l'avons déjà mentionné, dans la mécanique quantique usuelle (hermitienne), la symétrie de renversement du temps impaire ($\mathcal{T}^2 = -1$) est associée aux systèmes ayant un nombre impair de fermions où il y a une dégénérescence de Kramers. En revanche, la symétrie de renversement du temps paire ($\mathcal{T}^2 = 1$) est associée aux systèmes de bosons ou aux systèmes ayant un nombre pair de fermions pour lesquels il n'y a pas de dégénérescence de Kramers.

Il a été établi dans [5] que la métrique η qui assure la dégénérescence de Kramers généralisée des valeurs propres des Hamiltoniens pseudo-hermitiens est une métrique qui anticommute avec l'opérateur $\mathcal{T}$. Ensuite, nous avons montré dans [32] que cette métrique est nécessairement indéfinie. Nous avons aussi construit dans [32] les opérateurs de création et d'annihilation pour ces systèmes. Nous avons illustré nos résultats dans un modèle d'Hamiltonien pseudo-hermitien de type SO(3,2) généralisé [32], ce denier s'écrit en fonction des split-quaternions. Ceci fait l'objet des sections suivantes.

Dans le chapitre suivant, on montrera que ces systèmes possèdent aussi une dégénérescence crypto-hermitienne et on étudiera dans le chapitre 6, les systèmes pseudo-hermitiens à symétrie $\mathcal{PT}$ et leurs dégénérescences.

4.2 Propriétés de l'opérateur métrique

Nous nous proposons d'établir les propriétés de l'opérateur métrique η associé aux Hamiltoniens pseudo-hermitiens à symétrie $\mathcal{T}$.

Par hypothèse, H est pseudo-hermitien et à symétrie $\mathcal{T}$, c.à.d. $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ et H commute avec l'opérateur $\mathcal{T}$:

$$H\mathcal{T} = \mathcal{T}H, \tag{4.2.1}$$

En rappelant que l'opérateur $\mathcal{T}$ est donné par la relation: $\mathcal{T} = UK$, l'équation précédente s'écrit,

$$HUK = UKH \Rightarrow HU = UH^*. \tag{4.2.2}$$

Ainsi, l'expression de H est:

$$H = UH^*U^\dagger \tag{4.2.3}$$

soit

$$H^* = U^\dagger HU \tag{4.2.4}$$

En prenant le transposé de (4.2.3), nous trouvons alors:

$$H^t = U^{\dagger t} H^\dagger U^t, \tag{4.2.5}$$

Le complexe conjugué de la relation de pseudo-hermiticité $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ donne:

$$H^t = \eta^* H^* \eta^{-1*}. \tag{4.2.6}$$

En égalant les deux équations (4.2.5) et (4.2.6), nous obtenons:

$$U^{\dagger t} H^\dagger U^t = \eta^* H^* \eta^{-1*}, \tag{4.2.7}$$

soit

$$H^\dagger = U^{\dagger t^{-1}} \eta^* H^* \eta^{-1*} U^{t^{-1}}. \tag{4.2.8}$$

Nous substituons H^* donné par l'équation (4.2.4) dans l'équation (4.2.8) et, en tenant compte de, $U^{\dagger t^{-1}} = U^{*^{-1}} = U^t$, nous arrivons à:

$$H^\dagger = (U^t \eta^* U^\dagger) H (U \eta^{-1*} U^{t^{-1}}), \tag{4.2.9}$$

qui est la relation de pseudo-hermiticité $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ avec

$$\eta = U^t \eta^* U^\dagger. \tag{4.2.10}$$

En utilisant (voir la section (1.4)) $U^t = U e^{i\varphi}$, et $e^{i\varphi} = \pm 1$, nous obtenons,

$$\eta = \pm U \eta^* U^\dagger \tag{4.2.11}$$

soit,

$$U \eta^* = \pm \eta U, \tag{4.2.12}$$

ce qui signifie,

$$\mathcal{T} \eta = \pm \eta \mathcal{T}. \tag{4.2.13}$$

Par conséquent, les opérateurs métriques associés aux Hamiltoniens pseudo-hermitiens à symétrie $\mathcal{T}$, sont classés en deux catégories: les opérateurs métriques qui commutent avec $\mathcal{T}$ soit: $\mathcal{T}\eta = \eta\mathcal{T}$ et ceux qui anticommutent avec $\mathcal{T}$ soit: $\mathcal{T}\eta = -\eta\mathcal{T}$.

4.3 Dégénérescence de Kramers et pseudo-hermiticité

Soit un Hamiltonien H diagonalisable et pseudo-hermitien à spectre discret; les états propres de H et $H^\dagger$ $\left\{\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \left|\phi_{n,a}\right\rangle\right\}$ forment une base bi-orthonormée complète telle que [2, 4, 15, 20]:

$$\begin{aligned} H\left|\psi_{n,a}\right\rangle &= E_n\left|\psi_{n,a}\right\rangle, && (4.3.1)\\ H^\dagger\left|\phi_{n,a}\right\rangle &= E_n^*\left|\phi_{n,a}\right\rangle, && (4.3.2) \end{aligned}$$

$$\left\langle \psi_{n,a} \mid \phi_{m,b}\right\rangle = \left\langle \phi_{n,a} \mid \psi_{m,b}\right\rangle = \delta_{mn}\delta_{ab}, \tag{4.3.3}$$

$$\sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \left|\phi_{n,a}\right\rangle \left\langle\psi_{n,a}\right| = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \left|\psi_{n,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n,a}\right| = 1. \tag{4.3.4}$$

où n, a, b, sont, respectivement, les notations de spectre d'énergie et de dégénérescence, d_n étant la multiplicité (degré de dégénérescence) de E_n.

Nous rappelons les propriétés de H:

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}. \tag{4.3.5}$$

D'après le théorème 1 donné dans la section (3.5), nous savons que les valeurs propres de H sont soit réelles soit elles forment des paires complexes conjuguées l'une de l'autre [1]. Les valeurs propres réelles sont notées a_n, les valeurs propres complexes avec une partie imaginaire positive par α_υ et celles avec une partie imaginaire négative par $\alpha_{-\upsilon} = \alpha_\upsilon^*$; ceci nous donne la représentation spectrale de l'Hamiltonien H et de l'opérateur métrique η [2, 4]:

$$H = \sum_{n=1}^{N_0} \left|\psi_{n,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n,a}\right| + \sum_{v=1}^{N_1}(\alpha_v \left|\psi_{v,a}\right\rangle \left\langle\phi_{v,a}\right| + \alpha_v^* \left|\psi_{-v,a}\right\rangle \left\langle\phi_{-v,a}\right|), \tag{4.3.6}$$

$$\eta = \sum_{n=1}^{N_0} \left|\phi_{n,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n,a}\right| + \sum_{v=1}^{N_1}(\left|\phi_{v,a}\right\rangle \left\langle\phi_{-v,a}\right| + \left|\phi_{-v,a}\right\rangle \left\langle\phi_{v,a}\right|), \tag{4.3.7}$$

où $N_0 \geqslant 0$, et $N_1 \leqslant \infty$.

Avec les propriétés suivantes:

$$\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \eta \left|\psi_{n,a}\right\rangle, \quad \left|\psi_{n,a}\right\rangle = \eta^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle. \tag{4.3.8}$$

$$\left|\phi_{\pm v,a}\right\rangle = \eta \left|\psi_{\mp v,a}\right\rangle, \quad \left|\psi_{\pm v,a}\right\rangle = \eta^{-1} \left|\phi_{\mp v,a}\right\rangle. \tag{4.3.9}$$

De plus, si H est invariant par symétrie de renversement du temps $\mathcal{T}$ paire ($\mathcal{T}^2 = 1$):

$$[H, \mathcal{T}] = 0, \tag{4.3.10}$$

Il a été établi dans [5] que la métrique qui assure la dégénérescence de Kramers généralisée des valeurs propres de H correspond au cas où η et $\mathcal{T}$ anticommutent. La paire de Kramers généralisée est $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{T}\eta^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle$. (Voir l'appendice 1 pour les détails de calcul).

Montrons que cette métrique qui assure la dégénérescence de Kramers généralisée est nécessairement indéfinie.

4.4 Dégénérescence de Kramers et métrique indéfinie

Afin de savoir si η est défini positif ou indéfini, nous allons calculer la η-norme liée au produit scalaire $\langle\psi \mid \phi\rangle_\eta = \langle\psi \mid \eta\phi\rangle$ des états propres de H. Dans le cas où cette norme est négative alors η est une métrique indéfinie. Pour cela, nous distinguons les deux cas de valeurs propres de H: réelles et complexes. Rappelons que la paire de Kramers est $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{T}\eta^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle$, où les $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\left|\phi_{n,a}\right\rangle$ sont les états propres de H et $H^\dagger$ respectivement.

4.4.1 Cas des valeurs propres réelles

Calculons les normes des paires de Kramers: $\langle\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\rangle_\eta$ et $\langle\mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{n,a}\rangle_\eta$.

Puisque les valeurs propres sont réelles, alors

$$\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \eta\left|\psi_{n,a}\right\rangle \tag{4.4.1}$$

$$\left|\psi_{n,a}\right\rangle = \eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle, \tag{4.4.2}$$

d'où

$$\mathcal{T}\eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \mathcal{T}\left|\psi_{n,a}\right\rangle.$$

donc la paire de Kramers est $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{T}\left|\psi_{n,a}\right\rangle$.

Nous allons alors calculer les normes $\langle\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\rangle_\eta$ et $\langle\mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\rangle_\eta$.

Nous avons

$$\langle\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\rangle_\eta = \langle\psi_{n,a} \mid \eta\psi_{n,a}\rangle, \tag{4.4.3}$$

en tenant compte de l'équation (4.4.1), nous obtenons,

$$\langle\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\rangle_\eta = \langle\psi_{n,a} \mid \phi_{n,a}\rangle, \tag{4.4.4}$$

Comme les $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\left|\phi_{n,a}\right\rangle$ forment une base bi-orthonormée (voir l'équation (4.3.3)),

$$\langle\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\rangle_\eta = 1. \tag{4.4.5}$$

la norme $\langle\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\rangle_\eta$ est positive.

Calculons la norme $\langle\mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\rangle_\eta$:

nous avons

$$\langle\mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\rangle_\eta = \langle\mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \eta\mathcal{T}\psi_{n,a}\rangle. \tag{4.4.6}$$

Nous utilisons la relation d'anticommutation entre η et $\mathcal{T}$

$$\langle\mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\rangle_\eta = -\langle\mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta\psi_{n,a}\rangle, \tag{4.4.7}$$

or $\mathcal{T}$ est antiunitaire: nous rappelons qu'un opérateur antiunitaire quelconque A satisfait la relation:

$$\langle A\varphi_1 \mid A\varphi_2\rangle = \langle\varphi_2 \mid \varphi_1\rangle, \tag{4.4.8}$$

donc, dans notre cas nous obtenons

$$\left\langle \mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta\psi_{n,a}\right\rangle = \left\langle \mathcal{T}^2\eta\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}^2\psi_{n,a}\right\rangle \tag{4.4.9}$$

de plus $\mathcal{T}^2 = 1$, cette dernière équation s'écrit,

$$\left\langle \mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta\psi_{n,a}\right\rangle = \left\langle \eta\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\right\rangle . \tag{4.4.10}$$

et l'équation (4.4.7) devient

$$\left\langle \mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\right\rangle_\eta = -\left\langle \eta\psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\right\rangle . \tag{4.4.11}$$

En utilisant la propriété de l'hermiticité de la métrique η et les équations (4.3.8) et (4.4.3), nous aboutissons à:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\right\rangle_\eta &= -\left\langle \psi_{n,a} \mid \eta\psi_{n,a}\right\rangle && (4.4.12)\\ &= -\left\langle \psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\right\rangle_\eta && (4.4.13)\\ &= -1. && (4.4.14) \end{aligned}$$

Donc la norme $\left\langle \mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\right\rangle_\eta$ est négative.

Pour conclure, nous avons $\left\langle \psi_{n,a} \mid \psi_{n,a}\right\rangle_\eta$ positive et $\left\langle \mathcal{T}\psi_{n,a} \mid \mathcal{T}\psi_{n,a}\right\rangle_\eta$ négative: ce qui signifie que la métrique η est indéfinie [23, 33, 34, 35].

4.4.2 Cas des valeurs propres complexes

Calculons la norme $\left\langle \psi_{\upsilon,a} \mid \psi_{\upsilon,a}\right\rangle_\eta$ puis la norme $\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{\upsilon,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{\upsilon,a}\right\rangle_\eta$ dans le cas des valeurs propres complexes.

Nous avons pour la première norme

$$\left\langle \psi_{\upsilon,a} \mid \psi_{\upsilon,a}\right\rangle_\eta = \left\langle \psi_{\upsilon,a} \mid \eta\psi_{\upsilon,a}\right\rangle , \tag{4.4.15}$$

or l'équation (4.3.9) donne

$$\left|\phi_{\pm\upsilon,a}\right\rangle = \eta\left|\psi_{\mp\upsilon,a}\right\rangle , \left|\psi_{\pm\upsilon,a}\right\rangle = \eta^{-1}\left|\phi_{\mp\upsilon,a}\right\rangle , \tag{4.4.16}$$

soit

$$\left\langle \psi_{v,a} \mid \psi_{v,a} \right\rangle_\eta = \left\langle \psi_{v,a} \mid \phi_{-v,a} \right\rangle. \tag{4.4.17}$$

Comme les $\left|\psi_{v,a}\right\rangle$ et $\left|\phi_{v,a}\right\rangle$ forment une base bi-orthonormée; nous déduisons que

$$\left\langle \psi_{v,a} \mid \psi_{v,a} \right\rangle_\eta = 0. \tag{4.4.18}$$

Calculons la deuxième norme $\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle_\eta$:

nous avons

$$\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle_\eta = \left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \eta\mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle, \tag{4.4.19}$$

En prenant d'abord en compte la relation d'anticommutation entre η et $\mathcal{T}$, nous arrivons à

$$\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle_\eta = -\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\eta\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle = -\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\phi_{v,a} \right\rangle. \tag{4.4.20}$$

Nous tenons compte de la propriété $\mathcal{T}^2 = 1$ et la propriété d'antiunitarité de $\mathcal{T}$ pour écrire:

$$\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle_\eta = -\left\langle \mathcal{T}^2\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}^2\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle = -\left\langle \phi_{v,a} \mid \eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle. \tag{4.4.21}$$

En utilisant l'équation (4.3.9), nous trouvons:

$$\left\langle \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{v,a} \right\rangle_\eta = -\left\langle \phi_{v,a} \mid \psi_{-v,a} \right\rangle = 0, \tag{4.4.22}$$

car les $\left|\psi_{v,a}\right\rangle$ et $\left|\phi_{v,a}\right\rangle$ forment une base bi-orthonormée.

Donc, les normes des paires de Kramers $\left|\psi_{v,a}\right\rangle$ et $\mathcal{T}\eta^{-1}\left|\phi_{v,a}\right\rangle$ sont tous nulles dans le cas des valeurs propres complexes, ce qui prouve que la métrique η est indéfinie dans le cas des valeurs propres complexes.

Pour conclure, la métrique η qui assure la dégénérescence de Kramers généralisée est nécessairement indéfinie dans les deux cas de valeurs propres réelles et complexes [32].

Dans le but d'illustrer nos résultats, nous allons étudier un modèle d'Hamiltonien non-hermitien de type SO(3,2) généralisé [32], qui s'écrit en fonction des split-quaternions.

4.5 Illustration: Hamiltoniens de type SO(3,2) généralisé

4.5.1 Présentation du modèle

Nous considérons le modèle d'Hamiltonien non-hermitien de type SO(3,2) généralisé donné par:

$$H = \begin{pmatrix} \delta a & \alpha b \\ \beta c & -\delta a \end{pmatrix}, \tag{4.5.1}$$

où α, β et δ sont des paramètres réels,

b et c sont des split-quaternions réels qui s'écrivent comme:

$$b = b_0\sigma_0 - b_1\sigma_1 - b_2\sigma_2 + ib_3\sigma_3,$$

$$c = b_0\sigma_0 + b_1\sigma_1 + b_2\sigma_2 - ib_3\sigma_3,$$

$a = a_0\sigma_0$ est un split-quaternion réel proportionnel à l'identité; $\sigma_i (i = 1, 2, 3)$ sont les matrices de Pauli.

En posant $A_\pm = b_1 \pm ib_2$ et $B_\pm = b_0 \pm ib_3$, H s'écrit comme un Hamiltonien à quatre-niveaux:

$$H = \begin{pmatrix} \delta a_0 & 0 & \alpha B_- & \alpha A_- \\ 0 & \delta a_0 & \alpha A_+ & \alpha B_+ \\ \beta B_+ & -\beta A_- & -\delta a_0 & 0 \\ -\beta A_+ & \beta B_- & 0 & -\delta a_0 \end{pmatrix}. \tag{4.5.2}$$

Remarquons que, dans le cas particulier où, $\alpha = \beta = \delta = 1$, H est l'Hamiltonien SO (3,2) étudié dans [5]. Nous pouvons donc considérer H (4.5.2) comme une extension des Hamiltoniens de type SO (3,2).

Rappelons que nous avons déjà introduit dans la section (1.8) tous les détails portant sur les Hamiltoniens de type SO (3,2).

4.5.2 Valeurs propres et symétrie de renversement du temps

L'Hamiltonien H, Eq. (4.5.2), est pseudo-hermitien, c.à.d.

$$H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}, \tag{4.5.3}$$

avec l'opérateur métrique indéfini η donné par:

$$\eta = \begin{pmatrix} \beta\sigma_z & 0 \\ 0 & \alpha\sigma_z \end{pmatrix}. \tag{4.5.4}$$

Il est facile de vérifier que l'opérateur de renversement du temps est le suivant [5]:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} K. \tag{4.5.5}$$

où K est l'opérateur de conjugaison complexe.

De plus, η donné par l'équation (4.5.4) anticommute avec l'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$. Comme nous l'avons déjà introduit dans la section (4.2), nous rappelons qu'il existe deux catégories d'opérateurs métriques associés aux Hamiltoniens pseudo-hermitiens à symétrie $\mathcal{T}$: les opérateurs métriques qui commutent avec $\mathcal{T}$ soit: $\mathcal{T}\eta = \eta\mathcal{T}$ et ceux qui anticommutent avec $\mathcal{T}$ soit: $\mathcal{T}\eta = -\eta\mathcal{T}$.

Les valeurs propres de H sont:

$$E = \pm\Omega \ . \tag{4.5.6}$$

avec

$$\Omega = \sqrt{\delta^2 a_0^2 + \alpha\beta(b_0^2 + b_3^2 - b_1^2 - b_2^2)}. \tag{4.5.7}$$

Remarquons que les valeurs propres de H sont deux fois dégénérées.

Considérons le cas des valeurs propres réelles, c.à.d.

$$\Omega^2 = \delta^2 a_0^2 + \alpha\beta(b_0^2 + b_3^2 - b_1^2 - b_2^2) > 0. \tag{4.5.8}$$

Les états propres de H ($\left|\psi_{-+}\right\rangle$, $\left|\psi_{--}\right\rangle$) sont associés à l'énergie négative et ($\left|\psi_{++}\right\rangle$, $\left|\psi_{+-}\right\rangle$) correspondent à l'énergie positive.

Nous avons:

* pour l'énergie négative $E_{-} = -\Omega$:

$$\left|\psi_{-+}\right\rangle = k \begin{pmatrix} -\alpha B_{-} \\ -\alpha A_{+} \\ (\Omega + \delta a_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \left|\psi_{--}\right\rangle = \mathcal{T}\left|\psi_{-+}\right\rangle = k \begin{pmatrix} -\alpha A_{-} \\ -\alpha B_{+} \\ 0 \\ (\Omega + \delta a_0) \end{pmatrix}. \tag{4.5.9}$$

* pour l'énergie positive $E_{+} = +\Omega$:

$$\left|\psi_{++}\right\rangle = k` \begin{pmatrix} (\Omega + \delta a_0) \\ 0 \\ \beta B_{+} \\ -\beta A_{+} \end{pmatrix}, \ \left|\psi_{+-}\right\rangle = \mathcal{T}\left|\psi_{++}\right\rangle = k` \begin{pmatrix} 0 \\ (\Omega + \delta a_0) \\ -\beta A_{-} \\ \beta B_{-} \end{pmatrix}. \tag{4.5.10}$$

Les états propres ($\left|\phi_{-+}\right\rangle$, $\left|\phi_{--}\right\rangle$) et ($\left|\phi_{++}\right\rangle$, $\left|\phi_{+-}\right\rangle$) associés à $H^{\dagger}$ sont obtenus par l'action de l'opérateur métrique sur les états propres de H. Rappelons que $\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \eta\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ car les valeurs propres sont réelles.

* Pour l'énergie négative $E_{-} = -\Omega$:

$$\left|\phi_{-+}\right\rangle = \alpha k \begin{pmatrix} -\beta B_{-} \\ \beta A_{+} \\ (\Omega + \delta a_0) \\ 0 \end{pmatrix}, \ \left|\phi_{--}\right\rangle = \alpha k \begin{pmatrix} -\beta A_{-} \\ \beta B_{+} \\ 0 \\ -(\Omega + \delta a_0) \end{pmatrix}. \tag{4.5.11}$$

* Pour l'énergie positive $E_{+} = +\Omega$:

$$\left|\phi_{++}\right\rangle = \beta k` \begin{pmatrix} (\Omega + \delta a_0) \\ 0 \\ \alpha B_{+} \\ \alpha A_{+} \end{pmatrix}, \ \left|\phi_{+-}\right\rangle = \beta k` \begin{pmatrix} 0 \\ -(\Omega + \delta a_0) \\ -\alpha A_{-} \\ -\alpha B_{-} \end{pmatrix}. \tag{4.5.12}$$

k et k' sont des constantes de normalisation fixées comme suit:

$$2\Omega\alpha(\Omega+\delta a_0)k^2 = 1, \tag{4.5.13}$$

$$2\Omega\beta(\Omega+\delta a_0)k'^2 = 1. \tag{4.5.14}$$

Ces états satisfont les relations abnormales suivantes qui sont une conséquence de l'opérateur métrique η indéfini (4.5.4):

$$\left\langle \psi_{++} \mid \phi_{++} \right\rangle = 1, \tag{4.5.15}$$

$$\left\langle \psi_{+-} \mid \phi_{+-} \right\rangle = -1, \tag{4.5.16}$$

$$\left\langle \psi_{-+} \mid \phi_{-+} \right\rangle = 1, \tag{4.5.17}$$

$$\left\langle \psi_{--} \mid \phi_{--} \right\rangle = -1. \tag{4.5.18}$$

$$\left\langle \psi_{ms} \mid \phi_{\bar{m}s} \right\rangle = 0, \tag{4.5.19}$$

$$\left\langle \psi_{ms} \mid \phi_{\overline{ms}} \right\rangle = 0, \tag{4.5.20}$$

$$\left\langle \psi_{ms} \mid \phi_{m\bar{s}} \right\rangle = 0. \tag{4.5.21}$$

$s = \pm$, $m = \pm$, $\bar{m}$ et $\bar{s}$ sont respectivement les signes opposés de m et s. Ces états satisfont aussi la relation suivante:

$$\left|\psi_{++}\right\rangle \left\langle\phi_{++}\right| - \left|\psi_{+-}\right\rangle \left\langle\phi_{+-}\right| + \left|\psi_{-+}\right\rangle \left\langle\phi_{-+}\right| - \left|\psi_{--}\right\rangle \left\langle\phi_{--}\right| = 1. \tag{4.5.22}$$

Les η-normes sont données comme suit:

$$\left\langle \psi_{++} \mid \psi_{++} \right\rangle_\eta = \left\langle \psi_{++} \mid \phi_{++} \right\rangle = 1, \tag{4.5.23}$$

$$\left\langle \psi_{+-} \mid \psi_{+-} \right\rangle_\eta = \left\langle \psi_{+-} \mid \phi_{+-} \right\rangle = -1, \tag{4.5.24}$$

$$\left\langle \psi_{-+} \mid \psi_{-+} \right\rangle_\eta = \left\langle \psi_{-+} \mid \phi_{-+} \right\rangle = 1, \tag{4.5.25}$$

$$\left\langle \psi_{--} \mid \psi_{--} \right\rangle_\eta = \left\langle \psi_{--} \mid \phi_{--} \right\rangle = -1. \tag{4.5.26}$$

Remarquons que ces normes peuvent être positives ou négatives ce qui confirme le caractère indéfini de la métrique η.

4.6 Pseudo-fermions

Les pseudo-fermions (PFs) découlent de l'extension pseudo-hermitienne des relations d'anticommutation des fermions usuels données auparavant par l'équation (1.3.1) de la section (1.3):

$$\left\{c, c^{\dagger}\right\} = cc^{\dagger} + c^{\dagger}c = 1, \quad \{c, c\} = \left\{c^{\dagger}, c^{\dagger}\right\} = 0. \tag{4.6.1}$$

Les PFs ont été introduits, initialement, par Mostafazadeh en 2004 [36]. En 2007, Cherbal et ses collaborateurs [37] ont construit les états cohérents d'un système physique pseudo-fermionique de l'atome à deux-niveaux en interaction avec un champ électromagnétique, décrit par un Hamiltonien pseudo-hermitien. Quelques années plus tard, Bagarello a établi, dans ces articles, [38, 39] plusieurs propriétés mathématiques et physiques des pseudo-fermions. Entre autre, il a établi la forme la plus générale de l'Hamiltonien non-hermitien à deux-niveaux admettant une structure pseudo-fermionique [39].

Comme nous l'avons mentionné ci-dessus, les pseudo-fermions représentent une extension pseudo-hermitienne des fermions usuels. Ils sont décrits par les relations d'anticommutation suivantes [37, 38]:

$$\{Y, Z\} = YZ + ZY = 1, \ \ \{Y, Y\} = \{Z, Z\} = 0, \tag{4.6.2}$$

où $Z = Y^{\#} = \eta^{-1}Y^{\dagger}\eta$ désigne le pseudo-adjoint de Y [37]. Notons qu'en général, nous avons $Z \neq Y^{\dagger}$; le cas particulier $Z = Y^{\dagger}$ correspond à $\eta = \mathbf{1}$, nous retrouvons, dans ce cas, les fermions usuels. Ainsi, les fermions usuels représentent un cas particulier des pseudo-fermions.

En outre, il a été établi dans [38] les propriétés suivantes des pseudo-fermions:

· Il existe deux états du vide, dans $\mathcal{H}$, non nuls, notés $\left|\psi_0\right\rangle$ et $\left|\varphi_0\right\rangle$, tels que

$$Y\left|\psi_0\right\rangle = Z^{\dagger}\left|\varphi_0\right\rangle = 0 \tag{4.6.3}$$

· Il existe deux états excités dans $\mathcal{H}$, non nuls, notés $\left|\psi_1\right\rangle$ et $\left|\varphi_1\right\rangle$, tels que

$$Z\left|\psi_0\right\rangle = \left|\psi_1\right\rangle, \qquad Y^{\dagger}\left|\varphi_0\right\rangle = \left|\varphi_1\right\rangle, \tag{4.6.4}$$

$$Y\left|\psi_1\right\rangle = \left|\psi_0\right\rangle, \quad Z^\dagger\left|\varphi_1\right\rangle = \left|\varphi_0\right\rangle, \tag{4.6.5}$$

où Z et Y sont, respectivement, des opérateurs de création et d'annihilation pour l'ensemble $\{\left|\psi_0\right\rangle, \left|\psi_1\right\rangle\}$, et $Y^\dagger$, $Z^\dagger$ sont, respectivement, des opérateurs de création et d'annihilation pour l'ensemble $\{\left|\varphi_0\right\rangle, \left|\varphi_1\right\rangle\}$.

· Les deux ensembles $\{\left|\psi_0\right\rangle, \left|\psi_1\right\rangle\}$ et $\{\left|\varphi_0\right\rangle, \left|\varphi_1\right\rangle\}$ sont bi-orthonormés.

· Les deux opérateurs $N = ZY$ associé à l'ensemble $\{\left|\psi_0\right\rangle, \left|\psi_1\right\rangle\}$, et $N^\dagger = Y^\dagger Z^\dagger$ associé à l'ensemble $\{\left|\varphi_0\right\rangle, \left|\varphi_1\right\rangle\}$, sont des opérateurs nombre de pseudo-fermions, tels que:

$$N\left|\psi_n\right\rangle = n\left|\psi_n\right\rangle, \quad N^\dagger\left|\psi_n\right\rangle = n\left|\psi_n\right\rangle, \quad n = 0, 1. \tag{4.6.6}$$

4.7 Relation entre les fermions et les pseudo-fermions

Les relations entre les opérateurs de création et d'annihilation des pseudo-fermions et ceux des fermions sont exprimées comme suit [37, 38]:

$$Y = \rho^{-1}c\rho, \tag{4.7.1}$$

$$Z = \rho^{-1}c^\dagger\rho, \tag{4.7.2}$$

où ρ est un opérateur métrique hermitien et positif: $\rho = \sqrt{\eta}$. Ainsi, si l'Hamiltonien est quasi-hermitien, il existe alors une correspondance entre les fermions et les pseudo-fermions. Les relations qui lient les états $\left|0\right\rangle$ et $\left|1\right\rangle$ des fermions et ceux des pseudo-fermions sont données par:

$$\left|\psi_0\right\rangle = \rho^{-1}\left|0\right\rangle, \quad \left|\psi_1\right\rangle = \rho^{-1}\left|1\right\rangle. \tag{4.7.3}$$

$$\left|\varphi_0\right\rangle = \rho\left|0\right\rangle, \quad \left|\varphi_1\right\rangle = \rho\left|1\right\rangle. \tag{4.7.4}$$

4.8 Algèbre pseudo-fermionique

Il existe deux types d'algèbres pseudo-fermioniques dépendant chacune de l'opérateur métrique associé η (défini ou indéfini) [36].

a)· Métrique définie positive η_+:

Nous introduisons l'opérateur d'annihilation Y associé à l'Hamiltonien H (4.5.2):

$$Y = \sum_{m=+,-} \left|\psi_{-,m}\right\rangle \left\langle\phi_{+,m}\right| = \left|\psi_{-+}\right\rangle \left\langle\phi_{++}\right| + \left|\psi_{--}\right\rangle \left\langle\phi_{+-}\right|. \tag{4.8.1}$$

L'opérateur de création $Z = Y^\sharp$, adjoint pseudo-hermitien de Y, est donné par:

$$Y^\sharp = \eta_+^{-1} Y^\dagger \eta_+ = \sum_{m=+,-} \left|\psi_{+,m}\right\rangle \left\langle\phi_{-,m}\right| = \left|\psi_{++}\right\rangle \left\langle\phi_{-+}\right| + \left|\psi_{+-}\right\rangle \left\langle\phi_{--}\right|. \tag{4.8.2}$$

L'action des opérateurs Y et Z sur les états propres de H est:

$$Y \left|\psi_{-,m}\right\rangle = 0, \quad Y \left|\psi_{+,m}\right\rangle = \left|\psi_{-,m}\right\rangle. \tag{4.8.3}$$

$$Z \left|\psi_{+,m}\right\rangle = 0, \quad Z \left|\psi_{-,m}\right\rangle = \left|\psi_{+,m}\right\rangle. \tag{4.8.4}$$

L'opérateur Y annihile les états les plus bas $\left|\psi_{-,m}\right\rangle$ tandis que Z les amène vers les états supérieurs $\left|\psi_{+,m}\right\rangle$.

Après calcul, nous trouvons que Z et Y satisfont aux relations normales de l'algèbre pseudo-fermionique:

$$\{Y, Z\} = YZ + ZY = 1, \;\; \{Y, Y\} = \{Z, Z\} = 0, \tag{4.8.5}$$

b)· Métrique indéfinie:

Nous introduisons l'opérateur d'annihilation abnormal X associé à l'Hamiltonien H (4.5.2):

$$X = \left|\psi_{-+}\right\rangle \left\langle\phi_{+-}\right| + \left|\psi_{--}\right\rangle \left\langle\phi_{++}\right|. \tag{4.8.6}$$

L'opérateur de création $X^\sharp$, adjoint pseudo-hermitien de X, est donné par:

$$X^\sharp = \eta^{-1} X^\dagger \eta = \left|\psi_{++}\right\rangle \left\langle\phi_{--}\right| + \left|\psi_{+-}\right\rangle \left\langle\phi_{-+}\right|. \tag{4.8.7}$$

L'action des opérateurs X et $X^\sharp$ sur les états propres de H est:

$$X \left|\psi_{-,m}\right\rangle = 0, \quad X \left|\psi_{+,m}\right\rangle = m \left|\psi_{-,\bar{m}}\right\rangle. \tag{4.8.8}$$

$$X^\sharp \left|\psi_{+,m}\right\rangle = 0, \quad X^\sharp \left|\psi_{-,m}\right\rangle = m \left|\psi_{+,\bar{m}}\right\rangle, \tag{4.8.9}$$

où $m = \pm$ et $\bar{m}$ est le signe opposé de m.

L'opérateur X annihile les états les plus bas $\left|\psi_{-,m}\right\rangle$, $X^\sharp$ les élève vers les états supérieurs $m\left|\psi_{+,\bar{m}}\right\rangle$.

Après calcul, nous trouvons que $X^\sharp$ et X satisfont aux relations abnormales de l'algèbre pseudo-fermionique [36].

$$X^2 = X^{\sharp 2} = 0, \tag{4.8.10}$$

$$XX^\sharp + X^\sharp X = -1. \tag{4.8.11}$$

4.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons mis en évidence de nouvelles propriétés pour les Hamiltoniens pseudo-hermitiens invariants par symétrie de renversement du temps paire. Nous avons montré que l'opérateur métrique qui permet de réaliser la dégénérescence de Kramers généralisée est nécessairement indéfini.

Nous avons illustré les résultats généraux ci-dessus par des calculs explicites avec un modèle d'Hamiltonien pseudo-hermitien de split-quaternions à quatre niveaux considéré comme une généralisation du modèle SO(3,2). Nous avons construit les opérateurs de création et d'annihilation et vérifié qu'ils obéissent à l'algèbre fermionique normale et abnormale selon que l'opérateur métrique associé η est respectivement défini ou indéfini.

Le prochain chapitre sera consacré à la notion de dégénérescence crypto-hermitienne qui se réalise lorsque la métrique η est définie positive.

CHAPITRE 5 Dégénérescence crypto-hermitienne

Nous nous proposons de décrire, dans ce chapitre, la dégénérescence de Kramers généralisée dans le cas où l'Hamiltonien H, pseudo-hermitien à symétrie $\mathcal{T}$ paire, possède des valeurs propres réelles. H est dit quasi-hermitien ou crypto-hermitien, c.à.d. H admet un Hamiltonien hermitien correspondant h via la relation de similarité,

$$h = \rho H \rho^{-1}, \tag{5.0.1}$$

où ρ est un opérateur linéaire hermitien et inversible tel que $\eta = \rho^2$, η étant un opérateur métrique défini positif.

Cet Hamiltonien hermitien h est isospectral à H c.à.d. que h et H ont les mêmes valeurs propres $\{E_i\}$. En d'autres termes, h et H possèdent les mêmes dégénérescences des niveaux d'énergie. h étant hermitien, il possède une symétrie de renversement du temps impaire. Pour construire l'expression de l'opérateur de renversement du temps qui assure la symétrie impaire de h, nous suivons les deux étapes suivantes:

Etape 1:

Il est commode de prendre en compte la forme diagonale h_d de h, soit U un opérateur unitaire qui permet d'écrire:

$$UhU^{-1} = diag\{E_1, E_2, ..., E_n\} \equiv h_d. \tag{5.0.2}$$

De plus, l'opérateur de diagonalisation de H est D, avec

$$DHD^{-1} = h_d \tag{5.0.3}$$

En égalant ces deux dernières équations, on aura

$$D = U\rho. \tag{5.0.4}$$

Rappelons que l'opérateur de renversement du temps peut être décomposé en un produit d'un opérateur unitaire et d'un opérateur antilinéaire K, où K est l'opérateur de conjugaison complexe [6]:

La forme diagonale h_d nous permet de trouver aisément l'opérateur de renversement du temps impair $\mathcal{T}_0$ avec lequel h_d commute:

$$\mathcal{T}_0 = S_0 K, \tag{5.0.5}$$

où S_0 est une matrice satisfaisant $(S_0)^2 = -1$ car $\mathcal{T}_0$ est impair.

Donc la matrice S_0 $(N \times N)$ qui commute avec h_d prend la forme suivante:

$$S_0 = diag\{i\sigma_2, i\sigma_2.....i\sigma_2\}. \tag{5.0.6}$$

où σ_2 est la matrice de Pauli. On vérifie que $\mathcal{T}_0$ est antilinéaire et antiunitaire:

$$\mathcal{T}_0^2 = -1, \quad \text{et} \quad [\mathcal{T}_0, h_d] = 0. \tag{5.0.7}$$

Etape 2:

Nous construisons maintenant l'opérateur de renversement du temps impair $\mathcal{T}_1$ de h, qui est antilinéaire, antiunitaire et satisfait aussi à la relation,

$$\mathcal{T}_1^2 = -1 \quad \text{et} \quad [\mathcal{T}_1, h] = 0, \tag{5.0.8}$$

avec

$$\mathcal{T}_1 = U^{-1}\mathcal{T}_0 U = U^{-1} S_0 K U. \tag{5.0.9}$$

Passons à présent à la recherche de l'opérateur $\mathcal{T}_2$ impair qui satisfait:

$$\mathcal{T}_2 = \rho^{-1}\mathcal{T}_1\rho = \rho^{-1}U^{-1}\mathcal{T}_0 U\rho = D^{-1}\mathcal{T}_0 D. \tag{5.0.10}$$

$\mathcal{T}_2$ est une involution antilinéaire, il satisfait aux relations

$$\mathcal{T}_2^2 = -1, \quad \text{et} \quad [\mathcal{T}_2, H] = 0. \tag{5.0.11}$$

Mais la propriété d'antiunitarité de $\mathcal{T}_2$ n'est pas garantie car D est non-unitaire, (ceci vient de la propriété de non-unitarité de ρ), donc $\mathcal{T}_2$ représente une symétrie impaire antilinéaire mais non antiunitaire de l'Hamiltonien H.

De même, nous pouvons vérifier que, si $\mathcal{T}$ est un opérateur de renversement du temps pair qui commute avec l'Hamiltonien crypto-hermitien H, alors il est donné comme suit:

$$\mathcal{T} = \rho^{-1}\widetilde{\mathcal{T}}\rho, \rho = \sqrt{\eta_+}. \tag{5.0.12}$$

où $\widetilde{\mathcal{T}}$ est une involution antilinéaire paire ($\widetilde{\mathcal{T}}^2 = 1$) qui commute avec l'opérateur hermitien h. Cependant sa propriété d'antiunitarité n'est pas garantie compte tenu du fait que ρ n'est pas unitaire; ainsi $\widetilde{\mathcal{T}}$ représente une symétrie paire antilinéaire mais non antiunitaire de l'Hamiltonien hermitien h.

Pour conclure, notons que, dans le cas d'un Hamiltonien H avec un spectre réel, la même dégénérescence des niveaux d'énergie se produit dans le spectre d'énergie de l'Hamiltonien équivalent h qui peut être décrit par une symétrie de renversement du temps impaire $\mathcal{T}_1$.

La dégénérescence de Kramers généralisée de l'Hamiltonien H pseudo-hermitien peut être considérée comme la dégénérescence de Kramers de l'Hamiltonien hermitien équivalent h.

En outre, par analogie avec le nom crypto-hermitien de l'Hamiltonien pseudo-hermitien H, avec un spectre réel [40, 41], on peut nommer la dégénérescence de Kramers généralisée d'un spectre réel d'un tel Hamiltonien H par "la dégénérescence crypto-hermitienne".

5.1 Dégénérescence crypto-hermitienne pour un modèle à quatre-niveaux de type split-quaternion

Notre modèle d'Hamiltonien (4.5.2), pour le cas d'un spectre d'énergie réel (6.4.6) admet un opérateur métrique défini positif η_+ similaire à la forme (4.3.7). Nous utilisons les solutions explicites des états propres obtenus précédemment.

Nous trouvons

$$\eta_+ = \frac{1}{\Omega}\begin{pmatrix} \frac{M}{2} & -\frac{\alpha\beta^2 A_- B_-}{\Omega+\delta a_0} & 0 & \alpha\beta A_- \\ -\frac{\alpha\beta^2 A_+ B_+}{\Omega+\delta a_0} & \frac{M}{2} & \alpha\beta A_+ & 0 \\ 0 & \alpha\beta A_- & \frac{\alpha}{2\beta}M & \frac{\alpha^2\beta A_- B_+}{\Omega+\delta a_0} \\ \alpha\beta A_+ & 0 & \frac{\alpha^2\beta A_+ B_-}{\Omega+\delta a_0} & \frac{\alpha}{2\beta}M \end{pmatrix}. \tag{5.1.1}$$

avec M donné comme suit:

$$M = \beta(\Omega + \delta a_0) + \frac{\alpha\beta^2}{\Omega + \delta a_0}(B_+B_- + A_+A_-). \tag{5.1.2}$$

En utilisant la relation $\eta_+ = D^\dagger D$, écrivons l'opérateur de diagonalisation D^{-1} sous la forme suivante:

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} k^{\backprime}(\Omega + \delta a_0)\sigma_0 & -k\alpha b \\ k^{\backprime}\beta c & k(\Omega + \delta a_0)\sigma_0 \end{pmatrix}, \tag{5.1.3}$$

où b et c sont des split-quaternions, définis par l'équation (4.5.1).

L'action de l'opérateur métrique défini positif η_+ sur les états propres de H génère de nouveaux états propres de $H^\dagger$ dénotés $|\chi_{ms}\rangle$; ils sont reliés aux états propres $|\phi_{ms}\rangle$ (donnés par les équations (6.4.9) et (6.4.10)), par la relation $|\chi_{ms}\rangle = s\ |\phi_{ms}\rangle$.

Les états $|\psi_{ms}\rangle$ et $|\chi_{ms}\rangle$ forment une base bi-orthonormée complète comparable à la base des états $|\psi_{ms}\rangle$ et $|\phi_{ms}\rangle$.

$$\langle\psi_{ms} \mid \chi_{m's'}\rangle = \delta_{mm'}\delta_{ss'}, \tag{5.1.4}$$

$$\left|\psi_{++}\right\rangle\left\langle\chi_{++}\right| + \left|\psi_{+-}\right\rangle\left\langle\chi_{+-}\right| + \left|\psi_{-+}\right\rangle\left\langle\chi_{-+}\right| + \left|\psi_{--}\right\rangle\left\langle\chi_{--}\right| = 1. \tag{5.1.5}$$

La forme diagonale h_d de l'Hamiltonien hermitien h équivalent à l'Hamiltonien pseudo-hermitien H et la matrice S_0 apparaissant dans l'opérateur de renversement du temps impair $\mathcal{T}_0 = S_0 K$, sont données comme suit:

$$h_d = \Omega \begin{pmatrix} \sigma_0 & 0 \\ 0 & -\sigma_0 \end{pmatrix}, \ S_0 = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 \\ 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix}. \tag{5.1.6}$$

L'opérateur de renversement du temps impair $S_0 K$, où S_0 prend la forme (5.0.6) et la forme (5.1.6). Ces deux formes ont été introduites dans [7, 42].

Notons que la dégénérescence de Kramers de l'Hamiltonien (4.5.2), dans le cas d'un spectre d'énergie réel est, en fait, une dégénérescence crypto-hermitienne lorsque la forme diagonale de l'Hamiltonien équivalent h_d est invariante sous l'action de la transformation de renversement du temps impair $\mathcal{T}_0$.

5.2 Conclusion

L'Hamiltonien hermitien équivalent h admet une dégénérescence de Kramers. Dans ce cas, cette dégénérescence est générée par une symétrie de renversement du temps impaire. Lorsqu'on utilise la relation entre l'Hamiltonien H et son équivalent hermitien h, on trouve aussi que h est invariant sous l'action d'une symétrie paire antilinéaire induite à partir de H. Ainsi H commute avec l'opérateur antilinéaire impair induit à partir de h. Pour conclure, on constate que, pour des systèmes pseudo-hermitiens, avec un spectre d'énergie réel, la dégénérescence de Kramers de ces derniers est, en effet, une dégénérescence crypto-hermitienne.

Nous nous proposons de généraliser l'approche développée dans les chapitres 4 et 5 au cas des Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec une symétrie $\mathcal{PT}$ paire ($\mathcal{P}^2 = 1, \mathcal{T}^2 = 1$). Nous montrons que la formulation de l'espace de Krein de l'espace de Hilbert est plus appropriée pour la réalisation de la $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée. Nos résultats sont illustrés par un modèle d'Hamiltonien pseudo-hermitien.

CHAPITRE 6

Systèmes pseudo-hermitiens avec une symétrie $\mathcal{PT}$, dégénérescence et espace de Krein

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons généraliser l'approche développée dans les deux chapitres précédents au cas des Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec une symétrie $\mathcal{PT}$ paire ($\mathcal{P}^2 = 1, \mathcal{T}^2 = 1$). Nous tenons à rappeler que, d'une façon générale, il existe deux phases (ou régions) de la $\mathcal{PT}$-symétrie, à savoir la $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée et brisée.

· **$\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée:**

Si chaque état propre de H est un état propre de l'opérateur $\mathcal{PT}$, nous disons que la $\mathcal{PT}$-symétrie considérée est non-brisée, ceci correspond aux valeurs propres réelles.

· **$\mathcal{PT}$-symétrie brisée:**

Inversement, si certains états propres de l'Hamiltonien H ne sont pas simultanément états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, nous sommes dans la phase de la $\mathcal{PT}$-symétrie brisée qui correspond aux valeurs propres complexes.

Les phases brisée et non-brisée sont séparées par des points exceptionnels (PE) [43]. Pour des systèmes $\mathcal{PT}$-symétriques, les points exceptionnels sont des passages obligatoires au cours des transitions entre ces deux phases. Dans ce contexte, Berry [44] a montré que la physique qui traite les systèmes non-hermitiens est complètement différente de la physique qui traite les systèmes hermitiens dans les dégénérescences. Ceci est dû au comportement non-hermitien du système.

Récemment, le rôle de la dégénérescence dans la $\mathcal{PT}$-symétrie a été aussi un sujet d'investigations [45]. La dégénérescence des systèmes $\mathcal{PT}$-symétriques impairs ($\mathcal{P}^2 = 1$, $\mathcal{T}^2 = -1$) qui correspond aux fermions a été prouvée pour la première fois par Scolarici et Solombrino [46] et étudiée, par la suite, par Jones-Smith et Mathur [7] qui ont étendu la mécanique quantique $\mathcal{PT}$-symétrique au cas de la symétrie de renversement du temps impaire. Il a été établi dans [7] que l'analogue de la dégénérescence de Kramers existe aussi dans les systèmes $\mathcal{PT}$-symétriques impairs et la $\mathcal{PT}$-symétrie non brisée peut exister si on assemble les deux vecteurs colonnes des $\mathcal{PT}$-doublets dans une seule colonne quaternionique [7].

Nous avons étendu, dans l'article [47], le comportement de la dégénérescence non-hermitienne développée pour les systèmes $\mathcal{PT}$-symétriques impairs [7] aux systèmes $\mathcal{PT}$-symétriques pairs ($\mathcal{P}^2 = 1$, $\mathcal{T}^2 = 1$).

6.2 Pseudo-hermiticité, $\mathcal{PT}$-symétrie et dégénérescence

Nous considérons un Hamiltonien H non-hermitien et diagonalisable, ayant un spectre réel et discret. Comme nous l'avons déjà mentionné précédemment, il existe une base bi-orthonormée complète $\left\{\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \left|\phi_{n,a}\right\rangle\right\}$ associée à H telle que [2, 4, 15, 20, 29]:

$$H\left|\psi_{n,a}\right\rangle = E_n\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \;\; H^{\dagger}\left|\phi_{n,a}\right\rangle = E_n^{*}\left|\phi_{n,a}\right\rangle, \tag{6.2.1}$$

$$\left\langle\phi_{m,b}\right|\left.\psi_{n,a}\right\rangle = \delta_{mn}\delta_{ab}, \tag{6.2.2}$$

$$\sum_{n}\sum_{a=1}^{d_n}\left|\phi_{n,a}\right\rangle\left\langle\psi_{n,a}\right| = \sum_{n}\sum_{a=1}^{d_n}\left|\psi_{n,a}\right\rangle\left\langle\phi_{n,a}\right| = \mathbf{1}. \tag{6.2.3}$$

où n, a et b, sont respectivement des notations de spectre d'énergie et de dégénérescence, d_n est la multiplicité (degré de dégénérescence) de E_n.

De plus, nous supposons que l'Hamiltonien H est pseudo-hermitien, c.à.d. qu'il satisfait la relation [4, 2]:

$$H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}, \tag{6.2.4}$$

où η est un opérateur hermitien, linéaire, inversible appelée métrique. On s'intéressera au cas des valeurs propres réelles de H.

La représentation spectrale de H et de l'opérateur métrique défini positif η_+ sont données par [29]:

$$H = \sum_{n}\sum_{a=1}^{d_n} E_n\left|\psi_{n,a}\right\rangle\left\langle\phi_{n,a}\right|, \tag{6.2.5}$$

$$\eta_+ = \sum_{n}\sum_{a=1}^{d_n}\left|\phi_{n,a}\right\rangle\left\langle\phi_{n,a}\right|, \tag{6.2.6}$$

et son inverse

$$\eta_+^{-1} = \sum_{n}\sum_{a=1}^{d_n}\left|\psi_{n,a}\right\rangle\left\langle\psi_{n,a}\right|, \tag{6.2.7}$$

Avec les propriétés [4, 29]:

$$\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \eta_+ \left|\psi_{n,a}\right\rangle, \ \left|\psi_{n,a}\right\rangle = \eta_+^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle. \tag{6.2.8}$$

En outre, il existe des opérateurs métriques η_σ autres que η_+ [29], qui sont aussi associés à H. η_σ et son inverse sont alors donnés par [29]:

$$\eta_\sigma = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \sigma_n^a \left|\phi_{n,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n,a}\right|, \tag{6.2.9}$$

et

$$\eta_\sigma^{-1} = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \sigma_n^a \left|\psi_{n,a}\right\rangle \left\langle\psi_{n,a}\right|, \tag{6.2.10}$$

où $\sigma = (\sigma_n^a)$ est une série de signes $\sigma_n^a = \pm$. Les opérateurs métriques η_σ et η_+ associés à l'Hamiltonien H sont reliés par la relation [48]:

$$C_\sigma = \eta_+^{-1} \eta_\sigma, \tag{6.2.11}$$

avec,

$$\eta_+ = \eta_\sigma C_\sigma, \tag{6.2.12}$$

C_σ est un opérateur linéaire, inversible associé à H donné comme suit [2, 29]:

$$C_\sigma = \sum_n \sum_{a=1}^{d_n} \sigma_n^a \left|\psi_{n,a}\right\rangle \left\langle\phi_{n,a}\right|, \tag{6.2.13}$$

qui satisfait

$$C_\sigma^2 = 1, \tag{6.2.14}$$

et

$$C_\sigma \left|\psi_{n,a}\right\rangle = \sigma_n^a \left|\psi_{n,a}\right\rangle . \tag{6.2.15}$$

A partir de l'équation (6.2.15), nous déduisons que

$$(\sigma_n^a)^2 = 1. \tag{6.2.16}$$

A partir des équations (6.2.11) et (6.2.15), on peut exprimer les relations entre $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\left|\phi_{n,a}\right\rangle$, données dans (6.2.8), comme suit:

$$\left|\phi_{n,a}\right\rangle = \eta_\sigma C_\sigma \left|\psi_{n,a}\right\rangle = \sigma_n^a \eta_\sigma \left|\psi_{n,a}\right\rangle , \tag{6.2.17}$$

$$\left|\psi_{n,a}\right\rangle = \sigma_n^a \eta_\sigma^{-1} \left|\phi_{n,a}\right\rangle . \tag{6.2.18}$$

De plus, nous supposons que l'Hamiltonien H est invariant par symétrie $\mathcal{PT}$ paire, i.e

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \mathcal{P}^2 = 1, \mathcal{T}^2 = 1, \tag{6.2.19}$$

où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont, respectivement, les opérateurs parité et renversement du temps. L'action de $\mathcal{P}$ sur un état $|\psi\rangle$ est de multiplier $|\psi\rangle$ par la matrice S; cette dernière est une matrice réelle de dimension N, donnée par [7],

$$S = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \tag{6.2.20}$$

I étant la matrice identité de dimension $(N/2)$.

Pour l'opérateur de renversement du temps, nous suivons la définition donnée dans [5], c.à.d. $\mathcal{T} = ZK$, avec K, l'opérateur de conjugaison complexe et Z une matrice unitaire pouvant être choisie comme une matrice réelle dont tous les termes diagonaux sont égaux à la matrice (2×2) de Pauli σ_x, les autres termes étant nuls [5],

$$Z = \begin{pmatrix} \sigma_x & & & \\ & . & & \\ & & . & \\ & & & \sigma_x \end{pmatrix}, \quad \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{6.2.21}$$

Nous avons $\mathcal{T}^2 = 1$. Il est utile de noter ici que comme cela a été établi dans [7], les Hamiltoniens non-hermitiens, invariants sous la $\mathcal{PT}$-symétrie impaire, admettent une dégénérescence de Kramers, présentée par la structure mathématique des quaternions [10]. Cette dégénérescence est attendue car l'opérateur de renversement du temps est impair ($\mathcal{T}^2 = -1$).

L'idée est de montrer que cette dégénérescence existe aussi pour des Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec une $\mathcal{PT}$-symétrie paire.

Afin de montrer la dégénérescence des valeurs propres de H, on montre que ses états propres $|\psi_{n,a}\rangle$ et $\mathcal{PT}|\psi_{n,a}\rangle$ qui correspondent à la même valeur propre E_n sont linéairement indépendants. Tout opérateur antiunitaire θ peut être écrit comme suit [49]: $\theta = UK$, où U est un opérateur unitaire et K est un opérateur de conjugaison, soit:

$$\theta = \mathcal{PT} = SZK = UK, \tag{6.2.22}$$

où $U = SZ$ est l'opérateur unitaire.

Puisque l'opérateur $\mathcal{PT}$ est antiunitaire, on déduit, d'après le résultat établi dans le chapitre 4, que l'opérateur métrique η des Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec une symétrie $\mathcal{PT}$ paire, soit commute ou anticommute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$. Donc les opérateurs métriques sont classés en deux catégories: la première catégorie concernant les métriques qui commutent avec l'opérateur $\mathcal{PT}$, la deuxième catégorie concernant ceux qui anticommutent avec l'opérateur $\mathcal{PT}$.

Afin d'établir l'existence d'une dégénérescence, montrons que les états propres $|\psi_{n,a}\rangle$ et $\mathcal{PT}|\psi_{n,a}\rangle$ qui correspondent à la même valeur propre E_n sont linéairement indépendants. Calculons d'abord $\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle$, où $|\psi_{n,a}\rangle$ et $|\phi_{n,a}\rangle$ sont les états propres de H et $H^\dagger$, qui forment la base bi-orthonormée complète (6.2.1)-(6.2.3).

En utilisant la propriété d'antiunitarité de l'opérateur $\mathcal{PT}$, avec $(\mathcal{PT})^2 = 1$.

$$\begin{aligned}
\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle &= \langle(\mathcal{PT})^2\psi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\phi_{n,a}\right\rangle, && (6.2.23)\\
&= \langle\psi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\phi_{n,a}\right\rangle, && (6.2.24)
\end{aligned}$$

Compte tenu des relations entre $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\left|\phi_{n,a}\right\rangle$ données dans (6.2.17)-(6.2.18), ainsi que l'hermiticité de η_σ, nous obtenons:

$$\begin{aligned}
\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle &= \langle\phi_{n,a}\ \sigma_n^a\ \eta_\sigma^{-1}\left|\mathcal{PT}\sigma_n^a\ \eta_\sigma\psi_{n,a}\right\rangle, && (6.2.25)\\
&= (\sigma_n^a)^2\langle\phi_{n,a}\eta_\sigma^{-1}\left|\mathcal{PT}\eta_\sigma\psi_{n,a}\right\rangle, && (6.2.26)\\
&= \langle\phi_{n,a}\ \eta_\sigma^{-1}\left|\mathcal{PT}\eta_\sigma\psi_{n,a}\right\rangle. && (6.2.27)
\end{aligned}$$

puisque $(\sigma_n^a)^2 = 1$.

Si $\mathcal{PT}$ anticommute avec η_σ, nous en déduisons alors que:

$$\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle = -\langle\phi_{n,a}\eta_\sigma^{-1}\left|\eta_\sigma\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle. \tag{6.2.28}$$

L'hermiticité de η_σ conduit à:

$$\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle = -\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle. \tag{6.2.29}$$

Ainsi, nous avons

$$\langle\phi_{n,a}\left|\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle = 0.$$

Par ailleurs, l'eq. (6.2.2) nous donne $\langle\phi_{n,a}\left|\psi_{n,a}\right\rangle = 1$ car $|\psi_{n,a}\rangle$ et $|\phi_{n,a}\rangle$ sont bi-orthonormés. Nous en déduisons donc que $|\psi_{n,a}\rangle$ et $\mathcal{PT}|\psi_{n,a}\rangle$ sont linéairement indépendants.

Par conséquent, comme dans le cas de la $\mathcal{PT}$-symétrie impaire [7, 46], nous avons aussi une dégénérescence dans les valeurs propres de H bien que la $\mathcal{PT}$-symétrie soit paire (ce phénomène n'existe pas dans le cas des Hamiltoniens hermitiens).

Notons que $|\psi_{n,a}\rangle$ et $\mathcal{PT}|\psi_{n,a}\rangle$ sont linéairement indépendants mais ne sont pas orthogonaux comme dans le cas de la $\mathcal{PT}$-symétrie impaire.

Maintenant, nous allons prouver, en suivant le schéma décrit dans le chapitre 4, que l'opérateur métrique η_σ est nécessairement indéfini.

Pour cela, nous montrons que la η_σ-norme reliée au η_σ-produit scalaire $\langle .\,|.\rangle_{\eta_\sigma} = \langle .\,|\eta_\sigma .\rangle$ des états propres de H est indéfinie [23, 33, 34, 35].

Aussi, nous calculons les normes $\left\langle \psi_{n,a} \left| \psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma}$ et $\left\langle \mathcal{PT}\psi_{n,a} \left| \mathcal{PT}\psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma}$; nous arrivons à:

$$\begin{aligned} \left\langle \psi_{n,a} \left| \psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma} &= \left\langle \psi_{n,a} \left| \eta_\sigma \psi_{n,a} \right.\right\rangle, && (6.2.30) \\ &= \left\langle \psi_{n,a} \left| \phi_{n,a} \right.\right\rangle, && (6.2.31) \\ &= 1, && (6.2.32) \end{aligned}$$

et

$$\left\langle \mathcal{PT}\psi_{n,a} \left| \mathcal{PT}\psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma} = \left\langle \mathcal{PT}\psi_{n,a} \left| \eta_\sigma \mathcal{PT}\psi_{n,a} \right.\right\rangle. \qquad (6.2.33)$$

En utilisant la relation d'anticommutation entre η_σ et $\mathcal{PT}$, la propriété d'antiunitarité de $\mathcal{PT}$, nous obtenons:

$$\begin{aligned} \left\langle \mathcal{PT}\psi_{n,a} \left| \mathcal{PT}\psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma} &= -\left\langle \mathcal{PT}\psi_{n,a} \left| \mathcal{PT}\eta_\sigma \psi_{n,a} \right.\right\rangle, && (6.2.34) \\ &= -\left\langle \eta_\sigma \psi_{n,a} \left| \psi_{n,a} \right.\right\rangle && (6.2.35) \\ &= -\left\langle \phi_{n,a} \left| \psi_{n,a} \right.\right\rangle, && (6.2.36) \\ &= -1. && (6.2.37) \end{aligned}$$

Ainsi, la norme $\left\langle \psi_{n,a} \left| \psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma}$ est positive cependant, la norme $\left\langle \mathcal{PT}\psi_{n,a} \left| \mathcal{PT}\psi_{n,a} \right.\right\rangle_{\eta_\sigma}$ est négative, ce qui signifie que la métrique η_σ est indéfinie.

Pour conclure, notre Hamiltonien pseudo-hermitien H avec une $\mathcal{PT}$-symétrie paire admet une structure de dégénérescence de Kramers généralisée si l'opérateur $\mathcal{PT}$ anti-commute avec l'opérateur métrique η_σ qui est nécessairement indéfini.

A cause de ce comportement de dégénérescence, nous pouvons nous demander si la $\mathcal{PT}$-symétrie est dans sa phase brisée ou non-brisée. Habituellement, les phases brisée et non-brisée de la $\mathcal{PT}$-symétrie sont séparées par des points exceptionnels (PE) qui représentent une dégénérescence due au comportement non-hermitien du système. Les (PE) sont caractérisés par leurs valeurs propres qui coïncident (*coalesced eigenvalues*). Dans notre cas, nous traitons une dégénérescence crypto-hermitienne qui diffère de la dégénérescence des points exceptionnels.

A présent, nous allons voir comment réaliser une $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée; ceci fait l'objet de la section suivante.

6.3 Espace de Krein

Dans le but de réaliser une $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée, on se propose de passer à la formulation Krein de l'espace de Hilbert.

On rappelle que dans le cas de la $\mathcal{PT}$-symétrie paire, la $\mathcal{PT}$-symétrie est non-brisée si les états propres $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ de H sont invariants sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$, c.à.d

$$\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle = \left|\psi_{n,a}\right\rangle . \tag{6.3.1}$$

Par contre, dans notre cas la situation est différente car bien que la $\mathcal{PT}$-symétrie soit paire, les états propres $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ ne sont pas invariants sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$ puisque nous avons établi précédemment que les $\mathcal{PT}$-doublets $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ sont linéairement indépendants. Ceci implique que la $\mathcal{PT}$-symétrie est brisée. Afin d'éviter cette impasse, nous introduisons la formulation de l'espace de Krein de l'espace de Hilbert [50, 51], qui nous permet d'assembler les $\mathcal{PT}$-doublets $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ en un seul état.

En effet, nous définissons un nouvel état propre $\left|\chi_{n,a}\right\rangle$ formé par les $\mathcal{PT}$-doublets $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ comme suit:

$$\left|\chi_{n,a}\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\left|\psi_{n,a}\right\rangle - \mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle), \tag{6.3.2}$$

avec les propriétés suivantes:

(i) Les états propres $\left|\chi_{n,a}\right\rangle$ sont des états propres de H avec les mêmes valeurs propres E_n.

(ii) Les états $\left|\chi_{n,a}\right\rangle$ sont invariants sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$.

$$\mathcal{PT}\left|\chi_{n,a}\right\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{PT}(\left|\psi_{n,a}\right\rangle - \mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle) = \left|\chi_{n,a}\right\rangle . \tag{6.3.3}$$

Signalons que nous avons utilisé les propriétés d'antilinéarité et d'involution de $\mathcal{PT}$, $(\mathcal{PT})^2 = 1$. Maintenant, nous démontrons que l'espace de Hilbert noté $\mathcal{K}$ engendré par les états $\left|\chi_{n,a}\right\rangle$ est un espace de Krein [50, 51]. Cela signifie que $\mathcal{K}$ possède les propriétés suivantes:

(i) $\mathcal{K}$ muni d'un produit scalaire indéfini $\langle . \mid . \rangle_{\eta_\sigma}$.

(ii) $\mathcal{K}$ peut être décomposé en deux sous espaces $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$, respectivement engendrés par les $\mathcal{PT}$-doublets $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle$; $\mathcal{K} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, où $\oplus$ est une somme directe qui signifie que, pour tout élément $f \in \mathcal{K}$, il y a un élément unique $f_\pm \in \mathcal{H}_\pm$, tel que $f = f_+ + f_-$.

(iii) Dans le but de démontrer que $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ sont orthogonaux, nous calculons le produit scalaire $\left\langle \psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle_{\eta_\sigma}$ pour tout élément $\left|\psi_{n,a}\right\rangle \in \mathcal{H}_+$ et $\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle \in \mathcal{H}_-$, nous avons:

$$\begin{aligned}
\left\langle \psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle_{\eta_\sigma} &= \left\langle \psi_{n,a} \mid \eta_\sigma\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle \\
&= -\left\langle \psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\eta_\sigma\psi_{n,a}\right\rangle \\
&= -\left\langle (\mathcal{PT})^2\eta_\sigma\psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle \\
&= -\left\langle \eta_\sigma\psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle \\
&= -\left\langle \psi_{n,a} \mid \eta_\sigma\mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle \\
&= -\left\langle \psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle_{\eta_\sigma}.
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\left\langle \psi_{n,a} \mid \mathcal{PT}\psi_{n,a}\right\rangle_{\eta_\sigma} = 0, \tag{6.3.4}$$

ce qui signifie que $\mathcal{H}_+$ et $\mathcal{H}_-$ sont orthogonaux. Ici, nous avons aussi utilisé la relation d'anticommutation entre l'opérateur métrique η_σ et l'opérateur $\mathcal{PT}$, ainsi que la propriété d'antiunitarité de $\mathcal{PT}$ et $(\mathcal{PT})^2 = 1$. Par conséquent, l'espace de Hilbert est un espace de Krein.

Notons que la condition de la $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée impaire est différente de notre cas de $\mathcal{PT}$-symétrie paire; en effet, dans la $\mathcal{PT}$-symétrie impaire, les $\mathcal{PT}$-doublets sont assemblés en deux vecteurs colonnes $(\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle)$ qui forment une seule composante colonne d'un quaternion [7]. Par contre, il est impossible d'assembler, dans le cas de la $\mathcal{PT}$-symétrie paire, les $\mathcal{PT}$-doublets en deux vecteurs colonnes, car les colonnes obtenues sont des split-quaternions qui possèdent une structure différente des quaternions.

Afin d'illustrer ces résultats, nous nous proposons de traiter le modèle à quatre-niveaux suivant.

6.4 Illustration: modèle à quatre-niveaux

6.4.1 Présentation du modèle

Dans cette section, nous illustrons les résultats généraux ci-dessus avec un exemple. Nous considérons le modèle de split-quaternion à quatre-niveaux décrit par l'Hamiltonien non-hermitien suivant:

$$H = \begin{pmatrix} a & ib \\ ic & -a \end{pmatrix}, \tag{6.4.1}$$

où $a = a_0\sigma_0$ est un split-quaternion réel proportionnel à l'identité,

$$b = b_0\sigma_0 - b_1\sigma_x - b_2\sigma_y + ib_3\sigma_z,$$

et

$$c = b_0\sigma_0 + b_1\sigma_x + b_2\sigma_y - ib_3\sigma_z,$$

sont des split-quaternions réels, σ_k $(k = x, y, z)$ sont les matrices de Pauli. En posant $A = b_1 + ib_2$ et $B = b_0 + ib_3$, l'Hamiltonien H peut être écrit comme un Hamiltonien à quatre-niveaux comme suit:

$$H = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & iB^* & iA^* \\ 0 & a_0 & iA & iB \\ iB & -iA^* & -a_0 & 0 \\ -iA & iB^* & 0 & -a_0 \end{pmatrix}, \tag{6.4.2}$$

où A^*et B^* sont les complexes conjugués de A et B respectivement.

L'Hamiltonien H, de l'eq. (6.4.2), satisfait les propriétés suivantes:

(i) H est pseudo-hermitien, ce qui signifie que H satisfait la relation $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$.

(ii) H est invariant sous une $\mathcal{PT}$-symétrie paire, i.e $[H, \mathcal{PT}] = 0$, avec $\mathcal{P}^2 = 1$, $\mathcal{T}^2 = 1$, où $\mathcal{P}$ et $\mathcal{T}$ sont donnés, dans le cas d'un système à quatre-niveaux [7, 32], par:

$$\mathcal{P} = \begin{pmatrix} I_2 & 0 \\ 0 & -I_2 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_x & 0 \\ 0 & \sigma_x \end{pmatrix} K, \tag{6.4.3}$$

où I_2 est la matrice identité (2×2), σ_x la matrice de Pauli et K, l'opérateur de conjugaison complexe.

H admet une métrique indéfinie η_σ qui anticommute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$, η_σ est donnée explicitement par:

$$\eta_\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_z & 0 \\ 0 & -\sigma_z \end{pmatrix}, \tag{6.4.4}$$

donc H admet une structure de dégénérescence de Kramers généralisée.

6.4.2 Valeurs propres et $\mathcal{PT}$-symétrie

Les valeurs propres de H sont:

$$E_\pm = \pm\Omega \text{ avec } \Omega = \sqrt{a_0^2 + |A|^2 - |B|^2}. \tag{6.4.5}$$

Ces valeurs propres sont deux fois dégénérées.

L'Hamiltonien H représente une nouvelle classe d'Hamiltoniens à symétrie $\mathcal{PT}$ paire avec une dégénérescence due au caractère non-hermitien de H. Nous considérons le cas des valeurs propres réelles, c.à.d

$$a_0^2 + |A|^2 > |B|^2. \tag{6.4.6}$$

Les $\mathcal{PT}$-doublets $(|\psi_{-+}\rangle, |\psi_{--}\rangle)$ et $(|\psi_{++}\rangle, |\psi_{+-}\rangle)$ sont, respectivement, associés à l'énergie négative et positive.

Pour l'énergie négative $E_- = -\Omega$:

$$|\psi_{-+}\rangle = k \begin{pmatrix} -iA^* \\ -iB \\ 0 \\ -(\Omega + a_0) \end{pmatrix}, \ |\psi_{--}\rangle = \mathcal{PT}\,|\psi_{-+}\rangle = k \begin{pmatrix} -iB^* \\ -iA \\ (\Omega + a_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.4.7}$$

Pour l'énergie positive $E_+ = +\Omega$:

$$\left|\psi_{++}\right\rangle = k \begin{pmatrix} (\Omega + a_0) \\ 0 \\ iB \\ -iA \end{pmatrix}, \ \left|\psi_{+-}\right\rangle = \mathcal{PT}\left|\psi_{++}\right\rangle = k \begin{pmatrix} 0 \\ (\Omega + a_0) \\ -iA^* \\ iB^* \end{pmatrix}. \tag{6.4.8}$$

Les états propres ($\left|\phi_{-+}\right\rangle$, $\left|\phi_{--}\right\rangle$) et ($\left|\phi_{++}\right\rangle$, $\left|\phi_{+-}\right\rangle$) associés à $H^\dagger$ sont obtenus par l'action de l'opérateur métrique η_σ sur les états propres de H.

Pour l'énergie négative $E_- = -\Omega$:

$$\left|\phi_{-+}\right\rangle = k \begin{pmatrix} iA^* \\ -iB \\ 0 \\ -(\Omega + a_0) \end{pmatrix}, \ \left|\phi_{--}\right\rangle = k \begin{pmatrix} -iB^* \\ iA \\ -(\Omega + a_0) \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{6.4.9}$$

Pour l'énergie positive $E_+ = +\Omega$:

$$\left|\phi_{++}\right\rangle = k \begin{pmatrix} (\Omega + a_0) \\ 0 \\ -iB \\ -iA \end{pmatrix}, \ \left|\phi_{+-}\right\rangle = k \begin{pmatrix} 0 \\ -(\Omega + a_0) \\ iA^* \\ iB^* \end{pmatrix}. \tag{6.4.10}$$

k est la constante de normalisation fixée comme suit:

$$2\Omega(\Omega + a_0)\left|k\right|^2 = 1. \tag{6.4.11}$$

Ces états satisfont les relations abnormales suivantes qui sont une conséquence de l'opérateur métrique η_σ indéfini (6.4.4):

$$\left\langle \psi_{++} \mid \phi_{++} \right\rangle = 1, \tag{6.4.12}$$

$$\left\langle \psi_{+-} \mid \phi_{+-} \right\rangle = -1, \tag{6.4.13}$$

$$\left\langle \psi_{-+} \mid \phi_{-+} \right\rangle = 1, \tag{6.4.14}$$

$$\left\langle \psi_{--} \mid \phi_{--} \right\rangle = -1. \tag{6.4.15}$$

$$\left\langle \psi_{m\alpha} \mid \phi_{\bar{m}\alpha} \right\rangle = 0, \tag{6.4.16}$$

$$\left\langle \psi_{m\alpha} \mid \phi_{\bar{m}\bar{\alpha}} \right\rangle = 0, \tag{6.4.17}$$

$$\left\langle \psi_{m\alpha} \mid \phi_{m\bar{\alpha}} \right\rangle = 0. \tag{6.4.18}$$

$\alpha = \pm$, $m = \pm$, $\bar{m}$ et $\bar{\alpha}$ sont, respectivement, les signes opposés de m et α.

Ces états satisfont aussi la relation suivante:

$$\left|\psi_{++}\right\rangle \left\langle\phi_{++}\right| - \left|\psi_{+-}\right\rangle \left\langle\phi_{+-}\right| + \left|\psi_{-+}\right\rangle \left\langle\phi_{-+}\right| - \left|\psi_{--}\right\rangle \left\langle\phi_{--}\right| = \mathbf{1}. \tag{6.4.19}$$

Les η_σ-normes des $\mathcal{PT}$-doublets sont données comme suit:

$$\left\langle \psi_{++} \mid \psi_{++} \right\rangle_{\eta_\sigma} = \left\langle \psi_{++} \mid \phi_{++} \right\rangle = 1, \tag{6.4.20}$$

$$\left\langle \psi_{+-} \mid \psi_{+-} \right\rangle_{\eta_\sigma} = \left\langle \psi_{+-} \mid \phi_{+-} \right\rangle = -1, \tag{6.4.21}$$

$$\left\langle \psi_{-+} \mid \psi_{-+} \right\rangle_{\eta_\sigma} = \left\langle \psi_{-+} \mid \phi_{-+} \right\rangle = 1, \tag{6.4.22}$$

$$\left\langle \psi_{--} \mid \psi_{--} \right\rangle_{\eta_\sigma} = \left\langle \psi_{--} \mid \phi_{--} \right\rangle = -1. \tag{6.4.23}$$

Nous remarquons que les états propres $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ ne sont pas invariants sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$, c.à.d $\mathcal{PT}\left|\psi_{n,a}\right\rangle \neq \left|\psi_{n,a}\right\rangle$, donc la $\mathcal{PT}$-symétrie est brisée. Pour réaliser la $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée, introduisons la formulation de l'espace de Krein de l'espace de Hilbert.

L'espace de Krein $\mathcal{K}$ est engendré par les états $\left|\chi_{-+}\right\rangle$ et $\left|\chi_{++}\right\rangle$, qui sont une combinaison linéaire des $\mathcal{PT}$-doublets ($\left|\psi_{-+}\right\rangle$, $\mathcal{PT}\left|\psi_{-+}\right\rangle$) et ($\left|\psi_{++}\right\rangle$, $\mathcal{PT}\left|\psi_{++}\right\rangle$), qui sont associés respectivement aux énergies négatives et positives. Ainsi, dans l'espace de Krein $\mathcal{K}$, les états propres sont donnés par:

Pour l'énergie négative $E_- = -\Omega$:

$$\left|\chi_{-+}\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\left|\psi_{-+}\right\rangle - \mathcal{PT}\left|\psi_{-+}\right\rangle), \tag{6.4.24}$$

Pour l'énergie positive $E_+ = +\Omega$:

$$\left|\chi_{++}\right\rangle = \frac{i}{\sqrt{2}}(\left|\psi_{++}\right\rangle - \mathcal{PT}\left|\psi_{++}\right\rangle). \tag{6.4.25}$$

Les états $\left|\chi_{-+}\right\rangle$ et $\left|\chi_{++}\right\rangle$ sont invariants maintenant sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$:

$$\mathcal{PT}\left|\chi_{-+}\right\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{PT}(\left|\psi_{-+}\right\rangle - \mathcal{PT}\left|\psi_{-+}\right\rangle) = \left|\chi_{-+}\right\rangle. \tag{6.4.26}$$

et,

$$\mathcal{PT}\left|\chi_{++}\right\rangle = -\frac{i}{\sqrt{2}}\mathcal{PT}(\left|\psi_{++}\right\rangle - \mathcal{PT}\left|\psi_{++}\right\rangle) = \left|\chi_{++}\right\rangle. \tag{6.4.27}$$

Ainsi, la $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée est réalisée dans l'espace de Krein $\mathcal{K}$.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons établi une nouvelle structure de dégénérescence. En effet, nous avons montré que les Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec des valeurs propres réelles et une $\mathcal{PT}$-symétrie paire, admettent une structure de dégénérescence si l'opérateur $\mathcal{PT}$ anticommute avec l'opérateur métrique η_σ qui est nécessairement indéfini.

Nous avons aussi démontré que la formulation de l'espace de Krein de l'espace de Hilbert est très appropriée afin de réaliser une $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée de notre système.

Notons que l'Hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique H à quatre-niveaux (6.4.2), représente une nouvelle classe d'Hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques qui s'écrit sous forme de split-quaternions. L'investigation d'autres propriétés de ces Hamiltoniens serait intéressante.

Conclusion générale

• Dans cette thèse, nous avons mis en évidence de nouveaux aspects physiques et mathématiques des Hamiltoniens non-hermitiens à spectres réels.

• Nous avons commencé par étudier les propriétés des Hamiltoniens pseudo-hermitiens invariants par symétrie de renversement du temps $\mathcal{T}$ paire: $[H, \mathcal{T}] = 0$ et $\mathcal{T}^2 = 1$.

• Rappelons que, dans la mécanique quantique usuelle (hermitienne), il a été bien établi que si un Hamiltonien hermitien H est invariant par symétrie de renversement du temps impaire: $[H, \mathcal{T}] = 0$ et $\mathcal{T}^2 = -1$, alors le théorème de Kramers stipule que les niveaux d'énergie de H sont tous dégénérés, ce qu'on appelle la dégénérescence de Kramers [8].

Cependant, si H est invariant par renversement du temps pair: $[H, \mathcal{T}] = 0$ et $\mathcal{T}^2 = 1$, alors le théorème de Kramers ne s'applique pas.

• Le résultat principal de cette thèse **est que nous avons montré que la structure des Hamiltoniens pseudo-hermitiens diffère complètement de celle des Hamiltoniens hermitiens en présence de dégénérescences.**

• En effet, nous avons établi que, malgré que la symétrie de $\mathcal{T}$ soit paire, les Hamiltoniens pseudo-hermitiens admettent une dégénérescence de Kramers généralisée, *contrairement aux Hamiltoniens hermitiens.*

• Nous avons ensuite étendu notre étude aux Hamiltoniens pseudo-hermitiens avec une symétrie $\mathcal{PT}$ paire ($\mathcal{P}^2 = 1$, $\mathcal{T}^2 = 1$); nous avons alors montré qu'une structure de dégénérescence de Kramers généralisée existe aussi pour ces derniers.

• Nous avons démontré que la formulation de l'espace de Krein de l'espace de Hilbert est très appropriée afin de réaliser une $\mathcal{PT}$-symétrie non-brisée de notre système.

• Nous avons illustré nos résultats généraux par l'exemple des Hamiltoniens pseudo-hermitiens à quatre-niveaux qui s'écrivent en fonction des split-quaternions appropriés aux symétries $\mathcal{T}$ et $\mathcal{PT}$ paires.

• Enfin, comme perspectives, l'étude d'autres propriétés de ces Hamiltoniens serait intéressante comme, par exemple, la construction du $\mathcal{CPT}$-produit scalaire de la forme du η_+-produit scalaire de Mostafazadeh [25], avec $\eta_+ \equiv \mathcal{PC}$.

Appendice 1: Dégénérescence de Kramers généralisée

Considérons un Hamiltonien H pseudo-hermitien, invariant par symétrie de renversement du temps paire $\mathcal{T}^2 = +1$,

Sato et al ont assuré deux conditions [5]:

$$[H, \mathcal{T}] = 0 \tag{0.0.1}$$

$$\{\eta, \mathcal{T}\} = 0 \tag{0.0.2}$$

Si $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ est état propre de l'Hamiltonien H,

$$H\left|\psi_{n,a}\right\rangle = E_n \left|\psi_{n,a}\right\rangle, \tag{0.0.3}$$

$H^\dagger$ admet comme état propre $\left|\phi_{n,a}\right\rangle$

$$H^\dagger \left|\psi_{n,a}\right\rangle = E_n^* \left|\psi_{n,a}\right\rangle, \tag{0.0.4}$$

tel que,

$$\left\langle\phi_{n,a} \mid \psi_{m,b}\right\rangle = \left\langle\psi_{n,a} \mid \phi_{m,b}\right\rangle = \delta_{nm}\delta_{ab}. \tag{0.0.5}$$

Les états propres $\{\left|\psi_{n,a}\right\rangle, \left|\phi_{n,a}\right\rangle\}$qui satisfont la relation (0.0.5) sont des états bi-orthonormés.

En utilisant la relation de pseudo-hermiticité $H^\dagger = \eta H \eta^{-1}$ et la relation (0.0.4), on trouve,

$$H\eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle = E_n^* \eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle. \tag{0.0.6}$$

L'action de l'opérateur $\mathcal{T}$ sur les deux cotés de cette dernière relation conduit à:

$$H\mathcal{T}\eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle = E_n \mathcal{T}\eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle. \tag{0.0.7}$$

En utilisant la propriété d'invariance de l'Hamiltonien H (0.0.1), nous tirons que, $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$, $\mathcal{T}\eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle$ sont associés à la même valeur propre E_n ; s'il sont linéairement indépendants, alors les valeurs propres de H sont dégénérées.

D'une part, nous avons:

$$\left\langle \phi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1} \mid \phi_{n,a}\right\rangle = \left\langle \mathcal{T}^{2}\eta^{-1}\phi_{n,a} \mid \mathcal{T}\phi_{n,a}\right\rangle = \left\langle \phi_{n,a} \mid \eta^{-1}\mathcal{T}\phi_{n,a}\right\rangle = -\left\langle \phi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1}\phi_{n,a}\right\rangle . \tag{0.0.8}$$

Dans la première équation, nous utilisons la propriété d'antiunitarité de $\mathcal{T}$, alors que, dans la deuxième équation, la relation $\mathcal{T}^2 = +1$, et l'hermiticité de η^{-1}sont prises en compte.

Dans la troisième équation, comme $\mathcal{T}$ et η^{-1} anticommutent, nous aboutissons à: $\left\langle \phi_{n,a} \mid \mathcal{T}\eta^{-1} \mid \phi_{n,a}\right\rangle = 0$.

D'autre part, nous avons $\left\langle \psi_{n,a} \mid \phi_{n,a}\right\rangle = 1$, ceci implique que $\left|\psi_{n,a}\right\rangle$ et $\mathcal{T}\eta^{-1}\left|\phi_{n,a}\right\rangle$ sont linéairement indépendants; ainsi, nous en déduisons une dégénérescence des valeurs propres qui est la dégénérescence de Kramers généralisée.

Appendice 2: Démonstration de la relation reliant les opérateurs linéaires

Soit A, M deux opérateurs linéaires, bijectifs, démontrons la relation suivante:

$$M^{-1}e^{A}M = e^{M^{-1}AM}. \tag{0.0.9}$$

En utilisant le le développement de l'opérateur e^{A}, on trouve,

$$M^{-1}e^{A}M = M^{-1}(1 + A + \frac{1}{2}A^2 + \frac{1}{6}A^3 + ...)M, \tag{0.0.10}$$

$$M^{-1}e^{A}M = M^{-1}M + M^{-1}AM + \frac{1}{2}M^{-1}A^2M + \frac{1}{6}M^{-1}A^3M + ..., \tag{0.0.11}$$

Posons : $M^{-1}AM = G$,

La relation précédente devient,

$$M^{-1}e^{A}M = 1 + G + \frac{1}{2}G^2 + \frac{1}{6}G^3 + ..., \tag{0.0.12}$$

Enfin,

$$M^{-1}e^{A}M = e^{G} = e^{M^{-1}AM}. \tag{0.0.13}$$

Bibliographie

[1] C. M. Bender, Making sense of non-Hermitian Hamiltonians, Rep. Prog. Phys. **70**, 947 (2007).

[2] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. **7**, 1191, (2010).

[3] C. M. Bender, S. Boettcher, Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, Phys. Rev. Lett. **80**, 5243 (1998).

[4] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry: The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. **43**, 205 (2002).

[5] M. Sato, K. Hasebe, K. Esaki, and M. Kohmoto, Time-Reversal Symmetry in Non-Hermitian Systems, Prog. Theo. Phys. **127**, 937 (2012).

[6] Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Cambridge University Press, (1996).

[7] K. Jones-Smith and H.Mathur, Non-Hermitian quantum Hamiltonians with PT symmetry, Phys. Rev. A **82**, 042101, (2010).

[8] E. P. Wigner, Uber die Operation der Zeitumkehr in der Quantenmechanik. Nachrichten der Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen Mathematisch-Physikalische Klasse pages 546 (1932).

[9] B.W.Roberts, Kramers degeneracy without eigenvectors, University of southern California, Phys. Rev. A **86** (3), 034103, (2012).

[10] J. E. Avron, L. Sadun, J. Segert and B. Simon, Chern numbers, quaternions, and Berry's phases in Fermi systems, Commun. Math. Phys. **124**, 595, (1989).

[11] J. Baglio, Une introduction à l'étude des quaternions, dans le cadre des T.I.P.E. (2002-2003).

[12] W. R. Hamilton, On a new species of imaginary quantities connected with a theory of quaternions, Proc. of R. Irish Acad. **2**, 424, (1844).

[13] K. Hasebe, Non-Compact Hopf Maps and Fuzzy Ultra-Hyperboloids, Kagawa National College of Technology, Nuclear Physics, arXiv:1207.1968v4, (2012).

[14] T. T. Wu, Ground State of a Bose System of Hard Spheres, Phys. Rev. **115**, 1390 (1959).

[15] J. Wong, Results on Certain Non-Hermitian Hamiltonians, J. Math. Phys. **8**, 2039 (1967).

[16] D. R. Gilson, An introduction and brief topical review of non-Hermitian quantum mechanics with real spectra, (Master of Science Thesis, University of Hull, (2008).

[17] C. M. Bender and T. T. Wu, Anharmonic Oscillator, Phys. Rev. **184**,1231 (1969).

[18] R. Haydock and M. J. Kelly, Electronic structure from non-hermitian representations of the Hamiltonian, J. Phys. C. **8**, L290 (1975).

[19] G. E. Stedman and P. H. Butler, Time reversal symmetry in applications of point group theory, J. Phys. A: Math. Gen. **13**, 3125 (1980).

[20] F. H. M. Faisal, J. V. Moloney, Time-dependent theory of non-Hermitian Schrodinger equation: Application to multiphoton-induced ionisation decay of atoms, J. Phys. B: Cond. Mat. **14**, 3603 (1981).

[21] N. Hatano and D. R. Nelson, Vortex pinning and non-Hermitian quantum mechanics, Phys. Rev. B. **56**, 8651 (1997).

[22] C. M. Bender, D. C. Brody, H. F. Jones, Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett. **89**, 270401 (2002).

[23] W. Pauli, On Dirac's NewMethod of Field Quantization, Rev. Mod. Phys. **15**, 175 (1943).

[24] F. G. Scholtz, H. B. Geyer, F. J. W. Hahne, Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, Ann. Phys. **213**, 74 (1992).

[25] Mostafazadeh A. "Exact PT-symmetry is equivalent to Hermiticity", J. Phys. A: Math. Gen. **36,** 7081, (2003).

[26] J. White, Non-Hermitian Quantum Mechanics, Master of Science in Quantum Fields and Fundamental Forces of Imperial College London, (2010).

[27] A. Mostafazadeh, Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. **43**, 2814 (2002).

[28] Assis, P. E. G, Non-Hermitian Hamiltonians in Field Theory. Doctoral thesis, City University London, 29, (2009).

[29] Mostafazadeh A. "Pseudo-Hermiticity and Generalized PT- and CPT -Symmetries", J. Math. Phys. **44,** 974 (Preprint math-ph/0209018), (2003).

[30] Z. Ahmed, C-, PT- and CPT-invariance of pseudo-Hermitian Hamiltonians, J. Phys. A. **36**, 9711 (2003).

[31] P.A.M. Dirac, The Quantum Theory of the Electron, Proc. Roy. Soc A. **117**, 610 (1928).

[32] B. Choutri, O. Cherbal, F. Z. Ighezou and D. A. Trifonov, On the time-reversal symmetry in pseudo-Hermitian systems, Prog. Theor. Exp. Phys. **113** A02, (2014).

[33] A. Mostafazadeh, Is pseudo-Hermitian quantum mechanics an indefinite-metric quantum theory?, Czech J. Phys. **53**, 1079, (2003).

[34] E.C.G Sudarshan, Quantum mechanical systems with indefinite metric. I, Phys. Rev. **123**, 2183, (1961).

[35] T. D. Lee and G. C. Wick, Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys. B **9**, 209, (1969).

[36] A. Mostafazadeh, Statistical origin of pseudo-Hermitian supersymmetry and pseudo-Hermitian fermions, J. Phys. A **37**, 10193 (2004).

[37] O. Cherbal, M. Drir, M. Maamache and D. A. Trifonov, Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems, J. Phys. A **40**, 1835 (2007).

[38] F. Bagarello, Linear pseudo-fermions, J. Phys. A **45**, 444002 (2012).

[39] F. Bagarello, Model pseudofermionic systems: Connections with exceptional points, Phys. Rev. A **89**, 032113 (2014).

[40] F. Bagarello and M. Znojil, Nonlinear pseudo-bosons versus hidden Hermiticity, J. Phys. A **44**, 415305 (2011).

[41] M. Znojil, On the Role of the Normalization Factors K_n and of the Pseudo-Metric $\mathcal{P} \neq \mathcal{P}^\dagger$ in Crypto-Hermitian Quantum Models, SIGMA **4**, 001 (2008).

[42] O. Cherbal and D. A. Trifonov, Extended PT - and CPT -symmetric representations of fermionic algebras, Phys. Rev. A **85**, 052123 (2012).

[43] W. D. Heiss, Exceptional points of non-Hermitian operators, J. Phys. A: Math. Gen. **37**, 2455, (2004).

[44] M. V. Berry, Physics of nonhermitian degeneracies, Czechoslovak J. Phys. **54**, 1039, (2004).

[45] L. Ge and A. D. Stone, Parity-time symmetry breaking beyond one dimension: The role of degeneracy, Phys. Rev. X **4**, 031011, (2014).

[46] G. Scolarici and L. Solombrino, Pseudo-Hermitian Hamiltonians, time-reversal invariance and Kramers degeneracy, Phys. Lett. A **303**, 239, (2002).

[47] B. Choutri, O. Cherbal, F. Z. Ighezou and M. Drir, Pseudo-Hermitian Systems with PT -Symmetry: Degeneracy and Krein Space, Int J Theor Phys **56**, 1595 (2017).

[48] See the relation (95) of Ref. [9]. In the case of real spectrum as given by relation (99) of Ref. [9].

[49] J. J. Sakurai, Modern Quantum Mechanics, San Fu Tuan, ed. Addison-Wesley Publishing Company, p. 269, (1994).

[50] T. Y. Azizov and I. S. Iokhvidov: Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric Wiley, Chichester, (1989).

[51] A. Mostafazadeh, Krein-space formulation of PT symmetry, CPT-inner products, and pseudo-Hermiticity, Czech J. Phys. **56**, 919, (2006).