

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE  
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE  
FACULTE DE MATHEMATIQUES



Thèse Doctorat en Sciences

Présentée pour l'obtention du **diplôme** de grâde de Docteur

En : **Mathématiques**

Option : Équations Aux Dérivées Partielles

Par

***ARIES Mohammed Es-Salih***

Sujet

***Stabilisation de l'équation des ondes avec un terme mémoire localisé et une dissipation frictionnelle frontière***

Soutenue le: **20/06/2019** devant le jury composé de :

M. S. Moulay  
A. Khemmoudj  
A. Touzaline  
M. Bousselsal  
A. Mokrane  
A. Hakem

Prof à l'USTHB  
Prof à l'USTHB  
Prof à l'USTHB  
Prof à l'ENS-Kouba  
Prof à l'ENS-Kouba  
Prof à l'U. Djilali Liabés  
S.B.A

Président  
Directeur de Thèse  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur  
Examinateur

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction Générale</b>	<b>7</b>
1.1	Notes historiques . . . . .	9
1.1.1	Les travaux de C. S. Morawetz . . . . .	9
1.1.2	Les travaux de G. Chen et J. Lagnese . . . . .	10
1.1.3	Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani . . . . .	10
1.1.4	Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua . . . . .	10
1.1.5	Les travaux de J. L. Lions . . . . .	11
1.2	Problèmes viscoélastiques . . . . .	11
1.2.1	Elasticité, viscosité . . . . .	11
1.2.2	Matériau viscoélastique . . . . .	12
1.2.3	Stabilisation de quelques problèmes viscoélastiques . . . . .	13
1.3	Problèmes de Ventcel . . . . .	18
<b>2</b>	<b>Rappels et définitions</b>	<b>26</b>
2.1	Introduction . . . . .	26
2.2	Topologie faible $\sigma(X, X')$ . . . . .	26

2.3	Espaces fonctionnels . . . . .	29
2.3.1	Espaces $L^p(\Omega)$ . . . . .	29
2.3.2	Notions de base sur les distributions . . . . .	31
2.3.3	Espaces de Sobolev . . . . .	36
2.4	Gradient tangentiel et laplacien tangentiel . . . . .	42
2.4.1	Gradient tangentiel . . . . .	42
2.4.2	Laplacien tangentiel . . . . .	43
2.4.3	Espaces définis avec le gradient tangentiel . . . . .	44
<b>3</b>	<b>Existence et unicité</b>	<b>45</b>
3.1	Introduction . . . . .	45
<b>4</b>	<b>Comportement asymptotique</b>	<b>68</b>
4.1	Introduction . . . . .	68

# REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement Mr Ammar Khemmoudj pour sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif et m'encourager pendant ces années. Il m'a témoigné sa confiance.

Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Je remercie Prof. M. S. Moulay, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de cette thèse. Je remercie également le Prof. A. Touzaline, Prof. A. Mokrane, Prof. M. Bousselsal, Prof. A. Hakem d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Durant mes années de recherche à l'USTHB, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Qu'il me soit enfin permis d'exprimer toute ma gratitude à ma femme, qui a toujours été un soutien à mes côtés, elle m'a sans cesse encouragé et soutenu dans mon travail, c'est grâce à elle que j'ai pu entreprendre des études longues, dont cette thèse est l'aboutissement.

Un grand merci à tous les doctorants avec qui j'ai pris un réel plaisir à partager, non seulement, des discussions scientifiques, mais aussi des moments plus personnels, une pause café, un repas.

Je tiens à remercier ma famille : en particulier mes enfants et mon père et ma mère, ma soeur et mes frères, pour leur amour et leur soutien sans faille. Je les remercie de m'avoir supporté

et encouragé pendant les moments de doute. Je n'aurai jamais pu faire cette thèse sans eux.  
Enfin, toute personne ayant aidé de près où de loin à la réalisation de cette thèse est vivement remerciée.

## Résumé

Cette thèse est dédiée à l'étude de la stabilisation exponentielle de l'équation des ondes avec des conditions de Ventcel en combinant un terme mémoire localisé dans un domaine  $\Omega$  et une dissipation frictionnelle linéaire sur le bord  $\Gamma = \partial\Omega$ . Ces dissipations sont assez fortes, via le processus de transmission ( $u|_{\Gamma} = v$ ), pour assurer la stabilité asymptotique de tout le système.

**Mots clés :** Stabilisation, équation des ondes, amortissement par frottement, viscoélasticité.

# Abstract

This work is devoted to the study of uniform decay of a wave equation with dynamical boundary conditions, localised memory term and frictional dampings. We prove that a localised memory term combined with frictional dissipations is strong enough, via transmission process ( $u|_{\Gamma} = v$ ), to assure the asymptotic stability of the whole system.

**Key Words :** Stabilisation ; wave equation ; frictional damping ; viscoelasticity.

# Chapitre 1

## Introduction Générale

La Théorie du Contrôle des Equations aux Dérivées Partielles intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilité des équations aux Dérivées Partielles ont fait l'objet, récemment, de nombreux travaux. Dans cette thèse nous nous sommes intéressés à l'étude de la stabilisation de l'équation des ondes avec un terme mémoire localisé et une dissipation frictionnelle frontière.

Le problème de contrôlabilité peut se formuler simplement de la manière suivante :

On considère un système d'évolution décrit par les équations aux dérivées partielles et un intervalle de temps  $[0, T]$ . Peut-on amener les solutions d'un état initial (au temps  $t = 0$ ) à un état final (au temps  $t = T$ ) en agissant par un contrôle approprié appliqué sur le bord où dans une partie du domaine dans laquelle l'équation évolue.

Il y a eu d'importantes recherches sur le sujet durant ces dernières années. Voir par exemple J-L. Lions [93, 94] , Lasiecka et Triggiani [76], Fattorini [45], Russell [129] et Zuazua [139, 140].

Dans un cadre fonctionnel approprié, le problème de contrôlabilité consiste à analyser si l'énergie totale des solutions peut être évalué au moyen de mesures partielles sur un sous-

ensemble du domaine ou du bord. Pour obtenir des estimations d'observabilité, il existe diverses méthodes, comme la technique des multiplicateurs [73, 93], l'analyse micro locale [21, 12], les inégalités de Carleman [17, 46, 49, 85] ou encore les critères fréquentiels [13, 113], les critères spectraux [102, 121] ou les inégalités d'Ingham [54, 65, 74].

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations, elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel nous nous intéressons revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que nous notons par  $E(t)$ , à étudier sa limite afin de déterminer si cette dernière est nulle ou pas, et si cette limite est nulle, à donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro.

Il existe plusieurs types de stabilité que l'on peut étudier. Le premier type consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e :

$$E(t) \longrightarrow 0, \text{ lorsque } t \longrightarrow +\infty.$$

C'est ce que l'on appelle la stabilisation forte.

On peut noter des différences entre les problèmes de contrôlabilité et ceux de stabilisation. D'une part, dans les premiers cas le temps varie dans un intervalle fini  $[0, T]$ , alors que pour les problèmes de stabilisation le temps  $t$  tend vers l'infini.

Malgré cela, les liens entre les problèmes de stabilisation et de contrôlabilité sont étroits et l'on démontre certaines implications entre ces deux problèmes (voir par exemple [94, 111, 129]).

Pour le second type, on s'intéresse à la décroissance de l'énergie la plus rapide, c'est-à-dire

lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e :

$$E(t) \leq Ce^{-\delta t}, \forall t > 0,$$

où  $C$  et  $\delta$  sont des constantes positives avec  $C$  qui dépend des données initiales. Quant au troisième, on étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance de l'énergie n'est pas exponentielle, mais du type polynomiale ou logarithmique par exemple :

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \forall t > 0,$$

ou bien

$$E(t) \leq \frac{C^\wedge}{\log(1+t)^k}, \forall t > 0,$$

où  $C, C^\wedge$ , et  $k$  sont des constantes positives avec  $C$  et  $C^\wedge$  qui dépendent des données initiales.

## 1.1 Notes historiques

Nous allons rappeler d'une manière brève quelques phases qu'a connues la notion de stabilisation sans vraiment rentrer dans les détails.

### 1.1.1 Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation d'ondes dans un domaine non borné de  $\mathbb{R}^3$ , C. Wilcox [136] a réussi à montrer que l'énergie locale décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Avec des hypothèses plus générales que celles de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz [115] a

montré que l'énergie locale décroît inversement au temps. En combinant leurs méthodes, P D Lax, C S. Morawetz et R S. Phillips [84] ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation d'ondes dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ , extérieur à un domaine étoilé décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

### 1.1.2 Les travaux de G. Chen et J. Lagnese

En se basant sur les travaux C. S. Morawetz [115] sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell [127] a conjecturé, en 1974 un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné. Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen [34]. Ensuite, en adaptant la technique des multiplicateurs utilisée par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. R. Alston, dans les domaines extérieurs, C. Chen [51] a amélioré les résultats obtenus dans [34]. Voir aussi Lagnese [75].

### 1.1.3 Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani [77] ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord.

### 1.1.4 Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition aux bords de G. Chen en la remplaçant par une autre condition, ce qui a permis, en principe de généraliser les résultats de **Chen** et **Lagnese** aux domaines avec bords réguliers et connexes, mais au prix de modifier la condition aux limites.

### 1.1.5 Les travaux de J. L. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables. Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle et de la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur d'amortissement (feedback), ni l'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

## 1.2 Problèmes viscoélastiques

### 1.2.1 Elasticité, viscosité

L'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformée. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées.

Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiale quand ces forces ne s'exercent plus. Les raisons physiques du comportement élastique peuvent être quelque peu différentes d'un matériau à un autre. Pour les métaux, les treillis atomiques changent de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système revient à son état original où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et d'autres polymères, l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère, lorsque les forces sont appliquées. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation.

Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion. D'autre

part, la viscosité est une propriété interne d'un fluide qui offre une résistance à l'écoulement. Un liquide visqueux n'a pas de forme définie, il s'écoule de manière irréversible sous l'action de forces externes. Cependant, il existe des matériaux dont les propriétés sont intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité.

### 1.2.2 Matériau viscoélastique

En rhéologie, le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module  $\mathbf{E}$  (ou  $\mathbf{G}$ ) et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité  $\eta$ . L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation.

La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, et la plupart des matériaux ont un comportement viscoélastique. La partie viscoélastique provoque une décroissance de l'énergie associée. La partie élastique donne une équation conservatrice par contre la partie viscoélastique produit un mécanisme de dissipation qui agit sur une partie du domaine pour donner une décroissance de l'énergie associée à la solution pour ramener le système à l'état d'équilibre.

Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques dont une partie de l'énergie stockée dans le système est récupéré lors de la suppression de la charge, et l'autre partie se dissipe sous forme de chaleur.

Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégro-différentiels, par exemple  $\int_0^t h(t-s) \Delta(s) ds$  ; où  $h$  représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, le terme intégral exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le

matériau a subi.

### 1.2.3 Stabilisation de quelques problèmes viscoélastiques

Appleby J. A. D et al. [5] ont étudié l'équation intégro-différentielle linéaire

$$u_{tt}(t) + Au(t) + \int_{-\infty}^t k(t-s) Au(s) = 0 \quad t > 0;$$

où le symbole ' désigne la dérivée partielle par rapport au temps  $(\frac{\partial}{\partial t})$ , et  $A$  est un opérateur positif sur un espace de Hilbert  $X$ , avec domaine dense  $D(A)$ , ils ont établi des résultats concernant la décroissance exponentielle des solutions fortes dans un espace de Hilbert. Vittorino Pata [118] a étudié les propriétés de décroissance du semi-groupe engendré par une équation intégro-différentielle linéaire dans un espace de Hilbert, qui est une version abstraite de l'équation

$$u_{tt}(t) + Au(t) + \int_0^{\infty} \mu(t-s) \Delta u(s) = 0 \quad t > 0;$$

décrivant la dynamique des corps viscoélastiques linéaires et il a établi les conditions nécessaires pour avoir la stabilité exponentielle.

Pour le cas de l'histoire Cavalcanti et al. [29] ont étudié le problème viscoélastique suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t) - \Delta u + \int_0^{\infty} g(t-s) \Delta u(s) = 0, & \text{dans } \Omega \times (\mathbf{0}, \infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (\mathbf{0}, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) + h(u_t) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (\mathbf{0}, \infty), \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u'(0, x) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (1.1)$$

où,  $\Omega$  est un domaine borné dans  $\mathbb{R}^n$  avec une frontière régulière  $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$  où  $\Gamma_0, \Gamma_1$  sont des sous ensembles fermés et disjoints, avec  $mesure(\Gamma_0) > 0$  et  $\nu$  représente le vecteur normal unitaire extérieur à  $\partial\Omega$ ;  $g$  et  $h$  sont des fonctions spécifiques. Ils ont montré un résultat d'existence globale pour les solutions fortes et faibles. De même, des résultats sur le taux de la décroissance uniforme ont été prouvés avec des hypothèses assez restrictives sur l'amortissement (feedback)  $h(u_t)$  et le noyau  $g$ .

En effet, la fonction  $g$  devait se comporter exactement comme  $e^{-mt}$ ,  $m > 0$ , et la fonction  $h$  avait un comportement polynomial au voisinage de zéro. Cavalcanti et al. [28] ont considéré (1.1) sans imposer des hypothèses de croissance sur  $h$  et sous des conditions plus faibles sur  $g$ . Ils ont amélioré le résultat obtenu dans l'article [29] et ils ont assuré la stabilité uniforme. En particulier, ils ont obtenu des taux de décroissance explicites pour des cas spéciaux. Ce résultat a été récemment amélioré par Messaoudi et Mustapha [107]. Voir aussi [44] dans lequel les Auteurs ont considéré :

$$u_{tt}(t) - \Delta u + \int_0^\infty g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau + u^\lambda = 0, \text{ dans } \Omega \times (\mathbf{0}, \infty),$$

et ils ont montré que la décroissance exponentielle de la fonction de relaxation est une condition nécessaire pour avoir la décroissance exponentielle de l'énergie de la solution. La présence du terme mémoire peut empêcher la décroissance exponentielle. Ils ont également obtenu un résultat similaire pour le cas de la décroissance polynomiale. Cavalcanti et al. [30], ont considéré

$$u_{tt}(t) - k_0 \Delta u + \int_0^\infty g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau + a(x)u^\lambda + |u|^\gamma u = 0, \text{ dans } \Omega \times (\mathbf{0}, \infty),$$

où,  $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$  est une fonction qui peut s'annuler sur une partie de  $\Omega$ . Sous certaines restrictions géométrique sur  $w$  et pour

$$\begin{aligned} a(x) &\geq a_0 > 0, \quad \forall x \in w, \quad w \subset \Omega \\ -\zeta_1 g(t) &\leq g'(t) \leq -\zeta_2 g(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Les Auteurs ont établi un taux de décroissance exponentielle. Berrimi et Messaoudi [10] ont amélioré le résultat de Cavalcanti en introduisant une différente fonctionnelle qui leur ont permis d'affaiblir les conditions à la fois sur  $a$  et sur  $g$ . Par ailleurs, Berrimi et al. [9] ont considéré

$$u_{tt}(t) - \Delta u + \int_0^\infty g(t-\tau) \Delta u(\tau) d\tau = |u|^{p-2} u, \quad \text{dans } \Omega \times (\mathbf{0}, \infty),$$

dans un domaine borné et  $p > 2$ . Ils ont établi l'existence locale, et ils ont montré, sous des conditions plus faibles que celles exigées par [30], que la solution locale est globale et décroît uniformément si les données initiales sont assez petites. Cavalcanti et Oquendo [31] ont considéré

$$u_{tt}(t) - \Delta u + \int_0^\infty g(t-s) \operatorname{div} [a(x)g(t-s) \nabla u(s) ds] + b(x)h(u_t) + f(u) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

où,  $\Omega \times \mathbb{R}_+$  est un domaine borné de  $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$  et  $b : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$  une fonction qui peut être nulle sur une partie du domaine. Sous les conditions  $b(x) \geq b_0 > 0$  sur  $\omega \subset \Omega$  et  $\omega$  vérifiant certaines restrictions géométriques,  $a(x) + b(x) \geq p > 0$ , pour tout  $x \in \Omega$ , et  $g$  vérifiant

$$-\zeta_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\zeta_2 g(t), \quad t \geq 0.$$

Ils ont amélioré le résultat obtenu par M.M. Cavalcanti et al. [30] en obtenant la stabilité expo-

entielle dans le cas où  $g$  décroît exponentiellement avec  $h$  linéaire et la stabilité polynomiale dans le cas où  $g$  décroît polynomialement et  $h$  non linéaire.

Pour les équations viscoélastiques quasilineaires, Cavalcanti et al. [27] ont étudié l'équation suivante :

$$|u_t|^p u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^\infty g(t-s) \Delta u(s) ds - \gamma \Delta u' = 0 \quad p > 0,$$

ils ont démontré l'existence globale pour  $\gamma \geq 0$  et la décroissance exponentielle pour  $\gamma > 0$ .

De même, Messaoudi et Tatar [108], [109] ont prouvé, pour  $\gamma = 0$ , la décroissance exponentielle avec ou sans terme source.

Les problèmes de stabilisation par des termes mémoires dans  $\Omega$  et d'autres dissipations sur une partie du bord  $\Gamma$  ont été étudiés par Cavalcanti et al. [27]. Aassila, Cavalcanti et Soriano [1] ont étudié la stabilisation de l'équation des ondes avec des termes mémoires et une dissipation frictionnelle non linéaire sur le bord.

La plupart des modèles constitutifs des matériaux viscoélastiques conduisent à des équations de mouvement, ayant la forme d'une E. D.P linéaire hyperbolique, perturbée par un terme intégral dissipatif de type Volterra et ayant un noyau de convolution non négatif, décroissant, voir par exemple, e.g., [37], [38].

Pour plus de détails concernant les phénomènes physiques qui sont modélisés par les équations différentielles avec des termes mémoires, voir [43]. L'existence et l'unicité des solutions ont été étudiées par J. Pruss [120]. P. Cannarsa et D. Sforza [15] ont étudié la stabilité de l'équation intégro-différentielle non linéaire suivante :

$$u_{tt}(t) + F(u(t)) + Au(t) - \int_0^t Bg(t-s) Au(s) ds = f(t), t \geq 0, \quad (1.2)$$

où,  $A$  est un opérateur positif sur un espace de Hilbert  $X$  ayant un domaine dense  $D(A)$ ,  $F$  est une fonctionnelle définie sur  $D(A^\theta)$ ,  $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}$ . Dans ce cas, le noyau n'est pas supposé être absolument continue mais juste intégrable. Les auteurs ont supposé que  $k(t) := \int_0^t B(s) ds$  est un noyau de type positif vérifiant  $k(0) < 1$ . Ils ont montré que la solution décroît exponentiellement à l'infini.

Il est important de mentionner que P. Cannarsa et D.Sforza [14], ont étudié l'équation intégral-différentielle semilinéaire suivante :

$$u_{tt}(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s) Au(s) ds = \nabla F(u(t)), t \in (0, \infty), \quad (1.3)$$

où,  $A$  vérifie les mêmes hypothèses que celle du problème (1.2),  $\nabla F$  représente le gradient de la différentiabilité au sens de Gateaux de la fonctionnelle  $F : D(A^{\frac{1}{2}}) \rightarrow \mathbb{R}$ , et  $g$  est un noyau qui décroît exponentiellement à l'infini et possédant des primitives fortement définies positives. Ils ont obtenu la stabilisation exponentielle des solutions faibles.

F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et D. Sforza [4] ont prouvé les décroissances exponentielles et polynomiales de l'énergie pour le problème (1.3) en supposant sur  $g$  des hypothèses moins fortes. Ils ont supposé que  $g : [0; \infty) \rightarrow [0; \infty)$  est une fonction localement absolument continue vérifiant, pour  $p \in (2; \infty]$ ;

$$g(0) > 0; \int_0^\infty g(t) dt < 1, \quad g'(t) \leq -kg(t)^{1+\frac{1}{p}}$$

Les résultats de décroissance de l'énergie à l'infini de toute solution mild du problème (1.3), avec des données initiales suffisamment petites, sont obtenus avec le même taux de décroissance

que  $g$  (exponentielle ou polynomiale).

### 1.3 Problèmes de Ventcel

Les problèmes de Ventcel sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels tangentiels du même ordre que l'opérateur principal. Ils interviennent dans la modélisation des phénomènes mécaniques comme l'élasticité [87, 88] ou physique comme processus de diffusion [86, 130] ou la propagation d'onde [7]. Les conditions de Ventcel sont obtenues par des méthodes asymptotiques à partir de problèmes de transmission. La condition

$$\partial_\nu u - \Delta_\Gamma u = g \quad \text{sur } \Gamma_1,$$

pour l'équation

$$u_t - \Delta u = 0 \quad \text{dans } \Omega,$$

a été introduite par Ventcel pour des processus de diffusion [135]. Elle fait intervenir des dérivées tangentielles d'ordre deux. Elle modélise l'échange thermique du corps avec le milieu ambiant en présence d'une pellicule qui est une très bonne conductrice sur la surface du corps.

L'équation des ondes avec des conditions aux limites (de type Ventcel) est utilisée dans un large champ d'applications, voir [110]. Pour l'étude de la stabilisation de l'équation des ondes avec des conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel, voir [89].

L'équation des ondes avec des conditions aux limites de type Ventcel a été étudiée par Khemmoudj et Medjden [70]. Dans cet article, les Auteurs prouvent la stabilité exponentielle en considérant le feedback linéaire  $a(x)u_{t,1}$  agissant dans la première équation et  $b(x)u_{t,2}$  agissant

dans la seconde équation, suivant les techniques développées par Zuazua [139]. Les résultats précédents, ont été généralisés dans [20], en considérant des opérateurs linéaires  $A$  et  $A_T$  qui dépendent de la variables spatiale  $x$ , au lieu de  $-\Delta$  et  $-\Delta_\Gamma$ , respectivement.

D'autre part les Auteurs ont utilisé des dissipations non linéaires  $a(x)g(u_{t,1})$  et  $b(x)g(u_{t,2})$  agissant respectivement dans la première et la seconde équation. Ces résultats ont été obtenus en combinant de nouvelles estimations de l'énergie avec des méthodes de géométrie Riemannienne, introduites par Lasiecka, Triggiani and Yao [80]. Marcelo M. Cavalcanti et al. [32] ont étudié la stabilisation de l'équation d'onde avec des conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0 & \text{dans } \Omega \times ]0, \infty[ \\ \partial_\nu u - \Delta_\Gamma u = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times ]0, \infty[ \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times ]0, \infty[ \end{cases}$$

où  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 2$ , avec une frontière régulière  $\Gamma := \partial\Omega$ . Soient  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  les sous ensembles fermés, non vides et disjoints de  $\Gamma$ , tels que  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ .

Ce modèle décrit les vibrations d'un corps avec une couche mince d'une grande rigidité sur sa frontière. Un tel système a été d'abord étudié par Lemrabet [86, 87], puis par Lemrabet et Teniou [90].

Nous considérons l'équation des ondes à travers un domaine  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) ayant une frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de la classe  $C^3$ . Soient  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  des ouverts, non vide et sous-ensembles disjoints de  $\Gamma$  avec  $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ . Nous dénotons par  $\nabla_T$  le gradient-tangentiel sur  $\Gamma$ , par  $\Delta_\Gamma$  l'opérateur laplacien sur  $\Gamma$  et par  $\partial_\nu$  la dérivée normale où  $\nu$  représente vecteur normal unitaire extérieur pour  $\Gamma$ . Ce travail est consacré à l'étude de la stabilisation uniforme des solutions de problème de ventcel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t) - \Delta u(t) = 0, & \text{sur } \Omega \times ]0, \infty[, \\ v_{tt}(t) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) - \Delta_T v(t) = 0, & \text{dans } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ u|_{\Sigma_1} = v, & \text{dans } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ u = 0, & \text{dans } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, \infty[, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x), & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}, \\ v(0, x) = v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x), & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}. \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Ce problème a été étudié par (Lemrabet, 1987) et par la suite par (Lemrabet et Teniou, 1992).

Le modèle décrit un corps vibrant avec une couche mince de forte rigidité de sa frontière.

(Lemrabet et Teniou, 1992) ont prouvé des résultats d'existence et de régularité pour le cas

linéaire. Récemment, le problème ci-dessus a été étudié par (Khemmoudj et Medjden, 2004).

Dans ce travail, les Auteurs ont prouvé une stabilité exponentielle en considérant une rétroaction

linéaire localisée  $a(x)u_t$  agissant dans la première équation, suivant les idées d'abord introduites

par (Zuazua, 1990) combinées avec de nouveaux outils. Plus récemment, les résultats précédents

mentionnés ci-dessus ont été prolongés par (Cavalcanti, Khemmoudj et Medjden, 2007) en

considérant le problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t) - Au(t) + a(x)g_1(u_t(t)) = 0, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt}(t) + \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(t) - A_T v(t) + g_2(v_t(t)) = 0, & \text{dans } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v, & \text{dans } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0, & \text{dans } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x), & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}, \\ v(0, x) = v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x), & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}, \end{array} \right. \quad (1.5)$$

où  $a \in L^\infty(\Omega)$ ,  $a(x) \geq a_0 > 0$ , presque partout sur  $\omega$  et  $\omega \subset \Omega$  est un sous-ensemble ouvert et non vide de  $\Omega$ ;  $a_0$  est une constante et

$$\begin{aligned} Au &= -\operatorname{div}(A(x).\nabla u), \\ A_T u &= -\operatorname{div}_{0T}(A_T(x).\nabla u) \quad [x_1, \dots, x_n], \end{aligned} \tag{1.6}$$

$A = (a_{i,j})$  est une fonction matricielle,  $a_{i,j} = a_{j,i}$  sont des fonctions  $C^\infty$  dans  $\mathbb{R}^n$ ,  $\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i,j=1}^n a_{j,i} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i$  est le vecteur normal unitaire extérieur de  $\Gamma$  pointant vers l'extérieur de  $\Omega$ , et  $\nu_A = A.\nu$ , ils supposaient que les opérateurs différentiels de second ordre  $A$  et  $A_T$  satisfont certaines conditions d'ellipticité uniforme, et la stabilisation uniforme a été obtenue en utilisant la géométrie Riemannienne. Cela a été fait en combinant de nouvelles estimations de l'énergie combinée avec des méthodes géométriques Riemannienne de Lasiecka, Triggiani et Yao; voir, par exemple, (Yao, 1999, Lasiecka, Triggiani et Yao, 1997). Il convient de mentionner d'autres documents en rapport avec ce sujet, comme, par exemple, (Li et Xiao, 2016), (Bey, Heminna, et Lohéac, 2003), (Haminna, 2000,2001), (Khemmoudj et Seghour, 2015), et les références qui s'y trouvent. D'autre part très récemment, (Cavalcanti, Lasiecka et Toundykov, 2012a) ont étudié

$$\begin{cases} u_{tt}(t) - Au(t) + a(x)g_1(u_t(t)) = 0, & \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(t) - A_T v(t) + g_2(v_t(t)) = 0, & \text{dans } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x), & x \in \Omega. \end{cases} \tag{1.7}$$

Ici  $\Omega$  désigne un domaine de classe  $C^2$  borné dans  $\mathbb{R}^3$  avec une frontière  $\Gamma$ ;  $\Delta_T$  est le Laplacien Opérateur Beltrami sur  $\Gamma$ . La fonction  $g$  est en continue monotone,  $g(0) = 0$ , et  $a(x) \in L^\infty(\Omega)$  est une fonction non négative limitant l'effet de  $g$  à un sous-ensemble du domaine, et les

Auteurs ont trouvé un problème dans un sous-ensemble de limite statique de Ventcel parce que la condition uniforme de Lopatinskii n'est pas satisfaite par un tel système. Dans le cas de la limite de Ventcel, la situation est plus difficile, l'énergie "naturelle" inclut la norme de Sobolev  $H^1$  de la solution sur la frontière pour monter la présence de l'opérateur de la frontière Neumann, mais aussi d'établir une estimation de coercivité de type inverse sur la norme de trace  $H^1$  de la solution. Un cas plus général du problème ci-dessus a été étudié par les mêmes Auteurs dans (Cavalcanti, Lasiecka et Toundykov, 2012b), en utilisant la théorie des semi-groupes. En outre, nous aimerions mentionner le travail de (Cavalcanti et Oquendo, 2003), pour le cas de l'équation d'onde, qui a montré la décroissance exponentielle et polynomiale pour l'équation d'onde non linéaire partiellement viscoélastique soumise à une dissipation frictionnelle non linéaire localisée donné par :

$$u_{tt}(t) - k_0 \Delta u(t) + \int_0^t \operatorname{div} [a(x) g(t-s) \nabla u(s)] ds + f(u) + b(x)h(u_t) = 0, \quad \Omega \times \mathbb{R}_+,$$

où  $a, b$  sont des fonctions non négatives,  $a \in C^1(\overline{\Omega})$ ,  $b \in L^\infty(\Omega)$  sous la condition

$$a(x) + b(x) \geq \delta > 0, \quad \forall x \in \Omega. \quad (1.8)$$

Nous remarquons que l'hypothèse (1.11) nous donne plusieurs possibilités pour choisir les fonctions  $a(x)$  et  $b(x)$ . Nous rappelons également la contribution de Graber et al. in (Graber et Lasiecka, 2013), dans lesquels les Auteurs ont considéré les équations d'onde fortement amortie avec des conditions aux limites dynamiques hyperboliques

$$u_{tt}(t) - c \Delta u_t + \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.9)$$

$$u_{tt} + \frac{\partial}{\partial \nu} (u + cu_t) - \Delta_T (c\alpha u_t + u) = 0 \quad \text{dans } \Gamma_1 \times ]0, T[, \quad (1.10)$$

$$u = 0, \quad \Gamma_0 \times ]0, T[, \quad (1.11)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (1.12)$$

sur un domaine borné  $\Omega$  avec une frontière  $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_0$ . Ils ont montré que le système génère un semigroupe fortement continu  $T(t)$  qui est analytique pour  $\alpha > 0$  et de classe Gevrey pour  $\alpha = 0$ . Dans les deux cas, le flux présente un effet régularisant les données. En particulier, ils ont prouvé que le lissage temporel quantitatif est estimé de la façon suivante :  $\|(d/dt)T(t)\| \leq |t|^{-1}$  pour  $\alpha > 0$  et  $\|(d/dt)T(t)\| \leq |t|^{-2}$  pour  $\alpha = 0$ . De plus, quand  $\alpha = 0$ , ils ont prouvé un résultat nouveau qui montre que ces estimations restent encore vérifiées pour des perturbations relativement limitées. Récemment, dans (Fourrier et Lasciecka, 2013), les Auteurs ont analysé l'équation d'onde suivante avec un fort amortissement et les conditions aux limites dynamiques

$$u_{tt}(t) - k_\Omega \Delta u_t - \Delta u = 0 \quad \text{sur } \Omega \times \mathbb{R}_+ \quad (1.13)$$

$$u_{tt} + \frac{\partial}{\partial \nu} (u + cu_t) - k_\Gamma \Delta_T (\alpha u_t + u) = 0 \quad \text{dans } \Gamma_1 \times ]0, T[, \quad (1.14)$$

$$u = 0, \quad \Gamma_0 \times ]0, T[, \quad (1.15)$$

$$u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) \quad \text{sur } \Omega, \quad (1.16)$$

sous la condition

$$\max \{k_{\Omega}, k_{\Gamma}\alpha\} > 0. \quad (1.17)$$

Ils ont présenté une analyse de la régularité et de la stabilité des solutions correspondant à l'équation d'onde avec des conditions aux limites dynamiques. Il a été connu depuis le travail de pionnier par (Littman et Markus, 1988a, 1988b) et (Littman et Liu, 1999) l'ajout de la dynamique à la limite peut changer radicalement les propriétés de régularité et de stabilité du système sous-jacent. Les Auteurs ont étudié ces propriétés dans le contexte de l'équation des ondes avec l'amortissement affectant soit la dynamique intérieure ou la dynamique des limites ou les deux. Cela conduit à une considération d'une équation d'onde agissant sur un domaine délimité de 3-d couplé avec un autre second ordre dynamique agissant sur la frontière. L'équation d'onde est équipée d'un amortissement viscoélastique, avec des conditions aux limites de Dirichlet sur une partie du domaine et les conditions aux limites dynamiques. Ce sont des conditions générales de type Ventcel qui décrivent l'équation d'onde oscillant sur une variété tangente d'une dimension inférieure. Les Auteurs ont examiné la régularité et les propriétés de stabilité du système résultant en tant que fonction de la force et l'emplacement de la dissipation. Les résultats obtenus analytiquement ont été illustrés des applications numériques. Les Auteurs ont montré l'impact de divers types de dissipation sur le spectre du générateur ainsi que le comportement dynamique de la solution sur un domaine rectangulaire.

**Nous savons que le problème de Ventcel avec un amortissement frictionnel linéaire n'est pas exponentiellement stable. Alors, la question qui se pose est : Serait-il possible de stabiliser le système en considérant un terme mémoire localisé agissant dans la première équation combinée avec un amortissement frictionnel agissant**

**dans la deuxième équation ?**

Le but principal de ce travail est précisément de donner une réponse à cette question. C'est-à-dire prouver qu'un terme mémoire combiné avec une dissipation frictionnelle sont assez forts, via le processus de transmission ( $u|_{\Gamma} = v$ ), pour assurer la stabilité asymptotique de tout le système.

Ce manuscrit comporte **quatre chapitres** :

Dans **le premier chapitre**, nous rappelons l'importance des matériaux viscoélastiques et les problèmes de Ventcel, en citant certaines littératures liées à notre problème.

**Le deuxième chapitre** est présenté sous forme d'un rappel des notions et définitions de l'analyse fonctionnelle nécessaire pour notre travail.

Dans **le troisième chapitre**, nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

**Le quatrième chapitre** est consacré à l'étude du comportement asymptotique du problème sous certaines hypothèses sur le noyau  $h$ .

Enfin, nous donnerons une conclusion et quelques perspectives.

## Chapitre 2

# Rappels et définitions

### 2.1 Introduction

Dans cette partie, nous avons regroupé les notions essentielles d'analyse fonctionnelle nécessaire à la compréhension des énoncés et démonstrations des problèmes qui forment le thème de ce mémoire, de même que les résultats fondamentaux, qui concernent la topologie faible, les espaces  $L^p(\Omega)$ , les espaces de Sobolev, les applications de dualité et d'autres théorèmes classiques. Ces notions et ces résultats représentent un outil important pour l'étude des problèmes hyperboliques.

### 2.2 Topologie faible $\sigma(X, X')$

Soit  $X$  un espace de Banach et soit  $f \in X'$  ( $X'$  l'espace dual de  $X$ ). On désigne par  $\varphi_f : X \rightarrow \mathbb{R}$  l'application définie par  $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$ . Lorsque  $f$  parcourt  $X'$  on obtient une famille  $(\varphi_f)_{f \in X'}$  d'applications de  $X$  dans  $\mathbb{R}$ .

**Définition 2.1** La topologie faible  $\sigma(X, X')$  sur  $X$  est la topologie la moins fine sur  $X$  rendant continues toutes les applications  $(\varphi_f)_{f \in X'}$ . Pour définir cette topologie d'une façon plus précise il suffit de définir une base de voisinages pour tout élément  $x \in X$  comme suit : Etant donné un point  $x \in X$  on obtient une base de voisinages de  $x$  pour la topologie  $\sigma(X, X')$  en considérant les ensembles de la forme  $\bigcap_{f \in \text{finie}} \varphi_f^{-1}(V_f)$ , où  $V_f$  est un voisinage de  $\varphi_f(x)$  dans  $\mathbb{R}$ . (i. e.  $V_f = ]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$  avec  $a = \langle f, x \rangle$ ).

**Définition 2.2** On dit qu'une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de vecteurs d'un espace de Hilbert  $X$  converge faiblement vers  $u \in X$ , et on note  $u_n \rightharpoonup u$ , si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle v, u_n \rangle = \langle v, u \rangle \text{ pour tout } v \in X.$$

**Remarque 2.1** a)- La limite faible quand elle existe est unique car si  $\langle u_1, v \rangle = \langle u_2, v \rangle$  pour tout  $v \in X$ , on a pour  $v = u_1 - u_2$

$$\|u_1 - u_2\|^2 = \langle u_1 - u_2, u_1 - u_2 \rangle = 0,$$

donc  $u_1 = u_2$ . (On peut prendre  $v \in X$ , car  $X$  est un espace de Hilbert, donc  $X = X'$  (théorème de Riesz)).

b)- Si la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers  $u \in X$  pour la norme  $\|\cdot\|$  (on dit alors qu'elle converge fortement vers  $u$ ) alors  $u_n \rightharpoonup u$ . En effet, on a

$$|\langle u_n - u, v \rangle| \leq \|u_n - u\| \|v\|.$$

Ce qui implique que  $\forall x \in X; \langle u_n - u, v \rangle \rightarrow 0$  quand,  $n \rightarrow \infty$ . c)- Si  $X$  est de dimension finie

alors la convergence faible implique la convergence forte. Il suffit de considérer la base  $e_1, \dots, e_n$  et d'observer que  $\langle u, e_i \rangle = u_i$  pour  $u \in X$  ce qui montre que la convergence faible équivaut alors à la convergence composante par composante, c'est à dire à la convergence forte.

**Proposition 2.1** Soient  $X$  et  $Z$  des espaces de Hilbert,  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$  une suite qui converge faiblement vers  $u$  et  $A \in \mathcal{L}(X, Z)$  (opérateur linéaire continu de  $X$  dans  $Z$ ). Alors la suite  $(A(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$  converge faiblement vers  $A(u)$ .

**Théorème 2.1** ([40], théorème 1.6) Soit  $X$  un espace normé, et soit  $X' = \mathcal{L}(X, \mathbb{R})$  son dual topologique. Alors la topologie étoile faible sur  $X'$  notée  $\sigma(X', X)$  est la topologie initiale associée au système  $(\mathbb{R}, \theta, \psi_u)_{u \in X}$  où  $\theta$  désigne la topologie usuelle de  $\mathbb{R}$  et  $\psi_u : X' \rightarrow \mathbb{R}$  est définie par  $\psi_u(l) = l(u)$ . C'est donc la moins fine des topologies sur  $X'$  rendant continues toutes les fonctionnelles  $\psi_u$ ,  $u \in X$ .

**Proposition 2.2** ([36]). Soit  $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de  $X'$ . On a :

$$1/ f_n \rightarrow f \text{ (faible étoile) } \iff (\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in X).$$

$$2/ \text{ Si } f_n \rightarrow f \text{ pour } \sigma(X', X) \text{ et si } x_n \rightarrow x \text{ fortement dans } X, \langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

**Remarque 2.2** ([66] p 193). L'espace  $X'$  des fonctionnelles linéaires sur un espace  $X$  admet deux interprétations : ou bien il est considéré comme le dual de l'espace initial  $X$ , ou bien  $X'$  est considéré comme espace de base et alors on lui associe son dual  $X''$ . Cela signifie que nous pouvons introduire sur  $X'$  la topologie faible de deux manières différentes : ou bien comme dans l'espace des fonctionnelles, en définissant les voisinages dans  $X'$  à l'aide des sous-ensembles finis de  $X$  (topologie faible étoile), ou bien comme dans l'espace de base, à l'aide de l'espace dual  $X''$ . Dans le cas d'un espace réflexif cela revient, bien sûr, au même. Si, par contre, l'espace

$X$  n'est pas réflexif, ce sont deux topologies différentes sur  $X'$ . Il est évident que la topologie faible étoile de l'espace  $X'$  est moins fine que la topologie faible de  $X$  (c'est -à-dire la topologie faible contient au moins autant d'ensembles ouverts que ceux de la topologie faible étoile). Etant donné un espace normé  $X$ , son dual topologique  $X'$  est muni d'une structure d'espace normé en posant  $\|l\|_* = \sup_{\|u\| \leq 1} |l(u)|$ . La boule unité de  $X'$  (ainsi que toutes les boules fermées) possède alors une propriété remarquable, comme le montre le théorème suivant.

**Théorème 2.2** ([40], Théorème 1.14). Soit  $X$  un espace normé, alors la boule unité

$$B_* = \{l \in X' : \|l\|_* \leq 1\}$$

de  $X'$  est  $\sigma(X', X)$  - compacte.

## 2.3 Espaces fonctionnels

### 2.3.1 Espaces $L^p(\Omega)$

On donne ici quelques définitions et propriétés élémentaires.

**Définition 2.3** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < \infty$  et  $\Omega$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^n$  au sens de Lebesgue, on définit

$$L^p(\Omega) = \left\{ (\text{classe de fonctions}) f : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On note

$$\|f\|_p = \left[ \int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{1/p}.$$

Si  $p = \infty$

$$L^\infty(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, f \text{ mesurable et il existe une constante } C \\ \text{telle que } |f(x)| \leq C, \text{ p. p. sur } \Omega \end{array} \right\}.$$

On note

$$\|f\|_\infty = \text{Inf}\{C; |f(x)| \leq C \text{ p. p. sur } \Omega\}.$$

**Notation :** Soit  $1 \leq p \leq \infty$ ; on désigne par  $p'$  l'exposant conjugué de  $p$  i.e.  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ .

**Théorème 2.3** ([36]) (Inégalité de Hölder). Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^{p'}(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq \infty$ , alors  $fg \in L^1(\Omega)$  et

$$\int_{\Omega} |fg| \leq \|f\|_p \|g\|_{p'}.$$

Il convient de retenir une conséquence très utile de l'inégalité de Hölder.

**Théorème 2.4** (Inégalité de Hölder généralisée). Soient  $f_1, f_2, \dots, f_k$  des fonctions telles que  $f_i \in L^{p_i}(\Omega)$ ,  $1 \leq i \leq k$  avec

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1.$$

Alors le produit  $f = f_1 f_2 \dots f_k$  appartient à  $L^p(\Omega)$  et

$$\|f\|_p \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_k\|_{p_k}.$$

**Théorème 2.5**  $L^p(\Omega)$  est réflexif pour  $1 < p < \infty$ , (voir [2]).

**Lemme 2.1** (de Gronwall) ([42], tome 8 p 672).

Soient  $\phi \in L^\infty(0, T)$ , telle que  $\phi(t) \geq 0$ , p.p.  $t \in [0, T]$  et  $\psi \in L^1(0, T)$ , telle que  $\psi(t) \geq 0$ , p.p.  $t \in [0, T]$ . de plus on suppose que

$$\phi(t) \leq \int_0^t \psi(s) \phi(s) ds + C, \text{ p.p. } t \in [0, T] \text{ pour que } (C = \text{constante}).$$

Alors

$$\phi(t) \leq C \exp\left(\int_0^t \psi(s) ds\right), \text{ p.p. } t \in [0, T].$$

On désigne par  $\langle f, g \rangle$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ , i.e.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

et également le produit de dualité entre  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  (espace des distributions sur  $\Omega$ ), et  $g \in \mathcal{D}(\Omega)$  (espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $\Omega$  et à support compact dans  $\Omega$ ).

### 2.3.2 Notions de base sur les distributions

On appelle support d'une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  le plus petit fermé  $K_\varphi \subset \Omega$  en dehors duquel la fonction  $\varphi$  est nulle presque partout. Une fonction  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  est dite à support compact dans  $\Omega$  si son support est un compact contenu dans  $\Omega$ . On notera par  $\mathcal{D}(\Omega)$  l'espace des fonctions  $\varphi$  définies et indéfiniment dérivables sur  $\Omega$  et à support compact contenu dans  $\Omega$ . On désigne par  $\mathcal{D}(\bar{\Omega})$  l'espace des restrictions à  $\bar{\Omega}$  des fonctions de  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ . La longueur d'un multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  est l'entier noté  $|\alpha|$  et défini par :  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_i + \dots + \alpha_n$ . Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on définit l'opérateur de dérivation  $\partial^\alpha : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}(\Omega)$

par :

$$\varphi \rightarrow \partial^\alpha \varphi = \left( \frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) \cdots \left( \frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right) \cdots \left( \frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) (\varphi) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_i^{\alpha_i} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}} \quad (2.1)$$

**Proposition 2.3**  $\forall p \geq 1$ , l'ensemble  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^p(\Omega)$ .

**Preuve.** Voir Vo-KHAC KHOAN [60] ■

**Définition 2.4** (Convergence dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ ) : On dit qu'une suite  $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$  converge vers une fonction  $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  s'il existe un compact  $K$  contenu dans  $\Omega$  tel que :

- i)  $\text{supp}(\varphi_n) \subset K, \forall n \in \mathbb{N}$
- ii)  $\partial^\alpha(\varphi_n)$  converge uniformément vers  $\partial^\alpha \varphi, \forall \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_i, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$

**Définition 2.5** (Espace des distributions  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ) : On appelle espace des distributions sur  $\Omega$ , l'ensemble  $\mathcal{D}'(\Omega)$  des applications linéaires  $T : \mathcal{D}(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  telles que pour toute suite  $\{\varphi_j, j \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\Omega)$ , on a :

$$(\varphi_j)_{j \in \mathbb{N}} \longrightarrow \varphi \text{ dans } \mathcal{D}(\Omega) \implies T(\varphi_j) \rightarrow T(\varphi) \text{ dans } \mathbb{R}.$$

On notera  $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$  la dualité entre  $\mathcal{D}'(\Omega)$  et  $\mathcal{D}(\Omega)$ . On dira que deux distributions  $T_1$  et  $T_2$  sur  $\Omega$  sont égales si elles le sont en tant qu'applications de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathbb{R}$  :

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Remarque 2.3** Les distributions généralisent la notion de fonction puisque à toute classe de fonctions  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$  on peut associer de façon canonique et biunivoque une distribution notée

$T_{\tilde{f}}$  et définie par :

$$\langle T_{\tilde{f}}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \langle T_f, \varphi \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) \text{ et } \forall f = \tilde{f} \text{ p.p sur } \Omega.$$

On dira qu'une distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  appartient à  $L^2(\Omega)$  s'il existe une classe de fonctions  $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$  telle que :

$$\langle T, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\Omega), \mathcal{D}(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)\varphi(x)dx, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Définition 2.6** (Convergence dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ) : On dit qu'une suite de distributions  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  converge vers  $T$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  si :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega) : \lim_{n \rightarrow \infty} |\langle T_n, \varphi \rangle - \langle T, \varphi \rangle| = 0.$$

**Remarque 2.4** On peut identifier  $L^2(\Omega)$  à son dual et comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $L^2(\Omega)$ , on a les inclusions suivantes :

$$\mathcal{D}(\Omega) \subset L^2(\Omega) = (L^2(\Omega))' \subset \mathcal{D}'(\Omega).$$

**Définition 2.7** (Dérivation dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ) : Pour toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$ , on définit pour tout indice  $i \in \{1, \dots, n\}$  l'opérateur de dérivation  $\frac{\partial}{\partial x_i} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  par :

$$\forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega), \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle$$

Et en général, pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , on définit l'opérateur de dérivation

$\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  par :  $\varphi \mapsto \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$  i.e :

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} \dots \partial x_i^{\alpha_i} \dots \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(\Omega).$$

**Définition 2.8** (Continuité dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ ) : On dit qu'une application linéaire  $\mathcal{A} : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continue si pour toute suite de distributions  $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}'(\Omega)$  l'implication suivante est vérifiée :

$T_n$  converge dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  vers  $T$  ce qui implique  $\mathcal{A}(T_n)$  converge dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$  vers  $\mathcal{A}(T)$ .

**Proposition 2.4** Pour toute distribution  $T \in \mathcal{D}'(\Omega)$  et pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ , l'opérateur de dérivation  $\partial^\alpha : \mathcal{D}'(\Omega) \rightarrow \mathcal{D}'(\Omega)$  est continu au sens de la définition précédente et on a

$$\partial^\alpha T \in \mathcal{D}'(\Omega), \quad \forall T \in \mathcal{D}'(\Omega).$$

*Preuve.* Voir [60] page 183 ■

**Définition 2.9** (Espace  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ )  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  est l'espace des fonctions indéfiniment différentiables sur  $\mathbb{R}^n$  à décroissance rapide ainsi que toutes leurs dérivées). Pour tout multi-indice  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$  et pour tout  $x \in \mathbb{R}^n$ , on pose :  $x^\alpha = (x_1^{\alpha_1}, \dots, x_j^{\alpha_j}, \dots, x_n^{\alpha_n})$ , et on définit  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  par :

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{ u \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{C}) \text{ telle que : } x^\alpha D^\beta u \in L^2(\mathbb{R}^n) \right\}, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n.$$

On dira qu'une suite  $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  converge vers  $\varphi$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  si  $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  et si la suite  $\{x^\alpha D^\beta(\varphi_m), m \in \mathbb{N}\}$  converge uniformément dans  $\mathbb{R}^n$  vers  $x^\alpha D^\beta(\varphi)$  pour tout couple de

multi-indices  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ . C'est à dire :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta(\varphi) \right| \right) = 0, \quad \forall (\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n.$$

**Proposition 2.5** (Densité de L'espace  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ )  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  est un sous-espace de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$  partout dense dans  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ . C'est à dire que pour tout  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^n \times \mathbb{N}^n$ , tout  $\varepsilon > 0$  et pour toute fonction  $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ , il existe une suite  $\{\varphi_m, m \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  telle que :

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha D^\beta(\varphi_m) - x^\alpha D^\beta u \right| \right) = 0.$$

**Preuve.** Voir [60] ■

**Définition 2.10** (L'espace  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$ ). On appelle espace des distributions tempérées sur  $\mathbb{R}^n$  l'espace noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  des formes linéaires  $T$  continues sur  $\mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$  pour la topologie induite par celle de  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ .

**Définition 2.11** (Transformée de Fourier d'une fonction). Soit  $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ . On notera, pour tout  $(x, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$  par  $x \cdot \xi$  le produit scalaire usuel sur  $\mathbb{R}^n$  défini par :  $x \cdot \xi = \sum_{i=1}^n x_i \xi_i$ . On appelle transformée de Fourier de  $f$  la fonction notée  $\mathcal{F}(f)$  (ou encore  $\widehat{f}$ ) :  $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{C}$  définie par

$$\xi \mapsto \mathcal{F}(f)(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \cdot e^{-i\xi x} \cdot dx$$

**Définition 2.12** (Transformée de Fourier d'une distribution tempérée). On remarquera d'abord que :

$$\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \text{ implique } \widehat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n).$$

Soit  $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  une distribution tempérée sur  $\mathbb{R}^n$ . On appelle transformation de Fourier de  $T$ , la distribution notée  $\widehat{T} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  définie par :

$$T \longrightarrow \widehat{T} : \left\{ \begin{array}{ll} \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) & \longmapsto \mathbb{C} \\ \varphi & \longmapsto \langle \widehat{T}, \varphi \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} = \langle T, \widehat{\varphi} \rangle_{\mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)} \end{array} \right\}$$

On désigne par  $\langle f, g \rangle$  le produit scalaire dans  $L^2(\Omega)$ , i.e.

$$\langle f, g \rangle = \int_{\Omega} f(x) g(x) dx,$$

et également le produit de dualité entre  $f \in \mathcal{D}'(\Omega)$  (espace des distributions sur  $\Omega$ ), et  $g \in \mathcal{D}(\Omega)$  (espace des fonctions  $C^\infty$  sur  $\Omega$  et à support compact dans  $\Omega$ ).

### 2.3.3 Espaces de Sobolev

On introduit l'espace  $H^m(\Omega)$  comme étant l'espace des fonctions  $v \in L^2(\Omega)$  dont toutes les dérivées partielles d'ordre inférieure ou égale à  $m$  prises au sens des distributions sont dans l'espace  $L^2(\Omega)$ . Ces espaces jouent dans un rôle fondamental dans l'analyse des équations aux dérivées partielles.

**Définition 2.13** Pour  $m \in \mathbb{N}$ , on définit :

$$H^m(\Omega) = \left\{ u \in \mathcal{D}'(\Omega) : D^\alpha u \in L^2(\Omega), |\alpha| \leq m \right\}$$

où  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $\alpha_j \in \mathbb{N}$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ , et  $D^\alpha = \partial_1^{\alpha_1} \dots \partial_n^{\alpha_n}$  où  $\partial_j = \frac{\partial}{\partial x_j}$ . On munit

$H^m(\Omega)$  du produit scalaire

$$(u, v)_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha} u(x) D^{\alpha} v(x) dx$$

et la norme associée à ce produit scalaire

$$\|u\|_{H^m(\Omega)} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} |D^{\alpha} u(x)|^2 dx \right)^{1/2} = \left( \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} u\|_2^2 \right)^{1/2}.$$

**Théorème 2.6** L'application trace :

$$\left\{ \begin{array}{l} \gamma_0 : H^1(\Omega) \longmapsto H^{1/2}(\Gamma = \partial\Omega) \\ v \longmapsto v|_{\Gamma}, \end{array} \right.$$

est linéaire continue et surjective.

**Proposition 2.6** L'espace  $H^{1/2}(\Gamma = \partial\Omega)$  est un espace de Hilbert pour la norme :

$$\|u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \inf_{v \in H^1(\Omega), \gamma_0 v = u} \|v\|_{1, \Omega}$$

**Définition 2.14** (Voir [110]) On suppose que  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$  de frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de classe  $C^1$  par morceaux. Alors  $H_0^1(\Omega)$  est le noyau de  $\gamma_0$  : application trace sur  $\Gamma$  de  $H^1(\Omega)$  dans  $H^{1/2}(\Gamma)$ , i.e. :

$$H_0^1(\Omega) = \{v \in H^1(\Omega); \gamma_0 v = 0\}.$$

On introduit ensuite :

$$\begin{aligned} H_0^1(\Omega) &= \text{adhérence de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } H^1(\Omega) \\ &= \text{sous-espace de } H^1(\Omega) \text{ des fonctions "nulles" sur } \Gamma = \partial\Omega. \end{aligned}$$

Puisque (par définition)  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^1(\Omega)$ , on peut identifier le dual  $H^{-1}(\Omega)$  de  $H_0^1(\Omega)$  à un espace de distributions sur  $\Omega$  :

$$(*) \left\{ \begin{array}{l} H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))', \\ H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega) \hookrightarrow \mathcal{D}'(\Omega). \end{array} \right.$$

Les injections dans (\*) sont continues. Les éléments de  $H^{-1}(\Omega)$  sont sommes de dérivées de 1<sup>er</sup> ordre de fonctions de  $L^2(\Omega)$ .

**Proposition 2.7** ([63], Tome 3 p 880 ).1/ Si  $m_1 \geq m_2$ ,  $H^{m_1}(\Omega)$  est contenu, avec injection continue, dans  $H^{m_2}(\Omega)$ .

2/  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire  $(\cdot, \cdot)_m$  est un espace de Hilbert .

**Théorème 2.7** (Voir [110]) L'application trace :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H^2(\Omega) &\longmapsto H^{1/2}(\Gamma = \partial\Omega) \\ v &\longmapsto \nabla v \cdot \nu, \end{aligned}$$

est linéaire continue et surjective.

**Définition 2.15 (Inégalité de Poincaré)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné dans une direction. Il existe

une constante  $C$  dépendant du diamètre de  $\Omega$  telle que

$$\forall v \in H_0^2(\Omega), \quad \|u\|_{H^2(\Omega)} \leq C \|\Delta u\|_{L^2(\Omega)}$$

**Théorème 2.8 (Formule de Green pour le Laplacien)** Pour tout  $u \in H^2(\Omega)$ ,  $v \in H^1(\Omega)$

on a

$$-\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \eta} v d\sigma,$$

où  $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \gamma_1 u$  est la dérivée normale de  $u$  sur  $\Gamma$  dirigée vers l'extérieur.

**Théorème 2.9**

$$H_0^2(\Omega) = \{v \in H^2(\Omega); \gamma_0 v = 0 \text{ et } \gamma_1 v = 0\}.$$

On désigne par  $H^{-2}(\Omega)$  le dual de  $H_0^2(\Omega)$ , comme  $\mathcal{D}(\Omega)$  est dense dans  $H_0^2(\Omega)$ ,  $H^{-2}(\Omega)$  est un espace des distributions.

De façon générale,  $X$  étant un espace de Banach, on désigne par  $L^p(0, T; X)$ ,  $1 \leq p < \infty$  l'espace des (classes de) fonctions  $t \mapsto f(t)$  de  $]0, T[ \rightarrow X$  qui sont mesurables à valeurs dans  $X$  et telles que :

$$\left( \int_0^T \|f(t)\|_X^p dt \right)^{1/p} = \|f\|_{L^p(0, T; X)} < \infty,$$

si  $p = \infty$ , on remplace la norme précédente par

$$\sup_{t \in ]0, T[} \text{ess } \|f(t)\|_X = \|f\|_{L^\infty(0, T; X)} < \infty.$$

L'espace normé  $L^p(0, T; X)$  est complet. (Voir [63]). Soit  $\Omega_1 \subset \Omega$ , on définit  $L^q(0, T; L^p(\Omega_1))$  comme étant l'espace des fonctions  $w \in L^q(0, T; L^p(\Omega))$  telles que  $w(x, t) = 0$  p.p. dans  $\Omega \setminus \Omega_1$ ,

où  $1 \leq q < \infty$ , muni de la norme

$$\|w\|_{L^q(0,T;L^p(\Omega_1))} = \left( \int_0^T \|w(t,x)\|_{L^p(\Omega_1)}^q \right)^{1/q}.$$

Si  $q = \infty$

$$\|w\|_{L^\infty(0,T;L^p(\Omega_1))} = \sup_{t \in ]0,T[} \text{ess } \|w(t,x)\|_{L^p(\Omega_1)}.$$

On définit de la même façon les espaces  $L^q(0,T;H_0^1(\Omega_1))$ ,  $1 \leq q \leq \infty$ .

**Remarque 2.5** ([63]) Soit  $(X, Y)$  un couple d'espaces de Banach avec  $X \hookrightarrow Y$  (injection continue). Alors, on a  $L^p(]a, b[; X) \hookrightarrow L^p(]a, b[; Y)$ ,  $1 \leq p \leq \infty$ , et  $\mathcal{D}'(]a, b[; X) \hookrightarrow \mathcal{D}'(]a, b[; Y)$ .

**Remarque 2.6** Soit  $\Omega_1 \subset \Omega$ . Les espaces  $L^2(\Omega_1)$ , (resp.  $H_0^1(\Omega_1)$ ) s'identifient à des sous espaces fermés de  $L^2(\Omega)$ , (resp.  $H_0^1(\Omega)$ ),  $\forall t \in ]0, T[$ .

**Théorème 2.10** Soit  $w : \Omega \times ]0, T[ \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction mesurable, alors  $w(x, t) = 0$  p.p pour tout  $x$  dans  $\Omega \setminus \Omega_1$  et pour tout  $t \in ]0, T[$  si et seulement si  $w = 0$  dans  $\Omega \times ]0, T[ \setminus Q$  telle que  $Q = \Omega_1 \times ]0, T[$

**Théorème 2.11** Si  $v$  est une fonction de  $H_0^1(\Omega_1)$  (resp.  $L^2(\Omega_1)$ ), alors la fonction  $\tilde{v}$  prolongement de  $v$  par 0 sur  $\Omega \setminus \Omega_1$  appartient à  $H_0^1(\Omega)$  (resp.  $L^2(\Omega)$ ).

**Preuve.** Si  $\varphi$  est une fonction de  $\mathcal{D}(\Omega_1)$ , il est évident que la fonction  $\tilde{\varphi}$  prolongement de  $\varphi$  par 0 dans  $\Omega \setminus \Omega_1$ , appartient à  $\mathcal{D}(\Omega)$ , de plus on a

$$\|\tilde{\varphi}\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\varphi\|_{H_0^1(\Omega_1)}.$$

Ainsi l'application  $\varphi \mapsto \tilde{\varphi}$  est linéaire continue de  $\mathcal{D}(\Omega_1)$  muni de la norme induite par  $H_0^1(\Omega)$  dans  $H_0^1(\Omega_1)$ . Elle se prolonge donc par continuité en une application linéaire continue  $v \mapsto \tilde{v}$  de  $H_0^1(\Omega_1)$  dans  $H_0^1(\Omega)$  et on a

$$\tilde{v} = \begin{cases} v & \text{presque partout dans } \Omega_1 \\ 0 & \text{presque partout dans } \Omega \setminus \Omega_1 \end{cases}.$$

En effet, si  $(\varphi_m)$  est une suite de fonctions de  $\mathcal{D}(\Omega_1)$  qui converge vers  $v$  dans  $H_0^1(\Omega_1)$ ,  $(\tilde{\varphi}_m)$  converge vers  $\tilde{v}$  dans  $H_0^1(\Omega)$ , donc dans  $L^2(\Omega)$ , et de la suite  $(\varphi_m)$  on peut extraire une sous suite  $(\varphi_{\mu})$  telle que  $(\tilde{\varphi}_{\mu})$  tend vers  $\tilde{v}$  presque partout dans  $\Omega$ , d'où le résultat. ■

On désigne par  $\mathcal{D}'(0, T; X)$  l'espace de *distributions* sur  $]0, T[$  à valeurs dans  $X$ , défini par

$$\mathcal{D}'(0, T; X) = \mathcal{L}(\mathcal{D}(]0, T[); X).$$

Si  $f \in \mathcal{D}'(0, T; X)$ , sa dérivée distributionnelle première est définie par

$$\left\langle \frac{df}{dt}, \varphi \right\rangle = - \left\langle f, \frac{d\varphi}{dt} \right\rangle, \quad \forall \varphi \in \mathcal{D}(]0, T[).$$

On introduira quelques lemmes qu'on utilisera ultérieurement.

**Lemme 2.2** (*Sobolev -Poincaré*) ([63]) Si

$$2 \leq q \leq \frac{2n}{n-2},$$

alors

$$\|u\|_q \leq C(\Omega, q) \|\nabla u\|_2, \quad \text{pour } u \in H_0^1(\Omega).$$

**Lemme 2.3** ([63]) Si  $f \in L^p(0, T; X)$  et  $\frac{df}{dt} \in L^p(0, T; X)$  (au sens des distributions) ( $1 \leq p \leq \infty$ ), alors  $f \in C(0, T; X)$  et  $f \in W^{1,p}((0, T); X)$ .

**Lemme 2.4** ([63]) Soit  $U = ]0, T[ \times \Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ,  $g_\mu, g$  des fonctions de  $L^q(0, T; L^q(\Omega))$ ,  $1 < q < \infty$  telles que

$$\|g_\mu\|_{L^q(0, T; L^q(\Omega))} \leq C, \quad \forall \mu \in \mathbb{N},$$

et

$$g_\mu \rightarrow g \text{ p.p. dans } U$$

Alors  $g_\mu \rightharpoonup g$  dans  $L^q$  (converge faiblement) .

## 2.4 Gradient tangentiel et laplacien tangentiel

Nous rappelons quelques définitions de la dérivation tangentielle.

### 2.4.1 Gradient tangentiel

Soit  $\nu$  le champ de vecteurs normaux extérieurs sur  $\Gamma$ . Pour tout  $x \in \Gamma$ , notons  $\pi(x)$  la projection orthogonale sur le plan tangent  $T_x\Gamma$ . Tout champ de vecteurs réguliers  $q : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  sera décomposé comme suit :

$$q(x) = q_T + (q(x) \cdot \nu(x))\nu(x), \tag{2.2}$$

où  $q_T = \pi(x)q(x)$  est le champ régulier de vecteurs tangent sur  $\Gamma$  de  $q$ . Si  $\varphi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  est une fonction régulière, nous avons,

$$\nabla\varphi = \partial_\nu\varphi\nu + \nabla_T\varphi \quad \text{sur } \Gamma, \quad (2.3)$$

où  $\partial_\nu$  dénote la dérivée normale vers l'extérieur de  $\Gamma$  et  $\nabla_T\varphi$  représente le gradient tangentiel de  $\varphi$ . Par conséquent,

$$|\nabla\varphi|^2 = |\partial_\nu\varphi|^2 + |\nabla_T\varphi|^2 \quad \text{sur } \Gamma. \quad (2.4)$$

### 2.4.2 Laplacien tangentiel

L'opérateur de Laplace-Beltrami  $\Delta_\Gamma$  d'une fonction  $\varphi : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$  de la classe  $C^2$  est définie par

$$\Delta_\Gamma\varphi := \text{div}_T\nabla_T\varphi, \quad (2.5)$$

où  $\text{div}_T\nabla_T\varphi$ , est la divergence du champ vectoriel  $\nabla_T\varphi$ .

Pour tout  $\varphi, \psi \in H^1(\Gamma)$ , nous définissons un opérateur linéaire continu  $-\Delta_\Gamma : H^1(\Gamma) \rightarrow (H^1(\Gamma))'$  par :

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1}\varphi, \psi \rangle = \int_{\Gamma_1} \nabla_T\varphi \cdot \nabla_T\psi \, d\gamma,$$

et en particulier,

$$\langle -\Delta_{\Gamma_1}\varphi, \varphi \rangle = \int_{\Gamma_1} |\nabla_T\varphi|^2 \, d\gamma. \quad (2.6)$$

### 2.4.3 Espaces définis avec le gradient tangentiel

Maintenant, nous présentons l'ensemble suivant :

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_0} = 0\},$$

et notons  $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$  avec la structure de Hilbert induite par  $H^1(\Omega)$ . Maintenant, nous présentons les ensembles suivants :

$$\mathbb{V} = \{z = (u, v) \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^1(\Gamma) /, u|_{\Gamma} = v\},$$

$$\mathbb{H} = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma).$$

Équipés des normes canoniques respectives

$$\|z\|_{\mathbb{V}}^2 = \|u\|_{H^1(\Omega)}^2 + \|v\|_{H^1(\Gamma)}^2,$$

$$\|z\|_{\mathbb{H}}^2 = \|u\|_2^2 + \|v\|_{\Gamma}^2.$$

$\mathbb{V}$ , et  $\mathbb{H}$ , sont deux espaces de Hilbert et  $\mathbb{V}$  est dense dans  $\mathbb{H}$  avec injection continue.

Dans la suite, nous considérons  $\|\cdot\|_2 = \|\cdot\|_{L^2(\Omega)}$  et  $\|\cdot\|_{\Gamma} = \|\cdot\|_{L^2(\Gamma)}$ .

Soit  $C_p > 0$  la constante optimale de Sobolev, (voir [126]) qui satisfait l'inégalité suivante :

$$\|u\|_2 \leq C_p \|\nabla u\|_2, \forall u \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \tag{2.7}$$

## Chapitre 3

# Existence et unicité

### 3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on s'intéresse à l'étude de l'existence et l'unicité de la solution de (3.1) ci dessous en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. On rappelle que le problème (3.1) est défini par :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla u(s)] ds = 0 & \text{sur } \Omega \times ]0, \infty[, \\ v_{tt}(t) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) - \Delta_T v(t) + v_t(t) = 0, & \text{dans } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ u|_{\Sigma_1} = v, & \text{dans } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ u = 0, & \text{dans } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, \infty[, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x), & \text{sur } \Omega \times ]0, \infty[, \\ v(0, x) = v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x), & \text{dans } \Gamma. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

**Théorème 3.1 (i)** *Sous les conditions du problème (3.1) qu'on va poser plus tard le problème*

est bien posé dans l'espace  $\mathbb{V} \times \mathbb{H}$ , c'est-à-dire pour toute donnée initiale  $\{(u^0, v^0), (u^1, v^1)\} \in \mathbb{V} \times \mathbb{H}$ , il existe une unique solution faible de (3.1) dans la classe  $(u, v) \in C(\mathbb{R}_+; \mathbb{V}) \cap C^1(\mathbb{R}_+; \mathbb{H})$ .

(ii) De plus, les termes en vitesse de la solution ont la régularité suivante :

$$(u_t, v_t) \in L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \times L^2_{loc}(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma_1)),$$

$$\text{De plus, si } \{(u^0, u^1), (v^0, v^1)\} \in \{H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\} \times \{H^2(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_1)\},$$

alors la solution a la régularité suivante :

$$(u, v) \in L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Omega) \cap W^{1,\infty}(\Omega)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Omega)) \times L^\infty(\mathbb{R}_+; H^2(\Gamma) \cap W^{1,\infty}(\Gamma)) \cap W^{2,\infty}(\mathbb{R}_+; L^2(\Gamma)).$$

**Preuve. Existence :** Premièrement on considère la solution faible et en utilisant des arguments de densité, on prolonge le même résultat pour les solutions fortes. On multiplie formellement les deux équations du système (3.1) par  $w_1, w_2$  et on intègre sur  $\Omega, \Gamma_1$  pour obtenir :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_{tt} w_1 dx - \int_{\Omega} \Delta u w_1 dx + \int_{\Omega} w_1 \int_0^t h(t-s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] ds = 0, \\ \int_{\Gamma_1} v_{tt}(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \Delta_T v(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} v_t(t) w_2 d\sigma = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

$$\forall (w_1, w_2) \in (H^1_0(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)).$$

L'application de la formule de Green donne :

$$\begin{cases} \int_{\Omega} u_{tt} w_1 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w_1 dx - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \eta} w_1 d\sigma - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) \nabla w_1 ds dx = 0, \\ \int_{\Gamma_1} v_{tt}(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v(t) \nabla_T w_2 d\sigma - \int_{\Gamma_1} \frac{\partial v}{\partial \nu}(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} v_t(t) w_2 d\sigma = 0, \end{cases}$$

$$\forall (w_1, w_2) \in (H^1_0(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)).$$

Où  $V = (H_0^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1))$ . Comme  $u = 0$  sur  $\Gamma_0$  alors les deux équations de (3.2) deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} u_{tt} w_1 dx + \int_{\Omega} \nabla u \nabla w_1 dx - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) \nabla w_1 ds dx = 0, \\ \int_{\Gamma_1} v_{tt}(t) w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v(t) \nabla_T w_2 d\sigma + \int_{\Gamma_1} v_t(t) w_2 d\sigma = 0, \end{array} \right. \quad (3.3)$$

$\forall (w_1, w_2) \in (H_0^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1))$ .

D'où la formulation variationnelle du problème (3.3) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u(t), v(t)) \in V = (H_0^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)), \text{ telle que :} \\ (u_{tt}, w_1)_{0,\Omega} + (\nabla u, \nabla w_1)_{0,\Omega} - \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla w_1, \nabla u(s))_{0,\Omega} ds = 0, \\ (v_{tt}(t), w_2)_{0,\Gamma_1} + (\nabla_T v(t), \nabla_T w_2)_{0,\Gamma_1} d\sigma + (v_t(t), w_2)_{0,\Gamma_1} d\sigma = 0, \end{array} \right.$$

$\forall (w_1, w_2) \in (H_0^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1))$ .

Les solutions fortes du problème (3.3) avec conditions aux limites  $u = 0$  sur  $\Gamma_0$  ne peuvent pas être obtenues par la méthode des bases spéciales ; une base formée par les fonctions propres ne peut pas être utilisée pour le système (3.1). Ceci conduit à dériver par rapport au temps  $t$  la formulation variationnelle précédente. En estimant  $u_{tt}(0)$ ,  $v_{tt}(0)$ , on rencontre de sérieuses difficultés. Alors, pour éviter ces difficultés, on transforme le problème (3.1), en un problème équivalent avec une condition initiale égale à zero. Pour cela, on effectue le changement de

fonctions suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_1(x, t) = u(x, t) - \Phi_1(x, t), \\ \Psi_2(x, t) = v(x, t) - \Phi_2(x, t), \\ \Phi_1(x, t) = u_0(x) + tu_1(x), \quad (x, t) \in \Omega \times ]0, \infty[, \\ \Phi_2(x, t) = v_0(x) + tv_1(x), \quad (x, t) \in \Gamma_1 \times ]0, \infty[. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\Psi_{1tt} = u_{tt}, \quad \Delta u = \Delta \Psi_1 + \Delta \Phi_1, \quad u_t = \Psi_{1t} + \Phi_{1t} = \Psi_{1t} + u^1(x)$$

$$\Psi_{2tt} = v_{tt}, \quad \Delta_T v = \Delta_T \Psi_2 + \Delta_T \Phi_2, \quad v_t = \Psi_{2t} + \Phi_{2t} = \Psi_{2t} + v^1(x)$$

$$\int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla u(s)] ds = \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla \Psi_1(s)] ds + \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla \Phi_1(s)] ds$$

$$u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ ce qui implique, } \Psi_1 = 0 \text{ sur } \Gamma_0,$$

$$v = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ ce qui implique, } \Psi_2 = 0 \text{ sur } \Gamma_0.$$

Donc le problème équivalent à (3.1) s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \Psi_{1tt}(t) - \Delta \Psi_1(t) + \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) (\nabla \Psi_1(s))] ds = F_1, \\ \Psi_{2tt}(t) + \frac{\partial \Psi_1}{\partial \nu}(t) - \Delta_T \Psi_2(t) + \Psi_{2t}(t) + v^1(x) = F_2, \\ u = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ ce qui implique } \Psi_1 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0, \\ v = 0, \quad \text{sur } \Gamma_0 \text{ ce qui implique } \Psi_2 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0. \end{array} \right. \quad (3.5)$$

Avec

$$\begin{cases} F_1 = \Delta \Phi_1(t) - \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) (\nabla \Phi_1(t))] ds, \\ F_2 = -\frac{\partial \Phi_1}{\partial \nu}(t) + \Delta_T \Phi_2(t). \end{cases}$$

Pour l'existence et l'unicité de la solution, nous supposons que le noyau  $h$  vérifie les conditions suivantes :

$$\begin{cases} \text{(A1)} & \int_0^\infty h(s) ds < 1, \\ \text{(A2)} & h'(t) + \gamma h(t) \geq 0, \\ \text{(A3)} & e^{\alpha t} [h'(t) + \gamma h(t)] \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ pour tout } \alpha, \gamma > 0, \\ \text{(A4)} & e^{\alpha t} h(t) \in L^1(\mathbb{R}_+) \text{ pour tout } \alpha > 0. \end{cases}$$

Il est clair que ceci permet à  $h'(t)$  de prendre des valeurs positives, c'est-à-dire que le noyau  $h(t)$  peut osciller.

Dans la suite, on pose

$$\begin{cases} l(t) = h'(t) + \gamma h(t); & l_\alpha = e^{\alpha t} l(t); \\ \bar{l} = \int_0^\infty l(s) ds; & \bar{l}_\alpha = \int_0^\infty l_\alpha(s) ds = \int_0^\infty l(s) e^{\alpha s} ds; \\ \bar{h} = \int_0^\infty h(s) ds, & \bar{h}_\alpha = \int_0^\infty e^{\alpha s} h(s) ds \end{cases} \quad (3.6)$$

Notons que les fonctions  $\Psi_i$ ,  $i = 1, 2$  sont solutions de (3.5) dans  $[0, T]$ ; alors

$$u = \Psi_1 + \Phi_1, v = \Psi_2 + \Phi_2,$$

sont solutions de (3.1) sur le même intervalle. A partir des estimations qui seront démontrées ci dessous et en utilisant les méthodes standards, on prolonge  $u, v$  à l'intervalle  $(0, \infty)$ . Il suffit, donc de montrer que le problème (3.4) a une solution locale qui sera établie par la méthode de

Faedo-Galerkin. Soit  $(w_k)_k$  une base dans  $V \cap (H^2(\Omega) \times H^2(\Gamma_1))$  orthonormale dans  $H$  et soit

$V_m \subset V$  le sous espace engendré  $w_1, w_2, \dots, w_m$  et soient

$w_j = (w_{1j}, w_{2j})$  ou

$$\begin{cases} \Psi_{1tm}(t) = \sum_{j=1}^m \gamma'_{1j}(t) w_{1j}, \\ \Psi_{2tm}(t) = \sum_{j=1}^m \gamma'_{2j}(t) w_{2j}, \end{cases}$$

une solution approchée du problème de Cauchy suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u(t), v(t)) \in V = (H_0^1(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)) \text{ telle que :} \\ (\Psi_{1tt}, w_1)_\Omega + (\nabla \Psi_1, \nabla w_1)_\Omega - \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla w_1, \nabla \Psi_1(s))_\Omega ds = (F_1(t), w_1)_\Omega, \\ (\Psi_{2tt}(t), w_2)_{\Gamma_1} + (\nabla_T \Psi_2, \nabla_T w_2)_{\Gamma_1} d\sigma + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), w_2)_{\Gamma_1} = (F_2(t), w_2)_{\Gamma_1}, \\ \Psi_1(0) = \Psi_{1t}(0) = 0, \quad \Psi_2(0) = \Psi_{2t}(0) = 0, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\forall (w_1, w_2) \in ((H_0^1(\Omega))_m \times (H^1(\Gamma_1))_m).$$

Par les méthodes standards des équations différentielles, on peut prouver l'existence de la solution du problème (3.7) sur  $[0, t_m]$ , ensuite cette solution peut être prolongée à l'intervalle fermé  $[0, T]$ .

### Estimations à priori :

**Première estimation** (estimation de  $\Psi_{1m}, \Psi_{2m}$  et  $\Psi_{1tm}, \Psi_{2tm}$ ). En remplaçant dans la formule (3.7)  $w_1$  par  $\gamma'_{1j}(t) w_{1j}$  et  $w_2$  par  $\gamma'_{2j}(t) w_{2j}$  et en sommant sur  $j$  et tenant compte de  $\Psi_{1m}(0) = 0$  et  $\Psi_{2m}(0) = 0$ , on obtient

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{1mt}(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_\Omega^2 \right\} = (F_1(t), \Psi_{1mt})_\Omega + \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1mt}(t), \nabla \Psi_{1m}(s))_\Omega ds,$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} \\ = (F_2(t), \Psi_{2mt}(t))_{\Gamma_1} + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1}. \end{array} \right.$$

Alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} \\ + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} = \\ (F_1(t), \Psi_{1mt})_{\Omega} + \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1mt}(t), \nabla \Psi_{1m}(s))_{\Omega} ds \\ + (F_2(t), \Psi_{2mt}(t))_{\Gamma_1} + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1}. \end{array} \right.$$

D'où

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} \\ + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} = \\ (F_1(t), \Psi_{1mt})_{\Omega} + (F_2(t), \Psi_{2mt}(t))_{\Gamma_1} + (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} \\ + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \right) - \int_0^t h'(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds. \end{array} \right. \quad (3.8)$$

Intégrant (3.8) sur l'intervalle  $]0, t[$  et notons  $\Psi_{1m}(0) = \Psi_{2m}(0) = \Psi_{1tm}(0) = \Psi_{2tm}(0) = 0$ , on

obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|\Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \int_0^t (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} = \\ \int_0^t (F_1(t), \Psi_{1mt})_{\Omega} + \int_0^t (F_2(t), \Psi_{2mt}(t))_{\Gamma_1} + \int_0^t \int_0^s (\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} dr ds \\ \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \right) - \int_0^t h'(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds. \end{array} \right.$$

En appliquant maintenant l'inégalité de Cauchy-Schwartz on arrive

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|\Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_0^t \int_0^s |\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t)|^2 ds d\sigma \\ \leq \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s |(\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))|^2 ds d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^s |\Phi_{2t}(t)|^2 ds d\sigma \\ + \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \right) - \int_0^t h'(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds, \end{array} \right. \quad (3.9)$$

De l'inégalité de (3.8), on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{2} \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int \int_{\Gamma_1}^t |\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t)|^2 dsd\sigma \\
\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int \int_{\Gamma_1}^t |(\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))|^2 dsd\sigma + \frac{1}{2} \int \int_{\Gamma_1}^t |\Phi_{2t}(t)|^2 dsd\sigma \\
+ \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \right)_{\Omega} + \int_0^t l(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \\
- \gamma \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds.
\end{array} \right. \tag{3.10}$$

On a d'autre part :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \leq \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega} \int_0^t h(t-s) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega} ds \\
\leq \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^t h(s) ds \left( \int_0^t h(t-s) \right) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds \\
\leq \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds,
\end{array} \right. \tag{3.11}$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_0^t l(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1m}(t))_{\Omega} ds \leq \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega} \int_0^t l(t-s) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega} ds \\
\leq \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^t l(s) ds \left( \int_0^t l(t-s) \right) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds \\
\leq \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{4\eta} \int_0^t l(s) ds \left( \int_0^t l(t-s) \right) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds.
\end{array} \right. \tag{3.12}$$

Alors :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{2} \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \\
+ \int_{\Gamma_1} \int_0^t |\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t)|^2 ds d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2(s)\|^2 ds \\
+ \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \int_0^t |(\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))|^2 ds d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \int_0^t |\Phi_{2t}(t)|^2 ds d\sigma \\
+ \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds \\
+ \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{\|l\|_{L^1(0,\infty)} \|l\|_{L^\infty(0,\infty)}}{4\eta} \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds \\
- \gamma \left( \eta \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds \right),
\end{array} \right. \quad (3.13)$$

qu'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{1}{2} \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \left( \frac{1}{2} + (3 - \gamma) \eta \right) \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\
+ \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_{\Gamma_1} \int_0^t |\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t)|^2 ds d\sigma \leq \\
\frac{1}{2} \int_0^t \|F_1(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2(s)\|^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \int_0^t |(\Psi_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))|^2 ds d\sigma + \frac{1}{2} \int_{\Gamma_1} \int_0^t |\Phi_{2t}(t)|^2 ds d\sigma \\
+ \left( \frac{\|l\|_{L^1(0,\infty)} \|l\|_{L^\infty(0,\infty)}}{4\eta} + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} - \frac{\gamma}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right) \times \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|_{\Omega}^2 ds.
\end{array} \right. \quad (3.14)$$

Pour appliquer le lemme de Gronwall, notons :

$$\left\{ \begin{array}{l} \phi(t) = \min \left( 1, \frac{1}{2} + (3 - \gamma) \eta \right) \left[ \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right] \\ C = \|F_1(s)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \|F_1(s)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + T \int_{\Gamma_1} |(u_1 + v_1)|^2 d\sigma \\ D = \max \left( \begin{array}{l} 1, \frac{\|l\|_{L^1(0,\infty)} \|l\|_{L^\infty(0,\infty)}}{4\eta} + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \\ -\frac{\gamma}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \end{array} \right) = \text{constante.} \end{array} \right.$$

On en déduit que

$$\phi(t) \leq C \int_0^t \psi(s) \phi(s) ds, \quad p.p. \quad t \in [0, T],$$

c'est-à-dire

$$\|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \|\nabla_T \Psi_{2m}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq CDT = C_1(T). \quad (3.15)$$

La constante  $C_1(T) > 0$  est indépendante de  $m$ , et  $t \in [0, T]$ , et on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Psi_{1mt}, \Psi_{2mt}) \in L^\infty(0, T, (L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_1))), \\ (\Psi_{1m}, \Psi_{2m}) \in L^\infty(0, T, V). \end{array} \right. \quad (3.16)$$

**Seconde estimation** (estimation des  $\Psi_{1mtt}(0), \Psi_{2mtt}(0)$ )

Premièrement, on estime le terme  $\Psi_{1mtt}(0), \Psi_{2mtt}(0)$  dans la norme de  $L^2(\Omega)$  et  $L^2(\Gamma_1)$  de  $\Psi_{1mtt}(0)$  et  $\Psi_{2mtt}(0)$ .

En prenant  $w_1 = \Psi_{1mtt}(0)$  et  $\Psi_{1mtt}(t)$  en  $t = 0$  dans la première équation de (3.7) et en prenant  $w_2 = \Psi_{2mtt}(0)$  et  $\Psi_{2mtt}(t)$  en  $t = 0$  dans la deuxième équation de (3.7) et notons  $\Psi_{1m}(0) = \Psi_{1mt}(0) = 0$  et  $\Psi_{2m}(0) = \Psi_{2mt}(0) = 0$ , et notons  $\Psi_{1m}(0) = \Psi_{1mt}(0) = 0$  et

$\Psi_{2m}(0) = \Psi_{2mt}(0) = 0$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Psi_{1mtt}(0), \Psi_{1mtt}(0))_{\Omega} + (\Psi_{2mtt}, \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1} + \\ (\Phi_{2mt}(0), \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1} = (F_1(0), \Psi_{1mtt}(0))_{\Omega} + (F_2(t), \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1}, \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (\Psi_{1mtt}(0), \Psi_{1mtt}(0))_{\Omega} + (\Psi_{2mtt}(0), \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1} + (\Phi_{2mt}(0), \Psi_{2ttm}(0))_{\Gamma_1} \\ = (F_1(0), \Psi_{1mtt}(0))_{\Omega} + (F_2(t), \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1}, \\ \|\Psi_{1mtt}(0)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 = -(\Phi_{2t}(0), \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1} + (F_1(0), \Psi_{1ttm}(0))_{\Omega} + (F_2(t), \Psi_{2mtt}(0))_{\Gamma_1} \\ \|\Psi_{1mtt}(0)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1} (\|\Phi_{2mt}(0)\|_{\Gamma_1} + \|F_2(0)\|) + \|F_1(0)\| \|\Psi_{1mtt}(0)\| \dots \end{array} \right.$$

En appliquant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$\|\Psi_{1mtt}(0)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \|\Phi_{2mt}(0)\|_{\Gamma_1} + \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \|F_2(0)\| + F_1(0) \|\Psi_{1mtt}(0)\|_{\Omega}^2$$

Et appliquant l'inégalité de young

$$\left\{ \begin{array}{l} \|\Psi_{1mtt}(0)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \\ \frac{1}{2} \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\Phi_{2mt}(0)\|_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \frac{1}{2} \|F_2(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|F_1(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{1mtt}(0)\|^2 \end{array} \right.$$

On en déduit qu'il existe une constante indépendante de  $m$ ,  $L_3 = \|\Phi_{2mt}(0)\|_{\Gamma_1} + \|F_2(0)\|$  et

$L_4 = F_1(0)$  telle que :

$$\|\Psi_{1mtt}(0)\|_{\Omega}^2 + \|\Psi_{2mtt}(0)\|_{\Gamma_1}^2 \leq L_3 + L_4. \quad (3.17)$$

Maintenant, en dérivant (3.7) par rapport à  $t$  et en multipliant par  $\gamma''_{1j}(t)$ ,  $\gamma''_{2j}(t)$  et en sommant sur  $j$  de 1 à  $m$  et en intégrant sur  $\Omega$  et  $\Gamma_1$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} (\frac{d}{dt}\Psi_{1tt}, \Psi_{1tt})_{\Omega} + (\nabla\Psi_{1tm}, \nabla\Psi_{1ttm})_{\Omega} + (\frac{d}{dt}\Psi_{2tt}, \Psi_{2tt})_{\Gamma_1} + (\nabla_T\Psi_{2tm}, \nabla_T\Psi_{2ttm})_{\Gamma_1} \\ -h(0)(\nabla\Psi_{1m}(t), \nabla\Psi_{1ttm})_{\Omega} - \int_0^t h'(t-s)a(x)(\nabla\Psi_{1m}(s), \nabla\Psi_{1ttm})_{\Omega}ds \\ +(\Psi_{2tt}(t) + \Phi_{2tt}(t), \Psi_{2tt}(t))_{\Gamma_1} \\ = (F'_1(t), \Psi_{1ttm})_{\Omega} + (F'_2(t), \Psi_{2ttm}) \\ \Psi_{1m}(0) = \Psi_{1tm}(0) = 0 \text{ et } \Psi_{2m}(0) = \Psi_{2tm}(0) = 0 \end{array} \right. \quad (3.18)$$

On écrit le cinquième terme sous la forme :

$$-h(0)(\nabla\Psi_{1m}(t), \nabla\Psi_{1ttm}(t))_{\Omega} = -h(0)\frac{d}{dt}(\nabla\Psi_{1m}(t), \nabla\Psi_{1tm}(t))_{\Omega} + h(0)\|\Psi_{1tm}(t)\|^2. \quad (3.19)$$

D'autre part, ona

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t h'(t-s)a(x)(\nabla\Psi_{1m}(s), \nabla\Psi_{1ttm}(t))_{\Omega}ds \\ = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t h'(t-s)a(x)(\nabla\Psi_{1m}(s), \nabla\Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds \right] - h'(0)(\nabla\Psi_{1m}(t), \nabla\Psi_{1tm}(t))_{\Omega} + \\ - \int_0^t h''(t-s)a(x)(\nabla\Psi_{1m}(s), \nabla\Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds \\ = \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t h'(t-s)a(x)(\nabla\Psi_{1m}(s), \nabla\Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds \right] - h'(0)\frac{d}{dt}\|\nabla\Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 + \\ - \int_0^t h''a(x)(t-s)(\nabla\Psi_{1m}(s), \nabla\Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds. \end{array} \right. \quad (3.20)$$

En injectant (3.19) et (3.20) dans (3.18), on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{1ttm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2ttm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} \\ + (\Psi_{2tt}(t) + \Phi_{2tt}(t), \Psi_{2tt}(t))_{\Gamma_1} - h(0) \frac{d}{dt} (\nabla \Psi_{1m}(t), \nabla \Psi_{1tm}(t))_{\Omega} + h(0) \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 \\ - \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t h'(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds \right] - h'(0) \frac{d}{dt} \|\nabla \Psi_{1m}(t)\|_{\Omega}^2 \\ + \int_0^t h''(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds \\ = (F'_1(t), \Psi_{1ttm})_{\Omega} + (F'_2(t), \Psi_{2ttm})_{\Gamma_1}, \end{array} \right.$$

qu'on peut écrire :

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{1ttm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2ttm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} + h(0) \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 \\ & = (F'_1(t), \Psi_{1ttm})_{\Omega} + (F'_2(t), \Psi_{2ttm})_{\Gamma_1} - (\Psi_{2tt}(t) + \Phi_{2tt}(t), \Psi_{2tt}(t))_{\Gamma_1} \\ & \quad + h(0) \frac{d}{dt} (\nabla \Psi_{1m}(t), \nabla \Psi_{1tm}(t))_{\Omega} + \frac{d}{dt} \left[ \int_0^t h'(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds \right] + \\ & \quad - \int_0^t h''(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1tm}(t))_{\Omega} ds. \end{aligned} \tag{3.21}$$

En utilisant les inégalités de Cauchy Schwartz, et de Young, on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (F_1^\lambda(t), \Psi_{1ttm})_\Omega \leq \frac{1}{2} \|F_1^\lambda(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{1ttm}\|_\Omega^2, \\
 (F_2^\lambda(t), \Psi_{2ttm})_{\Gamma_1} \leq \frac{1}{2} \|F_2^\lambda(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2ttm}\|_{\Gamma_1}^2, \\
 h(0) (\nabla \Psi_{1m}(t), \nabla \Psi_{1tm}(t))_\Omega \leq \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla \Psi_{1m}\|_\Omega^2 + \delta_2 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_\Omega^2, \\
 \int_0^t h''(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1tm}(t))_\Omega ds \leq \\
 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_\Omega^2 \left| \int_0^t a(x) \zeta h(t-s) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\| ds \right| \leq \\
 \delta_3 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_\Omega^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t a(x) \zeta h(t-s) |\nabla \Psi_{1m}(s)|^2 ds \leq \\
 \delta_3 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_\Omega^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds, \\
 \left| \int_0^t h'(t-s) a(x) (\nabla \Psi_{1m}(s), \nabla \Psi_{1tm}(t))_\Omega ds \right| \leq \\
 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_\Omega^2 \left| \int_0^t a(x) \zeta h(t-s) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\| ds \right| \leq \\
 \delta_4 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_\Omega^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds.
 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|\Psi_{1ttm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2ttm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} + h(0) \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 \leq \\ & \frac{1}{2} \|F_1^\lambda(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{1ttm}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|F_2'(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2ttm}\|_{\Gamma_1}^2 \\ & - (\Psi_{2tt}(t) + \Phi_{2tt}(t), \Psi_{2tt}(t))_{\Gamma_1} + \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} \|\nabla \Psi_{1m}\|_{\Omega}^2 + \delta_2 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 \\ & + \frac{d}{dt} \left[ \delta_4 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds \right] \\ & + \delta_3 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds. \end{aligned} \right. \quad (3.22)$$

En intégrant (3.20) de 0 à  $t$ , et tenant compte de (3.19),  $\Psi_{1m}(0) = \Psi_{1mt}(0) = 0$  et  $\Psi_{2m}(0) = \Psi_{2mt}(0) = 0$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{1}{2} \|\Psi_{1ttm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2ttm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2tm}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + h(0) \int_0^t \|\Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 ds \leq \\ & \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1^\lambda(t)\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Psi_{1ttm}\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2'(t)\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Psi_{2ttm}\|_{\Gamma_1}^2 ds \\ & - \int_0^t (\Psi_{2tt}(t) + \Phi_{2tt}(t), \Psi_{2tt}(t))_{\Gamma_1} ds + \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}\|_{\Omega}^2 ds + \delta_2 \int_0^t \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 ds \\ & + \delta_4 \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds \\ & + \delta_3 \int_0^t \|\nabla \Psi_{1tm}(t)\|_{\Omega}^2 ds + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \left( \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds \right) ds \end{aligned} \right.$$

qu'on peut écrire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|\Psi_{1mtt}(t)\|_{\Omega}^2 + \left(\frac{1}{2} + \delta_4\right) \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mtt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \\ \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1^\lambda(s)\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Psi_{1mtt}\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2'(s)\|_{\Omega}^2 ds \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \|\Psi_{2mtt}\|_{\Gamma_1}^2 ds - \int_0^t (\Psi_{2tt}(t) + \Phi_{2tt}(t), \Psi_{2tt}(t))_{\Gamma_1} ds \\ + \int_0^t \left[ -\frac{1}{2} \|\Psi_{1mtt}\|_{\Omega}^2 - \frac{1}{2} \|\Psi_{2mtt}\|_{\Gamma_1}^2 - (h(0) + \delta_3 + \delta_2) \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 \right] ds \\ + \frac{(h^\lambda(0))^2}{4\delta_1} \int_0^t \|\nabla \Psi_{1m}\|_{\Omega}^2 ds + \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds \\ + \frac{(\zeta)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t \left( \int_0^t a(x) \|\nabla \Psi_{1m}(s)\|^2 ds \right) ds. \end{array} \right.$$

Pour  $\delta_2 < \frac{1}{2}$ ,  $\|\nabla \Psi_{1m}(t)\| < (C_1(T))$ ,  $\delta_2 + \delta_3 = h(0)$ , en posant

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(t) = \min(1, 1 + 2\delta_4) \left( \frac{1}{2} \|\Psi_{1mtt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mtt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right), \\ B = \frac{1}{2} \|F_1(s)\|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))}^2 + \frac{1}{2} \|F_2(s)\|_{L^2(0,T,L^2(\Gamma_1))}^2 + \frac{(h'(0))^2}{4\delta_1} [(C_1(T))^2] \\ + \frac{(\xi)^2}{4\delta_3} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} T^2 \|(C_1(T))^2\|, \\ \psi(t) = \sup \left( \frac{(\xi)^2}{4\delta_4} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right), \end{array} \right.$$

et en appliquant le lemme de Granwall on vérifie que

$$\frac{1}{2} \|\Psi_{1mtt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla \Psi_{1mt}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\Psi_{2mtt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T \Psi_{2mt}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq C_2(T). \quad (3.23)$$

On en déduit que :

$$\begin{cases} \Psi_{1mtt} \in L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \\ \Psi_{2mtt}(t) \in L^\infty(0, T, L^2(\Gamma_1)). \end{cases} \quad (3.24)$$

**Passage à la limite :**

En utilisant les estimations (3.21) et (3.22), (3.18) on en déduit qu'on peut extraire respectivement des deux suites  $(\Psi_{1m})_m$  et  $(\Psi_{2m})_m$  deux sous suites notées encore  $(\Psi_{1m})_m$  et  $(\Psi_{2m})_m$  telles que :

$$\begin{cases} (\Psi_{1tm}, \Psi_{1m}) \rightharpoonup \Psi_1 & \text{dans } L^\infty(0, T, (H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times H^1(\Gamma))), \\ (\Psi_{2m}, \Psi_{2tm}) \rightharpoonup \Psi_2 & \text{dans } L^\infty(0, T, V) \\ \Psi_{1ttm} \rightharpoonup \Psi_{1tt} & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Omega)), \\ \Psi_{2ttm} \rightharpoonup \Psi_{2tt} & \text{dans } L^\infty(0, T, L^2(\Gamma_1)). \end{cases}$$

D'où l'existence d'une solution. .

**Unicité :**

Soient  $\Psi_1, \Psi_2$  deux solutions régulières du problème (3.7). Alors, en posant  $z_1 = \Psi_1 - \Psi_2$

et  $z_2 = \Psi_1 - \Psi_2$  pour que  $z_1$  et  $z_2$  vérifient :  $\forall (w_1, w_2) \in V$

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_{1tt}, w_1)_\Omega + (\nabla z_1, \nabla w_1)_\Omega - \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla w_1, \nabla z_1(s))_\Omega ds = (F_1(t), w_1)_\Omega, \\ (z_{2tt}(t), w_2)_{\Gamma_1} + (\nabla_T z_2, \nabla_T w_2)_{\Gamma_1} d\sigma + (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), w_2)_{\Gamma_1} = (F_2(t), w_2)_{\Gamma_1}, \end{array} \right. \quad (3.25)$$

$w = (w_1, w_2) \in V$ . Posons  $w_1 = z'_1(t)$  et  $w_2 = z'_2(t)$  dans (3.25), il s'ensuit que :

$$\left\{ \begin{array}{l} (z_{1tt}, z'_1(t))_\Omega + (\nabla z_1, \nabla z'_1(t))_\Omega - \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z'_1(t), \nabla z_1(s))_\Omega ds = (F_1(t), z'_1(t))_\Omega, \\ (z_{2tt}(t), z'_1(t))_{\Gamma_1} + (\nabla_T z_2, \nabla_T z'_1(t))_{\Gamma_1} + (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), z'_1(t))_{\Gamma_1} = (F_2(t), z'_1(t))_{\Gamma_1}, \end{array} \right.$$

alors,

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|z_{1t}(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_{1t}(t)\|_\Omega^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} \\ + (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} - (F_1(t), z_{1t})_\Omega \\ - \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_{1t}(t), \nabla z_1(s))_\Omega ds \\ - (F_2(t), z_{2t}(t))_{\Gamma_1} - (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} = 0 \end{array} \right.$$

Donc :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} \\ + (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} = \\ (F_1(t), z_{1t})_{\Omega} + \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_{1t}(t), \nabla z_1(s))_{\Omega} ds \\ + (F_2(t), z_{2t}(t))_{\Gamma_1} + (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1}, \end{array} \right.$$

puisque

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_{1t}(t), \nabla z_1(s))_{\Omega} ds = \\ -h(0) \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 - \int_0^t h'(t-s) a(x) ((\nabla z_1(s), \nabla z_1(t)))_{\Omega} ds \\ + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_1(s), \nabla z_1(t))_{\Omega} ds \right), \end{array} \right. \quad (3.26)$$

alors, sous l'hypothèse **(A1)** on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T z_2(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right\} \leq \\ -(z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} + \frac{1}{2} \|F_1^{\lambda}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{1t}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|F_2^{\lambda}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}\|_{\Gamma_1}^2 + \\ + (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} + \frac{\zeta^2}{2} \|\nabla z_1(t)\|^2 + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t h(t-s) a(x) \|\nabla z_1(s)\|^2 ds + \\ + \frac{d}{dt} \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_1(s), \nabla z_1(t))_{\Omega} ds \right) - h(0) \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2. \end{array} \right. \quad (3.27)$$

En integrant la dernière inégalité sur  $(0, t)$ , on déduit que

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \|z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T z_2(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \\
 & - \int_0^t (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1^\lambda(t)\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z_{1t}\|_{\Omega}^2 ds \\
 & + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2'(t)\|_{\Gamma_1}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z_{2t}\|_{\Gamma_1}^2 ds \\
 & + \int_0^t (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} ds + \frac{\zeta^2}{2} \int_0^t \|\nabla z_1(t)\|^2 ds \\
 & + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \int_0^t \int_0^r h(t-s) a(x) \|\nabla z_1(s)\|^2 dr ds \\
 & + \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_1(s), \nabla z_1(t))_{\Omega} ds - h(0) \int_0^t \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 ds.
 \end{aligned} \right. \tag{3.28}$$

Nous avons les estimations suivantes :

$$\left\{ \begin{aligned}
 & \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla z_1(s), \nabla z_1(t))_{\Omega} ds \leq \eta \|\nabla z_1(t)\|^2 \\
 & + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \int_0^t a(x) \|\nabla z_1(t)\|^2 ds.
 \end{aligned} \right. \tag{3.29}$$

En intégrant (3.29) de 0 à  $t$  et en remarquant que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^t ds \int_0^a h(s-r) a(x) \|\nabla z_1(s)\|^2 dr = \\ \int_0^t dr \int_r^t h(s-r) a(x) \|\nabla z_1(s)\|^2 ds \\ \leq \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \int_0^t a(x) \|\nabla z_1(s)\|^2 ds, \end{array} \right.$$

on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{1}{2} \|z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \left(\frac{1}{2} - \eta\right) \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T z_2(t)\|_{\Gamma_1}^2 \leq \\ - \int_0^t (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_1^\lambda(t)\|_{\Omega}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z_{1t}\|_{\Omega}^2 ds \\ + \frac{1}{2} \int_0^t \|F_2'(t)\|_{\Gamma_1}^2 ds + \frac{1}{2} \int_0^t \|z_{2t}\|_{\Gamma_1}^2 ds + \int_0^t (z_{2t}(t) + \Phi_{2t}(t), \Phi_{2t}(t))_{\Gamma_1} ds \\ + \frac{1}{2} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^1(\mathbb{R}^+)} \int_0^t a(x) \|\nabla z_1(s)\|^2 dr \\ + \left[ -h(0) + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right] \int_0^t a(x) \|\nabla z_1(t)\|^2 ds, \end{array} \right.$$

d'où,

$$\left\{ \begin{array}{l} \min(1, 1 - 2\eta) \left[ \frac{1}{2} \|z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T z_2(t)\|_{\Gamma_1}^2 \right] \leq \\ \max \left[ 2, -h(0) + \frac{\zeta^2}{2} + \frac{1}{4\eta} \|h\|_{L^1(0,\infty)} \|h\|_{L^\infty(0,\infty)} \right] ds \int_0^t \left[ \frac{1}{2} \|z_{1t}\|_{\Omega}^2 + \frac{1}{2} \|\nabla z_1(t)\|^2 \right] \end{array} \right.$$

En appliquant le lemme de Gronwall, on trouve que :

$$\|z_{1t}(t)\|_{\Omega}^2 + \|\nabla z_1(t)\|_{\Omega}^2 + \|z_{2t}(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \|\nabla_T z_2(t)\|_{\Gamma_1}^2 = 0,$$

ce qui montre qu'on a  $z_1 = \Psi_1 - \Psi_2 = 0$  et  $z_2 = \Psi_1 - \Psi_2 = 0$  presque partout. ■

## Chapitre 4

# Comportement asymptotique

### 4.1 Introduction

Nous considérons l'équation des ondes dans un domaine  $\Omega$  borné dans  $\mathbb{R}^n$  ( $n \geq 2$ ) ayant une frontière  $\Gamma = \partial\Omega$  de la classe  $C^3$ . Soient  $\Gamma_0$  et  $\Gamma_1$  deux ouverts non vides et disjoints de  $\Gamma$  et  $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ . Notons par  $\nabla_T$  le gradient-tangentiel sur  $\Gamma$ , par  $\Delta_\Gamma$  l'opérateur laplacien sur  $\Gamma$  et par  $\partial_\nu$  la dérivée normale où  $\nu$  représente le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur.

Notre but dans ce chapitre est d'étudier la décroissance uniforme de l'énergie associée de la solution  $(u, v)$  du problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt}(t) - \Delta u(t) + \int_0^t h(t-s) \operatorname{div}[a(x) \nabla u(s)] ds = 0 & \text{sur } \Omega \times ]0, \infty[ \\ v_{tt}(t) + \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) - \Delta_T v(t) + v_t(t) = 0 & \text{dans } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ u|_{\Sigma_1} = v & \text{dans } \Sigma_1 = \Gamma_1 \times ]0, \infty[, \\ u = 0 & \text{dans } \Sigma_0 = \Gamma_0 \times ]0, \infty[, \\ u(0, x) = u_0(x) \quad u_t(0, x) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \times ]0, \infty[, \\ v(0, x) = v_0(x) \quad v_t(0, x) = v_1(x) & \text{dans } \Gamma \end{array} \right. \quad (4.1)$$

où,  $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  est une fonction non négative et  $a \in C^1(\Omega)$  telle que :

$$a \in L^\infty(\Omega), a(x) \geq a_0 > 0, \quad \text{sur } \omega, \quad (4.2)$$

$\omega \subset \Omega$  est un sous-ensemble ouvert et non vide de  $\Omega$ ;  $a_0$  est une constante positive et

$$|\nabla a(x)|^2 \leq \alpha_1^2 |a(x)|, \quad \forall x \in \omega, \quad (4.3)$$

pour une constante positive  $\alpha_1 \in \mathbb{R}$ . Supposons  $(u, v)$  l'unique solution faible globale pour le problème (4.1). L'énergie classique associée à (4.1) est donnée par :

$$E(t) = \frac{1}{2} \{ \|u_t(t)\|_2^2 + \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \|\nabla u(t)\|_2^2 + \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 \}, \quad (4.4)$$

et la dérivée de  $E(t)$  par rapport à la variable  $t$  est donnée par :

$$\frac{dE}{dt}(t) = - \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \int_{\Omega} a(x) \nabla u_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx. \quad (4.5)$$

Nous utilisons la notation standard pour les opérateurs suivants :

$$\begin{aligned} (h * u)(t) &:= \int_0^t h(t-s) u(s) ds, \\ (h \square u)(t) &:= \int_0^t h(t-s) |u(t) - u(s)|^2 ds, \\ (h \diamond u)(t) &:= \int_0^t h(t-s) (u(t) - u(s)) ds. \end{aligned}$$

Il est facile de voir que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(h \square \nabla u)(t) &= \int_0^t h'(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t h(t-s) \nabla u_t(t) (\nabla u(t) - \nabla u(s)) ds \\ &= (h' \square \nabla u)(t) + 2 \int_0^t h(t-s) \nabla u_t(t) \nabla u(t) ds \\ &\quad - 2 \nabla u_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds. \end{aligned}$$

Il est clair que,

$$2\nabla u_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds = (h' \square \nabla u)(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 - \frac{d}{dt} \left[ (h \square \nabla u)(t) - \int_0^t h(s) ds |\nabla u(t)|^2 dx \right].$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} a(x) \nabla u_t(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h \square \nabla u)(t) - \int_0^t h(s) ds |\nabla u(t)|^2 \right] dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h' \square \nabla u)(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 \right] dx. \end{aligned} \tag{4.6}$$

En utilisant les résultats de (4.8) et (4.9), nous concluons que :

$$\begin{aligned} \frac{dE}{dt}(t) &= -\|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h \square \nabla u)(t) - \int_0^t h(s) ds |\nabla u(t)|^2 \right] dx \\ & \quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h' \square \nabla u)(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 \right] dx. \end{aligned}$$

Donc,

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left[ E(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h \square \nabla u)(t) - \int_0^t h(s) ds |\nabla u(t)|^2 \right] dx \right] = \\ & -\|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h' \square \nabla u)(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 \right] dx. \end{aligned} \right.$$

Pour cela, nous définissons l'énergie modifiée pour la fonctionnelle de la solution faible par :

$$\mathcal{E}(t) = E(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h \square \nabla u)(t) - \int_0^t h(s) ds |\nabla u(t)|^2 \right] dx. \quad (4.7)$$

Observons que l'énergie classique habituelle  $E(t)$  (cinétique + potentiel) a été modifiée pour l'adapter au terme de mémoire qui apparaît dans sa dérivée.

Une dérivation de  $\mathcal{E}(t)$  par rapport au temps  $t$  donne

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt}(t) = - \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left[ (h' \square \nabla u)(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 \right] dx. \quad (4.8)$$

Notre but consiste à étudier la décroissance uniforme de la solution  $(u, v)$ . La stabilisation est obtenue grâce à une dissipation frictionnelle sur le bord et un terme mémoire localisé à l'intérieur d'un domaine  $\Omega$ .

Avant d'énoncer notre résultat de la stabilité exponentielle, nous introduisons certaines fonctionnelles qui seront nécessaires pour la suite. Pour cela, nous suivons les idées introduites par Medjden et Tatar [105], c'est-à-dire nous utilisons les fonctionnelles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} l(t) = h'(t) + \gamma h(t), \\ l_{\alpha}(t) = e^{\alpha t} l(t), \\ \bar{l} = \int_0^{\infty} l(s) ds, \\ \bar{l}_{\alpha} = \int_0^{\infty} l_{\alpha}(s) ds = \int_0^{\infty} l(s) e^{\alpha s} ds, \\ \bar{h} = \int_0^{\infty} h(s) ds, \\ \bar{h}_{\alpha} = \int_0^{\infty} e^{\alpha s} h(s) ds. \end{array} \right. \quad (4.9)$$

Nous construisons une fonction de Lyapunov  $\mathcal{L}_1$  équivalente à l'énergie et qui vérifiant l'inégalité

$\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq -C\mathcal{L}_1(t)$ , où  $C$  est une constante positive. Nous notons par

$$\Phi_1(t) = \int_{\Omega} u_t(t) u(t) dx + \int_{\Gamma_1} v_t(t) v(t) d\sigma, \quad (4.10)$$

$$\Phi_2(t) = \int_{\Omega} a(x) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx, \quad (4.11)$$

$$\begin{aligned} \Phi_2(t) &= \int_{\Omega} a(x) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx, \\ &= \int_{\Omega} a(x) (L_{\alpha} \square \nabla u)(t) dx, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où

$$L_\alpha(t) = e^{-\alpha t} \int_t^{+\infty} l_\alpha(s) ds, \quad e^{\alpha s} l(s) \in L^1(\mathbb{R}^+), \quad (4.13)$$

et nous considérons la fonctionnelle

$$\begin{cases} \mathcal{L}_1(t) = \mathcal{E}(t) + \varepsilon \Phi_1(t) + \eta \Phi_2(t) \\ -\eta \left( \int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_\Omega a(x) |\nabla u|^2 dx \\ + 2\eta \int_\Omega a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx, \end{cases} \quad (4.14)$$

où les constantes positives  $\varepsilon$  et  $\eta$  seront déterminées plus tard. Le premier résultat montre que

$\mathcal{L}_1(t)$  et  $E(t) + \Phi_2(t) + \int_\Omega a(x)(h \square \nabla u)(t) dx$  sont équivalents.

**Proposition 4.1** *Il existe deux constantes positives  $\alpha_i > 0, i = 1, 2$  telles que*

$$\alpha_1 \left\{ E(t) + \Phi_2(t) + \int_\Omega a(x)(h \square \nabla u)(t) dx \right\} \leq \mathcal{L}_1(t) \quad (4.15)$$

$$\mathcal{L}_1(t) \leq \alpha_2 \left\{ E(t) + \Phi_2(t) + \int_\Omega a(x)(h \square \nabla u)(t) dx \right\} \quad (4.16)$$

pour tout  $t \geq 0$ .

**Preuve.** Nous commençons par montrer l'inégalité de gauche dans (4.15). En prenant, (2.7)

en compte et en considérant l'inégalité  $a.b \leq \frac{a^2}{4\eta} + \eta b^2$ , avec  $\eta = \frac{1}{2}$ ,

ce qui donne

$$\int_\Omega u_t(t) u(t) dx \leq \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{C_p^2}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2, \quad (4.17)$$

où,  $C_p$  est la constante de Poincaré. Quant à (4.17), en prenant (2.8) en considération, nous

déduisons que

$$\int_{\Gamma_1} v_t(t) v(t) d\sigma \leq \frac{1}{2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{C_0^2}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2. \quad (4.18)$$

Le dernier terme de la définition de  $\mathcal{L}_1(t)$  peut être estimé comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \leq \\ \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) a(x) [(\nabla u(s) - \nabla u(t)) + \nabla u(t)] ds dx = \\ \left( \int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx \\ + \int_{\Omega} \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) a(x) [(\nabla u(s) - \nabla u(t))] ds dx \leq \\ \left( \delta_1 + \int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx \\ + \frac{1}{4\delta_1} \left( \int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} \int_0^t L_{\alpha}(t-s) a(x) |\nabla u(t) - \nabla u(s)|^2 ds dx, \end{array} \right.$$

pour certains  $\delta_1 > 0$ . A partir de (4.9) et (4.12), nous obtenons

$$\int_0^t L_{\alpha}(s) ds \leq \frac{1}{\alpha} \int_0^{+\infty} l(s) e^{\alpha s} ds =: \frac{l_{\alpha}}{\alpha}.$$

Par conséquent,

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \leq \\ \left( \delta_1 + \frac{l_{\alpha}}{\alpha} \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx + \frac{l_{\alpha}}{4\alpha\delta_1} \Phi_2(t). \end{array} \right. \quad (4.19)$$

En utilisant (4.18) et (4.19), nous déduisons de (4.14) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1(t) \geq \mathcal{E}(t) + \eta \left( 1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Phi_2(t) \\ -\frac{\varepsilon}{2} \left( \|u_t(t)\|_2^2 + \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + (C_p^2 + C_0^2) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) \\ -\eta \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx - 2\eta \left( 1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx. \end{array} \right. \quad (4.20)$$

Maintenant, en utilisant (4.7), nous obtenons de (4.20) que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1(t) \geq E(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left\{ (h \square \nabla u)(t) - \left( \int_0^t h(s) ds \right) |\nabla u(t)|^2 \right\} dx \\ + \eta \left( 1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Phi_2(t) - \frac{\varepsilon}{2} \left( \|u_t(t)\|_2^2 + \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + (C_p^2 + C_0^2) \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) \\ -\eta \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx - 2\eta \left( 1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx. \end{array} \right. \quad (4.21)$$

D'après le résultat (4.21), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1(t) \geq \eta \left( 1 - \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha\delta_1} \right) \Phi_2(t) + \frac{1-\varepsilon}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1-\varepsilon}{2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left\{ (h \square \nabla u)(t) - \left( \int_0^t h(s) ds \right) |\nabla u(t)|^2 \right\} dx \\ + \frac{1}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ - \varepsilon \frac{C_p^2 + C_0^2}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \eta \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx \\ - 2\eta \left( 1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha} \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx, \end{array} \right.$$

et ainsi, comme  $0 < a_0 \leq a(x)$  et  $h_0 = \int_0^{t_0} h(s) ds \leq \int_0^t h(s) ds$  et en prenant  $\delta_1 = \frac{\bar{l}_\alpha}{\alpha}$ , on

conclut que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1(t) \geq \frac{\eta}{2} \Phi_2(t) + \frac{1-\varepsilon}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1-\varepsilon}{2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \frac{1}{2} \left( 1 - \varepsilon (C_p^2 + C_0^2) - \frac{10\eta \bar{l}_\alpha}{\alpha} a_0 - a_0 h_0 \right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2} \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t). \end{array} \right. \quad (4.22)$$

Ensuite, nous commençons à sélectionner les différents paramètres tels que tous les coefficients

du côté droit de (4.22) sont positifs. Nous choisissons  $\varepsilon < \frac{(1-a_0 h_0)}{(C_p^2 + C_0^2)}$  et  $l_\alpha < \frac{(1-a_0 h_0 - \varepsilon(C_p^2 + C_0^2))\alpha}{10\eta a_0}$

pour obtenir

$$\mathcal{L}_1(t) \geq \alpha_1 \left\{ E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t). \right\}.$$

Pour l'autre inégalité, en substituant (4.17), (4.18) et (4.19) dans (4.14), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}_1(t) \leq \frac{1+\varepsilon}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1+\varepsilon}{2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \left[ 4\eta \delta_1 + \varepsilon (C_p^2 + C_0^2) + \eta \left( 1 + \frac{2\bar{l}_\alpha}{\alpha} \right) + \frac{1+\bar{h}}{2} \right] \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2} \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t). + \eta \left( 1 + \frac{\bar{l}_\alpha}{2\alpha \delta_1} \right) \Phi_2(t). \end{array} \right.$$

Ceci implique que

$$\mathcal{L}_1(t) \leq \alpha_2 \left\{ E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t). \right\}$$

pour une certaine constante  $\alpha_2$ . Ceci conclut la preuve de la proposition (4.1). ■

Nous donnons ici quelques résultats qui serviront de support à la démonstration de nos résultats principaux

**Lemme 4.1** *La fonctionnelle  $\Phi_1(t)$  satisfait aux solutions du problème (4.1)*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \Phi_1(t) = \| u_t(t) \|_2^2 + \| v_t(t) \|_{\Gamma_1}^2 - \| \nabla u(t) \|_2^2 - \| \nabla_T v(t) \|_{\Gamma_1}^2 \\ + \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) \nabla u(t) ds dx - \int_{\Gamma_1} v_t(t) v(t) d\sigma. \end{array} \right. \quad (4.23)$$

**Preuve.** Différencions (4.10) le long de la solution de (4.1), on trouve

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \Phi_1(t) = \int_{\Omega} u_{tt}(t) u(t) dx + \| u_t(t) \|_2^2 \\ + \int_{\Gamma_1} v_{tt}(t) v(t) d\sigma + \| v_t(t) \|_{\Gamma_1}^2. \end{array} \right. \quad (4.24)$$

Maintenant, en introduisant dans (4.24) les expressions de  $u_{tt}(t)$  et  $v_{tt}(t)$  les première et deuxième équations du problème (4.1), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \Phi_1(t) = \| u_t(t) \|_2^2 + \| v_t(t) \|_{\Gamma_1}^2 \\ + \int_{\Omega} \left( \Delta u(t) - \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla u(s)] ds \right) u(t) dx \\ + \int_{\Gamma_1} \left( \Delta_T v(t) - v_t(t) - \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) \right) v(t) d\sigma = \\ \| u_t(t) \|_2^2 + \| v_t(t) \|_{\Gamma_1}^2 - \| \nabla u(t) \|_2^2 - \| \nabla_T v(t) \|_{\Gamma_1}^2 \\ + \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) \nabla u(t) ds dx \\ - \int_{\Gamma_1} v_t(t) v(t) d\sigma + \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) u(t) d\sigma - \int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) v(t) d\sigma. \end{array} \right.$$

D'où nous obtenons (4.23). ■

**Lemme 4.2** La fonctionnelle  $\Phi_2(t)$  satisfait aux solutions de Problème (4.1)

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \left[ \begin{array}{l} \Phi_2(t) - \left( \int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx \\ + 2 \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \end{array} \right] = \\ -\alpha \Phi_2(t) - \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx \\ + 2L_\alpha(0) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx - L_\alpha(t) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx \\ - 2\alpha \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ - 2 \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{array} \right. \quad (4.25)$$

**Preuve.** Pour la dérivée de  $\Phi_2(t)$  nous avons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dt} \Phi_2(t) = -\alpha_1 \Phi_2(t) - \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx \\ + 2 \left( \int_0^t L_\alpha(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \nabla u_t(t) dx. \\ - 2 \int_{\Omega} a(x) \nabla u_t(t) \int_0^t L_\alpha(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{array} \right. \quad (4.26)$$

Par ailleurs, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a(x) \nabla u_t(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ = \frac{d}{dt} \left[ \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \right] \\ - L_{\alpha}(0) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u|^2 dx + \alpha \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \\ + \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx. \end{array} \right. \quad (4.27)$$

En injectant alors (4.27) dans (4.26) on obtient (4.25) ■

**Lemme 4.3** *La dérivée temporelle de la fonctionnelle  $\mathcal{L}_1(t)$  satisfait l'inégalité suivante :*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq \frac{3\varepsilon}{2} \|u_t(t)\|_2^2 - \left(1 - \frac{3\varepsilon}{2}\right) \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ - \left[ \frac{(1-\|a\|_{\infty}\bar{h})\varepsilon}{2} - 10\|a\|_{\infty}\eta\bar{l}_{\alpha} \right] \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ - \varepsilon \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{\eta\alpha}{2} \Phi_2(t) \\ - \frac{1}{2} \left[ \gamma - \frac{\varepsilon\bar{h}}{2\delta_2} \right] \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx \\ - \frac{1}{2} [\eta - 1] \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx. \end{array} \right. \quad (4.28)$$

**Preuve.** Une différenciation de  $\mathcal{L}_1(t)$  (voir (4.14)) par rapport au temps  $t$  donne

$$\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) = \frac{d}{dt} \mathcal{E}(t) + \varepsilon \frac{d}{dt} \Phi_1(t) + \eta \frac{d}{dt} \left[ \begin{array}{l} \Phi_2(t) - \left( \int_0^t L_{\alpha}(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx \\ + 2 \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t L_{\alpha}(t-s) \nabla u(s) ds dx \end{array} \right] \quad (4.29)$$

En tenant compte de (4.8), (4.23) et (4.25), nous obtenons de (4.29) l'inégalité suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq - \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left\{ h' \square \nabla u(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 \right\} \\ + \varepsilon \|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \varepsilon (\delta_2 + \bar{h}) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon \frac{\bar{h}}{4\delta_2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx \\ + \varepsilon \left( \frac{1}{4\delta_2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \delta_2 C_0^2 \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) - \eta \alpha \Phi_2(t) - \eta \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx. \\ + 2\eta L_{\alpha}(0) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \eta L_{\alpha}(t) a_0 \|\nabla u(t)\|_2^2 + 2\eta \alpha \left( \delta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ + 2\eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{4\delta_1} \Phi_2(t) + 2\eta (\delta_3 + \bar{l}_{\alpha}) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\delta_3} \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx. \end{array} \right. \quad (4.30)$$

Remarquons qu'à partir de (4.9) et (4.12), nous avons  $L_{\alpha}(0) = \int_0^{+\infty} l_{\alpha}(s) ds = \bar{l}_{\alpha}$ , par la suite, en utilisant (4.19) et les inégalités suivantes pour estimer le côté droit de (4.30),

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t h(t-s) \nabla u(s) ds dx \leq (\delta_2 + \bar{h}) \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) dx \\ + \frac{\bar{h}}{4\delta_2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \end{array} \right. \quad (4.31)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t l(t-s) \nabla u(s) ds dx \leq (\delta_3 + \bar{l}_{\alpha}) \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) dx \\ + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{4\delta_3} \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx, \end{array} \right. \quad (4.32)$$

où  $\delta_2$  et  $\delta_3$  sont des constantes positives. Ici, nous avons utilisé le fait que  $\bar{l} = \int_0^{\infty} l(s) ds \leq \int_0^{\infty} l(s) e^{\alpha s} ds = \bar{l}_{\alpha}$ . Substituons (4.31) et (4.32) dans (4.30), puis utilisons (2.7) et (4.18), nous

obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq - \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) \left\{ (h \square \nabla u)(t) - h(t) |\nabla u(t)|^2 \right\} dx \\
+ \varepsilon \|u_t(t)\|_2^2 + \varepsilon \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \varepsilon \|\nabla u(t)\|_2^2 - \varepsilon \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\
+ \varepsilon (\delta_2 + \bar{h}) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \varepsilon \frac{\bar{h}}{4\delta_2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx \\
+ \varepsilon \left( \frac{1}{4\delta_2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \delta_2 C_0^2 \|\nabla u(t)\|_2^2 \right) - \eta \alpha \Phi_2(t) - \eta \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx \\
+ 2\eta L_{\alpha}(0) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 - \eta L_{\alpha}(t) a_0 \|\nabla u(t)\|_2^2 + 2\eta \alpha \left( \delta_1 + \frac{\bar{l}_{\alpha}}{\alpha} \right) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
+ 2\eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{4\delta_1} \Phi_2(t) + 2\eta (\delta_3 + \bar{l}_{\alpha}) \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \eta \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\delta_3} \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx.
\end{array} \right. \quad (4.33)$$

Comme  $h'(t) = l(t) - \gamma h(t)$ , à partir de (4.33), on obtient

$$\left\{ \begin{array}{l}
\frac{d\mathcal{L}_1}{dt}(t) \leq \varepsilon \|u_t(t)\|_2^2 - \left\{ 1 - \varepsilon \left( 1 + \frac{3}{4\delta_2} \right) \right\} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\
- \left[ \begin{array}{l}
\varepsilon \left\{ 1 - \|a\|_{\infty} \bar{h} - \delta_2 (\|a\|_{\infty} + C_0^2) \right\} - 6 \|a\|_{\infty} \eta l_{\alpha} - 2\eta \alpha \delta_1 \|a\|_{\infty} \\
- 2\eta \delta_3 \|a\|_{\infty}
\end{array} \right] \|\nabla u(t)\|_2^2 \\
- \varepsilon \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{1}{2} \left[ \gamma - \frac{\varepsilon \bar{h}}{2\delta_2} \right] \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx \\
- \frac{1}{2} \left[ \eta \left( 1 - \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\delta_3} \right) - \frac{1}{2} \right] \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx.
\end{array} \right.$$

Maintenant, nous choisissons  $\delta_1 = \frac{l_{\alpha}}{\alpha}$ ,  $\delta_2 = \frac{1 - \|a\|_{\infty} \bar{h}}{2(\|a\|_{\infty} + C_0^2)}$  et  $\delta_3 = \bar{l}_{\alpha}$ , à fin de déduire de (4.34)

l'inégalité (4.28). Ensuite, pour faire face au coefficient positif de  $\|u_t(t)\|_2^2$  dans (4.28), nous construisons une  $\mathcal{L}$  fonctionnelle de Lyapunov satisfaisant l'inégalité  $\mathcal{L}'(t) \leq -C\mathcal{L}(t)$  où  $C$  est une constante positive. Cette inégalité donne la décroissance exponentielle de  $\mathcal{L}(t)$  pour passer à  $E(t)$ , nous aurons besoin d'une relation «d'équivalence» entre  $E(t)$  et  $\mathcal{L}(t)$ . Pour a

cela, nous définissons

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{L}_1(t) + \lambda \Psi_1(t) + \mu \Psi_2(t) \quad (4.34)$$

où,  $\mathcal{L}_1(t)$  est défini par (4.14),

$$\Psi_1(t) = \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t h(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx, \quad (4.35)$$

$$\Psi_2(t) = \int_{\Omega} \int_0^t H_{\alpha}(t-s) a(x) |\nabla u(s)|^2 ds dx, \quad (4.36)$$

$$H_{\alpha}(t) = \exp(-\alpha t) \int_t^{+\infty} h(s) \exp(\alpha s) ds,$$

où,  $\lambda$  et  $\mu$  sont des constantes positives qui seront choisies plus tard. Le premier résultat montre

que  $\mathcal{L}(t)$  et  $E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx + \Psi_2(t)$  sont équivalents. ■

**Proposition 4.2** *Il existe deux constantes positives  $\alpha_3$  et  $\alpha_4$  telles que :*

$$\alpha_3 [E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx + \Psi_2(t)] \leq \mathcal{L}(t) \quad (4.37)$$

$$\mathcal{L}(t) \leq \alpha_4 [E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx + \Psi_2(t)] \quad (4.38)$$

**Preuve.** Le côté gauche de (4.22) et les estimations

$$-\frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 - \frac{C_p^2 \bar{h}}{2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx \leq \Psi_1(t), \quad (4.39)$$

$$\Psi_1(t) \leq \frac{1}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{C_p^2 \bar{h}}{2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \quad (4.40)$$

donnent

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(t) \geq \frac{1-\varepsilon-\lambda}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{1-\varepsilon}{2} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \varepsilon (C_0^2 + C_p^2) - \frac{6\eta l_\alpha}{\alpha} a_0 - 4\eta\delta_1 a_0 - a_0\bar{h}\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2} \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) (h\Box\nabla u)(t) dx \\ - \frac{\lambda C_p^2 \bar{h}}{2} \int_{\Omega} a(x) (h\Box\nabla u)(t) dx + \mu\Psi_2(t) + \eta \left(1 - \frac{l_\alpha}{2\delta_1\alpha}\right) \Phi_2(t). \end{array} \right.$$

Choisissons  $\delta_1 = \frac{l_\alpha}{\alpha}$ , on obtient :

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(t) \geq \frac{1-\varepsilon-\lambda}{2} \|u_t(t)\|_2^2 + \left(\frac{1-\varepsilon}{2}\right) \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ + \frac{1}{2} \left(1 - \varepsilon (C_0^2 + C_p^2) - 10\eta\frac{l_\alpha}{\alpha} a_0 - a_0\bar{h}\right) \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ + \frac{1}{2} \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 + \left(\frac{1}{2} - \lambda C_p^2 \bar{h}\right) \int_{\Omega} a(x) (h\Box\nabla u)(t) dx + \frac{\eta}{2} \Phi_2(t) + \mu\Psi_2(t). \end{array} \right.$$

De l'hypothèse (A1), nous déduisons que  $1 - a_0\bar{h} < 0$ . Nous sélectionnons  $\varepsilon < \min \left\{1, \frac{1-a_0\bar{h}}{2(C_0^2 + C_p^2)}\right\}$ , alors nous choisissons  $\eta < \{1 - \varepsilon (C_0^2 + C_p^2) - a_0\bar{h}\} \setminus \left\{\frac{10l_\alpha a_0}{\alpha}\right\}$  et  $\lambda < \min \left\{1 - \varepsilon, \frac{1}{2C_p^2 \bar{h}}\right\}$ , ce qui montre que toutes les constantes dans le côté droit de ce qui précède l'inégalité sont positives.

Donc, nous en déduisons que

$$\mathcal{L}(t) \geq \alpha_3 [E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x) (h\Box\nabla u)(t) dx + \Psi_2(t)],$$

où,  $\alpha_3$  est une constante positive. D'où l'inégalité de gauche dans l'énoncé de la Proposition

(4.2) . Pour l'autre inégalité, il suffit de remarquer que

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{L}(t) \leq \alpha_4[E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx] \\ + \frac{\lambda}{2} \| u_t(t) \|_2^2 + \frac{\lambda C_p^2 \bar{h}}{2} \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx + \mu \Psi_2(t) \leq \\ \alpha_4[E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx + \Psi_2(t)]. \end{array} \right.$$

Ceci termine la preuve de la proposition (4.2). ■

Maintenant, nous affirmons et prouvons notre deuxième résultat principal de la décroissance exponentielle.

**Théorème 4.1** *Supposons que les hypothèses (A1), (A2) et (A3) soient vérifiées. Supposons en plus que  $\bar{h}_\alpha$  et  $\bar{l}_\alpha$  sont suffisamment petits. Alors, l'énergie classique  $E(t)$  de (P) décroît exponentiellement. C'est-à-dire, il existe des constantes positives  $C$  et  $\beta > 0$  telles que*

$$E(t) \leq C e^{-\beta t}, \quad t \geq 0.$$

Nous donnons d'abord quelques lemmes qui serviront de support à la preuve de ce théorème.

**Lemme 4.4** *La fonctionnelle  $\Psi_1(t)$  satisfait, le long des solutions de (4.1)*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi_1}{dt}(t) \leq -\frac{h_0 a_0}{3} \| u_t(t) \|_2^2 + B_1 \| \nabla u(t) \|_2^2 + B_2 \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx \\ + \frac{3C_p^2 \| a \|_\infty \bar{l}_\alpha}{4h_0 a_0} \int_{\Omega} a(x)(l \square \nabla u)(t) dx, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \end{array} \right. \quad (4.41)$$

où

$$B_1 = \delta_5 + \alpha_1^2 \delta_6 + \alpha_1^2 \delta_7 + \delta_8 \| a \|_\infty \bar{h};$$

et

$$B_2 = \frac{\|a\|_\infty \bar{h}}{4\delta_5} + \frac{C_p^2 \|a\|_\infty \bar{h}}{4\delta_6 a_0} + \left\{ \alpha_1^2 \delta_7 \bar{h} + \frac{C_p^2 \bar{h}}{4\delta_7} \right\} + \frac{\|a\|_\infty \bar{h}}{4\delta_8} + \frac{3C_p^2 \|a\|_\infty \bar{h}}{4h_0 a_0}.$$

**Preuve.** On dérive  $\Psi_1(t)$  par rapport à  $t$ , ce qui donne

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt}(t) &= \int_{\Omega} u_{tt}(t) \int_0^t a(x) h(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ &\quad \int_{\Omega} a(x) u_t(t) \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx - \left( \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |u_t(t)|^2 dx = \\ &\quad \int_{\Omega} \left( \Delta u - \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla u(s)] ds \right) \int_0^t a(x) h(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ &\quad + \int_{\Omega} a(x) u_t(t) \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx - \left( \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |u_t(t)|^2 dx. \end{aligned} \right.$$

En utilisant la première équation du problème (4.1), on déduit que

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d\Psi_1}{dt}(t) &= \int_{\Omega} \Delta u \int_0^t h(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \left[ \left( \int_0^t h(t-s) \operatorname{div} [a(x) \nabla u(s)] ds \right) \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds \right) \right] dx \\ &\quad + \int_{\Omega} a(x) u_t(t) \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ &\quad - \left( \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |u_t(t)|^2 dx. \end{aligned} \right.$$

En appliquant la formule de Green au premier terme de l'égalité ci-dessus et en utilisant le fait

que  $a(x) = 0$  sur  $\Gamma_1$  nous obtenons

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\Psi_1}{dt}(t) = - \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \\ - \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla a(x) \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ + \int_{\Omega} \left( \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) \cdot \nabla a(x) ds \right) \left( \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds \right) dx \\ + \int_{\Omega} a(x) \left( \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) ds \right) \left( \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\ + \int_{\Omega} a(x) u_t(t) \int_0^t h'(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \\ - \left( \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |u_t(t)|^2 dx \end{array} \right. \quad (4.42)$$

Ensuite, en utilisant (4.2), nous obtenons l'estimation

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Omega} a(x) \nabla u(t) \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds dx \right| \leq \\ \delta_5 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} \left( a(x) \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right)^2 dx \leq \\ \delta_5 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\|a\|_{\infty} \bar{h}}{4\delta_5} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \quad \delta_5 > 0, \end{array} \right. \quad (4.43)$$

puis en utilisant (4.2) et (4.3), nous obtenons que

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} \nabla u(t) \cdot \nabla a(x) \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds dx \leq \\ \alpha_1 \int_{\Omega} \left( \left( \int_0^t \sqrt{h(t-s)} \right)^2 (|\nabla u(t)| \sqrt{a(x)})^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left( \int_0^t (\sqrt{h(t-s)})^2 (u(s) - u(t))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq \\ \alpha_1 \int_{\Omega} \left( |\nabla u(t)| \sqrt{a(x)} \cdot \left( \int_0^t h(s) ds \right)^{\frac{1}{2}} \right) \left( \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t))^2 ds \right)^{\frac{1}{2}} dx \leq \\ \alpha_1^2 \delta_6 \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{C_p^2 \|a\|_{\infty} \bar{h}}{4\delta_6 a_0} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \delta_6 > 0. \end{array} \right.$$

Encore une fois, en exploitant (4.2) et (4.3), les inégalités de Young et de Hölder, nous déduisons

que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Omega} \left( \int_0^t h(t-s) \sqrt{a(x)} \nabla u(s) \cdot \nabla a(x) ds \right) \left( \int_0^t h(t-s) \sqrt{a(x)} (u(s) - u(t)) ds \right) dx \right| \\ \leq \alpha_1^2 \delta_7 \int_{\Omega} a^2(x) \left( \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)| ds \right)^2 dx \\ + \frac{1}{4\delta_7} \int_{\Omega} a(x) \left( \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds \right)^2 dx \\ \leq 2\alpha_1^2 \delta_7 (1-l) \int_{\Omega} a(x) \int_0^t h(t-s) (|\nabla u(s) - \nabla u(t)|^2 - |\nabla u(t)|^2) ds dx \\ + \frac{1}{4\delta_7} \int_{\Omega} a(x) \left( \int_0^t h(t-s) (u(s) - u(t)) ds \right)^2 dx \\ \leq 2\alpha_1^2 \delta_7 \bar{h} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \left( \alpha_1^2 \delta_7 \bar{h} + \frac{C_p^2 \bar{h}}{4\delta_7} \right) \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \delta_7 > 0, \end{array} \right. \quad (4.44)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_{\Omega} \left( \int_0^t h(t-s) a(x) \nabla u(s) ds \right) \left( \int_0^t h(t-s) a(x) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right) dx \\
\leq \delta_8 \int_{\Omega} a^2(x) \left( \int_0^t h(t-s) |\nabla u(s)| ds \right)^2 dx \\
+ \frac{1}{4\delta_8} \int_{\Omega} a^2(x) \left( \int_0^t h(t-s) (\nabla u(s) - \nabla u(t)) ds \right)^2 dx \\
\leq \delta_8 \|a\|_{\infty} \bar{h} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{\|a\|_{\infty} \bar{h}}{4\delta_8} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \quad \delta_8 > 0.
\end{array} \right. \quad (4.45)$$

De même que  $h'(t) = l(t) - \gamma h(t)$ , nous avons

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t h'(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx \\
&= \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t l(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx \\
&- \gamma \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t h(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx.
\end{aligned} \quad (4.46)$$

Puisque la fonction  $h$  est positive, continue et  $h(0) > 0$ , alors pour tout  $t \geq t_0 > 0$ , nous avons

$$\int_0^t h(s) ds \leq \int_0^{t_0} h(s) ds = h_0. \quad (4.47)$$

Ensuite, avec l'aide de

$$\left\{ \begin{array}{l}
\int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t l(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx \\
= \int_{\Omega} \sqrt{a(x)} u_t(t) \int_0^t l(t-s) \sqrt{a(x)} (u(s) - u(t)) ds dx \\
\leq \frac{h_0 a_0}{3} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{3C_p^2 \bar{l}_{\alpha}}{4h_0 a_0} \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t),
\end{array} \right. \quad (4.48)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t h(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx = \\ \int_{\Omega} \sqrt{a(x)} u_t(t) \int_0^t h(t-s) \sqrt{a(x)} (u(s) - u(t)) ds dx \\ \leq \frac{h_0 a_0}{3} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{3C_p^2 \|a\|_{\infty} \bar{h}}{4h_0 a_0} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t), \end{array} \right. \quad (4.49)$$

on combine (4.48) et (4.49), pour déduire de (4.46) que :

$$\left\{ \begin{array}{l} \left| \int_{\Omega} u_t(t) \int_0^t h'(t-s) a(x) (u(s) - u(t)) ds dx \right| \leq \\ \frac{2h_0 a_0}{3} \|u_t(t)\|_2^2 + \frac{3C_p^2 \|a\|_{\infty} \bar{l}_{\alpha}}{4h_0 a_0} \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) \\ + \frac{3C_p^2 \|a\|_{\infty} \bar{h}}{4h_0 a_0} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t). \end{array} \right. \quad (4.50)$$

Le dernier terme de la dérivée de  $\Psi_1(t)$  peut ˆetre borné par

$$- \left( \int_0^t h(s) ds \right) \int_{\Omega} a(x) |u_t(t)|^2 dx \leq -h_0 a_0 \|u_t(t)\|_2^2 \quad (4.51)$$

D'où, en combinant les estimations ci-dessus, on obtient (4.41). ■

**Lemme 4.5** *La fonctionnelle  $\Psi_2$  satisfait, le long des solutions de (4.1),*

$$\frac{d\Psi_2}{dt}(t) \leq \frac{3\bar{h}_{\alpha} \|a\|_{\infty}}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx - \alpha \Psi_2(t), \text{ pour tout } t \geq 0. \quad (4.52)$$

**Preuve.** Une dérivation de  $\Psi_2(t)$  par rapport à  $t$  donne

$$\frac{d}{dt}\Psi_2(t) = - \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) a(x) |\nabla u(s)|^2 ds dx + \overline{h_{\alpha}} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx - \alpha \Psi_2(t). \quad (4.53)$$

Pour le premier terme de (4.53), nous avons

$$- \int_{\Omega} \int_0^t h(t-s) a(x) |\nabla u(s)|^2 ds dx \leq \frac{\overline{h_{\alpha}} \|a\|_{\infty}}{2} \|\nabla u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx, \quad (4.54)$$

et le second terme de (4.53) donne

$$\overline{h_{\alpha}} \int_{\Omega} a(x) |\nabla u(t)|^2 dx \leq \overline{h_{\alpha}} \|a\|_{\infty} \|\nabla u(t)\|_2^2. \quad (4.55)$$

En substituant alors (4.54) et (4.55) dans (4.53), on obtient (4.52). ■

**Lemme 4.6** *La fonctionnelle  $\mathcal{L}(t)$  vérifie, le long des solutions de (4.1),*

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt}(t) \leq - \left\{ \frac{\lambda h_0 a_0}{3} - \frac{3\varepsilon}{2} \right\} \|u_t(t)\|_2^2 - \left\{ 1 - \frac{3\varepsilon}{2} \right\} \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ - \left\{ \varepsilon (1 - \|a\|_{\infty} \overline{h}) - 10 \|a\|_{\infty} \eta \overline{l_{\alpha}} - \lambda B_1 - \frac{3\overline{h_{\alpha}} \|a\|_{\infty} \mu}{2} \right\} \|\nabla u(t)\|_2^2 \\ - \varepsilon \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 - \frac{1}{2} \left[ \gamma - \frac{\varepsilon \overline{h}}{2\delta_2} - \lambda B_2 - \frac{\mu}{2} \right] \int_{\Omega} a(x) (h \square \nabla u)(t) dx \\ - \left( \eta \left( 1 - \frac{\overline{l_{\alpha}}}{2\delta_3} \right) - \frac{1}{2} - \frac{3C_p^2 \|a\|_{\infty} \overline{l_{\alpha}} \lambda}{4h_0 a_0} \right) \int_{\Omega} a(x) (l \square \nabla u)(t) dx \\ - \frac{\eta \alpha}{2} \Phi_2(t) - \alpha \mu \Psi_2(t), \text{ pour tout } t \geq 0 \end{array} \right. \quad (4.56)$$

**Preuve.** Une combinaison de (4.28), (4.34), (4.41) et (4.52) impliquent (4.56). En utilisant

les lemmes précédents, nous donnons maintenant la preuve de notre résultat principal.

**Preuve du Théorème 4.1.** L'inégalité (4.56) peut être écrite sous la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d\mathcal{L}(t)}{dt}(t) \leq -C_1 \|u_t(t)\|_2^2 - C_2 \|v_t(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ -C_3 \|\nabla u(t)\|_2^2 - C_4 \|\nabla_T v(t)\|_{\Gamma_1}^2 \\ -C_5 \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx - C_6 \Phi_2(t) - C_7 \Psi_2(t), \end{array} \right. \quad (4.57)$$

où,

$$\left\{ \begin{array}{l} C_1 = \left\{ \frac{\lambda h_0 a_0}{3} - \frac{3\varepsilon}{2} \right\}, \\ C_2 = \left\{ 1 - \frac{3\varepsilon}{2} \right\}, \\ C_3 = \left\{ \varepsilon (1 - \|a\|_{\infty} \bar{h}) - 10 \|a\|_{\infty} \eta \bar{l}_{\alpha} - \lambda B_1 - \frac{3\bar{h}_{\alpha} \|a\|_{\infty} \mu}{2} \right\}, \\ C_4 = \varepsilon, \\ C_5 = \frac{1}{2} \left[ \gamma - \frac{\varepsilon \bar{h}}{2\delta_2} - 2\lambda B_2 - \mu \right], \\ C_6 = \left( \eta \left( 1 - \frac{\bar{l}_{\alpha}}{2\delta_3} \right) - \frac{1}{2} - \frac{3C_p^2 \|a\|_{\infty} \bar{l}_{\alpha} \lambda}{4h_0 a_0} \right), \\ C_7 = \frac{\eta \alpha}{2}, \\ C_8 = \alpha \mu. \end{array} \right.$$

Maintenant, nous commençons à sélectionner les différents paramètres pour que les coefficients  $C_1, C_2, C_3, C_5$  et  $C_6$  dans la partie droite de (4.57) soient positifs. D'abord, laissez-nous choisir  $\varepsilon$  assez petit pour que

$$\varepsilon < \min \left\{ \frac{2}{3}, \frac{2\lambda h_0 a_0}{6} \right\}.$$

Considérant que  $\bar{l}_\alpha, \lambda$  et  $\mu$  sont des petites constantes positives satisfaisant :

$$\begin{cases} \bar{l}_\alpha < \frac{\varepsilon(1-\|a\|_\infty \bar{h})}{10\|a\|_\infty \eta}, \\ \lambda < \frac{\varepsilon(1-\|a\|_\infty \bar{h}) - 10\|a\|_\infty \eta \bar{l}_\alpha}{B_1}. \end{cases}$$

Une fois que  $\bar{l}_\alpha$  et  $\lambda$  sont fixés, nous choisissons  $\mu$  si petit que

$$\mu < \frac{2 \{ \varepsilon (1 - \|a\|_\infty \bar{h}) - 10 \|a\|_\infty \eta \bar{l}_\alpha - \lambda B_1 \}}{3 \|a\|_\infty \bar{h}_\alpha}.$$

Enfin, nous sélectionnons  $\gamma$  assez grand pour que

$$C_5 = \frac{1}{2} \left\{ \gamma - \frac{\varepsilon \bar{h}}{2\delta_2} - 2\lambda B_2 - \mu \right\} > 0$$

et nous prenons  $\delta_3 = \bar{l}_\alpha$ . Ceux-ci impliquent tous les coefficients  $C_i, i = 1, \dots, 8$ , dans le côté droit de (4.45) positif. Donc,

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt}(t) \leq -C \left[ E(t) + \Phi_2(t) + \int_{\Omega} a(x)(h \square \nabla u)(t) dx + \Psi_2(t) \right],$$

pour une certaine constante positive  $C$ . Maintenant, du côté droit de la relation (4.57), nous

trouvons

$$\frac{d\mathcal{L}(t)}{dt}(t) \leq -\frac{C}{\alpha_4}\mathcal{L}(t) = -\beta\mathcal{L}(t).$$

En intégrant sur  $(0, t)$ , nous concluons que

$$\mathcal{L}(t) \leq \mathcal{L}(0) \exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

En utilisant l'inégalité (4.38), on en déduit :

$$E(t) \leq \frac{\mathcal{L}(0)}{\alpha_3} \exp(-\beta t), \quad t \geq t_0 \geq 0.$$

La preuve du théorème 4.1 est maintenant terminée. ■

# Conclusion et perspectives

Cette thèse, comporte deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution.

– La démonstration est obtenue en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

La deuxième partie est consacrée à l'étude de la décroissance uniforme de l'équation des ondes avec des conditions aux limites dynamiques.

– La stabilisation est obtenue grâce à une dissipation frictionnelle sur le bord plus un terme mémoire localisé à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

On peut envisager comme **perspective** d'étudier :

– La stabilisation, dans le cas où la dissipation frictionnelle non linéaire  $(g(v_t))$  sur le bord avec des caractéristiques lentes à l'origine plus un terme mémoire localisé à l'intérieur du domaine  $\Omega$ .

– Un autre cas intéressant, c'est de généraliser le cas où le noyau  $h$  de notre problème vérifie la condition suivante :

$$h'(t) \leq -\zeta(t) H(h(t)), \quad \forall t \geq 0, \text{ où } H \text{ est une fonction convexe.}$$

– Etudier le problème de Ventcel couplé avec l'équation de la chaleur.

# Bibliographie

- [1] Aassila M. Cavalcanti M., M. and Soriano J. A., Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a starshaped domain, *SIAM J. Control and Optimization* 38(5) :1581-1602, 2000.
- [2] Adams R. A. and Fourier J. F., *Sobolev Spaces*, Academic Press, 2003.
- [3] Alabau-Boussouira F., Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim.*, 51(1), 61-105, 2005.
- [4] Alabau-Boussouira F. Cannarsa P. Sforza D., Decay estimates for second order evolution equations with memory, *J. Funct. Anal.* 254 :1342-1372, 2008.
- [5] Appleby J. A. D. Fabrizio M. Lazzari B. and Reynolds D. W., On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity. *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16 (10) : p. 1677-1694, 2006.
- [6] Bardos C. Lebeau. G. and Rauch J. J., Control and stabilisation de l'équation des ondes, Appendix II in J. L. Lions *contrôlabilité exacte des systèmes distribués*, *Collection RMA*, Vol. 8, Masson, Paris, 1988.
- [7] Bendali A. et Lemrabet K., The effect of a thin coating on the scattering of a timeharmonic wave for the Helmholtz equation. *SIAM J. Appl. Math.* 56 :1664-1693, 1996.

- [8] Berger M. Gostiaux B., Géométrie différentielle, Variétés, courbes et surfaces.
- [9] Berrimi S. and Messaoudi S. A., Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source. *Nonlinear Analysis-Theory Methods Applications*, 64 (10) : p. 2314-2331, 2006.
- [10] Berrimi S. and Messaoudi S. A., Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. *Elect J. Di . Eqns*, (88) : p. 1-10, 2004, 89.
- [11] Bey R. Heminna A., Lohéac J. P., Boundary stabilization of the linear system by a Lyapunov -type method, *Revista Matemática Complutense*, 16(2), 417-441, 2003.
- [12] Burq N., Controlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers. *Asymptot. Anal.*, 14(2) :157-191, 1997.
- [13] Burq N. and Zworski M., Geometric control in the presence of a black box. *J. Amer. Math. Soc.*, 17(2) :443-471, 2004.
- [14] Cannarsa P. Sforza D., integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels, *Journal of Di . Equa.* 250 : 4289-4335, 2011.
- [15] Cannarsa P. Sforza D., A stability result for a class of nonlinear integrodifferential equations with  $L^1$  kernels, *Appl. Math. (Warsaw)* 35 :395-430, 2008.
- [16] Cannarsa P. Sforza D., Global solutions of abstract semilinear parabolic equations with memory terms, *NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.* 10 :399-430, 2003.
- [17] Carleman T., Sur un problème d'unicité pur systèmes d'équations aux dérivées partielles a deux variables indépendantes. *Ark. Mat., Astr. Fys.*, 26(17) :9, 1939.
- [18] Cartan H., Cours de calcul différentiel. Hermann Paris.

- [19] Cavalcanti M. M., Aassila M. and Soriano J A., Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, *SIAM J. Control Opt.*, 38 (5) (2000) 1581-1602.
- [20] Cavalcanti M. M., Khemmoudj A. and Medjden M., Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition, *Jour. Math. Anal. Appl*, Volume 328, Issue 2, p. p. 900-930, 2007.
- [21] Cavalcanti M.M., Oquendo, H. P., Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, *SIAM J. Control Optim.*, 42, no. 4, 1310–1324, 2003.
- [22] Cavalcanti, M. M., Domingos Cavalcanti, V D., Lasiecka, I., Well posedness and optimal decay rates for wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *Journal of Differential Equations*, 236, 407-459, 2007.
- [23] Cavalcanti, M. M., Lasiecka I, Toundykov D., Geometrically constrained stabilisation of wave equations with Wentzell boundary conditions, *Appl. Anal. First*, 126, 2012.
- [24] Cavalcanti, M. M., Lasiecka I, Toundykov D., Wave equation with damping affecting only a subset of static wentzell boundary is uniformly stable, *Amer. Math. Soc.*, 00029947, 05583-8. 2012.
- [25] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Ferreira, J., Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping., *Math. Meth. Appl. Sci.*, 24 :1043–1053, 2003.
- [26] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N., Introduçao a teoria das distribui çoes e aos espaços de Sobolev, Maring a : Eduem, 2009.

- [27] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N., Ferreira J., Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping, *Math. Methods Appl. Sci.* 24 :1043-1053, 2001.
- [28] Cavalcanti M. M., Cavalcanti M M, Domingos Cavalcanti V N., Prates Filho J S, and Soriano J A, Domingos Cavalcanti V N and Martinez P, General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems. *Nonlinear Anal.*, 68 (1) : p. 177-193, 2008.
- [29] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Prates Filho J S, and Soriano J A., Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. *Di . Integ. Eqs.*, 14 (1) : p. 85-116, 2001. 90
- [30] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Soriano J A., Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, *Electron. J. Differential Equations* 44 : 1-14, 2002.
- [31] Cavalcanti M. M, Oquendo H P., Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, *SIAM J. Control Optim.* 42 (4) : 1310-1324, 2003.
- [32] Cavalcanti M. M., Domingos Cavalcanti V N, Ryuichi Fukuoka and Daniel Toundykov., Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions, *J. Evol. Equ.* 9 :143-169, 2009.
- [33] Chai, S., Guo, Y., Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory, *Diff. and Integral Equations*, Volume 17, Num. 5-6, pp. 669-680, 2004.
- [34] Chen A., Energy decay estimates and exact boundary value controlability for the wave equation in a bounded domain, *J. Math, pures, Appl.* 58, 249-274, 1979.

- [35] Chouli M., Une introduction aux problèmes inverses elliptiques et paraboliques, Université Paul Verlaine-Metz, Ile de Saulcy, 57045 Metz cedex, France. ISSN 1154-483, ISBN 978-642-02459-3, Springer Dordrecht Heidelberg London New york.
- [36] Clark M. R., *Existence of solutions for a nonlinear hyperbolic-parabolic equation in a non-cylinder domain*, Internat. J. Math. et Math. Sci. Vol. 19 No 1 (1996) 151-160.
- [37] Dafermos C. M., Asymptotic stability in viscoelasticity, Arch. Ration. Mech. Anal. 37 : 297-308, 1970.
- [38] Dafermos C. M., On abstract Volterra equation with applications to linear viscoeladticity, J. Differ. Equations 7 : 554-569, 1970.
- [39] DO CARMO M., Differential Geometry of Curves and Surfaces. New Jersey : Prentice Hall, 1976.
- [40] Engler H., Weak solutions of a class of quasilinear hyperbolic integrodifferential equations describing viscoelastic materials, Arch. Rat. Mech. Anal., 113 (1991), 1-38.
- [41] Evans L. C., Partial Differential Equations. 1998, Graduate Studies in Mathematics, AMS. 91.
- [42] Fabrizio M. and Morro A., "Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity", SIAM Stud. Appl. Math., Philadelphia 1992.
- [43] Fabrizio M. Giorgi C., Pata V., A new approach to equations with memory, Arch. Ration. Mech. Anal. 198 : 189-232, (2010).
- [44] Fabrizio M. and Polidoro S., Asymptotic decay for some diferential systems with fading memory. Appl. Anal., 81 (6) : p. 1245-1264, 2002.

- [45] Fattorini H. O., Infinite-dimensional optimization and control theory, volume 62 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [46] Fernandez-Cara E. and Zuazua E., The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case. Adv. Differential Equations, 5(4-6) :465-514, 2000.
- [47] Fourier, N., Lasiecka I., Regularity and stability of a wave equation with a strong damping and dynamic boundary conditions, Evolution equations and control theory Volume 2, Number 4, December 2013.
- [48] Fujita H. and Kato T., On the Navier-Stokes initial value problem I, Arch. Rational Mech. Anal, 16 : pp. 269-315, 1964.
- [49] Fursikov A. V., and Imanuvilov O. Y., Controllability of evolution equations, volume 34 of Lecture Notes Series. Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [50] Georgiev V. and Todorova G., *Existence of solutions of the wave equation with nonlinear damping and source terms*, J. Diff. Eqns.109 12 (1994), 295-308.
- [51] Ghen A., A note on the boundary stabilization of the wave equation, S.I.A.M. J. Control. opt, 19, 106-113, 1981.
- [52] Gripenberg G. Londen S. O., Staffans O J., Volterra Integral and Functional Equations, Encyclopedia Math. Appl., vol. 34, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [53] Graber P.J., Lasiecka I., Analyticity and Gevrey class regularity for a strongly damped wave equation with hyperbolic dynamic boundary conditions, Semigroup Forum, DOI 10.1007/s00233-013-9534-3, 2013.

- [54] Haraux A., Quelques propriétés des séries lacunaires utiles dans l'étude des vibrations élastiques. In *Nonlinear partial differential equations and their applications*. Collège de France Seminar, Vol. XII (Paris, 1991-1993), volume 302 of Pitman Res. Notes Math. Ser., pages 113-124. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [55] Hrusa W. J., Nohel J A., The Cauchy problem in one-dimensional nonlinear viscoelasticity, *J. Differential Equations* 59 :388-412, 1985.
- [56] Heminna, A., Boundary stabilization of Ventcel problems, *ESAIM, Control Optim. Calc. Var.*, 5, 591-622, 2000.
- [57] Heminna, A. Exact controllability of the linear elasticity system with evolutive Ventcel conditions, *Port. Math.*, 58(3), 271-315, 2001.
- [58] Heminna, A., Contrôlabilité exacte et stabilisation frontière de divers problèmes aux limites modélisant des jonctions de multi structures, thèse, U.S.T.H.B, Alger .2001
- [59] Hannsgen, K .B and Wheeler R. L., Behavior of the solutions of a Volterra equation as a parameter tends to infinity, *J. Integral Eqs.*, 7 (1984), 229-237.
- [60] Hrusa W. J. and Renardy M., A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, *SIAM J. Math. Anal.*, 19 (1988),257-269.
- [61] Hrusa W. J., Global existence and asymptotic stability for a nonlinear hyperbolic Volterra equation with large initial data, *SIAM J. Math Anal.*, 16 (1985), 110-134.
- [62] Hrusa W. J. and Renardy M., On wave propagation in linear viscoelasticity, *Quart. Appl. Math.*, 43 (1985), 237-254.
- [63] Hrusa W. J. and Renardy M., On a class of quasilinear partial integrodifferential equations with singular kernels, *J. Diff. Eqs.*, 64 (1986), 195-220.

- [64] Hrusa W. J. and Renardy M., A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, *SIAM J. Math. Anal.*, 19 (1988) 257-269.
- [65] Ingham A. E., Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Math. Z.*, 41(1) : 367-379, 1936.
- [66] Khac Khoan Vo., *Distributions , Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles, Tome I* Vuibert, Paris.
- [67] Khac Khoan Vo., *Distributions , Analyse de Fourier, Opérateurs aux dérivées partielles, Tome II* Vuibert, Paris.
- [68] Khemmoudj A., Medjden M., Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy-Ventcel Problem, *Bol. Soc. Paran. Mat.*, 22(2), 97-116, 2004.
- [69] Khemmoudj A., Seghour L., Exponential stabilization of a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions, *Nonlin. Differ. Equat. and Appli. NoDEA*, 22, 1259-1286, 2015.
- [70] Khemmoudj A., Aries M. S., Stabilisation of a wave equation with localised memory term and boundary frictional damping, *International Journal of Control*, DOI : 10.1080/00207179.2018.1438669, 2018.
- [71] Khemmoudj A., *Stabilisation de quelques Problèmes aux limites non linéaires. Thèse*, USTHB, Alger 2007.
- [72] Kawashima S., Global solutions to the equation of viscoelasticity with fading memory, *J. Differential Equations* 101 : 388-420, 1993. 92.
- [73] Komornik V., *Exact controllability and stabilization. RAM : Research in Applied Mathematics*. Masson, Paris, 1994. The multiplier method.

- [74] Komornik V. and Loreti P., Fourier series in control theory. Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2005.
- [75] Lagnese J., Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, J. Di , Equations, 50 : 163-182, 1983.
- [76] Lasiecka I. and Triggiani R., Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories. I, volume 74 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Abstract parabolic systems.
- [77] Lasiecka I. and Triggiani R., Uniform exponential decay in a bounded region with  $L^2(0, T, L^2(\Sigma))$  feedback control in the Dirichlet boundary conditions, J. Di , Equations, 66 :1340-390, 1987.
- [78] Lasiecka I. and Triggiani R., and Yao P. F., Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term, Nonlinear Analysis Theory, Methods and Applications 30(1) : 111-122, 1997. Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysis.
- [79] Lasiecka I. Tataru D., Uniform boundary stabilization of semilinear wave equation with nonlinear boundary damping, *Differential and integral Equations*, 6, 507-533, 1993.
- [80] Lasiecka I. and Triggiani R. and Yao P. F., Inverse/Observability Estimates for Second-Ordre Hyperbolic Equations with Variable Coefficients.J. Math. Anal. Appl. 235 : no. 1, 13-57, 1999.
- [81] Lasiecka I. Triggiani R., Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions, *Appli. Math. Optim.*, 25, 189-124, 1992.

- [82] Lasiecka I. Triggiani R., Yao P. F., Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term *Nonlinear Analysis Theory, Methods and Application*, 30 (1), 111-122. Proc. 2nd World Congress of Nonlinear Analysts, 1997.
- [83] Lasiecka I. Triggiani R., Yao, P. F., Inverse/Observability Estimates for Second-Ordre Hyperbolic Equations with Variable Coefficients, *Jour. Math. Anal. Appl.*, 235, no. 1, 13-57.1999.
- [84] Lax P. D. Moraetz C. S., Phillips R. S., Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of star-shaped obstacle, *Appl. Math*, vol 16, 477-489, 1963.
- [85] Lebeau G. and Robbiano L., Stabilisation de l'équation des ondes par le bord. *Duke Math. J.*, 86(3) :465-491, 1997. 93.
- [86] Lemrabet K., Problème aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier. *C. R. Acad. Sci. Paris S er. I Math.* 15 : 531-534, 1985.
- [87] Lemrabet K., Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers. Thèse, USTHB, Alger (1987).
- [88] Lemrabet K., Problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de  $\mathbb{R}^3$ . *C. R. Acad. Sci. Paris S er. I Math.* 304 : 151-154, 1987.
- [89] Lemrabet K. et Teniou D. E., Contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes avec conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel, Publication de l'institut de Math eematiques, U.S.T.H.B.
- [90] Lemrabet K. and Teniou D. E., Un problème d'évolution de type Ventcel. (an evolution problem of Ventcel type), *Rev. Maghreb. Math.* 1(1) : 15-29, 1992.

- [91] Levine H. A., *Instability and nonexistence of global solutions to nonlinear wave equations of the forme  $Pu_{tt} = -Au + \mathcal{F}(u)$* , Trans. Amer. Math.Soc. 192 (1974), 1-21.
- [92] Levine H. A., Pucci P. and Serrin J., *Global existence and global non existence of solutions of the Cauchy problem for a nonlinearly damped wave equation*, to appear on J. Math. Anal. Appl.
- [93] Lions J. L., *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. Tome 1*, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées [Research in Applied Mathematics]*. Masson, Paris, 1988.
- [94] Lions J. L., *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems*. SIAM Rev., 30(1) :1-68, 1988.
- [95] Lions J. L., *Controlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, tome 2*, Masson, 1988b.
- [96] Lions J. L., Magenes E., *Non homogeneous boundary value problem and applications Volume I*, Springer Verlag, Berlin Heidelberg, New York 1972.
- [97] Liu K. Liu Z. and Rao B., *Exponential stability of an abstract nondissipative linear system*. SIAM J. Control Optim., 40(1) :149-165, 2001..
- [98] Li C, Xiao, T. J., *A note on the IBVP for wave equations with dynamic boundary conditions*, *Boundary Value Problems*, 2016 :34 DOI 10.1186/s13661-016-0549-z.
- [99] Littman W. and Markus L., *Stabilization of a hybrid system of elasticity by feedback boundary damping*, *Annali di Matematica Pura ed Applicata*, 152 (1988), 281-330, 1988b.
- [100] Littman W. and Liu B., *On the spectral properties and stabilization of acoustic ow*, SIAM J. Appl. Math., 59, 17-34, 1999.

- [101] Littman W. and Markus L., Exact boundary controllability of a hybrid system of elasticity, *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 103 (1988), 193-236, 1988a.
- [102] Liu, K., Localy distributed control and damping for conservative systems, *SIAM J. Control and Optimization*, 35(5), 1574-1590, 1997.
- [103] Londen S. O., An existence result for a Volterra equation in a Banach space, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 235 (1978), 285-304.
- [104] Medeiros L. A., Milla Miranda M., Espaços de Sobolev (iniciação aos problemas el pticos nao homogeneos). Rio de Janeiro : IM-UFRJ, 2000.
- [105] Medjden M., Tatar N. E., Asymptotic behavior for a viscoelastic problem with not necessarily decreasing kernel, *Applied mathematics and Computation*, 167, 1221-1235, 2005.
- [106] Medjden M. and Tatar N. E., On the wave equation with a temporal nonlocal term and a weak dissipation, *Dynamic Systems and Applications* December 2007, Volume16, Number 4.
- [107] Messaoudi S. A. and Mustafa M. I., On convexity for energy decay rates of a viscoelastic equation with boundary feedback. *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 72 : p. 3602-3611, 2010. 94.
- [108] Messaoudi S. A. and Tatar N. E., Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30 (6) : p. 665-680, 2007.
- [109] Messaoudi S. A. and Tatar N. E., Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation. *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 68 (4) : p. 785-793, 2008.

- [110] Meurer T. and Kugi A., Tracking control design for a wave equation with dynamic boundary conditions modeling a piezoelectric stack actuator. *Int. J. Robust. Nonlinear Control*, 21 : 542- 562, 2011.
- [111] Nicaise S., Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications. *Rend. Mat. Appl. (7)*, 23(1) :83-116, 2003.
- [112] Nicaise S. and Laoubi K., Polynomial stabilization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions. *Math. Nachr.* 283, No. 10 (2010).
- [113] Miller L., Controllability cost of conservative systems : resolvent condition and transmutation. *J. Funct. Anal.*, 218(2) :425-444, 2005.
- [114] Milota J. J., Nečas and Šverák V, On weak solutions to a viscoelasticity model, *Comment. Math. Univ. Carolinae*, 31 No 3 (1990), 557-565.
- [115] Moraetz C.S., Exponential decay of solutions of the wave equation, *Comm. Pure. Appl. Math*, vol 19 :539-444, 1966.
- [116] Nohel J. A, Shea D. F., Frequency domain methods for Volterra equations, *Adv. Math.* 22 : 278-304, (1976).
- [117] Park J. Y., Ha T. G., Well-posedness and uniform decay rates for the Klein-Gordon equation with damping term and acoustic boundary conditions. *J. Math. Phys.* ;50 :013506. doi :10.1063/1.3040185, 2009.
- [118] Pata V., Stability and exponential stability in linear viscoelasticity. *Milan Journal of Mathematics*, 77 (1) : p. 333-360, 2009.
- [119] Pata V. and Zucchi A., Attractors for a damped hyperbolic equation with linear memory, *Adv. Math. Sci. Appl.*, 11 (2001) 505-529.

- [120] Pruss J., *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monogr. Math., vol. 87, Birkhauser Verlag, Basel, 1993.
- [121] Ramdani K. Takahashi T. Tenenbaum G. and Tucsnak M. A., spectral approach for the exact observability of infinite-dimensional systems with skew-adjoint generator. *J. Funct. Anal.*, 226(1) :193-229, 2005.
- [122] Renardy M. Hrusa W. J. and Nohel J. A., "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics No. 35*, John Wiley and Sons, New York 1987.
- [123] Renardy M., Some remarks on the propagation and non-propagation of discontinuities in linearly viscoelastic liquids, *viscoelastic liquids*, *Rheol. Acta*, 21 (1982), 251-254.
- [124] Renardy M., Coercive estimates and existence of solutions for a model of one-dimensional viscoelasticity with a nonintegrable memory function, *J. Integral Eqs. Appl.*, 1 (1988), 7-16.
- [125] Renardy M., Hrusa W. J. and Nohel J. A., "Mathematical Problems in Viscoelasticity", in *Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics No. 35*, John Wiley and Sons, New York 1987.
- [126] Rudin W., *Analyse réelle et complexe*. Masson. 1978.
- [127] Russel D. L., Exact boundary value controllability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in *differential games and control theory*, Raxin. Liu and Sternberg, Eds, Maeruel Dekker Inc, New York 1974.95.
- [128] Riverra Munoz, J. E., *Asymptotic behavior in linear viscoelasticity*, *Quart. Appl. Math.*, III(4) (1994), 629-648.

- [129] Russell D. L., Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *SIAM Rev.*, 20(4) :639-739, 1978.
- [130] Samarsky A. et Andreev V., *Methodes aux differences pour equations elliptiques*. Editions de Moscou (1978).
- [131] Simon J. Compact sets in the space  $L^p(0, T; B)$ , *Ann. Mat. Pura Appl.* (4) CXLVI, 65-96, 1987.
- [132] Staffans O. J., Positive definite measures with applications to a Volterra equation, *Trans. Amer. Math. Soc.* 218 : 219- 237, 1976.
- [133] Staffans O. J., On a nonlinear hyperbolic Volterra equation, *SIAM J. Math. Anal.* 11 :793-812, 1980.
- [134] Todorova G., *Cauchy problem for a nonlinear wave equation with nonlinear damping and source terms*, *C. R. Acad. Sci. Paris* (1998), 191-196.
- [135] Wentzell (Ventcel) A. D., On boundary conditions for multidimensional diffusion processes. *Theor. Probab. Appl.* 4. p 164-177, 1959.
- [136] Wilcox C., The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary, *Amer. Math. Soc. Not. Abstract* 564-20, Voc 6, 1959.
- [137] Yao P. F., On the observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients, *SIAM J. Contro. Optim.*, 37, 1568-1599, 1999.
- [138] You Y., Energy decay and exact controllability for Petrovsky equation in a bounded domain, *Advances in Appli. Math.*, 11, 372-388, 1990.
- [139] Zuazua E., *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, *Commun. Partial Differential Equations*, 15(2), 205-235, 1990.

- [140] Zuazua E., Some problems and results on the controllability of partial differential equations. In European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996), volume 169 of Progr. Math., pages 276-311. Birkhauser, Basel, 1998.
- [141] Zuazua E., Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations. Discrete Contin. Dyn. Syst., 8(2) :469-513, 2002. Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999).