N° D'ordre : 13/2019-C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne

Faculté de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du diplôme de Docteur

En MATHEMATIQUES

Spécialité : Equations aux Dérivées Partielles et applications

Par : **BENABBAS Imen**

Sujet

Contrôle pour des problèmes d'évolution avec conditions aux limites de Ventcel.

Soutenue publiquement le 29/04/2019, devant le jury composé de :

Mme O. Zair	Professeur, à l'USTHB	Présidente
Mr D. E. Teniou	Professeur, à l'USTHB	Directeur de thèse
Mr A. Khemmoudj	Professeur, à l'USTHB	Examinateur
Mr S. E. Rebiai	Professeur, à l'U. de Batna	Examinateur
Mr H. Ramoul	Maître de conférences /A, à l'U. de Khenchla	Examinateur

Remerciements

Mes tous premiers remerciements vont à mon directeur de thèse Pr. Djamel Eddine Teniou, sans qui ce travail n'aurait jamais vu le jour. Il m'était vraiment un honneur d'avoir travaillé avec lui. Je suis heureuse que mes premiers pas dans le vaste domaine de la recherche scientifique soient à ses côtés. J'ai beaucoup appris, au cours de ces trois années, sur la théorie du contrôle des équations aux dérivées partielles. Un domaine qui ne m'était guère familier avant et je serai pour toujours reconnaissante à mon encadreur de m'y avoir initiée. Je le remercie pour sa disponibilité, sa patience, sa sollicitude, les conseils qu'il m'a prodigué et son sens de l'humour pendant nos séances de travail. J'ai tellement bénéficié de son expérience et de ses connaissances variées en mathématiques. J'avoue que je suis impressionnée par sa capacité à répondre à toutes mes questions. Je le remercie particulièrement d'avoir pris la peine de relire et de corriger à plusieurs reprises mon manuscrit. Ses contributions ont aidé à améliorer de façon substantielle la qualité de ce travail que ce soit au niveau du fond ou de la forme.

Je remercie infiniment Ouahiba Zair qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Je tiens également à remercier Ammar Khemmoudj, Salah-Eddine Rebiai et Hichem Ramoul d'avoir accepté de prendre de leur temps pour examiner mon travail et de faire partie du jury.

Un grand merci s'adresse bien évidemment à mes parents pour leur amour, leur patience et leur confiance. Je ne serais pas où je suis aujourd'hui sans leur encouragement et leur soutien aux moments difficiles. J'éprouve une immense gratitude pour leur simple présence dans ma vie. Enfin, je n'oublie pas de remercier mes soeurs et mes amis pour leur affection et leur aide.

Table des matières

Introduction générale

Ce travail porte sur l'étude de la contrôlabilité d'un système d'évolution régi par l'équation des ondes et des conditions aux limites de type Dirichlet sur une partie de la frontière et de type Ventcel dynamique sur l'autre partie. Ces équations traduisent les vibrations d'un corps élastique recouvert d'une couche mince de haute rigidité. En particulier, en deux dimensions, il s'agit d'une membrane portant une masse linéaire sur sa frontière. D'un point de vue pratique, survenues grâce à la prise en compte des effets des énergies cinétique et potentielle sur le bord, les conditions peu communes de Ventcel se révèlent plus proche de la réalité physique que les conditions classiques. Il est trop idéal de supposer la frontière insensible aux mouvements de l'intérieur.

Etant donné $T > 0$, en dimension n, et en supposant que le domaine est un parallélépipède rectangle, ce problème s'écrit

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T), \\ v'' - \Delta_T v + \partial_\nu v = 0 & \text{sur } \Gamma_V \times (0,T), \\ v = w_i & \text{sur } \Gamma_i \times (0,T),\ i = 1,\dots,n, \\ v = w_S & \text{sur } S \times (0,T), \\ v = 0 & \text{sur } [\Gamma \backslash (\Gamma_V \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i) \cup S)] \times (0,T), \\ v(x,0) = v_0(x),\ v'(x,0) = v_1(x), & x \in \Omega, \\ v(x,0) = v_2(x),\ v'(x,0) = v_3(x), & x \in \Gamma_V, \end{cases} \tag{1}$$

où Ω est le produit des intervalles $(0, l_i)$, $i = 1, \dots, n$, et Γ_i, $i = 1, \dots, n$, Γ_V S sont les parties suivantes de la frontière Γ :

$$\Gamma_i = \prod_{j=1}^{i-1} (0, l_j) \times \{0\} \times \prod_{j=i+1}^{n} (0, l_j),\ i = 1, \dots, n,$$

$$\Gamma_V = \prod_{j=1}^{n-1} (0, l_j) \times \{l_n\},$$

$$S = \overline{\Gamma}_V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Gamma}_i \right).$$

De plus, Δ_T désigne le laplacien tangentiel sur Γ_V, ∇_T le gradient tangentiel et ∂_ν la dérivée normale. C'est la deuxième équation que l'on appelle condition dynamique de Ventcel.

Ce problème est bien posé dans le cadre fonctionnel adopté dans cette thèse. L'existence et la régularité des solutions des systèmes aux conditions de type Ventcel ont été traitées dans de nombreux ouvrages. Nous en citons les travaux pionniers de K. Lemrabet [35, 36], et en particulier son article [37] avec D. Teniou où ils ont pu montrer le caractère bien posé de l'équation des ondes avec la condition dynamique de Ventcel dans une géométrie rectangulaire. Ils ont même exhibé comment ces équations découlent comme limite d'une famille de problèmes de transmission dépendant d'un paramètre $\varepsilon > 0$. Un autre aspect de la modélisation, qui est la dépendance continue de la solution des données du problème, a été abordé dans [10], notamment lorsque l'on considère l'équation des ondes ainsi que la condition de Ventcel avec des coefficients variables. Ces références s'intéressent toutes aux équations linéaires. Dans le cas non linéaire, nous trouvons les travaux récents de E. Vitillaro [59, 60] ; dans lesquels, il examine, moyennant la théorie des semi-groupes, l'existence des solutions de l'équation des ondes avec la condition de Ventcel dynamique où toutes les deux sont non linéaires.

Notre objectif principal est plutôt la contrôlabilité du système décrit plus haut. Plus précisément, nous essayons de répondre à la question suivante : est-il possible d'influencer la dynamique de ce système en l'amenant de son état initial à un état final fixé au préalable ? Avec les systèmes mécaniques comme le nôtre, il est souvent question d'atteindre l'équilibre en un temps fini.

En termes mathématiques, cette question se formule comme suit :
pour toute donnée initiale (v_0, v_1, v_2, v_3) dans un espace de Hilbert approprié, existe-il des fonctions contrôle $w_i, i = 1, \ldots, n$, w_S telles que l'on aura

$$\begin{aligned} v(x,T) &= v'(x,T) = 0 \text{ dans } \Omega, \\ v(x,T) &= v'(x,T) = 0 \text{ sur } \Gamma_V ? \end{aligned} \tag{2}$$

Masrour [44] a considéré, dans des polygones et des polyèdres, l'équation des ondes complétée par des conditions mixtes de Dirichlet et de Ventcel dynamique. Combinant la méthode HUM de J.-l. Lions [42], [43] avec les techniques des multiplicateurs, il a montré la contrôlabilité par le bord avec la condition géométrique usuelle exigée par la méthode des multiplicateurs. Toutefois, il n'a pas précisé si la région contrôlée pourrait être soumise juste à un seul type de condition soit Dirichlet ou Ventcel.

Par ailleurs, en se plaçant dans un domaine régulier, les auteurs de [39] ont appliqué ces mêmes techniques pour retrouver la contrôlabilité frontière de ce problème ; cependant à la différence de Masrour, le bord est divisée, en deux parties disjointes, par la condition géométrique de Lions [42] et le système est contrôlé à travers la partie de Ventcel, ce qui évite le problème des singularités.

Une récente contribution bien intéressante est due à Gal et Tebou [18]. Dans laquelle ils élaborent, avec une partition convenable de la frontière une nouvelle estimation de Carleman destinée à mener à la contrôlabilité d'un problème similaire à celui traité dans les références citées ci-dessus. La différence étant la présence des potentiels $V_\Omega u$ et $V_\Gamma u_\Gamma$ respectivement dans les équations des ondes et de Ventcel. Cette inégalité de Carleman constitue une amélioration de celle existant déjà dans le cas où la condition de Dirichlet est imposée sur tout le bord. La contrôlabilité est assurée à l'aide de deux contrôles, un sur la partie Dirichlet et un autre sur la partie Ventcel, et c'est l'opinion des auteurs qu'ils sont également indispensables.

Quant à la stabilisation de ce système d'évolution, elle fait l'objet de plusieurs études dont nous mentionnons à titre d'exemple, l'article [47] où la structure du domaine (un carré) a rendu possible l'usage des outils de l'analyse de Fourier pour parvenir à la stabilité polynomiale ; et [40] où une seule loi de feedback, en terme de la vitesse, agissant sur la partie Ventcel a fait que le système est fortement stable. D'autre résultats concernant la stabilité se trouvent dans [8], [9], [38].

Sans prétendre tout savoir sur le sujet, nous avons constaté lors de notre recherche bibliographique que les efforts déployés sur la stabilité de tels systèmes sont bien plus que ceux sur la contrôlabilité. Ce qui, outre son intérêt pratique, nous donne une raison de plus de nous intéresser à ce problème et d'envisager d'autres approches de résolution.

La méthode des multiplicateurs et les inégalités de Carleman étant déjà explorées [39, 44, 18], nous choisissons la voie de l'analyse non harmonique qui est, du fait de la simplicité de notre géométrie, bien adaptée au problème considéré. Plus précisément, nous allons utiliser des théorèmes de type Ingham. Ce sont des inégalités trigonométriques qui généralisent l'identité de Parseval à des séries non harmoniques vérifiant une condition d'écart spectral. Depuis la première inégalité d'Ingham [23], plusieurs généralisations ont été développées et ont trouvé dans la théorie du contrôle un champ d'applications en plein essor [13, 29, 31, 30, 28, 27].

Le livre de Komornik et Loreti [26] en constitue une référence qui nous a été très utile. Les auteurs y rassemblent plusieurs variantes de l'inégalité d'Ingham et l'emploient par la suite pour obtenir l'observabilité notamment des équations des ondes et des plaques.

Une variante qui nous a particulièrement intéressée est celle de Mehrenberger [45], vu qu'elle a été conçue pour les produits d'intervalles dans une géométrie multidimensionnelle. Voulant utiliser l'inégalité d'Ingham, on se trouve confronté au fait que les valeurs propres pourraient être arbitrairement très proches, voire multiples. Mehrenberger surmonte cette difficulté en proposant une condition d'écart appropriée, et en faisant en sorte que l'on se débarasse de la partie de la série où il n'y a pas d'écart. Son théorème nous a servi de point de départ, cependant en tentant de l'appliquer au système (1), il s'est avéré que les suites de poids y intervenant ne nous convenaient pas. Une nouvelle adaptation s'imposait donc et elle constitue notre résulat principal 3.7. A l'instar de [45], cette nouvelle variante nous a permis d'établir l'observabilité frontière du système (1).

Il convient également de s'attarder sur les travaux [29, 31, 30], où les auteurs ont présenté une autre formulation de l'inégalité de Mehrenberger. Dans [31], l'observabilité interne de l'équation des ondes avec les conditions de Dirichlet et de Neumann s'ensuit de cette reformulation. Elle s'applique de même lorsqu'on combine des contrôles internes et des contrôles par le bord [29]. L'observation, dans ce cas, est réalisée sur des régions arbitrairement petites ne vérifiant plus la condition géométrique de Bardos-Lebeau-Rauch [1]. En outre, dans [30], komornik et Loreti ont même réussi à améliorer le temps de l'observation inhérent à l'inégalité de Mehrenberger.

Il importe de noter que le temps d'observation ainsi que la constante figurant dans l'inégalité d'Ingham peuvent être donnés explicitement. Toutefois, à ce jour personne n'a pu récupérer le temps optimal atteint, dans certaines situations, par la méthode des multiplicateurs. Ceci n'entame en rien la valeur de cette approche à en juger par la quantité des ouvrages qui y sont consacrés ; elle est flexible, simple, facile à implémenter et apporte des résultats intéressants.

Le résultat principal de cette thèse concerne la contrôlabilité exacte du système (1) par une action de type Dirichlet.
Nous introduisons les espaces de Hilbert

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega); u|_{\Gamma_D} = 0\right\},$$

$$\mathcal{Z} = \left\{(u_1, u_2) \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_0(\Gamma_V);\ u_2 = u_1|_{\Gamma_V}\right\},$$

$$\mathcal{Z}' = \text{ espace dual de } \mathcal{Z},$$

où Γ_V (resp. Γ_D) dénote la partie du Ventcel du bord (resp. la partie de Dirichlet).
En effet, nous montrons le théorème suivant

Théorème Principal. *Soient*

$$(v_0, v_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_V),\ (v_1, v_3) \in \mathcal{Z}'.$$

Alors, il existe $T_0 > 0$ et des fonctions de contrôle (w_1, w_2, w_S), de norme minimale dans $L^2(0,T; L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times \mathbb{R})$ tels que pour tout $T > T_0$ la solution $(v, v|_{\Gamma_V})$ de (1) atteint son état d'équilibre (2) au temps T.

Décrivons brièvement la démarche que nous allons suivre pour arriver à ce résultat.

D'abord, nous procédons par la célèbre méthode *Hilbert Uniqueness Method* de Lions [42], dont un point essentiel est de ramener le problème de contrôlabilité de (1) à l'observabilité de son adjoint. On entend par observabilité, la possibilité de déterminer de manière unique l'état de ce dernier à partir de mesures partielles. Ensuite, en tirant profit de la particularité de notre domaine, l'analyse spectrale du problème homogène nous permet d'exprimer explicitement sa solution en série de Fourier. Les inégalités d'Ingham existantes dans la littérature étant inadéquates, nous développons une nouvelle version de l'inégalité de Mehrenberger propice à notre situation. Avec laquelle nous parvenons à établir l'observabilité. Tout comme le théorème original de Mehrenberger, notre variante pourrait être reformulée de façon à donner davantage de résultats sur la contrôlabilité interne et interne-frontière.

Ce manuscrit comporte trois chapitres.

- Dans le premier chapitre, nous remontons à l'origine physique du problème étudié au cours de cette thèse. Nous reproduisons les équations régissant les vibrations à partir d'un principe de la physique mathématique : le principe de moindre action. Précisément, nous présentons une formulation introduite par Goldstein [19] qui fournit simultanément l'équation du mouvement et les conditions au bord. D'ailleurs, elle a également l'avantage d'aboutir aussi bien aux conditions non standards (Ventcel, cinétique) qu'aux conditions classiques. Nous discuterons à la fin de la signification physique de la condition dynamique de Ventcel.

- Dans le chapitre 2, nous revisitons des sujets en relation avec la thématique de ce travail. Nous nous focalisons surtout sur les notions auxquelles nous ferons appel dans le chapitre trois. Nous commençons par des théorèmes sur l'existence de solutions de deux problèmes abstraits, en s'attardant sur ceux relatifs aux opérateurs anti-adjoints. Nous présentons quelques notions de la théorie du contrôle en insistant sur la dualité entre la contrôlabilité et l'observabilité qui est à la base de la méthode HUM. Nous donnons aussi des éléments de la théorie spectrale qui nous permettent de représenter la solution en série de Fourier. Nous concluons ce chapitre avec trois techniques pour démontrer l'inégalité d'observabilité : la méthode des multiplicateurs, les estimations de Carleman et les inégalités d'Ingham, que nous fortifions par une application à l'observabilité de l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet.

- Le chapitre 3 recèle les résultats principaux de cette thèse. Nous montrons un théorème de type Ingham qui entraine en conséquence la contrôlabilité exacte du système (1). Nous le reformulons ensuite de telle sorte qu'il répond à d'autres questions de contrôlabilité. Il s'agit d'un papier intitulé : "*Observability of wave equation with Ventcel dynamic condition*" publié dans la revue "*Evolution equations and control theory*" avec mon directeur de thèse D. E. Teniou.

Chapitre 1

Dérivation et interprétation physique des équations du mouvement

1.1 Introduction

On se propose, dans ce premier chapitre, d'examiner de près la signification physique de la condition dynamique de Ventcel notamment lorsqu'elle accompagne l'équation des ondes. Bien que la modélisation puisse se faire aussi bien en trois dimensions, on se contente de la présenter en deux dimensions puisque c'est la situation où l'on va se placer par la suite. Plus précisément, on expose une nouvelle formulation due à G. Goldstein [19], dont découlera naturellement et simultanément l'équation des ondes ainsi que les conditions aux limites appropriées. Cette formulation repose essentiellement sur le principe variationnel de moindre action et l'observation qu'en réalité, les oscillations de l'intérieur d'un objet élastique pourraient éventuellement affecter sa frontière ; ce qui fait qu'une estimation rigoureuse de l'énergie doit compter la contribution du bord.

D'ordinaire, la modélisation d'un phénomène physique se fait en déduisant, d'abord, les équations décrivant l'évolution à l'intérieur du domaine ; ensuite des conditions aux limites viennent compléter le problème. Ces conditions au bord sont nécessaires pour avoir un problème bien posé, et généralement elles sont imposées ad hoc selon les propriétés physiques de la frontière.

Les conditions classiques (Dirichlet, Neumann et Robin) ne prennent pas en compte l'énergie cinétique du bord ; ce qui est raisonnable quand il n'y a pas de mouvement comme l'exprime la condition de Dirichlet homogène et constitue une approximation forte dans le cas contraire. D'ailleurs, même l'énergie potentielle du bord n'est prise en compte que dans la condition de Robin. Cependant, dans les situations réelles, il est fort possible que la frontière soit affectée par les vibrations de l'intérieur, auquel cas la description avec les conditions classiques peut s'avérer physiquement incorrecte.

Partant de ces constats, Goldstein [19] a eu l'idée de remédier à la formulation classique des équations du mouvement en incluant les énergies du bord dans l'expression de l'énergie totale d'un système. Ceci a débouché sur une nouvelle approche qui permet de récupérer aussi bien des conditions standards que des conditions nouvelles comme celles de Ventcel.

Enfin, il mérite d'attirer l'attention sur un autre article [14] aussi intéressant que celui de Goldstein, mais qui présente un point de vue différent. En fait, les auteurs y traitent le bord comme un système tout à fait indépendant de l'intérieur et attachent beaucoup d'importance à l'interaction bord-intérieur. Ceci est inspiré par le fait que les frontières d'un système mécanique sont souvent des interfaces minces qui assurent l'échange de l'énergie entre intérieur et extérieur et qui pourraient bien avoir des caractéristiques mécaniques différentes de celles de l'intérieur. Tout comme la formulation que l'on détaille dans ce chapitre, l'étude faite dans cet article conduit à tous types de conditions aux limites classiques ou non et la variété d'exemples illustratifs y figurant en est la preuve.

1.2 Description du problème

On se donne une membrane élastique vibrante. On suppose que les vibrations sont transversales et de faibles amplitudes et que les forces s'exerçant sur la membrane sont conservatives. On désigne par $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ le domaine borné, connexe, occupé par la membrane en état d'équilibre et par $\partial\Omega$ son contour de classe C^1.

On cherche à reproduire les équations décrivant l'évolution en temps de ce système à l'aide du principe variationnel de moindre action. Afin de formaliser mathématiquement ce problème, on introduit les notations suivantes :

dA : mesure de Lebesgue dans Ω i.e. $dA = dxdy$.

ds : élément d'arc sur $\partial\Omega$.

ω_1 (resp. ω_2) : fonction poids continue et strictement positive dans Ω (resp. sur $\partial\Omega$).

$d\mu = \omega_1 dA \otimes \omega_2 ds$.

$\rho(x, y)$: la densité superficielle de la membrane, supposée positive et bornée dans $\bar{\Omega}$.

$T(x, y)$: la tension au point (x, y).

$u(x, y, t)$: le déplacement de l'équilibre du point (x, y) au temps t.

$f(x,y,t)$: la densité des forces extérieures agissant sur la membrane Ω au point (x,y) au temps t.
$g(x,y,t)$: la densité des forces extérieures appliquées sur le bord $\partial\Omega$.

La dynamique de ce système est caractérisée par la quantité, appelée *action* et notée $\mathcal{S}$, définie par l'intégrale :

$$\mathcal{S} = \int_{t_0}^{t_1} (KE - PE)\, dt,\ 0 \le t_0 \le t_1 \le \infty. \tag{1.1}$$

où KE (resp. PE) dénote l'énergie cinétique du système (resp. l'énergie potentielle).

On sait que l'énergie cinétique s'écrit

$$KE = \frac{1}{2}\iint_{\bar{\Omega}} \rho u_t^2 d\mu = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} \rho u_t^2 \omega_1 dA + \frac{\gamma}{2}\int_{\partial\Omega} \rho u_t^2 \omega_2 ds \tag{1.2}$$

où $\gamma \in \{0,1\}$ est un paramètre permettant de compter ou pas la contribution de la frontière à l'énergie cinétique.

En revanche, l'énergie potentielle du système est la somme du travail nécessaire pour déplacer de l'équilibre la membrane et son bord, et de l'énergie potentielle due à l'effet des forces extérieures.

Soit ΔA un élément de surface en un point (x_0,y_0) i.e.

$$\Delta A = [x_0, x_0 + \Delta x] \times [y_0, y_0 + \Delta y].$$

Le travail nécessaire pour déformer ΔA est donné par le produit de la tension T et l'accroissement d'aire :

$$\begin{aligned}\Delta W = T(x_0 + \Delta x, & y_0 + \Delta y)\sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta u)^2}\sqrt{(\Delta y)^2 + (\Delta u)^2} \\ & - T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)(\Delta x)(\Delta y).\end{aligned}$$

En utilisant des développements de Taylor appropriés, on trouve que

$$\begin{aligned}\Delta W &= \frac{1}{2}T(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y)\left[\left(\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)^2 + \left(\frac{\Delta u}{\Delta y}\right)^2\right]\Delta x \Delta y + \dots \\ &= \frac{1}{2}T(x_0,y_0)[u_x^2(x_0,y_0,t) + u_y^2(x_0,y_0,t)]\Delta x \Delta y + \dots\end{aligned}$$

où les points de suspension désignent les termes d'ordre supérieur. Puisque les oscillations sont supposées petites, on tire que l'énergie de la déformation relative à Ω, que l'on note U_1, est donnée par

$$U_1 = \frac{1}{2}\iint_{\Omega} T(x,y)[u_x^2(x,y,t) + u_y^2(x,y,t)]\ dxdy \tag{1.3}$$

On désigne par U_2 l'énergie potentielle de déformation relative à la frontière $\partial\Omega$. Pour l'instant, on l'écrit sous la forme générale

$$U_2 = \int_{\partial\Omega} \phi(x, y, u, \partial_n u, \partial_\tau u, t) ds \tag{1.4}$$

où $\partial_n u$, $\partial_\tau u$ sont resp. la dérivée normale et tangentielle de u et ϕ est une fonction à préciser plus tard.

Soient U_3, U_4 les énergies potentielles correspondant aux forces extérieures agissant sur Ω et $\partial\Omega$, alors

$$U_3 = \iint_{\Omega} f(x, y, t) u(x, y, t) dx dy \tag{1.5}$$

$$U_4 = \int_{\partial\Omega} g(x, y, t) u(x, y, t) ds \tag{1.6}$$

Par conséquent, l'énergie potentielle du système vaut

$$PE = U_1 + U_2 + U_3 + U_4$$

Avant de passer à la dérivation des équations régissant l'évolution du système, il convient de faire quelques remarques.

Remarque 1.1. *1. Aucune hypothèse n'est faite sur la relation entre la densité superficielle de la membrane et celle de son bord. Elles pourraient bien être différentes. Ceci signifie que l'on n'exclut pas l'éventualité où la membrane et sa frontière soient constituées de matériaux différents.*

2. Lorsque $\gamma = 0$ (cf. (1.2)), la contribution du bord à l'énergie cinétique est négligée et on retrouvera par la suite les conditions aux limites classiques ; par ailleurs le choix $\gamma = 1$ conduit à de nouvelles conditions.

3. Il en sera de même pour la fonction ϕ (cf. (1.4)) dont le choix déterminera le comportement du bord de la membrane.

1.3 Principe de moindre action

Il est évident qu'à chaque configuration $u(t)$ de la membrane entre t_0 et t_1 correspond une action i.e. $\mathcal{S} = \mathcal{S}[u]$. Il s'agit donc de déterminer, en connaissant l'état initial $u(t_0)$ et l'état final $u(t_1)$, l'état réel du système dans l'intervalle $[t_0, t_1]$.

Le principe variationnel de moindre action affirme que la configuration effectivement prise $u(t)$ est celle qui rend l'action $\mathcal{S}$ extrémale, souvent minimale.

Tenant compte des équations (1.2)-(1.6), on a

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}[u] &= \int_{t_0}^{t_1} (KE - PE)dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1} \left[\iint_\Omega \rho u_t^2 \omega_1 dA\right] dt + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\gamma \int_{\partial\Omega} \rho u_t^2 \omega_2 ds\right] dt \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_\Omega T(u_x^2 + u_y^2) dA\right] dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\partial\Omega} \phi(x,y,u,\partial_n u, \partial_\tau u, t) ds\right] dt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1}\left[\iint_\Omega fu\; dA\right] dt - \int_{t_0}^{t_1}\left[\int_{\partial\Omega} gu\; ds\right] dt \\
&= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_\Omega [\rho u_t^2\omega_1 - T(u_x^2+u_y^2) - 2fu]\; dAdt \\
&+ \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega} [\gamma\rho u_t^2 \omega_2 - 2\phi(x,y,u,\partial_n u,\partial_\tau u, t) - 2gu]\; dsdt
\end{aligned}
$$

D'après la théorie du calcul des variations, on sait que si une fonction u réalise un minimum pour l'action alors la variation première $\delta\mathcal{S}[u]$ s'annule.

Considérons une variation de u, $u + \epsilon\xi$ où $\xi = \xi(x,y,t)$ est une fonction arbitraire et ϵ est un facteur qui contrôle l'ampleur de la variation. Alors, $\delta\mathcal{S}$ est la partie linéaire en ϵ de $\mathcal{S}[u+\epsilon\xi] - \mathcal{S}[u]$.

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}[u+\epsilon\xi] - \mathcal{S}[u] &= \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_\Omega [\rho(u+\epsilon\xi)_t^2\omega_1 - 2f(u+\epsilon\xi)]\; dAdt \\
&\quad - \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_\Omega T[(u+\epsilon\xi)_x^2 + (u+\epsilon\xi)_y^2]\; dAdt \\
&\quad + \frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega} [\gamma\rho(u+\epsilon\xi)_t^2\omega_2 - 2g(u+\epsilon\xi)\;]dsdt \\
&\quad - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega} \phi(x,y,u+\epsilon\xi, \partial_n(u+\epsilon\xi), \partial_\tau(u+\epsilon\xi), t)\; dsdt
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}[\rho u_t^2\omega_1 - T(u_x^2+u_y^2) - 2fu]\ dAdt\\
&-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\gamma\rho u_t^2\omega_2 - 2gu]\ dsdt\\
&+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\phi(x,y,u,\partial_n u,\partial_\tau u,t)\ dsdt.
\end{aligned}
$$

Donc,

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}[u+\epsilon\xi]-\mathcal{S}[u] = \epsilon &\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}[\rho u_t\xi_t\omega_1 - T(u_x\xi_x+u_y\xi_y) - f\xi]\ dAdt\\
&+\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\gamma\rho u_t\xi_t\omega_2 - g\xi]\ dsdt\\
&-\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_u\xi+\phi_{\partial_n u}\partial_n\xi+\phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau\xi]\ dsdt + o(\epsilon)
\end{aligned}
\tag{1.7}
$$

Si on choisit

$$
\omega_1(x,y)=\omega_2(x,y)=\frac{1}{T(x,y)},
$$

on aura

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{S}[u+\epsilon\xi]-\mathcal{S}[u] = \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\frac{\rho}{T}u_t\xi_t\ dAdt - \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}(T\nabla u.\nabla\xi)\ dAdt\\
&-\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}f\xi\ dAdt + \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\gamma\frac{\rho}{T}u_t\xi_t\ dsdt - \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_u+g]\ \xi\ dsdt\\
&-\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_{\partial_n u}\partial_n\xi+\phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau\xi]\ dsdt + o(\epsilon).
\end{aligned}
$$

En intégrant par parties le second terme et en utilisant l'identité $(pq)_r = pq_r + p_r q$, il s'ensuit

$$
\begin{aligned}
\mathcal{S}[u+\epsilon\xi]-\mathcal{S}[u] = \epsilon&\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\left[-\frac{\rho}{T}u_{tt}+\nabla.\ (T\nabla u)-f\right]\ \xi\ dAdt\\
&+\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\ dAdt + \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\left[-\gamma\frac{\rho}{T}u_{tt}-T\frac{\partial u}{\partial n}\right]\ \xi\ dsdt\\
&+\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\ dsdt - \epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_u+g]\ \xi\ dsdt\\
&-\epsilon\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_{\partial_n u}\partial_n\xi+\phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau\xi]\ dsdt + o(\epsilon),
\end{aligned}
$$

ce qui entraine que la variation première de $\mathcal{S}$ vaut

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[u] = &\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\left[-\frac{\rho}{T}u_{tt} + \nabla.\,(T\nabla u) - f\right]\,\xi\,dAdt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\,dAdt + \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\left[-\gamma\frac{\rho}{T}u_{tt} - T\frac{\partial u}{\partial n}\right]\xi\,dsdt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\,dsdt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_u + g]\,\xi\,dsdt\\ &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_{\partial_n u}\partial_n\xi + \phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau\xi]\,dsdt.\end{aligned} \tag{1.8}$$

La fonction u étant fixée en t_0 et t_1, on a

$$\xi(x,y,t_0) = \xi(x,y,t_1) = 0.$$

Ainsi l'application du théorème de Fubini donne

$$\begin{aligned}\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\,dx\,dy\,dt &= \iint_{\Omega}\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\,dt\,dx\,dy\\ &= \iint_{\Omega}\left[\frac{\rho}{T}u_t\xi\right]_{t_0}^{t_1}\,dx\,dy = 0.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Pareillement, on aura

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\frac{\partial}{\partial t}\left(\gamma\frac{\rho}{T}u_t\xi\right)\,ds\,dt = 0 \tag{1.10}$$

Tenant compte de ces deux égalités, (1.8) devient

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[u] = &\int_{t_0}^{t_1}\iint_{\Omega}\left[-\frac{\rho}{T}u_{tt} + \nabla.\,(T\nabla u) - f\right]\,\xi\,dAdt\\ &+\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\left[-\gamma\frac{\rho}{T}u_{tt} - T\frac{\partial u}{\partial n}\right]\xi\,dsdt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_u + g]\,\xi\,dsdt\\ &-\int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}[\phi_{\partial_n u}\partial_n\xi + \phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau\xi]\,dsdt.\end{aligned} \tag{1.11}$$

1.4 Mise en équations

On est maintenant en mesure d'obtenir les équations d'évolution cherchées. On rappelle que la solution $u(x,y,t)$ représentant la déformation de Ω

entre t_0 et t_1 est, d'après le principe de moindre action, celle pour laquelle l'action est minimale. En partant de ce point, on va trouver une condition nécessaire pour que u soit un point stationnaire de la fonctionnelle $\mathcal{S}$.

Supposons que $\delta\mathcal{S}[u] = 0$. Cela signifie que le membre de droite de l'équation (1.11) doit s'annuler pour toute fonction ξ. On considère d'abord celles satisfaisant

$$\xi(x, y, t) = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega,\ t_0 \leq t \leq t_1. \tag{1.12}$$

Alors, (1.11) se réduit à

$$\delta\mathcal{S}[u] = \int_{t_0}^{t_1} \iint_{\Omega} \left[-\frac{\rho}{T}u_{tt} + \nabla \cdot (T\nabla u) - f\right] \xi \; dx \; dy \; dt, \tag{1.13}$$

et comme l'intervalle $[t_0, t_1]$ et les fonctions ξ sont arbitraires, on trouve

$$u_{tt} = c^2 \nabla \cdot (T\nabla u) + \tilde{f} \text{ dans } \Omega, \tag{1.14}$$

avec $c^2(x, y) = \dfrac{T(x, y)}{\rho(x, y)}$ et $\tilde{f} = -\dfrac{fT}{\rho}$, qui est l'équation des ondes en deux dimensions.

On essaie maintenant de retrouver les conditions aux limites standards. En éliminant l'hypothèse (1.12) et en tenant compte de (1.14), (1.11) se réduit à

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[u] = &\int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} \left[-\gamma\frac{\rho}{T}u_{tt} - T\frac{\partial u}{\partial n}\right] \xi \; dsdt - \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} [\phi_u + g] \; \xi \; dsdt \\ &- \int_{t_0}^{t_1} \int_{\partial\Omega} [\phi_{\partial_n u}\partial_n \xi + \phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau \xi] \; dsdt.\end{aligned} \tag{1.15}$$

- **Condition de Neumann :**

  Supposons que $\gamma = 0$ et $\phi = 0$. Il en résulte alors que u doit satisfaire la condition de Neumann non homogène

  $$\frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{g} \text{ sur } \partial\Omega,$$

  où $\tilde{g} = -\dfrac{g}{T}$.

- **Condition de Robin :**

  Si on choisit cette fois $\gamma = 0$ et $\phi = \phi(u) = \dfrac{\sigma^2}{2}u^2$, on obtiendra de (1.15) que

  $$\frac{\partial u}{\partial n} + \omega^2 u = \tilde{g} \text{ sur } \partial\Omega,$$

  où $\omega^2 = \dfrac{\sigma^2}{T}$ et $\tilde{g} = -\dfrac{g}{T}$.

- **Condition de Dirichlet :**

  A première vue, il paraît difficile de récupérer la condition de Dirichlet de notre formulation ; pourtant, c'est tout à fait possible. Supposons que l'on néglige la contribution du bord à l'énergie cinétique, alors $\gamma = 0$. La condition de Dirichlet a pour expression $u(x, y, t) = G(x, y, t)$ sur $\partial\Omega$ pour une certaine fonction G. Ceci implique que $\xi(x, y, t) = 0,\ (x, y) \in \partial\Omega$ car toute variation $u + \epsilon\xi$ doit également satisfaire à la condition au bord $u + \epsilon\xi = G$. En conséquence, la première variation $\delta\mathcal{S}$ se réduit justement à (1.13) et on recouvre ainsi l'équation des ondes avec une condition de type Dirichlet sur le bord.

Jusqu'ici on a réussi, à l'aide de la formulation proposée par Goldstein [19], à obtenir simultanément l'équation des ondes aussi bien que les conditions aux limites classiques. Or il se trouve que cette même formulation peut conduire à d'autres types de conditions non standards dont fait partie celle qui nous intéresse le plus : la condition dynamique de Ventcel.

En revenant à (1.15) et en posant cette fois-ci $\gamma = 1$ et $\phi = \phi(\partial_\tau u) = \dfrac{T}{2}(\partial_\tau u)^2$, on aura

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{S}[u] &= \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\left[-\frac{\rho}{T}u_{tt} - T\frac{\partial u}{\partial n} - g\right]\xi\ ds\ dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\phi_{\partial_\tau u}\partial_\tau\xi\ ds\ dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\left[-\frac{\rho}{T}u_{tt} - T\frac{\partial u}{\partial n} - g\right]\xi\ ds\ dt - \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}T\partial_\tau u\partial_\tau\xi\ ds\ dt.\end{aligned} \tag{1.16}$$

Si on suppose T constante le long de la frontière et qu'on intègre par parties le second terme de (1.16) (en admettant également que u et ξ sont suffisamment régulières), on trouvera

$$\delta\mathcal{S}[u] = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\partial\Omega}\left[-\frac{\rho}{T}u_{tt} + T\Delta_T u - T\frac{\partial u}{\partial n} - g\right]\xi\ ds\ dt \tag{1.17}$$

où Δ_T représente le laplacien tangentiel.

En utilisant comme précédemment le fait que l'intervalle $[t_0, t_1]$ et la fonction ξ sont arbitraires, on déduit la condition dite de Ventcel dynamique

$$u_{tt} - d\Delta_T u + d\frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{g} \tag{1.18}$$

avec $d = \dfrac{T^2}{\rho}$ et $\tilde{g} = -\dfrac{gT}{\rho}$.

Remarque 1.2. *Il existe, bien sûr, d'autres conditions au bord non standards que nous n'allons pas aborder ici et dont la formulation est donnée dans [19]. En particulier, les conditions cinétiques qui sont appelées ainsi pour la présence du terme u_{tt}, et les conditions de Ventcel généralisées. Le lecteur intéressé peut consulter [19] ou [14] pour les détails.*

1.5 Interprétation physique

Les équations modélisant la dynamique d'un système se déterminent conformément à ses propriétés physiques (densités, tensions, forces extérieures...). De ce fait, toutes les équations revisitées plus haut ont une quelconque interprétation physique. Dans l'article [19], l'auteur en fournit pour toutes les conditions aux limites étudiées en prêtant une attention particulière à la condition cinétique. Ici, on s'intéresse seulement aux conditions de Dirichlet et de Ventcel dynamique.

D'après les discussions précédentes, on sait déjà qu'une solution de l'équation des ondes (1.14) décrit les oscillations verticales d'une membrane de densité ρ soumise à une tension T. Quitte à préciser la signification des conditions de Dirichlet et de Ventcel.

Il est clair qu'une condition de Dirichlet correspond à une valeur prescrite de u sur la frontière ; si on suppose que $u = 0$, alors dans ce cas le bord de la membrane est fixé.

Regardons maintenant de près la condition dynamique de Ventcel homogène

$$u_{tt} - d\Delta_T u = -d\frac{\partial u}{\partial n}. \tag{1.19}$$

On voit que le membre de gauche de cette égalité est bel et bien l'équation des ondes en une dimension qui modélise les vibrations d'une corde tendue ; alors que le membre de droite exprime la force qu'exerce la membrane sur sa frontière. On peut donc affirmer que dans le cas d'une membrane entourée d'un cadre de densité linéaire ρ, soumis à une tension T, le bord se comporte comme une corde vibrante (un fil flexible et mince) [59], [60] .

Il importe de souligner que pour une membrane rectangulaire $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2)$, dont la frontière est fixée partout sauf un côté, par exemple $(0, l_1) \times \{l_2\}$, la condition de Ventcel sur ce coté découle du choix de $\phi(u_x) = \frac{T}{2}u_x^2$. Ceci soutient les propos du paragraphe précédent car l'énergie potentielle requise pour déplacer une corde de son état d'équilibre est effectivement donnée par cette même expression (voir [46]).

Pour accentuer encore l'importance des conditions de type Ventcel, mentionnons deux exemples concrets. Le premier exemple s'agit d'un trampoline bordé d'un cadre flexible. Dans ce cas, on a la condition de Ventcel sur toute la frontière et il s'avère que c'est le laplacien tangentiel qui exprime la flexibilité du bord. D'ailleurs, cette situation a été discutée avec assez de détails dans [14], surtout lorsque le cadre est rigide. Avec cette hypothèse, on constate qu'il n'est plus question de condition de Ventcel mais plutôt de condition cinétique.

Une peau de tambour avec un trou à l'intérieur constitue notre deuxième exemple illustratif. Cette situation est particulièrement intéressante puisque l'on a une condition de Dirichlet sur la frontière extérieure du tambour et une condition de Ventcel sur le contour du trou.

Plusieurs autres exemples de systèmes mécaniques, composés de masses, de ressorts et de cordes, ont été décrits, dans l'article récent [14], par l'équation des ondes couplée avec des conditions aux limites classiques ou nouvelles selon les contraintes imposées sur le bord. En fait, l'auteur y exhibe une nouvelle théorie se basant sur le fait que le bord dans les systèmes physiques réels est souvent entièrement différent de la limite de l'intérieur.

On conclut cette discussion en notant qu'il serait utile parfois de prendre en compte l'effet de la friction sur le système. Cependant, on ne peut pas traiter cette force de la même manière que les autres forces extérieures puisqu'elle n'est pas conservative. On l'ajoutera donc à la dernière étape après avoir formulé les conditions aux limites. Empiriquement, on sait que si la vitesse u_t est petite, la friction en dépend linéairement $F = qu_t$, et la condition de Ventcel devient

$$u_{tt} + qu_t - d\Delta_T u + d\frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{g}.$$

D'autre part, si la vitesse est grande, la friction est approchée par $\tilde{q}u_t^2$ et on obtiendra

$$u_{tt} + \tilde{q}u_t^2 - d\Delta_T u + d\frac{\partial u}{\partial n} = \tilde{g}.$$

Chapitre 2

Observation et contrôle des systèmes d'évolution linéaires

2.1 Problèmes de Cauchy

Avant d'aborder les questions de contrôlabilité et d'observabilité d'un système d'évolution, on commence d'abord par assurer le caractère bien-posé, dans un cadre fonctionnel adéquat, de deux problèmes de Cauchy abstraits. L'intérêt d'une telle formulation abstraite vient du fait que tout problème de contrôlabilité et d'observabilité pourrait, généralement, ainsi se réécrire.

Soient H et G deux espaces de Hilbert. On note par $(\cdot,\cdot)_H$, $(\cdot,\cdot)_G$ les produits scalaires sur H et G, et par $||\cdot||_H$, $||\cdot||_G$ les normes associées.

Soit $T > 0$, $U_0 \in H$, on considère sur H le problème abstrait de Cauchy :

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \ t \in (0,T) \\ U(0) = U_0 \in H, \end{cases} \tag{2.1}$$

où H est l'espace des états, $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \subset H \to H$ est un opérateur linéaire borné ou non borné à domaine dense.

Soit, en plus, $\mathcal{B}$ un autre opérateur linéaire défini sur $D(\mathcal{B}) \subset H$ à valeurs dans G. On s'intéresse, également, au problème adjoint à (2.1) donné par

$$\begin{cases} V' = -\mathcal{A}^*V + \mathcal{B}^*W, \ t \in (0,T), \\ V(0) = V_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

où $V_0 \in H'$ est la donnée initiale, $W \in L^2(0,T;G')$ la fonction contrôle, H', G' les espaces duaux de H, G, et $\mathcal{A}^*$, $\mathcal{B}^*$ les opérateurs adjoints de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$.

L'opérateur $\mathcal{B}^* : D(\mathcal{B}^*) \subset G' \to H'$ décrit la manière dont le contrôle W agit sur le système (2.2).

En fait, le problème (2.1), qui est libre de toute intervention, représente un système d'observation ; plus précisément, on observe les valeurs prises par $\mathcal{B}U$. En revanche, le problème (2.2) représente un système contrôlé par l'action $\mathcal{B}^*W$.

2.1.1 Existence et unicité de solutions de (2.1)

D'après la théorie des semi-groupes, on sait qu'un problème tel que (2.1) admet une solution unique pourvu que l'opérateur $\mathcal{A}$ génère un semi-groupe fortement continu $S(t), t \geq 0$. Si de plus ce semi-groupe est inversible, il pourra être prolongé aux valeurs négatives de t pour ainsi former un groupe $S(t), t \in \mathbb{R}$ (en fait, il suffit d'avoir $S(\tau)$ inversible pour un certain $\tau > 0$ prop. 2.7.4. [58]).

On s'intéresse plus particulièrement aux opérateurs anti-adjoints, vu que l'opérateur de l'équation des ondes a cette propriété [26].

Un opérateur $\mathcal{A}$ à domaine dense est dit anti-adjoint si $\mathcal{A}^* = -\mathcal{A}$. Le résultat suivant appelé *théorème de Stone* caractérise les groupes générés par de tels opérateurs.

Théorème 2.1. *Un opérateur $\mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \in H \to H$ est anti-adjoint si et seulement s'il est le générateur infinitésimal d'un groupe unitaire $S(t)$, $t \in \mathbb{R}$ $(S(t)^* = S(t)^{-1})$ sur H.*

Pour la démonstration, on renvoie aux livres [49], [58]. Il convient de noter que puisque tout opérateur anti-adjoint est m-dissipatif ([58], proposition 3.7.2), l'implication directe découlera immédiatement du théorème de Lumer-Phillips ([58], théorème 3.8.4) .

Il est évident que dans le cas où $\mathcal{A}$ génère un groupe, la solution de (2.1) sera définie pour tout $t \in \mathbb{R}$ [49]. On fournit ci-après l'existence de solutions pour des systèmes représentés par des opérateurs anti-adjoints (comme les équations des ondes et des plaques [26]). Pour le cas général, on pourrait consulter [49], [58].

Théorème 2.2. *Supposons que $\mathcal{A}$ est anti-adjoint. Etant donné $U_0 \in H$, le problème (2.1) admet une unique solution continue $U \in C(\mathbb{R}; H)$ donnée par $U(t) = S(t)U_0$, $t \in \mathbb{R}$ et qui satisfait*

$$||U(t)||_H = ||U_0||_H, \ \forall t \in \mathbb{R}. \tag{2.3}$$

Si de plus $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors $U \in C(\mathbb{R}; D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}; H)$ i.e. U est une solution classique de (2.1).

Remarque 2.1. *L'énergie du système (2.1) étant donnée par $E(t) = \frac{1}{2}||U(t)||_H^2$, $t \in \mathbb{R}$, l'égalité (2.3) signifie qu'elle sera conservée lors de l'évolution en temps.*

2.1.2 Solutions faibles du problème dual (2.2)

On étudie maintenant l'existence de solutions au système (2.2). Souvent, en traitant des problèmes de contrôlabilité, on se trouve face à des équations dont la donnée sur le bord n'est pas assez régulière pour obtenir une solution au sens ordinaire. On applique alors la méthode de transposition, qui nous procurera une solution faible de (2.2) en un sens bien précis.

Soit $s \in (0,T)$. On note U, V les solutions de (2.1) et (2.2). Alors, formellement, on a

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^s < V(t), U'(t) - \mathcal{A}U(t) >_{H',H} \; dt \\
&= [< V(t), U(t) >_{H',H}]_0^s - \int_0^s < V'(t), U(t) >_{H',H} + < V(t), \mathcal{A}U(t) >_{H',H} dt \\
&= [< V(t), U(t) >_{H',H}]_0^s - \int_0^s < V'(t) + \mathcal{A}^*V(t), U(t) >_{H',H} \; dt \\
&= [< V(t), U(t) >_{H',H}]_0^s - \int_0^s < \mathcal{B}^*W(t), U(t) >_{H',H} \; dt \\
&= [< V(t), U(t) >_{H',H}]_0^s - \int_0^s < W(t), \mathcal{B}U(t) >_{G',G} \; dt.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

D'où,

$$< V(s), U(s) >_{H',H} = < V_0, U_0 >_{H',H} + \int_0^s < W(t), \mathcal{B}U(t) >_{G',G} \; dt. \tag{2.5}$$

Ceci nous amène à définir une solution de (2.2) $V : (0,T) \to H'$ au sens de l'identité (2.5) pour toute donnée initiale $U_0 \in H$ et tout $s \in (0,T)$.

Pour montrer l'existence d'une telle solution, on a besoin de l'hypothèse suivante sur l'opérateur d'observation $\mathcal{B}$: on suppose que $D(\mathcal{B}) \subseteq D(\mathcal{A})$ et que pour tout $T > 0$, il existe une constante $c_T > 0$ telle que

$$\int_0^T ||\mathcal{B}U||_G^2 \; dt \leq c_T ||U_0||_H^2, \; \forall U_0 \in D(\mathcal{A}). \tag{2.6}$$

L'inégalité (2.6) est appelée inégalité d'admissibilité ou inégalité directe selon la terminologie de Lions [42]. Elle est, en fait, vérifiée pour tout $U_0 \in H$ vu la densité de $D(\mathcal{A})$ dans H.

Avec l'hypothèse d'admissibilité, on a l'existence et l'unicité de solutions faibles de (2.2).

Théorème 2.3. *On suppose l'inégalité (2.6) vérifiée. Alors, pour tous $V_0 \in H'$, $W \in L^2(0,T;G')$, le système (2.2) a une unique solution faible au sens de (2.5) satisfaisant $V \in C(0,T;H')$.*

Preuve. Voir le théorème 2.4 de [26] ou théorème 2.37. de [11]. □

L'approche exposée ci-dessus peut fournir l'existence et l'unicité des solutions de tant d'équations aux dérivées partielles notamment les équations des ondes et des plaques [26]. Puisque le problème de contrôler l'équation des ondes avec une action de type Dirichlet est celui le plus proche de ce qui nous intéresse, nous allons présenter brièvement comment cette formulation abstraite nous en donne l'existence des solutions.

L'équation des ondes.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière régulière Γ. On considère l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet. On souhaite influencer sa dynamique à travers un contrôle par le bord :

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 & dans \quad \Omega \times (0,T), \\ v = w & sur \quad \Gamma \times (0,T), \\ v(0) = v_0, \;\; v'(0) = v_1. \end{cases} \tag{2.7}$$

On considère en outre le problème homogène :

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & dans \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \times (0,T), \\ u(0) = u_0, \;\; u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2.8}$$

Le système (2.7) est l'adjoint de (2.8). En effet, on a formellement la formule de Green suivante

$$\int_\Omega -v'(s)u(s)+v(s)u'(s)\, dx = \int_\Omega -v_1u_0+v_0u_1\, dx+\int_0^s\int_\Gamma w\partial_\nu u\, d\Gamma dt. \tag{2.9}$$

Examinons l'existence et l'unicité des solutions de ces deux systèmes.

Soit

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \;\; ||(u,v)||_H = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 + |v|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Le système (2.8) peut être réécrit sous la forme de (2.1) avec

$$U = (u,u'), \;\; U_0 = (u_0,u_1), \;\; \mathcal{A}(u,v) = (v,\Delta u),$$

$$D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega) \text{ (voir thm. 3.6.2. [58]).}$$

L'énergie est donnée par

$$E(t) = \frac{1}{2}||U(t)||_H^2 = \frac{1}{2}\left(\int_\Omega |\nabla u(x,t)|^2 + |u'(x,t)|^2 dx\right).$$

On pourrait sans grande difficulté, montrer que l'opérateur $\mathcal{A}$ est anti-adjoint sur H. Donc d'après le théorème 2.2, il existe, pour tout

$$(u_0, u_1) \in H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

une unique solution de (2.8) telle que

$$(u, u') \in C(0, T; H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega)) \text{ et } E(t) = E(0), \forall t \in \mathbb{R}.$$

D'autre part, si on pose

$$V = (-v', v),\ V_0 = (-v_1, v_0),\ W = w,$$

on aura, de l'identité (2.9), que le problème (2.7) peut être écrit sous la forme abstaite (2.2) avec

$$G = L^2(\Gamma),\ D(\mathcal{B}) = D(\mathcal{A}),\ \mathcal{B}(u, v) = \frac{\partial u}{\partial \nu}.$$

Alors, pour pouvoir appliquer le théorème 2.3, il suffit de montrer que l'opérateur $\mathcal{B}$ vérifie une inégalité d'admissibilité (2.6). Or on a le résultat suivant

Théorème 2.4 ([32])**.** *Soit $T > 0$. Alors, il existe une constante $c = c(T) > 0$ telle que la solution de (2.8) satisfait l'inégalité directe*

$$\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt \leq c \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) dx.$$

Par conséquent, le théorème 2.3 nous donne pour tout $V_0 \in H^{-1}(\Omega) \times L^2(\Omega)$ et $W \in L^2(0, T; L^2(\Gamma))$ l'existence d'une unique solution de (2.7) au sens de (2.9) telle que

$$(v, v') \in C(0, T; L^2(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)).$$

Remarque 2.2. *Lorsqu'il s'agit d'un contrôle interne, il est facile d'imaginer le système contrôlé écrit sous la forme abstraite (2.2). Cependant pour un, contrôlé par le bord, cela ne paraît pas aussi évident. On peut le constater dans l'exemple d'application ci-haut. En fait, il est plus concevable de formuler un système de contrôle par la frontière comme*

$$\begin{cases} V'(t) = LV(t),\ DV(t) = W(t), \\ V(0) = V_0, \end{cases} \tag{2.10}$$

où L est un opérateur différentiel et D un opérateur de trace. Or c'est le système (2.2) que l'on trouve le plus souvent dans la littérature. Ceci vient du fait qu'il est toujours possible d'aller de la réprésentation (2.10) à celle de (2.2) et il est plus pratique d'avoir une formulation unifiante. On pourrait trouver une discussion détailée de cette question dans le chapitre 10 de [58] ou dans le chapitre 3 de [12].

2.2 Quelques concepts de la théorie du contrôle

On discute, dans cette section, de quelques notions de contrôlabilité et d'observabilité notamment celles auxquelles on s'intéresse quand il s'agit de l'équation des ondes. Il existe bien d'autres que l'on n'évoquera pas et on recommande pour plus de détails les références [11], [48], [58].

Définition 2.1. *Soit* $T > 0$.

1. *Si, pour toute données initiale et finale* V_0, $V_1 \in H'$, *il existe* $W \in L^2(0, T; G')$ *tel que la solution* V *de* (2.2) *vérifie* $V(T) = V_1$, *on dira que le problème* (2.2) *est exactement contrôlable au temps* T.

2. *Si, pour tout* V_0, $V_1 \in H'$ *et* $\epsilon > 0$, *il existe* $W \in L^2(0, T; G')$ *tel que la solution* V *de* (2.2) *vérifie* $||V(T) - V_1|| < \epsilon$, *on dira que* (2.2) *est approximativement contrôlable au temps* T.

3. *S'il existe* $W \in L^2(0, T; G')$ *tel que pour tout* $V_0 \in H'$, *la solution de* (2.2) *satisfait* $V(T) = 0$, *alors on dira que ce problème est contrôlable à zéro au temps* T.

Remarque 2.3. *Il est clair que la contrôlablité exacte implique la contrôlabilité approchée et à zéro. L'inverse n'étant pas vrai en général. Il arrive pourtant que la contrôlabilité à zéro soit équivalente à la contrôlabilité exacte lorsque l'opérateur* $\mathcal{A}^*$ *génère un groupe fortement continu (voir [11], théorème 2.41), ce qui est bien le cas pour l'équation des ondes.*
On note qu'en dimension infinie ces trois propriétés dépendent du temps. En particulier, en raison de la vitesse finie de propagation de l'équation des ondes, on ne s'attend pas à ce qu'elles se réalisent pour des temps T *petits.*

On introduit maintenant quelques définitions intimement liées à celles données plus haut mais, qui concernent l'observabilité du système adjoint (2.1). On suppose que l'opérateur d'observation $\mathcal{B}$ est admissible (cf. (2.6)), alors on a

Définition 2.2.

1. *Le système* (2.1) *est dit exactement observable au temps* $T > 0$ *s'il existe une constante* k_T *telle que*
$$\int_0^T ||\mathcal{B}U||_G^2 \, dt \geq k_T ||U_0||_H^2, \ \forall U_0 \in H. \tag{2.11}$$

2. *Le système* (2.1) *est approximativement observable au temps* T *si*
$$\mathcal{B}S(t)U_0 = 0, \ pour \ 0 \leq t \leq T \Leftrightarrow U_0 = 0. \tag{2.12}$$

Remarque 2.4. *L'inégalité* (2.11) *est appelée inégalité d'observabilité ou inégalité inverse selon la terminologie de Lions [42], tandis que la propriété* (2.12) *est appelée principe de continuation unique.*

2.3 Dualité entre contrôlabilité et observabilité

L'un des principes les plus importants en théorie du contrôle et sur lequel s'appuie la célèbre *Hilbert uniqueness method* de Lions [42], est la dualité entre les notions de contrôlabilité et d'observabilité. On entend par cela que l'on pourrait toujours ramener le problème du contrôle pour un système au problème d'observation de son adjoint. L'intérêt étant que souvent, il est plus pratique de prouver l'observabilité (une inégalité ou une propriété de continuation unique) que de montrer la contrôlabilité (un résultat d'existence).

Théorème 2.5. *Soit $T > 0$. On a les équivalences suivantes :*

1. *Le système contrôlé (2.2) est exactement contrôlable au temps T si et seulement si le système dual (2.1) est exactement observable au temps T. De plus, le contrôle $W \in L^2(0, T; G')$ satisfait*
$$||W||_{L^2(0,T;G')} \leq c_T ||V_0||_{H'}, \tag{2.13}$$
où la constante c_T ne dépend pas de l'état initial V_0.

2. *Le système contrôlé (2.2) est approximativement contrôlable au temps T si et seulement si le système dual (2.1) est approximativement observable au temps T.*

Les résultats principaux de ce travail étant tous établis à l'aide de la méthode HUM dont ce principe de dualité constitue une partie intégrante, nous allons reproduire la démonstration de la première équivalence. Pour la deuxième, on peut consulter n'importe quel livre sur la théorie du contrôle (voir par exemple thm. 2.43, [11] ou thm. 11.2.1, [58]).

On souligne que lorsque le système est réversible en temps, l'inégalité inverse (2.11) est aussi équivalente à la contrôlabilité à zéro de (2.2). En effet, c'est cette équivalence qui sera montrée ci-dessous, étant donné que le système dont le contrôle nous préoccupe est réversible.

Preuve. On considère la forme bilinéaire sur H suivante :
$$a : (U_0, \tilde{U}_0) \to \int_0^T (\mathcal{B}S(t)U_0, \mathcal{B}S(t)\tilde{U}_0)_G \, dt.$$
Compte tenu des inégalités (2.6), (2.11), il résulte que a est continue, symétrique et coercive. D'après le théorème de représentation de Riesz, il existe un isomorphisme isométrique $\Lambda \in \mathcal{L}(H, H')$ auto-adjoint et défini positif tel que
$$< \Lambda U_0, \tilde{U}_0 >_{H',H} = \int_0^T (\mathcal{B}S(t)U_0, \mathcal{B}S(t)\tilde{U}_0)_G \, dt, \ \forall U_0, \tilde{U}_0 \in H.$$

Soit $\mathcal{J} : G \to G'$ l'isomorphisme canonique de Riesz. Pour tout $V_0 \in H'$, $U_0 \in H$, on a l'identité (cf. éq. (2.5))

$$< V(T), U(T) >_{H',H} = < V_0, U_0 >_{H',H} + \int_0^T < W(t), \mathcal{B}U(t) >_{G',G} \ dt.$$

On pose

$$W(t) = -\mathcal{J}\mathcal{B}S(t)\Lambda^{-1}V_0, \ t > 0.$$

Montrons qu'effectivement ce contrôle amène bien l'état V de l'état initial V_0 à l'équilible au temps T. On a

$$\begin{aligned} < V(T), U(T) >_{H',H} &= < V_0, U_0 >_{H',H} + \int_0^T < W(t), \mathcal{B}U(t) >_{G',G} \ dt \\ &= < V_0, U_0 >_{H',H} - \int_0^T (\mathcal{B}S(t)\Lambda^{-1}V_0, \mathcal{B}S(t)U_0)_G \ dt \\ &= < V_0, U_0 >_{H',H} - < \Lambda\Lambda^{-1}V_0, U_0 >_{H',H} \ dt \\ &= 0 \end{aligned}$$

Comme le groupe $S(t), t \in \mathbb{R}$ est unitaire, il en résulte que si la donnée initiale U_0 parcourt tout l'espace H, $U(T)$ en fait de même. On déduit donc que $V(T) = 0$.

Vu que $\mathcal{J}$ et Λ sont des isométries, on aura

$$\begin{aligned} ||W||_{L^2(0,T;G')} &= ||\mathcal{J}\mathcal{B}S(t)\Lambda^{-1}V_0||_{L^2(0,T;G')} \\ &= ||\mathcal{B}S(t)\Lambda^{-1}V_0||_{L^2(0,T;G)} \\ &\leq c_1||\Lambda^{-1}V_0||_H \\ &\leq c_2||V_0||_{H'} \end{aligned},$$

d'où, l'estimation (2.13).

Démontrons maintenant la réciproque.

Soit $U_0 \in D(\mathcal{A})$. Supposons (2.2) exactement contrôlable, alors l'égalité (2.5) devient

$$< V_0, U_0 >_{H',H} = -\int_0^T < W(t), \mathcal{B}U(t) >_{G',G} \ dt, \quad \forall V_0 \in H'.$$

Si l'on choisit pour chaque $V_0 \in H'$ un contrôle W satisfaisant (2.13), on obtiendra

$$| < V_0, U_0 >_{H',H} | \leq c_T||V_0||_{H'}||\mathcal{B}U||_{L^2(0,T;G)}.$$

En appliquant le théorème de Hahn-Banach, on conclut que

$$||U_0||_H \leq c_T||\mathcal{B}U||_{L^2(0,T;G)}.$$

□

Ainsi, si l'on voulait établir la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes (2.7), il suffit de prouver l'inégalité d'observabilité suivante

$$c\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2)dx \leq \int_0^T \int_\Gamma \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 \, d\Gamma dt. \tag{2.14}$$

Quant à la contrôlabilité approchée, elle est équivalente dans ce cas à

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0,T) \Leftrightarrow (u_0, u_1) = (0,0). \tag{2.15}$$

2.4 Quelques rappels de théorie spectrale

Etant donné que l'on a l'intention d'utiliser des techniques de l'analyse non harmonique pour prouver une inégalité d'observabilité, quelqu'unes de ces idées seront présentées ci-dessous. Jusqu'ici, on ne sait qu'établir l'existence des solutions ; or lorsque la géométrie du domaine où a lieu l'évolution est simple, il est possible, grâce à la théorie spectrale, d'exprimer explicitement la solution en série de Fourier. Ce qui permet d'en savoir plus sur ses propriétés et son comportement.

2.4.1 Base de Riesz

On considère l'espace de Hilbert l^2 contenant les suites $(x_k) \subset \mathbb{C}$ telles que $\sum_{k\in\mathbb{N}} |x_k|^2 < \infty$. On note $(e_k)_k$ la base canonique de l^2 i.e. e_k est la suite dont tous les termes sont nuls sauf celui dans la $k^{\text{ième}}$ position qui est égal à 1. Une base de Riesz dans un espace de Hilbert X est définie comme suit :

Définition 2.3. *Une suite (ϕ_k) d'un espace de Hilbert X est dite une base de Riesz dans X s'il existe un opérateur inversible $Q \in \mathcal{L}(X, l^2)$ tel que $Q(\phi_k) = e_k, \ k \in \mathbb{N}$. La suite $(\tilde{\phi}_k)$ donnée par*

$$\tilde{\phi}_k = Q^* Q \phi_k, \ \ k \in \mathbb{N}$$

est appelée suite biorthogonale à (ϕ_k).

Remarque 2.5. *Une base orthonormale de X est une base de Riesz telle que $\tilde{\phi}_k = \phi_k, \ k \in \mathbb{N}$.*

Les bases de Riesz possèdent beaucoup des propriétés des bases orthonormales. Ici, on se contente de rappeler celles qui nous seront utiles par la suite. Pour plus de détails, voir [58], [12].

Propriétés :

- Soient (ϕ_k) une base de Riesz dans X et $(\tilde{\phi}_k)$ la suite qui lui est biorthogonale. Alors, tout $z \in X$ peut se réécrire de manière unique comme

$$z = \sum_{k\in\mathbb{N}} < z, \tilde{\phi}_k > \phi_k.$$

- Il existe $c_1,\ c_2 > 0$ tel que

$$c_1 \sum_{k\in\mathbb{N}} | < z, \tilde{\phi}_k > |^2 \leq ||z||^2 \leq c_2 \sum_{k\in\mathbb{N}} | < z, \tilde{\phi}_k > |^2.$$

  En particulier, pour les bases orthonormales, on a *l'égalité de Parseval* qui correspond à $c_1 = c_2 = 1$.

- Le sous-espace $\mathcal{Z}$ engendré par les vecteurs $\phi_k,\ k \in \mathbb{N}$ est dense dans X.

En théorie des équations aux dérivées partielles, souvent les bases de Riesz sont constituées de vecteurs propres d'un opérateur différentiel. En revanche, lorsque ces opérateurs ont des caractéristiques particulières, comme les opérateurs auto-adjoints à résolvante compacte, ses vecteurs propres forment plutôt une base orthonormée. Nous pouvons mentionner comme exemple les vecteurs propres du laplacien, qui forme bien une base de Riesz dans l'espace de Sobolev $H_0^1(\Omega)$.

Notre but étant d'exprimer la solution du problème d'observation (2.1), nous avons besoin d'abord d'un théorème spectral nous assurant la décomposition en espaces propres de H. Nous verrons plus tard que le générateur infinitésimal de notre groupe est anti-adjoint. Cependant, nous n'avons pas pu trouver une référence qui exhibe un théorème spectral pour de tels opérateurs. Ceci ne pose guère de problème puisque dire qu'un opérateur A à domaine dense $D(A) \subset X$ est anti-adjoint revient à dire que iA est auto-adjoint. En conséquence, les traits que possèdent les opérateurs auto-adjoints s'étendent aisément aux opérateurs anti-adjoints y compris le théorème ci-après déduit de la proposition 3.2.12. de [58].

Théorème 2.6. *Soit X un espace de Hilbert de dimension infinie et $A : D(A) \subset X \to X$ un opérateur anti-adjoint à résolvante compacte. Alors, les vecteurs propres $(\phi_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ de A forment une base orthonormée de X et les valeurs propres $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{Z}} \subset i\mathbb{R}$ associées vérifient $\lim_{|k|\to\infty} |\lambda_k| = \infty$.*

2.4.2 Représentation en série de Fourier

Ce dernier théorème nous mène à la définition d'opérateur diagonalisable, une qualité tellement commode que possède le générateur infinitésimal dans tant de situations pratiques (équation des ondes et de la chaleur). Quand elle est vérifiée, cette propriété facilite beaucoup la démonstration d'observabilité d'un système.

Soit $\rho(A)$ l'ensemble de $s \in \mathbb{C}$ tel que $sI - A : D(A) \to X$est inversible et $(sI - A)^{-1} \in \mathcal{L}(X)$.

Définition 2.4. *Un opérateur $A : D(A) \subset X \to X$ est dit diagonalisable si $\rho(A) \neq \emptyset$ et s'il existe une base de Riesz dans X formée par les vecteurs propres de A.*

Il est facile de voir que dans ce cas le domaine $D(A)$ est dense dans X et que l'opérateur A est fermé. De surcroît, tout opérateur diagonalisable peut s'exprimer en terme de ses valeurs et vecteurs propres. En effet, on a

Proposition 2.1. *Soit A un opérateur diagonalisable. On note par (ϕ_k), (λ_k) ses vecteurs et valeurs propres et par $\tilde{\phi}_k$ la suite biorthogonale à ϕ_k. Alors,*

$$D(A) = \left\{ z \in X; \sum |\lambda_k|^2| < z, \tilde{\phi}_k > |^2 < \infty \right\},$$

$$Az = \sum \lambda_k < z, \tilde{\phi}_k > \phi_k, \ \forall z \in D(A).$$

Revenons au problème homogène (2.1)

$$\left\{ \begin{array}{c} U' = \mathcal{A}U, \ t \in (0,T) \\ U(0) = U_0 \in H. \end{array} \right.$$

En plus des hypothèses déjà faite précédemment, on suppose que $\mathcal{A}$ est diagonalisable. Il s'avère que le semi-groupe généré par $\mathcal{A}$ est aussi diagonalisable, nous permettant ainsi d'avoir une expression explicite de la solution en fonction des vecteurs et valeurs propres de $\mathcal{A}$.

On note (E_k), (λ_k) les vecteurs et valeurs propres de $\mathcal{A}$. La solution U peut s'écrire en série de Fourier comme suit :

Théorème 2.7. *Etant donné $U_0 \in H$ tel que*

$$U_0 = \sum_k U_k E_k.$$

Alors, la série de Fourier non harmonique

$$\sum_k U_k E_k e^{\lambda_k t}$$

converge uniformément par rapport à t vers la solution $U \in C(0,T;H)$ du problème (2.1). De plus, il existe deux fonctions continues et positives $c_1(t), c_2(t)$ telles que

$$c_1(t)||U_0||^2 \leq ||U(t)||^2 \leq c_2(t)||U_0||^2. \tag{2.16}$$

La démonstration de ce résultat ainsi que des exemples illustratifs se trouvent dans [26] et [58].

Application.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière régulière Γ. On va appliquer les résultats des paragraphes précédents sur l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \textit{dans} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \Gamma \times (0,T), \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{cases} \tag{2.17}$$

On désigne par (γ_k) les valeurs propres et (e_k) les vecteurs propres normalisés du laplacien avec condition de Dirichlet. Alors, on a

- $e_k \in H_0^1(\Omega), \ -\Delta e_k = \gamma_k e_k;$
- $\gamma_k > 0, \ \gamma_k \to \infty;$
- les vecteurs propres (e_k) constituent une base orthonormée de $L^2(\Omega)$.

On rappelle que cette équation peut s'écrire comme un problème de Cauchy (2.1) avec

$$H = H_0^1(\Omega) \times L^2(\Omega), \ U = (u, u'),$$
$$D(\mathcal{A}) = (H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)) \times H_0^1(\Omega), \ \mathcal{A}(u,v) = (v, \Delta u).$$

Il est facile de vérifier que les vecteurs

$$E_{\pm k} = \frac{1}{\sqrt{2\gamma_k}}(e_k, \pm\omega_k e_k), \ k = 1, 2, \ldots$$

sont des vecteurs propres de $\mathcal{A}$ associés aux valeurs propres $\pm i\omega_k = \pm i\sqrt{\gamma_k}$. De plus, d'après le théorème 2.6, les vecteurs $E_{\pm k}$ forment une base orthonormée de H.

D'autre part, si les conditions initiales sont données par

$$U_0 = (u_0, u_1) = \sum_{k=1}^{\infty} U_{\pm k} E_{\pm k},$$

la solution $u(x,t)$ s'écrira en série de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) e_k(x),$$

tel que

$$a_{\pm k} = \frac{U_{\pm k}}{\sqrt{2|\omega_k|^2}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k (|a_k|^2 + |a_{-k}|^2) < \infty.$$

En particulier, si $\Omega = (0, l)$, on aura

$$\omega_k = \frac{k\pi}{l}, \quad e_k(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin(\omega_k x),$$

et la solution est donnée par

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \sin(\omega_k x),$$

tel que

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 (|a_k|^2 + |a_{-k}|^2) < \infty.$$

2.4.3 Problèmes de Sturm-Liouville

Pour étudier les propriétés spectrales de notre problème, nous avons été amené à faire une séparation de variables. Cette démarche nous a ramené à des problèmes de Sturm-Liouville, problèmes qui sont en fait des équations différentielles. Leurs solutions ont d'intéressantes propriétés. Il est bien connu que les fonctions trigonométriques $(sin(kx))_{k \geq 1}$ sont orthogonales entre elles et constituent, après normalisation, une base orthonormée de $L^2(0, \pi)$. En outre, ces fonctions sont les fonctions propres, d'un problème de Sturm-liouville, associées aux valeurs propres $(k^2)_k$.

Nous exposons, ci-après, une classe de problèmes de Sturm-Liouville un peu différente de l'ordinaire. La différence étant la dépendance des conditions aux limites d'un paramètre λ. Ce genre d'équations survient à la suite d'une séparation des variables quand les conditions aux limites du problème original sont dynamiques (contiennent des dérivées temporelles). Il existe beaucoup de situations physiques dont la modélisation y donnerait lieu. Mentionnons par exemple le refroidissement d'une barre solide mince dont une extrémité est mise à l'instant $t = 0$ au contact avec une quantité finie de liquide. Cet exemple a été cité entre autres dans le papier de Futon [15] qui constitue la référence principale des idées que nous allons présenter, en tentant de cerner les caractéristiques de telles équations, en comparaison avec les équations classiques. Beaucoup d'articles y ont été consacrés [61], [3], [5], [6], [16].

De manière générale, les problèmes considérés s'écrivent

$$\left\{\begin{array}{c} -u''+qu=\lambda u,\ q \text{ continue dans } [a,b], \\ \cos\alpha u(a)+\sin\alpha u'(a)=0,\ \alpha\in[0,\pi), \\ -(\beta_1 u(b)-\beta_2 u'(b))=\lambda(\beta_1' u(b)-\beta_2' u'(b)), \\ \beta_1,\beta_2,\beta_1',\beta_2'\in\mathbb{R}. \end{array}\right. \tag{2.18}$$

On s'intéresse ici au cas particulier de $\beta_1=\beta_2'=0,\ \beta_2=\beta_1'=1,\ \alpha=0$ et $q=0$

$$\left\{\begin{array}{c} -u''=\lambda u,\ \text{dans } [a,b], \\ u(a)=0, u'(b)=\lambda u(b). \end{array}\right. \tag{2.19}$$

Il facile de voir que les fonctions propres de ce problème ne sont pas orthogonales dans $L^2(a,b)$. Il se trouve néanmoins que les fonctions propres, d'un opérateur que l'on définira ci-dessous, le sont dans un espace de Hilbert bien choisi. On ne fait que donner les faits généraux, les détails se trouvent dans[15].

Soit l'espace de Hilbert $H=L^2(a,b)\times\mathbb{C}$, muni du produit scalaire

$$(F,G):=\int_a^b F_1(x)\overline{G_1(x)}+F_2\overline{G_2},$$

pour

$$\left(\begin{array}{c} F_1(x) \\ F_2 \end{array}\right),\left(\begin{array}{c} G_1(x) \\ G_2 \end{array}\right)\in H.$$

On définit l'opérateur $A:D(A)\subset H\to H$ comme suit

$$A(F)=\left(\begin{array}{c} -F_1''(x) \\ F_1'(b) \end{array}\right),$$

$$D(A)=\left\{F\in H|F_1,F_1'\in C([a,b]),F_1''\in L^2[a,b],F_1(a)=0,F_2=F_1(b)\right\}$$

L'opérateur A est à domaine dense et auto-adjoint. Cette formulation moyennant l'espace de Hilbert H a été proposée pour la première fois par Walter [61]. On voit bien que si $F\in D(A)$ est un vecteur propre de A, la fonction $F_1(x)$ est solution de (2.19). De ce fait, connaître les propriétés spectrales de l'opérateur A permet d'identifier celles du problème de Sturm-Liouville (2.19) .

On note ϕ_λ la solution de (2.19) avec les conditions initiales

$$\left(\begin{array}{c} \phi_\lambda(a) \\ \phi_\lambda'(a) \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \end{array}\right)=\left(\begin{array}{c} 0 \\ -1 \end{array}\right),$$

et on définit

$$\omega(\lambda)=\lambda\phi_\lambda(b)-\phi_\lambda'(b).$$

En appliquant les mêmes techniques utilisées dans [57] pour l'analyse des équations de Sturm-liouville classiques, Futon [15] a montré que les racines de $\omega(\lambda)$ sont réelles et simples. Elles sont, en outre, les valeurs propres de l'opérateur A. Si on les note par $\lambda_n,\ n = 0, 1, 2, \ldots$, il s'ensuit que le vecteur

$$\Phi_n := \begin{pmatrix} \phi_{\lambda_n}(x) \\ \phi_{\lambda_n}(b) \end{pmatrix},$$

est le vecteur propre de A associé à λ_n. De plus, on a la relation d'orthogonalité dans H suivante

$$(\Phi_n, \Phi_m) = 0, \text{ si } n \neq m.$$

Soient (Ψ_n) les vecteurs propres normalisés de A i.e.

$$\Psi_n = \frac{1}{||\Phi_n||}\Phi_n = \begin{pmatrix} \psi_n(x) \\ \psi_n(b) \end{pmatrix},\ n \geq 0$$

où le produit scalaire $(\cdot, \cdot)$ et la norme $|| \cdot ||$ sont ceux de l'espace H. Alors, tout élément de A peut s'exprimer en termes des vecteurs (Ψ_n). En effet, on a

Théorème 2.8. *1. Pour tout $F \in H$, on a*

$$||F||^2 = \sum_{n=0}^{\infty} |(F, \Psi_n)|^2.$$

2. Pour tout $F \in D(A)$, on a

$$F = \sum_{n=0}^{\infty} (F, \Psi_n)\Psi_n,$$

la série de la première composante converge uniformément dans $[a, b]$, tandis que celle de la deuxième composante converge absolument.

3. Soit $F \in H$. Alors la série $F_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty}(\int_a^b F_1\psi_n\ dx)\psi_n$ est convergente dans $L^2(a, b)$.

Formules asymptotiques :

En s'appuyant sur les résultats connus pour les problèmes de Sturm-Liouville classiques, Futon a déterminé le comportement à l'infini des valeurs et vecteurs propres de A. Il a décelé quatre cas différents selon les valeurs des paramètres β_2' et α. Pour le problème (2.19) correspondant au cas où $\beta_2' = 0$ et $\alpha = 0$, on a d'après Futon [15]

$$\frac{(n-\frac{1}{2})\pi}{b-a} < \sqrt{\lambda_n} < \frac{(n+\frac{1}{2})\pi}{b-a},$$

plus précisément,

$$\sqrt{\lambda_n} = \frac{n\pi}{b-a} + O(n^{-1}),$$

et

$$\psi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{b-a}} \sin\left(\frac{n\pi(x-a)}{b-a}\right) + O(n^{-1}).$$

Remarque 2.6. *On pourrait trouver, dans [50], un exemple concret donnant lieu à des fonctions sinus, solutions d'un problème tel que (2.18), qui ne sont pas orthogonales dans $L^2(a,b)$. Cela se produit lors de la résolution par la méthode de Fourier d'un problème de diffusion de vapeur à travers une paroi mince séparant deux chambres fermées, dont une est vide et l'autre est maintenue à une pression de vapeur d'eau constante. La modélisation de ce problème est faite par une équation de la chaleur et une condition aux limites dynamique (de type Neumann). On étudiera en détail ces fonctions mêmes dans le chapitre suivant, où cette fois elles sont issues d'un problème hyperbolique (équation des ondes et condition de Ventcel).*

2.5 Quelques techniques de démonstration de l'inégalité d'observabilité

Même si grâce au principe de la dualité entre contrôlabilité et observabilité, on peut passer d'une notion à l'autre dans les deux sens, l'implication "observabilité $\Rightarrow$ contrôlabilité" reste la plus importante et la plus utilisée. Cela simplifie considérablement le problème, pourtant il est toujours loin d'être résolu. Il faudrait démontrer une inégalité telle que (2.11) où l'opérateur $\mathcal{B}$ et la norme peuvent varier selon la nature du système considéré et le cadre fonctionnel dans lequel il est placé. Ceci fait qu'une méthode peut se révéler avantageuse dans une situation et non dans une autre.

Il existe trois techniques principales pour établir une inégalité d'observabilité. La méthode des multiplicateurs, la méthode de Carleman et la méthode de l'analyse non harmonique. Nous présentons rapidement les deux premières, et développerons plus longuement par la suite la troisième méthode, qui repose sur la théorie spectrale, car c'est cette dernière que nous utiliserons pour notre travail.

2.5.1 Méthode des multiplicateurs

Cette approche a été largement utilisée par Lions [42] et après par Komornik [25] pour montrer les inégalités d'observabilité de divers problèmes d'évolution. Elle consiste essentiellement à se servir des multiplicateurs et de l'intégration par parties pour établir des identités qui à leur tour conduisent, sous quelques conditions géométriques, aux inégalités d'admissibilité et d'observabilité.

Nous allons présenter cette méthode en l'appliquant à l'équation des ondes avec condition de Dirichlet (2.8)

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & dans \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \times (0,T), \\ u(0) = u_0, \ u'(0) = u_1. \end{cases}$$

On suppose qu'il existe $x_0 \in \Omega$ tel que

$$(x - x_0) \cdot \nu(x) > 0, \ \forall x \in \Gamma,$$

où $\nu(x)$ est le vecteur normal à Γ au point x.

Le cas où juste une partie du bord vérifie cette contrainte peut être traité similairement en faisant quelques adaptations.

On définit

$$m(x) = x - x_0, \ R = \sup_{x \in \Omega} |x - x_0|, \ Mu = 2m \cdot \nabla u + (n-1)u,$$

où le point désigne le produit scalaire usuel dans $\mathbb{R}^n$.

On considère le problème (2.8) avec des données initiales

$$u_0 \in H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega), \ u_1 \in H_0^1(\Omega).$$

Ce qui fait que la solution satisfait

$$u \in C(0,T; H^2(\Omega) \times H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T; H_0^1(\Omega)).$$

Lemme 2.1. *Pour tout $T > 0$, la solution de (2.8) satisfait l'identité*

$$\int_0^T \int_\Gamma (m \cdot \nu)(\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma dt = \left[\int_\Omega u' Mu \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2 \, dx dt. \tag{2.20}$$

Preuve. On multiplie l'équation des ondes par Mu et on intègre par parties pour trouver

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_\Omega (u'' - \Delta u) Mu \, dxdt \\ &= \left[\int_\Omega u' Mu \, dx \right]_0^T - \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u) Mu \, d\Gamma dt \\ &+ \int_0^T \int_\Omega -u' Mu' + \nabla u \cdot \nabla (Mu) \, dxdt. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Par ailleurs, on a

$$u' Mu' = 2u' m \cdot \nabla u' + (n-1)(u')^2 = m \cdot \nabla (u')^2 + (n-1)(u')^2,$$

alors une intégration par parties et le fait que div $m = n$ entraine

$$\begin{aligned} -\int_\Omega u' Mu' \, dx &= -\int_\Omega m \cdot \nabla (u')^2 + (n-1)(u')^2 \, dx \\ &= -\int_\Gamma (m \cdot \nu)(u')^2 \, d\Gamma + \int_\Omega (u')^2 \, dx. \end{aligned} \tag{2.22}$$

En utilisant la convention de sommation des indices répétés, on aura

$$\begin{aligned} \nabla u \cdot \nabla (Mu) &= (\partial_i u) \partial_i (2 m_k \partial_k u + (n-1) u) \\ &= 2(\partial_i u)(\partial_i m_k)(\partial_k u) + 2 m_k (\partial_i u)(\partial_i \partial_k u) + (n-1)|\nabla u|^2 \\ &= m \cdot \nabla (|\nabla u|^2) + (n+1)|\nabla u|^2. \end{aligned}$$

D'où,

$$\begin{aligned} \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla (Mu) \, dx &= \int_\Omega m \cdot \nabla (|\nabla u|^2) + (n+1)|\nabla u|^2 \, dx \\ &= \int_\Gamma (m \cdot \nu)|\nabla u|^2 \, d\Gamma + \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \end{aligned} \tag{2.23}$$

En insérant les égalités (2.22), (2.23) dans (2.21), on obtiendra

$$\begin{aligned} 0 &= \left[\int_\Omega u' Mu \, dx \right]_0^T + \int_0^T \int_\Omega (u')^2 + |\nabla u|^2 \, dx \\ &- \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u) Mu + (m \cdot \nu)((u')^2 - |\nabla u|^2) \, d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Le résultat de ce lemme s'ensuit immédiatement de cette égalité, car $u' = 0$ et la condition du bord $u = 0$ implique

$$\nabla u = (\partial_\nu u)\nu, \;\; Mu = 2(m \cdot \nu)(\partial_\nu u) \text{ sur } \Gamma.$$

$\square$

Lemme 2.2. *Pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, on a*

$$\int_\Omega (Mu)^2 \, dx = \int_\Omega (|2m \cdot \nabla u|^2 + (1-n^2)u^2) \, dx + (2n-2) \int_\Gamma (m \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma.$$

Si, de plus, u est nulle sur Γ, on aura

$$\int_\Omega (Mu)^2 \, dx \leq 4R^2 \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$$

Preuve.

$$\begin{aligned}
\int_\Omega (Mu)^2 \, dx &= \int_\Omega |2m \cdot \nabla u + (n-1)u|^2 \, dx \\
&= \int_\Omega (|2m \cdot \nabla u|^2 + (n-1)^2 u^2 + 4(n-1)u(m \cdot \nabla u)) \, dx \\
&= \int_\Omega (|2m \cdot \nabla u|^2 + (n-1)^2 u^2 + (2n-2) m \cdot \nabla(u^2)) \, dx \\
&= \int_\Omega (|2m \cdot \nabla u|^2 + (n-1)^2 u^2 - n(2n-2)u^2) \, dx \\
&+ (2n-2) \int_\Gamma (m \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma \\
&= \int_\Omega (|2m \cdot \nabla u|^2 + (1-n^2)u^2) \, dx + (2n-2) \int_\Gamma (m \cdot \nu) u^2 \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

$\square$

Il est maintenant facile de prouver l'inégalité inverse(2.14).
Rappellons que l'énergie du système (2.8) vérifie

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_\Omega (|\nabla u|^2 + |u'|^2) \, dx = E(0), \ \forall t \in [0, T].$$

D'après ce dernier lemme, on a

$$\left| \int_\Omega u' M u \, dx \right| \leq \int_\Omega (R(u')^2 + \frac{1}{4R}(Mu)^2) \, dx \leq R \int_\Omega ((u')^2 + |\nabla u|^2) \, dx = 2RE.$$

Donc, le membre de droite de l'identité (2.20) peut être minoré par

$$(2T - 4R)E(0) = (T - 2R) \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) \, dx,$$

tandis que le membre de gauche est majoré par

$$R \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma dt.$$

On obtiendra alors l'inégalité d'observabilité (2.14)

$$c \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) dx \leq \int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt$$

dès que l'on a $T - 2R > 0$.

Remarque 2.7. *Comme on peut le constater, on n'a pas fait usage de la condition géométrique* $(x - x_0) \cdot \nu(x) > 0$*. On insiste néanmoins sur sa nécessité qui paraîtrait plus évidente quand elle est vérifiée seulement sur une partie du bord* Γ_0*, auquel cas le côté droit de* (2.20) *est majoré par*

$$R \int_0^T \int_{\Gamma_0} (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma dt.$$

On pourrait également tirer l'inégalité d'admissibilité

$$\int_0^T \int_\Gamma \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt \leq c \int_\Omega |\nabla u_0|^2 + |u_1|^2 \, dx$$

de l'identité (2.20)*. En effet, puisque* $m \cdot \nu$ *est strictement positif, il existe une constante* $c > 0$ *telle que le côté gauche de* (2.20) *est minoré par*

$$R \int_0^T \int_\Gamma (\partial_\nu u)^2 \, d\Gamma dt;$$

en outre, le membre de droite peut être majoré par

$$\begin{aligned} 2RE(0) + 2RE(T) + 2\int_0^T E(t) \, dt &= (2T + 4R)E(0) \\ &= (T + 2R) \int_\Omega |\nabla u_0|^2 + |u_1|^2 \, dx, \end{aligned}$$

et on a ainsi l'inégalité voulue.
En fait, dans la suite on emploiera la méthode des multiplicateurs pour démontrer l'admissibilité de notre opérateur d'observation. L'inégalité inverse sera établie moyennant une autre méthode qui repose sur l'analyse non harmonique.

Il importe de souligner que la condition $T > 2R$ *n'est pas optimale en général, seulement quand le domaine* Ω *contient un segment de longueur* $2R$ *(voir remarque 3.6. [25]).*

2.5.2 Les estimations de Carleman

Les inégalités de Carleman sont des estimations de la norme L^2 d'un opérateur différentiel. Elles reposent sur une fonction poids sous forme exponentielle et sur des paramètres qui peuvent être pris aussi grands que nécessaire. En fait, c'est le mathématicien suédois T. Carleman [7] qui est le premier à concevoir de telles estimations dans le but de démontrer une propriété de continuation unique pour un opérateur elliptique. Depuis lors, les travaux abondent dans cette direction et les inégalités de Carleman se révèlent un outil puissant pour l'analyse des EDPs, d'autant plus qu'elles s'appliquent également à l'étude de la contrôlabilité et des problèmes inverses [54, 55, 63, 2, 62, 51]. Plus précisément, on parvient à déduire l'inégalité d'observabilité d'un système de l'estimation de Carleman associée à son opérateur différentiel.

Conformément à la thématique de ce travail, on va retrouver ci-après l'observabilité de l'équation des ondes en utilisant une inégalité de Carleman globale développée par Imanuvilov [22] pour les équations hyperboliques.

L'inégalité de Carleman pour l'opérateur des ondes.

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ouvert borné de frontière régulière Γ. On considère une fonction $\psi \in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$ telle que

$$L_0\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} - \Delta\psi \in L^2(-T,T;L^2(\Omega)),\ \ \psi = 0 \text{ sur } \Gamma \times (-T,T), \tag{2.25}$$

$$\psi(-T) = \psi(T) = 0,\ \frac{\partial\psi}{\partial t}(-T) = \frac{\partial\psi}{\partial t}(-T) = 0. \tag{2.26}$$

Soit $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$. On dénote

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma,\ (x - x_0)\cdot\nu(x) > 0\},$$

où $\nu(x)$ est le vecteur normal à Γ au point x. On définit la fonction poids ϕ par

$$\phi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta t^2 + M_0,$$

où $0 < \beta < 1$ et M_0 est choisi de sorte que

$$\phi(x,t) \geq 1,\ \forall (x,t) \in \Omega \times (-T,T).$$

Soit $\lambda > 0$. On définit

$$\varphi_\lambda(x,t) = e^{\lambda\phi(x,t)}.$$

On pose pour $s > 0$

$$\omega = e^{s\varphi_\lambda}\psi.$$

Alors, on a formellement (en supposant la fonction ψ suffisamment régulière)

$$P_0\omega = e^{s\varphi_\lambda} L_0(e^{-s\varphi_\lambda}\omega) = e^{s\varphi_\lambda} L_0\psi.$$

D'autre part,

$$\frac{\partial}{\partial t}(e^{-s\varphi_\lambda}\omega) = e^{-s\varphi_\lambda}\left(\frac{\partial \omega}{\partial t} - s\lambda\frac{\partial \phi}{\partial t}\varphi_\lambda\omega\right),$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial t^2}(e^{-s\varphi_\lambda}\omega) = e^{-s\varphi_\lambda}(&\frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - s\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2\varphi_\lambda\omega - s\lambda\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2}\varphi_\lambda\omega \\ &- 2s\lambda\varphi_\lambda\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial t} + s^2\lambda^2\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2\varphi_\lambda^2\omega),\end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(e^{-s\varphi_\lambda}\omega) = e^{-s\varphi_\lambda}\left(\frac{\partial \omega}{\partial x_i} - s\lambda\frac{\partial \phi}{\partial x_i}\varphi_\lambda\omega\right),$$

$$\begin{aligned}\Delta(e^{-s\varphi_\lambda}\omega) = e^{-s\varphi_\lambda}(&\Delta\omega - s\lambda^2|\nabla\phi|^2\varphi_\lambda\omega - s\lambda\Delta\phi\varphi_\lambda\omega \\ &- 2s\lambda\varphi_\lambda\nabla\phi\cdot\nabla\omega + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2|\nabla\phi|^2\omega).\end{aligned}$$

On écrit alors

$$P_0\omega = P_1\omega + P_2\omega + R_0\omega,$$

avec

$$P_1\omega = \frac{\partial^2\omega}{\partial t^2} - \Delta\omega + s^2\lambda^2\varphi_\lambda^2\left(\left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)^2 - |\nabla\phi|^2\right)\omega, \tag{2.27}$$

$$\begin{aligned}P_2\omega = (M_1 - 1)s\lambda\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi)\omega - s\lambda^2\varphi_\lambda((\frac{\partial \phi}{\partial t})^2 - |\nabla\phi|^2)\omega \\ - 2s\lambda\varphi_\lambda(\frac{\partial \phi}{\partial t}\frac{\partial \omega}{\partial t} - \nabla\phi\cdot\nabla\omega),\end{aligned} \tag{2.28}$$

$$R_0\omega = -M_1 s\lambda\varphi_\lambda(\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \Delta\phi)\omega.$$

Le paramètre M_1 est choisi tel que

$$\frac{2\beta}{\beta + n} < M_1 < \frac{2}{\beta + n}.$$

On est maintenant en mesure de donner une estimation de Carleman pour l'opérateur des ondes L_0. Longue et technique qu'est la preuve, on va se limiter à l'énoncé de ce résultat et on renvoie le lecteur intéressé à [22, 51].

Théorème 2.9. *Soit $\psi \in L^2(-T,T;L^2(\Omega))$. On suppose qu'elle satisfait à (2.25), (2.26). Alors, il existe $\lambda_0 > 0$, $s_0 > 0$ et $C = C(\lambda_0, s_0, \Omega, \beta, x_0)$ tels que pour tout $\lambda \geq \lambda_0$, $s \geq s_0$ on a l'inégalité*

$$\begin{aligned} s\lambda \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda(|\frac{\partial \psi}{\partial t}|^2 + |\nabla\psi|^2)\ dxdt + s^3\lambda^3 \int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3|\psi|^2\ dxdt \\ + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_1\omega|^2 dxdt + \int_{-T}^{T}\int_{\Omega}|P_2\omega|^2 dxdt \\ \leq C\int_{-T}^{T}\int_{\Omega} e^{2s\varphi_\lambda}|L_0\psi|^2 dxdt + Cs\lambda\int_{-T}^{T}\int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}|\frac{\partial\psi}{\partial\nu}|^2\ d\Gamma dt. \end{aligned} \tag{2.29}$$

Application à l'observabilité de l'équation des ondes.

On considère le système d'évolution

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \textit{dans} \quad \Omega \times (0,T), \\ u = 0 & \textit{sur} \quad \Gamma \times (0,T), \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1. & \end{cases}$$

On sait maintenant que pour tout $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ la solution existe et est unique dans $u \in C(0,T;H_0^1(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega))$. De plus, l'énergie est conservée au cours du temps

$$E(t) = E(0) = \int_{\Omega}(|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2)\ dx,\ \forall t \in (0,T).$$

On va appliquer l'inégalité de Carleman que l'on vient de donner pour démontrer le résultat suivant analogue à celui obtenu par la méthode des multiplicateurs :

Théorème 2.10. *On suppose qu'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{\Omega}$ tel que la région observée vérifie*

$$\Gamma_0 = \{x \in \Gamma,\ (x - x_0)\cdot\nu(x) > 0\}.$$

Alors pour tout $T > 2\sup_{x\in\Omega}|x - x_0|$, il existe une constante $C > 0$ telle que

$$E(0) \leq C\int_0^T\int_{\Gamma_0}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\ d\Gamma dt. \tag{2.30}$$

Preuve. On considère la fonction poids

$$\phi(x,t) = |x - x_0|^2 - \beta(t - \frac{T}{2})^2 + M_0$$

où β et M_0 sont choisis tels que

$$1 > \beta > \frac{4}{T^2} \sup_{x\in\Omega} |x - x_0|^2, \text{ et } \phi(x,t) \geq 1, \; \forall (x,t) \in \Omega \times (0,T).$$

Il est facile de voir que

$$\forall t \in [0,T], \; \phi(x,t) \leq \phi(x, \frac{T}{2}) \text{ et } \phi(x, \frac{T}{2}) > M_0$$

d'où, il existe $\eta > 0$ tel que

$$\phi(x,t) \geq M_0, \; \forall x \in \Omega, \; \forall t \in \left[\frac{T}{2} - \eta, \frac{T}{2} + \eta\right].$$

Par ailleurs,

$$\phi(x,0) = \phi(x,T) = |x - x_0|^2 - \beta\frac{T^2}{4} + M_0,$$

ce qui fait qu'avec notre choix de β, il existe $\delta > 0$ tel que

$$\phi(x,t) \leq M_0, \; \forall t \in [0,\delta] \cup [T-\delta, T].$$

On définit une fonction $\theta_\delta \in C^\infty([0,T])$ satisfaisant

$$\forall t \in [0,T], \; 0 \leq \theta_\delta(t) \leq 1, \; \theta_\delta(0) = \theta_\delta(T) = 0, \; \forall t \in [\delta, T-\delta], \; \theta_\delta(t) = 1.$$

On pose $z(x,t) = \theta_\delta(t)u(x,t)$. Alors on a

$$z = 0 \text{ sur } \Gamma \times (0,T),$$

$$z(0) = z(T) = 0, \; \frac{\partial z}{\partial t}(0) = \frac{\partial z}{\partial t}(T) = 0, \; x \in \Omega.$$

Soit $\varphi_\lambda(x,t) = e^{\lambda\phi(x,t)}$, $\lambda > 0$. On peut donc appliquer l'inégalité de Carleman (2.29) à la fonction z dans l'intervalle $(0,T)$ pour obtenir l'existence des paramètres $s_0, \lambda_0 > 0$ et d'une constante $C > 0$ tels que

$$\begin{aligned} s\lambda \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda(|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + |\nabla z|^2) \; dxdt + s^3\lambda^3 \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda^3 |z|^2 \; dxdt \\ \leq C \int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0 z|^2 dxdt + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda}|\frac{\partial z}{\partial \nu}|^2 \; d\Gamma dt \end{aligned} \tag{2.31}$$

pour tout $\lambda \geq \lambda_0$ et $s \geq s_0$. Grâce à l'inégalité de Poincaré et le fait que $\theta_\delta = 1$ sur $[\delta, T-\delta]$, on tire

$$\begin{aligned}\int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}|L_0 z|^2 dxdt \leq C_0 \int_0^\delta \int_\Omega e^{2se^{\lambda M_0}} (|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + |\nabla z|^2)\, dxdt \\ + C_0 \int_{T-\delta}^T \int_\Omega e^{2se^{\lambda M_0}} (|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + |\nabla z|^2)\, dxdt \\ \leq 2\delta C_0 e^{2se^{\lambda M_0}} E(0).\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}&\int_0^T \int_\Omega e^{2s\varphi_\lambda}\varphi_\lambda (|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + |\nabla z|^2)\, dxdt \\ &\qquad \geq \int_{\frac{T}{2}-\eta}^{\frac{T}{2}+\eta} \int_\Omega e^{2se^{\lambda M_0}} \varphi_\lambda (|\frac{\partial z}{\partial t}|^2 + |\nabla z|^2)\, dxdt \\ &\qquad \geq 4\eta e^{2se^{\lambda M_0}} E(0).\end{aligned}$$

Il résulte de l'inégalité (2.31) que

$$4s\lambda\eta e^{2se^{\lambda M_0}} E(0) \leq 2\delta C_0 e^{2se^{\lambda M_0}} E(0) + Cs\lambda \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s\varphi_\lambda} |\frac{\partial z}{\partial \nu}|^2\, d\Gamma dt. \quad (2.32)$$

Alors en choisissant $s\lambda$ suffisamment grand, on trouve

$$E(0) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_0} e^{2s(\varphi_\lambda - e^{\lambda M_0})} |\frac{\partial z}{\partial \nu}|^2\, d\Gamma dt,$$

d'où l'inégalité d'observabilité voulue. □

2.5.3 Théorèmes de type Ingham

Lorsque la solution du problème observé (2.1) peut s'exprimer explicitement en série de Fourier (le cas d'un semi-groupe diagonalisable), l'inégalité d'observabilité pourrait bien être démontrée en utilisant des théorèmes de type Ingham. Il s'agit d'inégalités trigonométriques, dont la première version est due à Ingham [23], et que l'on peut considérer comme une généralisation de *l'identité de Parseval* à des suites non orthogonales. Dès lors, de nombreuses variantes ont été développées et employées en théorie du contrôle notamment pour établir l'observabilité [24], [45], [56], [30], [13].

On commence par présenter la toute première version de l'inégalité telle qu'elle était donnée dans [23].

Théorème 2.11. *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe une constante $\gamma > 0$ telle que*

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| \geq \gamma > 0, \ \forall n \in \mathbb{Z}. \tag{2.33}$$

Alors pour tout $T > \dfrac{\pi}{\gamma}$, il existe $c_1 = c_1(T,\gamma) > 0$, $c_2 = c_2(T,\gamma) > 0$ telles que

$$c_1 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^{T} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \leq c_2 \sum_{n\in\mathbb{Z}} |a_n|^2, \tag{2.34}$$

pour toute suite de coefficients $(a_n) \in l^2(\mathbb{C})$.

Comme c'est la première inégalité (appelée inégalité inverse) de (2.34) qui nous importe, nous allons reprendre sa démonstration. Pour l'inégalité directe, on peut voir [23], [26].

Preuve. Supposons que T vérifie $T\gamma > \pi$. Alors,

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\frac{T\lambda_n}{\pi}s} \right|^2 ds = \frac{T}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n s} \right|^2 ds,$$

où $\mu_n = \frac{T\lambda_n}{\pi}$. De plus, on a

$$|\mu_{n+1} - \mu_n| = \frac{T|\lambda_{n+1} - \lambda_n|}{\pi} > \frac{T\gamma}{\pi} := \tilde{\gamma} > 1,$$

donc, il suffit de démontrer (2.34) pour $T = \pi$ et $\tilde{\gamma} > 1$.

On introduit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$h(t) = \begin{cases} \cos(t/2) & \text{si} \quad |t| \leq \pi, \\ 0 & \text{si} \quad |t| > \pi. \end{cases}$$

Sa transformée de Fourier vaut

$$K(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{ixt}\, dt = \frac{4\cos \pi x}{1 - 4x^2}.$$

Comme $0 \leq h \leq 1$, on trouve

$$\begin{aligned}
\int_{-\pi}^{\pi} \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt &\geq \int_{-\pi}^{\pi} h(t) \left| \sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t} \right|^2 dt = \sum_{n,m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\
&= K(0) \sum_n |a_n|^2 + \sum_{n\neq m} a_n \overline{a_m} K(\mu_n - \mu_m) \\
&\geq 4 \sum_n |a_n|^2 - \frac{1}{2} \sum_{n\neq m} (|a_n|^2 + |a_m|^2)|K(\mu_n - \mu_m)| \\
&= 4 \sum_n |a_n|^2 - \sum_n |a_n|^2 \sum_{n\neq m} |K(\mu_n - \mu_m)|.
\end{aligned}$$

Or on a

$$\sum_{n\neq m} |K(\mu_n-\mu_m)| \leq \sum_{n\neq m} \frac{4}{4|\mu_n-\mu_m|^2-1} \leq \sum_{n\neq m} \frac{4}{4\tilde{\gamma}^2|n-m|^2-1} =$$
$$= 8\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{4\tilde{\gamma}^2 l^2-1} \leq \frac{8}{\tilde{\gamma}^2}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{4l^2-1} = \frac{8}{\tilde{\gamma}^2}\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2l-1}-\frac{1}{2l+1}\right) = \frac{4}{\tilde{\gamma}^2}.$$

On obtient

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\mu_n t}\right|^2 dt \geq \left(4-\frac{4}{\tilde{\gamma}^2}\right)\sum_n |a_n|^2.$$

De la remarque faite au début de cette preuve, on déduit qu'avec $T>0$ cette dernière inégalité devient

$$\int_{-T}^{T}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt \geq \frac{T}{\pi}\left(4-\frac{4\pi^2}{T^2\gamma^2}\right)\sum_n |a_n|^2.$$

□

Remarque 2.8. • *L'inégalité directe de (2.34) est satisfaite pour tout $T>0$, alors que l'inégalité inverse nécessite la condition $T>\frac{\pi}{\gamma}$. De ce fait, plus l'écart γ est petit, plus le temps T doit être grand.*

- *La condition $T>\frac{\pi}{\gamma}$ signifie que le temps T dépend de la distance minimale de deux termes successifs de la suite (λ_n) ; cependant, ce qui compte, c'est la distance asymptotique lorsque $n\to\infty$.*

Soit γ_∞ l'écart à l'infini i.e.

$$\gamma_\infty := \liminf_{|n|\to\infty} |\lambda_{n+1}-\lambda_n|. \tag{2.35}$$

On relaxera le résultat du théorème 2.11 en démontrant que l'estimation (2.34) est encore vérifiée pour $T>\frac{\pi}{\gamma_\infty}$. Pour ce faire, on adoptera le même raisonnement que celui de Haraux [21] (voir aussi [26], théorème 4.5.). Sous l'hypothèse (2.35), (2.34) est satisfaite pour les series $\sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t}$ avec N assez grand ; ainsi pour se ramener à (2.34), il suffit d'y rajouter le nombre fini de termes manquants.

Théorème 2.12. *Soit $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ une suite réelle croissante telle que $|\lambda_{n+1}-\lambda_n|\geq\gamma>0$, $\forall n\in\mathbb{Z}$ et soit γ_∞ donné par (2.35). Alors pour tout $T>\frac{\pi}{\gamma_\infty}$, il existe $c_1,c_2>0$ tels que*

$$c_1\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2 \leq \int_{-T}^{T}\left|\sum_{n\in\mathbb{Z}} a_n e^{i\lambda_n t}\right|^2 dt \leq c_2\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2, \tag{2.36}$$

pour toute suite de coefficients $(a_n)\in l^2(\mathbb{C})$.

Preuve. L'inégalité directe de (2.36) étant vraie d'après le théorème précédent, quel que soit le temps $T > 0$, il suffit donc d'établir l'inégalité inverse.

Soit $\epsilon_1 > 0$. D'après la définition de γ_∞, il existe $N = N(\epsilon_1) \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$|\lambda_{n+1} - \lambda_n| > \gamma_\infty - \epsilon_1 \text{ pour } |n| > N. \tag{2.37}$$

On considère d'abord une fonction f_0 ayant pour l'expression

$$f_0(t) = \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t}.$$

Tenant compte de (2.37), le théorème 2.11 appliqué à la fonction f_0 implique que pour tout $T > \frac{\pi}{\gamma_\infty - \epsilon_1}$

$$c_1 \sum_{|n|>N} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^{T} |f_0(t)|^2 dt \leq c_2 \sum_{|n|>N} |a_n|^2. \tag{2.38}$$

Prenons maintenant la fonction

$$f_1(t) = f_0(t) + a_N e^{i\lambda_N t} = \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} + a_N e^{i\lambda_N t}.$$

Pour simplifier, on suppose, sans perte de généralité, que $\lambda_N = 0$ car on peut tout aussi bien considérer la fonction $f_1(t)e^{-i\lambda_N t}$ au lieu de $f_1(t)$.

Soit ϵ tel que $\tilde{T} = T - \epsilon > \frac{\pi}{\gamma_\infty}$. Alors on a

$$\int_0^\epsilon (f_1(t+\eta) - f_1(t))\, d\eta = \sum_{|n|>N} a_n \left(\frac{e^{i\lambda_n \epsilon} - 1}{i\lambda_n} - \epsilon \right) e^{i\lambda_n t}, \ \forall t \in [0, \tilde{T}]$$

Appliquant l'inégalité inverse de (2.34) à la fonction $g(t) = \int_0^\epsilon (f_1(t+\eta) - f_1(t))\, d\eta$, il en résulte

$$c_1 \sum_{|n|>N} \left| \frac{e^{i\lambda_n \epsilon} - 1}{i\lambda_n} - \epsilon \right|^2 |a_n|^2 \leq \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \left| \int_0^\epsilon (f_1(t+\eta) - f_1(t))\, d\eta \right|^2 dt. \tag{2.39}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned} |e^{i\lambda_n \epsilon} - 1 - i\lambda_n \epsilon|^2 &= |\cos(\lambda_n \epsilon) - 1|^2 + |\sin(\lambda_n \epsilon) - \lambda_n \epsilon|^2 \\ &= 4 \sin^4 \left(\frac{\lambda_n \epsilon}{2} \right) + (sin(\lambda_n \epsilon) - \lambda_n \epsilon)^2 \\ &\geq \left\{ \begin{array}{l} 4 \left(\frac{\lambda_n \epsilon}{2} \right)^4, \text{ si } |\lambda_n| \epsilon \leq \pi \\ (\lambda_n \epsilon)^2 \text{ si } |\lambda_n| \epsilon > \pi \end{array} \right. \end{aligned}$$

En observant que $|\lambda_n| > \gamma,\ n \in \mathbb{N}$, on obtient

$$\left| \frac{e^{i\lambda_n \epsilon} - 1}{i\lambda_n} - \epsilon \right|^2 \geq c\epsilon^2;$$

ainsi, (2.39) deviendra

$$\epsilon^2 c_1 \sum_{|n|>N} |a_n|^2 \leq \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \left| \int_0^{\epsilon} (f_1(t+\eta) - f_1(t))\, d\eta \right|^2 dt. \tag{2.40}$$

Par ailleurs, grâce aux inégalités de Cauchy-Schwarz et de Young on aura

$$\begin{aligned}
&\int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \left| \int_0^{\epsilon} (f_1(t+\eta) - f_1(t))\, d\eta \right|^2 dt \\
&\quad \leq \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \epsilon \int_0^{\epsilon} |f_1(t+\eta) - f_1(t)|^2\, d\eta\, dt \\
&\quad \leq 2\epsilon \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \int_0^{\epsilon} (|f_1(t+\eta)|^2 + |f_1(t)|^2)\, d\eta\, dt \\
&\quad \leq 2\epsilon^2 \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} |f_1(t)|^2\, dt + 2\epsilon \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} \int_0^{\epsilon} |f_1(t+\eta)|^2\, d\eta\, dt \\
&\quad = 2\epsilon^2 \int_{-\tilde{T}}^{\tilde{T}} |f_1(t)|^2\, dt + 2\epsilon \int_0^{\epsilon} \int_{-\tilde{T}+\eta}^{\tilde{T}+\eta} |f_1(s)|^2\, ds\, d\eta \\
&\quad \leq 2\epsilon^2 \int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2\, dt + 2\epsilon \int_0^{\epsilon} \int_{-T}^{T} |f_1(s)|^2\, ds\, d\eta \\
&\quad \leq 4\epsilon^2 \int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2\, dt.
\end{aligned}$$

Combinant (2.40) avec cette dernière inégalité entraine

$$c_1 \sum_{|n|>N} |a_n|^2 \leq \int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2\, dt. \tag{2.41}$$

Donc pour avoir l'estimation inverse de (2.36) pour la fonction f_1, il nous reste seulement à rajouter $|a_N|^2$ au membre de gauche de (2.41). Or, on a

$$\begin{aligned}
|a_N|^2 = \left| f_1(t) - \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 &= \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} \left| f_1(t) - \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \\
&\leq \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2 \, dt + \int_{-T}^{T} \left| \sum_{|n|>N} a_n e^{i\lambda_n t} \right|^2 dt \right) \\
&\leq \frac{1}{T} \left(\int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2 \, dt + c_2 \sum_{|n|>N} |a_n|^2 \right) \\
&\leq \frac{1}{T} \left(1 + \frac{c_2}{c_1} \right) \int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2 \, dt.
\end{aligned}$$

Ceci avec (2.41) donne

$$c_1 \left(\sum_{|n|>N} |a_n|^2 + |a_N|^2 \right) \leq \int_{-T}^{T} |f_1(t)|^2 \, dt.$$

En répétant ce processus, on peut ajouter les termes $a_{-N} e^{-i\lambda_N t}$, $a_n e^{i\lambda_n t}$, $|n| < N$ pour atteindre à la fin l'inégalité désirée (2.36). □

On peut trouver dans [26] un tas d'exemples d'application de l'inégalité (2.36) à l'observabilité de l'équation des ondes en une dimension avec différentes conditions aux limites (Dirichlet, Neumann, mêlées). Son intérêt est plus évident quand l'équation des ondes contient un terme d'ordre inférieur au, $a \in \mathbb{R}$. Dans le cas contraire, l'orthogonalité des fonctions propres fera l'affaire (voir l'introduction de [26]).

Toutes ces applications sont établies dans une dimension d'espace. Alors qu'en est-il du cas multidimensionnel ? Est-il possible d'établir, via un théorème de type Ingham, l'inégalité que l'on a obtenue dans les paragraphes précédents par la méthode des multiplicateurs et les inégalités de Carleman ?

L'obstacle majeur à une telle approche est qu'il se peut que plusieurs valeurs propres soient arbitrairement proches ou même égales, ne vérifiant ainsi pas la condition d'écart qui est à la base de l'inégalité d'Ingham. Cette difficulté a été surmontée par Mehrenberger en utilisant une décomposition propice de la série qui fait que l'on peut se débarrasser des termes où il n'y a pas d'écart. Ceci a abouti à une généralisation ingénieuse du théorème d'Ingham qui a permis de montrer l'observabilité de l'équation des ondes dans un domaine de la forme $\Omega = \prod_{i=1}^{n} (0, l_i)$.

Afin d'éviter de se répéter, puisque l'on prouvera dans le chapitre suivant une variante de cette généralisation, on se contente ici d'énoncer sans démonstration le résultat de Mehrenberger [45].

Théorème 2.13 (Mehrenberger). *Soient $d \in \mathbb{N}^*$, $(\lambda_k)_{k\in(\mathbb{N}^*)^d} \subset \mathbb{R}$, $(p_l)_{l\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$. Pour tout $j = 1, \ldots, d$, on suppose qu'il existe $\gamma_j > 0$ tel que*

$$|\lambda_{k_1,\ldots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\ldots,k_d} - \lambda_{k_1,\ldots,k_{j-1},k'_j,k_{j+1},\ldots,k_d}| > \gamma_j |k_j - k'_j|, \tag{2.42}$$

$$|\lambda_{k_1,\ldots,k_{j-1},k_j,k_{j+1},\ldots,k_d} + \lambda_{k_1,\ldots,k_{j-1},k'_j,k_{j+1},\ldots,k_d}| > \gamma_j |k_j + k'_j|, \tag{2.43}$$

pour tout multi-indice $k = (k_1, \ldots, k_d) \in (\mathbb{N}^*)^d$ et $k'_j \in \mathbb{N}^*$ tels que les poids $(p_l)_{l\in\mathbb{N}^*} \subset \mathbb{C}$ vérifient

$$\max_{j=1,\ldots,d,\ i\neq j} |p_{k_i}| \leq \max(|p_{k_j}|, |p_{k'_j}|). \tag{2.44}$$

Alors, pour $T > 2\pi\sqrt{\sum_{i=1}^d (1/\gamma_i^2)}$, il existe une constante $c > 0$ tel que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^d \sum_{k_1,\ldots,k_{j-1},k_{j+1},\ldots,k_d\in\mathbb{N}^*} \int_0^T \left| \sum_{k_j\in\mathbb{N}^*} p_{k_j} (\beta_k e^{i\lambda_k t} + \beta_{-k} e^{-i\lambda_k t}) \right|^2 dt \\ \geq c \sum_{k\in(\mathbb{N}^*)^d} (|\beta_k|^2 + |\beta_{-k}|^2) \left(\sum_{j=1}^d |p_{k_j}|^2 \right),\end{aligned} \tag{2.45}$$

pour toute suite de coefficients $(\beta_k)_{k\in(\mathbb{N}^*)^d}$, $(\beta_{-k})_{k\in(\mathbb{N}^*)^d} \in l^2(\mathbb{C})$.

Remarque 2.9. *Comme dans le cas de la première inégalité d'Ingham, Mehrenberger donne explicitement le temps minimal pour que son théorème soit valable et la constante y intervenant. Toutefois, appliquée à l'observabilité de l'équation des ondes, cette approche n'atteint pas la condition optimale du temps T.*

Outre les conditions d'écart spectral qu'exigent la généralisation de Mehrenberger, il convient d'attirer l'attention sur une autre contrainte un peu subtile. Les suites de coefficients $(\beta_k)_{k\in(\mathbb{N}^*)^d}$, $(\beta_{-k})_{k\in(\mathbb{N}^*)^d}$ doivent être les mêmes dans toutes les directions. Ceci n'a guère d'importance quand l'opérateur d'observation est de même nature sur toute la région observée, comme c'est le cas dans le problème de contrôle par le bord donné par Mehrenberger [45]. Toutefois, si l'on souhaite par exemple combiner des contrôles internes et frontières, ce petit détail gagne en poids faisant que l'estimation (2.45) ne peut plus mener au résultat voulu. Komornik et Loreti [30], [29] ont réussi à contourner cela en proposant une nouvelle formulation du théorème de Mehrenberger, qui leur a permis d'obtenir l'observabilité de membranes rectangulaires sur des régions n'obéissant pas à la condition géométrique de Bardos-Lebeau-Rauch [1].

Théorème 2.14. *Soit $(\lambda_k)_{k=-\infty}^{\infty}$ une suite réelle. On suppose qu'il existe un entier $n \geq 0$ et une constante $\gamma > 0$ tels que*

$$|\lambda_{k'} - \lambda_k| \geq |k' - k|\gamma \text{ lorsque } \max(|k'|, |k|) \geq n. \tag{2.46}$$

Alors pour toute suite $(a_k)_{k=-\infty}^{\infty} \subset l^2(\mathbb{C})$, on a l'inégalité suivante

$$\int_{-T}^{T} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \geq \frac{4T}{\pi} \left(\sum_{|k|\geq n} |a_k|^2 - \frac{\pi^2}{T^2\gamma^2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right). \tag{2.47}$$

Preuve. On suppose que $\gamma > 2$ et $T = \dfrac{\pi}{2}$. On définit la fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par

$$h(t) := \begin{cases} \cos t & \text{if} \quad |t| \leq \frac{\pi}{2} \\ 0 & \text{if} \quad |t| \geq \frac{\pi}{2}. \end{cases} \tag{2.48}$$

Alors la transformée de Fourier de h notée $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vaut

$$H(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{ixt}\, dt = \frac{-2\cos(\frac{x\pi}{2})}{x^2 - 1},\ x \neq \pm 1. \tag{2.49}$$

En effet, on a

$$\begin{aligned}
H(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} h(t)e^{ixt}\, dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos t \cos xt\, dt \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\cos t \cos xt\, dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos(x+1)t + \cos(x-1)t)\, dt \\
&= \left[\frac{\sin(x+1)t}{x+1} + \frac{\sin(x-1)t}{x-1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\sin(x+1)\frac{\pi}{2}}{x+1} + \frac{\sin(x-1)\frac{\pi}{2}}{x-1} \\
&= \frac{\cos(\frac{x\pi}{2})}{x+1} - \frac{\cos(\frac{x\pi}{2})}{x-1} = -2\frac{\cos(\frac{x\pi}{2})}{x^2-1}.
\end{aligned}$$

En observant que $0 \leq h \leq 1$, on aura

$$\begin{aligned}
\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt &\geq \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \left| \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \\
&= \sum_{\max(|k'|,|k|)\geq n} H(\lambda_{k'} - \lambda_k) a_{k'} \overline{a_k} + \int_{-\infty}^{\infty} h(t) \left| \sum_{|k|<n} a_k e^{i\lambda_k t} \right|^2 dt \\
&\geq \sum_{\max(|k'|,|k|)\geq n} H(\lambda_{k'} - \lambda_k) a_{k'} \overline{a_k} \\
&= H(0) \sum_{|k|\geq n} |a_k|^2 + \sum_{max(|k'|,|k|)\geq n,\ k'\neq k} H(\lambda_{k'} - \lambda_k) a_{k'} \overline{a_k} \\
&\geq H(0) \sum_{|k|\geq n} |a_k|^2 - \sum_{\max(|k'|,|k|)\geq n,\ k'\neq k} |H(\lambda_{k'} - \lambda_k)| \frac{|a_{k'}|^2 + |a_k|^2}{2} \\
&\geq H(0) \sum_{|k|\geq n} |a_k|^2 - \sum_{\max(|k'|,|k|)\geq n,\ k'\neq k} |H(\lambda_{k'} - \lambda_k)| |a_k|^2 \\
&\geq \sum_{|k|\geq n} |a_k|^2 (H(0) - \sum_{k'\neq k} |H(\lambda_{k'} - \lambda_k)|) - \sum_{|k|<n} |a_k|^2 \sum_{|k'|\geq n} |H(\lambda_{k'} - \lambda_k)|.
\end{aligned}$$

De l'expression de la fonction H, on tire que

$$H(0) = 2 \text{ et } |H(x)| \leq \frac{2}{x^2 - 1} \text{ si } |x| > 1.$$

Par ailleurs, on a pour $|k| \geq n$

$$\begin{aligned}
\sum_{k'\neq k} |H(\lambda_{k'} - \lambda_k)| &\leq \sum_{k'\neq k} \frac{2}{|\lambda_{k'} - \lambda_k|^2 - 1} \leq \sum_{k'\neq k} \frac{2}{|k' - k|^2 \gamma^2 - 1} \\
&\leq \sum_{k'\neq k} \frac{2}{|k' - k|^2 \gamma^2 - \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{8}{\gamma^2} \sum_{k'\neq k} \frac{1}{4|k' - k|^2 - 1} = \\
&= \frac{8}{\gamma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2}{4m^2 - 1} = \frac{8}{\gamma^2} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2m-1} - \frac{1}{2m+1} \right) = \frac{8}{\gamma^2}
\end{aligned}$$

De même pour $|k| < n$, on obtient

$$\sum_{|k'|\geq n} |H(\lambda_{k'} - \lambda_k)| \leq \frac{8}{\gamma^2}.$$

Tenant compte de ces estimations, l'inégalité (2.47) s'ensuit. $\square$

Observabilité frontière de l'équation des ondes.

On considère une membrane rectangulaire $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2),\ l_1, l_2 > 0$. On note par Γ sa frontière et par Γ_0 la partie

$$\Gamma_0 = (0, l_1) \times \{0\} \cup \{0\} \times (0, l_2).$$

L'évolution est gouvernée par les équations

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & dans \quad \Omega \times (0, T), \\ u = 0 & sur \quad \Gamma \times (0, T), \\ u(0) = u_0,\ u'(0) = u_1, \end{cases} \tag{2.50}$$

où les données initiales $u_0,\ u_1$ sont dans $H_0^1(\Omega),\ L^2(\Omega)$. La solution de ce système est donnée par la serie de Fourier

$$u(x,t) = \sum_{k_1=1}^{\infty} \sum_{k_2=1}^{\infty} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{l_1}\right) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{l_2}\right), \tag{2.51}$$

où $k = (k_1, k_2),\ x = (x_1, x_2),\ \omega_k = \sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{k_2\pi}{l_2}\right)^2}$.

On cherche à appliquer le théorème de Mehrenberger pour arriver à l'inégalité inverse

$$c \int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) dx \le \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt. \tag{2.52}$$

En utilisant la série (2.51) et en mettant à profit l'orthogonalité des fonctions sinus dans $L^2(0, l_i),\ i = 1, 2$, on trouve

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_0} \left| \frac{\partial u}{\partial \nu} \right|^2 \, d\Gamma dt \\ &= \int_0^T \int_0^{l_2} \left| \sum_k \frac{k_1 \pi}{l_1} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \sin\left(\frac{k_2 \pi x_2}{l_2}\right) \right|^2 \, dx_2 dt \\ &+ \int_0^T \int_0^{l_1} \left| \sum_k \frac{k_2 \pi}{l_2} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \sin\left(\frac{k_1 \pi x_1}{l_1}\right) \right|^2 \, dx_1 dt \\ &= \frac{l_2}{2} \int_0^T \sum_{k_2=1}^{\infty} \left| \sum_{k_1=1}^{\infty} \frac{k_1 \pi}{l_1} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \right|^2 \, dt \\ &+ \frac{l_1}{2} \int_0^T \sum_{k_1=1}^{\infty} \left| \sum_{k_2=1}^{\infty} \frac{k_2 \pi}{l_2} (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \right|^2 \, dt. \end{aligned} \tag{2.53}$$

D'où,

$$\int_0^T \int_{\Gamma_0} \left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma dt \asymp \int_0^T \sum_{k_2=1}^{\infty} \left| \sum_{k_1=1}^{\infty} k_1 (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \right|^2 dt$$
$$+ \int_0^T \sum_{k_1=1}^{\infty} \left| \sum_{k_2=1}^{\infty} k_2 (a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}) \right|^2 dt. \tag{2.54}$$

De la même manière, on obtient

$$\int_\Omega (|\nabla u_0|^2 + |u_1|^2) dx \asymp \sum_k (|k_1|^2 + |k_2|^2)(|a_k|^2 + |a_{-k}|^2). \tag{2.55}$$

Ainsi, l'inégalité d'observabilité découle directement du théorème de Mehrenberger (2.13) pourvu que les (ω_k) vérifient ses conditions d'écart. En effet, pour tout $k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $k_1' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\max(k_1, k_1') \geq k_2$, on a

$$|\omega_k - \omega_{k'}| \geq \gamma_1 |k_1 - k_1'|,$$

$$|\omega_k + \omega_{k'}| \geq \gamma_1 |k_1 + k_1'|$$

où $\gamma_1 = \dfrac{\pi^2}{l_1^2} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^2/l_1^2 + \pi^2/l_2^2}}$ (voir [45]). Similairement, pour $k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$, $k_2' \in \mathbb{N}^*$ tels que $\max(k_2, k_2') \geq k_1$, on aura

$$|\omega_k - \omega_{k'}| \geq \gamma_2 |k_2 - k_2'|,$$

$$|\omega_k + \omega_{k'}| \geq \gamma_2 |k_2 + k_2'|$$

avec $\gamma_2 = \dfrac{\pi^2}{l_2^2} \dfrac{1}{2\sqrt{\pi^2/l_1^2 + \pi^2/l_2^2}}$. Par conséquent, l'inégalité d'observabilité est valable pour tout $T > 2\pi\sqrt{1/\gamma_1^2 + 1/\gamma_2^2}$.

On peut aboutir à ce même résultat à l'aide du théorème 2.14 en traitant séparément chaque terme du côté gauche de (2.54) (voir [30]).

Chapitre 3

Observability of wave equation with Ventcel dynamic condition

Ce chapitre constitue le contenu d'une publication [4] dans la revue "*Evolution Equations & Control Theory*".

Résumé. L'objectif principal de ce travail est de prouver une nouvelle variante de l'inégalité de Mehrenberger. Nous l'appliquons, par la suite, pour établir plusieurs estimations d'observabilité pour l'équation des ondes soumise à la condition dynamique de Ventcel.

Abstract. The main purpose of this work is to prove a new variant of Mehrenberger's inequality. Subsequently, we apply it to establish several observability estimates for the wave equation subject to Ventcel dynamic condition.

3.1 Introduction

In the present paper, we address the exact controllability of the standard wave equation with mixed boundary condition: dynamic Ventcel condition on one part of the boundary and Dirichlet's on the other part. More precisely, let Ω be an open rectangular domain in $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$ with boundary Γ

$$\Omega = \prod_{i=1}^{n}(0, l_i), \ \ l_i > 0.$$

Let Γ_i, $i = 1, \ldots, n$, Γ_V and S denote the following subsets of Γ:

$$\Gamma_i = \prod_{j=1}^{i-1}(0, l_j) \times \{0\} \times \prod_{j=i+1}^{n}(0, l_j),\ i = 1, \ldots, n,$$
$$\Gamma_V = \prod_{j=1}^{n-1}(0, l_j) \times \{l_n\},$$
$$S = \overline{\Gamma}_V \cap \left(\bigcup_{i=1}^{n} \overline{\Gamma}_i\right).$$

Given $T > 0$, we consider the initial boundary value problem:

$$\begin{cases} v'' - \Delta v = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ v'' - \Delta_T v + \partial_\nu v = 0 & \text{on } \Gamma_V \times (0, T), \\ v = w_i & \text{on } \Gamma_i \times (0, T),\ i = 1, \ldots, n, \\ v = w_S & \text{on } S \times (0, T), \\ v = 0 & \text{on } [\Gamma \backslash (\Gamma_V \cup (\bigcup_{i=1}^{n} \Gamma_i) \cup S)] \times (0, T), \\ v(x, 0) = v_0(x),\ v'(x, 0) = v_1(x), & x \in \Omega, \\ v(x, 0) = v_2(x),\ v'(x, 0) = v_3(x), & x \in \Gamma_V; \end{cases} \tag{3.1}$$

where Δ_T designates the tangential laplacien on Γ_V, ∇_T the tangential gradient on Γ_V and ∂_ν the normal derivative with ν denoting the unit outward normal field to Γ.

The second equation is called dynamic Ventcel boundary condition on Γ_V. Differential problems with Ventcel conditions are quite interesting from the practical point of view, for they can model several physical processes. We mention as an example, the vibrations of an elastic body with a thin layer of high rigidity at the boundary [35], [36], [37] (see also [44], [18], and the references therein for more on the physical meanings of such problems).

The existence and regularity of solutions to such systems have been first investigated by Lemrabet [35], [36] with static Ventcel condition and later, by Lemrabet and Teniou [37] with dynamic Ventcel condition. Thus, we need not worry about an ill-posed problem. The main issue we are discussing here is the exact controllability of (3.1); though already studied in [44], [18], it seems that, compared to stabilization (see, e.g. [8], [9], [47]), it has received less attention.

In a recent paper, Gal and Tebou [18] have been able to derive, under some geometrical restrictions, a rather complex Carleman estimate for a problem similar to the one under consideration. Subsequently, using two controls, one on Ventcel portion of the boundary and the other on Dirichlet's, the authors have applied this estimate to establish the controllability of nonconservative waves.

Thanks to the particular structure of our domain, it's possible to take a much simpler approach; say the one based on Fourier expansions and Ingham type theorems. Since Ingham's first inequalities [23], many variants have been introduced and used in control theory [45], [29], [31], [30]. In particular, there is the outstanding generalization due to Mehrenberger [45] which extends Ingham's theorem to cover n-dimensional intervals.

Although working with these estimates, no one has retrieved the optimal time condition given by multiplier techniques; this approach remains significantly simpler to implement than the other methods.

To our knowledge, few are the papers investigating the exact controllability of systems such as ours and none are those with Ingham's theorems as their tools. The existing literature involves especially Dirichlet and Neumann conditions.

The system (3.1) is said to be exactly controllable if, for any given initial data v_0, v_1, v_2, v_3 (in suitable Hilbert spaces), there exist control functions $w_i, i = 1, \dots, n$, w_S such that

$$\begin{aligned} v(x,T) = v'(x,T) = 0 \text{ in } \Omega, \\ v(x,T) = v'(x,T) = 0 \text{ on } \Gamma_V. \end{aligned} \tag{3.2}$$

We shall work out this problem using the celebrated Hilbert Uniqueness Method (HUM) of J.-L. Lions [42] which permits us to prove the controllability of a system through the observability of the corresponding homogeneous problem. Spectral analysis of the latter has shown that the situation here is different from the case where Dirichlet condition is imposed on the whole boundary [45]. This brought out the need for the new version of Mehrenberger's theorem which we give in theorem 3.7. This adaptation is then used to establish the boundary observability cf. theorem 3.6.

After its first application to the observability of the wave equation with Dirichlet condition [45], Mehrenberger's inequality has been improved by Komornik and Miara ([31], proposition 3.1, p. 139) and applied to establish additional results on the observability of rectangular membranes. Motivated by the joint work of Komornik with Loreti [29], we represent our variant of Mehrenberger's estimate in such a way that it can be employed to attain more observability estimates.

We emphasize that in our first result (cf. thm 3.5), while minding the geometric condition of Bardos-Lebeau-Rauch [1], Dirichlet action has sufficed to steer the system to rest within a finite amount of time. This fact, though the settings are not the same, refutes Gal and Tebou final remarks; namely, the two controls (Dirichlet and Ventcel's) are equally necessary to kill the vibrations. Interestingly, even if we choose the controls to be supported on both Ventcel and Dirichlet boundary, the system is proven not to be exactly controllable only approximately.

For computational simplicity, the results are given in dimension 2, that is when the domain Ω is a rectangle. The case of higher dimensions can be handled similarly.

This article is organized as follows:

For the reader's convenience, in section 2, following HUM we prove the well-posedness of the associated homogeneous problem to (3.1) and we establish an a priori estimate (direct inequality). In section 3, after providing the spectral properties needed, we expand the solution of the homogeneous problem as a nonharmonic series. The existence of weak solution to problem (3.1) is given in section 4. Section 5 is devoted to the proof of our adaptation of Mehrenberger's theorem and its application to the boundary observability. Finally, in section 6 we obtain through this adaptation results on internal and combined internal-boundary observability.

In what follows, the notation $A \asymp B$ means that $c_1 B \leq A \leq c_2 B$ for some constants $c_1, c_2 > 0$.

3.2 Statement of problem

Henceforth, we are restricting ourselves to the case of a rectangular membrane $\Omega = (0, l_1) \times (0, l_2), l_1, l_2 > 0$. Let $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_V$ and Γ_D denote the following boundary portions

$$\Gamma_1 = \{0\} \times (0, l_2),\ \Gamma_2 = (0, l_1) \times \{0\},\ \Gamma_V = (0, l_1) \times \{l_2\} \text{ and } \Gamma_D = \Gamma \backslash \Gamma_V.$$

Let's introduce the homogeneous problem associated with (3.1)

$$\begin{cases} u'' - \Delta u = 0 & \text{in } \Omega \times (0, T), \\ u'' - \Delta_T u + \partial_\nu u = 0 & \text{on } \Gamma_V \times (0, T), \\ u = 0 & \text{on } \Gamma_D \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x),\ u'(x, 0) = u_2(x), & x \in \Omega, \\ u(x, 0) = u_1(x),\ u'(x, 0) = u_3(x), & x \in \Gamma_V. \end{cases} \tag{3.3}$$

Throughout, ν, τ stand for the unit outward normal vector on Γ, and the unit tangent vector oriented outside of Γ_V at its endpoints.

The well-posedness of problems with Ventcel boundary conditions has been verified by many authors either by variational techniques or by semigroups theory (see for instance [37], [18], [44]). Nonetheless, for the reader's convenience, we're going over the proof of the existence of solutions as well as some regularity properties required for the application of HUM.

3.2.1 Well-posedness and regularity

Denoting

$$(u,v)_\Omega = \int_\Omega u(x)v(x)\ dx,\ \ \|u\|_\Omega^2 = \int_\Omega |u(x)|^2 dx,$$
$$(u,v)_{\Gamma_V} = \int_{\Gamma_V} uv\ d\Gamma,\ \ \|u\|_{\Gamma_V}^2 = \int_{\Gamma_V} |u|^2 d\Gamma,$$

the scalar product and norm, respectively on $L^2(\Omega)$ and $L^2(\Gamma_V)$, we introduce Hilbert spaces

$$H^1_{\Gamma_D}(\Omega) = \left\{u \in H^1(\Omega); u|_{\Gamma_D} = 0\right\},$$
$$V = \left\{(u_1,u_2) \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega) \times H^1_0(\Gamma_V);\ u_2 = u_1|_{\Gamma_V}\right\},$$
$$H = L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_V).$$

Endowed with the norms

$$\|(u_1,u_2)\|_V^2 = \|\nabla u_1\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u_2\|_{\Gamma_V}^2,$$
$$\|(u_1,u_2)\|_H^2 = \|u_1\|_\Omega^2 + \|u_2\|_{\Gamma_V}^2,$$

V is dense in H with continuous injection.

We define on H the operator A_0 by

$$A_0\begin{pmatrix}u_1\\u_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\Delta u_1\\ -\Delta_T u_2 + \partial_\nu u_2\end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

whose domain is given by

$$\begin{aligned} D(A_0) &= \{(u_1,u_2) \in V,\ A_0(u_1,u_2) \in H\} \\ &= \{(u_1,u_2) \in V;\ \Delta u_1 \in L^2(\Omega),\ -\Delta_T u_2 + \partial_\nu u_2 \in L^2(\Gamma_V)\}. \end{aligned} \tag{3.5}$$

A_0 is sometimes called the Ventcel Laplacian.

Proposition 3.1. *Let A_0 be the operator defined as above. Then,*

$$D(A_0) = \left\{(u_1,u_2) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) \times (H^2(\Gamma_V) \cap H^1_0(\Gamma_V)); u_2 = u_1|_{\Gamma_V}\right\}.$$

Proof. Let $(u, u|_{\Gamma_V}) \in D(A_0)$. Then $u \in H^1(\Omega)$ and $\Delta u \in L^2(\Omega)$, which implies that

$$\partial_\nu u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma).$$

However, $\Delta_T u - \partial_\nu u \in L^2(\Gamma_V)$. Thus, $\Delta_T u \in H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma_V)$ and as a result

$$u \in H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_V) \cap H^1_0(\Gamma_V).$$

This together with the fact that $u \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega)$ and $\Delta u \in L^2(\Omega)$ yield $u \in H^2(\Omega)$ (Grisvard [20]).

Now, $u \in H^2(\Omega)$ implies $\partial_\nu u \in H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_V)$ and so $\Delta_T u \in L^2(\Gamma_V)$. Since $u \in H^1_0(\Gamma_V)$, it results

$$u \in H^2(\Gamma_V).$$

□

Remark 3.1. *We can readily verify that A_0 is self-adjoint and positive on H. Further, applying Lax-Milgram theorem shows that*

$$\forall\ (f,g) \in H,\ \exists!\ (u,v) \in D(A_0) \text{ such that } A_0(u,v) = (f,g).$$

Thus, $0 \in \rho(A_0)$ and the inverse operator $(A_0)^{-1}$ is bounded and compact due to Sobolev injections

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega),\ H^1(\Gamma_V) \hookrightarrow L^2(\Gamma_V).$$

This implies that Hilbert space H possesses an orthonormal basis formed by eigenvectors of A_0 ([58], prop. 3.2.12.).

Given the space

$$X := V \times H,$$

equipped with the norm

$$\left\|(U,\widetilde{U})\right\|_X^2 = \|\nabla u_1\|^2_\Omega + \|\nabla_T u_2\|^2_{\Gamma_V} + \|\widetilde{u}_1\|^2_\Omega + \|\widetilde{u}_2\|^2_{\Gamma_V},\ U = (u_1,u_2),\ \widetilde{U} = (\widetilde{u}_1,\widetilde{u}_2).$$

The energy at time t of the solution u to problem (3.3) is defined by

$$E(t) := \frac{1}{2}\left(\|\nabla u\|^2_\Omega + \|\nabla_T u\|^2_{\Gamma_V} + \|u'\|^2_\Omega + \|u'\|^2_{\Gamma_V}\right).$$

The existence and uniqueness of solution to (3.3) is provided by

Theorem 3.1. *Let*

$$(u_0,u_1) \in V,\ (u_2,u_3) \in H.$$

Then, problem (3.3) has a unique solution $u(x,t)$ such that

$$\begin{array}{lcl} u & \in & C(0,T;H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) \cap C^1(0,T;L^2(\Omega)), \\ u|_{\Gamma_V} & \in & C(0,T;H^1_0(\Gamma_V)) \cap C^1(0,T;L^2(\Gamma_V)). \end{array} \tag{3.6}$$

Furthermore, if $((u_0,u_0|_{\Gamma_V}),(u_2,u_3)) \in D(A_0) \times V$, then the solution is strong and we have

$$\begin{gathered} u \in C(0,T;H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) \cap C^1(0,T;H^1_{\Gamma_D}(\Omega)) \cap C^2(0,T;L^2(\Omega)), \\ u|_{\Gamma_V} \in C(0,T;H^2(\Gamma_V) \cap H^1_0(\Gamma_V)) \cap C^1(0,T;H^1_0(\Gamma_V)) \cap C^2(0,T;L^2(\Gamma_V)). \end{gathered}$$

In both cases, the energy is conserved:

$$E(t) = E(0), \forall t \in [0,T]. \tag{3.7}$$

Proof. Putting $U := (u, u|_{\Gamma_V}, u', (u|_{\Gamma_V})')$, $U_0 := (u_0, u_1, u_2, u_3)$. System (3.3) can be written in the form of an abstract Cauchy problem in X

$$U' = AU, \; U(0) = U_0 \tag{3.8}$$

where the operator A is defined on X by

$$\begin{aligned} D(A) &= D(A_0) \times V, \\ A &= \begin{pmatrix} 0_{2\times 2} & I_{2\times 2} \\ -A_0 & 0_{2\times 2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

For problem (3.8) to have solutions, we need to show that A is the infinitesimal generator of a continuous semigroup. However, there is an even better alternative: Stone's theorem (see e.g. [49], thm. 1.10.8 or [58], thm. 3.8.6.) that characterizes generators of unitary groups to be skew-adjoint.

Simple integrations by parts over Ω show that A is skew-symmetric on X i.e.

$$< A\Phi, \Psi >_X = - < \Phi, A\Psi >_X, \; \forall \Phi, \Psi \in D(A).$$

Let's show that $R(A) = X$. Given $(F, G) \in X$, is there $(\Phi, \Psi) \in D(A)$ such that

$$\begin{pmatrix} F \\ G \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \Phi \\ \Psi \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} F = \Psi \in V, \\ G = -A_0 \Phi \in H? \end{array}$$

Since A_0 is positive, it is invertible ([58], prop. 3.3.2). Then, there exists $\Phi \in D(A_0)$ such that $G = -A_0\Phi$ and A is onto. Applying prop. 3.7.3. of [58], it results that A is skew-adjoint and $0 \in \rho(A)$. Moreover, by Stone's theorem A generates a group of isometries on X. Thus, if $U_0 \in X$, problem (3.8) admits a unique solution $U \in C(\mathbb{R}; X)$ ([26], thm. 2.1) which implies (3.6).

On the other hand, if $U_0 \in D(A)$, the solution satisfies

$$\begin{array}{l} U \in C(\mathbb{R}; D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}; X), \\ U' = AU \text{ in } X. \end{array}$$

According to proposition 3.1 we have H^2- regularity in Ω and on Γ_V. Thus, the solution is a strong one.

The conservation of energy follows from the fact that the group generated by A is isometric. □

3.2.2 Direct inequality

The next result is often referred to as *hidden regularity*. It plays a key role in the application of HUM. Actually, once proven, we have half of the uniqueness theorem we are seeking.

Theorem 3.2. *Let $T > 0$. For every $((u_0, u_0|_{\Gamma_V}), (u_2, u_3)) \in X$, there is a constant $c = c(\Omega, T) > 0$ such that the solution of (3.3) satisfies the inequality*

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} |\partial_\nu u(x,t)|^2 d\Gamma dt + \int_0^T |\partial_\tau u(0, l_2, t)|^2 dt \leq c \left(\|\nabla u_0\|_\Omega^2 + \|u_2\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u_0\|_{\Gamma_V}^2 + \|u_3\|_{\Gamma_V}^2 \right). \tag{3.10}$$

Proof. Since $D(A)$ is dense in X, it suffices to show estimate (3.10) for regular solutions with initial conditions belonging to $D(A)$.

Given $((u_0, u_0|_{\Gamma_V}), (u_2, u_3)) \in D(A)$. Let $q = (q_1, q_2)$ be a vector field of class $(C^1(\bar{\Omega}))^2$. Multiplying equations

$$\begin{gathered} u'' - \Delta u = 0, \\ u'' - \Delta_T u + \partial_\nu u = 0 \end{gathered}$$

resp. by $q_k \dfrac{\partial u}{\partial x_k}$, $q_k \dfrac{\partial u|_{\Gamma_V}}{\partial x_k}$ and integrating by parts over $\Omega \times (0,T)$ and $\Gamma_V \times (0,T)$, in the same manner as done by Lions [42], lemma 3.7, p. 40, we obtain (convention of summation over repeated indices is used)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_D} q_k \nu_k |\partial_\nu u|^2 d\Gamma dt &= \left[(u'(t), q_k \frac{\partial u}{\partial x_k}(t))_\Omega \right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |u'|^2 dx dt \\
-\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_V} q_k \nu_k |u'|^2 d\Gamma dt &+ \int_0^T \int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} dx dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla u|^2 dx dt \\
+\frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_V} q_k \nu_k |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt &- \int_0^T \int_{\Gamma_V} \partial_\nu u q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Gamma dt, \\
-\int_0^T \int_{\Gamma_V} \partial_\nu u q_k \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Gamma dt &= \left[(u'(t), q_k \frac{\partial u}{\partial x_k}(t))_{\Gamma_V} \right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_V} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |u'|^2 d\Gamma dt \\
+\int_0^T \int_{\Gamma_V} \frac{\partial q_k}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial u}{\partial x_k} d\Gamma dt &- \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\Gamma_V} \frac{\partial q_k}{\partial x_k} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_0^T \int_{\partial \Gamma_V} q.\tau |\partial_\tau u|^2 d\sigma dt.
\end{aligned}$$

Combining these two equalities leads to the identity

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_D} q_k\nu_k|\partial_\nu u|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Gamma_V} q.\tau|\partial_\tau u|^2 d\sigma dt = \left[(u'(t), q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}(t))_\Omega\right]_0^T$$
$$+\left[(u'(t), q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}(t))_{\Gamma_V}\right]_0^T + \frac{1}{2}\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_k}(|u'|^2 - |\nabla u|^2)dxdt$$
$$+\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_V}\frac{\partial q_k}{\partial x_k}(|u'|^2 - |\nabla_T u|^2)d\Gamma dt + \int_0^T\int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt$$
$$+\int_0^T\int_{\Gamma_V}\frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}d\Gamma dt - \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_V} q_k\nu_k(|u'|^2 - |\nabla_T u|^2)d\Gamma dt. \tag{3.11}$$

Now, taking $q_k = x_k e_k, k = 1, 2$ where e_k is kth vector in the canonical basis of $\mathbb{R}^2$, the left-hand side of (3.11) becomes

$$\frac{1}{2}\int_0^T\int_{\Gamma_D}|\partial_\nu u|^2 d\Gamma dt + \frac{1}{2}\int_0^T\int_{\partial\Gamma_V}|\partial_\tau u|^2 d\sigma dt.$$

On the other hand, we have

$$\int_0^T\int_\Omega \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt = \int_0^T\int_\Omega |\nabla u|^2 dxdt,$$

$$\int_0^T\int_{\Gamma_V} \frac{\partial q_k}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial u}{\partial x_k}dxdt = \int_0^T\int_{\Gamma_V} |\nabla_T u|^2 d\Gamma dt,$$

$$\left[(u'(t), q_k\frac{\partial u}{\partial x_k}(t))_\Omega\right]_0^T \le c(\Omega)(||u'(T)||^2 + ||\nabla u(T)||^2 + ||u'(0)||^2 + ||\nabla u(0)||^2).$$

Proceeding similarly with the remaining terms of the right-hand side of (3.11) and taking account of (3.7), we get the desired estimate. □

3.3 Spectral analysis of the homogeneous problem (3.3)

In this section, we shall express the solution $u(x,t)$ as a Fourier series. To do this we are going to show, here below, the infinitesimal generator A (cf. eq.

(3.9)) to be diagonalizable; namely, its resolvent is nonempty and there exists a Riesz base in X consisting of eigenvectors of A. So first we determine the eigenvalues and eigenvectors which, upon separation of variables, turn out to be solutions to some Sturm-liouville problems; then we apply theorem 3.1 [26] and obtain an explicit formula of u.

3.3.1 Sturm-Liouville problems

We begin by computing the eigenvectors of the Ventcel Laplacian A_0 cf. eq. (3.4), (3.5). Afterward, we deduce those of the operator A. We know that $\alpha \in \mathbb{R}_+$ (A_0 is self-adjoint and positive) is an eigenvalue of A_0 if there exists a nonzero vector $U = (u, u|_{\Gamma_V}) \in D(A_0)$ such that $A_0 U = \alpha U$. This amounts to

$$\begin{aligned} -\Delta u &= \alpha u \text{ in } \Omega, \\ -\Delta_T u + \partial_\nu u &= \alpha u \text{ on } \Gamma_V, \\ u &= 0 \text{ on } \Gamma_D. \end{aligned}$$

Now, setting

$$u(x_1, x_2) = \varphi(x_1)\psi(x_2),$$

the equations above become

$$\begin{aligned} -\frac{\varphi''(x_1)}{\varphi(x_1)} - \frac{\psi''(x_2)}{\psi(x_2)} &= \alpha, \ (x_1, x_2) \in \Omega, \\ -\varphi''(x_1)\psi(l_2) + \varphi(x_1)\psi'(l_2) &= \alpha\varphi(x_1)\psi(l_2), \ x_1 \in \Gamma_V, \\ \varphi(x_1)\psi(x_2) &= 0, \ (x_1, x_2) \in \Gamma_D. \end{aligned}$$

Thus, the eigenvalue problem is reduced to a pair of second-order differential equations

$$\begin{cases} -\varphi''(x_1) = \delta^2\varphi(x_1), \ x_1 \in (0, l_1) \\ \varphi(0) = \varphi(l_1) = 0, \end{cases} \tag{3.12}$$

$$\begin{cases} -\psi''(x_2) = \mu^2\psi(x_2), \ x_2 \in (0, l_2) \\ \psi(0) = 0, \ \psi'(l_2) = \mu^2\psi(l_2). \end{cases} \tag{3.13}$$

The first ODE is a regular Sturm-liouville equation whose solutions are the classical trigonometric functions

$$\varphi_{k_1}(x_1) = \sqrt{\frac{2}{l_1}} \sin\left(\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right), \ k_1 \geq 1 \tag{3.14}$$

associated with the eigenvalues

$$\delta_{k_1}^2 = \left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2, \ k_1 \geq 1. \tag{3.15}$$

It is well-known that $\{\varphi_{k_1},\ k_1 \geq 1\}$ forms an orthonormal basis of $L^2(0,l_1)$, that is to say a complete orthonormal system in $L^2(0,l_1)$.

As for the second ODE, notice that its sole apparent difference from (3.12) is the presence of the eigenvalue parameter in the boundary condition. This type of Sturm-liouville problems arises when separation of variables is applied to differential equations with dynamic boundary conditions. Many papers have treated such problems, we mention for instance [5], [15], [16], [61].

Let $H_1 = L^2(0,l_2) \times \mathbb{C}$. Equipped with the inner product

$$((F,G)) := \int_0^{l_2} F_1(z)\overline{G_1(z)}dz + F_2\overline{G_2} \text{ for } F = \begin{pmatrix} F_1(z) \\ F_2 \end{pmatrix}, G = \begin{pmatrix} G_1(z) \\ G_2 \end{pmatrix} \in H_1,$$

H_1 is a Hilbert space.

Spectral properties of problem (3.13) are listed in the proposition below:

Proposition 3.2. *Let $\{\mu_{k_2}^2\}_{k_2=0}^{\infty}$, $\{\psi_{k_2}\}_{k_2=0}^{\infty}$ denote, respectively, the eigenvalues and eigenfunctions of (3.13). We have the following assertions:*

1. *The eigenvalues $\{\mu_{k_2}^2\}_{k_2=0}^{\infty}$ are positive roots of the transcendental equation*
$$\mu_{k_2}\sin(\mu_{k_2}l_2) = \cos(\mu_{k_2}l_2),\ \ k_2 \in \mathbb{N}. \tag{3.16}$$
The corresponding eigenfunctions are given by
$$\psi_{k_2}(x_2) = \sin\left(\mu_{k_2}x_2\right),\ \ x_2 \in (0,l_2),\ \ k_2 \in \mathbb{N}. \tag{3.17}$$

2. *The normalized vectors*
$$\Psi_{k_2}(x_2) = \rho_{k_2}\begin{pmatrix} \sin\left(\mu_{k_2}x_2\right) \\ \sin(\mu_{k_2}l_2) \end{pmatrix},\ \ k_2 \in \mathbb{N},$$
where $\rho_{k_2} := \dfrac{1}{\|\Psi_{k_2}\|_{H_1}} = \sqrt{\dfrac{2(1+\mu_{k_2}^2)}{l_2\mu_{k_2}^2 + l_2 + 1}}$, form an orthonormal basis in H_1.

3. *The cosine functions having the same form as ψ_{k_2} are orthogonal in $L^2(0,l_2)$, i.e.*
$$\int_0^{l_2} \cos(\mu_{k_2}x_2)\cos(\mu_{k_2'}x_2)dx_2 = 0,\ \ k_2 \neq k_2'.$$

Moreover, we have

$$\int_0^{l_2} |\cos(\mu_{k_2} x_2)|^2 \, dx_2 = \frac{l_2 \mu_{k_2}^2 + l_2 + 1}{2(1+\mu_{k_2}^2)}. \tag{3.18}$$

4. *As $k_2 \to \infty$, we have the asymptotic formulae*

$$\mu_{k_2} = \frac{k_2 \pi}{l_2} + O\left(\frac{1}{k_2}\right), \tag{3.19}$$

$$\rho_{k_2} \psi_{k_2}(x_2) = \sqrt{\frac{2}{l_2}} \sin\left(\frac{k_2 \pi}{l_2} x_2\right) + O\left(\frac{1}{k_2}\right). \tag{3.20}$$

Proof. By Green's formula, we see that

$$\int_0^{l_2} |\psi'(x_2)|^2 \, dx_2 = \mu^2 \left(\int_0^{l_2} |\psi(x_2)|^2 \, dx_2 + |\psi(l_2)|^2 \right),$$

which confirms that the eigenvalues of (3.13) are nonnegative. One can easily show that for $\mu = 0$, the only possible solution is $\psi = 0$. Then $\mu = 0$ isn't an eigenvalue.

Fix $\mu \neq 0$. We then have

$$\psi(x_2) = a \sin(\mu x_2) + b \cos(\mu x_2).$$

Using the condition at $x_2 = 0$, it follows $\psi(x_2) = a \sin(\mu x_2)$. By the second condition, we infer that μ_{k_2}, $k_2 \geq 0$ are the positive roots of equation (3.16) and the corresponding functions are given by (3.17). Hence we have our first assertion.

Since the second and third properties are related, we work them out at the same time. Let $k_2, k_2' \in \mathbb{N}$, $k_2 \neq k_2'$, we have

$$\int_0^{l_2} \sin(\mu_{k_2} x_2) \sin(\mu_{k_2'} x_2) dx_2 = -\sin(\mu_{k_2} l_2) \sin(\mu_{k_2'} l_2) + \frac{1}{\mu_{k_2'}} \int_0^{l_2} \cos(\mu_{k_2} x_2) \cos(\mu_{k_2'} x_2) dx_2.$$

Hence for $\{\Psi_{k_2}\}$ to be orthogonal, it suffices to show

$$\int_0^{l_2} \cos(\mu_{k_2} x_2) \cos(\mu_{k_2'} x_2) dx_2 = 0. \tag{3.21}$$

Standard trigonometric relations yield

$$\begin{aligned}\int_0^{l_2} \cos(\mu_{k_2}x_2)\cos(\mu_{k_2'}x_2)dx_2 &= \frac{1}{2(\mu_{k_2}^2-\mu_{k_2'}^2)}((\mu_{k_2}-\mu_{k_2'})\sin(\mu_{k_2}+\mu_{k_2'})l_2+ \\ &+(\mu_{k_2}+\mu_{k_2'})\sin(\mu_{k_2}-\mu_{k_2'})l_2) \\ &= \frac{1}{2(\mu_{k_2}^2-\mu_{k_2'}^2)}(2\mu_{k_2}\sin(\mu_{k_2}l_2)\cos(\mu_{k_2'}l_2)- \\ &-2\mu_{k_2'}\sin(\mu_{k_2'}l_2)\cos(\mu_{k_2}l_2)).\end{aligned}$$

Using equation (3.16), (3.21) follows. Thus, we have proved both sequences $\{\Psi_{k_2}\}$, $\{\cos\mu_{k_2}x_2\}$ to be orthogonal, resp. in H_1 and $L^2(0,l_2)$.

On the other hand,

$$\begin{aligned}\|\Psi_{k_2}\|_{H_1}^2 &= \int_0^{l_2} |\sin(\mu_{k_2}x_2)|^2\,dx_2 + |\sin(\mu_{k_2}l_2)|^2 \\ &= \frac{l_2}{2} - \frac{1}{4\mu_{k_2}}\sin(2\mu_{k_2}l_2) + |\sin(\mu_{k_2}l_2)|^2 \\ &= \frac{l_2}{2} - \frac{1}{2\mu_{k_2}}\cos(\mu_{k_2}l_2)\sin(\mu_{k_2}l_2) + |\sin(\mu_{k_2}l_2)|^2.\end{aligned}$$

Since $\cos^2(\mu_{k_2}l_2)+\sin^2(\mu_{k_2}l_2) = \mu_{k_2}^2\sin^2(\mu_{k_2}l_2)+\sin^2(\mu_{k_2}l_2)=1$, we get

$$\sin^2(\mu_{k_2}l_2) = \frac{1}{1+\mu_{k_2}^2}.$$

Therefore,

$$\|\Psi_{k_2}\|_{H_1}^2 = \frac{l_2}{2} + \frac{1}{2(1+\mu_{k_2}^2)}.$$

Analogous computations lead to (3.18).

The completeness of $\{\Psi_{k_2}\}$ follows from theorem 1 [15].

Finally, for the asymptotic behavior of $(\mu_{k_2})_{k_2}$, $(\rho_{k_2}\psi_{k_2})_{k_2}$, one may check out section 4 of [15]. □

From the discussion above and remark 3.1, we draw the following consequence.

Corollary 3.1. *Let* $\{\omega_k^2\}$, $\{U_k\}$, $k=(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ *be the eigenvalues* *and corresponding eigenvectors of A_0. Then, we have*

$$\omega_k^2 = \left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2,$$

$$U_k(x_1,x_2) = \begin{pmatrix} \sin\left(\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right)\sin(\mu_{k_2}x_2) \\ \sin\left(\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right)\sin(\mu_{k_2}l_2) \end{pmatrix}, \quad k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}.$$

Moreover, the normalized vectors $\{\zeta_k U_k\}_k$, with $\zeta_k^{-2} = \frac{l_1}{2}\frac{l_2\mu_{k_2}^2 + l_2 + 1}{2(1+\mu_{k_2}^2)}$, constitute an orthonormal basis of H.

One significant advantage of A_0 being diagonalizable is that it allows us to better grasp the structure of Hilbert spaces V, H, X and their duals. In fact, they can be characterized using the eigenvalues and eigenvectors of A_0.

Remark 3.2. *Let Z be the linear hull of the basis vectors U_k. For fixed $s \in \mathbb{R}$, we define D^s to be the completion of Z with respect to the Euclidian norm*

$$\left\| \sum_{k\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}} a_k U_k \right\|_s^2 := \sum_{k\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}} \omega_k^s |a_k|^2.$$

Then, identifying H with its dual, we have (see Komornik [25])

$$D^{-1} = V', \ D^0 = H, \ D^1 = V \ \text{and} \ D^2 = D(A_0).$$

Also, $V \subset H \subset V'$ with dense continuous inclusions.

Remark 3.3. *The dual space V' could equally be viewed as the space of restrictions of elements of $(H^1_{\Gamma_D}(\Omega))' \times H^{-1}(\Gamma_V)$ to Hilbert space V (see [42], remark 5.1., p. 376).*

3.3.2 Fourier series representation

In order to write the solution of (3.3) as a Fourier series, We need to figure out a Riesz basis for Hilbert space X. Since A is defined in terms of Ventcel Laplacian A_0, one can easily check that its eigenvalues are

$$\lambda_k = i\omega_k, \ k \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z} \tag{3.22}$$

where $\omega_k = \sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2}$, $\omega_{-k} = -\omega_k$, and the associated eigenvectors are given by

$$E_{\pm k}(x_1,x_2) = \varrho_k\left(U_k(x_1,x_2), \lambda_k U_k(x_1,x_2)\right), \ k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$$

with $\varrho_k^{-2} = \omega_k^2 l_1 \left(\frac{l_2\mu_{k_2}^2 + l_2 + 1}{2(1+\mu_{k_2}^2)} \right)$.

On the other hand, we have $D(A) \subset X$ densely with continuous compact embedding. Thus, A is skew-adjoint with compact resolvent and the set $\{E_k\}_{k\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}}$ forms an orthonormal basis for X. Moreover, X is characterized using spaces D^s as follows

$$X = D^1 \times D^0.$$

The next result provides an explicit formula of $u(x,t)$ solution to (3.3):

Theorem 3.3. *Let*

$$u_0 \in H^1_{\Gamma_D}(\Omega),\ u_0|_{\Gamma_V} \in H^1_0(\Gamma_V),\ u_2 \in L^2(\Omega) \text{ and } u_3 \in L^2(\Gamma_V).$$

Then the solution $u(x,t)$ of (3.3) is given by Fourier series

$$u(x_1,x_2,t) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right) \sin\left(\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right) \sin(\mu_{k_2}x_2), \quad (3.23)$$

with suitable coefficients $a_k, k \in \mathbb{Z}^* \times \mathbb{Z}$ depending on the initial data such that

$$\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \omega_k^2(|a_k|^2 + |a_{-k}|^2) < \infty.$$

Proof. Writing the initial data $U_0 = ((u_0, u_0|_{\Gamma_V}), (u_2, u_3)) \in X$ in the base $\{E_k\}$

$$U_0 = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \alpha_k E_k,$$

we obtain, according to theorem 3.1 [26], that the solution of (3.8) is

$$U(t) = \sum_{k\in\mathbb{Z}^*\times\mathbb{Z}} \alpha_k E_k e^{i\omega_k t}.$$

We conclude the proof by taking $a_k := \varrho_k \alpha_k$ in the first component of U and by noting that $\varrho_k^{-2} \asymp \omega_k^2$. $\square$

3.4 Weak solution of system (3.1)

Let $s \in [0,T]$. Assume that u and v are solutions of systems (3.3) and (3.1). Then we have

$$\int_0^s \int_\Omega (u'' - \Delta u) v dx dt = 0.$$

If we integrate by parts, formally, in time and in space, we shall arrive at the relation

$$
\begin{aligned}
&\int_\Omega u'(x,s)v(x,s) - u(x,s)v'(x,s)dx + \int_{\Gamma_V} u'(x,s)v(x,s) - u(x,s)v'(x,s)d\Gamma \\
&\quad = \int_\Omega u_2(x)v_0(x) - u_0(x)v_1(x)dx + \int_{\Gamma_V} u_3(x)v_2(x) - u_0(x)v_3(x)d\Gamma + \\
&\quad \int_0^s \left(\int_{\Gamma_1} \partial_\nu u w_1(x,t)d\Gamma + \int_{\Gamma_2} \partial_\nu u w_2(x,t)d\Gamma + \partial_\tau u(0,l_2,t)w_S(t) \right) dt.
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Thus we are led to consider showing the existence of a weak solution v in the sense of the identity above. In fact, we have

Theorem 3.4. *For any initial and boundary data*

$$
\begin{array}{l}
(v_0, v_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_V), \quad (v_1, v_3) \in V', \\
(w_1, w_2, w_S) \in L^2(0,T; L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times \mathbb{R}).
\end{array}
$$

There exists a unique weak solution of (3.1) in the sense of identity (3.24) such that

$$
(v, v|_{\Gamma_V}) \in C(0,T; L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_V)) \cap C^1(0,T; V').
$$

Proof. Setting

$$
\begin{array}{l}
U(s) = (u(x,s), u|_{\Gamma_V}(x,s), u'(x,s), (u|_{\Gamma_V})'(x,s)),\ U_0 = U(0) \in X \ \textit{and} \\
V(s) = (-v'(x,s), -(v|_{\Gamma_V})'(x,s), v(x,s), v|_{\Gamma_V}(x,s)),\ V_0 = V(0) \in X',
\end{array}
$$

we have expression (3.24) equivalent to

$$
\begin{aligned}
< V(s), U(s) >_{X',X} = \quad & < V_0, U_0 >_{X',X} + \int_0^s \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u w_1(x,t) d\Gamma dt + \\
& + \int_0^s \int_{\Gamma_2} \partial_\nu u w_2(x,t) d\Gamma dt + \int_0^s \partial_\tau u(0,l_2,t) w_S(t) dt.
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

Taking into account the direct inequality (3.10), it follows that, for each $s \in [0,T]$, the right-hand side of this formula defines a bounded linear form of $U_0 \in X$.

On the other hand, the operator A generates a unitary group $T(s)$ on X. Hence, the right-hand side of (3.25) is also linear and bounded as a function of $U(s) \in X$. Denoting this form by $V(s)$ and noting that it's continuous with respect to s, we conclude our proof. □

Remark 3.4. *From identity (3.24), we get to define the observability operator B by*

$$\begin{gathered} B : D(B) \subset X \to G, \\ D(B) = D(A),\ G := L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times \mathbb{R}, \\ B((y_1, y_2), (\widetilde{y}_1, \widetilde{y}_2)) := (\partial_\nu y_1, \partial_\nu y_1, \partial_\tau y_2). \end{gathered}$$

Hence, estimate (3.10) means that B is an admissible observability operator.

3.5 Main result

Our main result concerning the exact controllability of system (3.1) reads

Theorem 3.5. *Let*

$$(v_0, v_2) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Gamma_V),\ \ (v_1, v_3) \in V'.$$

Then, there exist $T_0 > 0$ and control functions (w_1, w_2, w_S) of minimal norm in $L^2(0, T; L^2(\Gamma_1) \times L^2(\Gamma_2) \times \mathbb{R})$ such that for $T > T_0$ the solution $(v, v|_{\Gamma_V})$ to (3.1) reaches its equilibrium state (3.2) in time T.

Following HUM, the task of proving this theorem amounts to making sure that the observability inequality below holds for solutions of the homogeneous problem (3.3):

Theorem 3.6. *Let $T_0 = 2\left(\sqrt{2} + 1\right)\sqrt{l_1^2 + 4l_2^2}$ and let $((u_0, u_0|_{\Gamma_V}), (u_2, u_3)) \in X$. Then, for $T > T_0$ there exists a constant $c > 0$ such that*

$$E(0) \leq c \int_0^T \int_{\Gamma_1 \cup \Gamma_2} |\partial_\nu u(x,t)|^2 d\Gamma dt + \int_0^T |\partial_\tau u(0, l_2, t)|^2 dt. \tag{3.26}$$

There are many approaches to take when dealing with observability estimates (Multiplier method, Carleman estimates, Microlocal analysis). Here we are adopting the one based on nonharmonic Fourier series. Precisely, we are recasting a generalization of Ingham theorem due to Mehrenberger [45] with the view of employing it to establish (3.26).

3.5.1 A variant of Mehrenberger's Ingham theorem

Looking closely, one can observe that, in Mehrenberger's inequality all the variables have the same sequence of weights $(p_l)_{l \in \mathbb{N}^*}$. This seems to fit well with its application to the observability of the wave equation with Dirichlet boundary condition. Here, though, the difference in form of the eigenvalues

$\left(\dfrac{k_1\pi}{l_1}\right)_{k_1\in\mathbb{N}^*}$ and $(\mu_{k_2})_{k_2\in\mathbb{N}}$ leads us to allow each variable its own sequence of weights. The following adaptation shall be justified subsequently.

Theorem 3.7. *Let $\{\lambda_k,\ k=(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}\}$ be a sequence of real numbers. Given $(p_{k_1})_{k_1\in\mathbb{N}^*}$, $(q_{k_2})_{k_2\in\mathbb{N}}\subset\mathbb{C}$, we assume the following gap conditions:*
there exist $\gamma_1,\gamma_2>0$ such that for $k_1,k_1'\in\mathbb{N}^*, k_2,k_2'\in\mathbb{N}$, we have

$$\begin{array}{l}|\lambda_{k_1k_2}-\lambda_{k_1'k_2}|\geq\gamma_1|k_1-k_1'|,\\ |\lambda_{k_1k_2}+\lambda_{k_1'k_2}|\geq\gamma_1|k_1+k_1'|\end{array}\tag{3.27}$$

whenever $|q_{k_2}|\leq\max\left(|p_{k_1}|,|p_{k_1'}|\right)$, and

$$\begin{array}{l}|\lambda_{k_1k_2}-\lambda_{k_1k_2'}|\geq\gamma_2|k_2-k_2'|,\\ |\lambda_{k_1k_2}+\lambda_{k_1k_2'}|\geq\gamma_2|k_2+k_2'|\end{array}\tag{3.28}$$

whenever $|p_{k_1}|\leq\max\left(|q_{k_2}|,|q_{k_2'}|\right)$.

Then, for $T>2\pi\sqrt{\dfrac{1}{\gamma_1^2}+\dfrac{1}{\gamma_2^2}}$ there is a constant $c=c(\gamma_1,\gamma_2,T)>0$ such that the following inequality holds for all square summable sequences $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$:

$$\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^T\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\sum_{k_1=1}^{\infty}p_{k_1}\left(\alpha_k e^{i\lambda_k t}+\alpha_{-k}e^{-i\lambda_k t}\right)\right|^2dt\\ \displaystyle+\int_0^T\sum_{k_1=1}^{\infty}\left|\sum_{k_2=0}^{\infty}q_{k_2}\left(\alpha_k e^{i\lambda_k t}+\alpha_{-k}e^{-i\lambda_k t}\right)\right|^2dt\\ \displaystyle\geq c\sum_{k\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}\left(|p_{k_1}|^2+|q_{k_2}|^2\right)\left(|\alpha_k|^2+|\alpha_{-k}|^2\right).\end{array}\tag{3.29}$$

For the proof, we shall need the following

Lemma 3.1. *Let us consider the function $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ defined by*

$$f(t)=\begin{cases}\cos(\dfrac{\pi}{T}t) & \text{if } |t|\leq\dfrac{T}{2},\\ 0 & \text{if } |t|>\dfrac{T}{2}.\end{cases}$$

Then its Fourier transform $\widehat{f}$ is given by

$$\widehat{f}(x)=\int_{-\infty}^{\infty}f(t)e^{ixt}dt=-\frac{2T\pi\cos(xT/2)}{x^2T^2-\pi^2},\ x\neq-\frac{\pi}{T},+\frac{\pi}{T}.$$

Furthermore, we have for $\gamma > \dfrac{2\pi}{T}$, $l \in \mathbb{N}^*$ *and* $|x| \geq l\gamma$

$$|\widehat{f}(x)| \leq \frac{2T}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\gamma T}\right)^2 \frac{1}{4l^2 - 1}.$$

Proof. One may turn to [45] or [31] for the proof. □

Now, we are ready to take up proving estimate (3.29) based on the techniques already used by Mehrenberger [45].

Proof of theorem 3.7. To make use of the lemma above, we will effect the integrations over $\left[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}\right]$. A classical translation $s = t + \frac{T}{2}$ enables to recover (3.29).

For brevity, we set $k' = (k_1', k_2)$ and

$$A_{k_2} := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| \sum_{k_1=1}^{\infty} p_{k_1} \left(\alpha_k e^{i\lambda_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\lambda_k t}\right) \right|^2 dt.$$

Since $0 \leq f(t) \leq 1_{[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]}$, we have

$$\begin{aligned}
A_{k_2} \;&\geq \int_{\mathbb{R}} f(t) | \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|} p_{k_1} \left(\alpha_k e^{i\lambda_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\lambda_k t}\right) + \\
&+ \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}| > |p_{k_1}|} p_{k_1} \left(\alpha_k e^{i\lambda_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\lambda_k t}\right) |^2 dt \\
&= \sum_{(k_1,k_1') \in \Lambda_1} + \sum_{(k_1,k_1') \in \Lambda_2} + \sum_{(k_1,k_1') \in \Lambda_3} B_k +
\end{aligned}$$

$$+ \int_{\mathbb{R}} f(t) \left| \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}| > |p_{k_1}|} p_{k_1} \left(\alpha_k e^{i\lambda_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\lambda_k t}\right) \right|^2 dt \tag{3.30}$$

where

$$\begin{aligned}
\Lambda_1 &:= \{k_1, k_1' \in \mathbb{N}, |q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|, |q_{k_2}| \leq |p_{k_1'}|\}, \\
\Lambda_2 &:= \{k_1, k_1' \in \mathbb{N}, |q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|, |q_{k_2}| > |p_{k_1'}|\}, \\
\Lambda_3 &:= \{k_1, k_1' \in \mathbb{N}, |q_{k_2}| > |p_{k_1}|, |q_{k_2}| \leq |p_{k_1'}|\},
\end{aligned}$$

and because $\widehat{f}(-x) = \widehat{f}(x)$, we have

$$B_k = p_{k_1}\overline{p_{k_1'}}((\alpha_k\overline{\alpha_{k'}} + \alpha_{-k}\overline{\alpha_{-k'}})\widehat{f}(\lambda_k - \lambda_{k'}) + (\alpha_k\overline{\alpha_{-k'}} + \alpha_{-k}\overline{\alpha_{k'}})\widehat{f}(\lambda_k + \lambda_{k'})).$$

Seeing as $f(t) \geq 0$, we can discard the last term of (3.30). Now, taking account of the gap assumptions (3.27), we have for $T > \dfrac{2\pi}{\gamma_1}$ (cf. lemma 3.1)

$$\begin{aligned}
\left|\, \widehat{f}(\lambda_k - \lambda_{k'})\right| &\leq \frac{2T}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \frac{1}{4(k_1 - k_1')^2 - 1}, \ \forall\ \lambda_k \neq \lambda_{k'},\\
\left|\, \widehat{f}(\lambda_k + \lambda_{k'})\right| &\leq \frac{2T}{\pi}\left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \frac{1}{4(k_1 + k_1')^2 - 1}, \ \forall\ k, k' \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

On the other hand, using Young inequality, we find

$$\begin{aligned}
&p_{k_1}\overline{p_{k_1'}}(\alpha_k\overline{\alpha_{k'}} + \alpha_{-k}\overline{\alpha_{-k'}})\\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(|p_{k_1}|^2(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2) + |p_{k_1'}|^2(|\alpha_{k'}|^2 + |\alpha_{-k'}|^2)\right)\\
&p_{k_1}\overline{p_{k_1'}}(\alpha_k\overline{\alpha_{-k'}} + \alpha_{-k}\overline{\alpha_{k'}})\\
&\qquad \leq \frac{1}{2}\left(|p_{k_1}|^2\left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) + |p_{k_1'}|^2(|\alpha_{k'}|^2 + |\alpha_{-k'}|^2)\right)
\end{aligned}$$

These estimates allow us to minorize the first three terms of (3.30) as follows

$$\begin{aligned}
\sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_1} B_k &\geq \frac{2T}{\pi}\Big(\sum_{k_1\in\mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}|\leq|p_{k_1}|} |p_{k_1}|^2\left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) -\\
&\qquad \sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_1,\ k_1\neq k_1'} C_k - \sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_1} D_k\Big),\\
\sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_2} B_k &\geq -\frac{2T}{\pi}\sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_2}(C_k + D_k),\\
\sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_3} B_k &\geq -\frac{2T}{\pi}\sum_{(k_1,k_1')\in\Lambda_3}(C_k + D_k)
\end{aligned}$$

where

$$\begin{aligned}
C_k &= \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \quad \left(\frac{|p_{k_1}|^2\left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right)}{2} + \frac{|p_{k_1'}|^2(|\alpha_{k'}|^2 + |\alpha_{-k'}|^2)}{2}\right)\\
&\qquad \times\frac{1}{4(k_1 - k_1')^2 - 1},\\
D_k &= \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 \quad \left(\frac{|p_{k_1}|^2\left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right)}{2} + \frac{|p_{k_1'}|^2(|\alpha_{k'}|^2 + |\alpha_{-k'}|^2)}{2}\right)\\
&\qquad \times\frac{1}{4(k_1 + k_1')^2 - 1}.
\end{aligned}$$

Recalling that $\sum_{l=1}^{\infty} \frac{1}{4l^2-1} = \frac{1}{2}$, we add up these inequalities to obtain for $T > \frac{2\pi}{\gamma_1}$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2T} A_{k_2} \geq & \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|} |p_{k_1}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) - \\ & - \sum_{(k_1,k_1') \in \mathbb{N}^*,\ k_1 \neq k_1'} C_k - \sum_{(k_1,k_1') \in \mathbb{N}^*} D_k \\ \geq & \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|} |p_{k_1}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) - \\ & - \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 |p_{k_1}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right).\end{aligned}$$

Hence, we get

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2T} \sum_{k_2=0}^{\infty} A_{k_2} \geq & \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*,\ |q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|} |p_{k_1}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) \\ & - \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2 |p_{k_1}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) \\ = & \sum_{k_2=0}^{\infty} \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(1_{\left\{|q_{k_2}| \leq |p_{k_1}|\right\}} - \left(\frac{2\pi}{\gamma_1 T}\right)^2\right) \times \\ & \times |p_{k_1}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right).\end{aligned}$$

Denoting this time, $k' = (k_1, k_2')$ and

$$\widetilde{A}_{k_1} := \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \left| \sum_{k_2=0}^{\infty} q_{k_2} \left(\alpha_k e^{i\lambda_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\lambda_k t}\right) \right|^2 dt,$$

it is evident that by performing the same computations on $\widetilde{A}_{k_1}$, we get for $T > \frac{2\pi}{\gamma_2}$

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{2T} \widetilde{A}_{k_1} \geq & \sum_{k_2 \in \mathbb{N},\ |p_{k_1}| \leq |q_{k_2}|} |q_{k_2}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right) \\ & - \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\frac{2\pi}{\gamma_2 T}\right)^2 |q_{k_2}|^2 \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2\right).\end{aligned}$$

Summing over k_1 yields

$$\frac{\pi}{2T}\sum_{k_1=1}^{\infty}\widetilde{A}_{k_1} \geq \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(1_{\{|p_{k_1}|\leq|q_{k_2}|\}} - \left(\frac{2\pi}{\gamma_2 T}\right)^2\right)\times$$
$$\times\, |q_{k_2}|^2\left(|\alpha_k|^2+|\alpha_{-k}|^2\right).$$

Now, noting that for fixed $k_1\in\mathbb{N}^*, k_2\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned} 1_{\{|q_{k_2}|\leq|p_{k_1}|\}}|p_{k_1}|^2 + 1_{\{|p_{k_1}|\leq|q_{k_2}|\}}|q_{k_2}|^2 \quad &\geq \max\left(|p_{k_1}|^2, |q_{k_2}|^2\right)\\ &\geq \frac{\frac{|p_{k_1}|^2}{\gamma_1^2}}{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}} + \frac{\frac{|q_{k_2}|^2}{\gamma_2^2}}{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}}, \end{aligned}$$

we deduce

$$\begin{aligned} \sum_{k_2=0}^{\infty}A_{k_2}+\sum_{k_1=1}^{\infty}\widetilde{A}_{k_1} \geq \quad & \left(\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)\times\\ &\times\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\frac{|p_{k_1}|^2}{\gamma_1^2}+\frac{|q_{k_2}|^2}{\gamma_2^2}\right)\left(|\alpha_k|^2+|\alpha_{-k}|^2\right)\\ \geq \quad & \min\left(\frac{1}{\gamma_1^2},\frac{1}{\gamma_2^2}\right)\left(\frac{1}{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}} - \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2\right)\times\\ &\times\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(|p_{k_1}|^2+|q_{k_2}|^2\right)\left(|\alpha_k|^2+|\alpha_{-k}|^2\right). \end{aligned}$$

Whence, for the desired inequality to hold, we should take $T > 2\pi\sqrt{\frac{1}{\gamma_1^2}+\frac{1}{\gamma_2^2}}$. □

3.5.2 Proof of the exact observability

The plan is to establish the inverse inequality cf. (3.26) as an application of theorem 3.7. Hence, we should ensure that the eigenvalues $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ cf. (3.22) satisfy the gap assumptions (3.27), (3.28); that is, we need to prove the following

Lemma 3.2. *Let $(\omega_k)_{k\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}}$ be the sequence defined in (3.22). Given $k_1, k_1'\in\mathbb{N}^*$, $k_2, k_2'\in\mathbb{N}$, we have*

(i) If $\mu_{k_2}\leq\max(\frac{k_1\pi}{l_1},\frac{k_1'\pi}{l_1})$, then there exists $\gamma_1=\left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\pi}{l_1}>0$ such that

$$|\omega_{k_1k_2}-\omega_{k_1'k_2}|\geq\gamma_1|k_1-k_1'|,$$
$$|\omega_{k_1k_2}+\omega_{k_1'k_2}|\geq\gamma_1|k_1+k_1'|.$$

(ii) If $\dfrac{k_1\pi}{l_1} \leq \max(\mu_{k_2}, \mu_{k_2'})$*, there exists* $\gamma_2 = \dfrac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\dfrac{\pi}{l_2} > 0$ *such that*

$$\begin{aligned} |\omega_{k_1k_2} - \omega_{k_1k_2'}| \geq \gamma_2|k_2 - k_2'|, \\ |\omega_{k_1k_2} + \omega_{k_1k_2'}| \geq \gamma_2|k_2 + k_2'|. \end{aligned}$$

Proof. (i) Let k_1, $k_1' \in \mathbb{N}^*$, $k_2 \in \mathbb{N}$. Assume that $\mu_{k_2} \leq \max(\dfrac{k_1\pi}{l_1}, \dfrac{k_1'\pi}{l_1})$ and that $k_1 < k_1'$, then

$$\left|\omega_{k_1k_2} + \omega_{k_1'k_2}\right| = \left|\sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2} + \sqrt{\left(\frac{k_1'\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2}\right| \geq \frac{\pi}{l_1}\left|k_1 + k_1'\right|,$$

$$\begin{aligned} \left|\omega_{k_1k_2} - \omega_{k_1'k_2}\right| = & \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 |k_1 - k_1'| \frac{|k_1 + k_1'|}{\sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2} + \sqrt{\left(\frac{k_1'\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2}} \\ \geq & \left(\frac{\pi}{l_1}\right)^2 \frac{|k_1 + k_1'|}{\sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \left(\frac{k_1'\pi}{l_1}\right)^2} + \sqrt{2\left(\frac{k_1'\pi}{l_1}\right)^2}} |k_1 - k_1'| \\ \geq & \frac{\pi}{l_1} \frac{1 + \frac{k_1}{k_1'}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{k_1}{k_1'}\right)^2}} \left|k_1 - k_1'\right|. \end{aligned}$$

Putting $x := \dfrac{k_1}{k_1'} \in (0,1)$, we define

$$h(x) := \frac{1+x}{\sqrt{2} + \sqrt{1+x^2}}.$$

Simple derivation gives

$$h'(x) = \frac{1}{\left(\sqrt{2} + \sqrt{1+x^2}\right)^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1-x}{\sqrt{1+x^2}}\right) > 0,\ \forall x \in (0,1);$$

hence, h is strictly increasing and we have

$$h(x) > h(0) = \sqrt{2} - 1, \forall x \in (0,1).$$

Thus,

$$\left|\omega_{k_1k_2} - \omega_{k_1'k_2}\right| \geq \left(\sqrt{2}-1\right)\frac{\pi}{l_1}\left|k_1 - k_1'\right|.$$

(ii) Fix $k_1 \in \mathbb{N}^*$, k_2, $k_2' \in \mathbb{N}$. Assume that $\frac{k_1\pi}{l_1} \leq \max(\mu_{k_2}, \mu_{k_2'})$ and $k_2 < k_2'$. Since $\frac{k_2\pi}{l_2} \leq \mu_{k_2} \leq \frac{(k_2+1)\pi}{l_2}$, we get

$$\left|\omega_{k_1k_2} + \omega_{k_1k_2'}\right| \geq \left|\mu_{k_2} + \mu_{k_2'}\right| \geq \frac{\pi}{l_2} \left|k_2 + k_2'\right|;$$

on the other hand, we have

$$\begin{aligned}
\left|\omega_{k_1k_2} - \omega_{k_1k_2'}\right| = & \ \left|\mu_{k_2} - \mu_{k_2'}\right| \frac{\left|\mu_{k_2} + \mu_{k_2'}\right|}{\sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2} + \sqrt{\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2'}^2}} \\
\geq & \ \left|\mu_{k_2} - \mu_{k_2'}\right| \frac{\left|\mu_{k_2} + \mu_{k_2'}\right|}{\sqrt{\mu_{k_2}^2 + \mu_{k_2'}^2} + \sqrt{2\mu_{k_2'}^2}} \\
\geq & \ \left|\mu_{k_2} - \mu_{k_2'}\right| \frac{1 + \frac{\mu_{k_2}}{\mu_{k_2'}}}{\sqrt{2} + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu_{k_2}}{\mu_{k_2'}}\right)^2}} \\
\geq & \ \left(\sqrt{2} - 1\right) \left|\mu_{k_2} - \mu_{k_2'}\right|.
\end{aligned}$$

So it remains to bound $|\mu_{k_2} - \mu_{k_2'}|$ from below by $c\,|k_2 - k_2'|$, $c = cst > 0$. Since $\frac{k_2\pi}{l_2} \leq \mu_{k_2} \leq \frac{k_2\pi}{l_2} + \frac{\pi}{2l_2}$, we find that:

if $k_2' = k_2 + 1$, then

$$\mu_{k_2'} - \mu_{k_2} \geq \frac{(k_2+1)\pi}{l_2} - \left(\frac{k_2\pi}{l_2} + \frac{\pi}{2l_2}\right) = \frac{\pi}{2l_2}\ |k_2' - k_2|$$

if $k_2' \geq k_2 + 2$, then

$$\mu_{k_2'} - \mu_{k_2} \geq \frac{\pi}{l_2}(k_2' - k_2 - 1) \geq \frac{\pi}{2l_2}|k_2' - k_2|.$$

Consequently, $|\omega_{k_1k_2} - \omega_{k_1k_2'}| \geq \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)}{2}\frac{\pi}{l_2}|k_2' - k_2|$. □

- We proceed now with the proof of the observability estimate (3.26):

We know that the solution of (3.3) is given by Fourier series

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} \left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right) \sin\left(\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right) \sin(\mu_{k_2}x_2). \tag{3.31}$$

Using this expression and the orthogonality of systems $(\cos \frac{k_1\pi}{l_1}x_1)$, $(\sin \frac{k_1\pi}{l_1}x_1)$ in $L^2(0,l_1)$ and that of $(\cos \mu_{k_2}x_2)$, $\begin{pmatrix}\sin \mu_{k_2}x_2\\ \sin \mu_{k_2}l_2\end{pmatrix}$ in $L^2(0,l_2)$ and $L^2(0,l_2)\times\mathbb{C}$ (cf. proposition 3.2), the initial energy is found to satisfy

$$\|\nabla u_0\|_\Omega^2 + \|u_2\|_\Omega^2 + \|\nabla_T u_0\|_{\Gamma_V}^2 + \|u_3\|_{\Gamma_V}^2$$

$$\asymp \sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty}\left(\left(\frac{k_1\pi}{l_1}\right)^2 + \mu_{k_2}^2\right)(|a_k|^2+|a_{-k}|^2).$$

Likewise, we explicate the right side of (3.26) in terms of Fourier series (3.31)

$$\int_0^T\int_{\Gamma_1}|\partial_\nu u(x,t)|^2 d\Gamma dt + \int_0^T |\partial_\tau u(0,l_2,t)|^2 dt + \int_0^T\int_{\Gamma_2}|\partial_\nu u(x,t)|^2 d\Gamma dt$$
$$= \int_0^T\int_0^{l_2}\left|\sum_{k_1,k_2}\frac{k_1\pi}{l_1}\left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\sin \mu_{k_2}x_2\right|^2 dx_2 dt +$$
$$+ \int_0^T\left|\sum_{k_1,k_2}\frac{k_1\pi}{l_1}\left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\sin \mu_{k_2}l_2\right|^2 dt +$$
$$+ \int_0^T\int_0^{l_1}\left|\sum_{k_1,k_2}\mu_{k_2}\left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\sin \frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right|^2 dx_1 dt.$$

Once again, the orthogonality of the sine systems implies

$$\int_0^T\left(\int_{\Gamma_1}|\partial_\nu u(x,t)|^2 d\Gamma + |\partial_\tau u(0,l_2,t)|^2\right)dt + \int_0^T\int_{\Gamma_2}|\partial_\nu u(x,t)|^2 d\Gamma dt$$
$$\asymp \int_0^T\sum_{k_1=1}^{\infty}\left|\sum_{k_2=0}^{\infty}\mu_{k_2}\left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\right|^2 dt +$$
$$+ \int_0^T\sum_{k_2=0}^{\infty}\left|\sum_{k_1=1}^{\infty}\frac{k_1\pi}{l_1}\left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\right|^2 dt.$$

Taking $\lambda_k = \omega_k$, $p_{k_1} = \dfrac{k_1\pi}{l_1}$, $q_{k_2} = \mu_{k_2}$, $(k_1,k_2)\in\mathbb{N}^*\times\mathbb{N}$ in the statement of theorem 3.7, the inverse inequality (3.26) follows immediately from (3.29).

Thus far, we have been able to drive system (3.1) to rest through Dirichlet action on two adjacent sides of the boundary Γ_D. It seems interesting to consider including Γ_V in the controlled area and seeing if it is possible to steer the system to equilibrium. This called for the following remarks.

Remark 3.5. *Let's consider one particular solution of the homogeneous problem (3.3)*

$$u_k(x_1, x_2, t) = a_k e^{i\omega_k t} \sin\left(\frac{k_1 \pi}{l_1} x_1\right) \sin(\mu_{k_2} x_2).$$

Then we have

$$u_k'(x_1, l_2, t) = i a_k \omega_k e^{i\omega_k t} \sin\left(\frac{k_1 \pi}{l_1} x_1\right) \sin(\mu_{k_2} l_2).$$

Note that this could not be minorized in terms of the initial energy because of the factor $\sin \mu_{k_2} l_2$ *that goes to zero as* k_2 *tends to infinity. Actually, it's not possible to exactly control system (3.1) on Ventcel portion of the boundary, because neither the tangential nor the time derivatives of the solution of (3.3) are observable on this portion (they both contain* $\sin(\mu_{k_2} l_2)$*).*

The same could be said if we impose Ventcel condition on the top and right side of Ω *and attempt to control the system through Ventcel action only. For this time the solution of the associated homogeneous problem is given by*

$$u(x_1, x_2, t) = \sum_{k_1=0}^{\infty} \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(a_k e^{i\omega_k t} + a_{-k} e^{-i\omega_k t}\right) \sin(\delta_{k_1} x_1) \sin(\mu_{k_2} x_2),$$

with $\delta_{k_1} = \cot(\delta_{k_1} l_1),\ \mu_{k_2} = \cot(\mu_{k_2} l_2)$ *and* $\omega_k = \sqrt{\delta_{k_1}^2 + \mu_{k_2}^2}$.

3.6 Further results on the observability of system (3.3)

In this section, we shall employ once more our variant of Mehrenberger's theorem to the next two results concerning internal and combined internal-boundary observability.

Theorem 3.8. *Let* (a, b), (c, d) *be two non-empty subintervals of respectively* $(0, l_1)$ *and* $(0, l_2)$*. Given* $((u_0, u_0|_{\Gamma_V}), (u_2, u_3)) \in X$*, we have for* $T > 0$ *suffi-*

ciently large, the following observability estimate:

$$E(0) \le c\,(\int_0^T\int_c^d\int_0^{l_1} |u'(x_1,x_2,t)|^2\,dx_1dx_2dt + \int_0^T\int_a^b\int_0^{l_2} |u'(x_1,x_2,t)|^2\,dx_2dx_1dt$$
$$+ \int_0^T\int_a^b |u'(x_1,l_2,t)|^2\,dx_1dt). \tag{3.32}$$

Theorem 3.9. *Let (a,b) be a non-empty subinterval of $(0,l_1)$. Let $((u_0,u_0|_{\Gamma_V}),(u_2,u_3)) \in X$. Then, for T sufficiently large, the solution of (3.3) is proved to satisfy*

$$E(0) \le c\,(\int_0^T\int_0^{l_1} \left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t)\right|^2 dx_1dt + \int_0^T\int_a^b\int_0^{l_2} |u'(x_1,x_2,t)|^2\,dx_2dx_1dt$$
$$+ \int_0^T\int_a^b |u'(x_1,l_2,t)|^2\,dx_1dt). \tag{3.33}$$

The estimate of theorem 3.7 cannot directly lead to the inequalities above, that's why we rewrite it in the following way.

Theorem 3.10. *Let $(\omega_l)_{l=-\infty}^{+\infty}$ be a sequence of real numbers. Given $(p_l)_{l=-\infty}^{+\infty} \subset \mathbb{C}$, we assume the following partial gap condition: there exist $\gamma,\eta > 0$ such that for $l,l' \in \mathbb{Z}$ we have*

$$|\omega_l - \omega_{l'}| \ge \gamma|l-l'| \text{ whenever } \max(|p_l|,|p_{l'}|) \ge \eta.$$

Then, for $T > \dfrac{2\pi}{\gamma}$ we get

$$\int_0^T \left|\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \alpha_l e^{i\omega_l t}\right|^2 dt \ge \frac{2T}{\pi}\left(\sum_{|p_l|\ge\eta} |\alpha_k|^2 - \left(\frac{2\pi}{T\gamma}\right)^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} |\alpha_l|^2\right), \tag{3.34}$$

for all square summable sequences $(\alpha_l)_{l=-\infty}^{+\infty}$ of complex numbers.

Proof. We get this inequality by repeating verbatim the computations carried out by Komornik [31], p. 140-141. However, we call attention to the fact that here, the decomposition of the sum is done according to the sequence $(p_l)_{l=-\infty}^{+\infty}$. □

Before moving on to the demonstrations of the observability theorems, we take the chance to state the following

Remark 3.6. *Let's go back to the situation considered in remark 3.5 when we have two controls, one on the top side of Γ and the other on the left side. The representation given in the theorem above allows us to see that after all system (3.3) is approximately controllable. Indeed, if we assume that*

$$\int_0^{l_1} |u'(x_1, l_2, t)|^2 \, dx_1 + \int_0^{l_2} \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, x_2, t) \right|^2 dx_2 + \left| \frac{\partial u}{\partial x_1}(0, l_2, t) \right|^2 = 0, \ \forall t \in (0, T).$$

Then, according to inequality (3.34) we have

$$\left(\left(\frac{k_1 \pi}{l_1} \right)^2 + |\omega_k \sin \mu_{k_2} l_2|^2 \right) \left(|a_k|^2 + |a_{-k}|^2 \right) = 0, \forall k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N},$$

which implies that the solution of (3.3) is approximately observable on Γ_1 and Γ_V.

The gap assumptions satisfied by $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}}$ (cf. lemma 3.2) together with theorem 3.10 help us draw the following

Corollary 3.2. *If $T > \dfrac{2\pi}{\gamma_1} = 2\left(\sqrt{2}+1\right) l_1$, then for every $k_2 \in \mathbb{N}$ we have*

$$\begin{aligned} &\int_0^T \left| \sum_{k_1=1}^{\infty} \left(\alpha_k e^{i\omega_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\omega_k t} \right) \right|^2 dt \\ &\geq \left(\frac{2T}{\pi} - \frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T\pi} \right) \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*, \ \frac{k_1 \pi}{l_1} \geq \mu_{k_2}} \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2 \right) \\ &\qquad - \frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T\pi} \sum_{k_1 \in \mathbb{N}^*, \ \frac{k_1 \pi}{l_1} < \mu_{k_2}} \left(|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2 \right). \end{aligned}$$

If $T > \frac{2\pi}{\gamma_2} = 4\left(\sqrt{2}+1\right) l_2$, *then for every* $k_1 \in \mathbb{N}^*$ *we have*

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \left| \sum_{k_2=0}^{\infty} \left(\alpha_k e^{i\omega_k t} + \alpha_{-k} e^{-i\omega_k t}\right) \right|^2 dt \\
&\geq \left(\frac{2T}{\pi} - \frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T\pi} \right) \sum_{k_2 \in \mathbb{N},\ \mu_{k_2} \geq \frac{k_1\pi}{l_1}} (|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2) \\
&- \frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T\pi} \sum_{k_2 \in \mathbb{N},\ \mu_{k_2} < \frac{k_1\pi}{l_1}} (|\alpha_k|^2 + |\alpha_{-k}|^2).
\end{aligned}$$

Setting

$$m_{a,b} := \inf_{n \in \mathbb{N}^*} \int_a^b \sin^2\left(\frac{n\pi}{l_1} y\right) dy$$

$$m_{c,d} := \inf_{m \in \mathbb{N}} \int_c^d \sin^2(\mu_m y)\ dy.$$

We get by means of classical trigonometric relations (see [31], p. 136) that

$$0 < m_{a,b} \leq \int_0^{l_1} \sin^2\left(\frac{n\pi}{l_1} y\right) dy = \frac{l_1}{2},$$

$$0 < m_{c,d} \leq \int_0^{l_2} \sin^2(\mu_m y)\ dy \leq \frac{l_2}{2}.$$

Now, we have the necessary material to conduct the proofs of theorems 3.8 and 3.9.

3.6.1 Proof of theorem 3.8

We are going to assess the terms of the right-hand side of inequality (3.32), using the expansion of $u(x,t)$ as a Fourier series as well as the estimates of corollary 3.2. We start up with the first term

$$\begin{aligned}&\int_0^T\int_0^{l_1}\left|u'(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_1dt\\&=\int_0^T\int_0^{l_1}\left|\sum_{k_1=1}^{\infty}\sum_{k_2=0}^{\infty} i\omega_k(a_ke^{i\omega_kt}-a_{-k}e^{-i\omega_kt})\sin(\frac{k_1\pi}{l_1}x_1)\sin(\mu_{k_2}x_2)\right|^2 dx_1dt\\&=\frac{l_1}{2}\int_0^T\sum_{k_1}\left|\sum_{k_2}\omega_k(a_ke^{i\omega_kt}-a_{-k}e^{-i\omega_kt})\sin(\mu_{k_2}x_2)\right|^2 dt.\end{aligned}$$

Using the second estimate of corollary 3.2, we get for $T>4\left(\sqrt{2}+1\right)l_2$

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^{l_1}\left|u'(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_1dt$$

$$\begin{aligned}&\geq\frac{l_1}{2}\sum_{k_1}\left(\frac{2T}{\pi}-\frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)^2l_2^2}{T\pi}\right)\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}\geq\frac{k_1\pi}{l_1}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\sin^2(\mu_{k_2}x_2)\\&-\frac{l_1}{2}\sum_{k_1}\frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)^2l_2^2}{T\pi}\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}<\frac{k_1\pi}{l_1}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\sin^2(\mu_{k_2}x_2)\\&=\sum_{k_1}\frac{l_1}{\pi}\left(T-\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2l_2^2}{T}\right)\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}\geq\frac{k_1\pi}{l_1}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\sin^2(\mu_{k_2}x_2)\\&-\sum_{k_1}\frac{l_1}{\pi}\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2l_2^2}{T}\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}<\frac{k_1\pi}{l_1}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\sin^2(\mu_{k_2}x_2).\end{aligned}$$

Integrating over (c,d), it results

$$\begin{aligned}&\int\limits_0^T\int\limits_c^d\int\limits_0^{l_1}\left|u'(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_1dx_2dt\\&\geq\frac{l_1}{\pi}\left(T-\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2l_2^2}{T}\right)m_{c,d}\sum_{k_1}\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}\geq\frac{k\pi}{l_1}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\\&-\frac{l_1}{\pi}\frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2l_2^3}{T}\sum_{k_1}\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}<\frac{k_1\pi}{l_1}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right).\end{aligned}$$

Thus, if $T^2 > 16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2$, we have

$$\int_0^T\int_c^d\int_0^{l_1} \left|u'(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_1dx_2dt$$
$$\geq \frac{l_1}{\pi}\left(T-\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\right) m_{c,d}\sum_{k_1}\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}>\frac{k_1\pi}{l_1}} \left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right) \tag{3.35}$$
$$-\frac{l_1}{\pi}\frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^3}{T}\sum_{k_1}\sum_{k_2,\ \mu_{k_2}\leq\frac{k_1\pi}{l_1}} \left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right).$$

Similarly, we handle the other two terms on the right side of inequality (3.32) to find that for $T > 2\left(\sqrt{2}+1\right)l_1$, we have

$$\int_0^T\left(\int_0^{l_2}\left|u'(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_2+\left|u'(x_1,l_2,t)\right|^2\right)dt$$
$$=\int_0^T\sum_{k_2}\frac{l_2\mu_{k_2}^2+l_2+1}{2(1+\mu_{k_2}^2)}\left|\sum_{k_1}\omega_k\left(a_ke^{i\omega_kt}-a_{-k}e^{-i\omega_kt}\right)\sin\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right|^2 dt$$
$$\geq\frac{l_2}{2}\sum_{k_2}\left(\frac{2T}{\pi}-\frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T\pi}\right)\sum_{k_1,\ \frac{k_1\pi}{l_1}\geq\mu_{k_2}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\sin^2\frac{k_1\pi}{l_1}x_1$$
$$-\frac{l_2+1}{2}\sum_{k_2}\frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T\pi}\sum_{k_1,\ \frac{k_1\pi}{l_1}<\mu_{k_2}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right)\sin^2\frac{k_1\pi}{l_1}x_1.$$

Integration with respect to x_1 yields

$$\int_0^T\left(\int_a^b\int_0^{l_2}\left|u'(x_1,x_2,t)\right|^2 dx_2dx_1+\int_a^b\left|u'(x_1,l_2,t)\right|^2 dx_1\right)dt$$
$$\geq\frac{l_2}{\pi}\left(T-\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T}\right)m_{a,b}\sum_{(k_1,k_2),\ \frac{k_1\pi}{l_1}\geq\mu_{k_2}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right) \tag{3.36}$$
$$-\frac{l_2+1}{\pi}\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^3}{T}\sum_{(k_1,k_2),\ \frac{k_1\pi}{l_1}<\mu_{k_2}}\left|\omega_k\right|^2\left(\left|a_k\right|^2+\left|a_{-k}\right|^2\right).$$

Adding up estimates (3.35), (3.36) gives

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_c^d\int_0^{l_1} |u'(x_1,x_2,t)|^2\, dx_1dx_2dt + \int_0^T\int_a^b\int_0^{l_2} |u'(x_1,x_2,t)|^2\, dx_2dx_1dt \\
&\qquad + \int_0^T\int_a^b |u'(x_1,l_2,t)|^2\, dx_1dt \\
&\geq \left[\frac{l_2}{\pi}\left(T - \frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T}\right) m_{a,b} - \frac{l_1}{\pi}\frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^3}{T}\right] \\
&\qquad \times \sum_{(k_1,k_2),\ \frac{k_1\pi}{l_1}\geq \mu_{k_2}} |\omega_k|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right) + \\
&+ \left[\frac{l_1}{\pi}\left(T - \frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\right) m_{c,d} - \frac{l_2+1}{\pi}\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^3}{T}\right] \\
&\qquad \times \sum_{(k_1,k_2),\ \frac{k_1\pi}{l_1}< \mu_{k_2}} |\omega_k|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right).
\end{aligned}$$

Hence, for us to have inequality (3.32), it suffices to take

$$\begin{aligned}
T^2 > \max\{&4\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2 + \frac{8\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1 l_2^2}{m_{a,b}}, \\
&16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2 + \frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 (l_2+1) l_1^2}{m_{c,d}}\}.
\end{aligned}$$

3.6.2 Proof of theorem 3.9

This demonstration goes along the lines of the previous one. We have already evaluated the last two terms of the right-hand side of (3.33); thus to attain the desired inequality, it suffices to treat similarly the first term.

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^{l_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t)\right|^2 dx_1dt \\
&= \int_0^T\int_0^{l_1}\left|\sum_{k_1,k_2}\mu_{k_2}\left(a_k e^{i\omega_k t}+a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\sin\frac{k_1\pi}{l_1}x_1\right|^2 dx_1dt \\
&= \frac{l_1}{2}\int_0^T\sum_{k_1}\left|\sum_{k_2}\mu_{k_2}\left(a_k e^{i\omega_k t}+a_{-k}e^{-i\omega_k t}\right)\right|^2 dt \\
&\geq \frac{l_1}{2}\sum_{k_1}\left(\frac{2T}{\pi}-\frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T\pi}\right)\sum_{k_2\in\mathbb{N},\ \mu_{k_2}\geq\frac{k_1\pi}{l_1}}|\mu_{k_2}|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right) \\
&\qquad -\frac{l_1}{2}\sum_{k_1}\frac{32\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T\pi}\sum_{k_2\in\mathbb{N},\ \mu_{k_2}<\frac{k_1\pi}{l_1}}|\mu_{k_2}|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right) \\
&= \frac{l_1}{\pi}\left(T-\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\right)\sum_{(k_1,k_2),\ \mu_{k_2}>\frac{k_1\pi}{l_1}}|\mu_{k_2}|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right) \\
&\qquad -\frac{l_1}{\pi}\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\sum_{(k_1,k_2),\ \mu_{k_2}\leq\frac{k_1\pi}{l_1}}|\mu_{k_2}|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right).
\end{aligned}$$

However, we have $\mu_{k_2}^2>\frac{\omega_k^2}{2}$ if $\mu_{k_2}>\frac{k_1\pi}{l_1}$ and $\mu_{k_2}^2\leq\frac{\omega_k^2}{2}$ if $\mu_{k_2}\leq\frac{k_1\pi}{l_1}$. Hence, we deduce

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^{l_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t)\right|^2 dx_1dt \\
&\geq \frac{l_1}{\pi}\left(T-\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\right)\sum_{(k_1,k_2),\ \mu_{k_2}>\frac{k_1\pi}{l_1}}|\omega_k|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right) \\
&\qquad -\frac{l_1}{\pi}\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\sum_{(k_1,k_2),\ \mu_{k_2}\leq\frac{k_1\pi}{l_1}}|\omega_k|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right).
\end{aligned}$$

Summing this with inequality (3.36) from the previous proof, we obtain

$$\begin{aligned}
&\int_0^T\int_0^{l_1}\left|\frac{\partial u}{\partial x_2}(x_1,0,t)\right|^2 dx_1dt+\int_0^T\int_a^b\int_0^{l_2}|u'(x_1,x_2,t)|^2\,dx_2dx_1dt\\
&\qquad+\int_0^T\int_a^b|u'(x_1,l_2,t)|^2\,dx_1dt\\
&\geq\left[\frac{l_1}{\pi}\left(T-\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\right)-\frac{l_2+1}{\pi}\frac{2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^3}{T}\right]\\
&\qquad\times\sum_{(k_1,k_2),\ \mu_{k_2}>\frac{k_1\pi}{l_1}}|\omega_k|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right)+\\
&+\left[\frac{l_2}{\pi}\left(T-\frac{4\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2}{T}\right)m_{a,b}-\frac{l_1}{\pi}\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2}{T}\right]\\
&\qquad\times\sum_{(k_1,k_2),\ \mu_{k_2}\leq\frac{k_1\pi}{l_1}}|\omega_k|^2\left(|a_k|^2+|a_{-k}|^2\right).
\end{aligned}$$

Finally, choosing $T>0$ such that

$$\begin{aligned}
T^2>\max\{&16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_2^2+2\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2(l_2+1),\\
&4\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1^2+\frac{16\left(\sqrt{2}+1\right)^2 l_1 l_2}{m_{a,b}}\}
\end{aligned}$$

we reach the desired estimate.

Conclusion et perspectives

Les résultats principaux de cette thèse concernent la contrôlabilité de l'équation des ondes avec des conditions aux limites de Dirichlet et de Ventcel dynamique. Nous avons montré la contrôlabilité exacte dans un domaine rectangulaire où la condition de Ventcel est imposée sur une face du bord et la condition de Dirichlet sur le reste du bord. Pour des raisons de simplicité nous nous sommes restreints au cas bidimensionnel. Les résultats s'étendent sans difficulté aux dimensions supérieures.

La résolution de ce problème s'est faite en combinant la méthode HUM avec des techniques de l'analyse non harmonique. HUM nous a permis de transformer le problème initial en un problème d'observabilité, qui est ensuite traité grâce à une nouvelle adaptation du théorème d'Ingham. Ainsi, nous avons pu conduire notre système à l'équilibre par seulement une action de Dirichlet sur deux côtés adjacents de la frontière. Ce qui va à l'encontre de ce que prétendent Gal et Tebou dans [18]. Ils affirment que l'on a besoin également d'un contrôle sur le côté de Ventcel.

Par ailleurs, les résultats existant déjà dans ce même contexte (en tout cas ceux que nous avons pu trouver [44], [39], [18]), incluent tous la partie de Ventcel dans la région contrôlée. Aussi nous a-il paru raisonnable de tenter de faire autant ; or cela n'a pas donné ce à quoi on s'attendait d'après les références. Il s'avère qu'imposer la condition de Ventcel sur deux côtés et contrôler justement sur cette région n'entraine qu'une contrôlabilité approchée. Il en est de même au cas où l'on incorpore une action de Dirichlet sur un côté et une action de Ventcel sur un autre côté (voir les remarques du chapitre 3).

Autant dire qu'en dépit de sa simplicité, l'approche des inégalités d'Ingham nous a apportée des résultats remarquables.

En outre, une telle étude nous a ouvert l'horizon sur d'autres problématiques que nous pourrions envisager de s'y consacrer dans le futur. Les techniques de la théorie spectrale se révélant aussi fructueuses, nous comptons, dans un premier temps, essayer d'en tirer profit encore pour un problème de Ventcel mais cette fois-ci avec l'équation de la chaleur. Bien sûr, vu le caractère parabolique de ce système, il n'est plus question d'inégalité d'Ingham. Nous appliquerons plutôt la méthode des moments de Russell [52, 53]. Ceci est un projet que nous tenons à aborder très bientôt.

En revanche, il serait peut-être possible de varier d'autres paramètres du problème. Nous pourrions nous placer dans différents géométries. La sphère par exemple, puisque nous savons y calculer les valeurs et les vecteurs propres ; il serait judicieux d'essayer de mener une étude avec les théorèmes d'Ingham comme l'avaient exposé Komornik et Loreti dans [26] pour l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet. De plus, toujours en s'inspirant de cette référence, nous pourrions aussi considérer la condition de Ventcel avec d'autres équations voire même avec des systèmes d'équations.

D'autres perspectives s'offrent à nous si nous regardons l'article [19] de Goldstein où sont présentées quelques conditions aux limites non standards, qui pourraient être couplées avec l'équation des ondes, des plaques ou de la chaleur pour former des problèmes intéressants.

La référence [14] contient également plusieurs situations de la mécanique avec des conditions classiques ou non dont nous pourrions examiner la contrôlabilité.

Bibliographie

[1] C. Bardos, G. Lebeau, and J. Rauch. Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM journal on control and optimization*, 30(5) :1024–1065, 1992.

[2] L. Baudouin, M. De Buhan, and S. Ervedoza. Global carleman estimates for waves and applications. *Communications in Partial Differential Equations*, 38(5) :823–859, 2013.

[3] J. Behrndt. Boundary value problems with eigenvalue depending boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, 282(5) :659–689, 2009.

[4] I. Benabbas and D. E. Teniou. Observability of wave equation with ventcel dynamic condition. *EECT.*, 7(4) :545–570, 2018.

[5] P. Binding, P. J. Browne, and K. Seddighi. Sturm–liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 37(1) :57–72, 1994.

[6] P. Binding, R. Hryniv, H. Langer, and B. Najman. Elliptic eigenvalue problems with eigenparameter dependent boundary conditions. *Journal of Differential Equations*, 174(1) :30–54, 2001.

[7] T. Carleman. Sur un problème d'unicité pour les systèmes d'équations aux driveés partielles à deux variables independentes. *Ark. Mat. Astr. Fys.*, 2B :1–9, 1939.

[8] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, R. Fukuoka, and D. Toundykov. Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions. *Journal of Evolution Equations*, 9(1) :143–169, 2009.

[9] M. M. Cavalcanti, A. Khemmoudj, and M. Medjden. Uniform stabilization of the damped cauchy–ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary conditions. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 328(2) :900–930, 2007.

[10] G. M. Coclite, A. Favini, G. R. Goldstein, J. A. Goldstein, and S. Romanelli. Continuous dependence in hyperbolic problems with wentzell boundary conditions. *Commun. Pure Appl. Anal*, 13 :419–433, 2014.

[11] J.-M. Coron. *Control and nonlinearity*, volume 136 of Mathematical Surveys and Monographs. American Mathematical Soc., Providence, RI, 2007.

[12] R. F. Curtain and H. Zwart. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21. Springer Science & Business Media, New York, 2012.

[13] J. Edward. Ingham-type inequalities for complex frequencies and applications to control theory. *Journal of mathematical analysis and applications*, 324(2) :941–954, 2006.

[14] A. Figotin and G. Reyes. Lagrangian variational framework for boundary value problems. *Journal of Mathematical Physics*, 56(9) :1–35, 2015.

[15] C. T. Fulton. Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 77(3-4) :293–308, 1977.

[16] C. T. Fulton. Singular eigenvalue problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A : Mathematics*, 87(1-2) :1–34, 1980.

[17] C. G. Gal. The Role of Surface Diffusion in Dynamic Boundary Conditions : Where Do We Stand ? *Milan Journal of Mathematics*, 83 :237–278, 2015.

[18] C. G. Gal and L. Tebou. Carleman Inequalities for Wave Equations with Oscillatory Boundary Conditions and Application. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 55 :324–364, 2017.

[19] G. R. Goldstein. Derivation and physical interpretation of general boundary conditions. *Advances in Differential Equations*, 11(4) :457–480, 2006.

[20] P. Grisvard. *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Pitman, London, 1985.

[21] A. Haraux. *Systemes dynamiques dissipatifs et applications*, volume 17. Masson, 1991.

[22] O. Y. Imanuvilov. On Carleman estimates for hyperbolic equations. *Asymptotic Analysis*, 32(3, 4) :185–220, 2002.

[23] A. E. Ingham. Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series. *Mathematische Zeitschrift*, 41(1) :367–379, 1936.

[24] S. Jaffard and S. Micu. Estimates of the constants in generalized Ingham's inequality and applications to the control of the wave equation. *Asymptotic Analysis*, 28(3, 4) :181–214, 2001.

[25] V. Komornik. *Exact controllability and stabilization : the multiplier method*, volume 36. Masson, New York, 1994.

[26] V. Komornik and P. Loreti. *Fourier series in control theory.* Springer Science & Business Media, New York, 2005.

[27] V. Komornik and P. Loreti. Discrete Ingham type inequalities and simultaneous observability of strings or beams. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 351 :16–28, 2009.

[28] V. Komornik and P. Loreti. Multiple-point internal observability of membranes and plates. *Applicable Analysis*, 90(10) :1545–1555, 2011.

[29] V. Komornik and P. Loreti. Observability of rectangular membranes and plates on small sets. *EECT.*, 3 :287–304, 2014.

[30] V. Komornik and P. Loreti. Observability of square membranes by Fourier series methods. *Bulletin of the South Ural State University. Series "Mathematical Modelling, Programming and Computer Software"*, 8(3) :127–140, 2015.

[31] V. Komornik and B. Miara. Cross-like internal observability of ractangular membranes. *EECT.*, 3 :135–146, 2014.

[32] I. Lasiecka and R. Triggiani. Regularity of hyperbolic equations under $L^2(0,T;L^2(\Gamma))$-Dirichlet cambridge boundary terms. *Applied Mathematics and Optimization*, 10(1) :275–286, 1983.

[33] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Control theory for partial differential equations : Volume 1, Abstract parabolic systems : Continuous and approximation theories*, volume 1. Cambridge University Press, Cambridge, 2000.

[34] J. Le Rousseau. On Carleman estimates with two large parameters. *Indiana University Mathematical Journal*, 64 :55–113, 2015.

[35] K. Lemrabet. Problème aux limites de ventcel dans un domaine non régulier. *CRAS Paris*, 300 :531–534, 1985.

[36] K. Lemrabet. *Etude de Divers Problèmes Aux Limites de Ventcel D'origine Physique ou Mécanique dans des Domaines non Réguliers*. PhD thesis, USTHB, Algiers, 1987.

[37] K. Lemrabet and D. Teniou. Un problème d'évolution de type ventcel. *Maghreb Math. Rev.*, 1 :15–29, 1992.

[38] C. Li, J. Liang, and T.-J. Xiao. Dynamical behaviors of solutions to nonlinear wave equations with vanishing local damping and wentzell boundary conditions. *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik*, 69(4) :1–25, 2018.

[39] C. Li and T.-J. Xiao. A note on the ibvp for wave equations with dynamic boundary conditions. *Boundary Value Problems*, 34(1) :1–9, 2016.

[40] C. Li and T.-J. Xiao. Asymptotics for wave equations with wentzell boundary conditions and boundary damping. *Semigroup Forum*, 94(3) :520–531, 2017.

[41] W. Li and X. Zhang. Controllability of parabolic and hyperbolic equations : toward a unified theory. *Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics*, 242 :157–174, 2005.

[42] J.-L. Lions. Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués. tome 1. *RMA*, 8, 1988.

[43] J.-L. Lions. Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems. *SIAM review*, 30(1) :1–68, 1988.

[44] T. Masrour. The wave equation with dynamic wentzell boundary condition in polygonal and polyhedral domains : Observation and exact controllability. *International Journal*, 2(1) :13–22, 2014.

[45] M. Mehrenberger. An Ingham type proof for the boundary observability of a wave equation. *Comptes Rendus Mathematique*, 347(1-2) :63–68, 2009.

[46] P. M. Morse and K. U. Ingard. *Theoretical acoustics*. Princeton university press, New York, 1986.

[47] S. Nicaise and K. Laoubi. Polynomial stabiization of the wave equation with Ventcel's boundary conditions. *Mathematische Nachrichten*, 283(10) :1428–1438, 2010.

[48] N. K. Nikol'kii. *Operators, Functions, and Systems : An Easy Reading.* American Mathematical Society, New York, 2002.

[49] A. Pazy. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media, New York, 2012.

[50] R. L. Peek. Solution to a Problem in Diffusion Employing a Non-Orthogonal Sine Series. *The Annals of Mathematics*, 30(1/4) :265–269, 1928.

[51] J. Puel. Global Carleman inequalities for the wave equations and applications to controllability and inverse problems, in "control of solids and structures : Mathematical modelling and engineering applications". *Udine (Italy), June*, 2004.

[52] D. L. Russell. A unified boundary controllability theory for hyperbolic and parabolic partial differential equations. *Studies in Applied Mathematics*, 52(3) :189–211, 1973.

[53] D. L. Russell. Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions. *Siam Review*, 20(4) :639–739, 1978.

[54] D. Tataru. Boundary controllability for conservative PDEs. *Applied Mathematics and Optimization*, 31(3) :257–295, 1995.

[55] D. Tataru. Carleman estimates and unique continuation for solutions to boundary value problems. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, 75(4) :367–408, 1996.

[56] G. Tenenbaum and V. Komornik. An Ingham–Müntz type theorem and simultaneous observation problems. *Evolution Equations and Control Theory*, 4(3) :297–314, 2015.

[57] E. C. Titchmarsh. *Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations, Part 1.* Oxford University Press, London, 1962.

[58] M. Tucsnak and G. Weiss. *Observation and control for operator semigroups.* Springer Science & Business Media, Basel, 2009.

[59] E. Vitillaro. On the Wave Equation with Hyperbolic Dynamical Boundary Conditions, Interior and Boundary Damping and Source. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 223(3) :1183–1237, 2017.

[60] E. Vitillaro. On the wave equation with hyperbolic dynamical boundary conditions, interior and boundary damping and supercritical sources. *Journal of Differential Equations*, 265(10) :4873–4941, 2018.

[61] J. Walter. Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. *Mathematische Zeitschrift*, 133(4) :301–312, 1973.

[62] M. Yamamoto. Carleman estimates for parabolic equations and applications. *Inverse problems*, 25(12) :1–75, 2009.

[63] X. Zhang. Explicit observability inequalities for the wave equation with lower order terms by means of Carleman inequalities. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(3) :812–834, 2000.

[64] E. Zuazua. Controllability of partial differential equations and its semidiscrete approximations. *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, 8 :469–513, 2002.

Résumé. On considère, dans un domaine rectangulaire, l'équation des ondes avec la condition de Dirichlet sur une partie du bord et la condition dynamique de Ventcel sur l'autre partie. Un tel système d'évolution décrit les vibrations transversales d'un corps élastique ayant une couche mince de haute rigidité sur une partie de sa frontière.

On s'intéresse en particulier à la contrôlabilité frontière de ce système à travers une action de Dirichlet : question de l'amener d'un état initial à un état final prescrit avec un contrôle par le bord. On résout ce problème dans le cadre de la méthode *Hilbert Uniqueness Method* de Lions, qui permet de passer d'un problème de contrôlabilité d'un système à celui d'observabilité de son adjoint. L'observabilité est ensuite traitée au moyen des techniques de l'analyse non harmonique notamment les théorèmes de type Ingham.

Dans un premier temps, en s'inspirant d'un résultat de Mehrenberger, on montre une nouvelle variante de l'inégalité d'Ingham bien adaptée au problème considéré, laquelle entraine par la suite l'observabilité frontière. Dans un second temps, on reformule cette même variante de telle sorte à nous procurer davantage de résultats. On arrive effectivement à établir, d'une part, une inégalité d'observabilité interne, et d'autre part, une autre issue de la combinaison d'observations interne et frontière. Il convient de noter que la validité de ces deux derniers résultats ne dépend plus de la condition géométrique de Bardos-Lebeau-Rauch ; en fait, les régions observées sont arbitrairement petites.

Mots-clés. Contrôlabilité, observabilité, équation des ondes, condition de Ventcel dynamique, séries de Fourier, inégalité d'Ingham.

Abstract. We consider, in a rectangular domain, the wave equation with Dirichlet condition on one part of the boundary, and dynamical Ventcel condition on the other part. Such an evolution system describes the transverse vibrations of an elastic body having a thin layer of high rigidity on a part of its border.

We are particularly interested in the border controllability of this system through Dirichlet action: the question of bringing it from an initial state to a prescribed final state using a boundary control. This problem is solved in the framework of Hilbert uniqueness method of Lions, that enables us to go from a controllability problem of a system to the observability of its adjoint. The observability is then handled using non-harmonic analysis techniques, namely Ingham's theorems.

In a first step, inspired by a result of Mehrenberger, we show a new variant of Ingham inequality well adapted to the problem considered, which later leads to boundary observability. In a second step, we reformulate this same variant so as to obtain more results. We effectively manage to establish, on the one hand, an inequality of internal observability, and on the other hand, one resulting from the combination of internal and border observations. It should be noted that the validity of these last two results no longer depends on the geometric condition of Bardos-Lebeau-Rauch; in fact, the regions observed are arbitrarily small.

Keywords. Controllability, observability, wave equation, dynamical Ventcel boundary condition, Fourier series, Ingham inequality.