

Ministère de l'enseignement supérieur et de la recherche scientifique

Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene

Faculté des mathématiques



THÈSE

Présentée pour l'obtention du **diplôme** de **Doctorat** en **mathématiques**

Spécialité : **Analyse : Équations aux Dérivées Partielles**

Présentée par : **SABBAGH Zineb**

Thème

**Étude de l'existence globale et du comportement asymptotique
de la solution d'une équation d'évolution non-linéaire
avec un retard distribué**

Soutenue publiquement, le 07/07/2019 devant le jury composé de :

M.	M.S. MOULAY	Professeur	à l'USTHB	Président
M.	A. KHEMMOUDJ	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
M.	A. TOUZALINE	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M.	M. MEDJDEN	Professeur	à l'USTHB	Examineur
M.	A. CHOUTRI	Professeur	à l'ENS Kouba	Examineur
M.	A. HAKEM	Professeur	à l'U. D. L. Sidi Bel Abbès	Examineur

**Etude de l'existence globale et du comportement asymptotique de la solution
d'une équation d'évolution non-linéaire avec un retard distribué**

SABBAGH Zineb

Résumé

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'existence globale d'une solution faible et son comportement asymptotique pour un modèle de plaques minces viscoélastiques non-linéaire de type Petrovsky avec un retard interne distribué.

On démontre que l'énergie associée à notre système décroît vers zéro de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Dans un premier temps, nous étudions l'existence globale d'une solution faible du problème avec conditions aux limites de Dirichlet, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Ensuite, on démontre la décroissance exponentielle de l'énergie du système considéré sous des conditions raisonnables sur les données. La stabilité de la solution est obtenue en utilisant la méthode de Lyapunov.

Mots-clés : Plaque viscoélastique, Retard distribué, Solution globale, Décroissance exponentielle.

Abstract

This thesis is devoted to the study of the existence of a global solution and its asymptotic behavior for a Petrovsky non-linear viscoelastic thin plate with a distributed delay.

We will show that the energy associated with the system decays to zero exponentially when the time tends to infinity.

We have studied first, the global existence of a weak solution of the problem with Dirichlet boundary conditions, using the Faedo-Galerkin method.

Then we have proved the exponential decay to zero of the energy for the considered system under reasonable conditions on the data. The stability of the solution is obtained via the Lyapunov method.

Keywords : Global solution, Distributed delay, Multiplier method, Weak frictional damping, Viscoelastic Petrovsky equation, Exponential decay.

Remerciements

*Je tiens en premier lieu à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **A. Khemmoudj** mon directeur de thèse, professeur à l'U.S.T.H.B qui m'a proposé ce sujet de recherche. Il m'a soutenu et guidé durant de longues années. Il m'a toujours encouragé durant mes moments de doute. Je le remercie vivement pour tout ce qu'il m'a appris et pour l'intérêt qu'il a manifesté pour mon travail. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Mr **M. S. Moulay**, professeur à l'U.S.T.H.B, qui m'a encouragé dans ma recherche et qui me fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je remercie vivement les professeurs **A. Touzaline**, **M. Medjden** de l'U.S.T.H.B et **A. Choutri** Professeur à l'E.N.S. Kouba et **A. Hakem** Professeur à l'université de Sidi Belabes qui ont accepté d'examiner cette thèse et bien voulu faire partie du jury.*

*Je tiens, à exprimer mes remerciements les plus chaleureux à tous mes collègues. Un 'Merci' tout particulier à Mme **M. Abdelli** professeur à l'université de Mascara pour ses orientations, ses encouragements. Elle m'a beaucoup aidé dans ce travail.*

Pour finir, j'adresse mes plus sincères remerciements à tous mes proches et particulièrement mes chers parents. Ils m'ont beaucoup soutenu durant mes moments de doute et supporté durant toutes ces années. Je leurs dédie ce travail.

SABBAGH Zineb

Notations

Dans tout ce qui suit, les notations suivantes seront utilisées.

Ω : Un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière Γ .

$\eta := (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$: le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω .

$C^k(\Omega)$: Espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier ≥ 0).

$C_0^\infty(\Omega)$: L'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

$L^p(\Omega)$: Espace de Lebesgue $0 \leq p \leq \infty$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: Espace des distributions.

$W^{m,p}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$: Espaces de Sobolev, $0 \leq p \leq \infty$; $m \in \mathbb{N}$; ($H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$).

$W_0^{m,p}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$: L'adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ respectivement dans $H^m(\Omega)$.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right)$: le gradient de la fonction u .

$\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$: Le Laplacien.

$\Delta^2 := \Delta(\Delta)$: Le Bilaplacien.

$|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ la norme euclidienne, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

$\|\cdot\|_p$: la norme de $L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty)$.

(\cdot, \cdot) : le produit scalaire de $L^2(\Omega)$.

\rightharpoonup : la convergence faible.

\rightharpoonup^* : la convergence faible étoile.

Table des matières

Résumé	i
Remerciements	iii
Notations	iv
Liste des figures	vii
Introduction	1
1 Rappels sur les matériaux viscoélastiques	9
1.1 Introduction	9
1.2 Définition de la viscoelasticité	10
1.3 Viscoélasticité linéaire	12
1.4 Conclusion	19
2 Rappel de quelques outils mathématiques	20
2.1 Dual d'un espace de Banach	20
2.2 Topologie faible et Topologie faible étoile	21

2.3	Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$	23
2.3.1	Espaces de fonctions à valeurs vectorielles $L^p(0, T; X)$	26
2.3.2	Lemme de compacité d'Aubin-Lions	27
2.3.3	Quelques inégalités utiles	27
2.4	Espaces de Sobolev	29
2.4.1	Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$	29
2.4.2	Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$	29
2.4.3	Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$	30
3	Etude de l'existence globale d'une solution faible	33
3.1	Préliminaires	33
3.2	Le modèle étudié	38
3.3	Quelques travaux antérieurs	40
3.4	Le problème équivalent	42
3.5	Existence globale d'une solution faible	47
4	Comportement asymptotique	63
4.1	Introduction	63
4.2	Stabilité exponentielle	64
4.2.1	Fonctionnelle de Lyapounov	65
4.2.2	Équivalence de l'énergie	65
	Bibliographie	77

Liste des Figures

1.1	Courbe caractéristique de fluage.	14
1.2	Courbe caractéristique de relaxation de contrainte	14
1.3	Principe de superposition de Boltzmann	15
1.4	Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire	16
1.5	Modèle de Kelvin-Voigt	17
1.6	Modèle de Maxwell	18

Introduction

L'importance de l'étude des vibrations :

Un système dynamique est un ensemble d'objets ou de phénomènes liés entre eux. Sa modélisation vise à établir des relations qui lient les variables caractéristiques de ces processus entre eux et à représenter son comportement dans un domaine de fonctionnement donné. Elle nécessite un ensemble de techniques permettant de disposer d'une représentation mathématique du système étudié. Dans le même sens, on peut dire que la modélisation théorique exige une connaissance précise des phénomènes intervenant dans le système et une aptitude à les représenter par des équations mathématiques. Par conséquent, elle conditionne les méthodes qui seront utilisées par la suite pour analyser ses propriétés.

Au cours des dernières décennies plusieurs types d'équations aux dérivées partielles (EDP) ont été utilisés comme modèles mathématiques décrivant des systèmes physiques, chimiques, biologiques ou mécaniques. Parmi ces modèles, on peut citer les problèmes de vibrations des structures élastiques qui ont été considérablement étudiés.

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feedback). Elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro de façon plus ou moins rapide par des mécanismes de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel nous nous intéressons revient à étudier le comportement asymptotique de l'énergie que nous notons par $E(t)$: on calcule sa limite lorsque t tend vers $+\infty$. Si cette limite est nulle, on cherche une estimation de la vitesse de sa décroissance vers zéro. Le phénomène

des vibrations apparaît pratiquement dans toutes les structures mécaniques. Plusieurs types de vibrations sont indésirables car elles ont une influence néfaste sur le fonctionnement et la durée de vie de ces structures. Elles peuvent engendrer des fractures, des mauvais fonctionnements, une usure ou même l'endommagement des structures. De plus, elles peuvent constituer un danger pour l'utilisateur. Les excitations dynamiques causant ces vibrations, sont nombreuses. Elles proviennent, soit de l'environnement extérieur (sol, atmosphère, eau, contacts ou chocs avec d'autres structures), soit de dispositifs internes mobiles (machines intégrées à la structure...). La suppression ou même la réduction de ces vibrations est un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie, notamment la robotique.

Les systèmes à retards :

De point de vue pratique, plus particulièrement en science de l'ingénieur, on constate que les phénomènes de retard apparaissent naturellement dans les processus physiques. Parmi les principales sources induisant des retards, on peut citer les temps de réactions des capteurs ou des actionneurs, les temps de transmissions des informations, les temps de transferts des matières ou encore les temps de mesure. Alors dans le but de se rapprocher du processus réel, une meilleure modélisation consiste à concevoir "**les systèmes à retard**", où interviennent des équations différentielles dont l'évolution, contrairement aux systèmes ordinaires, dépend non seulement de la valeur courante de leurs variables d'état à l'instant présent t , mais aussi d'une partie de leurs valeurs passées. Dans ce cas, il est nécessaire de mémoriser une partie de "**l'histoire**" du système pour connaître son évolution.

Les effets de retard :

Récemment, de nombreux auteurs se sont intéressés aux problèmes de stabilisation avec un terme de retard. Les phénomènes de retard (en temps) apparaissent dans de nombreuses applications, par exemple en biologie [29], en mécanique [1] ou encore en automatique [62]. Il est bien connu qu'un effet de retard peut être la cause d'instabilité [7, 8] : un retard arbitrairement petit peut déstabiliser le système voir par exemple [42, 53]. Mais, à contrario

un effet de retard peut aussi améliorer la performance du système [1, 62].

Les problèmes de stabilité de systèmes avec retard revêtent donc une importance non négligeable. Pour avoir la stabilité de ces systèmes, nous avons pris des hypothèses que nous préciserons plus tard, dans le but de compenser les effets d'instabilité qui peuvent intervenir.

Les types de stabilité :

On distingue différents types de stabilité que l'on peut étudier :

1. La stabilité asymptotique **forte** qui signifie la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire :

$$E(t) \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Cette notion a été utilisée par : C. M. Dafermos [21], A. Haraux [31], F. Conrad et M. Pierre [18].

2. La stabilité **uniforme**, c'est-à-dire :

$$E(t) \leq C f(t), \text{ pour tout } t \geq 0,$$

où C est une constante indépendante de t et qui dépend uniquement des données initiales, $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction continue décroissante qui satisfait

$$f(t) \rightarrow 0, \text{ quand } t \rightarrow +\infty.$$

Cette notion a été utilisée par V. Komornik [34], J. E. Lagnese [37], M. Tucsnak [67] pour des systèmes linéaires ou non linéaires, ils ont utilisé la méthode des multiplicateurs et la construction de fonction de Lyapunov.

Pour la stabilité uniforme, on peut distinguer :

- a) la **décroissance exponentielle** de l'énergie c'est la décroissance la plus rapide,

$$E(t) \leq C e^{-\delta t}, \text{ pour tout } t > 0,$$

où C , δ sont des constantes positives; C dépend uniquement des données initiales, δ est le taux de décroissance de l'énergie.

b) la **décroissance polynomiale** de l'énergie, c'est à dire

$$E(t) \leq \frac{C}{t^\alpha}, \text{ pour tout } t > 0,$$

c) la **décroissance logarithmique**, c'est à dire

$$E(t) \leq \frac{C}{\log(1+t)^k}, \text{ pour tout } t > 0,$$

où C , α et k sont des constantes positives avec C indépendante de t .

Dans ce travail, on améliore sensiblement divers résultats antérieurs de la stabilité uniforme.

Note historique :

Les travaux de C. S. Morawetz :

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation des ondes dans un domaine non borné de \mathbb{R}^3 , C. Wilcox [69] a réussi à montrer que l'énergie locale décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Avec des hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz [68] a montré que l'énergie locale décroît comme l'inverse du temps. En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips [40] ont montré en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation des ondes dans un domaine de \mathbb{R}^3 , extérieur à un domaine étoilé décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

Les travaux de G. Chen et J. Lagnese :

En se basant sur les travaux C. S. Morawetz [68] sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur. En 1974 un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné. Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen [15]. Ensuite, en adaptant la technique des multiplicateurs utilisée par C. S.

Morawetz, W. A. Strauss et J. U. Ralston, dans les domaines extérieurs, C. Chen [16]) a amélioré les résultats obtenus dans [15]). Voir aussi Lagnese [36]).

Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani :

En 1987, en utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani [39] ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord.

Les travaux de J. L. Lions :

En 1986, Lions [41] a élaboré une méthode générale de la stabilité exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables. Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle et la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni l'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

Position du problème :

On étudie dans cette thèse la réduction des vibrations de la flexion d'une plaque mince. Les modèles de plaques minces sont obtenus à partir du système de l'élasticité tridimensionnelle par la technique des développements asymptotiques par rapport à l'épaisseur de la plaque mince [23].

On s'intéresse à l'étude de l'existence globale d'une solution faible et la stabilité exponentielle d'une équation non linéaire de type Petrovsky.

Le problème étudié est :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) \\ - \int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma + \mu_1 u_t(x, t) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tau_2[, \end{array} \right. \quad (1)$$

où Ω est un domaine borné non vide de \mathbb{R}^n , (en prenant $n = 2$), avec un bord régulier Γ .

- L'équation du problème (1) décrit les vibrations de la flexion d'une plaque mince avec une densité variable, dépendante de la vitesse, donnée par le terme $|u_t(x, t)|^l$, $l > 0$.
- $\mu_1 u_t$ est un terme d'amortissement (damping), où μ_1 est une constante positive.
- Δu_{tt} est un terme dispersif .
- $\int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma$ est un terme mémoire dissipatif où $h(t)$ est une fonction de relaxation continue et décroissante.
- $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds$ est un terme de retard distribué, où $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée et τ_1, τ_2 sont deux réels positives vérifiant $\tau_1 < \tau_2$.
- Les conditions initiales (u_0, u_1, f_0) appartenant à un espace fonctionnel qui sera défini par la suite.

Plan de la thèse :

La thèse est composée de quatre chapitres.

- **Dans le chapitre 1** : on fait des rappels sur les propriétés des matériaux viscoélastiques et leur rôle dans l'atténuation des vibrations dans les systèmes mécaniques et on discute l'importance de ces matériaux.
- **Dans le chapitre 2** : on rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans notre travail.

- **Dans le chapitre 3** : on démontre un résultat d'existence globale d'une solution faible du système considéré en utilisant la méthode de Faedo-Galerkine.
- **Dans le chapitre 4** : on étudie le comportement asymptotique de la solution : on démontre que l'énergie associée à la solution de notre système décroît d'une manière exponentielle vers zéro lorsque la fonction de relaxation h décroît d'une manière exponentielle vers zéro à l'infini par la méthode de Lyapunov. Cette méthode consiste à estimer une fonctionnelle équivalente à l'énergie.

On définit l'énergie de notre système viscoélastique par :

$$E(t) = \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(\sigma) d\sigma \right) \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \quad (2)$$

$$+ \frac{1}{2} (h \square \Delta u)(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx,$$

où

$$(h \square v)(t) = \int_0^t h(t - \sigma) \|v(t) - v(\sigma)\|_2^2 d\sigma \text{ et } z, \xi \text{ sont défini par la suite.}$$

Dans un bref chapitre, on donne une conclusion générale et on présente quelques perspectives de recherche sur la stabilité des vibrations des plaques minces viscoélastiques avec retard distribué.

Méthodologie :

Dans ce travail, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin pour établir l'existence globale d'une solution faible.

Pour les résultats de stabilité, on utilise la méthode des multiplicateurs basée sur la construction d'une fonction de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ équivalente à l'énergie $E(t)$ qui vérifie

$$\alpha_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 E(t) \quad (3)$$

où α_1, α_2 sont deux constantes positives.

Pour établir la stabilité exponentielle, il suffit de montrer que

$$\mathcal{L}'(t) \leq -c\mathcal{L}(t) \quad \text{pour tout } t > 0 \quad (4)$$

où c est une constante positive. Une intégration de (4) sur $[0, t]$ avec (3) mène au résultat souhaité de la stabilité exponentielle. Il faut souligner que la difficulté dans ce travail est de trouver la fonction de Lyapunov adéquate.

- Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication internationale parue dans la revue **Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo Series 2** intitulée : **Existence of global solutions and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with internal distributed delay** : DOI : 10.1007/s12215-018-0373-7. Septembre 2018 (voir [58]).

Chapitre 1

Rappels sur les matériaux viscoélastiques

Sommaire

1.1	Introduction	9
1.2	Définition de la viscoelasticité	10
1.3	Viscoélasticité linéaire	12
1.4	Conclusion	19

1.1 Introduction

On présente les notions de base liées à la viscoélasticité linéaire. Après l'introduction des principes physiques qui induisent ce type de comportement dissipatif du matériau, nous présentons une approche par des modèles simples qui peuvent décrire le comportement de ces matériaux. Les matériaux viscoélastiques ont des applications dans tous les domaines de l'ingénierie et des systèmes mécaniques, de l'électroménager au spatial en passant par l'automobile, l'aéronautique ou le génie civil.

Les propriétés amortissantes optimales de ce type de matériau sont très largement utilisées dans les applications industrielles pour répondre à des problématiques de réduction et de contrôle du bruit et des vibrations, voir par exemple [52] et [56].

Ces matériaux ont la possibilité d'absorber les vibrations et de forcer ces systèmes à atteindre leur équilibre vers le repos dans un temps raisonnable. Dans le cadre de notre étude, on s'intéresse aux phénomènes viscoélastiques qui régissent le comportement dynamique du matériau et donc le comportement vibratoire des structures. De nombreux résultats ont été établis dans ce domaine, on cite notamment les travaux de : Djebabla et Tatar [32] et Nakao [51].

1.2 Définition de la viscoélasticité

Un matériau viscoélastique se caractérise par le fait qu'il possède à la fois un comportement visqueux et élastique. L'élasticité se traduit par la conservation et restitution de l'énergie après déformation. La viscosité se traduit par la dissipation de l'énergie. Les polymères représentent un bon exemple de matériaux qui ont un comportement viscoélastique.

1. Elasticité

L'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformé. La déformation d'un matériau élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées.

Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiale quand ces forces ne s'exercent plus. Les raisons physiques du comportement élastique peuvent être quelque peu différentes d'un matériau à un autre. Pour les métaux, les treillis atomiques changent de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées. Quand les forces sont supprimées, le système revient à son état original où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et d'autres

polymères, l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymères, lorsque les forces sont appliquées.

L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation. Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion.

2. Viscosité

La viscosité est une propriété interne d'un fluide qui offre une résistance à l'écoulement. Un liquide visqueux n'a pas de forme définie, il s'écoule de manière irréversible sous l'action de forces externes.

Loi de Hooke :

Pour une pièce de matériau ayant une surface de section transversale A , et une longueur initiale l_0 , soumise à une force F (de traction/compression), la réponse correspondante est donnée par le déplacement Δl . Le modèle de déformation le plus simple est la traction (étirement) ou la compression. Pour les petites déformations, la variation de la longueur Δl est proportionnelle à la force F

$$F = k \cdot \Delta l$$

où k est la raideur de la pièce. Le rapport de la force F par l'aire S de la section droite de la pièce s'appelle "contrainte". La contrainte est donc une grandeur homogène qui s'exprime par

$$\sigma = \frac{F}{S}.$$

Le rapport de l'allongement Δl par la longueur initiale l_0 s'appelle "déformation" ou allongement relatif

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l_0}.$$

On distingue les cas suivants

Matériau élastique: Toute l'énergie stockée au cours du chargement de la force F est retournée une fois la force enlevée. Dans ce cas la **loi de Hooke** s'exprime alors sous la forme

$$\sigma = E.\varepsilon$$

où E est le module de Young ou module d'élasticité, qui est une caractéristique du matériau; c'est l'équivalent en mécanique des milieux continus de la raideur d'un ressort.

Matériau visqueux: Ce type de matériau ne renvoie aucune partie de l'énergie stockée au cours du chargement. Toute l'énergie est perdue sous forme d'amortissement pur une fois la charge enlevée. Dans ce cas, la contrainte est proportionnelle à la vitesse de la déformation, et le rapport de la contrainte par la vitesse de déformation est connue comme "viscosité".

1.3 Viscoélasticité linéaire

Référence : (voir [9, 17])

La viscoélasticité linéaire se caractérise par le comportement élastique et dissipatif d'un matériau pour les petites déformations. En rhéologie le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module E et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortisseur de viscosité. L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation.

La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, et la plupart des matériaux ont un comportement viscoélastique. La partie viscoélastique provoque une décroissance de l'énergie associée. La partie élastique donne une équation conservatrice par contre la partie viscoélastique produit un mécanisme de dissipation qui agit sur une partie au domaine pour donner une décroissance de l'énergie associée à la solution pour ramener le système à l'état d'équilibre.

En mécanique des structures, c'est le niveau macroscopique qui est retenu. Cependant, quelques éléments d'une approche à une échelle inférieure (ici moléculaire) permettent de comprendre le phénomène physique de dissipation dans ces matériaux, ce qui permet de déterminer ou d'expliquer l'influence de certains facteurs à prendre en compte.

D'un point de vue moléculaire, quand un effort est appliqué sur un matériau viscoélastique, par exemple pour un polymère, deux mécanismes atomiques interviennent [57]. Les liaisons atomiques changent de longueur et d'angle. Les atomes sont alors déplacés à de nouvelles positions, avec une augmentation de l'énergie interne de façon extrêmement rapide.

L'une des caractéristiques des matériaux viscoélastiques c'est que leurs propriétés sont influencées par de nombreux paramètres. Ils peuvent inclure : la fréquence, la température, la vitesse de déformation dynamique, précharge statique, les effets du temps comme le fluage et la relaxation, le vieillissement, etc.

Principe de superposition de Boltzmann :

Le fluage et la relaxation de contraintes sont deux méthodes couramment utilisées pour déterminer l'évolution du module de relaxation en traction ou en cisaillement d'un polymère dans le domaine temporel.

Pour un essai de fluage, une sollicitation uniaxiale en contrainte est imposée à l'instant t_0 à une éprouvette de polymère initialement non chargée, puis maintenue constante. On remarque sur la figure suivante que la réponse uniaxiale correspondante est constituée d'une partie instantanée ($\varepsilon(t_0) \neq 0$) et d'une partie différée (augmentation de la déformation).

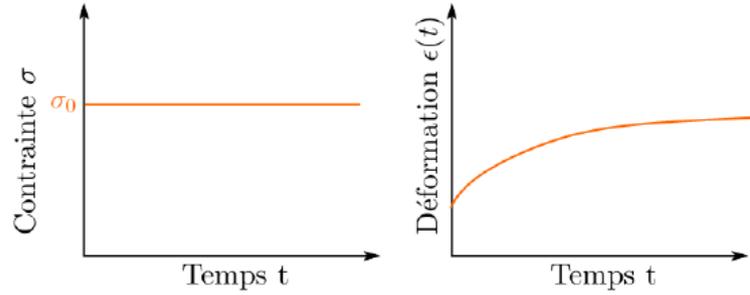


Figure 1.1: Courbe caractéristique de fluage.

La déformation $\varepsilon(t)$ en fonction du temps rapportée à la contrainte imposée σ_0 (supposée constante) permet de définir la complaisance de fluage :

$$J(t) = \frac{\varepsilon(t)}{\sigma_0}.$$

Réciproquement, un essai de relaxation de contrainte consiste à imposer une déformation uniaxiale maintenue constante à l'éprouvette de polymère initialement non déformée, et à mesurer la contrainte résultante.

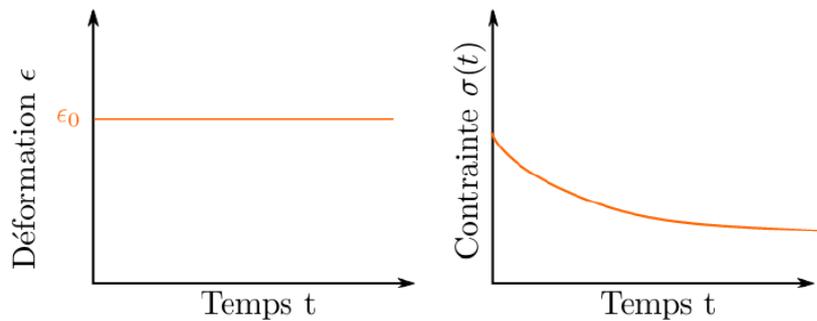


Figure 1.2: Courbe caractéristique de relaxation de contrainte

De la même manière que pour un essai de fluage, la réponse est constituée d'une partie instantanée ($\sigma(t_0) \neq 0$) et d'une partie différée (diminution de la contrainte). Le rapport entre la contrainte mesurée $\sigma(t)$ et la déformation appliquée à l'éprouvette ε_0 donne accès

au module de relaxation :

$$E(t) = \frac{\sigma(t)}{\varepsilon_0}.$$

La complaisance de fluage et le module de relaxation sont reliés par la relation suivante :

$$\int_0^t J(t-\tau) E(\tau) d\tau = t.$$

Dans le cadre de la viscoélasticité linéaire, le module de relaxation et la complaisance de fluage mesurés sont indépendants de l'amplitude du chargement. De plus, le principe de superposition de **Boltzmann** s'applique : la superposition des sollicitations implique la superposition analogue des réponses. Ainsi, la réponse d'un matériau viscoélastique dépend de l'histoire de chargement. Cet effet de mémoire est transcrit dans la loi de comportement :

$$\sigma(t) = \int_{-\infty}^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau,$$

où $\sigma(t)$ et $\varepsilon(t)$ correspondent aux évolutions temporelles de la contrainte et de la déformation. En supposant que la déformation est nulle avant l'application du chargement à $t = 0$, la loi de comportement devient :

$$\sigma(t) = E(t) \varepsilon(0) + \int_0^t E(t-\tau) \frac{\partial \varepsilon(\tau)}{\partial \tau} d\tau. \quad (1.1)$$

La fonction $E(t)$ représente une propriété mécanique du matériau qu'on appelle la "fonction de relaxation". La formule (1.1) s'appelle le principe de **Boltzmann**.

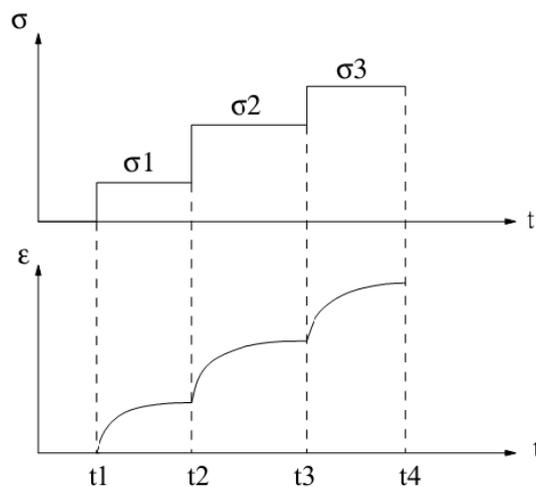


Figure 1.3: Principe de superposition de Boltzmann

Si on considère qu'il y a équilibre jusqu'au temps $t = 0$, dans un cadre mono-dimensionnel en traction-compression, cette relation peut se mettre sous la forme

$$\sigma(t) = E_0 \varepsilon(t) + \int_0^t E(t-s) \frac{d\varepsilon(s)}{ds} ds.$$

Les différents modèles viscoélastiques diffèrent par le choix du noyau (ou de la fonction de relaxation) E .

Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire :

Les modèles rhéologiques sont des éléments qui permettent de représenter les comportements mécaniques de base, les modèles rhéologiques utilisés en viscoélasticité linéaire sont constitués à partir des deux modèles élémentaires représentés sur les figures suivantes :



a) Élément élastique linéaire : ressort b) Élément visqueux linéaire : amortisseur

Figure 1.4: Modèles élémentaires pour la viscoélasticité linéaire

Les modèles rhéologiques sont des éléments qui permettent de représenter les comportements mécaniques de base. Deux comportements nous intéressent :

1. l'élasticité avec un ressort dont la raideur k correspond au coefficient de proportionnalité entre la contrainte et la déformation uniaxiale :

$$\sigma = k\varepsilon.$$

2. la viscosité avec un amortisseur dont le paramètre η correspond au coefficient de proportionnalité entre la contrainte et le taux de déformation uniaxiale :

$$\sigma = \eta \dot{\varepsilon}.$$

La plupart des modèles viscoélastiques sont construits à partir de ces modèles élémentaires, en assemblant des ressorts et des amortisseurs en série ou en parallèle. Les modèles rhéologiques les plus simples sont :

Modèle de Kelvin-Voigt :

Le modèle de Kelvin-Voigt, aussi appelé modèle d'amortisseur visqueux, consiste à assembler en parallèle un ressort et un amortisseur comme le montre la figure ci-dessus :

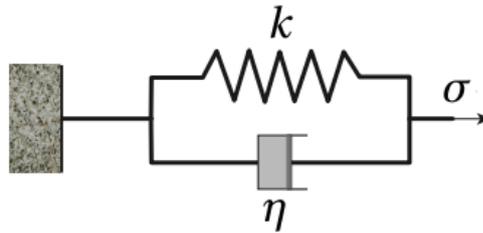


Figure 1.5: Modèle de Kelvin-Voigt

Dans ce modèle, on note σ_1 et ε_1 la contrainte et la déformation dans le ressort, et σ_2 , ε_2 la contrainte et la déformation dans l'amortisseur. En écrivant la loi de comportement de chaque élément, on obtient

$$\begin{cases} \sigma_1 = k\varepsilon_1, \\ \sigma_2 = \eta\varepsilon_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Lorsque deux éléments sont assemblés en parallèle, ils sont soumis à la même déformation ε et la contrainte totale σ est égale à la somme des contraintes induites dans chaque élément, ce qui conduit à :

$$\begin{cases} \varepsilon = \varepsilon_1 = \varepsilon_2, \\ \sigma = \sigma_1 + \sigma_2. \end{cases} \quad (1.3)$$

La loi de comportement associée au modèle de Kelvin-Voigt est obtenue en combinant les équations (1.2) et (1.3) : $\sigma = k\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon}$.

Modèle de Maxwell :

Le modèle de Maxwell est composé d'un ressort et d'un amortisseur en série comme le montre

la figure suivante :

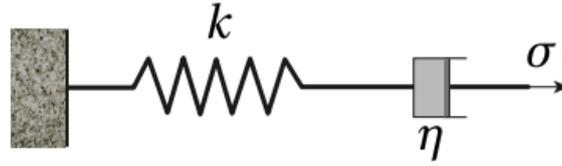


Figure 1.6: Modèle de Maxwell

Lorsque deux éléments sont en série, la déformation totale est donnée par la somme de chacune des déformations, et la même contrainte σ s'applique aux deux éléments, d'où :

$$\begin{cases} \sigma = \sigma_1 = \sigma_2, \\ \varepsilon = \varepsilon_1 + \varepsilon_2. \end{cases} \quad (1.4)$$

La combinaison des équations (1.2) et (1.3) conduit à la loi de comportement suivante pour le modèle de Maxwell :

$$k\sigma + \eta\sigma_t = \eta k\varepsilon_t.$$

Le modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt et celui de Maxwell restent parmi les modèles les plus simples pour représenter expérimentalement le comportement de ces matériaux.

Il est bien connu que les matériaux viscoélastiques fournissent un amortissement naturel, qui est dû à la propriété particulière de ces matériaux à garder une certaine mémoire.

Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégral différentiels, par exemple le terme mémoire : $\int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds$, où h représente le noyau (fonction de relaxation), le terme intégral exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le matériau a subi.

Plusieurs modèles de ces matériaux viscoélastiques conduisent à des équations (EDP) de mouvement, la dissipation viscoélastique donnée par les effets de mémoire.

1.4 Conclusion

L'une des fonctions principales des matériaux viscoélastiques est de fournir un mécanisme de dissipation de l'énergie mécanique des vibrations. Par conséquent, ils permettent d'atténuer les vibrations, et de plus d'augmenter la durée de vie des structures.

Ces avantages nous encouragent à adopter ces matériaux dans notre étude comme un outil pour stabiliser certaines structures en mouvement dynamique.

Chapitre 2

Rappel de quelques outils mathématiques

2.1 Dual d'un espace de Banach

Le but de chapitre est de rappeler, sans démonstration, les différents outils d'analyse que nous allons utiliser. Pour plus de détails (voir [11, 2]).

Définition 1 Soit E est un espace de Banach, on note E' son dual, c'est à dire l'ensemble des formes linéaires continues sur E .

Notation 1 Si $f \in E'$ et si $u \in E$ alors l'image $f(u)$ est noté par le crochet de dualité $\langle f, u \rangle_{E' \times E}$.

Définition 2 L'espace dual de E' , noté E'' s'appelle le bidual de E .

On munit l'espace E' de la norme suivante :

$$\|f\| = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} |\langle f, x \rangle|,$$

et E'' son bidual, de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} |\langle \xi, f \rangle|.$$

2.2 Topologie faible et Topologie faible étoile

Définition 3 La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications

$$\phi_f(x) = \langle f, x \rangle, \quad f \in E'.$$

Proposition 1 La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.

Définition 4 Soit E un espace de Banach. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*} \in E$ converge au sens de la topologie faible vers x dans E si

$$\langle f, x_n - x \rangle_{E' \times E} \rightarrow 0, \quad \text{pour tout } f \in E'.$$

Proposition 2 Soit (x_n) une suite de E , on a

1. $((x_n) \rightarrow x \text{ pour } \sigma(E, E')) \Leftrightarrow (\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle \text{ pour tout } f \in E')$.
2. Si $(x_n) \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$, alors $(\|x_n\|)$ est bornée.
3. Si $(x_n) \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$, et si $f_n \rightarrow f$ dans E' (i.e. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|f_n - f\|_{E'} = 0$) alors

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Proposition 3 Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite (x_n) converge faiblement si et seulement si elle converge fortement. Ceci n'est pas vrai en dimension infinie.

Nous allons passer maintenant à la notion de convergence faible $*$.

Définition 5 La topologie faible $*$ sur E' désignée par $\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications définie sur E' par :

$$\phi_x(f) = \langle f, x \rangle, \quad f \in E'.$$

pour tout $x \in E$.

On note une suite $(f_n)_n$ qui converge vers f pour la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$ par $f_n \rightharpoonup^* f$.

Corollaire 1 Soit E un espace de Banach séparable et soit (f_n) une suite bornée dans E' . Alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$.

Proposition 4 Soit $u \in E$. On considère la forme :

$$f_u : E' \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f \mapsto \langle f, u \rangle.$$

Alors $f_u \in E''$ et

$$J : E \rightarrow E''$$

$$u \mapsto f_u$$

est une isométrie.

Définition 6 On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$. On identifiera par la suite E avec E'' .

Remarque 1 La convergence faible dans E' entraîne la convergence faible $*$ dans E' . La réciproque est vraie si l'espace E est réflexif.

Définition 7 La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$ est séparée.

Proposition 5 Soit (f_n) une suite dans E' . On a les propriétés suivantes :

1. Si $f_n \rightharpoonup f$ pour $\sigma(E', E)$ alors $\|f_n\|_{E'}$ est bornée.
2. Si $f_n \rightharpoonup f$ pour la topologie faible $\sigma(E', E)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E alors $f_n(x_n) \rightarrow f(x)$ dans \mathbb{R} .

Soit E un espace de Banach réflexif et $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E . Alors il existe une sous-suite $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement dans E .

On dit que E est séparable s'il contient une partie dénombrable dense dans E .

2.3 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 8 Soit Ω un ouvert de \mathbb{R}^n , ($n \geq 1$), si $p \in [1, +\infty[$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et telle que $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω ,

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_{\Omega} |u(x)|^p dx < \infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_p := \|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = +\infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace des (classes de) fonctions mesurables $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ sur Ω et essentiellement bornées sur Ω :

$$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \exists c \in \mathbb{R} : |u| \leq c \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_\infty := \|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)|,$$

où

$$\operatorname{ess\,sup}_{x \in \Omega} |u(x)| = \{\inf C > 0 \text{ tel que } |u(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega\}.$$

Proposition 6 Pour tout $p \in [1, \infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

Définition 9 L'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions f telles que, pour tout compact K de Ω , on a $f|_K \in L^p(K)$.

Définition 10 On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $C^\infty(\Omega)$ à support compact dans Ω .

1. Si $p = 2$, alors $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$\langle u, v \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx, \quad u, v \in L^2(\Omega).$$

2. Si $1 \leq p < +\infty$, alors $L^p(\Omega)$ est séparable.

3. Si $1 < p < +\infty$, alors $L^p(\Omega)$ est réflexif.

4. $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif.

5. Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

6. L'espace $L^\infty(\Omega)$ n'est ni séparable ni réflexif.

Définition 11 $L^\infty(\Omega)$ est le dual de $L^1(\Omega)$ on le note par

$$L^\infty(\Omega) = (L^1(\Omega))'.$$

Par la suite on va donner une caractérisation des convergences faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$ lorsque l'ouvert Ω est borné.

Convergence faible et faible étoile dans les espaces $L^p(\Omega)$:

Définition 12 Soit $(f_n)_{n \geq 0}$ une suite de $L^p(\Omega)$.

1. On dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge faiblement vers f dans $L^p(\Omega)$ pour $p \in [1, +\infty[$ si :

$$\int_{\Omega} f_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \forall \varphi \in L^q(\Omega),$$

et on écrit

$$f_n \rightharpoonup f \quad \text{dans } L^p(\Omega),$$

2. on dit que la suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge faible étoile vers f dans $L^\infty(\Omega)$ si

$$\int_{\Omega} f_n \varphi dx \rightarrow \int_{\Omega} f \varphi dx \quad \text{pour tout } \varphi \in L^1(\Omega),$$

et on écrit

$$f_n \rightharpoonup^* f \quad \text{dans } L^\infty(\Omega).$$

Théorème 1 Si $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ vérifie

$$\int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx = 0, \quad \text{pour tout } \varphi \in \mathcal{D}(\Omega),$$

alors, $f = 0$ p.p. sur Ω .

Proposition 7 Soit $(f_n)_n$ une suite bornée de $L^p(\Omega)$ pour $1 < p < +\infty$, on peut extraire de la suite $(f_n)_n$ une sous-suite faiblement convergente

i.e

$$\exists (f_{n_k}), \exists f \in L^p(\Omega), \forall \varphi \in L^q(\Omega), \lim_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} f_{n_k} \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx.$$

Si $1 < p < +\infty$, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie faible $^* \sigma(E', E)$ sont équivalentes.

Soit $(f_n)_n$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, on peut extraire de la suite $(f_n)_n$ une sous-suite qui converge pour la topologie faible * .

Ce résultat est faux dans $L^1(\Omega)$ (car cet espace n'est pas réflexif), en revanche on a un résultat similaire dans $L^\infty(\Omega)$ à condition de considérer la topologie * sur cet espace.

Une propriété importante concernant le produit de deux suites convergentes.

Proposition 8 Soit $p \in [1, +\infty]$ et q son conjugué. Si f_n converge fortement vers f dans $L^p(\Omega)$, et g_n converge faiblement vers g dans $L^q(\Omega)$, alors

$$f_n g_n \text{ converge faiblement vers } fg \text{ dans } L^1(\Omega).$$

2.3.1 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles $L^p(0, T; X)$

Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach X .

Soit $T > 0$, on définit les espaces suivants :

Définition 13 Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$, les espaces de Lebesgue à valeurs dans X : $L^p(0, T; X)$ sont des espaces de fonctions mesurables, définis par :

$$L^p(0, T; X) = \left\{ u :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurables telle que } \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty, 1 \leq p < \infty \right\},$$

$$L^\infty(0, T; X) = \left\{ u :]0, T[\rightarrow X \text{ mesurable, telle que } \sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|u\|_X < \infty \right\},$$

où

$$\sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|u\|_X = \inf \{ c > 0; \|u(x)\|_X \leq c \text{ p.p. } t \in (0, T) \}$$

munis des normes (respectivement)

$$\|u\|_{L^p(0, T; X)} = \left(\int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}}, \text{ pour } 1 \leq p < \infty$$

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; X)} = \sup_{t \in]0, T[} \text{ess}\|u\|_X.$$

On définit $C([0, T]; X)$ comme l'espace des fonctions $u : [0, T] \rightarrow X$ continues.

$C([0, T]; X)$ est dense dans $L^p(0, T; X)$.

On a les propriétés suivantes :

1. si X est de Banach alors $L^p(0, T; X)$ est de Banach pour $1 \leq p < \infty$,
2. si X est séparable alors $L^p(0, T; X)$ est séparable pour $1 \leq p < \infty$,
3. si X est réflexif alors $L^p(0, T; X)$ est réflexif pour $1 < p < \infty$,
4. si $X \hookrightarrow Y$ avec injection continue, alors $L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^p(0, T; Y)$, avec injection continue.

5. si $X \hookrightarrow Y$ avec injection compacte, on n'a pas forcément $L^p(0, T; X) \hookrightarrow L^p(0, T; Y)$, avec injection compacte.

2.3.2 Lemme de compacité d'Aubin-Lions

Référence : (voir [41])

Le lemme d'Aubin et Lions est un résultat de la théorie des espaces de Banach. Plus précisément, c'est un critère de compacité très utilisé pour l'étude des équations d'évolution non linéaires.

Lemme 1 Soit X_0, X_1 et X trois espaces de Banach où X_0, X_1 sont des espaces réflexifs avec $X_0 \subseteq X \subseteq X_1$. Supposons que l'injection de X_0 dans X est compacte et que l'injection de X dans X_1 est continue. Pour $1 < p, q < +\infty$, soit

$$W = \{u \in L^p([0, T]; X_0) \mid u_t \in L^q([0, T]; X_1)\}.$$

Alors l'injection de W dans $L^p([0, T]; X)$ est compacte.

Lemme 2 Soient u une fonction et $\{u^m\}$ une suite de $L^q(\Omega \times]0, T[)$, $1 < p < +\infty$ telles que

$$\|u^m\|_{L^q(\Omega \times]0, T[)} \leq C$$

et

$$u^m \rightharpoonup u \text{ p.p. dans } \Omega \times]0, T[.$$

Alors

$$u^m \rightharpoonup u \text{ dans } L^q(\Omega \times]0, T[).$$

2.3.3 Quelques inégalités utiles

Référence : (voir [11])

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on note par q l'exposant conjugué de p c'est à dire :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (2.1)$$

et

$$q = \begin{cases} \frac{p}{p-1} & \text{si } 1 < p < +\infty, \\ +\infty & \text{si } p = 1, \\ 1 & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

Inégalité de Hölder :

Soit $u \in L^p(\Omega)$ et $v \in L^q(\Omega)$, alors $uv \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)}. \quad (2.2)$$

Inégalité de Cauchy-Schwarz :

Si $p = q = 2$ l'inégalité (2.2) sera appelée inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Young :

Référence : (voir [11], [25])

Soient $p, q \in]1, \infty[$ et $a, b \geq 0$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (2.3)$$

où

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{q(\varepsilon p)^{\frac{p}{q}}},$$

Remarque 2 Si $p = q = 2$, l'inégalité (2.3) s'écrit

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \quad (2.4)$$

Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, l'inégalité précédente sera

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \quad (2.5)$$

2.4 Espaces de Sobolev

En analyse mathématique, les espaces de Sobolev sont des espaces fonctionnels particulièrement adaptés à la résolution des problèmes d'équations aux dérivées partielles.

Référence : voir ([11], [25])

2.4.1 Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et soit p un nombre réel avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 14 On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par :

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega); \text{ tel que } : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \right\}.$$

où $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens des distributions.

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left(\|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

qui en fait un espace de Banach.

Remarque 3 Si $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_i} \right)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

2.4.2 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Soient m un entier ($m \geq 2$), $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre réel avec $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 15 L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ u \in L^p(\Omega); D^k u \in L^p(\Omega); |k| \leq m \}.$$

où $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$, et $D^k u$ est la dérivée d'ordre k de u au sens de distributions, muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|k| \leq m} \|D^k u\|_{L^\infty(\Omega)}, \quad \text{si } p = +\infty.$$

Remarque 4 Si $p = 2$, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|k| \leq m} \int_{\Omega} D^k u D^k v dx, \quad \text{pour tout } u, v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 9 Soit $m \in \mathbb{N}$ et si $1 \leq p \leq +\infty$, on a :

1. $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach;
2. si $1 \leq p < +\infty$, alors $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable et uniformément convexe si $1 < p < +\infty$;
3. $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

2.4.3 Espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$

En général $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note alors $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Notation 2 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $m \in \mathbb{N}$, alors on note

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ et de la norme

$$\|u\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)}$$

Injections de Sobolev :

On a le théorème d'injection suivant :

Théorème 2 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on a les inclusions suivantes.

1. Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec

1. injection compacte pour $q \in [1, p^*[,$
2. injection continue pour $q \in [1, p^*].$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

2. Si $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec injection compacte pour $q \in [1, +\infty[.$

3. Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \subset C^0(\bar{\Omega})$ avec injection compacte.

L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte comme suit:

Soit f_n une suite convergente faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$. Alors pour une sous-suite $\{f_n\}$, on a :

1. si $1 \leq p < n$, alors

$$f_n \rightarrow f \text{ fortement dans } L^q(\Omega) \text{ avec } 1 \leq q < \frac{np}{n-p},$$

2. si $p = n$, alors

$$f_n \rightarrow f \text{ fortement dans } L^q(\Omega) \text{ avec } 1 \leq q < +\infty.$$

3. si $p > n$, alors

$$f_n \rightarrow f \text{ fortement dans } L^\infty(\Omega).$$

Formules de Green :

Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n .

1. Si $u \in H^2(\Omega)$, on a la formule de Green suivante :

$$\int_{\Omega} \Delta u v dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_{\Omega} \nabla u \nabla v dx, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

2. Si $u \in H^2(\Omega)$, on a la formule suivante :

$$\int_{\Omega} (u \Delta v - v \Delta u) dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial v}{\partial \eta} - v \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma, \quad \text{pour tout } v \in H^1(\Omega).$$

3. Si $u, v \in H^4(\Omega)$, on a la formule suivante :

$$\int_{\Omega} (u \Delta^2 v - v \Delta^2 u) dx = \int_{\Gamma} \left(u \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta v - v \frac{\partial}{\partial \eta} \Delta u + \Delta u \cdot \frac{\partial v}{\partial \eta} - \Delta v \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta} \right) d\sigma.$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ est la normale unitaire à Γ orientée vers l'extérieurs de Ω .

Inégalité de Poincaré :

Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n . Alors il existe une constante $C_p = C_p(\Omega, p)$ telle que :

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{pour tout } u \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Chapitre 3

Etude de l'existence globale d'une solution faible

Sommaire

3.1	Préliminaires	33
3.2	Le modèle étudié	38
3.3	Quelques travaux antérieurs	40
3.4	Le problème équivalent	42
3.5	Existence globale d'une solution faible	47

Dans ce chapitre, on démontre un résultat d'existence globale d'une solution faible pour une plaque viscoélastique de type Petrovsky avec des conditions aux bords de Dirichlet, en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

3.1 Préliminaires

On introduit d'abord quelques notations, inégalités et des lemmes qui seront utilisées par la suite. On utilise l'espace de Lebesgue standard $L^p(\Omega)$ et l'espace de Sobolev $H^m(\Omega)$ avec

leurs normes habituelles $\|\cdot\|_p$ et $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$, respectivement. On note par $H_0^m(\Omega)$ l'adhérence de $C_c^\infty(\Omega)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^m(\Omega)}$. De plus, on désigne par (\cdot, \cdot) le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$:

$$(u, v) = \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Hypothèses :

Pour montrer notre résultat d'existence globale on fait les hypothèses suivantes :

Hypothèses sur la fonction h :

(H1) La fonction de relaxation est de classe $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$, décroissante, vérifiant $h(0) > 0$ et de plus, elle vérifie

$$1 - \int_0^\infty h(\sigma) d\sigma = 1 - \beta > 0, \quad \text{pour tout } t > 0.$$

Cette hypothèse assure l'hyperbolicité du problème considéré.

(H2) Il existe une constante positive ς telle que

$$h'(t) \leq -\varsigma h(t).$$

Cette hypothèse donne la décroissance exponentielle de l'énergie.

(H3) Il existe deux constantes positive C_0, C telles que

$$-C_0 \leq h'(t) \leq 0,$$

$$0 \leq h''(t) \leq C.$$

Puisque la fonction h est positive et continue, alors pour tout $t \geq t_0 > 0$

$$\int_0^t h(\sigma) d\sigma \leq \int_0^{t_0} h(\sigma) d\sigma := h_0.$$

Un exemple pratique sur cette condition est :

$$h(t) = e^{-at}, \quad a > 1.$$

Hypothèse sur la condition de dissipativité :

(H4) Pour montrer que l'énergie est décroissante, on suppose que

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds < \mu_1.$$

Hypothèse sur la constante l :

(H5) La constante l satisfait :

$$\begin{cases} 0 < l < \frac{2}{n-2} & \text{si } n \geq 3 \\ 0 < l < +\infty & \text{si } n = 1, 2. \end{cases}$$

Inégalité de Poincar :

Référence : (voir [25])

Soit q une constante positive qui satisfaisant l'hypothèse (H5). Alors il existe une constante $C_s(\Omega, q)$ telle que :

$$\|u\|_q \leq C_s \|\nabla u\|_2 \quad \text{pour tout } u \in H_0^1(\Omega).$$

Inégalité de Sobolev-Poincaré :

Référence : voir [61]

Soit λ_1 la première valeur propre du problème

$$\begin{cases} \Delta^2 u = \lambda_k u & \text{dans } \Omega, \\ u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0. & \text{sur } \Gamma. \end{cases}$$

Alors on a l'inégalité de **Sobolev-Poincaré** suivante :

$$\|\nabla u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_1}} \|\Delta u\|_2 \quad \text{pour tout } u \in H_0^2(\Omega).$$

Lemmes préliminaires :

On introduit les notations suivantes :

$$(h \square u)(t) = \int_0^t h(t-\sigma) \|u(t) - u(\sigma)\|_2^2 d\sigma,$$

$$(h \diamond u)(t) = \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma,$$

où $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ et $\|\cdot\|_2$: la norme de $L^2(\Omega)$.

Lemme 3 Soient $u \in C([0, T]; L^2(\Omega))$ et $h \in C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$. Alors on a l'inégalité suivante

$$\int_{\Omega} (h \diamond u)^2(t) dx \leq \beta(h \square u)(t), \quad (3.1)$$

où $\beta = \int_0^\infty h(s) ds$.

Si de plus la fonction h vérifie

$$h'(t) \leq -\varsigma h(t), \quad t \geq 0,$$

où ς constante positive, alors on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (h' \diamond u)^2(t) dx &\leq -h(0) (h' \square u)(t) \\ &\leq -h(0) (|h'| \square u)(t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Preuve. En effet, on observe que

$$\begin{aligned} (h \diamond u)(t) &= \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma \\ &= \int_0^t \sqrt{h(t-\sigma)} \sqrt{h(t-\sigma)} (u(t) - u(\sigma)) d\sigma. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, on obtient

$$(h \diamond u)(t) \leq \int_0^t h(t-\sigma) \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma))^2 d\sigma. \quad (3.3)$$

On note que

$$\begin{aligned} \int_0^t h(t-\sigma) d\sigma &= \int_0^t h(\sigma) d\sigma \\ &\leq \int_0^\infty h(\sigma) d\sigma = \beta. \end{aligned}$$

En intégrant (3.3) sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (h \diamond u)^2(t) dx &\leq \beta \int_{\Omega} \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma))^2 d\sigma dx \\ &\leq \beta (h \square u)(t). \end{aligned}$$

La démonstration de l'inégalité (3.2) est similaire à celle de (3.1).

On a

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (h' \diamond u)^2(t) dx &= \int_{\Omega} \left(\int_0^t \sqrt{|h'(t-\sigma)|} \sqrt{|h'(t-\sigma)|} (u(t) - u(\sigma)) d\sigma \right)^2 dx. \\ &\leq \int_{\Omega} \left(\int_0^t |h'(t-\sigma)| ds \right) \left(\int_0^t |h'(t-\sigma)| (u(t) - u(\sigma))^2 d\sigma \right) dx. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Il est clair que

$$\begin{aligned} \int_0^t |h'(t-\sigma)| d\sigma &= \int_0^t |h'(\sigma)| d\sigma \\ &= - \int_0^t h'(\sigma) d\sigma \\ &= h(0) - h(t). \end{aligned}$$

Comme la fonction h est décroissante c'est à dire ($h(0) \geq h(t)$), alors

$$\int_0^t |h'(t-\sigma)| d\sigma \leq h(0). \quad (3.5)$$

En substituant (3.5) dans (3.4), on aura l'estimation (3.2). ■

On donne maintenant le lemme suivant qui est à la base des estimations d'énergie.

Lemme 4 Soient φ et ψ dans $\mathcal{C}^1([0, +\infty[; \mathbb{R})$. On pose

$$(\varphi \square \psi)(t) = \int_0^t \varphi(t-s) |\psi(t) - \psi(s)|^2 ds,$$

on a alors

$$\begin{aligned} 2 \int_0^t \varphi(t-s) \psi(s) \psi_t(t) ds &= - \frac{d}{dt} \left[(\varphi \square \psi)(t) - \int_0^t \varphi(s) ds |\psi(t)|^2 \right] \\ &\quad + (\varphi' \square \psi)(t) - \varphi(t) |\psi(t)|^2 \end{aligned} \quad (3.6)$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \int_0^t \varphi(t-s) ds &= \int_0^t \varphi(s) ds \\ \frac{d}{dt} (\varphi \square \psi)(t) &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t \varphi(t-s) |\psi(t) - \psi(s)|^2 ds \right) \\ &= \varphi(t-t) |\psi(t) - \psi(t)|^2 + \int_0^t \varphi'(t-s) |\psi(t) - \psi(s)|^2 ds \\ &\quad + 2 \int_0^t \varphi(t-s) \psi'(t) (\psi(t) - \psi(s)) ds. \end{aligned}$$

Enfin, on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\varphi \square \psi) (t) &= (\varphi' \square \psi) (t) + 2 \int_0^t \varphi (s) ds \psi (t) \psi' (t) \\ &\quad - 2 \int_0^t \varphi (t - s) \psi (s) ds \psi' (t) \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\int_0^t \varphi (s) ds |\psi (t)|^2 \right) = \varphi (t) |\psi (t)|^2 + 2 \int_0^t \varphi (s) ds \psi (t) \psi' (t) \quad (3.8)$$

En combinant (3.7) et (3.8), on obtient le résultat (3.6). ■

Lemme de Gronwall :

Référence : (voir [24])

Lemme 5 Soient φ, ψ, ω trois fonctions positives définies sur $[0, T]$ continues par morceaux et vérifiant l'inégalité

$$\omega (t) \leq \varphi (t) + \int_0^t \psi (s) \omega (s) ds,$$

alors, on a :

$$\omega (t) \leq \varphi (t) + \int_0^t \psi (s) \omega (s) \exp \left(\int_s^t \psi (\zeta) d\zeta \right) ds.$$

Dans la suite les $C_i, i = 1, 2, \dots$, sont utilisés pour désigner des constantes positives.

3.2 Le modèle étudié

Notre but dans ce chapitre est l'étude de l'existence globale d'une solution faible du problème suivant

1) L'équation du système :

$$\begin{aligned} |u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) - \int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma \\ + \mu_1 u_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \end{aligned} \quad (3.9)$$

où Ω est un domaine borné non vide de \mathbb{R}^2 , de bord régulier $\partial\Omega = \Gamma$. Le domaine Ω représente la surface moyenne de la plaque mince considérée.

Cette équation décrit la flexion d'une plaque mince avec une densité variable, dépendant de la vitesse, donnée par le terme $|u_t(x, t)|^l$, $l > 0$.

- La valeur $u(x, t)$: représente la flexion de la plaque au point x à l'instant t .
- Le terme $\mu_1 u_t$: représente l'amortissement structurelle, le coefficient de dissipation μ_1 étant une constante positive.
- Le terme Δu_{tt} : représente une dispersion.
- Le terme mémoire $\int_0^t h(t-\sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma$: représente une dissipation, où $h(t)$ est une fonction de relaxation continue, décroissante.
- Le terme $\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t-s) ds$: représente un retard distribué qui nécessite la connaissance du $u_t(x, t)$ pour $t < 0$, et $\mu_2 : [\tau_1, \tau_2] \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction bornée, et τ_1, τ_2 sont deux réels positives satisfaisant $\tau_1 < \tau_2$.

▷ On remarque que le terme $|u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t)$ est non linéaire.

2) Les conditions aux limites :

On suppose que la plaque est encadrée sur son bord latéral, ce qui se traduit par :

$$u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[, \quad (3.10)$$

où ν : est la normale orientée vers l'extérieur.

3) Les conditions initiales :

le déplacement initial et la vitesse initiale sont donnés par :

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega. \quad (3.11)$$

4) L'historique de la vitesse :

On suppose que la vitesse $u_t(x, t)$ pour les valeurs négatives de t est donnée grâce à la condition sur l'historique de la vitesse

$$u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad 0 < t < \tau_2. \quad (3.12)$$

3.3 Quelques travaux antérieurs

Nous allons rappeler brièvement quelques travaux antérieurs sur la stabilité.

Quelques problèmes viscoélastiques non linéaires :

Pour les équations viscoélastiques quasilineaires, Cavalcanti et al. [12, 14] ont étudié l'équation suivante

$$|u_t|^l u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds - \gamma \Delta u_t = 0, \quad l > 0,$$

ils ont démontré l'existence globale pour $\gamma = 0$ et la décroissance exponentielle pour $\gamma > 0$.

De même, Messaoudi et Tatar [44], [45] ont prouvé la décroissance exponentielle avec ou sans terme source pour $\gamma = 0$.

Les problèmes de stabilité par des termes mémoires dans Ω et d'autres dissipations sur une partie du bord Γ ont été étudiés par Cavalcanti et al. [14]. Aassila, Cavalcanti et Soriano [6] ont étudié la stabilité de l'équation des ondes avec un terme mémoire et une dissipation frictionnelle non linéaire sur le bord.

M. M. Cavalcanti et al. [13] ont considéré l'équation

$$|u_t|^l u_{tt} - \Delta u - \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds - \gamma \Delta u_{tt} - \Delta u_{tt} = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0;$$

ils ont obtenu l'existence globale de la solution pour $\gamma \geq 0$ et la stabilité exponentielle pour $\gamma > 0$. Ce travail a été étudié par Messaoudi et Tatar [47] dans le cas où il y a un terme source non linéaire avec un amortissement induit par le terme $-\gamma \Delta u_t$.

Wu [65], a considéré l'équation non linéaires suivante :

$$|u_t|^l u_{tt} - \Delta u - \Delta u_{tt} - \int_0^t g(t-s) \Delta u(x, s) ds + |u_t|^m u_t = |u|^p u, \quad x \in \Omega, \quad t > 0$$

et il a obtenu un résultat général de décroissance de l'énergie.

Quelques problèmes viscoélastiques avec retard :

En 2008, Nicaise et Pignotti [54] ont considéré l'équation des ondes avec un amortissement linéaire et un retard distribué interne :

$$u_{tt}(x, t) - \Delta u(x, t) - \mu_1 u_t(x, t) + a(x) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0,$$

avec des conditions aux limites de type Dirichlet-Neumann et des conditions initiales, $a(\cdot)$ est une fonction convenable. Ils ont établi une décroissance exponentielle de l'énergie de la solution sous la condition :

$$\|a\|_{\infty} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) ds < \mu_1.$$

Ces auteurs ont également obtenu le même résultat lorsque le retard distribué agit sur le bord et aussi il ont démontré aussi un résultat de stabilité et d'instabilité sous certain condition d'une équation des ondes viscoélastique avec un retard distribué qui agit sur le bord (voir [53]).

Mustafa et Kafini [50] ont étudié la stabilité du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \int_0^t g(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma + \mu_1 u_t(x, t) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds = u(x, t) |u(x, t)|^\gamma, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tau_2[. \end{array} \right.$$

Mezouar et al. [46] ont étudié une équation de type Petrovsky avec un retard non linéaire

$$|u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) - \int_0^t h(t - s) \Delta^2 u(x, s) ds + \mu_1 g_1(u_t(x, t)) \\ + \mu_2 g_2(u_t(x, t - \tau)) = 0, \quad x \in \Omega, \quad t > 0.$$

Ils ont démontré l'existence globale d'une solution faible par la méthode de Faedo-Galerkin; et ils ont utilisé la méthode de Lyapunov pour obtenir des estimations générales de l'énergie.

Si ($g_1(s) = g_2(s) = s$ pour tout $s \in \mathbb{R}$) et $l = 0$, Yang [66] a examiné l'équation d'une plaque avec un retard interne structurel :

$$u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) + \int_0^t h(t-s) \Delta^2 u(x, s) ds + \mu_1 u_t(x, t) + \mu_2 u_t(x, t - \tau) = 0, \quad x \in \Omega, t > 0,$$

et il a montré l'existence de la solution globale sous des hypothèses appropriées sur la fonction de relaxation h . De plus, sous des restrictions sur μ_1 et μ_2 , il a démontré un résultat de décroissance exponentielle de l'énergie.

3.4 Le problème équivalent

Changement de fonction :

On utilise une technique introduite par Nicaise et Pignotti [54] qui consiste à considérer le changement de variable et de fonction suivant :

$$z(x, \rho, s, t) = u_t(x, t - \rho s), \quad (x, \rho, s, t) \in \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty).$$

Il est facile de vérifier que la fonction z satisfait à :

$$sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty).$$

Par conséquent, le problème (3.9)-(3.12) est équivalent à :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) - \int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma \\ + \mu_1 u_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ sz_t(x, \rho, s, t) + z_\rho(x, \rho, s, t) = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, \infty), \\ u(x, t) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[, \\ z(x, 0, s, t) = u_t(x, t) \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ z(x, \rho, s, 0) = f_0(x, \rho s), \quad \text{dans } \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2). \end{array} \right. \quad (3.13)$$

1. La première équation aux dérivées partielles non linéaire du second ordre de u en t du système (3.13) est faiblement couplée à la deuxième équation aux dérivées partielles de transport de z en (t, ρ) par le terme :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds,$$

(il n'y a pas de dérivées de z en (t, ρ)).

2. L'équation aux dérivées partielles de transport de z en (t, ρ) est faiblement couplée à la première équation du système (3.13) par la condition en $\rho = 0$,

$$z(x, 0, s, t) = u_t(x, t) \quad \text{sur } \Omega,$$

(il n'y a pas de dérivée seconde de u en t).

Energie du système :

On va vérifier que l'énergie associée au système viscoélastique (3.13) est donnée par

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(\sigma) d\sigma \right) \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\ &+ \frac{1}{2} (h \square \Delta u)(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx, \end{aligned} \quad (3.14)$$

où

$$(h \square \Delta u)(t) = \int_0^t h(t-\sigma) \|\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)\|_2^2 d\sigma,$$

et ξ est une constante positive choisie telle que :

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} < \mu_1. \quad (3.15)$$

Démonstration :

1. En multipliant scalairement dans $L^2(\Omega)$ la première équation du système (3.13) par u_t , on trouve

$$\begin{aligned} &(|u_t(x, t)|^l u_{tt}, u_t) + (\Delta^2 u, u_t) - (\Delta u_{tt}, u_t) - \left(\int_0^t h(t-\sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma, u_t \right) \\ &+ \mu_1 (u_t, u_t) + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds, u_t \right) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[. \end{aligned} \quad (3.16)$$

En utilisant ensuite une intégration par parties pour chaque terme de (3.16), on obtient

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{l+2} \frac{d}{dt} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} &= \frac{1}{l+2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} (|u_t|^2)^{\frac{l+2}{2}} dx \\
 &= \frac{1}{l+2} \left(\frac{l+2}{2} \right) \int_{\Omega} \left[\frac{d}{dt} (|u_t|^2) \right] (|u_t|^2)^{\frac{l+2}{2}-1} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} (2u_t u_{tt}) (|u_t|^2)^{\frac{l+2}{2}-1} dx \\
 &= \int_{\Omega} u_t u_{tt} (|u_t|^2)^{\frac{l}{2}} dx \\
 &= \int_{\Omega} |u_t|^l u_{tt} u_t dx.
 \end{aligned} \tag{3.17}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} u_t \Delta u_{tt} dx &= \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u_{tt} dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_t\|^2.
 \end{aligned} \tag{3.18}$$

En intégrant deux fois par partie, on obtient

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} u_t \Delta^2 u dx &= \int_{\Omega} \Delta u_t \Delta u dx \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u\|^2
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

et

$$\begin{aligned}
 - \int_{\Omega} u_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta^2 u(\sigma) d\sigma dx \\
 = - \int_{\Omega} \Delta u_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx
 \end{aligned} \tag{3.20}$$

En substituant (3.17)-(3.20) dans (3.16), on obtient :

$$\begin{aligned}
 &\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u\|_2^2 \right] \\
 &- \int_{\Omega} \Delta u_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma + \mu_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx \\
 &+ \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{T_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds u_t ds dx = 0.
 \end{aligned} \tag{3.21}$$

On remarque que le terme $\int_{\Omega} \Delta u_t \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma$ est de signe non défini.

Pour cela, on utilise le **lemme 4**, pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t h(t-s) \int_{\Omega} \Delta u(s) \Delta u_t(t) dx ds \\
 & = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[(h \square \Delta u)(t) - \left(\int_0^t h(s) ds \right) \|\Delta u(t)\|_2^2 \right] \\
 & - \frac{1}{2} (h' \square \Delta u)(t) + \frac{1}{2} h(t) \|\Delta u(t)\|_2^2.
 \end{aligned} \tag{3.22}$$

En substituant (3.22) dans (3.21), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\Delta u\|_2^2 + (h \square \Delta u)(t) \right] \\
 & + \mu_1 \int_{\Omega} |u_t|^2 dx - \frac{1}{2} (h' \square \Delta u)(t) + \frac{1}{2} h(t) \|\Delta u(t)\|_2^2 \\
 & + \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) u_t ds dx = 0.
 \end{aligned} \tag{3.23}$$

2. En multipliant la deuxième équation du système (3.13) par $(|\mu_2(s)| + \xi)z$ et en intégrant sur $\Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$ par rapport à x, ρ et s , on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx = 0
 \end{aligned} \tag{3.24}$$

Concernant le second terme de (3.24), on obtient :

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) \frac{\partial}{\partial \rho} z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) [z^2(x, \rho, s, t)]_0^1 ds dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) [z^2(x, 1, s, t) - z^2(x, 0, s, t)] ds dx \\
 & = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 & - \frac{1}{2} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \xi (\tau_2 - \tau_1) \right] \int_{\Omega} u_t^2(x, t) dx.
 \end{aligned} \tag{3.25}$$

En remplaçant l'expression (3.25) dans (3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 & - \frac{1}{2} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \xi (\tau_2 - \tau_1) \right] \|u_t\|_2^2 = 0.
 \end{aligned} \tag{3.26}$$

En combinant (3.23) et (3.26), on aura :

$$\begin{aligned}
 & \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \right] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\Delta u\|_2^2 + (h \square \Delta u)(t) \right] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\
 & = \frac{1}{2} \left[\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \xi(\tau_2 - \tau_1) - \mu_1 \right] \|u_t\|_2^2 \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 & + \frac{1}{2} (h' \square \Delta u)(t) - \frac{1}{2} h(t) \|\Delta u(t)\|_2^2 \\
 & - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) u_t ds dx
 \end{aligned} \tag{3.27}$$

D'après cette formule, on voit que l'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned}
 E(t) &= \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(s) ds \right) \|\Delta u\|_2^2 \\
 &+ \frac{1}{2} (h \square \Delta u)(t) + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx.
 \end{aligned}$$

Décroissance de l'énergie :

Lemme 6 Soit (u, z) une solution du problème (3.13); on suppose que les hypothèses (H1)-(H5) sont vérifiées. Alors, l'énergie $E(t)$ satisfait à :

$$\begin{aligned}
 E'(t) &\leq - \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} \right) \|u_t\|_2^2 - \frac{1}{2} h(t) \|\Delta u\|_2^2 \\
 &- \frac{\xi}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x, 1, s, t) ds dx + \frac{1}{2} (h' \square \Delta u)(t), \\
 &\leq 0 \quad \text{pour tout } t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{3.28}$$

où

$$\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} < \mu_1. \tag{3.29}$$

Preuve. D'après (3.27), on a

$$\begin{aligned}
 E'(t) &= \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \xi(\tau_2 - \tau_1) - \mu_1 \right) \|u_t\|_2^2 \\
 &\quad - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} (h' \square \Delta u)(t) - \frac{1}{2} h(t) \|\Delta u(t)\|_2^2 \\
 &\quad - \int_{\Omega} u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

On remarque que le terme $\int_{\Omega} u_t \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) ds dx$ est de signe non défini. Pour cela, en utilisant l'inégalité de Young on obtient :

$$\begin{aligned}
 &\int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z(x, 1, s, t) u_t ds dx \\
 &\leq \frac{1}{2} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds \right) \int_{\Omega} u_t^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx.
 \end{aligned} \tag{3.31}$$

En substituant (3.31) dans (3.30), on aura

$$\begin{aligned}
 E'(t) &\leq \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} - \mu_1 \right) \|u_t\|_2^2 \\
 &\quad - \frac{\xi}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 &\quad - \frac{h(t)}{2} \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{1}{2} (h' \square \Delta u)(t).
 \end{aligned} \tag{3.32}$$

On en déduit que $E'(t) \leq 0$ et l'énergie $E(t)$ est décroissante. ■

3.5 Existence globale d'une solution faible

Dans cette section, nous allons obtenir l'existence globale d'une solution faible pour le problème (3.13). On énonce notre résultat principale d'existence

Théorème 3 Soient $u_0 \in H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$, $u_1 \in H_0^2(\Omega) \cap L^2(\Omega)$, $f_0 \in L^2(\Omega, H^2(0, \tau_2)) \cap H^2(\Omega, L^2(0, \tau_2))$ satisfaisant à la condition de compatibilité $f_0(\cdot, 0) = u_1$. Si on suppose que

les hypothèses (H1)-(H5) sont vérifiées; alors le problème (3.13) admet une solution faible (u, z) telle que

$$\begin{aligned} u &\in L^\infty([0, \infty); H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \\ z &\in L^\infty[0, \infty); H^1(\Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)), \\ u_t &\in L^\infty([0, \infty); H_0^1(\Omega)), \\ u_{tt} &\in L^\infty([0, \infty); L^2(\Omega)). \end{aligned}$$

- La démonstration de notre résultat d'existence peut être établie en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Idée de la démonstration :

La méthode de Faedo-Galerkin consiste à réaliser les trois étapes suivantes :

- (i) Chercher des solutions "approchées" dans des espaces de dimension finie.
- (ii) Etablir des estimations à priori sur ces solutions approchées.
- (iii) Passage à la limite, grâce à des propriétés de compacité (dans les termes non linéaires).

Preuve. On choisit une base $\{w^j\}$ ($j = 1, 2, \dots$) dans $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ qui est orthogonale dans $L^2(\Omega)$ et w^j étant les fonctions propres de l'opérateur biharmonique muni des conditions aux limites de Dirichlet homogène.

Soit $V_k = [w_1, \dots, w_k]$ le sous espace de $H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)$ engendré par les m premiers vecteurs.

Solutions approchées :

On construit des solutions approchée (u^k, z^k) , $k = 1, 2, \dots$, sous la forme

$$\begin{aligned} u^k(x, t) &= \sum_{j=1}^k c^{jk}(t)w^j(x), \\ z^k(x, \rho, s, t) &= \sum_{j=1}^k d^{jk}(\rho, s, t)w^j(x), \end{aligned}$$

où les c^{jk} et d^{jk} sont des solutions du problème de Cauchy suivant pour tout $1 \leq j \leq k$:

$$\begin{aligned} & (|u_t^k|^l u_{tt}^k, w^j) + (\Delta u^k, \Delta w^j) - (\nabla u_{tt}^k, \nabla w^j) + \mu_1(u_t^k, w^j) \\ & - \int_0^t h(t-\sigma)(\Delta u^k(\sigma), \Delta w^j) d\sigma + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s)(z^k(x, 1, s, t), w^j) ds = 0, \end{aligned} \quad (3.33)$$

et

$$(sz_t^k(x, \rho, s, t) + z_\rho^k(x, \rho, s, t), w^j(x)) = 0 \quad (3.34)$$

avec la condition de couplage pour $\rho = 0$:

$$(z^k(x, 0, s, t), w^j) = (u_t^k(x, 0, s, t), w^j) \quad (3.35)$$

et les conditions initiales (quand $k \rightarrow +\infty$)

$$u^k(0) = u_0^k = \sum_{j=1}^k (u^k(0), w^j) w^j \rightarrow u_0, \quad \text{dans } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega), \quad (3.36)$$

$$u_t^k(0) = u_1^k = \sum_{j=1}^k (u_t^k(0), w^j) w^j \rightarrow u_1, \quad \text{dans } H_0^2(\Omega) \cap L^2(\Omega) \quad (3.37)$$

et la condition sur l'historique de la vitesse

$$z^k(x, \rho, s, 0) = f_0^k = \sum_{j=1}^k (f_0(x, \rho s), w^j(x)) w^j(x) \rightarrow f_0 \quad \text{dans } X, \quad (3.38)$$

où

$$X = L^2((0, 1) \times (\tau_1, \tau_2); H_0^2(\Omega)) \cap H^1((0, 1); L^2(\Omega \times (\tau_1, \tau_2))).$$

D'après l'injection de Sobolev, on a :

$$H_0^2(\Omega) \hookrightarrow L^{2(l+1)}(\Omega). \quad (3.39)$$

où l est une constante définie dans l'hypothèse (A5).

D'autre part, on a :

$$\frac{l}{2(l+1)} + \frac{1}{2(l+1)} + \frac{1}{2} = 1.$$

Donc, d'après l'inégalité de Hölder, on a l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} (|u_t^k(t)|^l u_{tt}^k(t), w_j) &= \int_{\Omega} |u_t^k(t)|^l u_{tt}^k(t) w_j dx \\ &\leq \left(\int_{\Omega} (|u_t^k(t)|^l)^{2(l+1)/l} dx \right)^{l/2(l+1)} \left(\int_{\Omega} (u_{tt}^k)^{2(l+1)} dx \right)^{1/2(l+1)} \left(\int_{\Omega} w_j^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\Omega} |u_t^k(t)|^{2(l+1)} dx \right)^{l/2(l+1)} \|u_{tt}^k\|_{2(l+1)} \|w_j\|_2, \end{aligned}$$

ce qui montre que le terme non linéaire $(|u_t^k(t)|^l u_{tt}^k(t), w_j)$ a un sens pour tout $1 \leq j \leq k$.

Les systèmes approchés (3.36)-(3.38) des équations différentielles possèdent une solution locale sur $[0, t_k)$, où $0 < t_k < T$. La solution peut être prolongée à l'intervalle $[0, T]$ pour tout $T > 0$, en utilisant les estimations a priori suivantes :

Première estimation :

Puisque les suites (u_0^k) , (u_1^k) sont convergentes, d'après le lemme 6, on peut trouver une constante positive C_1 indépendante de k telle que

$$\begin{aligned} E^k(t) - E^k(0) &\leq - \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} \right) \int_0^t \|u_t^k(\sigma)\|_2^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{\xi}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^t |z^k(x, 1, s, \sigma)|^2 ds dx d\sigma \\ &\quad - \frac{1}{2} \int_0^t h(\sigma) \|\Delta u^k(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t (h' \square \Delta u^k)(\sigma) d\sigma, \end{aligned}$$

où $E^k(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} E^k(t) &= \frac{1}{l+2} \|u_t^k\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \left(1 - \int_0^t h(\sigma) d\sigma \right) \|\Delta u^k\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla u_t^k\|_2^2 + \frac{1}{2} (h \square \Delta u^k)(t) \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s (|\mu_2(s)| + \xi) |z^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho dx. \end{aligned}$$

Comme h est une fonction positive décroissante, on obtient

$$\begin{aligned} E^k(t) - E^k(0) &\leq - \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} \right) \int_0^t \|u_t^k(\sigma)\|_2^2 d\sigma \\ &\quad - \frac{\xi}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^t |z^k(x, 1, s, \sigma)|^2 ds dx d\sigma. \end{aligned}$$

Donc, on peut déduire que

$$\begin{aligned}
 E^k(t) &+ \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} \right) \int_0^t \|u_t(\sigma)\|_2^2 d\sigma \\
 &+ \frac{\xi}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^t |z^k(x, 1, s, \sigma)|^2 ds dx d\sigma \\
 &\leq E^k(0) \leq C_1,
 \end{aligned}$$

où C_1 est une constante positive dépendante uniquement de $\|u_0\|_{H_0^2}$, $\|u_1\|_{H^1}$, τ_1 , τ_2 , μ_1 , β , ξ .

Finalement, on obtient la première estimation

$$\begin{aligned}
 &\|u_t^k\|_{l+2}^{l+2} + \|\Delta u^k\|_2^2 + \|\nabla u_t^k\|_2^2 + (h \square \Delta u^k)(t) \\
 &+ \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s(|\mu_2(s)| + \xi) |z^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho dx \\
 &+ \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^t |z^k(x, 1, s, \sigma)|^2 ds dx d\sigma \\
 &\leq C_1.
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

Convergence :

D'après l'estimation (3.40), on obtient

u^k est bornée dans $L_{loc}^{\infty}(0, \infty, H_0^2(\Omega))$,

u_t^k est bornée dans $L_{loc}^{\infty}(0, \infty, L^2(\Omega))$,

$s(|\mu_2(s)| + \xi)z^k(x, \rho, s, t)$ est bornée dans $L_{loc}^{\infty}(0, \infty, L^2(\Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)))$.

$z^k(x, 1, s, t)$ est bornée dans $L^2(\Omega \times (\tau_1, \tau_2) \times (0, T))$.

Deuxième estimation :

En dérivant (3.33) par rapport à t et en intégrant deux fois par parties sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned}
 &\left(\frac{d}{dt} (|u_t^k|^l u_{tt}^k), w^j \right) + (\Delta u_t^k, \Delta w^j) + (\nabla u_{tt}^k, \nabla w^j) + \mu_1(u_{tt}^k, w^j) \\
 &- \left(\frac{d}{dt} \int_0^t h(t - \sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma, \Delta w^j \right) + \left(\frac{d}{dt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) (z^k(x, 1, s, t) ds, w^j \right) = 0.
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

En remplaçant w^j par u_{tt}^k dans (3.41) (car $u_{tt}^k = \sum_{j=1}^k (c^{kj})'' w^j \in H_0^2(\Omega)$), on obtient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} (|u_t^k|^l u_{tt}^k), u_{tt}^k \right) + (\nabla u_{tt}^k, \nabla u_{tt}^k) + (\Delta u_t^k, \Delta u_{tt}^k) + \mu_1(u_{tt}^k, u_{tt}^k) \\ & - \left(\frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma, \Delta u_{tt}^k \right) + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z_t^k(x, 1, s, t) ds, u_{tt}^k \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.42)$$

D'autre part, on a

$$\frac{d}{dt} \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma = \int_0^t h'(t-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma - h(0) \Delta u^k(t).$$

Donc, la formule (3.42) devient

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} (|u_t^k|^l u_{tt}^k), u_{tt}^k \right) + (\nabla u_{tt}^k, \nabla u_{tt}^k) + (\Delta u_t^k, \Delta u_{tt}^k) + \mu_1(u_{tt}^k, u_{tt}^k) \\ & - \left(\int_0^t h'(t-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma, \Delta u_{tt}^k(t) \right) - h(0) (\Delta u^k(t), \Delta u_{tt}^k(t)) \\ & + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z_t^k(x, 1, s, t) ds, u_{tt}^k(t) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.43)$$

On a aussi

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h'(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \right) \\ & = \left(\int_0^t h'(t-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma, \Delta u_{tt}^k \right) + h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) \\ & + \int_0^t h''(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma, \end{aligned}$$

et

$$h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k) = h(0) (\Delta u^k, \Delta u_{tt}^k) + h(0) (\Delta u_t^k(t), \Delta u_t^k(t)).$$

Par conséquent, la formule (3.43) donne

$$\begin{aligned} & \left(\frac{d}{dt} (|u_t^k|^l u_{tt}^k), u_{tt}^k \right) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_t^k\|^2 + \mu_1 \|u_{tt}^k\|^2 \\ & - \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h'(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \right) + \int_0^t h''(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\ & + h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) - h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k) + h(0) (\Delta u_t^k(t), \Delta u_t^k(t)) \\ & + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) (z_t^k(x, 1, s, t) ds, z_t(x, 0, s, t)) \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Concernant le terme non linéaire, on peut facilement voir que

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} (|u_t^k|^l u_{tt}^k), u_{tt}^k \right) &= (l|u_t^k|^{l-1} u_{tt}^k + |u_t^k|^l |u_{ttt}^k|, u_{tt}^k) \\
 &= (l|u_t^k|^{l-1} u_{tt}^k, u_{tt}^k) + (|u_t^k|^l |u_{ttt}^k|, u_{tt}^k) \\
 &= l|u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 + |u_t^k|^l \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{tt}^k|^2.
 \end{aligned} \tag{3.45}$$

Pour le dernier terme du second membre de (3.45), on obtient

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2) = \frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 + |u_t^k|^l \frac{1}{2} \frac{d}{dt} |u_{tt}^k|^2. \tag{3.46}$$

En combinant (3.45) et (3.46), on arrive à

$$\begin{aligned}
 \left(\frac{d}{dt} |u_t^k|^l u_{tt}^k, u_{tt}^k \right) &= l|u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2) - \frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 \\
 &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2) + \frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2.
 \end{aligned} \tag{3.47}$$

En substituant (3.47) dans (3.44), on obtient

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_t^k\|^2 \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h'(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \right) - \int_0^t h''(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 &\quad - h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) + h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k) - h(0) (\Delta u_t^k(t), \Delta u_t^k(t)) \\
 &\quad - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mu_2(s) (z_t^k(x, 1, s, t), z_t(x, 0, s, t)) ds - \mu_1 \|u_{tt}^k\|^2 - \frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2).
 \end{aligned} \tag{3.48}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
 &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \right) \\
 &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) z_{tt}^k(x, \rho, s, t) z_t^k(x, \rho, s, t) ds d\rho \\
 &= - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) \frac{1}{s^3} z_{\rho\rho}^k(x, \rho, s, t) z_\rho^k(x, \rho, s, t) ds d\rho \\
 &= - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 (\mu_2(s) + \xi) \frac{1}{s^2} \frac{\partial}{\partial \rho} |z_\rho^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \\
 &= - \frac{1}{2s^2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mu_2(s) + \xi) [|z_\rho^k(x, \rho, s, t)|^2]_0^1 ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mu_2(s) + \xi) \frac{1}{s^2} (|z_\rho^k(x, 0, s, t)|^2 - |z_\rho^k(x, 1, s, t)|^2) ds \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mu_2(s) + \xi) (|z_t^k(x, 0, s, t)|^2 - |z_t^k(x, 1, s, t)|^2) ds.
 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \right) \\
 &= \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(0)|^2 ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(0)|^2 \\
 & \quad - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(1)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(1)|^2 ds.
 \end{aligned} \tag{3.49}$$

En combinant (3.48) et (3.49), on aura

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2) + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\Delta u_t^k\|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \right) \\
 &= \frac{d}{dt} \left(\int_0^t h'(t - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \right) - \frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 \\
 & \quad - \int_0^t h''(t - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma - h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) \\
 & \quad + h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k) - h(0) (\Delta u_t^k(t), \Delta u_t^k(t)) - \mu_1 \|u_{tt}^k\|^2 \\
 & \quad + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(0)|^2 ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(0)|^2 \\
 & \quad - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(1)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(1)|^2 ds \\
 & \quad - \int_{\tau_1}^{\tau_2} (\mu_2(s) (z_t^k(x, 1, s, t), z_t(x, 0, s, t))) ds.
 \end{aligned} \tag{3.50}$$

En utilisant l'inégalité de Young pour le dernier terme de (3.50), on obtient

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z_t^k(x, 1, s, t) z_t(x, 0, s, t) ds \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(0)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(1)|^2 ds.
 \end{aligned} \tag{3.51}$$

En substituant (3.51) dans (3.50), on aura

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2 + \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \|\Delta u_t^k\|^2] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \\
 & \leq -\mu_1 \|\Delta u_{tt}^k\|^2 - \frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 \\
 & + \frac{d}{dt} \int_0^t h'(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 & - \int_0^t h''(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 & - h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) + h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k) \\
 & - h(0) (\Delta u_t^k(t), \Delta u_t^k(t)) \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(0)|^2 ds + \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(1)|^2 ds \\
 & - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(1)|^2 ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(1)|^2 \\
 & - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(0)|^2 - \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) |z_t^k(0)|^2 ds,
 \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} [|u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2 + \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \|\Delta u_t^k\|^2] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \\
 & \leq -\frac{l}{2} |u_t^k|^{l-1} |u_{tt}^k|^2 + \frac{d}{dt} \int_0^t h'(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 & - \int_0^t h''(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 & - h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) - h(0) (\Delta u_t^k(t), \Delta u_t^k(t)) \\
 & + h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k) - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} |z_t^k(1)|^2 \\
 & + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) ds + \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} - \mu_1 \right) |z_t^k(0)|^2.
 \end{aligned}$$

En utilisant la condition (3.29), on en déduit que

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left[\int_{\Omega} |u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2 dx + \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \|\Delta u_t^k\|^2 \right] \\
 & + \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho dx \\
 & \leq \frac{d}{dt} \int_0^t h'(t - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 & - \int_0^t h''(t - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma \\
 & - h'(0) (\Delta u^k, \Delta u_t^k) + h(0) \frac{d}{dt} (\Delta u^k, \Delta u_t^k). \tag{3.52}
 \end{aligned}$$

En intégrant (3.52) sur $(0, t)$ pour tout $t \in [0, T]$, avec T fixé, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2 dx + \frac{1}{2} \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_t^k\|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho dx \\
 & \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0)|^2 dx + \frac{1}{2} \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_t^k(0)\|^2 \\
 & + \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, 0)|^2 ds d\rho \\
 & + \int_0^t h'(t - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k(t)) d\sigma \\
 & - \int_0^t \int_0^r h''(r - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma dr \\
 & - h'(0) \int_0^t (\Delta u^k(s), \Delta u_t^k(s)) ds + h(0) (\Delta u^k(t), \Delta u_t^k(t)) \\
 & - h(0) (\Delta u^k(0), \Delta u_t^k(0)) - h(0) \int_0^t \|\Delta u_t^k(s)\|^2 ds.
 \end{aligned}$$

On va montrer que les termes en $t = 0$ sont bornés.

Estimation de $\|\Delta u_t^k(0)\|^2$:

On a d'après l'hypothèse suivante :

$$u^k(x, 0) = u_0^k \rightarrow u_0, \quad \text{dans } H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega),$$

$$u_t^k(x, 0) = u_1^k \rightarrow u_1, \quad \text{dans } H_0^1(\Omega),$$

on en déduit que

$$\left| \frac{1}{2} \|\Delta u_t^k(0)\|^2 - h(0) (\Delta u^k(0), \Delta u_t^k(0)) \right| \leq C_2,$$

où C_2 est une constante indépendante de k .

Estimation de $z_t^k(x, \rho, s, 0)$:

Grâce à l'hypothèse sur l'historique de la vitesse, on en déduit que

$$z_t^k(x, \rho, s, 0) = (f_0^k)' \rightarrow f_0' \quad \text{dans } L^2((0, 1) \times (\tau_1, \tau_2); H_0^2(\Omega))$$

On peut déduire que

$$\left| \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, 0)|^2 ds d\rho \right| \leq C_3,$$

où C_4 est une constante indépendante de k .

Estimation de $\int_{\Omega} |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0)|^2 dx + \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2$:

L'équation (3.9) en $t = 0$ s'écrit comme

$$\begin{aligned} & |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0) - \Delta u_{tt}^k(0) + \Delta^2 u^k(0) + \mu_1 u_t^k(0) \\ & + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \mu_2(s) u_t^k(x, -s) ds d\rho = 0. \end{aligned} \quad (3.53)$$

En multipliant (3.53) par $u_{tt}^k(0)$ et en intégrant sur Ω , on obtient :

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0)|^2 dx - (\Delta u_{tt}^k(0), u_{tt}^k(0)) + (\Delta^2 u^k(0), u_{tt}^k(0)) \\ & + \mu_1 (u_t^k(0), u_{tt}^k(0)) + \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \mu_2(s) (u_t^k(x, -\rho s), u_{tt}^k(0)) ds d\rho \right) = 0. \end{aligned} \quad (3.54)$$

En intégrant (3.54) par partie, il vient

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0)|^2 dx + \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2 \\ & = -(\nabla \Delta u^k(0), \nabla u_{tt}^k(0)) - \mu_1 (u_t^k(0), u_{tt}^k(0)) \\ & = - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \mu_2(s) (u_t^k(x, -\rho s), u_{tt}^k(0)) ds d\rho \right). \end{aligned} \quad (3.55)$$

En utilisant les inégalités de Young et de Poincaré, on obtient

$$|-(\nabla \Delta u^k(0), \nabla u_{tt}^k(0))| \leq C(\varepsilon_1) + \varepsilon_1 \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2 \quad (3.56)$$

et

$$|-\mu_1 (u_t^k(0), u_{tt}^k(0))| \leq C(\varepsilon_2) + \varepsilon_2 \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2. \quad (3.57)$$

Par hypothèse on a $u_t^k(x, -\rho s) = f_0(\rho s)$, donc on peut en déduire

$$\left| - \left(\int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 \mu_2(s) (u_t^k(x, -s), u_{tt}^k(0)) ds d\rho \right) \right| \leq C(\varepsilon_3) + \varepsilon_3 \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2. \quad (3.58)$$

En substituant (3.56)-(3.58) dans (3.55), et en choisissant $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = \varepsilon$, on trouve

$$\int_{\Omega} |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0)|^2 dx + (1 - \varepsilon) \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2 \leq C(\varepsilon).$$

En prenant $\varepsilon < 1$, on a

$$\int_{\Omega} |u_t^k(0)|^l |u_{tt}^k(0)|^2 dx + \|\nabla u_{tt}^k(0)\|^2 \leq C_4,$$

où C_4 est une constante indépendante de k .

Estimation du terme $|h(0)(\Delta u^k(t), \Delta u_t^k(t))|$:

$$|h(0)(\Delta u^k(t), \Delta u_t^k(t))| \leq \varepsilon_4 \|\Delta u_t^k(t)\|^2 + C(\varepsilon_4) \|\Delta u^k(\sigma)\|^2.$$

En utilisant la première estimation, on obtient

$$|h(0)(\Delta u^k(t), \Delta u_t^k(t))| \leq \varepsilon_4 \|\Delta u_t^k(t)\|^2 + \tilde{C}(\varepsilon_4).$$

Estimation des termes avec intégrales :

En utilisant (3.40), l'inégalité de Young et l'hypothèse (H4), on obtient

$$\begin{aligned} \left| \int_0^t h'(t - \sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k(t)) d\sigma \right| &= \left| \left(\Delta u_t^k(t), \int_0^t h'(t - \sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma \right) \right| \\ &\leq \varepsilon_5 \|\Delta u_t^k(t)\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon_5} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h'(t - \sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma \right)^2 dx \\ &\leq \varepsilon_5 \|\Delta u_t^k(t)\|^2 + \frac{C_0^2}{4\varepsilon_5} \int_0^t \|\Delta u^k(\sigma)\|^2 d\sigma \\ &\leq \varepsilon_5 \|\Delta u_t^k(t)\|^2 + C_5(T). \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
 & \left| - \int_0^t \int_0^r h''(r-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta u_t^k) d\sigma dr \right| \\
 &= \int_0^t \left(\Delta u_t^k(r), \int_0^r h''(r-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma \right) dr \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta u_t^k(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{1}{2} \int_0^t \int_{\Omega} \left(\int_0^r h''(t-\sigma) \Delta u^k(\sigma) d\sigma \right)^2 dx dr \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta u_t^k(\sigma)\|^2 d\sigma + \frac{TC_2^2}{2} \int_0^t \|\Delta u^k(\sigma)\|^2 d\sigma \\
 &\leq \frac{1}{2} \int_0^t \|\Delta u_t^k(\sigma)\|^2 d\sigma + C_7(T).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'hypothèse (H3), on trouve :

$$\left| -h'(0) \int_0^t (\Delta u^k(s), \Delta u_t^k(s)) ds \right| \leq C_0 \int_0^t \|\Delta u_t^k(\sigma)\|^2 d\sigma + C_7(T).$$

En choisissant $\varepsilon_i > 0$, ($i = \overline{1, 5}$) assez petit et en combinant les estimations précédentes, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} |u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_t^k\|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \\
 &\leq C_8 \int_0^t \|\Delta u_t^k(\sigma)\|^2 d\sigma + C_9.
 \end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant le lemme de Granwall on arrive à

$$\begin{aligned}
 & \frac{1}{2} |u_t^k|^l |u_{tt}^k|^2 + \frac{1}{2} \|\nabla u_{tt}^k\|^2 + \frac{1}{2} \|\Delta u_t^k\|^2 \\
 &+ \frac{1}{2} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (\mu_2(s) + \xi) |z_t^k(x, \rho, s, t)|^2 ds d\rho \\
 &\leq C_{10}, \quad \text{pour tout } t \in [0, T],
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

où C_{10} est une constante positive qui dépend des données $(h, \mu_1, \mu_2, u_0, u_1)$.

Convergences :

D'après l'estimation (3.59) on déduit que

$$\begin{aligned}
 u^k & \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T, H^3(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \\
 u_t^k & \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\Omega)), \\
 u_{tt}^k & \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \\
 s(|\mu_2(s)| + \xi)z^k(x, \rho, s, t) & \text{ est bornée dans } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))), \\
 s(|\mu_2(s)| + \xi)z_t^k(x, \rho, s, t) & \text{ est bornée dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, L^2(\Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2))), \\
 (|\mu_2(s)| + \xi)z^k(x, 1, s, t) & \text{ est bornée dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, H_0^1(\Omega \times (\tau_1, \tau_2))), \\
 (|\mu_2(s)| + \xi)z_t^k(x, 1, s, t) & \text{ est bornée dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, L^2(\Omega \times (\tau_1, \tau_2))).
 \end{aligned}$$

Passage à la limite dans les termes linéaires :

D'après les estimations (3.40) et (3.59), on déduit qu'il existe une sous-suite (qu'on note toujours (u^k, z^k)), convergente telle que

$$\left\{ \begin{array}{l}
 u^k \rightharpoonup u \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T, H^4(\Omega) \cap H_0^2(\Omega)), \\
 u_t^k \rightharpoonup u_t \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T, H_0^2(\Omega)), \\
 u_{tt}^k \rightharpoonup u_{tt} \text{ faible étoile dans } L^\infty(0, T, H_0^1(\Omega)), \\
 z^k(x, \rho, s, t) \rightharpoonup z(x, \rho, s, t) \text{ faible étoile dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, H_0^1(Q)), \\
 z_t^k(x, \rho, s, t) \rightharpoonup z_t(x, \rho, s, t) \text{ faible étoile dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, H_0^1(Q)), \\
 z^k(x, 1, s, t) \rightharpoonup z(x, 1, s, t) \text{ faible étoile dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, H_0^1(\Sigma)), \\
 z_t^k(x, 1, s, t) \rightharpoonup z_t(x, 1, s, t) \text{ faible étoile dans } L_{loc}^\infty(0, \infty, H_0^1(\Sigma)),
 \end{array} \right. \quad (3.60)$$

où $\Sigma = \Omega \times (\tau_1, \tau_2)$

et $Q = \Omega \times (0, 1) \times (\tau_1, \tau_2)$.

Analyse du terme non linéaire :

D'après la dixième estimation et l'utilisation de l'inégalité de Sobolev-Poincaré, on obtient

$$\begin{aligned}
 \| |u_t^k|^l u_t^k \|_{L^2(0,T,L^2(\Omega))} &= \int_0^T \|u_t^k\|_{2^{(l+1)}}^{2(l+1)} dt \\
 &\leq \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{2(l+1)} \int_0^T \|\Delta u_t^k\|_2^{2(l+1)} dt \\
 &\leq \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{2(l+1)} C_3^{(l+1)} T \\
 &\leq C(T).
 \end{aligned} \tag{3.61}$$

Donc il existe une sous suite (qu'on note toujours par $|u_t^k|^l u_{tt}^k$) qui converge faiblement vers une limite qu'on notera par χ , c'est à dire :

$$|u_t^k|^l u_{tt}^k \rightharpoonup \chi \text{ dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

On va montrer que $\chi = |u_t|^l u_t$.

D'après les estimations précédente, on obtient

$$\begin{aligned}
 u_t^k &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)) \\
 u_{tt}^k &\in L^\infty(0, T; H_0^1(\Omega)).
 \end{aligned}$$

Alors, d'après le lemme de compacité d'Aubin-Lions [3], on déduit qu'il existe une sous-suite (qu'on note toujours par u^k) telle que :

$$u_t^k \rightarrow u_t \text{ fortement dans } L^2(0, T, L^2(\Omega)).$$

Ce qui implique

$$u_t^k \rightarrow u_t \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T).$$

Donc,

$$|u_t^k|^l u_t^k \rightarrow |u_t|^l u_t \text{ presque partout dans } \Omega \times (0, T).$$

Par conséquent $\chi = |u_t|^l u_t$.

En multipliant (3.33) par $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ (où $\mathcal{D}(0, T)$ est l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact dans $]0, T[$) et en intégrant le résultat sur $(0, T)$, il s'ensuit que :

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{l+1} \int_0^T (|u_t^k(t)|^l u_t^k(t), w^j) \theta'(t) dt + \int_0^T (\Delta u^k(t), \Delta w^j) \theta(t) dt \\
 & + \int_0^T (\nabla u_{tt}^k, \nabla w^j) \theta(t) dt - \int_0^T \int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u^k(\sigma), \Delta w^j) \theta(t) d\sigma dt \\
 & + \mu_1 \int_0^T (u_t^k, w^j) \theta(t) dt + \int_0^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) (z^k(x, 1, s, t), w^j) \theta(t) ds dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.62}$$

Les convergences faibles précédentes sont suffisantes pour passer à la limite dans (3.62), pour obtenir

$$\begin{aligned}
 & -\frac{1}{l+1} \int_0^T (|u_t(t)|^l u_t(t), w^j) \theta'(t) dt + \int_0^T (\Delta u(t), \Delta w^j) \theta(t) dt \\
 & + \int_0^T (\nabla u_{tt}, \nabla w^j) \theta(t) dt - \int_0^T \int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(\sigma), \Delta w^j) \theta(t) d\sigma dt \\
 & + \mu_1 \int_0^T (u_t, w^j) \theta(t) dt + \int_0^T \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) (z(x, 1, s, t), w^j) \theta(t) ds dt = 0.
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

Pour le terme non linéaire, on a

$$-\frac{1}{l+1} \int_0^T (|u_t(t)|^l u_t(t), w^j) \theta'(t) dt = \int_0^T (|u_t^k| u_{tt}, w^j) \theta(t) dt.$$

D'autre part, en multipliant (3.34) par $\theta(t) \in \mathcal{D}(0, T)$ et en intégrant sur $(0, T) \times (0, 1)$, il s'ensuit que

$$\int_0^T \int_0^1 (s z_t^k + z_\rho^k, \phi^j) \theta(t) dt d\rho = 0. \tag{3.64}$$

d'où l'on déduit que la solution (u, z) est faible et globale. ■

Chapitre 4

Comportement asymptotique

Sommaire

4.1	Introduction	63
4.2	Stabilité exponentielle	64
4.2.1	Fonctionnelle de Lyapounov	65
4.2.2	Équivalence de l'énergie	65

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, on étudie la stabilité des vibrations de la flexion d'une plaque mince.

Notre problème est d'étudier le comportement asymptotique de la solution (déterminer sa limite). Si la limite de l'énergie est nulle, donner une estimation de la vitesse de sa décroissance vers zéro. Tout dépend des hypothèses sur le terme d'amortissement.

Il y a divers types de stabilité. Dans notre cas, on s'intéresse à la stabilité exponentielle, c'est à dire

$$E(t) \leq Ce^{-\alpha t},$$

où C , α sont des constantes strictement positives dépendant uniquement des données.

On démontre que le système considéré est exponentiellement stable sous des hypothèses raisonnables sur les données.

4.2 Stabilité exponentielle

Rappel sur la méthode de Lyapunov :

En 1892, Lyapunov a introduit une fonction d'énergie qu'il a utilisée pour étudier la stabilité de certains systèmes d'équations d'évolution sans calculer leur solution.

On sait maintenant que la théorie de Lyapunov est un bon cadre pour estimer la taille de l'attracteur d'une équation d'évolution lorsque la dissipation physique (friction, perte d'énergie ou viscosité) est présente, et que ce fait peut être exprimé du point de vue mathématique par l'existence d'un ensemble borné absorbant. La vérification de l'existence d'un borné absorbant nécessite la construction d'une fonction de Lyapunov, généralement définie comme une énergie perturbée.

Cette méthode a été utilisée pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires, elle est connue aujourd'hui sous le nom de **méthode de Lyapunov**. Elle permet de tirer des conclusions quant au comportement d'un système sans calculer explicitement sa solution. La méthode de Lyapunov qui a joué un rôle important dans la théorie de la stabilité des équations différentielles a été étendue pour donner des critères pour le comportement dynamique des systèmes d'équations d'évolution.

Résultat de stabilité :

On démontre dans cette thèse que le système (3.13) est exponentiellement stable sous des hypothèses convenables sur les données. Notre résultat principal dans ce paragraphe est l'estimation de la décroissance exponentielle de l'énergie vers zéro quand $t \rightarrow +\infty$.

Théorème 4 *Supposons que (H1)-(H5) sont vérifiées. Alors, l'énergie $E(t)$ satisfait à*

$$E(t) \leq k_0 e^{-k_1 t}, \quad \text{pour tout } t > 0, \quad (4.1)$$

où k_0 et k_1 sont des constantes positives.

La démonstration de cet théorème requiert plusieurs étapes.

4.2.1 Fonctionnelle de Lyapunov

On construit une fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} qui doit vérifier une inégalité de la forme :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k\mathcal{L}(t)$$

où k est une constante positive. Cette inégalité donne le taux de décroissance exponentielle de la fonctionnelle de Lyapunov \mathcal{L} . Pour passer à $E(t)$ nous aurons besoin d'une relation d'équivalence entre $E(t)$ et $\mathcal{L}(t)$.

Nous considérons la fonctionnelle de Lyapunov suivante:

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + N_1 F_1(t) + F_2(t) + N_2 F_3(t), \quad (4.2)$$

où N , N_1 et N_2 sont des nombres réels positifs qui seront déterminées par la suite, où

$$\begin{aligned} F_1(t) &= \frac{1}{l+1} \int_{\Omega} |u_t|^l u_t u \, dx + \int_{\Omega} \nabla u_t \nabla u \, dx, \\ F_2(t) &= \int_{\Omega} \left(\Delta u_t - \frac{1}{l+1} |u_t|^l u_t \right) \int_0^t h(t-\sigma)(u(t) - u(\sigma)) \, d\sigma \, dx, \\ F_3(t) &= \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s e^{-s\rho} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) \, ds \, d\rho \, dx. \end{aligned}$$

4.2.2 Équivalence de l'énergie

Le premier résultat donne une équivalence entre $E(t)$ et $\mathcal{L}(t)$:

Lemme 7 *Pour N suffisamment grand, la fonction $\mathcal{L}(t)$ satisfait à l'estimation*

$$\alpha_0 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_1 E(t), \quad \text{pour tout } t > 0, \quad (4.3)$$

où α_0 et α_1 sont des constantes positives qui dépendent de N_1 , N_2 et N .

Preuve. On commence par démontrer la deuxième inégalité de (4.3).

Pour estimer la fonctionnelle $F_1(t)$, en utilisant les inégalités de Young, Poincaré, et on utilisant le fait que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-\beta)\|\Delta u\|_2^2 &= \frac{1}{2}\left(1-\int_0^\infty h(t-s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{2}\left(1-\int_0^t h(t-s)ds\right)\|\Delta u\|_2^2 \\ &\leq E(t) \leq E(0), \end{aligned}$$

cette estimation nous donne :

$$\|\Delta u\|_2 \leq \left(\frac{2E(0)}{1-\beta}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Alors, on en déduit que

$$\begin{aligned} |F_1(t)| &\leq \frac{1}{l+2}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{(l+1)^{-1}}{l+2}\|u\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{l+2}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{(l+1)^{-1}}{l+2}\left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{l+2}\|\Delta u\|_2^{l+2} + \frac{1}{2\lambda_1}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 \\ &\leq \frac{1}{l+2}\|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \left\{\frac{(l+1)^{-1}}{l+2}\left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}}\right)^{l+2}\left(\frac{2E(0)}{1-\beta}\right)^{l/2} + \frac{1}{2\lambda_1}\right\}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2. \end{aligned} \quad (4.4)$$

En intégrant la fonctionnelle $F_2(t)$ par parties sur Ω , on obtient

$$\begin{aligned} F_2(t) &= -\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-\sigma)(\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)) d\sigma dx \\ &\quad - \int_\Omega \frac{1}{l+1}|u_t|^l u_t \int_0^t h(t-\sigma)(u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young (2.5), pour estimer le terme $\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-\sigma)(\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)) d\sigma dx$

on obtient

$$\begin{aligned} &\left| -\int_\Omega \nabla u_t \int_0^t h(t-\sigma)(\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)) d\sigma dx \right| \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega \left(\int_0^t h(t-\sigma)|\nabla u(t) - \nabla u(s)| d\sigma\right)^2 dx \\ &\leq \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{\beta}{2\lambda_1}(h \square \Delta u)(t). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Pour estimer le terme $\int_{\Omega} \frac{1}{l+1} |u_t|^l u_t \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx$, en utilisant l'inégalité de Young (2.3) avec les exposants conjugués $\frac{l+2}{l+1}$ et $l+2$, ($\frac{l+1}{l+2} + \frac{1}{l+2} = 1$)

$$\begin{aligned}
 & \left| - \int_{\Omega} \frac{1}{l+1} |u_t|^l u_t \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx \right| \\
 & \leq \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{(l+1)^{-1}}{l+2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-\sigma) |u(t) - u(\sigma)| d\sigma \right)^{l+2} dx \\
 & \leq \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{(l+1)^{-1}}{l+2} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(\sigma) d\sigma \right)^{l+1} \int_0^t h(t-\sigma) |u(t) - u(\sigma)|^{l+2} d\sigma dx \\
 & \leq \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{(l+1)^{-1}}{l+2} \beta^{l+1} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{l+2} \left(\frac{4E(0)}{1-\beta} \right)^{l/2} (h \square \Delta u)(t),
 \end{aligned} \tag{4.6}$$

et en combinant (4.6) et (4.5), on en déduit que

$$\begin{aligned}
 |F_2(t)| & \leq \frac{1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
 & \quad + \left\{ \frac{(l+1)^{-1}}{l+2} \beta^{l+1} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda}} \right)^{l+2} \left(\frac{4E(0)}{1-\beta} \right)^{l/2} + \frac{\beta}{2\lambda} \right\} (h \circ \Delta u)(t).
 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Par ailleurs, en utilisant le fait que $e^{-s\rho} \leq 1$ pour tout $\rho \in [0, 1]$, on aura

$$|F_3(t)| \leq \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx. \tag{4.8}$$

En combinant (4.4), (4.7) et (4.8), on obtient

$$\begin{aligned}
 |\mathcal{L}(t)| & \leq NE(t) + \frac{N_1 + 1}{l+2} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \frac{N_1 + 1}{2} \|\nabla u_t\|_2^2 \\
 & \quad + N_1 \left\{ \frac{(l+1)^{-1}}{l+2} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda}} \right)^{l+2} \left(\frac{2E(0)}{1-\beta} \right)^{l/2} + \frac{1}{2\lambda} \right\} \|\Delta u\|_2^2 \\
 & \quad + \left\{ \beta^{l+1} \frac{(l+1)^{-1}}{l+2} \left(\frac{C_s}{\sqrt{\lambda_1}} \right)^{l+2} \left(\frac{4E(0)}{1-\beta} \right)^{l/2} + \frac{\beta}{2\lambda_1} \right\} (h \square \Delta u)(t) \\
 & \quad + N_2 \int_{\Omega} \int_0^1 \int_{\tau_1}^{\tau_2} s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) ds d\rho dx \\
 & \leq cE(t);
 \end{aligned}$$

par conséquent, on aura

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq cE(t),$$

ce qui donne

$$(N - c) E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + c) E(t).$$

En choisissant N assez grand avec $\alpha_0 = N - c > 0$, $\alpha_1 = N + c > 0$, on obtient l'estimation (4.3). Cela achève la démonstration. ■

Pour estimer la dérivée de la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$, plusieurs lemmes seront nécessaires.

On a

$$\mathcal{L}'(t) = NE'(t) + N_1F'_1(t) + F'_2(t) + N_2F'_3(t). \quad (4.9)$$

Estimation de la dérivée de $F_1(t)$:

Lemme 8 *Soit (u, z) une solution du problème (3.13). Alors la fonctionnelle $F_1(t)$ satisfait, pour $\eta > 0$, à l'estimation*

$$\begin{aligned} F'_1(t) &\leq \frac{1}{l+1} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} - \left(1 - \beta - \eta - \frac{2\eta C_s^2}{\lambda_1} \mu_1\right) \|\Delta u\|_2^2 \\ &\quad + \left(1 + \frac{C_s^2 \mu_1}{4\eta}\right) \|\nabla u_t\|_2^2 \\ &\quad + \frac{\beta}{4\eta} (h \square \Delta u)(t) + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Preuve. On calcule la dérivée de $F_1(t)$ et en intégrant par parties, on obtient

$$\begin{aligned} F'_1(t) &= \frac{1}{l+1} \int_{\Omega} (|u_t|^l u_t)' u dx + \frac{1}{l+1} \int_{\Omega} |u_t|^{l+2} dx + \int_{\Omega} \nabla u_{tt} \nabla u dx + \|\nabla u_t\|_2^2 \\ &= \frac{1}{l+1} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 + \int_{\Omega} (|u_t|^l u_{tt} - \Delta u_{tt}) u dx \\ &= \frac{1}{l+1} \|u_t\|_{l+2}^{l+2} + \|\nabla u_t\|_2^2 - \|\Delta u\|_2^2 + \int_{\Omega} \Delta u \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma dx \\ &\quad - \mu_1 \int_{\Omega} u u_t dx - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) u ds dx. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pour estimer le terme $\int_{\Omega} \Delta u(t) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds dx$, d'abord, on ajoute et on retranche le terme $\int_0^t h(s) ds \|\Delta u\|_2^2$, on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Delta u(t) \int_0^t h(t-s) \Delta u(s) ds dx \\ &= \int_0^t h(s) ds \|\Delta u(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} \Delta u(t) \int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(\sigma) - \Delta u(t)) ds dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Young (2.4), on obtient

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} \Delta u(t) \int_0^t h(t-s) (\Delta u(s) - \Delta u(t)) ds dx \\ &\leq \eta \|\Delta u(t)\|_2^2 + \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(\sigma) - \Delta u(t)) ds \right)^2 dx \\ &\leq \eta \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{4\eta} (h \square \Delta u)(t). \end{aligned}$$

Finalement, on obtient

$$\int_{\Omega} \Delta u(t) \int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) ds dx \leq (\beta + \eta) \|\Delta u(t)\|_2^2 + \frac{\beta}{4\eta} (h \square \Delta u)(t) \quad (4.12)$$

En utilisant l'inégalité de Sobolev, on obtient

$$\left| \int_{\Omega} uu_t dx \right| \leq \eta \frac{C_s^2}{\lambda_1} \|\Delta u\|_2^2 + \frac{C_s^2}{4\eta} \|\nabla u_t\|_2^2, \quad (4.13)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) u ds dx \right| \\ & \leq \eta \frac{C_s^2}{\lambda} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| \int_{\Omega} |\Delta u|^2 ds dx + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\ & \leq \eta \frac{\mu_1 C_s^2}{\lambda} \|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx. \end{aligned} \quad (4.14)$$

En substituant alors (4.12), (4.13) et (4.13) dans (4.11), on obtient l'estimation (4.10). ■

Estimation de la dérivée de $F_2(t)$:

Lemme 9 Soit (u, z) la solution de (3.13). Alors $F_2(t)$ satisfait, pour tout $\delta > 0$, à l'estimation

$$\begin{aligned} F_2'(t) & \leq \delta(2\beta^2 + 1) \|\Delta u\|_2^2 + \left(\delta + \frac{\delta a_0}{l+1} - h_0\right) \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{l+1} h_0 \|u_t\|_{l+2}^{l+2} \\ & \quad + \beta \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} + \frac{\mu_1 C_s^2}{2\delta\lambda}\right) (h \square \Delta u)(t) - \frac{h(0)}{4\delta\lambda} \left(1 + \frac{C_s^2}{l+1}\right) (h' \square \Delta u)(t) \\ & \quad + \mu_1 \delta \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z^2(x, 1, s, t) ds dx + \mu_1 \delta \|u_t\|_2^2, \end{aligned} \quad (4.15)$$

où $\int_0^t h(\sigma) d\sigma \geq \int_0^{t_0} h(\sigma) d\sigma = h_0$ pour tout $t \geq t_0 > 0$.

Preuve. Soit (u, z) la solution de (3.13). Alors la dérivée de la fonctionnelle $F_2(t)$ satisfait, pour tout $\delta > 0$, à l'estimation

$$\begin{aligned}
 F_2'(t) &= - \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma \right) \left(\int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)) d\sigma \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \Delta u(t) \left(\int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)) d\sigma \right) dx \\
 &\quad + \mu_1 \int_{\Omega} u_t(t) \left(\int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma \right) dx \\
 &\quad + \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t h'(t-\sigma) (\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)) d\sigma dx \\
 &\quad - \frac{1}{l+1} \int_{\Omega} |u_t|^l u_t \int_0^t h'(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx \\
 &\quad - \int_0^t h(s) ds \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{l+1} \int_0^t h(s) ds \|u_t\|_{l+2}^{l+2} \\
 &= I_1 + \dots + I_6 - \int_0^t h(\sigma) d\sigma \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{1}{l+1} \int_0^t h(\sigma) d\sigma \|u_t\|_{l+2}^{l+2},
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

où

$$\begin{aligned}
 I_1 &= - \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma \right) \left(\int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)) d\sigma \right) dx, \\
 I_2 &= \int_{\Omega} \Delta u(t) \left(\int_0^t h(t-\sigma) (\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)) d\sigma \right) dx, \\
 I_3 &= \mu_1 \int_{\Omega} u_t(t) \left(\int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma \right) dx, \\
 I_4 &= \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) z(x, 1, s, t) \int_0^t h(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx, \\
 I_5 &= - \int_{\Omega} \nabla u_t(t) \int_0^t h'(t-\sigma) (\nabla u(t) - \nabla u(\sigma)) d\sigma dx, \\
 I_6 &= - \frac{1}{l+1} \int_{\Omega} |u_t|^l u_t \int_0^t h'(t-\sigma) (u(t) - u(\sigma)) d\sigma dx.
 \end{aligned}$$

Maintenant, en estimant I_1, \dots, I_6 . Pour $\delta > 0$, on aura :

$$\begin{aligned}
 |I_1| &\leq \delta \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-\sigma) \Delta u(\sigma) d\sigma \right)^2 dx \\
 &\quad + \frac{1}{4\delta} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h(t-\sigma) |\Delta u(t) - \Delta u(\sigma)| d\sigma \right)^2 dx \\
 &\leq 2\delta \left(\int_0^t h(\sigma) d\sigma \right)^2 \|\Delta u\|_2^2 + \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} \right) \int_0^t h(\sigma) d\sigma (h \square \Delta u)(t) \\
 &\leq 2\delta \beta^2 \|\Delta u\|_2^2 + \beta \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} \right) (h \square \Delta u)(t).
 \end{aligned}$$

De même,

$$|I_2| \leq \delta \|\Delta u\|_2^2 + \frac{\beta}{4\delta} (h \square \Delta u)(t).$$

En utilisant les inégalités de Young et Sobolev, on obtient

$$|I_3| \leq \delta C_s^2 \mu_1 \|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{\beta C_s^2 \mu_1}{4\delta \lambda_1} (h \square \Delta u)(t).$$

La même chose pour I_4

$$|I_4| \leq \delta \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx + \frac{\beta \mu_1 C_s^2}{4\delta \lambda_1} (h \square \Delta u)(t).$$

Pour estimer I_5 , en utilisant le **lemme 3**, on aura

$$|I_5| \leq \delta \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{h(0)}{4\delta \lambda_1} (h' \square \Delta u)(t).$$

Pour I_6 , on obtient

$$\begin{aligned} |I_6| &\leq \frac{\delta}{l+1} \int_{\Omega} \| |u_t|^l u_t \|^2 + \frac{1}{4\delta(l+1)} \int_{\Omega} \left(\int_0^t h'(t-\sigma)(u(t) - u(\sigma)) d\sigma \right)^2 dx \\ &\leq \frac{\delta}{l+1} \| |u_t|^{2l+2} \| - \frac{h(0)C_s^2}{4\delta \lambda_1(l+1)} (h' \square \Delta u)(t) \\ &\leq \frac{\delta C_s^{2l+2}}{l+1} \|\nabla u_t\|_2^{2l+2} - \frac{h(0)C_s^2}{4\delta \lambda_1(l+1)} (h' \square \Delta u)(t) \\ &\leq \frac{\delta a_0}{l+1} \|\nabla u_t\|_2^2 - \frac{h(0)C_s^2}{4\delta \lambda_1(l+1)} (h' \square \Delta u)(t), \end{aligned}$$

où $a_0 = C_s^{2(l+1)}(2E(0))^l$.

En substituant ces estimations dans (4.16), on aura l'estimation (4.15). ■

Estimation de la dérivée de $F_3(t)$:

Lemme 10 *La fonctionnelle $F_3(t)$ satisfait à l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} F_3'(t) &\leq -m \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, 1, s, t) ds dx \\ &\quad - m \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx + \mu_1 \|u_t\|_2^2, \end{aligned} \tag{4.17}$$

où $m = e^{-\tau_2}$.

Preuve. En dérivant la fonctionnelle $F_3(t)$ par rapport à t et en utilisant la deuxième équation dans (3.13), on aura

$$\begin{aligned}
 F_3'(t) &= -2 \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 (|\mu_2(s)| + \xi) e^{-s\rho} z z_{\rho}(x, \rho, s, t) d\rho ds dx \\
 &= -\frac{\partial}{\partial \rho} \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 (|\mu_2(s)| + \xi) e^{-s\rho} z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (|\mu_2(s)| + \xi) e^{-s\rho} z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx \\
 &= - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) [e^{-s} z^2(x, 1, s, t) - z^2(x, 0, s, t)] ds dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (|\mu_2(s)| + \xi) e^{-s\rho} z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant le fait que $z(x, 0, s, t) = u_t(x, t)$ et $e^{-s} \leq e^{-s\rho} \leq 1$, pour tout $\rho \in [0, 1]$, on aura

:

$$\begin{aligned}
 F_3'(t) &\leq - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) e^{-s} z^2(x, 1, s, t) ds dx + \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} (|\mu_2(s)| + \xi) u_t^2(x, t) ds dx \\
 &\quad - \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (|\mu_2(s)| + \xi) e^{-s} z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx.
 \end{aligned} \tag{4.18}$$

Comme e^{-s} est une fonction décroissante, on a $e^{-s} \leq e^{-\tau_2}$, pour tout $s \in [\tau_1, \tau_2]$. Enfin, en prenant $m = e^{-\tau_2}$, nous obtenons (4.17). ■

Estimation de la dérivée de $L(t)$:

En substituant (4.10), (4.15), (4.17) dans (4.9), on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq -N \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} \right) \|u_t\|_2^2 - \frac{1}{l+1} (h_0 - N_1) \|u_t\|_{l+2}^{l+2} \\
 &\quad - \xi \left(\frac{N}{2} + mN_2 \right) \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 &\quad - \left(mN_2 - \frac{N_1}{4\eta} - \mu_1\delta \right) \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| z^2(x, 1, s, t) ds dx \\
 &\quad - \left(\frac{N}{2} h(t) + N_1 \left(1 - \beta - \eta - \frac{2\eta C_s^2}{\lambda_1} \mu_1 \right) - \delta(2\beta^2 + 1) \right) \|\Delta u\|_2^2 \\
 &\quad - \left(h_0 - \delta - \frac{\delta a_0}{l+1} - N_1 - \frac{N_1 \mu_1}{4\eta} - \mu_1 C_s^2 (1 + \delta) \right) \|\nabla u_t\|_2^2 \\
 &\quad + \left(\frac{N_1 \beta}{4\eta} + \beta \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} + \frac{\mu_1 C_s^2}{2\delta \lambda_1} \right) \right) (h \square \Delta u)(t) \\
 &\quad + \left(\frac{N}{2} - \frac{h(0)}{4\delta \lambda} \left(1 + \frac{C_s^2}{l+1} \right) \right) (h' \square \Delta u)(t) \\
 &\quad - mN_2 \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx.
 \end{aligned}$$

En prenant $N_1 < h_0$, $\delta > 0$ suffisamment petit et N_2 assez grand pour que

$$\begin{aligned}
 mN_2 - \frac{N_1}{4\eta} - \mu_1\delta &> 0, \\
 N \left(\mu_1 - \int_{\tau_1}^{\tau_2} |\mu_2(s)| ds - \frac{\xi(\tau_2 - \tau_1)}{2} \right) &> 0
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 \gamma_0 &= \frac{1}{l+1} (h_0 - N_1) > 0, \\
 \gamma_1 &= h_0 - N_1 - \frac{N_1 \mu_1}{4\eta} - \delta \left(1 + \frac{a_0}{l+1} \right) - \mu_1 C_s^2 (1 + \delta) > 0, \\
 \gamma_2 &= \left(\frac{N h_1}{2} + N_1 \left(1 - \beta - \eta - \frac{2\eta C_s^2}{\lambda_1} \mu_1 \right) - \delta(2\beta^2 + 1) \right) > 0, \\
 \gamma_3 &= \zeta \left(\frac{N_1}{2} - \frac{h(0)}{4\delta \lambda_1} \left\{ 1 + \frac{C_s^2}{l+1} \right\} \right) - \left(\frac{N_1 \beta}{4\eta} + \beta \left(2\delta + \frac{1}{4\delta} + \frac{\mu_1 C_s^2}{2\delta \lambda_1} \right) \right) > 0,
 \end{aligned}$$

Ainsi, en prenant $\gamma_4 = mN_2$, on obtient :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq -\gamma_0 \|u_t\|_{l+2}^{l+2} - \gamma_1 \|\nabla u_t\|_2^2 - \gamma_2 \|\Delta u\|_2^2 - \gamma_3 (h \square \Delta u)(t) \\
 &\quad - \gamma_4 \int_{\Omega} \int_{\tau_1}^{\tau_2} \int_0^1 s (|\mu_2(s)| + \xi) z^2(x, \rho, s, t) d\rho ds dx.
 \end{aligned}$$

A partir de (3.14), on obtient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\alpha E(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0, \tag{4.19}$$

pour certains $\alpha > 0$. Une combinaison de (4.3) et (4.19) donne

$$\mathcal{L}'(t) \leq -k_1 \mathcal{L}(t), \quad \text{pour tout } t \geq 0, \quad (4.20)$$

où $k_1 = \alpha/\alpha_1$. En intégrant (4.20) sur $(0, t)$, on aura

$$\mathcal{L}'(t) \leq \mathcal{L}(0)e^{-k_1 t}, \quad \text{pour tout } t \geq 0. \quad (4.21)$$

Finalement, en combinant ce résultat avec (4.3), on arrive à

$$E(t) \leq k_0 e^{-k_1 t}, \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où $k_0 = \frac{\alpha_1 E(0)}{\alpha_0}$. Ce qui achève la démonstration.

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse nous avons étudié la stabilité exponentielle de modèle non linéaire de plaques minces viscoélastiques avec un retard distribué et un amortissement structural. Sous des hypothèses raisonnables sur les données initiales (déplacement u_0 et vitesse u_1 , l'historique de la vitesse f_0), sur la fonction de relaxation h , sur la fonction de retard distribué μ_2 et sur le coefficient d'amortissement μ_1 .

Nous avons démontré :

- **l'existence globale** d'une solution faible du système considéré dans des espaces fonctionnels convenables.
- **la stabilité exponentielle**, en utilisant la méthode des multiplicateurs, c'est à dire nous avons démontré l'existence de deux constantes positives C et k , dépendantes uniquement des données $(u_0, u_1, f_0, h, \mu_1, \mu_2)$ telle que l'énergie du système vérifie l'estimation

$$E(t) \leq Ce^{-kt},$$

En ce qui concerne **les perspectives**, de nombreuses questions sont encore ouvertes : Il serait intéressant de poursuivre cette étude par les questions suivantes

- Nous avons commencé à étudier le système en présence d'un terme source

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) \\ - \int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma + \mu_1 u_t(x, t) \\ + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds = u(x, t) |u(x, t)|^\gamma, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, t) = \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma \times]0, +\infty[, \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tau_2[, \end{array} \right.$$

Sous les hypothèses suivantes sur le noyau

$$h'(t) \leq -H(h(t)),$$

où H est une fonction convexe au voisinage de zéro. On cherche du résultat de la stabilité forte.

- Il serait intéressant aussi d'étudier le taux de décroissance de la solution d'une plaque viscoélastique avec retard distribué agissant sur le bord :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) \\ - \int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times]0, +\infty[, \\ \frac{\partial u(x, t)}{\partial \nu} + \mu_1 u_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu(s) u_t(x, t - \rho s) ds = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty). \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad \text{dans } \Omega, \\ u_t(x, -t) = f_0(x, t), \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tau_2[, \end{array} \right.$$

- Nous pourrions également étudier la stabilité de l'équation des plaques avec un terme de retard dépendant du temps sur une partie du bord dans le cas non linéaire.
- Nous envisageons d'étudier le comportement asymptotique de la solution du système couplé :

$$\left\{ \begin{array}{l} |u_t(x, t)|^l u_{tt}(x, t) + \Delta^2 u(x, t) - \Delta u_{tt}(x, t) - \int_0^t h(t - \sigma) \Delta^2 u(x, \sigma) d\sigma \\ + \mu_1 u_t(x, t) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu_2(s) u_t(x, t - s) ds + \alpha v = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \\ |v_t(x, t)|^l v_{tt}(x, t) + \Delta^2 v(x, t) - \Delta v_{tt}(x, t) + \alpha u = 0, \quad \text{dans } \Omega \times]0, +\infty[, \end{array} \right.$$

Bibliographie

- [1] C. Abdallah, P. Dorato, J. Benitez-Read, and R. Byrne. *Delayed positive feedback can stabilize oscillatory systems*. In ACC' 1993, 3106–3107, (1993).
- [2] R. A. Adams, , J.F. Fournier, : *Sobolev Spaces*, of Pure and Applied Mathematics (Amsterdam). Elsevier/Academic Press, Amsterdam, 2140 (2003).
- [3] R. A. Adams, Fournier, J.F. John : *Sobolev Spaces*, 2nd edition. Elsevier, Singapore (2009).
- [4] T. A. Apalara, *Well-posedness and exponential stability for a linear damped Timoshenko system with second sound and internal distributed delay*, Electron. J. Differential Equations, **254**, 1-15(2014), .
- [5] V. I. Arnold, : *Ordinary Differential Equations*, 1st ed. Springer, Berlin (1992).
- [6] M. Aassila, M. M. Cavalcanti and J. A. Soriano, *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a starshaped domain*, SIAM J. Control and Optimization 38(5):1581-1602, (2000).
- [7] A. Batkai and B. Farkas. *On the effect of small delays to the stability of feedback systems*. In *Evolution equations : applications to physics, industry, life sciences and economics* (Levico Terme, 2000), volume 55 of Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., Birkhauser, Basel 83–94, (2003).

-
- [8] A. Batkai and S. Piazzera. *Damped wave equations with delay. In Topics in functional differential and difference equations* (Lisbon, 1999), volume 29 of Fields Inst. Commun. Amer. Math. Soc., Providence, RI. 51–61, (2001).
- [9] D. R. Bland, *The Theory of Linear Viscoelastic*. Pergamon Press : Oxford, (1960).
- [10] A. Benaissa, A. Benguessoum, S. A. Messaoudi; *Energy decay of solutions for a wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations **2014** No. 11, 1-13, (2014).
- [11] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Dunod, Paris (1999).
- [12] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti, J. Ferreira, *Existence and uniform decay for nonlinear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Methods Appl. Sci. 24 : 1043-1053, (2001).
- [13] M. M. Cavalcanti , V. N. Domingos Cavalcanti and J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*, Math. Meth. Appl. Sci. (DOI: 10.1002/mma.250), 24 : 1043–1053, (2001).
- [14] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho, and J. A. Soriano: *Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping*. Di . Int. Eqs., 14 : 85-116, (2001).
- [15] A. Chen, *Energy decay estimates and exact boundary value controlability for the wave equation in a bounded domain*, J. Math, pures, Appl. 58. 249-274, (1979).
- [16] A. Chen, *A note on the boundary stabilization of the wave equation*, S.I.A.M. J. Control. opt, 19, 106-113, (1981).
- [17] B. D. Coleman and W. Noll, *Foundations of linear viscoelasticity*. Rev. Modern Phys., 33(2) : 239-249, (1961).

-
- [18] F. Conrad and M. Pierre, *Stabilization of second order evolution equation by unbounded nonlinear feedbacks*, Ann. Inst. Henri Poincaré, vol. 11, 485-515, (1994).
- [19] C. M. Dafermos, *On abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity*, J. Di er. Equations 7: 554-569, (1970).
- [20] C. M. Dafermos, *Asymptotic stability in viscoelasticity*, Arch. Ration. Mech. Anal. 37: 297-308, (1970).
- [21] C. M. Dafermos, *Asymptotic behavior of solutions equations*, in non linear Evolution Equations, M. G. Crandall Ed., Academic press, New York, 103-123, (1978).
- [22] Q. Dai and Z. Yang *Global existence and exponential decay of the solution for a viscoelastic wave equation with a delay* Z. Angew. Math. Phys. **65**, 885D; (2014)
- [23] Destuynder P., *Une théorie asymptotique des plaques minces en élasticité linéaire*; Masson, Paris 1986.
- [24] J. A. Dieudonné ; *Calcul infinitésimal*. Hermann, collection Méthodes, Paris (1980).
- [25] L.C. Evans, *Partial Differential Equations*, Volume 19, American Mathematical Society, (1997).
- [26] M. Fabrizio, C. Giorgi, V. Pata, *A new approach to equations with memory*, Arch. Ration. Mech. Anal. 198 : 189-232, (2010).
- [27] K. Gu, V.L Kharitonov, and J Chen. *Stability of time delay systems*. Boston : Birkhauser, (2003).
- [28] G. H, Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya, *Inequalities*, Cambridge, UK: Cambridge University Press, (1959).
- [29] K. P. Hadeler. *Delay equations in biology*. In *Functional differential equations and approximation of fixed points* (Proc. Summer School and Conf., Univ. Bonn, Bonn, 1978), volume 730 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin, 136–156, (1979).

-
- [30] X. S. Han; M.X. Wang; *Global existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with damping*, Nonlinear Anal. **70**, 3090-3098, (2009).
- [31] A. Haraux, *Comportement à l'infini pour une équation des ondes non linéaires dissipative*. C. R. Acad. Sci. Paris, Sér. A, 287, 507-509, (1978).
- [32] N. Jalili, M. Dadfarnia, F. Hong and S.S. Ge, *Adaptive non model-based piezoelectric control of flexible beams with translational base*. Proceedings of the American Control Conference Anchorage, AKMay 8-1, 5 : 3802–3807, (2002).
- [33] Y.H. Kang, J.Y. Park and J.A. Kim, *A memory type boundary stabilization for an Euler-Bernoulli beam under boundary output feedback control*. J. Korean Math. Soc., 49(5) : 947–964, (2012).
- [34] V. Komornik, *Decay estimates for the wave equation with internal damping*; International Series of Numerical Mathematics, vol, 118, 253-266, (1994).
- [35] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Masson Wiley, Paris (1994).
- [36] J. Lagnese. *Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation*, J. Di , Equations, 50 : 163-182, (1983).
- [37] J. E. Lagnese, *uniforme asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*. Nonlinear, Anal. 16, 35-54, (1991).
- [38] I. Lasiecka, D. Doundykov, *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms*, Nonlinear Anal **64**, 1757-1797, (2006).
- [39] I. Lasiecka and R. Triggiani. *Uniform exponential decay in a bounded region with feedback control in the Dirichlet boundary conditions*, J. Di , Equations, 66 :1340-390, (1987).

-
- [40] P. D. Lax, C. S. Moraetz, R. S. Phillips, *Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of star-shaped obstacle*, Appl. Math, vol 16, 477-489, (1963).
- [41] J. L. Lions, *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Paris, Dunod, (1969).
- [42] H. Logemann, R. Rebarber, and G. Weiss. *Conditions for robustness and nonrobustness of the stability of feedback systems with respect to small delays in the feedback loop*. SIAM J. Control Optim., 34(2): 572–600, (1996).
- [43] S.A. Messaoudi, N. Tatar, *Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation*, Nonlinear Anal. **68** (4), 785-793, (2008).
- [44] Messaoudi S. A. and Tatar N. E., *Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem*. Mathematical Methods in the Applied Sciences, 30 (6) : 665-680, (2007).
- [45] Messaoudi S. A. and Tatar N. E., *Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation*. Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications, 68 (4) : 785-793, (2008).
- [46] N. Mezouar, M. Abdelli and A. Rachah, *Existence of global solutions and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with a delay term in the non-linear internal feedback*, EJDE Vol. **2017** No. 58 : 1-25, (2017).
- [47] S. A. Messaoudi and N. E. Tatar, *Global existence and asymptotic behavior for a nonlinear viscoelastic problem*, Mathematical Sciences Research Journal, vol. 7, no. 4, (2003), 136–149
- [48] S. A. Messaoudi, A. Fareh, N. Doudi, *Well posedness and exponential stability in a wave equation with a strong damping and a strong delay*, J. Math. Phys., **57**, 111501, 1-13, (2016).

-
- [49] J. E. Muñoz Rivera, E. C. Lapa, and R. Barreto, *Decay rates for viscoelastic plates with memory*, Journal of Elasticity, vol. 44, no. 1, 61–87, (1996).
- [50] M.I. Mustafa, M. Kafini *Energy decay for viscoelastic plates with distributed delay and source term*, Z. Angew. Math. Phys. **67** : 35-78, (2016).
- [51] M. Nakao, *Energy decay for the wave equation with a nonlinear weak dissipation*, Differential Integral Equations, vol. 8 , No. 3, 681-688, (1995).
- [52] B. Nakra, *Vibration control in machines and structures using viscoelastic damping*. J. S. V. 211(3), 449–465: (1998).
- [53] S. Nicaise and C. Pignotti. *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks*. SIAM J. Control Optim. 45(5) :1561–1585, (2006).
- [54] S. Nicaise, C. Pignotti, *Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay*, Differential Integral Equations **21** (9-10), 935-958, (2008).
- [55] J. Y. Park, J. R. Kang; *Global Existence and Uniform Decay for a Nonlinear Viscoelastic Equation with Damping*, Acta Appl Math **110**, 1393-1406, (2010).
- [56] M. Rao, *Recent applications of viscoelastic damping for noise control in automobiles and commercial airplanes*. J. S. V. 262 :457–474, (2003).
- [57] D. Roylance: *Engineering viscoelasticity*. Rapport technique, Massachusetts Institute of Technology, (2001).
- [58] Z. Sabbagh, A. Khemmoudj, M. Ferhat, M. Abdelli, *Existence of global solutions and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with internal distributed delay*, Rendiconti del Circolo di Palermo Series 2. Doi: 10.1007/s12215-018-0373-7, 1-22, (2018).

-
- [59] M. L. Santos, J. Ferreira and C.A. Raposo, *Existence and uniform decay for a nonlinear beam equation with nonlinearity of Kirchhoff type in domains with moving boundary*, Abstr. Appl. Anal., **2005** (8), 901-919, (2005).
- [60] S.T. Wu, *Asymptotic behavior for a viscoelastic wave equation with a delay term*, Taiwanese journal of mathematics Vol. **17**, No. 3, 765-784, (2013).
- [61] J. Smoller, *Shock waves and reaction-diffusion systems*, Springer-Verlag, (1983).
- [62] I. H. Suh and Z. Bien. *Use of time delay action in the controller design*, 25 : 600–603, (1980).
- [63] N.-e. Tatar, *A new class of kernels leading to an arbitrary decay in viscoelasticity*. Mediter. J.Math., 10 :213–226, (2013).
- [64] N.-e. Tatar, *Oscillating kernels and arbitrary decays in viscoelasticity*. Math. Nachr., 285 : 1130–1143, (2012).
- [65] S. T.Wu, *General decay of solutions for a viscoelastic equation with nonlinear damping and source terms*, Acta Mathematica Scientia B, vol. 31, no. 4, pp. 1436–1448, (2011).
- [66] Z. Yang, *Existence and energy decay of solutions for the Euler Bernoulli viscoelastic equation with a delay*, Z. Angew. Math. Phys. **66**, 727-745, (2015).
- [67] M. Tucsnak, *Boundary stabilization for the stretched string equation*, Differential Internal Equations 6, 925-935, (1993).
- [68] C. S. Moraetz, *Exponential decay of solutions of the wave equation*, Comm. Pure. Appl. Math, vol 19 :539-444, (1966).
- [69] C. Wilcox, *The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary*, Amer. Math. Soc. Not. Abstract 564-20, Voc 6, (1959).