N° d'ordre : 14 /2002-M / MT

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie
Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques
Département d'Algèbre et Théorie des Nombres

THESE

Présentée par

BENAZZOUZ FADILA

Pour l'obtention du grade de : **MAGISTER**
En : **MATHEMATIQUES**
Spécialité : **ALGEBRE ET THEORIE DES NOMBRES**

THEME

FILTRATION GEVREY SUR LE GROUPE DE PICARD-VESSIOT D'UNE EQUATION DIFFERENTIELLE ORDINAIRE IRREGULIERE

Soutenue le 17 septembre 2002
Devant le jury composé de :

M^{R} ***M.ZITOUNI*** , professeur , l'USTHB . Président .
M^{R} ***K.BETINA*** , professeur , l'USTHB . Directeur de thèse .
M^{R} ***A.AFFANE*** , professeur , l'USTHB . Examinateur.
M^{R} ***A.KESSI*** , professeur , l'USTHB . Examinateur.

Sommaire

CHAPITRE IV : CALCUL DU GROUPE DE PICARD - VESSIOT ET DE SA FILTRATION GEVREY .

INTRODUCTION

On se proposons d'étudier le groupe de Picard-Vessiot de systèmes différentiels homogènes de la forme $\Delta = \frac{d}{dx} - A$*, avec* $A \in \mathrm{End}(n\,;K)$ *où* K *est le corps des germes de fonctions méromorphes au voisinage de 0* $\in \forall$*. Ce groupe ne change pas si l'on remplace* Δ *par* $\Delta^P = P^{-1}\Delta P$ *, avec* $P \in GL(n\,;K)$ *(l'étude de* Δ *est équivalente à celle d'un opérateur d'ordre n :* $D \in K[\frac{d}{dx}]$ *) donc le groupe de Picard - Vessiot de* Δ *est isomorphe à celui de D . Nos outils essentiels pour l'étude du groupe de Picard-Vessiot de* Δ *seront les estimations Gevrey (RAMIS [10] , [11]) et la k-sommabilité [9] .*

Dans le chapitre I on donne des généralités indépendantes de toute référence aux équations différentielles . Les théorèmes I.3.4 , I.3.5 vont jouer un rôle essentiel pour le calcul du groupe de Picard-Vessiot de $\hat{K}$ *associé à* Δ *.*

Dans le chapitre II ,on rappelle la forme de la solution formelle d'une équation différentielle linéaire analytique ,étudiée par de nombreux auteurs depuis le début du siècle et nous montrons en particulier que dans le cas général , il est nécessaire de faire appel à plusieurs procédés de sommation ; pour cela on donne un résultat de RAMIS ([12] , théorème II.4.1) qui va jouer un rôle essentiel dans la suite . Les résultats de ce chapitre seront utilisés pour calculer le groupe de Picard-Vessiot et sa filtration Gevrey pour une équation différentielle irrégulière .

Dans le chapitre III , on rassemble les résultats sur les corps différentiels dont on a besoin dans la suite . Les points essentiels sont la proposition III.6.6 et le théorème III.6.2 .

Dans le chapitre IV ,on montre , en utilisant les résultats du chapitre I , II et III que , le groupe de Picard-Vessiot d'un germe d'équation différentielle irrégulière et sa filtration Gevrey se calculent à partir des multiplicateurs de Stokes et du groupe de Picard-Vessiot formel . D'après le théorème de Cauchy , il existe une solution fondamentale F_V *de* Δ *sur* V(V *est un germe de secteur ouvert à l'origine) à coefficients dans* a(V) *(L'ensemble des fonctions holomorphes sur* V *) ; ainsi* K (F_V) *est une extension de Picard-Vessiot de* K *associée à* Δ *. Le lemme III.6.3 assure l'existence d'un surcorps différentiel de* K *contenant à la fois* $\hat{\Im}$ *et* $m(V)$ *, le théorème III.6.2 montre que les extensions de Picard-Vessiot* $K(\hat{F})$ et $K(F_V)$ *associées à* Δ *sont isomorphes .*

L'un des résultats essentiels du chapitre IV est l' existance des manières d'incarner K(Δ) *en un sous- corps différentiel de* m(V) *; ces différentes manières induisent les sommes naturelles de* $\hat{F}$ *obtenues au théorème II.4.1(ii) et on passe d'une manière à une autre par un élément du groupe engendré par la monodromie formelle M et les matrices de Stokes , le groupe s'identifie ainsi à un sous groupe du groupe de Picard-Vessiot G(Δ) .*

CHAPITRE –I-

LA THEORIE ASYMPTOTIQUE ET LES SERIES k-SOMMABLES :

1. SERIES GEVREY D'ORDRE S :

Soit s un nombre réel , on définie la fonction :

$\varphi_S : \forall[[x]] \to \forall[[x]]$

$$\sum_{n\geq o} a_n x^n \to \varphi_S\left(\sum_{n\geq o} a_n x^n \right) = \sum_{n\geq o} \frac{a_n}{(n!)^{s-1}} x^n$$

Définition I.1.1 :

Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq o} a_n x^n \in \forall[[x]]$ .La série $\hat{f}$ est Gevrey d'ordre s , s'il existe deux nombres réels positifs c et A tels que :

$$|a_n| < c\,(n!)^{S-1} A^n \qquad ; \text{pour tout } n \in \angle \qquad (1) \quad .$$

On note $\forall[[x]]_S$ l'ensemble des ces séries .

Proposition I.1.2 :

Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq o} a_n x^n \in \forall[[x]]$, la série $\hat{f}$ est Gevrey d'ordre s , si $\varphi_s(\hat{f})$ est dans $\forall\{x\}$(l'anneau des séries convergentes) .

Proposition I.1.3 :

1) $\forall[[x]]_S$ est une $\forall$- algèbre stable par dérivation .

2) Pour $s>s'$, l'anneau des séries Gevrey d'ordre s' ($\forall[[x]]_{S'}$)est inclus dans l'anneau des séries Gevrey d'ordre s ($\forall\,[[x]]_S$) .

Preuve :

1) $\forall\,[[x]]_S$ est une $\forall$-algèbre , munie d'une opération ;

$$\forall[[x]]_S \times \forall\,[[x]]_S \longrightarrow \forall[[x]]_S$$

$$(\hat{f}\ ,\ \hat{g}\ ) \longrightarrow \hat{f}\cdot\hat{g} \qquad \text{vérifiant :}$$

1. Pour toutes $\hat{f}$, $\hat{g}$ et $\hat{h}$ dans $\forall[[x]]_S$:

$$\hat{f}\,.(\hat{g}+\hat{h}) = \hat{f}.\hat{g} + \hat{f}\cdot\hat{h} \qquad (2)$$

$$(\hat{f}+\hat{g})\cdot\hat{h} = \hat{f}\cdot\hat{h} + \hat{g}\cdot\hat{h} \qquad (3)$$

2. Pour toutes $\hat{f}$, $\hat{g}$ dans $\forall[[x]]_S$ et α dans $\forall$

$$\alpha(\hat{f}.\hat{g}) = (\alpha\,\hat{f})\,\hat{g} = \hat{f}\,(\alpha\,\hat{g}) \qquad (4)$$

Soit $\hat{f}$ dans $\forall[[x]]_S$, donc il existe deux nombres réels positifs c et A avec :

$$|a_n| < c\,(n!)^{S-1} A^n \quad , \quad \text{pour tout } n \in \angle\ .$$

$$\hat{f}\,(x) = \sum_{n\geq o} a_n x^n\ ;\ \hat{f}'\,(x) = \sum_{n\geq 1} a_n n x^{n-1} = \sum_{n\geq 0}(n+1)\,a_{n+1}x^n .$$

on pose : $b_n = (n+1)\, a_{n+1}$

$$|b_n| = |\,n+1\,|\ |a_{n+1}| < (n+1)\ c\ (n+1)!^{S-1} A^{n+1}$$

donc :

$$|b_n| < (n)!^{S-1}\ c'\ A'^n \quad \text{où } A' = A \text{ et } c' = e^S A\, c\ .$$

D'où : $\hat{f}'\,(x)$ est une série Gevrey d'ordre s .

2) Soit $\hat{f}(x)$ dans $\forall\,[[x]]_{S'}$; avec $\hat{f} = \sum_{n\geq o} a_n x^n$ donc il existe deux nombres réels positifs c et avec :

$|a_n| < c(n!)^{S'-1} A^n$; pour tout $n \in \angle$.

comme s' < s alors $(n!)^{S'-1} < (n!)^{S-1}$.
Donc il existe deux nombres réels positifs c et A tels que :

$$|a_n| < c\,(n!)^{S-1} A^n \text{ ; pour tout } n \in \angle \qquad (7) .$$

c'est à dire $\hat{f}$ est dans $\forall[[x]]_S$
d'où

$$\forall[[x]]_S \supset \forall[[x]]_{S'} \text{ ; pour tout } s > s' .$$

Exemples :

1. pour s =1 ; on a :

$$\varphi_1 : \forall[[x]] \to \forall[[x]]$$

$$\varphi_1\Big(\sum_{n\geq o} a_n x^n\Big) = \sum_{n\geq o} a_n x^n .$$

donc :

$$\forall[[x]]_1 = \forall\{x\} \qquad (8) .$$

2. d'après la proposition I.1.3 (2) on a :
s > s' > 1 donne :

$$\forall[[x]]_S \supset \forall[[x]]_{S'} \supset \forall\{x\} \qquad (9).$$

3. pour $s = +\infty$; on a :

$$\forall[[x]]_{+\infty} = \forall[[x]] \qquad \text{(par conventions) .}$$

4. et pour $s = -\infty$; on a :

$$\forall[[x]]_{-\infty} = \forall[x] .$$

Ainsi : $\forall[x] \subset \forall\{x\} \subset \forall[[x]]_{S'} \subset \forall[[x]]_S \subset \forall[[x]]$; $\forall\, s > s' > 1$.

Proposition I.1.4 :

On dira également qu'une série de Laurent $\hat{f} \in \forall[[x]][x^{-1}]$ est Gevrey d'ordre s ; s'il existe deux nombres réels positifs c et A tels que :

$$|a_n| < c\,(n!)^{S-1}\,A^n \qquad ;\ \text{pour tout}\ \ n \in \angle \ .$$

On note $\hat{K}_S$ l'ensembles des ces séries .

Définition I.1.3 :

1) On appelle secteur pointé en 0 de direction α d'ouverture θ et de rayon r dans $\forall$, et on note $S = S(\alpha, \theta, r)$ l'ouvert :

$$S = \{\, x \in \forall \ / -(\theta/2) < \arg(x) - \alpha < \theta/2 \ \text{et}\ |x| < r \,\} .$$

2) Un tel secteur S est dit strict si son ouverture θ vérifie $\theta < 2\pi$.

3) Un secteur W sera dit sous-secteur de S et on notera $W \subset\subset S$ si :

$$W \subset S \ \text{avec}\ S = S(\alpha, \theta, r)\ \text{et}\ W = S(\alpha, \theta', r') .$$
$$\theta' < \theta ,\ r' < r .$$

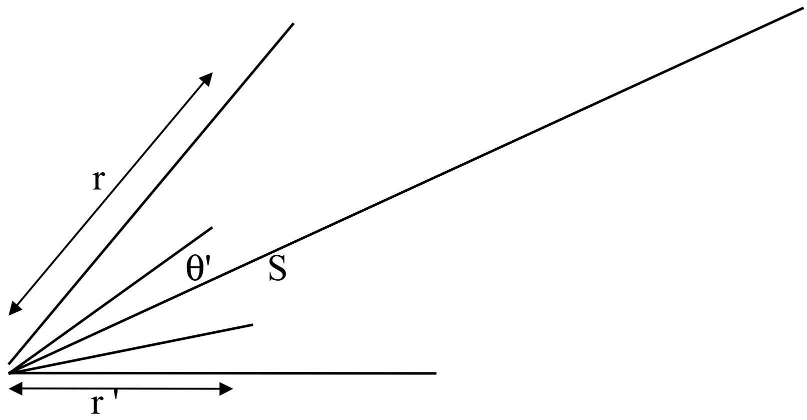

Figure -1-

2. DEVELOPPEMENTS ASYMPTOTIQUES GEVREY D'ORDRE S .

Définition I.2.1:

Soit V un secteur ouvert ; on notera a(V) l'ensemble des fonctions $f : V \to \forall$ holomorphes sur V.

Définition I.2.2 :

Soient $s > 1$, V un secteur ouvert de sommet l'origine de $\forall$.

Soit $f \in a(V)$ et $\hat{f} \in \forall[[x]]$; $\hat{f}(x) = \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p$. On dit que f admet $\hat{f}$ pour **développement asymptotique Gevrey d'ordre s en 0** si pour tout sous-secteur fermé W de V ($W \subset\subset V$) on a :

$$|x^{-n}| \, \left| f(x) - \sum_{p=0}^{n-1} a_p x^p \right| < c_w (n!)^{S-1} A^n_w ;$$

pour tout $x \in W-\{o\}$, $c_w > 0$ et $A_w > o$ convenables ($n \in \angle$) .

Dans les conditions de la définitions nous noterons $f \in A_S(V)$.

- Plus généralement on dit que $f \in a(V)$ admet $\hat{f} \in \hat{K}$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre s , s'il existe $m \in \angle$ tel que : $x^m f \in \forall[[x]]$ et $x^m f$ admette $x^m \hat{f}$ comme développement asymptotique Gevrey d'ordre s . On utilisera la notation : $f \in A_S(V)[x^{-1}]$.

<u>Proposition I.2.3:</u> [9]

Soit V un secteur ouvert de sommet l'origine dans $\forall$.

i) Les applications:

$$As(v) \xrightarrow{J} \forall[[x]]_S$$

$$As(v)\left[x^{-1}\right] \xrightarrow{J} \hat{K}$$

sont des homorphismes de @- algèbre avec $@ = K\left[\frac{d}{dx}\right]$(le corps des opérateurs différentiels à coefficients dans K

ii) Si l'ouverture de V est $> \pi / k$, alors ces applications sont injectives.

3. <u>SERIES k-SOMMABLES :</u>

<u>Définition I.3.1 :</u>

Soit $k > 0$. Soient $\hat{f} \in \forall[[x]]$ et α une direction issue de l'origine .On dira que $\hat{f}$ est **k-sommable** dans la direction α s'il existe un secteur ouvert V de sommet l'origine et de bissectrice α , et $f \in A_S(v)$ tel que $\hat{f} = J(f)$.

On dira que f est la somme de $\hat{f}$ dans la direction α .

Définition I.3.2 :

Soient $k > 0$, $s = 1 + 1/k$. Soit $\hat{f} \in \forall[[x]]$. On dira que $\hat{f}$ est k-sommable si elle est k-sommable dans toutes les directions sauf pour un nombre fini d'entre elles .

On notera : $\forall\{x\}_S$ l'ensemble des séries k-sommables et $\Sigma(\hat{f})$ l'ensemble des directions pour les quelles $\hat{f}$ n'est pas k-sommable .

- Plus généralement on posera : $K_S = \forall\{x\}_S[x^{-1}]$

Proposition I.3.3 : [9]

i) Si $\hat{f} \in \forall\{x\}_S$ ($\hat{f}$ est k-sommable) et si $\Sigma(\hat{f}) = \phi$ alors :
$\hat{f} \in \forall\{x\}$ ($\hat{f}$ est une série convergente).

ii) On a les inclusions strictes de $\forall$-algèbre stables par dérivations:

$$\forall\{x\} \subset \forall\{x\}_S \subset \forall[[x]]_S .$$

Théorème I.3.4 :

Soit $k > 0$ et soit α une direction issue de l'origine . Soient $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m \in \hat{K}$ des séries k-sommables dans la direction α .
Soient $f_1, f_2, \ldots, f_m$ leurs sommes respectives dans cette direction α définies sur un même secteur ouvert V convenable , de bissectrice α , et d'ouverture $> \pi / k$.

Soit $K<\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m>$ le sous-corps de $\hat{K}$ engendré par $\hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m$, et soit $K < f_1, f_2, \ldots, f_m >$ le sous corps de $\mathfrak{m}$ (V) engendré sur K par $f_1, f_2, \ldots, f_m$.
Alors l'application :

$$K < f_1, f_2, \ldots, f_m > \longrightarrow K < \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m >$$

est un isomorphisme de corps différentiel.

($\mathfrak{m}$(V) est le corps différentiel des fonctions méromorphes sur V).

Preuve du théorème I.3.4 :

$\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$,……..., $\hat{f}_m \in \hat{K}$ sont des séries k-sommables c'est à dire que leurs sommes f_1 , f_2 ,….., $f_m \in A_S(v)\,[x^{-1}]$.

Donc $K < f_1, f_2, \ldots, f_m >$ est un sous-corps de $A_S(v)\,[x^{-1}]$

et $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$,……., $\hat{f}_m$ sont k-sommables alors $\hat{f}_1$, $\hat{f}_2$,……., $\hat{f}_m \in \hat{K}_S$,

c'est à dire que $K< \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m >$ est un sous-corps de $\hat{K}_S$.

D'après la proposition I .2.3 , l'application :

$A_S(v)\,[x^{-1}] \rightarrow \hat{K}_S$ est un homomorphisme injectif de @- algèbre ,donc

l'application :

$$K < f_1, f_2, \ldots, f_m > \longrightarrow K< \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m >$$

est un homorphisme injectif de @- algèbre et comme par construction cette application est surjective ($\hat{f}_i$ est k-sommable) donc il existe $f_i \in A_S(v)\,[x^{-1}]$ tel que $\hat{f}_i = J(f_i)$ ($i = 1, \ldots, m$) .

donc l'application :

$K < f_1, f_2, \ldots, f_m > \longrightarrow K < \hat{f}_1, \hat{f}_2, \ldots, \hat{f}_m >$ est un isomorphisme de corps différentiel .

Théorème I.3.5 :

Soit $1< s < s_1$; alors :

i) $\forall\{x\}_{S1} \cap \forall\,[[x]]_S = \forall\{x\}$.

ii) $\forall\{x\}_{S1} \cap \forall\,\{x\}_S = \forall\{x\}$.

- Avant d'aborder la preuve , rappelons d'abord quelques propriétés des fonctions entières.

Définition I.3.6 :

Soit φ une fonction entière , soit $\rho > 0$ et $b > 0$. On dit que φ est à **croissance exponentielle** d'ordre au plus ρ , et de type fini au plus b (pour ρ fixe) , s'il existe $c > 0$ tel que :

$$|\varphi(t)| < c \exp (b\,|t|^{\rho}) \text{ ; pour tout } t \in \forall \text{ .}$$

Définition I.3.7 :

Soit φ une fonction entière . Soit α une direction issue de l'origine .
Soient $k > 0$, et $a_\alpha > o$, on dit que φ est à croissance exponentielle d'ordre au plus k (pour k fixé) et de type fini au plus a_α le long de α s'il existe $c_\alpha > 0$ tel que :

$$|\varphi(t)| < c_\alpha \exp (a_\alpha\,|t|^{k}) \text{ ; pour tout } t = r\, e^{i\alpha} ; r \in 3^{+} \text{ .}$$

Remarque :

Soit $\hat{f}(x) = \sum_{n\geq o} b_n x^n \in \forall\,[[x]]$; f la somme $\hat{f}$ dans la direction α .

On a la formule suivante :

$$\frac{1}{\rho} = \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{-\log |b_n|}{n \log n} \right) \quad \text{qui définit l'ordre } \rho \text{ de } f \ (\rho \text{ étant fixé })$$

ou ρ décrit $]\,0^+, +\infty\,[\, \cup\,]\,-\infty\,, 0^-\,[\,/\, \{^+_-\,\infty\}$ et le type τ de f décrit $[-\infty\,, +\infty]$.

4. LA TRANSFORMEE DE BOREL - LAPLACE .

Soit $\hat{f} = \sum_{n\geq o} a_n x^n \in \forall\{x\}$ .On obtient par un changement de variable, la somme généralisée de Borel de $\hat{f}$:

$$S(\hat{f})(x) = a_0 + \int_\alpha e^{-\zeta/x} \Big(\sum_{n\geq 0} a_{n+1} \frac{\zeta^n}{n!} \Big) d\zeta \quad .$$

Où l'on intègre suivant la demi-droite α issue de 0 dans la direction de x .

La transformée de Borel formelle :

La transformation formelle $\hat{f} = \sum_{n\geq o} a_n x^n \rightarrow \hat{B}(\hat{f}) = \sum_{n\geq o} a_n x^n / n\,!$

et appelé transformée de Borel formelle de $\hat{f}$.

Définition I.4.1 :

Soit f une fonction holomorphe sur un secteur $S(\alpha,\theta,r)$ d'ouverture $\theta > \pi$ et bornée à l'origine sur tout sous-secteur . On appelle transformée de Borel de f dans la direction α et on note $B_\alpha f$ la fonction complexe $g(\xi)$ définie sur la demi - droite de direction α par :

$$g(\zeta) = B_\alpha f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial S} e^{\zeta/x} f(x) \frac{dx}{x^2} \quad .$$

On définit donc la transformée de Borel d'ordre k par :

$$g(\zeta) = B_\alpha^k f(\zeta) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\partial S} e^{(\zeta/x)^k} f(x) \frac{dx}{x} \quad .$$

où l'intégration se fait le long du contour (orienté) ∂S d'un sous-secteur $S=S(\alpha, \pi+\theta_1, r')\subset\subset S(\alpha, \theta, r)$ de même direction et d'ouverture $> \pi$.

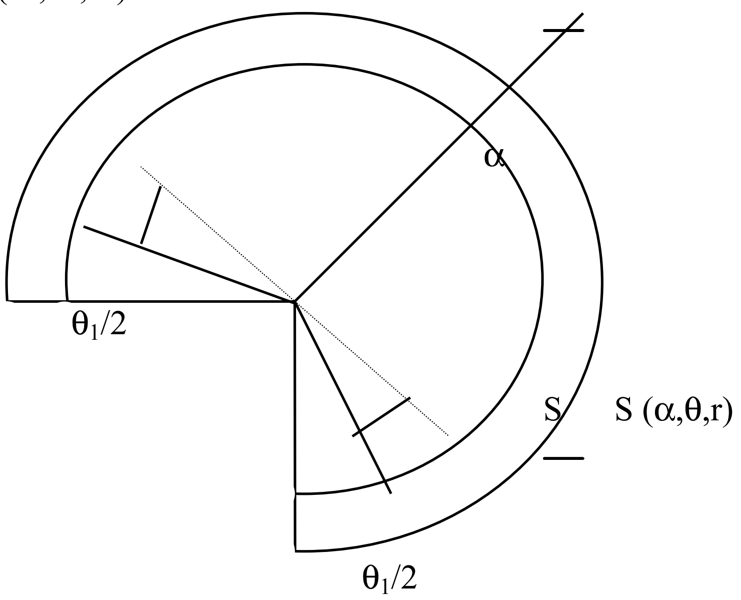

Figure –2-

Définition I.4.2 :

Soit g une fonction complexe , disons continue , définie le long d'une demi-droite α , bornée à l'origine et à croissance au plus exponentielle d'ordre 1 à l'infini ($g(\xi) \leq c \exp(M |\xi|)$).

On appelle transformée de Laplace de g dans la direction α et on note $L_\alpha g$ la fonction f(x) définie par :

$$f(x) = L_\alpha g(x) = \int_\alpha e^{-\zeta/x} g(\zeta) d\zeta \quad .$$

Elle est définie holomorphe sur l'ouvert sectoriel de direction α et d'ouverture π : $U = S(\alpha , \pi) = \{x \in \forall \ / \ \operatorname{Cos} (\arg x - \alpha) \succ \frac{M}{x} \}$.

Et de même , si g est à croissance au plus exponentielle d'ordre k, on définit la transformée de Laplace d'ordre k par :

$$f(x) = L_\alpha^k g(x) = \int_\alpha e^{-(\zeta/x)^k} g(x) d(\frac{\zeta}{x})^k \quad .$$

L'isomorphisme de Borel - Laplace :

Les transformée de Borel et de Laplace d'ordre k induisent des isomorphismes $\forall$- linéaires inverses l'un de l'outre entre :

$$\begin{bmatrix} \text{Les fonctions f holomorphes} \\ \text{sur un ouvert sectoriel de} \\ \text{direction } \alpha \text{ et d'ouverture } \rangle \\ \pi / k \text{ et bornée à l'origine .} \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \text{Les fonctions g holomorphes sur} \\ \text{un secteur infini de direction } \alpha \text{ à} \\ \text{croissance au plus expoentille d'or -} \\ \text{dre k à l'infini et bornées à l'origine .} \end{bmatrix}$$

les transformations formelles associées sont :

$$\hat{f} = \sum_{n \geq o} a_n x^n \longleftrightarrow \hat{\varphi}(t) = \sum_{n \geq o} \frac{a_n}{\Gamma(1 + 1/k)} t^n$$

Si k_1 , k_2 > 0 vérifient : $\frac{1}{k} = \frac{1}{k_1} - \frac{1}{k_2}$: alors on a la correspondance suivante :

1. Pour $k_1 > k > 0$: (s-1= 1/k , s_1 -1= 1/k_1 et s_2-1 = 1/k_2)

Les fonctions φ entières à croissance exponentielle d'ordre – s_2 $\longleftrightarrow$ les séries $\hat{f}$ Gevrey d'ordre s_1 .

2. Pour $k > k_1 > 0$:

Les fonctions φ Gevrey d'ordre s_2 $\longleftrightarrow$ les fonctions $\hat{f}$ Gevrey d'ordre s_1 . à l'origine

Proposition I.4.3 :

Soit $\hat{\varphi} = \sum_{n\geq 0} b_n t^n$; une fonction entière , supposons que :

$$\frac{1}{\rho'} = \liminf_{n\to+\infty} \left(\frac{-\log|b_n|}{n \log n} \right) > 0 \quad \text{alors :}$$

pour tout $\rho > \rho'$, φ est à croissance exponentielle d'ordre au plus ρ est de type fini .

- La démonstration du théorème (I.3.5) est basée sur les deux lemmes suivants:

Lemme I.4.4 :

Soient $k > 0$ et $\rho > 0$. Soit $\Sigma = \{ \alpha_1, \alpha_2 ,\ldots\ldots, \alpha_n \}$ un ensemble fini de directions issues de l'origine . Soit φ une fonction entière satisfaisant les conditions suivantes :

i) φ est à croissance exponentielle d'ordre au plus ρ , et de type fini .

ii) Pour toute direction issue de l'origine $\alpha \notin \Sigma$, φ est à une croissance exponentielle d'ordre au plus k , et de type fini le long de α .

alors :

il existe $b > 0$ tel que φ soit à croissance exponentielle d'ordre au plus k et de type fini au plus b .

Preuve du lemme I.4.4 :

On Suppose que $\rho > k$. Soit φ une fonction entière satisfaisant les conditions (i) et (ii) . Soit S^1 le cercle des directions issues de l'origine ,

soit $\alpha \in S^1$. On choisit θ_1 et θ_2 tel que $\theta_1 < \alpha < \theta_2$.

$$\theta_1 - \theta_2 < \pi / \rho < \pi / k \text{ ; (pour } \rho > k \text{) .}$$

et que :

$$[\, \theta_1 , \theta_2 \,] \cap \Sigma = \{\alpha\} .$$

Pour $a > 0$ et $\arg(t) \in [\, \theta_1 , \theta_2 \,]$; on définit $h_a(t)$:

$$h_a(t) = \exp\left(- a \left[\frac{\exp \frac{ik}{2} (\theta_1 + \theta_2)}{\cos \frac{k}{2} (\theta_1 - \theta_2)} t^k \right] \right) .$$

Le module de $h_a(t)$:

$$\left| h_a(t) \right| = \exp\left(- a \operatorname{Re}\left[\frac{\exp \frac{ik}{2} (\theta_1 + \theta_2)}{\cos \frac{k}{2} (\theta_1 - \theta_2)} t^k \right] \right)$$

$$t = |t| \exp(i \arg t) \qquad \text{donc : } t^k = |t|^k \exp(i k \arg t)$$

$$\left| h_a(t) \right| = \exp\left(- a \frac{\cos k \left(\frac{(\theta_1 + \theta_2)}{2} - \arg t \right)}{\cos \frac{k}{2} (\theta_1 - \theta_2)} |t|^k \right) .$$

1. pour $\arg t \in [\, \theta_1 , \theta_2 \,]$ on a :

$$| h_a(t) | \leq \exp(- a |t|^k) \leq 1 \qquad (1) .$$

Et

$$|(h_a(t))^{-1}| \leq \exp(c |t|^k) \text{ ; avec } \quad c = \frac{a}{\cos \frac{k}{2} (\theta_1 - \theta_2)}$$

2. Et pour $\arg(t) = \theta_1$ ou θ_2 on a :

$$h_a(t) = \exp(-a\,|t|^k) \qquad (2).$$

d'après la condition (i) il existe $c_1 > 0$ et $b_1 > 0$ tels que :

$$|\varphi(t)| < c_1 \exp(b_1\,|t|^p) \;; \quad \text{pour tout } t \in \forall \qquad (1')\ .$$

Et d'après la condition (ii) il existe $c_2 > 0$ et $a > 0$ tels que :

$$|\varphi(t)| < c_2 \exp(a\,|t|^k) \;; \quad \text{pour tout } t \in \forall \qquad (2')$$

avec $\arg(t) = \theta_1$ ou θ_2).

On pose $\psi = h_a\,\varphi$ donc :

$$\varphi(t) = \psi(t)\, h_a^{-1}(t) \qquad (3).$$

de (1) et (1') on a:

$$|\psi(t)| \le c_1 \exp(b_1\,|t|^p) \;; \quad \text{pour tout } t \in \forall \qquad (3').$$

de (2) et (2') on a :

$$|\psi(t)| \le c_2 \;; \quad \text{pour } \arg(t) = \theta_1 \text{ ou } \theta_2 \quad (3'').$$

De (3), (3') et (3'') on a :

$$|\varphi(t)| \le c_2 \exp(c\,|t|^k) \text{ pour tout } t \in \forall \text{ avec } \arg(t) \in [\theta_1, \theta_2]\ .$$

c'est à dire φ est à croissance exponentielle d'ordre au plus k .

<u>Lemme I.4.5 :</u>

Soit k, $k_1 > 0$, $k_1 < k$; Soient $\hat{f}(x) = \sum_{n \ge o} a_n x^n$ et $\hat{\varphi} = \sum_{n\ge 0} \dfrac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k_1})} t^n$

on suppose que $\hat{f} \in \forall\ [[x]]_s \left(s - 1 = \dfrac{1}{k}\right)$.

Soit $\rho > \dfrac{k\,k_1}{k - k_1}$; alors la somme φ de la série $\hat{\varphi}$ est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre au plus ρ et de type fini .

Preuve du lemme I.4.5 :

On a $\hat{f}(x) \in \forall [[x]]_S$, donc il existe c > 0 et A > 0 tels que :

$$| a_n | < c\,(n!)^{1/k} A^n \qquad \text{pour tout } n \in \angle\ .$$

Notons $b_n = \dfrac{a_n}{\Gamma\left(1 + \dfrac{n}{k_1}\right)}$, $\hat{\varphi} = \sum\limits_{n \geq o} b_n x^n$.

le comportement de la fonction Γ quand $x \to +\infty$ est décrit par la formule de Stirling suivante :

$$\Gamma(1+x) \cong \left(\frac{x}{\exp}\right)^x \sqrt{2\pi x}\ . \ (x \to +\infty)$$

On a : $\dfrac{1}{\Gamma(1 + x)} < \dfrac{1}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}$.

$$\frac{1}{\Gamma(1 + x)} < \frac{1}{x^x e^{-x}\sqrt{2\pi x}}$$

$$< \frac{x^{-x}e^x}{\sqrt{2\pi x}}\ .$$

donc :

$$\frac{1}{\Gamma(1 + n/k_1)} < \frac{\left(\frac{n}{k_1}\right)^{-n/k_1} e^{-n/k_1}}{\sqrt{2\pi n/k_1}}$$

$$|b_n| < \frac{|a_n|\left(\frac{n}{k_1}\right)^{-n/k_1} e^{-n/k_1}}{\sqrt{2\pi x n/k_1}}$$

$$|b_n| \quad < \frac{C(n!)^{1/k} A^n \left(\dfrac{n}{k_1}\right)^{-n/k_1} e^{-n/k_1}}{\sqrt{2\pi \dfrac{n}{k_1}}}$$

$$|b_n| \quad < \frac{C(n!)^{1/k} n^{-n/k_1} e^{-n/k} A^n k_1{}^{n/k}}{\sqrt{2\pi \dfrac{n}{k_1}}}$$

$$|b_n| \quad < \frac{C}{\sqrt{2\pi \dfrac{n}{k_1}}} \left[(e\ k_1)^{1/k_1}\right]^n (n^n)^{1/k} \quad (n^n)^{-1/k_1} \quad ; (n\,! < n^n)$$

on pose : $c' = \dfrac{C}{\sqrt{2\pi \dfrac{}{k_1}}}$: $A' = (k_1 e)^{1/k}{}_1$.

$$|b_n| < C' A'^n \, n^{\,n(1/k \ - \ 1/k_1)} \quad . \qquad \text{pour tout} \quad k > k_1$$

soit :

$$\frac{1}{\rho'} = \liminf_{n \to +\infty} \left(\frac{-\ \log |b_n|}{n \ \log\ n} \right) \qquad (1)$$

on a :

$$\frac{1}{|b_n|} \geq \frac{1}{C' A' n^{n(1/k \ - \ 1/k_1)}}$$

$$\log\left(\frac{1}{|b_n|}\right) \geq -\log C' \ - \ n\log A' \ \ - n\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k_1}\right)\log n$$

$$\frac{\log\left(\dfrac{1}{|b_n|}\right)}{n \ \log n} \geq \frac{-\log C'}{n \log n} - \frac{\log A'}{\log n} - \frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} \qquad (2)$$

de (1) et (2) on a :

$$\frac{1}{\rho} \geq \frac{1}{k} - \frac{1}{k_1} = \frac{k\,k_1}{k - k_1} \quad ; \qquad \text{c'est à dire :}$$

$$\rho' \leq \frac{k\,k_1}{k-k_1} \quad .$$

D'après la proposition (I..4.3) la fonction entière φ est a croissance exponentielle d'ordre au plus ρ', pour $k_1 < k$.

Preuve du théorème I.3.5 :

i) Soi t $\hat{f} \in \forall\{x\}_{S1} \cap \forall[[x]]_S$; $\hat{f} = \sum_{n\geq o} a_n x^n$.

on lui associe $\hat{\varphi}(t) = \sum_{n\geq 0} \frac{a_n}{\Gamma(1+\frac{n}{k})} t^n$

la série $\hat{\varphi}(t)$ est convergente et sa somme est une fonction entière à croissance exponentielle d'ordre ρ ($\rho > k\, k_1 / (k - k_1)$) et de type fini d'après la condition $\hat{f} \in \forall\ [[x]]_S$ et le lemme (I.4.5) . D'après le lemme (I.4.4) et du fait que $\hat{f} \in \forall\ \{x\}_{S1}$, φ est à croissance exponentielle d'ordre $k_1 = (1 / s_1 - 1)$. Donc φ est à croissance exponentielle d'ordre $\leq k_1$ et de type fini dans tout les directions , c'est à dire $\hat{f}$ est k-sommable dans tout les directions (i.e $\Sigma(\hat{f}) = \varnothing$) .Et donc $\hat{f} \in \forall\{x\}$ (d'après la proposition I.3.3 (i)) , d'où

$$\forall\{x\}_{S1} \cap \forall[[x]]_S \subset \forall\{x\}.$$

Et d'après la proposition I.3.3 (ii) on a :

$$\begin{cases} \forall\{x\} \subset. \forall\{x\}_{S1} \subset \forall\ [[x]]_{S1} . \\ \text{Et} \\ \forall\{x\} \subset. \forall\{x\}_S \subset \forall\ [[x]]_S . \end{cases}$$

$$\begin{cases} \forall\{x\} \subset \forall\ [[x]]_{S1} \\ \text{Et} \\ \forall\{x\} \subset. \forall\{x\}_S \end{cases}$$

donc :

$$\forall\{x\} \subset \forall\{x\}_{S1} \cap \forall[[x]]_S .$$

D'où :

$$\forall\{x\} = \forall\{x\}_{S1} \cap \forall [[x]]_S \qquad \forall s_1 > s > 1 .$$

ii) $\forall\{x\} = \forall\{x\}_{S1} \cap \forall \{x\}_S$?

Soit $\hat{f} \in \forall\{x\}_{S1} \cap \forall\{x\}_S$ alors ;

$$\begin{cases} \hat{f} \in \forall\{x\}_S \\ \text{et} \\ \hat{f} \in \forall\{x\}_{S1} \end{cases} \qquad \begin{cases} \hat{f} \in \forall[[x]]_S \\ \text{et} \\ \hat{f} \in \forall\{x\}_{S1} \end{cases} \qquad \text{c'est à dire :}$$

$$\hat{f} \in \forall\{x\}_{S1} \cap \forall[[x]]_S \subset \forall\{x\}.$$

donc : $\forall\{x\}_{S1} \cap \forall\{x\}_S \subset \forall\{x\}.$

d'où :

$$\forall \{x\}_{S1} \cap \forall \{x\}_S = \forall\{x\} ; \qquad \text{pour } 1 < s < s_1 .$$

CHAPITRE -II -

PHENOMENE DE STOKES A PLUSIEURS NIVEAUX ET SOMMABILITE

1. EQUATIONS DIFFERENTIELLES ORDINARES DANS LE CHANP COMPLEXE

Soit $r > 0$; $D_r^* = \{ x \in \forall ;\ 0 < | x | < r \}$. Et soit $D \in$ @ un opérateur différentiel d'ordre n de la forme :

(1) $$D = \left(\frac{d}{dx}\right)^n + a_{n-1}\left(\frac{d}{dx}\right)^{n-1} + \ldots + a_0 \quad ; \text{ avec } \quad a_i \in K \ .$$

Dans le cas d'un opérateur différentiel à singularité régulière , l'étude d'une équation différentielle se fait directement (cf.[20]) , et dans le cas d'un opérateur différentiel à singularité irrégulière on considérera toujours le cas des systèmes différentiels homogènes d'ordre 1 .Et l'étude d'un systèmes différentiel se ramène grâce au lemme du vecteur cyclique (cf.[21]) à celle d'un opérateur différentiel donc :

A l'opérateur $$\begin{aligned} D : K &\to K \\ f &\to Df \end{aligned}$$

on peut lui associer le système (homogène) d'ordre 1 ;

(2) $$\begin{aligned} \Delta : K^n &\to K^n \\ y &\to \Delta y = \left(\frac{d}{dx}\right)y - Ay \end{aligned} \quad .$$

$$\text{où} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & . & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & . & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0 & -a1 & \dots & \dots & -a_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathrm{End}(n\,;\,K)\,.$$

Définition II.1.1 :

$x = 0$, est un point singulier régulier de (1) (respectivement :(2)) , si a_i possède un pôle d'ordre $\leq i$; pour tout i à l'origine (i.e $Dy = 0$)

(respectivement : il existe une matrice $\hat{P}$ carrée inversible à coefficients dans $a(D_r^*)$, tel que la matrice :

$$\hat{P}^{-1}\,\hat{A}\,\hat{P} - \hat{P}^{-1}\,(\frac{d\hat{P}}{dx})$$ possède un pôle d'ordre 1 au plus à l'origine)

Définition II.1.2 :

Soient : A_1 , $A_2 \in \mathrm{End}(n, K)$.

les opérateurs $\Delta_1 = (\frac{d}{dx}) - A_1$ et $\Delta_2 = (\frac{d}{dx}) - A_2$ sont semblables s'il existe $P \in GL(n\,;\,K)$ tel que :

$\Delta_2 = P^{-1}\Delta_1 P$ c'est à dire , $A_2 = P^{-1}A_1 P - P^{-1}(\frac{dP}{dx})$.

On considère dans la suite des opérateurs différentiels de la forme :

$\Delta = (\frac{d}{dx}) - \hat{A}$, avec $\hat{A} \in \mathrm{End}(n\,;\,\forall\,[[x]]\,[x^{-1}])$ $n \in \angle^*$

La transformation $\hat{y} = \hat{P}\,\hat{y}^1$, avec $\hat{P} \in GL(n\,;\,\forall[[x]]\,[x^{-1}])$, transforme l'opérateur Δ en Δ^P.

$$\Delta \hat{y} = \Delta \hat{P} \hat{y}^1 = (\frac{d}{dx})(\hat{P}\hat{y}^1) - \hat{A}\hat{P}\hat{y}^1 \ .$$

$$\hat{P}^{-1} \Delta \hat{P} \hat{y}^1 = (\frac{d}{dx}) \hat{y}^1 + (\hat{P}^{-1}(\frac{d}{dx}) - \hat{P}^{-1}\hat{A}\hat{P}) \hat{y}^1$$

On pose :

$$\Delta^P = \Delta^1 = \hat{P}^{-1} \Delta \hat{P} = (\frac{d}{dx}) + (\hat{P}^{-1} \frac{d\hat{P}}{dx}) - \hat{P}^{-1} \hat{A} \hat{P}$$

d'après la définition Δ et Δ^P sont semblables .

(3) $$\Delta^P = \Delta^1 = (\frac{d}{dx}) - \hat{A}^1.$$

avec :

(4) $$\hat{A}^P = \hat{A}^1 = \hat{P}^{-1} \hat{A} \hat{P} - \hat{P}^{-1} \frac{d\hat{P}}{dx}.$$

Pour $\hat{A}$, $\hat{A}^1 \in$ End (n ; $\forall$ [[x]] [x $^{-1}$]) données, on s'intéresse à l'équation $\hat{A} = \hat{A}^1$, avec $\hat{P}$ est inconnu vérifiant l'équation :

(5) $$\frac{d\hat{P}}{dx} - (\hat{A}\hat{P} - \hat{P}\hat{A}^1) = 0 \ .$$

Pour $\hat{A} = \hat{A}^1$ et (5) on obtient une équation linéaire en $\hat{P}$:

$$(\frac{d\hat{P}}{dx}) - (\hat{A}\hat{P} - \hat{P}\hat{A}) = 0 \quad .$$

Posons : $(\hat{A}\hat{P} - \hat{P}\hat{A}) = [\hat{A} ; \hat{P}]$, donc on a :

$$(\frac{d\hat{P}}{dx}) - [\hat{A} ; \hat{P}] = 0.$$

On utilise de façon essentielle l'opérateur :

$$\text{End}\,\Delta = (\frac{d}{dx}) - [\hat{A} ; .] \ .$$

2. **POLYGONE DE NEWTON :**

Il s'agit de déterminer le polygone de Newton lié à un opérateur différentiel de la forme :

$$D = a_m(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^m + \ldots + a_i(x)\left(\frac{d}{dx}\right)^i + \ldots + a_0(x) .$$

où $a_i(x) \in \forall\{x\}$ (ou plus généralement un germe de fonction méromorphe à l'origine de $\forall$), on pose :

$$a_i(x) = \sum_{j\in Z} a_{ij}.x^j \quad \text{et} \quad b_i(x) = x^{-i}\, a_i(x) = \sum_{j\in Z} b_{ij}\, x^j \qquad (b_{ij} = a_{i\,(j-i)}) .$$

On associe à D le sous-ensemble N (D) de $[0 , m] \times Z$ défini par :

$$N(D) = \{ (i , j) \ / \ b_{ij} \neq 0 \}.$$

N (D) est fini si et seulement si $a_i(x) \in \forall(x)$ $(_{i=0,\ldots,m})$; on considère ensuite la famille suivante de demi-plans ,indexée par :
$\lambda \in [-\infty , o] \cup [0^+ , +\infty]$.

$$H_{\lambda,\mu} = \{ (x , y) \in 3^2 / \ y - \lambda x - \mu > 0 \} \text{ si } \lambda > 0 .$$
$$H_{\lambda,\mu} = \{ (x , y) \in 3^2 / \ y - \lambda x - \mu < 0 \} \text{ si } \lambda < 0 .$$
$$H_{\infty,\nu} = \{ (x , y) \in 3^2 / \ x - \nu < 0 \} \text{ si } \lambda = \pm\infty .$$
$$H_{0^+,\nu} = \{ (x , y) \in 3^2 / \ y - \nu > 0 \} .$$
$$H_{0^-,\nu} = \{ (x , y) \in 3^2 / \ y - \nu < 0 \} .$$

(Ce sont donc les demi-plans déterminés a partir d'équations des droites) .

<u>Définition II.2.1 :</u>

On désigne par P (D) la frontière du convexe fermé $\bigcap_{\lambda,m} H_{\lambda,m}$.

(Intersection étendue aux demi-plans $H_{\lambda,m} \supset N(D)$) ; on appelle P (D) le Polygone de NEWTON de D .

On notera $P^+(D)$ la partie de P (D) formée des côtés à pente > 0 , $P^-(D)$ la partie de P (D) formée des côtés à pente < 0 .

Exemples :

1) Soit l'opérateur différentiel D d'ordre 1 :

$$D = x^4\left(\frac{d}{dx}\right) + 5 - \lambda \quad ; \quad \lambda \neq 5 \ .$$

Les calculs donnent les résultants

$a_1(x) = x^4$; $b_1(x) = x^3$; $b_{13} = 1$.
$a_0(x) = 5 - \lambda$; $b_0(x) = 5 - \lambda$; $b_{00} = 5 - \lambda$.

L'ensemble N(D) d'indices (i,j) est égala à :

$$N(D) = \{ (i, j) \ ; \ b_{ij} \neq 0 \} .$$
$$= \{ (1,3) \ ; \ (0, 0) \} .$$

On considère seulement les demi-plans délimités par des droites de telle sorte qu'ils passant par les points (1, 3) et (0, 0) . Puis on prend leur intersections .

$$H_{3,0} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ y - 3x > 0 \} .$$
$$H_{\infty,3} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ x < 3 \} .$$
$$H_{0^+,0} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ y > 0 \}$$
$$H_{0^-,3} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ y < 3 \} .$$

Et l'intersection de ces demi-plans nous donne le polygone de Newton de D

$$P(D) = H_{1,0} \cap H_{\infty,3} \cap H_{0^+,0} \cap H_{0^-,3} \ .$$

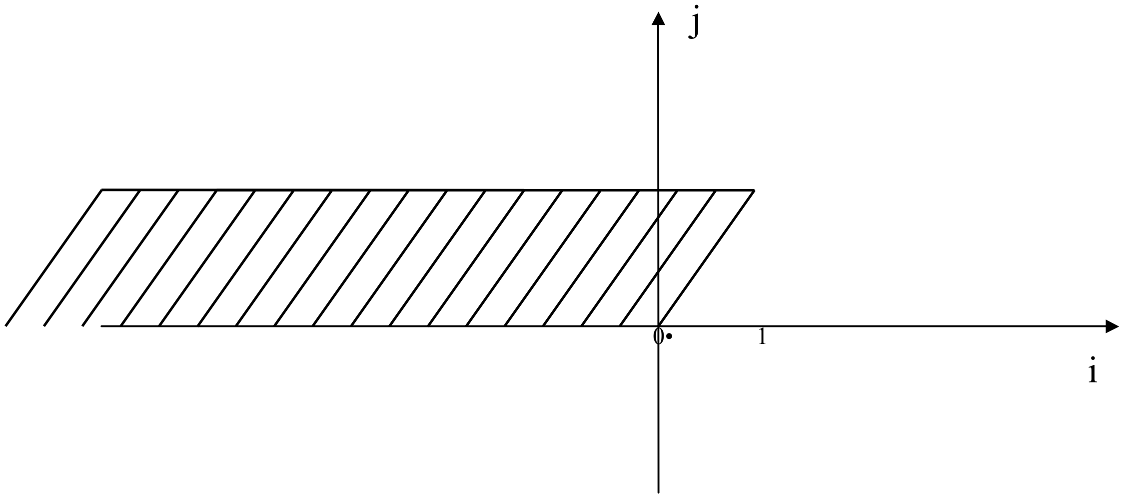

Figure 1

2) Soit l'opérateur différentiel D d'ordre 3 :

$$D = (\alpha^2 + 1)\, x^7 \left(\frac{d}{dx}\right)^3 + (x^2 + 3x^5)\left(\frac{d}{dx}\right) - 11 \ , \quad \alpha \neq i$$

$a_3(x) = (\alpha^2 + 1)\, x^7$; $b_3(x) = (\alpha^2 + 1)\, x^4$; $b_{3\,4} = (\alpha^2 + 1)$.

$a_1(x) = (x^2 + 3x^5)$; $b_1(x) = x + 3x^4$; $b_{1\,1} = 1$, $b_{1\,4} = 3$.

$a_0(x) = -11$; $b_0(x) = -11$; $b_{0\,0} = -11$.

Alors : N(D) = { (3,4) ; (1,1) ; (1,4) ; (0,0) } .

Donc on considère seulement les demi-plans délimités par des droites de telle sorte qu'ils passent par les points (3,4) ,(1,1) , (1,4) et (0,0)

$$H_{3/2\,,-1/2} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ 2y - 6x + 1 > 0 \} .$$
$$H^{-}_{0\,,4} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ y - 4 < 0 \} .$$
$$H_{\infty,3} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ x - 3 < 0 \} .$$
$$H_{1\,,0} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ y - x > 0 \} .$$
$$H^{+}_{0\,,0} = \{ (x, y) \in 3^2 \ / \ y > 0 \} .$$

$$P(D) = H_{3/2\,,-1/2} \cap H^{-}_{0\,,4} \cap H_{\infty,3} \cap H_{1\,,0} \cap H^{+}_{0\,,0}$$

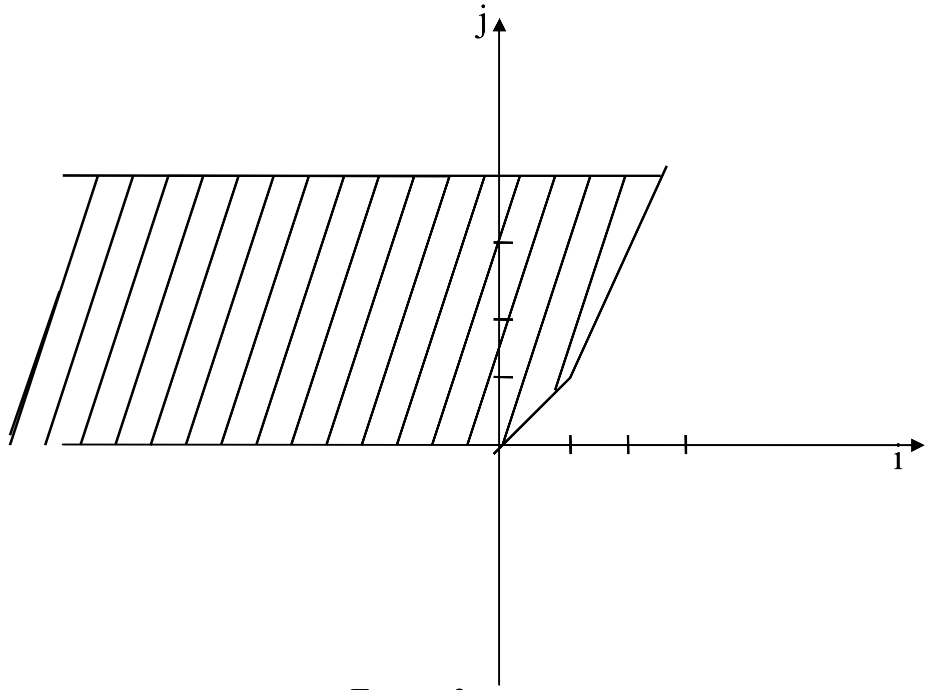

Figure 2

Définition II.2.2 :

D est dit à singularité régulière si $\forall p : V(a_p) - p \geq V(a_n) - n$ avec n =deg D = sup(i ; $a_i \neq 0$) .

Théorème II.2.3 :

Si $= (\frac{d}{dx})^m + a_0 (\frac{d}{dx})^{m-1} + ...+ a_{m-1}$ est à singularité régulière alors P(D) n'a qu'une seule pente égale à 0 et réciproquement .

Preuve : (voir [10]) .

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in$ End (n ; $\forall$ [[x]]) a un tel opérateur Δ , on associe son polygone de Newton N (D) ; et on notera k (Δ) (resp : k (End Δ)) l'invariant de KATZ de Δ (resp : End Δ) , c'est à dire la plus grandes des pentes de N (Δ) (resp N (End Δ)) Δ on a :

$$k (\text{End}\, \Delta) \leq k (\Delta) .$$

Théorème II.2.4 : (Théorème de Maillet)

Tout solution formelle de (1) est dans une certaine classe de Gevrey .

Preuve : (voir [21]) .

On utilisera le polygone de Newton lié à un opérateur différentiel pour déterminer la classe de Gevrey d'ordre minimale contenant les solutions de (1) .

3. L'EXISTENCE D'UNE SOLUTION FONDAMENTALE :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$ (6) , avec $A \in$ End (n ; K) ($n \in \mathbb{N}^*$, K = $\forall$ (x)) .

On rappelle que Δ admet une solution fondamentale formelle $\hat{F}$ de la forme :

(7) $\hat{F}(t) = \hat{B}(t)\, t^L e^{Q(1/t)}$ où $x = t^q$ ($q \in \angle^*$ convenable)

L est une matrice $n \times n$ constante .
Q (1/t) est une matrice diagonale de la de la forme :

$$Q = \begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & q_n \end{pmatrix} ; \text{ avec } q_i \in 1/t \,\forall\, [1/t] .(i = 1, \dots, n) .$$

On note $k_1, \dots, k_r$ ($k_1 < \dots < k_r$) les degrés des $q_i - q_j$ non nuls ($k_i \in \mathbb{N}$; $i,j = 1, \dots, r$) et k_r est l'invariant de katz de Δ . Et enfin $\hat{B}(t)$ est une matrice $n \times n$ inversible à coiffassent séries formelles .

Si q = 1 on dit que Δ est non ramifié , on suppose dans la suite être toujours dans ce cas .

4. LE PHENOMENE DE STOKES :

Soit $\Delta_0 = (\frac{d}{dx}) - A$ une forme normale formelle de Δ qui admet une solution fondamentale $t^L e^{Q(1/t)}$. Soit $S^1 \subset \mathbb{C}$ le cercle unité centré à l'origine 0 et Λ_Δ le faisceau des isotropies sectorielle de Δ_0 définit comme suit :$\theta \in S^1$, un germe f en θ est une matrice inversible à coefficient holomorphe sur $U, f_\theta \in GL(n,U)$ et $A_0^f = A$ (isotropies) . A Δ est associé un invariant analytique dans : $H^1(S^1, \wedge_{\Delta o})$ ou $H^1(S^1, St_{\Delta o})$;
$\wedge_{\Delta o}$ est le faisceau des isotropies sectorielle de Δ_0 infiniment tangentes à l'identité (f~I sur U) , et $St_{\Delta o}$ le sous faisceau correspondant au faisceau constant GL (n ; $\mathbb{C}$) .

Dans les cas suffisamment génériques , on peut trouver un cocycle canonique représentant privilégié de l'élément de $H^1(S^1, \wedge_{\Delta o})$ ou $H^1(S^1, tS_{\Delta o})$ correspondant à Δ .

Ceci peut être obtenu par l'étude de la structure de $H^1(S^1, \wedge_{\Delta o})$ et des arguments faisceautiques ou en utilisant la k-sommabilité de $\hat{B}$.

Le cas générale est plus délicat , il apparaît plusieurs niveaux correspondants aux pentes > 0 (s'il y en a) , du polygone de Newton N (End Δ) de End Δ ; ou tout au moins à certaines d'entre elles .

Là aussi on obtient un cocycle canonique des $H^1(S^1, GL(n ; \forall))$; les éléments du cocycle son les matrices de Stokes chacune étant munie d'un indice de niveau , et les matrices de Stokes sont définies ci-dessous en utilisant un théorème de sommabilité ; comme il le signale MALGRANGE .

Théorème II.4.1 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End(n ; K)$ $(n \in \mathbb{N})$ un opérateur différentiel méromorphe non ramifié . Soient (s'il y en a) $k_r < \ldots < k_1 = k(End\,\Delta)$ les pentes > 0 du Polygone de Newton $N(End\,\Delta)$ de End Δ . Soit $\hat{F}(t) = \hat{B}(t)\, t^L e^{Q(1/t)}$, une solution fondamentale de Δ avec $\hat{B} \in GL(n ; \forall[[x]])$.

Alors on a :

1. il existe une décomposition (naturelle $\hat{B} = \hat{B}_1 , \ldots\ldots , \hat{B}_r$ avec : $\hat{B}_i \in GL(n ; \forall\{x\}_{Si})$ ($\hat{B}_i$ est k_i-sommable) pour $i = 1, \ldots, r$ unique à une transformation de la forme :

$$\hat{B}'_1 = \hat{B}_1 P_1 ,$$

$$\hat{B}'_2 = P_1^{-1} \hat{B}_2 P_2 ,$$

$$\vdots$$

$$\hat{B}'_{r-1} = P_{r-2} \hat{B}_{r-1} P_{r-1}$$

$$\hat{B}' = P \,.\, \hat{B}$$

les $P_1 , \ldots\ldots , P_{r-1}$, étant analytique , $P_i \in GL(n ; \forall\{x\})$, $(\forall\, i = 1 , \ldots , r-1)$.

2 . Soit : $\Sigma(\hat{B}_i) \subset S^1$ (cercle des directions issues de l 'origine) le support singulier de $\hat{B}_i$. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_r \in S^1$; avec $\alpha_i \notin \Sigma(\hat{B}_i)$ $(i = 1, \dots, r)$. Soit V un germe de secteur ouvert de sommet l'origine d'ouverture $\leq 2\pi$ contenant $\alpha_1, \dots\dots, \alpha_r$. La somme B_i de $\hat{B}_i$ dans la direction α_i se prolonge analytiquement en $B_i \in GL(n, a(V))$ $(i = 1, \dots\dots, r)$ et le choix d'une détermination de $\log x$ sur V permet de définir une somme naturelle $F = \sigma(\hat{F}) = B_1 \dots\dots B_r\, x^L e^Q$ de $\hat{F}$ sur V .

Cette somme est la solution fondamentale de Δ sur V .

Preuve : (voir [12]) .

On notera par $r' = r'(\mathrm{End}\,\Delta)$ le nombre de pentes $k_i > 0$ de $N(\mathrm{End}\,\Delta)$, telles que $\hat{B}_i$ soit divergente ; c'est le nombre des niveaux au il se passe quelque chose (si $\hat{B}_i$ est convergente , on peut prendre $\hat{B}_i = I$ et il n'y aura pas de matrice de Stokes du niveau i) .

- Soient des directions $\alpha_i \notin \Sigma(\hat{B}_i)$ $(i = 1, \dots, r)$ et $\hat{F}$ un germe de secteur ouvert V , avec $\alpha_1, \dots, \alpha_i$ contenus dans V , comme dans le théorème II.4.1(ii) .

1 . La somme naturelle $F = \sigma(\hat{F})$ de $\hat{F}$ sur V définit dans ce dernier dépend du choix des α_i $(i = 1, \dots, r)$ et de la détermination de $\log x$.

2 . Si on change $\log x$ en $\log(x + 2\pi i)$; σ devient σ' et $\sigma'(\hat{F}) = \sigma(\hat{F} M)$ où $M \in GL(n ; \forall)$ est la matrice de monodromie formelle .

3 . Si α_i varie sans croiser un rayon singulier de $\Sigma(\hat{B}_i)$ la somme $\sigma(\hat{F})$ ne change pas pour i fixé ($i \in [1, r]$) , les $\alpha_{i'}$ ($i' \neq 1$) restant fixes .

4 . Et si α_i croise un rayon singulier de $\Sigma(\hat{B}_i)$, σ devient σ' et $\sigma'(\hat{F}) = \sigma(\hat{F}S)$; ou $S \in GL(n ; \forall)$ est une matrice de Stokes de niveau i , l'ensemble des matrices de Stokes de niveau i est évidemment définit modulo le choix d'une détermination de log x , c'est à dire modulo conjugaison par un élément de $\{M^n\}_{n \in Z}$ pour un tel choix de détermination de ces matrices sont en nombre fini (le nombres des éléments $\Sigma(\hat{B}_i)$) .

5 . Soit $\{q_1, \ldots, q_v\}$ une Z-base du sous-groupe additif de $\forall[1/x]$ engendré par les polynômes invariants $q_1,\ldots,q_n$ de Δ . la transformation $\exp(q_j) \to \Lambda_j \exp(q_j)$ ($\Lambda_j \in \forall^*$; $j=1, \ldots, v$) transforme F en FE , avec $E \in GL(n ; \forall)$ diagonale .Le groupe correspondant des transformations est image d'un homomorphisme de $(\forall^*)^v$ dans $GL(n ; \forall)$.

CHAPITRE -III-

GENERALITE SUR LES CORPS DIFFERENTIELS

1 . LES GROUPS ALGEBRIQUES

Soit $\forall$ un corps algébriquement clos , le corps $\forall$ étant infini , il n'y a pas d'inconvénients à identifier un polynôme $P \in \forall[t_1, \ldots\ldots, t_n]$ à n indéterminés (pour $n \geq 1$) et à coefficients dans C a la fonction polynôme :

$$\begin{array}{ccc} \forall^n & \longrightarrow & \forall \\ (t_1, t_2 ,\ldots\ldots, t_n) & \longrightarrow & P (t_1, t_2 ,\ldots\ldots, t_n) \end{array}$$

Définition III.1.1 :

On appelle ensemble algébrique une partie d'un ensemble $\forall^n$ qui est l'ensemble des zéros communs d'une famille (P_i) de polynômes de $\forall$ $[t_1, t_2 ,\ldots\ldots, t_n]$.

Autrement dit, l'ensemble des points ($t_1, t_2 ,\ldots\ldots, t_n$) de $\forall^n$ vérifiant un système d'équations :

$$P_i (t_1, t_2 ,\ldots\ldots, t_n) = 0 \quad ; \quad \text{pour tout indice i .}$$

2. ALGEBRE COMMUTATIVE :

Définition III.2.1 :

Soit un anneau commutatif A .Le spectre de cet anneau A est l'ensemble Spec(A) des idéaux premiers de A

Proposition III.2.2 : (Topologie spectrale ou topologie de Zariskt)

Soit un anneau commutatif A et son spectre Spec(A) a toute partie E de A on associe le sous ensemble

_ $V(E) = \{ \ P$ partie de $Spec(A)$; $E \subset P \ \}$.

Alors les ensembles $V(E)$ sont les fermés d'une topologie sur Spect(A) appelée topologie de Zariski

Preuve :

Soit I(E) l'idéal engendré par E_i ,alors

$$V(E) = V(I(E))$$

On se limite aux idéaux I_n de A .

Vérification :

$V(0) = Spec(A)$, $V(1) = \phi$

$V(I_1) \cup \ldots \cup V(I_n) = V(I_1 \cap \ldots \cap I_n) = V(I_1 \ldots I_n)$

$\cap V(I_n) = V(\cup I_n)$

Définition III.2.3 :

Les complémentaires de V(E) sont des ouverts

Définition III.2.4 :

On appelle groupe algébrique liéaire ou groupe algébrique des matrices tout sous groupe G de GL(n ;K) fermé pour la topologie de Zariski .

3 . ALGEBRE DIFFERENTIELLE :

Cette partie est une synthèse des principaux résultats concernant les extensions de Picard-Vessiot des corps differentiels dont la source principale est due à I-kaplanski et E.R.Kolchin [2] , [3] , [4] et [5] .

DERIVATION :

Une dérivation d'un anneau A est une application $a \rightarrow a'$ de A dans A ; vérifiant :

1. $(a + b)' = a' + b'$
2. $(a . b)' = a'b + ab'$

Définition III.3.1 :

1. Un anneau différentiel est un anneau commutatif unitaire muni d'une dérivation .

2. Soit A et B deux anneaux différentiels , et f un homorphisme de A dans B . On dit que f est un homomorphisme différentiel s'il vérifie : $f(a') = f(a)'$

3. Dans un anneau différentiel A , les éléments dont la dérivée est nulle forment un sous-anneau $\forall$ de A appelé l'anneau des constantes .

4. Si A est un corps , alors $\forall$ l'est aussi .

4 . LE GROUPE DE GALOIS DIFFERENTIEL :

Définition III.4.1 :

Soit L un corps différentiel et K un sous corps de L , le groupe de Galois différentiel G de L sur K est le groupe de tous les automorphismes différentiels de L qui laissent invariants les éléments de K .

5 . EXTENSION DE PICARD -VESSIOT :

Soit L un surcorps différentiel de K , et soit l'équation différentielle linéaire homogène à coefficient dans K .

$$(1) \qquad Dy = \left(\frac{dy}{dx}\right)^{n} + a_{n-1}\left(\frac{dy}{dx}\right)^{n-1} + \dots\dots + a_1\left(\frac{dy}{dx}\right) + a_n y = 0$$

Définition III.5.1 : [3]

On dit que L est une **extension de Picard-Vessiot** de K pour l'équation (1) si :

1. $L = K < u_1, u_2, \dots\dots, u_n >$ où $u_1, u_2, \dots\dots, u_n$ sont n solutions de (1) linéairement indépendantes sur le corps des constantes $\forall$ de K .

2. L et K ont le même corps des constantes .

Théorème III.5.2 : [3]

1. Si K est un corps de caractéristique nulle dont le corps des constantes est algébriquement clos , alors il existe une extension de Picard-Vessiot pour toute équation différentiel linéaire homogène à coefficients dans K .

2. Soit L une extension de Picard-Vessiot de K et φ un automorphisme différentiel de L sur K alors :

$\varphi(u_i)$ est nécessairement une combinaison linéaire des (u_i) à coefficient dans $\forall$.

Donc le groupe de Galois différentiel de L sur K est isomorphe à un sous groupe multificatif de $GL(n ; \forall)$.

Théorème III.5.3 : [3]

Le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot est un groupe algébrique linéaire sur le corps des constantes .

Théorème III.5.4 : [3]

Si $Gal(L / K)$ est le groupe de Galois différentiel d'une extension de Picard-Vessiot de K alors :

Il ya une bijection entre l'ensemble de surcorps différentiels M ($K \subset M \subset L$) et les sous groupes $H \subset Gal(L / K)$ fermés pour la topologie de Zariski .

Théorème III.5.5 : [3]

Soit K un corps différentiel de caractéristique nulle avec un corps des constantes $\forall$ algébriquement clos .
alors :

Toute extension de Picard-Vessiot de K est normale .

6 . EXTENSION DE PICARD-VESSIOT ASSOCIEE OU SYSTEME DIFFERENTIEL Δ :

On considère ici des corps différentiels de caractéristique nulle , et plus précisément des surcorps différentiels de K (K= $\forall\{x\}\left[X^{-1}\right]$) , et on notera dans cette partie L un surcorps différentiel de K .

Si L est un surcorps différentiel de K , et si L_0 est un surcorps différentiel de L , donc à une matrice R à coefficients dans L_0 , on associe le sous-corps différentiel L< R > de L_0 engendré par les coefficients de R sur K .

Définition III.6.1:

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(n\,;L)$. Soit L_0 un surcorps différentiel de L tel qu'il existe une solution fondamentale R de Δ à coefficient dans L_0 . On dit que K<R> est une extension de Picard-Vessiot de L associée à Δ .

Proposition :

Si $P \in GL\,(n\,;L)$ alors l'extension K < R > ne change pas si on remplace Δ par Δ^P ; elle ne dépend que de la connexion associée à Δ .

Théorème III.6.2 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(n\,;L)$. Soit L_1 et L_2 deux surcorps différentiels de L et $L\langle R_1\rangle \subset L_1$, $L\langle R_2\rangle \subset L_2$ deux extension de Picard-Vessiot de L associées à Δ ; alors :

il existé un L-isomorphisme de corps différentiels :

$$L < R_1 > \xrightarrow{\approx} L < R_2 > .$$

Preuve :(Voir : chap. VI , Proposition 13 p 412) .

Lemme III.6.3 :

Soit M un corps différentiel de caractéristique nulle , soient L_1 et L_2 deux surcorps différentiels de M , alors :

Il existe un surcorps différentiel L_0 de M contenant à la fois L_1 et L_2 .

Preuve : (Voir [4])

Notation :

Soit $L_1 \subset L_2$ une inclusion de corps différentiels .
On notera G [L_2 : L_1] le groupe des L_1-automorphismes de corps différentiel de L_2 .

Et on notera L (Δ) une extension de Picard-Vessiot de L associée à $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$; avec $A \in End (n ; L)$.

Dans la partie suivante ,cette notation sera réservée à une extension de Picard - Vessiot contenue dans un surcorps précis de L .

Définition III.6.4 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End (n ; L)$. G (Δ) = G [L (Δ) : L] est le groupe de Picard - Vessiot de Δ sur L .

Le groupe de Picard-Vessiot de G(Δ) dépend évidemment du choix du corps de base L, et il ne change pas si on remplace Δ par Δ^p ; avec $p \in GL (n ; L)$ (il ne dépend que de la connexion associée à Δ) .

Soient B_1 et B_2 deux matrices fondamentales de Δ dans un surcorps L_0 de L ; il existe une unique matrice carrée inversible à coefficients dans ∀ , tel que $B_2 = B_1 M$ et pour un choix d'une matrice fondamentales B et de groupe de L- automorphisme de corps différentiels de L <B> on peut identifier le groupe de Picard-Vessiot G (Δ) à un sous-groupe de GL (n ; ∀) .

- On utilise constamment cette identification dans la suite .

Soit H un sous-groupe de G (Δ) , on notera L (H) le sous-corps différentiel de L (Δ) formé des éléments invariants par H (Voir KAPLANSKY [2])

<u>Proposition III.6.5 :</u>

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End(n ; L)$.

1. Le groupe de Picard - Vessiot de Δ sur L (H) (G [L (H) (Δ) ; L (H)])est l'adhérence au sens de Zariski de H dans GL (n ; $\forall$) .

2. Si L (H) = L ; H est dense au sens de Zariski dans G (Δ) **.**

<u>Preuve :</u> (Voir [2])

<u>Proposition III.6.6 :</u>

Soit $L \subset L_0$ une inclusion de corps différentiels . Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End(n ; L)$; alors les trois conditions suivantes sont équivalentes :

1. L'application naturelle $G[L_0(\Delta) ; L_0] \rightarrow G(\Delta)$ est un isomorphisme .

2. $L(G[L_0(\Delta) ; L_0]) = L$.

c' est à dire que le groupe $G[L_0(\Delta) ; L_0]$ est dense au sens de Zariski dans G (Δ) .

3. $L(\Delta) \cap L_0 = L$.

<u>Preuve :</u>

Montrons (1) implique (2) :

On suppose que $G[L_0(\Delta) ; L_0] \cong G(\Delta)$ ($G(\Delta) = G[L(\Delta) : L]$) .
$G[L_0(\Delta) ; L_0]$ est un sous-groupe de G (Δ) ; donc $L(G[L_0(\Delta) ; L_0])$ est le sous-corps différentiel de L (Δ) , alors on a :

$$L(G[L_0(\Delta) ; L_0]) = L .$$

Montrons (1) implique (3)

Soit $\xi \in L(\Delta) \cap L_0$; $\xi \in L_0$.

donc ξ est invariant par le groupe $G[L_0(\Delta); L_0]$, et comme $G[L_0(\Delta); L_0] \cong G(\Delta)$, donc ξ est invariant par le groupe $G(\Delta)$, donc $\xi \in L$. alors :

(1) $\quad L(\Delta) \cap L_0 \subset L$.

On a : $\begin{cases} L \subset L_0 . \\ \text{et} \\ L \subset L(\Delta) . \end{cases}$ alors :

(2) $\quad L \subset L_0 \cap L(\Delta)$.

de (1) et (2) on tire :

$$L(\Delta) \cap L_0 = L .$$

Montrons (3) implique (2) :

On suppose $L(\Delta) \cap L_0 = L$ et on pose $H = G[L_0(\Delta); L_0]$ (H est le groupe des L_0 - automorphisme de corps différentiel $L_0(\Delta)$ et $L(H)$ est un sous corps différentiel de $L(\Delta)$

Soit $\xi \in L(H)$ donc : $\xi \in L(\Delta)$. (1)'

et ξ est invariant par le groupe H , donc $\xi \in L_0$ (2)'

de (1)' et (2)' on a :

$$\xi \in L_0 \cap L(\Delta)$$

or on a :

$$L_0 \cap L(\Delta) = L .$$

donc

$$\xi \in L$$

c'est à dire que H est dense au sens de Zariski dans G (Δ) .

Montrons (2) implique (1) :

On suppose que L (H) = L , donc d'après la proposition III.6.5 (2) ; H est dense au sens de Zariski dans G (Δ) . alors $G [L_0(\Delta) ; L_0]$ est fermé dans G (Δ) (c'est à dire que c'est un groupe algébrique linéaire) . Et d'après le théorèmes III.5.3 et III.5.4 on a :

$$G (\Delta) = G [L_0(\Delta) ; L_0] .$$

CHAPITRE -IV-

CALCUL DU GROUPE DE PICARD-VESTIOT ET DE SA FILTARTION GEVREY

1 . Notations et définitions :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(n\,;K)$ non ramifié . Soit $\hat{F}$ une solution fondamentale formelle de Δ :

$$\hat{F} = \hat{B}\, X^{L} e^{Q} \quad ; Q = \begin{pmatrix} q_1 & 0 \\ & \\ 0 & q_n \end{pmatrix} .$$

Soient $\Gamma_1 , \ldots , \Gamma_n$ les valeurs propres de $L \in \mathrm{End}\,(n , \forall)$.

L'opérateur Δ étant fixé . On introduit un corps différentiel formel $\hat{\mathfrak{I}}$

$\hat{\mathfrak{I}} = \hat{K} < x^{\Gamma 1} , \ldots , x^{\Gamma 1} , e^{q1} , \ldots , e^{qn} , \log x >$ contenant les coefficients de $\hat{F}$.

On pose : $\mathfrak{I} = K < x^{\Gamma 1} , \ldots , x^{\Gamma 1} , e^{q1} , \ldots , e^{qn} , \log x >$.

Définition IV.1.1 :

Le sous-corps différentiel $K(\hat{F})$ de $\hat{\mathfrak{I}}$ engendré par les coefficients de

$\hat{F}$ sur K , est une extension de picard-vessiot de K correspondant à Δ .

On note $K(\hat{F}) = K(\Delta)$ (quand il n'y a pas d'ambiguïté) et on définit de façon analogue $\hat{K}(\Delta)$, $\hat{K}_S(\Delta)$ et $K_S(\Delta)$ (s>1) .

$\hat{K}(\Delta)$ le sous-corps de $\hat{\mathfrak{I}}$ engendré par les coefficient de $\hat{F}$ sur $\hat{K}$, est une extension de Picard-Vessiot de $\hat{K}$ associée à Δ .

$\hat{K}_S(\Delta)$ le sous-corps de $\hat{\mathfrak{I}}$ engendré par les coefficients de $\hat{F}$ sur $\hat{K}_S$, est une extension de Picard-Vessiot de $\hat{K}_S$ associée à Δ .

$K_S(\Delta)$ le sous-corps de $\hat{\mathfrak{I}}$ engendré par les coefficients de $\hat{F}$ sur K_S , est une extension de Picard-Vessiot de K_S associée à Δ .

Soit V un germe de secteur ouvert à l'origine . D'après le théorème de Cauchy il existe une solution fondamentale F_v sur V , à coefficients dans $a(V)$; ainsi $K(F_V)$ est une extension de Picard-Vessiot de K associée à Δ .

Le lemme III..6.3 assure l'existence d'un surcorps différentiel de K contenant a la fois $\mathfrak{I}$ et m (V) , et le théorème III .6.2 montre que les extensions de Picard-Vessiot $K<\hat{F}>$ et $K(F_v)$ associé à Δ sont isomorphes .

<u>Notations :</u>

Nous noterons :

$G(\Delta) = G[K(\Delta) ; K]$.

$\hat{G}(\Delta) = G[\hat{K}(\Delta) ; \hat{K}]$.

$\hat{G}_S(\Delta) = G[\hat{K}_S(\Delta) ; \hat{K}_S]$ pour $s > 1$.

$G_S(\Delta) = G[K_S(\Delta) ; K_S]$ pour $s > 1$.

2. LA FILTRATION GEVREY :

Si L_0 est un surcorps différentiel de L et si $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(n\,;L)$, donc tout L_0-automorphisme de $L_0(\Delta)$ conserve L et $L(\Delta)$.

On a donc une application naturelle injective :

$$G[L_0(\Delta)\,;L_0] \longrightarrow G[L(\Delta)\,;L]$$

En particulier si $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(n\,;K)$,

$\hat{G}_S(\Delta) = G[\hat{K}_S(\Delta)\,;\hat{K}_S]$ s'identifie à un sous-groupe fermé de $G(\Delta)$.

D'après la proposition I.1.2 on a :

(1) $\forall\{x\} \subset \forall\{x\}_S \subset \forall[[x]]_S \subset \forall[[x]]$. $\forall s>1$

donc :

$$K \subset K_S \subset \hat{K}_S \subset \hat{K}\,, \qquad \forall s>1$$

alors :

$$G[\hat{K}(\Delta)\,;\hat{K}] \subset G[\hat{K}_S(\Delta)\,;\hat{K}_S] \subset G[K_S(\Delta)\,;K_S] \subset G[K(\Delta)\,;K]\,.$$

On a donc les homomorphismes injectifs :

(2) $\hat{G}(\Delta) \longrightarrow \hat{G}_S(\Delta) \longrightarrow G_S(\Delta) \longrightarrow G(\Delta)$ $\forall s>1$

De même $\forall\, s_2 > s_1 > 1$, on a :

(3) $\forall[[x]]_{S1} \subset \forall[[x]]_{S2}$.

donc :

(4) $\hat{K}_{S1} \subset \hat{K}_{S2}$.

Et alors :

$G[\hat{K}_{S2}(\Delta)\,;\hat{K}_{S2}] \longrightarrow G[\hat{K}_{S1}(\Delta)\,;\hat{K}_{S1}]$ est un homomorphisme injectif .

On a donc :

$$\hat{G}\ (\Delta) \longrightarrow \hat{G}_{S2}\ (\Delta) \longrightarrow \hat{G}_{S1}\ (\Delta) \longrightarrow G_{S1}\ (\Delta) \longrightarrow G\ (\Delta)\ ,\ \forall\ s_2 > s_1 > 1\ .$$

On obtient ainsi **la filtration Gevrey** $\{\ \hat{G}_S\ (\Delta)\ \}_{S>1}$ du groupe de Picard-Vessiot $G\ (\Delta)$.

- Comme $\hat{G}_S\ (\Delta)$ est un sous-groupe algébrique de GL (n ; ∀) , donc $\{\ \hat{G}_S\ (\Delta)\ \}_{S>1}$ est une filtration du groupe algébrique par des sous-groupe algébriques .

<u>Lemme IV .2.1 :</u>

Soit $Q = \begin{pmatrix} q_1 & & 0 \\ & & \\ 0 & & q_n \end{pmatrix}$; $q_i \in \frac{1}{x}\ \forall\left[\frac{1}{x}\right]$ (i = 1,…., n) , soit υ le rang (sur 9) du sous-groupe additif de $\forall\left[\frac{1}{x}\right]$ engendré par $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Alors :

Le groupe $G\ [\ K < e^Q > ;\ K\ ]$ s'identifie à un sous-groupe diagonal $(\forall^*)^n$ de GL (n ; ∀) isomorphe à $(\forall^*)^{\upsilon}$.

- On notera E = E (Q) = E (Δ) (Δ d'invariant formel Q) , le groupe $G\ [\ K < e^Q > ;\ K\ ]$ est abélien .

<u>Notation :</u>

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End\ (\ n\ ;\ K\ )$, pour $i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ r$.

On note par $G^i\ (\Delta)$ (resp $G_0^{\ i}\ (\Delta)$) l'adhérence au sens de Zariski du sous-groupe de GL (n ; ∀) engendré par la monodromie formelle M , les matrices de Stokes de niveau i' (= i+1 , …. , r) et le groupe E (resp M et les matrices de Stokes de niveau i' = i+1 , …. , r) .

Notons que $G_0^i(\Delta)$ est engendré algébriquement par l'image de la représentation dans $GL(n ; \forall)$ du $\pi_1(D^* ; \Delta)$ restreinte au i-ème cran de la
filtration $F^i(\pi_1(D^*))$.

Les résultats essentiels de ce travail sont les deux théorèmes suivants :

Théorème IV.2.2 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End(n ; K)$, non ramifié .
Soient $k_r < \ldots . < k_1 = k(End\ \Delta)$ les pentes > 0 (s'il y en a) du polygone de Newton $N(End\ \Delta)$; $s_i = 1 + \frac{1}{k_i}$; (i = 1 , …. , r) . Alors :

1. $G_S(\Delta) = \hat{G}_S(\Delta)$; pour tout $s > 1$.
2. $\hat{G}_S(\Delta) = \hat{G}(\Delta) = G_0^r$; pour tout $s \geq s_r$.
3. $\hat{G}_S(\Delta) = G^i(\Delta)$; pour $s_i \leq s \leq s_{i+1}$ $(1 \leq i \leq r-1)$.
4. $\hat{G}_S(\Delta) = G^0(\Delta) = G(\Delta)$; pour $1 \leq s \leq s_1$ $(1 \leq i \leq r-1)$.
5. Soit $L^i = K < \hat{B}_1 , \ldots , \hat{B}_i >$ (notation de théorème II .4.1)

Alors :

$$G^i(\Delta) = G[L^i(\Delta) ; L^i] = G_S(\Delta) \qquad (i = 1 , \ldots , r) .$$

Théorème IV .2. 3 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End(n ; K)$, non ramifié .

Soient $\hat{F} = \hat{B}\ X^L\ e^Q$ une solution fondamentale formelle de Δ et $\hat{B} = \hat{B}_1 \ldots . \hat{B}_r$ la décomposition naturelle de $\hat{B}$ (notation du théorème II . 4.1) .

Soit $F = \sigma(\hat{F})$ une somme naturelle de $\hat{F}$ sur un germe de secteur ouvert V à l'origine au sens du théorème II .4.1 alors :

Il existe un K-isomorphisme de corps différentiels

$$\sigma' : K < \hat{F} > \longrightarrow K <F>$$

tel que :

$$\sigma' (\hat{F}) = \sigma (\hat{F}) = F .$$

(c'est à dire induit sans la sommation naturelle σ) .
[ou K <F> est le sous-corp différentiel du corps des germes méromorphes m(V) engendré par les coefficients de F sur K] .

Proposition IV .2.4 :

En général $L^i = K < \hat{B}_1 ,\ldots , \hat{B}_i >$ n'est pas une extension de Picard-Vessiot de K , mais est seulement contenu dans une telle extension (les B_1 , …. , B_i sont les solutions d'équation différentielle linéaire mais on n'a pas rajouté toutes les solutions) ceci est lié au fait que la filtration Gevrey de G (Δ) n'est pas normale .

- Nous allons montrer en même temps les théorèmes IV .2.3 et IV .2.4 par récurrence sur r = r (End Δ) et r' = r' (End Δ) . Les outils essentiels vont être les théorèmes I .3.4 et I .3.5 , le théorème II .4.1 , les propositions III .6.5 , III .6.6 et le théorème III .6.2 .

Considérons d'abord le cas régulier .

Proposition IV .2.5 :

(i) Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in$ End (n ; K) . Si Δ est à point singulier régulier (c'est à dire k (End Δ) = 0) , l'application naturelle :

$$\hat{G} (\Delta) \longrightarrow G (\Delta) \quad \text{est un isomorphisme .}$$

(ii) Si Δ est à point singulier régulier , alors G (Δ) est l'adhérence au sens de Zariski du sous-groupe de GL (n ; $\forall$) engendré par la monodromie M .

Preuve :

(i) Soit $\hat{F} = \hat{B}\ X^L\ e^Q$ une solution fondamentale formelle de Δ , avec $\hat{B} \in GL\ (\ n\ ;\ C\ \{x\})$, donc $\hat{F}$ est à coefficient dans $\Im$ ($K\ (F) \subset \Im$) . du lemme III .6.3 on tire :

$$\Im \cap \hat{K} \subset K\ \text{, donc}\ \Im \cap \hat{K} = K\ .$$

On conclut par la proposition III .6.6 (iii $\Rightarrow$ i) que :

$$G\ [\ \hat{K}\ (\Delta)\ ;\ \hat{K}\ ] \cong G\ [\ K\ (\Delta)\ ;\ K\ ] \qquad \text{c'est à dire :}$$

$$\hat{G}\ (\Delta) \cong G\ (\Delta)\ .$$

(ii) Posons $H = \{M_n\}_{n \in N}$. Soit ξ est invariant par la monodromie M , donc $\xi \in K$, c'est à dire K (H) = K et H est dense au sens de Zariski dans G (Δ) .

Par la proposition III .6.5 on a :
G(Δ) est l'adhérence au sens de Zariski du sous-groupe de GL (n ; $\forall$) engendré par la monodromie M .

Lemme IV .2.5 :

Soit l'opérateur différentiel $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec A est une matrice carré à coefficient dans le corps L , non ramifier . Soient k , k(End Δ) les pentes du polygone de Newton N(Δ) et N(End Δ) tels que ; k > k (End Δ) , on pose $s = 1+\frac{1}{k}$.
Alors :

$$\hat{G}_S\ (\Delta) = G\ (\Delta)\ .$$

Preuve :

La démonstration du lemme IV.2.5 se fait par récurrence sur r (End Δ) où r et le nombre de pente du polygone de Newton .

1^{ere} cas :

pour $r(\text{End}\,\Delta) = 0$ (c'est à dire que l'opérateur différentiel Δ est à points singulier régulier $k(\text{End}\,\Delta) = 0$).

De la proposition IV .2 .4 on tire :

(1) $\hat{G}(\Delta) \subset \hat{G}_S(\Delta) \subset G(\Delta)$; $\forall\, s > 1$.

Alors :

(2) $\hat{G}(\Delta) = G(\Delta) \subset \hat{G}_S(\Delta)$; $\forall\, s > 1$.

Donc :

$$\hat{G}_S(\Delta) = G(\Delta) \qquad ; \ \forall\, s>1 .$$

2ere cas :

On suppose $r(\text{End}\,\Delta) \geq 1$.

De théorème II .4.1 on tire :

il existe $\hat{B}_1 \in GL(n ; \forall\{x\}_{S1})$ tel que :

(3) $$\Delta^1 = \Delta^{\hat{B}_1} \left(\Delta^{\hat{B}_1} = \frac{d}{dx} - (B_1^{-1} - \frac{d\hat{B}}{dx} - \hat{B}_1^{-1} \hat{A} \hat{B}_1) \right)$$

est méromorphe et admet une décomposition en blocs (de premier niveau) tel que :

$$\Delta^1{}_j = \left(\frac{d}{dx} - \hat{B}^1 j\right)$$

avec , $k(\text{End}\,\Delta^1{}_j) \leq k_2 \leq k_1 = k(\text{End}\,\Delta)$ et $r(\text{End}\,\Delta^1{}_j) < r(\text{End}\,\Delta)$

- Considérons $K(\Delta) \cap \hat{K}_S$:

On a : $K \subset K<\hat{B}_1>$:

$$K(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K<\hat{B}_1>(\Delta) \cap \hat{K}_S .$$

Et comme pour tout $s_1 > s$ on a :

$$\hat{K}_{S1} \supset \hat{K}_S .$$

Il en résulte :

$$K(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K<\hat{B}_1>(\Delta) \cap \hat{K}_{S1} .$$

Par contre dans le corps $K < \hat{B}_1 > (\Delta)$, on a :

$$\hat{K}_{S1} \cap \hat{K}_S = \hat{K}_{S1} \text{ (car } \hat{B}_1 \in GL (n ; \forall\{x\}_{S1}) .$$

Par conséquent :

(1) $$K (\Delta) \cap \hat{K}_S \subset \hat{K} < \hat{B}_1 > (\Delta) \cap \hat{K}_{S1} \cap \hat{K}_S$$

De plus

$$K < \hat{B}_1 > (\Delta) = K < \hat{B}_1 > (\Delta^1) .$$

(toute extension de Picard-Vessiot ne change pas si on remplace Δ par Δ^{B1} avec $\hat{B}_1 \in GL (n ; \forall\{x\}_{S1})$ et par hypothèse de récurrence) $G (\Delta^1) = G [K < \hat{B}_1 > (\Delta^1) ; K < \hat{B}_1 >] = \hat{G}_{S1} (\Delta^1)$ ($k_1 > k_2 \geq k$ (End $\Delta^1{}_j$) .
On déduit alors de la proposition III .6.6 (i $\Rightarrow$ iii)

(2) $$K < \hat{B}_1 > (\Delta^1) \cap \hat{K}_{S1} = K < \hat{B}_1 > ,$$

De (1) et (2) on obtient :

(3) $$K (\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K < \hat{B}_1 > \cap \hat{K}_S$$

Et comme :

$$K < \hat{B}_1 > \subset K_{S1} ;$$

Alors :

$$K (\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K_{S1} \cap \hat{K}_S$$

Du théorème I .3.5 (i) on tire :

$$K_{S1} \cap \hat{K}_S = K \quad \text{, pour tout } s_1 > s > 1 .$$

Alors : $K (\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K$,

d'où : $K (\Delta) \cap \hat{K}_S = K$ (car $K \subset K (\Delta) \cap \hat{K}_S$) .

Par une nouvelle application de la proposition III .6.6 (iii $\Rightarrow$ i) , on obtient :

$$\hat{G}_S(\Delta) = G(\Delta) .$$

Par le lemme IV .2.5 et la proposition IV .2.4, on obtient :

(4) $\hat{G}_S(\Delta) = G(\Delta)$.

(5) $\hat{G}(\Delta) = G(\Delta)$.

De plus , on a :

(6) $\hat{G}(\Delta) \subset \hat{G}_S(\Delta) \subset G_S(\Delta) \subset G(\Delta)$.

De (6) , on tire :

(7) $\hat{G}_S(\Delta) \subset G_S(\Delta)$.

De (4) et (6) , on déduit que :

(8) $G_S(\Delta) \subset G(\Delta) = \hat{G}(\Delta) \subset \hat{G}_S(\Delta)$.

de (7) et (8) , on obtient :

$$G_S(\Delta) = \hat{G}_S(\Delta) .$$

Pour terminer la démonstration , il reste à montrer que $G_S(\Delta) = G^i(\Delta) = G[L^i(\Delta) ; L^i]$, $\forall\, s_i < s < s_{i+1}$.

pour cela il suffit de montrer que $L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S = L^i$ avec :

$L^i < \hat{B}_1 , \dots , \hat{B}_i > , L^{i+1} < \hat{B}_1 , \dots , \hat{B}_{i+1} > = L^{i+1} < \hat{B}_{i+1} >$.

$\forall\ s_i < s < s_{i+1}$, on a :

(9) $\hat{K}_{Si} \subset \hat{K}_S \subset \hat{K}_{S+1}$ et $\hat{K}_{S+1} \cap \hat{K}_S = \hat{K}_{S+1}$.

Considérons $L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S$:

On a $L^i \subset L^i<\hat{B}_{i+1}>$,

donc :

$$L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta) \cap \hat{K}_S .$$
$$\subset L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta) \cap \hat{K}_{Si+1} . \qquad \text{(d'après (9)) .}$$
$$\subset L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta) \cap \hat{K}_{Si+1} \cap \hat{K}_S .$$

Comme Δ et Δ^{i+1} sont semblables , donc :

$L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta) = L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta^{i+1})$ (l'extension de Picard-Vessiot ne change pas si l'on remplace Δ par Δ^{i+1})

On a :

$$G(\Delta^{i+1}) = \hat{G}_{Si+1}(\Delta^{i+1}) , (\Delta^{i+1} = (\hat{B}_1 , \ldots , \hat{B}_{i+1})^{-1} \Delta\ (\hat{B}_1, \ldots , \hat{B}_{i+1})).$$

Par la proposition III .6.6 , on obtient :

$$L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta^{i+1}) \cap \hat{K}_{Si+1} = L^i<\hat{B}_{i+1}>$$

D'où :

$$L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset L^i<\hat{B}_{i+1}>(\Delta^{i+1}) \cap \hat{K}_{Si+1} \cap \hat{K}_S .$$
$$L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset L^i<\hat{B}_{i+1}> \cap \hat{K}_S$$
$$L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K_{Si+1} \cap \hat{K}_S ,$$

où $L^i<\hat{B}_{i+1}>$ est l'extension de L^i engendrée par $\hat{B}_{i+1}$, avec $\hat{B}_{i+1} \in GL(n ; K_{Si+1})$.

$$L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset K .$$

$$L^i(\Delta) \cap \hat{K}_S \subset L^i .$$

Par une nouvelle application de la proposition III .6.6 (iii $\Rightarrow$ i) , on obtient :

$$\hat{G}_S(\Delta) = G^i(\Delta) , \qquad \forall\ s_i < s < s_{i+1} .$$

Lemme IV .2.7 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}(n ; K)$.

Soient $k > k(\mathrm{End}\ \Delta^1)$ et $s = 1+\frac{1}{k}$. Soit V un germe de secteur ouvert de sommet a l'origine . Soit $\hat{R}$ une matrice à coefficient dans K_S . Soit $\alpha \in S^1$, $\alpha \notin \Sigma(\hat{R})$ une direction fixée dans V . Soient $K(\Delta^1) \subset \Im^1$ et $K_v(\Delta^1) \subset m(V)$ deux extensions de Picard-Vessiot de K associées à Δ^1 ,

Alors :

(i) la somme sur V (au sens de la k-sommabilité) dans la direction α fournit un isomorphisme de corps différentiels .

$$\sigma_v' : K<\hat{R}> \longrightarrow K_v(R) \quad \text{prolongeant} \quad K \longrightarrow K_v$$

(R étant la somme de $\hat{R}$ dans la direction α , et $\Im^1$ le corps différentiel formel engendré par les coefficients de $\hat{R}$) .

(ii) Soit $\varphi : K(\Delta^1) \longrightarrow K_v(\Delta^1)$ un « K-isomorphisme » de corps différentiels .

$$\psi_v : K<\hat{R}>(\Delta^1) \longrightarrow K_v<R>(\Delta^1) .$$

prolongeant φ et σ'_v .

Remarque :

Ici aussi il faut éventuellement restreindre v , où V est un secteur de bissectrice α et d'ouverture $\leq \pi/k$.

Preuve :

(i) $K_v(\Delta^1)$ est le sous-corps de $\mathcal{M}(V)$ engendré sur K .

$\hat{R}$ est la matrice à coefficient dans le corps des séries k-sommables ; c'est à dire $K<\hat{R}>$ est le sous-corps de $\hat{K}_S$ engendré sur K par les coefficient de $\hat{R}$.

Donc , d'après le théorème I .3.4 l'application :

$$\sigma'_v : K<\hat{R}> \longrightarrow K_v(R) .$$

est un isomorphisme de corps différentiels .

(ii) D'après le théorème III .6.2 , les extensions de Picard-Vessiot associées à Δ^1 $K(\hat{R})$ et $K_V(R)$ sont isomorphes . Il existe un isomorphisme de corps différentiels υ'_v ;

$$\upsilon'_v : \quad K<\hat{R}>(\Delta^1) \longrightarrow K_v<R>(\Delta^1)$$

$$\sigma'_v : \quad K<\hat{R}> \longrightarrow K_v<R>$$

- Il reste à modifier convenablement υ'(s'il ya lieu) pour qu'il prolonge φ .

l'isomorphisme υ'_v induit un « K-isomorphisme » de corps différentiels

$$\upsilon_v : \quad K(\Delta^1) \longrightarrow K_v(\Delta^1)$$

Soit $\Upsilon : K_v(\Delta^1) \longrightarrow K_v(\Delta^1)$ l'unique isomorphisme de corps différentiels rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{tikzcd}
 & K_v(\Delta^1) \arrow[dd, "\Upsilon"] \\
K(\Delta^1) \arrow[ur, "\upsilon_v"] \arrow[dr, "\varphi"'] & \\
 & {}
\end{tikzcd}$$

L'isomorphisme Υ est un K_v-isomorphisme , donc il définit un élément du groupe de Galois $G [K_v (\Delta^1) , K_v]$ (d'après le Lemme IV .2 .5 et la condition $k > k (\mathrm{End}\ \Delta^1)$).

On a les isomorphismes :

$$G [\hat{K}_S(\Delta^1), \hat{K}_S] \longrightarrow G [K < \hat{R} > (\Delta^1); K < \hat{R} >] \longrightarrow G [K (\Delta^1) ; K]$$

D'où un isomorphisme :

$$G [K_v <R> (\Delta^1) ; K_v <R>] \longrightarrow G [K (\Delta^1) ; K] .$$

ainsi Υ se prolonge en un $K_v <R>$-isomorphisme Υ' de $K_v <R> (\Delta^1)$.
On pose $\psi_v = \Upsilon'_0\, \upsilon'_v$.

On a :

$$\begin{tikzcd} K_v <R> (\Delta^1) \arrow[rr, "\upsilon'_v"] \arrow[dr, "\psi_v"'] & & K_v <R> (\Delta^1) \arrow[dl, "\Upsilon'"] \\ & K_v <R> (\Delta^1) & \end{tikzcd}$$

Donc il existe un K-isomorphisme ψ_v qui prolonge φ et σ'_v .

- Revenons à $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\ (n ; K)$ non ramifier .

Soit $\Delta^1 = (\frac{d}{dx}) - A^1$, $\hat{F} = \hat{B}_2 \ldots\ldots \hat{B}_r\, x^L e^Q$, d'après le théorème II .4.1 il existe $\hat{B}_1 \in \mathrm{End}\ (n ; \forall\ \{x\}_{S1})$ tel que :

$\Delta^1 = \quad = \Delta^{\hat{B}_1}$ ($\Delta^{\hat{B}_1} = \dfrac{d}{dx} - (B_1^{-1} - \dfrac{d\hat{B}}{dx} - B_1^{-1}\hat{A}\hat{B}_1))$,

soit méromorphe et admette une décomposition en blocs du premier niveau Δ^1_j , a $k(\mathrm{End}\,\Delta^1_j) \leq k_2 < k_1 = k\,(\mathrm{End}\,\Delta)$.

Si $\hat{B}_1$ converge , on peut prendre $\hat{B}_1 = I$, et il ne se passe rien .

Supposons donc $\hat{B}_1$ divergente . On va appliquer à Δ^1 et $\hat{R} = \hat{B}_1$ une variante du lemme IV .2.6 (on applique ce lemme aux blocs Δ^1_j) .

Supposons donnée une collection $\varphi = (\varphi_j)$ de K-isomorphisme de corps différentiels :

$$\varphi_j : K(\Delta^1_j) \to K_V(\Delta^1_j) ,$$

on a un isomorphisme de résommation :

$$\sigma'_V : K<\hat{B}> \to K_V< B_1>$$

(B_1 est la somme au sens de la k_1-sommabilité dans la direction α de $\hat{B}_1$) .
Il existe donc un isomorphisme unique de corps différentiel :

$$\psi_V : K<\hat{B}>(\Delta^1) \to K_V< B_1>(\Delta^1) ,$$

prolongeant φ et σ'_V .

(Ici B_1 étant solution d'une équation linéaire se prolonge à V) .

Nous allons maintenant utiliser un recouvrement ouvert finit $\mathcal{V} = \{ V_j\}_{j=1, \ldots, p}$ convenable du germe de disque pointé D* par des germes des secteurs ouverts de sommet a l'origine , les résultats précédents vont nous fournir des matrices de Stokes S_φ relatives à la donnée préalable de l'isomorphisme φ :

$$\varphi : K(\Delta^1) \to K_V(\Delta^1) ,$$

on procéde ensuite par récurrence sur $r'(\mathrm{End}\ \Delta)$ et supposerons φ obtenu lors que des étapes précédentes de la récurrence . On retrouvera alors les matrices de Stokes de premier niveau déjà définie .

On choisit le recouvrement $\mathcal{V}$ de telle sorte que les intersection trois à trois soient vides et que $V_{j\,,\,j+1} = V_j \cap V_{j+1}$ soit d'ouverture $\leq \pi/k_1$ et ne contienne qu'une ligne singulière qui en est la bissectrice $\beta_j \in \Sigma\,(B_j)$.

On choisit ensuite la direction de sommation α_j de telle sorte que :

$$\alpha_j \in [\beta_{j-1}\,,\,\beta_j]\ (j = 2,\ldots..,p\ )\ ,\ \alpha_1 \in [\beta_p\,,\,\beta_1]$$

$$\psi_{V_j} = \psi_j\ ,\ K_{V_j} = K_j'\ ,\ \sigma_{V_j}' = \sigma_j'\ \ B_{1,\,j} = \sigma_j'(\hat{B}_1)\ .$$

d'après le lemme IV .2.6 on a des isomorphismes de corps différentiels ψ_j :

$$\psi_j : K\langle\hat{B}_1\rangle(\Delta^1) \rightarrow K_j'\langle B_{1,\,j}\rangle(\Delta^1)\ .$$

prolongeant les isomorphismes de corps différentiels σ'_j et φ (d'abord on suppose φ donnée sur V_1 et ensuite prolongé analytiquement à $(V_2,\ldots..,V_p)$) .

On a :

$$\begin{cases} K(\Delta)\ \subset K\langle\hat{B}_1\rangle(\Delta^1) = K\langle\hat{B}_1\rangle(\Delta) \\ \text{Et} \\ K_j(\Delta) \subset K_j'\langle\hat{B}_{1,\,j}\rangle(\Delta^1) = K_j'\langle B_{1,\,j}\rangle(\Delta)\ . \end{cases}$$

On déduit des isomorphismes ψ_j , par restriction des K-isomorphismes λ_j :

$$\lambda_j : K(\Delta)\ \rightarrow\ Kj'(\Delta)\ .$$

Par ailleurs le prolongement analytique fournit des K-isomorphismes des corps différentiels :

$$\begin{cases} Pj : K_j'(\Delta) \rightarrow K'_{j+1}(\Delta) \qquad j=1,\ldots,p-1 \\ \text{Et} \\ P_p : Kp'(\Delta)\ \rightarrow K_1'(\Delta)\ . \end{cases}$$

On désigne par Ui (resp :Up) l'unique isomorphisme de corps différentiel rendant commutatif le diagramme ($j = 1,\dots, p-1$) :

$$\begin{tikzcd} K(\Delta) \arrow[r, "\lambda_j"] \arrow[d, "Ui"'] & K_j'(\Delta) \arrow[d, "P_j"] \\ K(\Delta) \arrow[r, "\lambda_{j+1}"'] & K_j'(\Delta) \end{tikzcd}$$

(resp : le diagramme analogue) .

Les K-isomorphismes Uj sont les isomorphismes de Stokes relatifs à l'isomorphismes φ .

Si on change l'isomorphismes φ , les isomorphismes de Stokes sont modifiés par conjugaison par un élément de $G(\Delta^1) = \hat{G}_{S1}(\Delta)$.

Un changement de secteur de sommet l'origine peut transformer un des isomorphismes de Stokes en un élément de $G(\Delta^1)$.

Ainsi le groupe engendré par $G(\Delta^1)$ et les isomorphismes de Stokes relatifs à φ ne dépend pas de φ .

Lemme IV .2.7 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End(n ; K)$, non ramifiè .

Soit $\hat{B}_1 \in GL(n ; \forall\{x\}_{S1})$ et $\Delta^1 = \Delta^{B1}$ méromorphe admettant la décomposition en blocs de premier niveau $\Delta^1{}_j$.

Soit : $\varphi : K(\Delta^1) \to K_1(\Delta^1)$ un K-isomorphisme de corps différentiels .
Alors :

(i) les isomorphismes de Stokes U_j $(j=1,\dots,p)$ de Δ relatifs à φ sont des éléments de groupe de Picard-Vessiot $G(\Delta)$.

(ii) le groupe $G(\Delta)$ est l'adhérence au sens de Zariski du groupe engendré par $\hat{G}_{S1}(\Delta)$ et les isomorphismes de Stokes U_j $(j=1,\dots,p)$ relatifs à φ .

<u>Preuve :</u>

(i) Soit $\hat{\zeta} \in K(\Delta)$ invariant par $\hat{G}_{S1}(\Delta)$.

On a $\hat{\zeta} \in K<\hat{B}_1>(\Delta^1)$ et $\hat{\zeta}$ est invariant par le groupe $G[K<\hat{B}_1>(\Delta^1) ; K<\hat{B}_1>] = \hat{G}_{S1}(\Delta^1)$.

Mais par le théorème IV 2.2 :

$$\hat{G}_{S1}(\Delta^1) = G(\Delta^1) = \hat{G}_{S1}(\Delta) .$$

Ainsi :

$$\hat{\zeta} \in K<\hat{B}_1>(\Delta^1) .$$

notons :

$$\xi_j = \lambda_j(\hat{\zeta}) = \psi_j(\hat{\zeta})$$

$\big(\lambda_j : K(\Delta) \to K_j'(\Delta) ,\ \psi_j : \quad K<\hat{B}_1>(\Delta^1) \to K_j'<B_{1,j}>(\Delta^1)\big)$.

$(\lambda_j \cong \psi_j)$ mais la restriction de ψ_j à $K<\hat{B}_1>$ est σ'_j :

$$\psi_j / K<\hat{B}_1> = \sigma'_j .$$

Donc ξ'_j est la somme de $\hat{\zeta}$ (au sens de la k_1-sommabilité) dans la direction α_j .

<u>Remarque :</u>

1 . On notera que le théorème IV .4.3 n'est pas une conséquence immédiate du théorème II .4.1(ii) ; l'application σ' ($K <F> \to K <F>$) aurait pu ne pas être définie , le résultat de la sommation d'un élément de K <F> pouvant a priori dépendre de la manière dont il est écrit .

2 . On prendre d'ailleurs garde à ne pas sommer dans des directions différentes les éléments d'un même niveau (ce qui pourrait conduire à un résultats faux) .

Soit : $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in \mathrm{End}\,(n\,;L)$, non ramifier .

Soit $\hat{F} = \hat{B}\, X^L\, e^Q$ une solution fondamentale de Δ . Sot $F = \sigma\,(\hat{F})$ une somme naturelle de $\hat{F}$ (au sens du théorème II 4.1(ii)) sur un germe de secteur ouvert V .

<u>Corollaire IV .2.8 :</u>

Soit $G\,(x\,, y_0\,, y_1\,, \ldots, y_m) \in \forall\,\{x\}[\,y_0\,, y_1\,, \ldots, y_m\,]$. Soit $\hat{F}$ $\in \forall\,[[x]]$ une solution formelle de l'équation différentielle G $(x\,,\hat{F},\hat{F}',..,\hat{F}^{(m)}) = 0$.

Alors :

F est une solution de l'équation différentielle $G\,(x\,, F\,, F',\ldots, F^{(m)}) = 0$ sur un germe de secteur ouvert V .

(Conséquence du théorème IV .2.3 et de Lemme IV 2.9 infra) .

<u>Lemme IV 2.9 :</u>

Soit V_0 un secteur ouvert . Soit $k > 0$. Soit $\phi\,(x\,, y\,, z)$ polynôme en $y\,, z \in \forall^n$ à coefficient dans $A_S\,(V_0)$, ou analytique en $(x\,, y\,, z)$ au voisinage de $(0\,, y_0\,, z_0) \in \forall^{2n+1}$. Supposons qu'il existe $y \in (\forall\,[[x]]_S)^n$ vérifiant $\phi\,(x\,, y\,,\frac{dy}{dx}) = 0\ \left(y\,(0) = y_0\,, \frac{dy}{dx}(0)\right) = z_0$

supposons que $\frac{\partial\phi}{\partial z}(x\,, y\,,\frac{dy}{dx}) \in GL\,(n\,;\forall\,[[x]]_S\,[x^{-1}])$.

Alors :

il existe $y \in (A_S(V))^n$, solution de $\phi\,(x\,, y\,,\frac{dy}{dx}) = 0$, avec $J(y)=y$

Notation :

On note ($K_{S1},\dots, K_{Sj}$) le corps différentiel , engendré par $K_{S1},\dots, K_{Sj}$.

Proposition IV 2.10 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in$ End (n ; K) , non ramifier .

Soient $k_r < \dots < k_1$ les pentes > 0 du polygone de Newton N(End Δ) . Pour $s \geq s_i$ on désigne par i(s) l'unique indice $i \in [1 , r]$ tel que $s \in [s_i , s_{i+1}[$ ($i \in [1 , r-1]$) ou $s \in [s_r , +\infty [$. Alors :

1. $K_S \cap K(\Delta) \subset K_{Si\,(s)}$, $s \geq s_1$.
(et plus précisément $K_S \cap K (\Delta) \subset K <B_1 ,B_2, \dots, B_{i(S)}> \subset (K_{S1})$

2. $K_S \cap K (\Delta) \subset K$, $s \geq s_1$.

Preuve :

1. Soit $s \geq s_1$, considérons $K_S \cap K (\Delta)$;
On a $K_S \cap K (\Delta) \subset K < B_1 ,\dots, B_{i(S)}>$

D'après le théorème IV .2.2 :

$$G^{i(S)} (\Delta) = G [K < B_1, \dots, B_{i(S)}> (\Delta) ; K < B_1, \dots, B_{i(S)}>] = G_S (\Delta) .$$

Et par la proposition III .6.6 on obtient :

$$K (G^{i(s)} (\Delta)) = K_S \quad ; \quad s \geq s_1 .$$

Donc :

$$K (G^{i(s)} (\Delta)) \subset K_{Si(s)} .$$

D'où :

$$K_S \cap K (\Delta) \subset K_{Si(s)} ,$$

(car i(s) est l'unique indice tel que $i \in [s_i , +\infty[$) .

2. Si $1< s < s_1$, on a :

$$\hat{K}_S \cap K(\Delta) \subset K_{Si(s)} ,$$

et par le théorème IV .2.2(ii) ,

$$G\,[K < \hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_{i(S)} > (\Delta)\,;\, K < \hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_{i(S)} >] = \hat{G}_S\,(\Delta) .$$

Et d'après (ii)

$$G\,[K < \hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_{i(S)} > (\Delta)\,;\, K < \hat{B}_1, \ldots, \hat{B}_{i(S)} >] = \hat{G}\,(\Delta) .$$

On conclu par la proposition III .6.6 que :

$$K_S \cap K(\Delta) = K$$

Corollaire 4-13 :

Soit $\Delta = (\frac{d}{dx}) - A$, avec $A \in End\,(n\,;\,K)$, Soient $k_r < \ldots < k_1$ les pentes >0 (s'il y en a) du polygone de Newton (N End Δ) de End Δ .

Soit $\hat{\zeta} \in \hat{K} \cap K(\Delta)$, alors $\xi \in K$ ou il existe $i \in [1\,,\,r]$ unique tel que $\xi \in K_{Si}$ et qu'il n'existe pas $s \in\,]1,s_i\,[$ tel que $\xi \in K_S$. Donc ces conditions , on a de plus $\xi \in K<B_1\,,\ldots,B_{i(s)}> \subset (K_{S1},\ldots, K_{Si})$.

BIBLIOGRAPHIE

[1] D .BERTRAND : « travaux récents sur les points singuliers des équations différentielles linéaires » . springer lect note in MATH 790 (1980) .

[2] C . H . FRANKE : « Picard-Vessiot théorie of linear homogeneous differences equations » .Trans An Math Soc .108 (1963) pp 491-515 .

[3] I . KAPLANSKY : « An introduction to differential algebra » . (1976), Hermann , Paris .

[4] E . R . KOLCHIN : « Algebraic Matrices groups and the Picard-Vessiot theory of Homogenous linear ordinary differential equation. ». Annals of Math, vol 49,n^{0}1 (1948) pp1-42.

[5] E . R . KOLCHIN : « Differential Algebra and Algebraic Groups » , (1973) Academic Press .

[6] J . MARTINET , J.P . RAMIS : « Problèmes de modules pour des équations différentielles non linéaires du premier ordre », Publ . Math . I.H.E.S . 55 (1982) , p p 63-164.

[7] B . MALGRANGE : « Remarques sur les équations différentielle à points singuliers irréguliers » . Springer Lect Notes in Math 712 (1979) , pp 77-88 .

[8] B . MALGRANGE : « La classification des connexions irrégulières à une variable » . Birhauser (1983) .

[9] J . P . RAMIS : « Les séries k-sommables est leurs applications ». Springer . Lect Notes in Physiques 126 (1980) .

[10] J . P . RAMIS : « Dévissage Gevrey ». Astérisque 59-60 (1978) pp .173-204.

[11] J . P . RAMIS : « Théorème d'indice Gevrey pour les équations différentielles ordinaires » . Memoirs of the Am . Math . Soc .296 (1984) .

[12] J . P . RAMIS : « Phénomène de Stokes et resommation » . Note . Soumise aux C .R .A .S . Paris (1985) .

[13] J . P . RAMIS : « Phénomène de Stokes et filtration Gevrey sur le groupe de Picard-Vessiot » . Note Soumise aux C .R . A . S. Paris (1985) .

[14] Y . SIBUYA : « Stokes phenomena ». Bull . Amer .Math .Soc .83-5 (1977) pp .1075-1077 .

[15] P .ROBBA : « Lemme de Hansel pour les opérateurs différentiels ». L'Ens . Math .26 , 3.4 (1980), p p . 279-311 .

[16] B . L .TURRITTIN : « Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations » . Acta Math . 93 (1955) . pp. 27-66 .

[17] W . WASOW : « Asymptotic expansions for ordinary differentials equations » .(1965) Interscience Publishers

[18] C . WOOD : « The model theory of differential fields » Israël . Journ . of Math . 25 (1976) , pp. 331-352 .

[19] F . LORAY : « Quelques aspects des mathématiques actuelles ».ellipse ,pp111-178 (2000) .

[20] P . DELIGNE : « Equation différentielle à singuliers régulières » , lect Netes in Math n^0 163 (1970) .

[21] Dj . ACHOUR : « Sur le théorème de MAILLET » , Thèse de magister .