

Université des sciences et de la technologie Houari Boumédiène  
Faculté des Mathématiques  
Département de Recherche Opérationnelle

Thèse de Magister en MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherches Opérationnelles

(Mathématiques de Gestion)

Présentée par :

M<sup>elle</sup> KAHOUL Nawel

## **THEME**

### ***SUR UNE PROPRIÉTÉ DE RÉGULARITÉ CYCLIQUE DANS LES GRAPHS***

Soutenue le Dimanche 06-10-2002

Devant le jury :

Mrs KHELLADI	Abdelkader	Professeur	Président
BERRACHEDI	Abdelhafid	Maître de conférence	Directeur de thèse
AÏDER	Méziane	Maître de conférence	Examineur
AÏT HADDADÈNE	Hacène	Maître de conférence	Examineur
MAAMRA		Mohamed Saïd	Chargé de cours
Examineur			

## *Remerciements*

Je remercie Monsieur A.KHELLADI d'avoir bien voulu présider le jury. Je remercie aussi Messieurs M.AÏDER, H.AÏT HADDADENE et M.S.MAAMRA d'avoir été membres de ce jury. Je remercie particulièrement Monsieur A.BERRACHEDI qui m'a honoré de suivre à terme ce travail et d'avoir été membre du jury.

Je dédie ce travail à la mémoire de l'être qui m'est le plus cher, à ma mère. Ainsi qu'à mon père et mes frères et sœurs.

## Sommaire

INTRODUCTION.....	03
<b>CHAPITRE 1.....</b>	<b>06</b>
Définitions et notations	
<b>1.0</b> Introduction.....	07
<b>1.1</b> Graphes.....	08
<b>1.2</b> Intervalles.....	16
<b>1.3</b> Quelques graphes particuliers.....	17
<b>CHAPITRE 2.....</b>	<b>25</b>
Les graphes cycles réguliers	
<b>2.0</b> Introduction.....	26
<b>2.1</b> Définitions.....	27
<b>2.2</b> Résultats de base.....	28
<b>2.3</b> Les graphes [3,1,6]-cycle réguliers.....	29
<b>2.4</b> Opérations sur les graphes [3,1,6]-cycle réguliers.....	39
<b>CHAPITRE 3.....</b>	<b>45</b>
Les graphes de la classe $\mathfrak{S}$	
<b>3.1</b> Définition.....	46
<b>3.2</b> Exemples de graphes de la classe $\mathfrak{S}$ .....	46
<b>3.3</b> Résultats de base.....	54
<b>3.4</b> Opérations sur les graphes de la classe $\mathfrak{S}$ .....	85
<b>CONCLUSION.....</b>	<b>92</b>

# INTRODUCTION

*« l'enseignement de la Recherche Opérationnelle ne peut  
avoir pour but la seule connaissance, il vise l'action. »*

**R.Faure**

## INTRODUCTION

Une des parties de la science fût la Recherche Opérationnelle, une discipline carrefour où se rencontrent l'économie, les mathématiques et l'informatique. En pratique, nous pouvons dire qu'elle représente, la démarche suivie pour élaborer rationnellement de bonnes décisions, à la lumière d'un certain nombre de contraintes, tantôt dans un univers certain, et tantôt dans un incertain.

Bien que la Recherche Opérationnelle remonte à l'antiquité et que la plupart de ses méthodes aient été découvertes entre le XVII<sup>e</sup> siècle et les années 30 du XX<sup>e</sup>, elle ne s'est développée qu'à partir du moment où les ordinateurs furent à la portée de chacun. Elle s'est appuyée sur des connaissances mathématiques importantes et variées, telles que les structures algébriques, l'algèbre linéaire, la théorie des graphes ... .

Cette dernière donne l'occasion de représenter les situations réelles sous la forme de graphes topologiques valués, comme les diagrammes de Hasse, les Hypercubes, les arborescences, qui en favorisent la compréhension.

Dans l'avant propos de son livre «Graphes », C.Berge note que la théorie des graphes a eu un développement bien étrange, d'abord apparue dans le magazine des curiosités mathématiques (« les ponts de Königsberg » (« Kaliningrad » aujourd'hui)), puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (Kirchoff), elle a été utilisée par la chimie, la psychologie et l'économie avant même d'avoir été constituée. Elle est devenue aujourd'hui une des branches les plus florissantes de l'algèbre moderne, celle à laquelle on fait appel dans la plupart des problèmes mathématiques de nature combinatoire. Elle n'a pu prendre sa forme actuelle que grâce aux efforts de certains spécialistes de la Recherche Opérationnelle et sous l'impulsion de préoccupations pratiques.

Ainsi la représentation graphique d'une situation réelle, consiste en la représentation des éléments essentiels par des points ou petits cercles qu'elle relie chaque paire d'entre eux par une arête ou arc, selon le cas, dès qu'une relation, relative à la situation, surgit.

Ce manuscrit est articulé autour de trois chapitres.

Au premier chapitre, on donne les définitions de base, familiarisant tout lecteur aux notions de graphes.

Le deuxième chapitre est consacré à l'étude des graphes  $[\mu, \nu, \gamma]$ -cycle réguliers, définis par Michel Mollard, on y trouve des propriétés de ces graphes, ainsi que certains résultats importants. Nous le terminons par une reprise de cette étude, dans un cas particulier où un théorème est proposé de façon similaire à celui déduit par M.Mollard à propos des  $(0,2)$ -graphes, classe des graphes définie par H.M.Mulder.

Dans le troisième chapitre, on définit une classe de graphes, notée  $\mathfrak{S}$ . Cette classe est celle des graphes pour lesquels toute chaîne induite de longueur trois, reliant deux sommets distincts, appartient à un unique cycle induit de longueur six. Certains résultats y sont donnés.

# CHAPITRE 1

## Définitions et notations

*« la science nous apprend à connaître, un art, à faire. »*  
d'un livre de **Senior** vice-président de **Xerox**,  
**Mayron Tribus**, selon **Webstre**.

## 1.0 INTRODUCTION

Les graphes sont des êtres mathématiques, auxquels l'homme a fait recours pour modéliser des problèmes pratiques le plus simplement possible, afin d'en établir une solution directe et efficace.

La théorie des graphes est née en 1736, avec le premier papier publié par L.Euler(1707-1783) et dans lequel il a répondu par la négative au problème historique, à savoir le problème des ponts de « Königsberg ».

En 1847, G.R.Kirchoff(1824-1887) développa la théorie des arbres pour leurs applications dans les réseaux électriques, alors que dix années auparavant A.Cayley(1821-1895) les découvrit en essayant d'énumérer les isomères des composés hydrocarbonés de la forme  $C_nH_{2n+2}$ .

La notion de distance introduite par F.Harary apporta la preuve tangible qu'on n'a pas fini de découvrir les propriétés fascinantes des structures appelées graphes puisque ces derniers seront munis d'une distance au sens topologique.

La notion d'intervalle introduite par H.M.Mulder, a elle aussi mis en évidence l'aspect métrique des graphes. En effet, elle a permis la définition de plusieurs classes de graphes telles que les graphes intervalle-réguliers et distance-monotones.

Enfin, jusqu'à nos jours, la théorie des graphes n'a pas cessé son développement, ainsi que l'élargissement des domaines de ses applications et ceci grâce à de nombreux savants de tout grade.



## 1.1 GRAPHERS.

On adopte la terminologie de Bondy et Murty [10]. Le lecteur peut se référer à [2], [7], [9] et [27] pour les notions non explicitées dans ce texte.

### 1.1.1 Notions de base.

Un **graphe** est un couple  $(V,E)$ , noté  $G$ , constitué d'un ensemble fini  $V$  d'éléments appelés **sommets** et d'un ensemble  $E$  de paires non ordonnées de sommets distincts appelées **arêtes**. Muni de ces propriétés, ce graphe est simple, non orienté et fini d'ordre  $|V|$ . C'est ce que nous considérerons sauf spécifications contraires.

Soit  $G$  un graphe. Les ensembles de sommets et d'arêtes sont notés  $V(G)$  et  $E(G)$  respectivement.

Pour une arête  $\{u,v\}$  de  $G$ , qu'on note  $uv$ , on dit que :

- $uv$  est incidente à  $u$  (resp.  $v$ ),
- $u$  et  $v$  sont les extrémités de  $uv$ ,
- $u$  et  $v$  sont adjacents,
- $u$  (resp.  $v$ ) est un voisin de  $v$  (resp.  $u$ ).

Deux arêtes sont adjacentes si elles ont une extrémité commune.

L'ensemble des voisins d'un sommet  $u$  donné, est  $N(u)$  :

$$N(u) = \{v \in V / uv \in E\}.$$

Le degré d'un sommet  $u$ , noté  $d_G(u)$  ( $d(u)$  s'il n'y a pas de confusion), est le nombre de ses voisins.

La valeur minimale des degrés, notée  $\delta(G)$ , est appelée le degré minimum de  $G$ . Tandis que la valeur maximale, notée  $\Delta(G)$ , est appelée le degré maximum de  $G$ .

Si tous les sommets de  $G$  ont le même degré  $d$ , alors le graphe  $G$  est **régulier**. Il est aussi dit **d-régulier**.

Pour tout graphe  $G$ , nous avons

$$\sum_{u \in V(G)} d_G(u) = 2 |E(G)| .$$

$m_G(u, W)$  ( $m(u, W)$  s'il n'y a pas confusion) est le nombre d'arêtes qui relie un sommet  $u$  à un sous-ensemble de sommets  $W$  .

Une **clique** (resp. **stable**) dans  $G$  est un sous-ensemble de sommets deux à deux adjacents (resp. non adjacents). Si  $V(G)$  est une clique, le graphe  $G$  est dit complet et est noté  $K_n$ , où  $n = |V(G)|$  .

Un **couplage** est un sous-ensemble d'arêtes deux à deux non adjacentes. Les sommets dont les arêtes du couplage sont incidentes sont dits **saturés**.

Un **graphe biparti** est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en  $V_1 \cup V_2$ , tel que toute arête de  $E(G)$ , a une extrémité dans  $V_1$  et l'autre dans  $V_2$ . Donc  $V_1$  et  $V_2$  sont deux stables. Nous avons aussi la formule suivante :

$$\sum_{u \in V_1(G)} d_G(u) = |E(G)| = \sum_{u \in V_2(G)} d_G(u)$$

ou encore

$$r |V_1| \leq s |V_2|$$

où  $r$  est une borne inférieure des degrés dans  $V_1$  et  $s$  est une borne supérieure de ceux de  $V_2$ .

Un graphe biparti est dit **semi-régulier**, si tous les sommets d'un stable de la bipartition ont le même degré.

Si dans un graphe biparti  $G$ , toutes les arêtes possibles entre  $V_1$  et  $V_2$  figurent alors  $G$  est le graphe biparti complet  $K_{p,q}$ , avec  $p = |V_1|$  et  $q = |V_2|$ .

Le graphe  $K_{1,1,m}$  consiste en une arête  $uv$  avec  $m$  sommets adjacents à  $u$  et  $v$ . Le graphe  $K_{1,1,2}$  est aussi noté  $K_4-e$ .

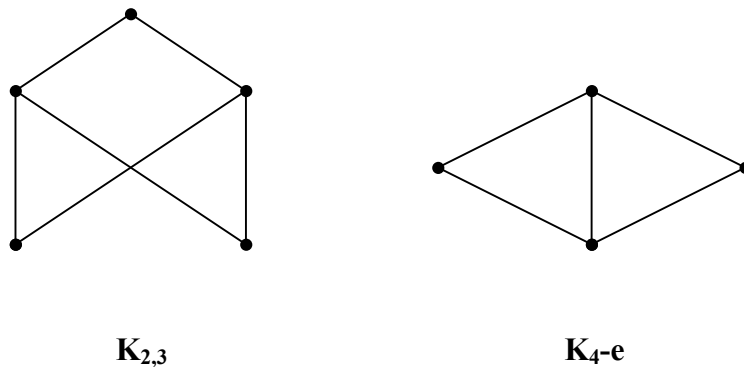


Figure 1.1

Un sous-graphe de  $G$ , est un graphe  $G' = (V', E')$  où  $V'$  est un sous-ensemble de  $V(G)$  et  $E'$  un sous-ensemble de  $E(G)$  dont les extrémités sont dans  $V'$ . Dans le cas où  $V' = V(G)$ ,  $G'$  est appelé **le graphe partiel de  $G$** .

Si  $E'$  contient toutes les arêtes de  $E$  joignant deux sommets de  $V'$ , alors  $G'$  est appelé **le sous-graphe induit par  $V'$** , il est noté  $G_{V'}$ .

Si  $V'$  contient toutes les extrémités de  $E'$ , on dira que  $G'$  est **un sous-graphe induit par  $E'$**  et il est noté  $G_{[E']}$ .

**Une chaîne de longueur  $n$** , dans un graphe  $G$ , est une séquence de sommets tous distincts  $u_0, u_1, \dots, u_n$  où chaque paire de sommets consécutifs sont adjacents. Elle est notée, par abréviation,  **$(u_0, u_n)$ -chaîne**.

Pour  $n \geq 2$ , les sommets  $u_1, \dots, u_{n-1}$  sont les sommets internes de la  $(u_0, u_n)$ -chaîne et  $u_0, u_n$  sont ses extrémités.

Une chaîne est dite **induite** si aucune paire de ses sommets non consécutifs ne sont adjacents. On peut définir une chaîne induite comme étant une chaîne dont les sommets engendrent un sous-graphe qui est une chaîne, ou encore comme étant une chaîne minimale (tout sous-graphe de cette chaîne induite, obtenu par suppression d'une arête quelconque, n'est plus une chaîne). Dans un graphe biparti  $(V_1 \cup V_2, E)$ , une chaîne est dite **saturante** si elle utilise tous les sommets de  $V_1$  ou de  $V_2$ .

Un graphe est **connexe** si pour toute paire de sommets  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ , il existe une  $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ -chaîne les reliant.

Sauf spécifications contraires, les graphes utilisés sont supposés connexes.

Un **cycle élémentaire de longueur  $n$  de  $\mathbf{G}$** , noté  **$n$ -cycle**, est un sous-graphe connexe de  $\mathbf{G}$  sur  $n$  sommets  $\{\mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_n\}$  de degré 2.

Un cycle est **induit** si aucune paire de ses sommets non consécutifs ne sont adjacents. Il est dit **hamiltonien** s'il passe par chaque sommet du graphe une et une seule fois.

Un graphe biparti ne contient pas de cycles de longueurs impairs.

La **maille** de  $\mathbf{G}$  est la longueur du plus petit cycle dans  $\mathbf{G}$ .

### 1.1.2 Distance et décomposition en niveaux.

Soient  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{v}$  deux sommets de  $\mathbf{G}$ . La longueur d'une plus courte  $(\mathbf{u},\mathbf{v})$ -chaîne est appelée **la distance de  $\mathbf{u}$  à  $\mathbf{v}$**  et est notée  $\mathbf{d}_G(\mathbf{u},\mathbf{v})$  ( $\mathbf{d}(\mathbf{u},\mathbf{v})$  s'il n'y a pas confusion). On appelle aussi une plus courte chaîne dans  $\mathbf{G}$ , **une géodésique**.

Nous avons alors :

- **L'excentricité d'un sommet  $\mathbf{u}$**  est la valeur

$$\mathbf{e}_G(\mathbf{u}) = \underset{v \in V(G)}{\text{Max}} \mathbf{d}_G(\mathbf{u},\mathbf{v})$$

- **Le diamètre dans un graphe  $\mathbf{G}$**  est la valeur

$$\mathbf{diam}(G) = \underset{u \in V(G)}{\text{Max}} \mathbf{e}_G(\mathbf{u})$$

Dans un graphe  $\mathbf{G}$ , le sommet  $\mathbf{v}$  est dit **diamétral** de  $\mathbf{u}$ , si  $\mathbf{d}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{diam}(G)$ . Le nombre de sommets diamétraux d'un sommet  $\mathbf{u}$  donné peut varier de zéro à  $n-1$ , si  $n$  est l'ordre de  $\mathbf{G}$ .

Pour un sommet  $\mathbf{u}$  de  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{N}_i(\mathbf{u})$  est l'ensemble des sommets à distance  $i$  de  $\mathbf{u}$ . L'ensemble des voisins de  $\mathbf{u}$ ,  $\mathbf{N}(\mathbf{u})$  est  $\mathbf{N}_1(\mathbf{u})$ .

Une décomposition en niveaux relative à un sommet  $u$  de  $G$  est une partition de l'ensemble des sommets  $N_0(u), N_1(u), \dots, N_p(u)$ , où  $p = e_G(u)$  et  $N_i(u)$  est appelé le  $i^{\text{ème}}$  niveau dans  $G$ ,  $i = 1, \dots, p$ .

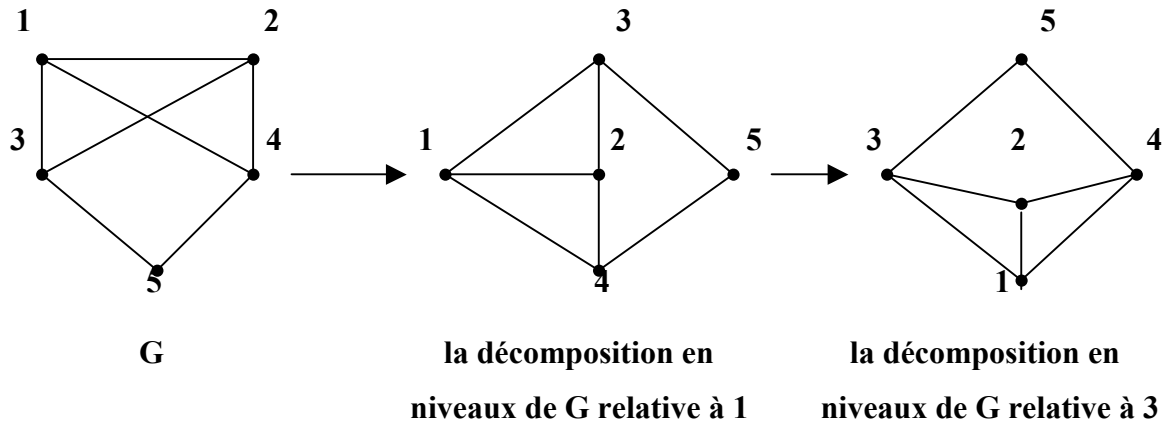


Figure 1.2

### 1.1.3 Morphisme de graphes.

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes.  $G$  est dit **homomorphe** à  $H$ , s'il existe une application

$$f: V(G) \longrightarrow V(H)$$

où

$$uv \in E(G) \Rightarrow f(u)f(v) \in E(H) \text{ ou } f(u) = f(v).$$

Dans le cas où :

- 1)  $f$  est bijective,
- 2)  $f$  et  $f^{-1}$  sont des homomorphismes

$f$  est appelée **isomorphisme** et  $G$  et  $H$  sont dits **isomorphes**.

- $f$  est un **automorphisme** sur  $G$ , s'il est un isomorphisme de  $G$  sur lui-même.
- $f$  est un **homéomorphisme** de  $G$ , dans  $H$  si  $f$  est un homomorphisme où pour toute arête  $uv$  de  $E(H)$  ;  $f^{-1}(uv)$  induit une chaîne dans  $G$ .

Nous dirons que :

a)  $G$  est un graphe **sommet-transitif** (resp. **arête-transitif**) si pour chaque paire de sommets (resp. arêtes)  $u$  et  $v$  (resp.  $uu'$  et  $vv'$ ), il existe un automorphisme  $f$  de  $G$  tel que  $v = f(u)$  (resp.  $vv' = f(uu')$ ).

b)  $G$  est un graphe **distance-transitif** si pour tout  $u, u', v$  et  $v'$  sommets de  $G$  tels que  $d(u,v) = d(u',v')$ , il existe un automorphisme  $f$  de  $G$  tel que

$$f(u) = u' \quad \text{et} \quad f(v) = v'.$$

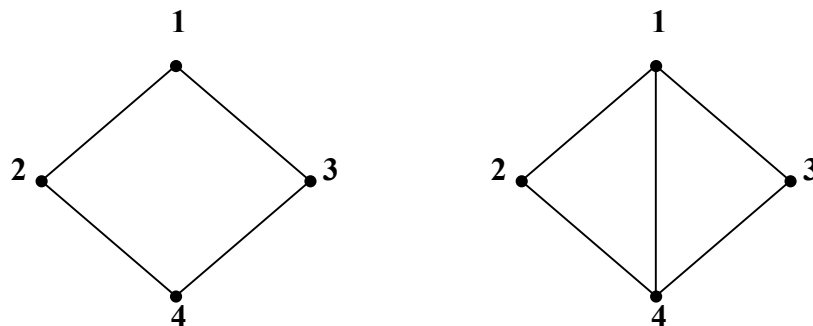


Figure 1.3

### 1.1.4 Opérations sur les graphes.

#### Somme cartésienne de deux graphes.

La somme cartésienne des graphes  $G$  et  $H$  est le graphe, noté  $G \oplus H$ , dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien  $V(G) \times V(H)$  et où les sommets  $(u,v)$  et  $(u',v')$  sont adjacents si et seulement si  $(u = u' \text{ et } vv' \in E(H))$  ou  $(uu' \in E(G) \text{ et } v = v')$ .

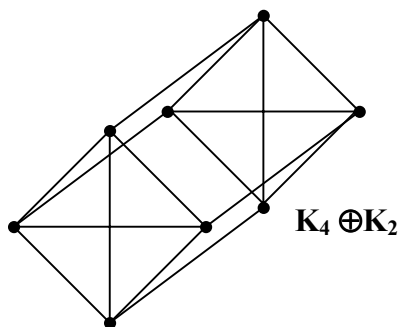


Figure 1.4

**Produit cartésien de deux graphes.**

Le produit cartésien des graphes  $G$  et  $H$  est le graphe, noté  $G \otimes H$ , dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien  $V(G) \times V(H)$  et où les sommets  $(u,v)$  et  $(u',v')$  sont adjacents si et seulement si  $(uu' \in E(G)$  et  $vv' \in E(H))$ .

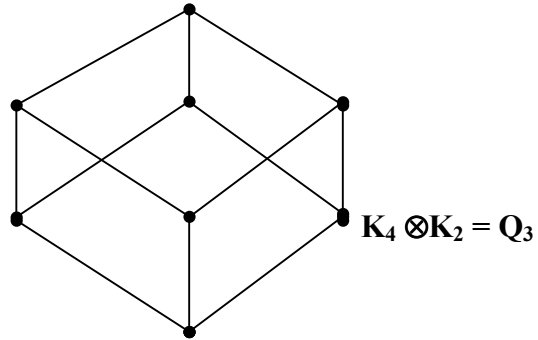


Figure 1.5

**Identification de sommets.**

Soit  $A$  un sous-ensemble de sommets de  $G$ . L'identification des sommets de  $A$  consiste à remplacer tous les sommets de  $A$  par un sommet  $a$  qui sera relié à tous les voisins des sommets de  $A$ . Le graphe obtenu est noté  $G/A$ .

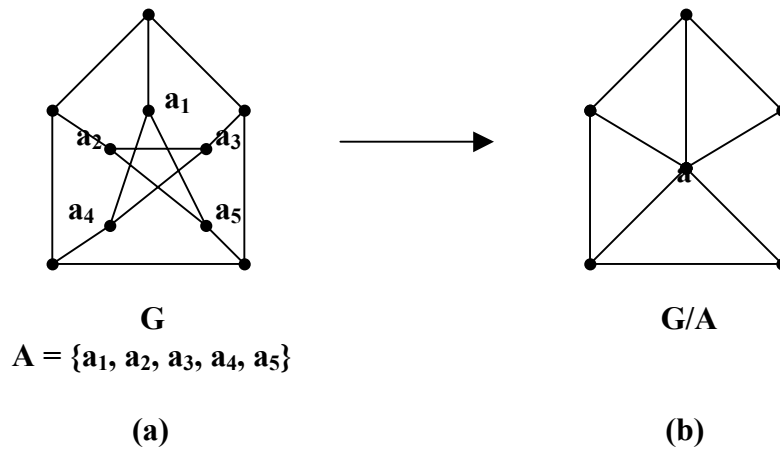


Figure 1.6

### Contraction d'une chaîne.

Soit  $I$  une chaîne de  $G$  dont tous les sommets internes sont de degré 2. La contraction de la chaîne  $I$  consiste à supprimer tous ses sommets internes et relier ses extrémités par une arête. La chaîne  $I$  est dite **contractante**.

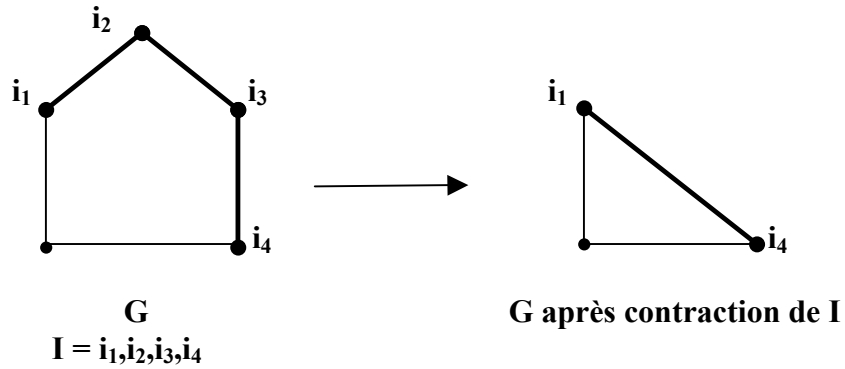


Figure 1.7

### Subdivision d'un graphe G.

Une subdivision élémentaire est un graphe obtenu à partir de  $G$  par insertion d'un sommet de degré 2 sur une arête de  $G$ .

Une subdivision de  $G$  est un graphe obtenu à partir de  $G$  par une succession de subdivisions élémentaires. Une  $p$ -subdivision de  $G$  est un graphe obtenu par insertion de  $p$  sommets sur chaque arête.

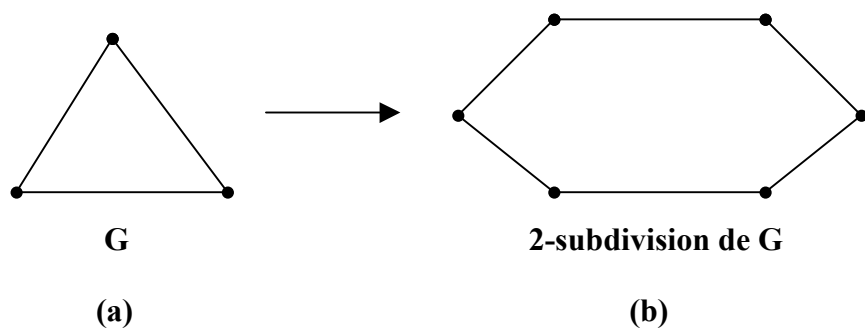


Figure 1.8



## 1.2 INTERVALLES.

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets de  $G$ , l'intervalle  $I_G(u,v)$  ( $I(u,v)$  s'il n'y a pas confusion) est l'ensemble des sommets de  $G$  appartenant aux plus courtes  $(u,v)$ -chaînes.

Trivialement, un sommet  $w \in I(u,v)$  si et seulement si :

$$d(u,w) + d(w,v) = d(u,v).$$

Nous désignerons par intervalle aussi bien l'ensemble  $I(u,v)$  que le sous-graphe induit par  $I(u,v)$ .

Un ensemble  $C$  de sommets de  $G$  est convexe si :

$$\forall u, v \in C : I(u,v) \subseteq C.$$

Un convexe  $C$  de  $G$  désigne l'ensemble des sommets de  $C$  aussi bien que le sous-graphe de  $G$  induit par  $C$ .

Une classe importante de graphes est celle des graphes dits **intervalle-monotones**. Ils sont des graphes où tout intervalle est convexe.

### 1.2.1 Proposition (Mulder [26]).

Si  $G$  est sans sous-graphe induit homomorphe à  $K_{2,3}$  ou au graphe de la figure 1.9 alors  $G$  est intervalle-monotone.

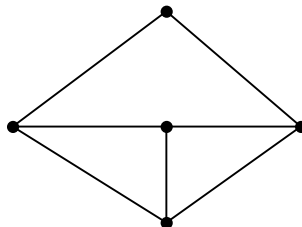


Figure 1.9

### 1.2.2 Proposition (Mulder [26]).

Si  $G$  est sans sous-graphe homéomorphe à  $K_{2,3}$  alors  $G$  est intervalle-monotone.

Une autre classe de graphes est celle des graphes dits **intervalle-réguliers**. Ils sont des graphes où pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$ , le nombre des voisins de  $u$  appartenant à  $I(u,v)$  est précisément la distance entre  $u$  et  $v$ .

Tous les graphes intervalle-réguliers étaient intervalle-monotones. H.M.Mulder [25] et [26] avait proposé la conjecture suivante :

### **Conjecture.**

Un graphe intervalle-régulier serait intervalle-monotone.

Cette conjecture est fautive (Berrachedi [4]) et (Mollard [22]).

## **1.3 QUELQUES GRAPHES PARTICULIERS.**

### **1.3.1 Le graphe de l'Hypercube.**

L'hypercube de dimension  $n$ , noté  $Q_n$ , est le graphe dont l'ensemble des sommets est celui des  $n$ -uplets de  $\{0,1\}^n$ , deux sommets  $u$  et  $v$  sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent en exactement une composante.

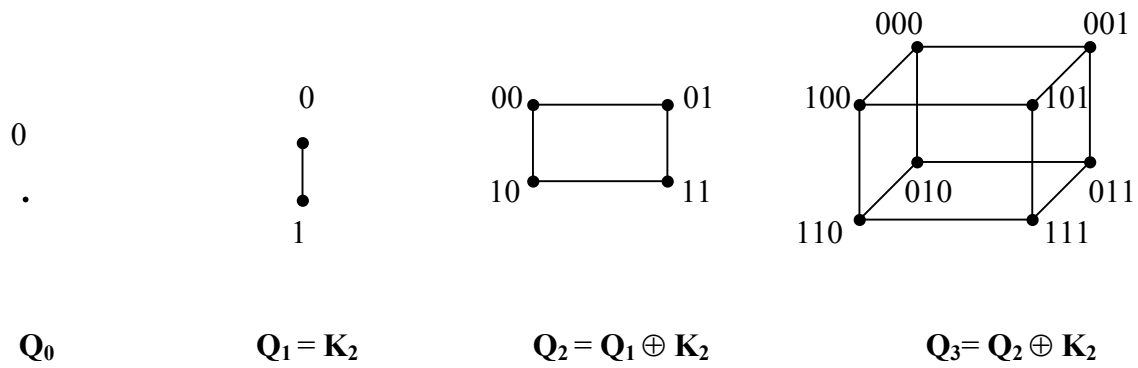
Cette représentation de  $Q_n$  est dite vectorielle. Une autre représentation, dite ensembliste, consiste en les éléments de l'ensemble des parties d'un ensemble  $S$ , à  $n$  éléments, comme sommets et deux sommets sont reliés par une arête si et seulement si leur différence symétrique possède un élément. Il s'ensuit que  $Q_n$  est le graphe de couverture du treillis booléen à  $2^n$  éléments.

Le passage de la représentation ensembliste à la vectorielle se fait en étiquetant chaque partie  $A$  de  $S$  par sa fonction caractéristique.

Notons que l'hypercube  $Q_n$  est biparti, régulier de degré  $n$ , sommet-transitif. Dans la décomposition en niveaux de  $Q_n$ , le niveau  $N_p$  peut être vu comme étant les sous-ensembles de cardinalité  $p$  de  $S$ , notés  $p$ -sous-ensembles.

On peut définir  $Q_n$  inductivement par :

$$Q_0 = K_1 \quad ; \quad Q_1 = K_2 \quad \text{et} \quad Q_n = Q_{n-1} \oplus K_2 \quad \forall n \geq 2.$$



**Figure 1.10**

### 1.3.2 Les $(0, \lambda)$ -graphes.

Soit  $\lambda$  un entier, avec  $\lambda \geq 2$ . Un graphe  $G$  est un  **$(0, \lambda)$ -graphe** si toute paire de sommets distincts ont  $\lambda$  voisins communs ou aucun. Le cas exclu  $\lambda = 1$ , engendre la classe des graphes sans 4-cycle.

Parmi les  $(0, \lambda)$ -graphes, qui sont définis par H.M.Mulder, on peut trouver  $K_1$ ,  $K_2$ ,  $K_{\lambda+2}$ ,  $K_{\lambda, \lambda}$  et  $K_{\lambda+2, \lambda+2}$  moins un couplage parfait. Pour  $\lambda \geq 2$ , plusieurs résultats étaient établis.

#### 1.3.2.1 Proposition (Mulder [24],[26]).

Un  $(0, \lambda)$ -graphe est régulier.

#### 1.3.2.2 Proposition (Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0, \lambda)$ -graphe. Alors  $|I(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \cap N(\mathbf{u})| \geq d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \lambda - 2$ , pour toute paire de sommets  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  telle que  $d(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \geq 2$ .

#### 1.3.2.3 Proposition (Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0, \lambda)$ -graphe de degré  $n$ . Si  $\text{diam}(G) \geq 4$ , alors  $n \geq \text{diam}(G) + 2\lambda - 4$ .

Pour un  $(0, \lambda)$ -graphe de degré  $n$  donné, le nombre de sommets est borné comme le montre le résultat suivant :

### 1.3.2.4 Proposition (Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0,\lambda)$ -graphe de degré  $n$ . Alors

$$1 + \frac{n(n-1)}{\lambda} \leq |V(G)| \leq 1 + n + \frac{(\lambda-1)!(n-\lambda)!}{(n-2)!} \sum_{i \geq 0} \binom{n}{\lambda+i}.$$

Pour un  $(0,\lambda)$ -graphe biparti de degré  $n$ , la borne inférieure du nombre de sommets est différente de celle donnée dans la proposition précédente. On a :

### 1.3.2.5 Proposition (Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0,\lambda)$ -graphe de degré  $n$ . Alors

$$2 + 2 \frac{n(n-1)}{\lambda} \leq |V(G)| \leq 1 + n + \frac{(\lambda-1)!(n-\lambda)!}{(n-2)!} \sum_{i \geq 0} \binom{n}{\lambda+i}.$$

Une classe importante de  $(0,\lambda)$ -graphes est celle obtenue pour  $\lambda = 2$ . La classe des  $(0,2)$ -graphes contient strictement les hypercubes. Nous pouvons citer aussi comme exemple le graphe de la figure 1.11, connu sous le nom de l'icosaèdre.

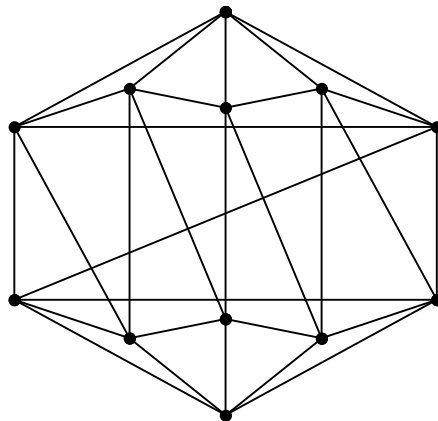


Figure 1.11

Pour cette classe, les deux dernières propositions deviennent :

### 1.3.2.6 Proposition (Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe de degré  $n$ . Alors

$$1 + \frac{n(n-1)}{2} \leq |V(G)| \leq 2^n.$$

### 1.3.2.7 Proposition (Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe biparti de degré  $n$ . Alors

$$2 + n(n-1) \leq |V(G)| \leq 2^n.$$

Il se trouve que pour un degré  $n$  donné, l'hypercube  $Q_n$  est le seul  $(0,2)$ -graphe,  $n$ -régulier d'ordre  $2^n$ . Ce résultat a été établi indépendamment par Mulder [24] et par Laborde et Rao Hebbare [16].

### 1.3.2.8 Proposition (Laborde et Rao Hebbare [16], Mulder [24],[26]).

Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe. On a :

- a)  $G$  est régulier (notons  $n$  son degré)
- b)  $|V(G)| \leq 2^n$
- c)  $|V(G)| = 2^n$  si et seulement si  $G$  est  $Q_n$ .

La définition des  $(0,2)$ -graphes peut se formuler en termes de sommets et de chaînes.

### 1.3.2.9 Proposition (Mollard [20]).

Nous dirons qu'un graphe  $G$  est un  $(0,2)$ -graphe si et seulement si pour toute paire  $u$  et  $v$  de sommets distincts de  $G$ , il existe soit exactement deux chaînes de longueur deux reliant  $u$  et  $v$ , soit aucune chaîne de longueur deux les reliant.

Une autre caractérisation de l'hypercube en tant que  $(0,2)$ -graphe est :

### 1.3.2.10 Proposition (Mollard [20]).

Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe de degré  $n$ . Alors :

- a)  $\text{diam}(G) \leq n$
- b)  $\text{diam}(G) = n$  si et seulement si  $G$  est  $Q_n$ .

La proposition suivante donne une autre caractérisation de l'hypercube en tant que  $(0,2)$ -graphe.

### 1.3.2.11 Proposition (Berrachedi [6]).

Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe tel qu'il existe une mise en niveaux où tout 4-cycle rencontre 3 niveaux, alors  $G$  est un hypercube.

Différentes conjectures sont relatives à l'étude des  $(0,2)$ -graphes :

**1.3.3.12 Conjecture.** Existence de  $(0,2)$ -graphes non sommet-transitifs.

**1.3.3.13 Conjecture.** Hamiltonicité des  $(0,2)$ -graphes.

**1.3.3.14 Conjecture.** Existence de  $(0,2)$ -graphes d'ordre impair.

La conjecture **1.3.3.12** a été résolue (Berrachedi [4]) et (Berrachedi et Mollard [5]). M.Mollard a donné un élément de réponse à la conjecture **1.3.3.14**.

### 1.3.3.15 Proposition.

Soit  $G$  un  $(0,2)$ -graphe,  $n$ -régulier et d'ordre impair, alors  $n \equiv 0 \pmod{8}$ .

D'autres problèmes relatifs aux  $(0,2)$ -graphes restent posés; par exemple celui de l'existence d'un  $(0,2)$ -graphe d'ordre donné (Madani [18]). Mollard [23] a exhibé tous les  $(0,2)$ -graphes d'ordre inférieur ou égal à 32.

### 1.3.3 Les graphes impairs.

Soit  $k$  un entier avec  $k \geq 2$ . Le **graphe impair**  $O_k$  possède les  $(k-1)$ -sous-ensembles de  $\{1, 2, \dots, 2k-1\}$  comme sommets et deux de ces sommets sont adjacents si leurs sous-ensembles correspondants sont disjoints (voir [1], [8] et [14]). Le graphe  $O_k$  ( $k \geq 2$ ) est distance-transitif et  $k$ -régulier. Les premiers graphes impairs sont le triangle  $K_3$  (figure 1.8 (a)) et le graphe de Petersen (figure 1.6 (a)). Les mailles de  $O_2$  et  $O_3$  sont 3 et 5 respectivement, tandis que celle de  $O_k$ , pour  $k \geq 4$ , est égale à 6.

### 1.3.4 Les graphes impairs étendus.

Le **graphe impair étendu**  $E_k$  ( $k \geq 2$ ) (Mulder [26]), appelé **graphe de Laborde-Mulder** aussi (Madani [19]), a l'ensemble de sommets l'ensemble  $\{A \subseteq \{1, 2, \dots, 2k-1\}; |A| \leq k-1\}$ , deux sommets sont adjacents si et seulement si la différence symétrique des parties correspondantes consiste en 1 ou  $2k-1$  éléments. Les premiers graphes impairs étendus sont  $K_4$  et le graphe de Greenwood-Gleason (voir [11]) ( figure 1.12 ).

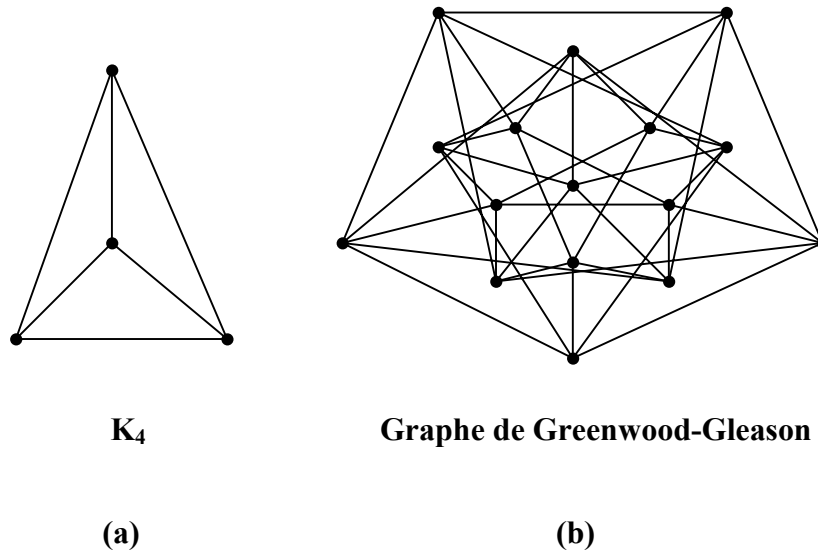


Figure 1.12

$E_k$  peut être obtenu de deux manières différentes :

- Identifier dans  $Q_{2k-1}$  toute paire de sommets diamétraux.
- Relier dans  $Q_{2k-2}$  toute paire de sommets diamétraux.

Le graphe  $E_k$  est régulier de degré  $2k-1$ . Il consiste en le demi-inférieur de  $Q_{2k-1}$  avec le graphe impair  $O_k$  sur le  $(k-1)^{\text{ème}}$  niveau.

### 1.3.4.1 Proposition (Mulder [25],[26]).

Le graphe  $E_k$  est distance-transitif.

### 1.3.4.2 Proposition (Mulder [25],[26]).

Pour chaque paire de sommets  $A$  et  $B$  de  $E_k$ , le sous-graphe induit par  $I(A,B)$  est l'hypercube  $Q_{d(A,B)}$ , de dimension  $d(A,B)$ .

### 1.3.4.3 Proposition (Mulder [25],[26]).

Le plus petit cycle impair dans  $E_k$  est de longueur  $2k-1$ .

### 1.3.5 Le graphe $L_n^k$ .

$L_n^k$  est le sous-graphe de  $Q_n$  induit par deux niveaux consécutifs  $N_{k-1}$  et  $N_k$ .  $L_n^k$  est semi-régulier de degrés  $n-k+1$  et  $k$ , d'ordre  $\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ .

Un cas particulier intéressant est celui de  $L_{2k-1}^k$ , noté aussi  $H_k$ , le sous-graphe induit par les deux niveaux centraux  $N_{k-1}$  et  $N_k$  d'un hypercube  $Q_{2k-1}$ . Ces graphes sont réguliers de degré  $k$ . Pour  $k = 3$ , par exemple, on obtient le graphe de Desargues  $H_3$  (figure 1.13).

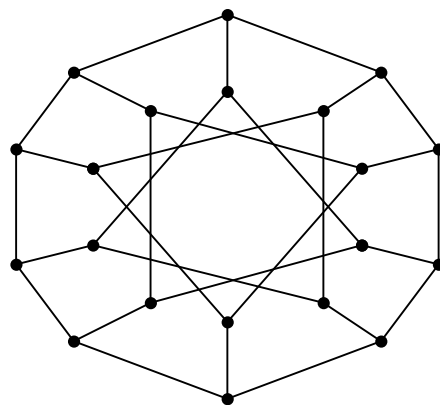


Figure 1.13



Havel [12] a proposé la conjecture suivante :

**1.3.5.1 Conjecture.** Dans  $L_n^k$ , il existe une chaîne saturante.

Pour ce graphe, une conjecture équivalente à la première s'énonce comme suit :

**1.3.5.2 Conjecture.**  $H_k$  est hamiltonien.

La conjecture **1.3.5.2** est en fait un cas particulier de celle due à Lovasz [17].

**1.3.5.3 Conjecture.** Tout graphe sommet-transitif admet une chaîne hamiltonienne.

Remarquons en fin que  $H_k$  est isomorphe à  $O_k \otimes K_2$ .

# CHAPITRE 2

## Les graphes cycles réguliers

*«Ce sont surtout les méthodes de graphes et de programmation mathématique qui sont utiles pour résoudre les problèmes combinatoire.»*

**R.Faure**

## 2.0 INTRODUCTION

Dans un  $(0,\lambda)$ -graphe ,

« chaque chaîne de longueur 2 appartient à  $\lambda-1$  cycles de longueur 4 ».

Cette remarque a permis à M.Mollard, de définir la classe des graphes  $[\mu,\eta]$ -cycle réguliers où toute chaîne de longueur  $\mu$  appartient à  $\eta$  cycles.

En particulier, les graphes pour lesquels toute chaîne de longueur  $\mu$  appartient à exactement  $\nu$  cycles de longueurs  $\gamma$ , sont notés  $[\mu,\nu,\gamma]$ -cycle réguliers, appelés graphes cycles réguliers aussi. Ainsi les  $(0,\lambda)$ -graphes sont des graphes  $[2,\lambda-1,4]$ -cycle réguliers. H.M.Mulder [24] montra que les  $(0,2)$ -graphes, ou encore les graphes  $[2,1,4]$ -cycle réguliers selon M.Mollard [21], ont l'hypercube comme graphe maximum (pour son ordre par rapport à son degré) (Laborde et Rao Hebbare [16]), un graphe fascinant qui a des applications dans plusieurs domaines tels l'architecture parallèle, transfert de l'information, réseaux d'interconnexion, décisions multicritères, théorie des codes, ... .

M.Mollard [21] a pu montrer que les graphes maximums des graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers sont aussi en relation avec les hypercubes. Ce sont les sous-graphe induits par les niveaux centraux des hypercubes de degré impair.

On a pu, de notre part, montrer que ces sous-graphes sont aussi de diamètre maximum pour un degré maximum donné, dans la classe des graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers.

## 2.1 DÉFINITIONS.

### 2.1.1 DÉFINITION.

Nous dirons qu'une chaîne  $u_0, u_1, \dots, u_\mu$  appartient à un cycle élémentaire  $v_1, v_2, \dots, v_\nu$ , si  $\{u_0, u_1, \dots, u_\mu\} \subset \{v_1, v_2, \dots, v_\nu\}$  et si la chaîne est un sous-graphe partiel du cycle.

### 2.1.2 DEFINITION.

Soient  $\mu$  et  $\eta$  deux entiers avec  $\mu \geq 2$ ,  $\eta \geq 1$  et  $G$  un graphe de maille au moins  $\mu$ .

$G$  est un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier s'il existe un ensemble non vide  $C$  de cycles élémentaires tels que toute chaîne de  $G$  de longueur  $\mu$  appartient à exactement  $\eta$  cycles de  $C$ .

Dans le cas particulier où il existe  $\nu$  cycles élémentaires parmi les  $\mu$  cycles de  $C$ , ayant une même longueur  $\gamma$  ( $\gamma \geq 2\mu$ ) ; nous dirons que  $G$  est  $[\mu, \nu, \gamma]$ -cycle régulier.

### Exemples.

- Les  $(0, \lambda)$ -graphes sont les graphes  $[2, \lambda-1, 4]$ -cycle réguliers.
- Le graphe impair  $O_k$  est un graphe  $[3, 1, 6]$ -cycle régulier, pour  $k > 2$ .
- Pour  $k \geq 4$ ,  $E_k$  est un graphe  $[3, 3, 6]$ -cycle régulier.
- Le graphe de la figure suivante est un graphe  $[3, 1, 6]$ -cycle régulier :

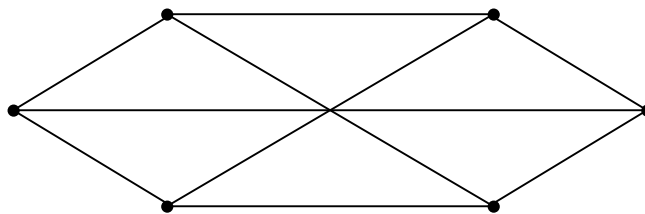


Figure 2.1

- Le sous-graphe  $L_n^k$  est un graphe  $[3, 1, 6]$ -cycle régulier .

## 2.2 RÉSULTATS DE BASE.

### 2.2.1 Lemme 1 (Mollard [21]).

Soient  $u_1, u_2, \dots, u_\mu$  une chaîne de longueur  $\mu-1$  d'un graphe  $G$ ,  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier. Alors

$$d(u_1) = d(u_\mu).$$

### 2.2.2 Lemme 2 (Mollard [21]).

Dans un graphe  $G$ ,  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier, chaque sommet appartient à au moins un cycle de  $C$ .

### 2.2.3 Théorème (Mollard [21]).

Si  $G$  est un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec  $\delta(G) \geq 3$ , alors  $G$  est régulier ou semi-régulier.

### 2.2.4 Définition.

Soient  $G$  un graphe, avec  $\delta(G) = 2$ , et  $P = x_0, \dots, x_p$  une  $(x_0, x_p)$ -chaîne de longueur  $p$ . La séquence des degrés des sommets de  $P$  est une suite  $d_0, d_1, \dots, d_p$  où  $d_i = d(x_i)$ , notée  $D_{x_0}(P)$ .

### 2.2.5 Proposition (Mollard [21]).

Soit  $G$  un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier, de degré minimum  $\delta(G) = 2$ .  $P$  et  $P'$  deux chaînes de même longueur  $p$ ,  $p < \mu$ , de  $G$  ayant une extrémité commune  $x$ . Si  $d(x) \geq 3$ , alors :

$$D_x(P) = D_x(P').$$

### 2.2.6 Proposition (Mollard [21]).

Soit  $G$  un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec  $\delta(G) = 2$ . Alors chaque paire de sommets de degrés supérieurs à 2, ne peuvent être adjacents.

### **Remarque.**

Soit  $G$  un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec  $\delta(G) = 2$ . Si  $G$  n'est pas un cycle, il existe une chaîne contractante reliant deux sommets de degrés supérieurs à 2. La longueur d'une telle chaîne est au plus  $\mu - 1$ . Car sinon, il y aurait un sommet interne de la chaîne de degré supérieur à 2, d'après le lemme 1, contradiction.

De la proposition 2.2.5, deux chaînes contractantes  $P$  et  $P'$ , ayant une extrémité commune, ont la même séquence des degrés et alors la même longueur.

Par connexion, toutes les chaînes contractantes sont de même longueur, puisque dans le cas où  $G$  admet au moins deux chaînes contractantes, elles auront au minimum une extrémité commune.

### **2.2.7 Proposition (Mollard [21]).**

Pour  $G$ , un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec  $\delta(G) = 2$ , soit  $p$  la longueur commune de toutes ses chaînes contractantes. Supposons que  $p \neq \mu - 1$  ou  $\eta \neq 1$ . Alors  $G'$ , le graphe obtenu à partir de  $G$  par contraction de ses chaînes contractantes, est un graphe  $[\lceil \frac{\mu}{p} \rceil, \eta]$ -cycle régulier de degré minimum  $\delta(G') \geq 3$ .

### **2.2.8 Théorème (Mollard [21]).**

Si  $G$  est un graphe  $[\mu, \eta]$ -cycle régulier avec  $\delta(G) = 2$ . Alors il existe un entier  $p$ ,  $2 \leq p \leq \mu - 1$ , tel que  $G$  est une  $(p-1)$ -subdivision d'un graphe  $[\lceil \frac{\mu}{p} \rceil, \eta]$ -cycle régulier avec  $\delta(G') \geq 3$ .

## **2.3 LES GRAPHES [3,1,6]-CYCLE REGULIERS.**

On considère dans ce paragraphe le cas particulier des graphes [3,1,6]-cycle réguliers.

### **Remarques.**

1) Les graphes [3,1,6]-cycle réguliers sont réguliers ou semi-réguliers d'après le théorème 2.2.3.

2) Comme le triangle est une chaîne de longueur trois dont les extrémités sont confondues, tout graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier est sans triangle. Car sinon cette chaîne de longueur trois appartiendrait à un 6-cycle non élémentaire (degré maximum strictement supérieur à 2), absurde.

Ainsi, les graphes  $[3,1,6]$ -cycle régulier sont sans  $\mathbf{K}_4$ -e. Alors ils sont intervalle-monotones puisqu'ils sont sans sous-graphe homomorphe à la figure 1.9.

Notons de plus que pour chaque sommet  $u$ , l'ensemble  $N(u)$  est stable.

Mulder [24] et Laborde et Rao Hebbare [16] ont montré que l'hypercube est le graphe maximum des graphes  $[2,1,4]$ -cycle réguliers pour son ordre par rapport à son degré. Mollard [21] montre de même qu'un graphe maximum pour les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers, pour un degré maximum donné, est  $\mathbf{H}_k$ , le sous-graphe induit par les niveaux centraux  $N_{k-1}$  et  $N_k$  d'un hypercube  $\mathbf{Q}_{2k-1}$ .

### 2.3.1 Théorème (Mollard [21]).

Soit  $\mathbf{G}$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degré maximum  $n$ . Alors :

$$1) |\mathbf{V}(\mathbf{G})| \leq \binom{2n}{n},$$

$$2) |\mathbf{V}(\mathbf{G})| = \binom{2n}{n} \text{ si et seulement si } \mathbf{G} \text{ est le sous-graphe } \mathbf{H}_n.$$

Mollard [20] a montré que l'hypercube est le graphe de diamètre maximum des graphes  $[2,1,4]$ -cycle réguliers pour un degré donné. D'une manière similaire on montre que les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers ont  $\mathbf{H}_n$  comme graphe de diamètre maximum pour un degré maximum donné.

### 2.3.2 Théorème.

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degré maximum  $n \geq 2$ . Alors :

- 1)  $\text{diam}(G) \leq 2n-1$ ,
- 2)  $\text{diam}(G) = 2n-1$  si et seulement si  $G$  est le sous-graphe  $H_n$ .

Pour pouvoir établir la preuve de ce théorème, on a besoin de ces deux propositions importantes.

### 2.3.3 Proposition (Mollard [21]).

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degré maximum  $n$  et  $N_0, N_1, \dots, N_p$  une décomposition en niveaux arbitraire relative à un sommet de  $G$ . Soit  $u$  un sommet de  $N_i$ . Alors :

$$m(u, N_{i-1}) \geq \lceil \frac{i}{2} \rceil.$$

### 2.3.4 Proposition (Mollard [21]).

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degré maximum  $n$  et  $N_0, N_1, \dots, N_p$  une décomposition en niveaux arbitraire relative à un sommet de  $G$ . Alors pour  $k = 0, \dots, n-2$

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} \binom{n-1}{k}^2 ;$$

et

$$|N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \binom{n-1}{k}^2.$$

### Preuve du théorème 2.3.2.

1) Soient  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degré maximum  $n$  et  $N_0, N_1, \dots, N_p$  une décomposition en niveaux arbitraire de  $G$  relative à un sommet. D'après la proposition 2.3.3

$$\forall u \in N_p : m(u, N_{p-1}) \geq \lceil \frac{p}{2} \rceil$$



Donc

$$m(\mathbf{u}, N_{p-1}) \geq \frac{p}{2}$$

Alors

$$p \leq 2n$$

Si  $p = 2n$ , en dénombrant les arêtes existantes entre  $N_{2n}$  et  $N_{2n-1}$ , on obtient :

$$n |N_{2n}| \leq (n - \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil) |N_{2n-1}|.$$

Donc  $N_{2n} = \emptyset$ . Ainsi

$$p \leq 2n-1$$

**2)**  $\mathbf{H}_n$  est un graphe [3,1,6]-cycle régulier de degré  $n$  et de diamètre  $2n-1$ .

Inversement, soit  $\mathbf{G}$  un graphe [3,1,6]-cycle régulier de degré maximum  $n$  et de diamètre  $2n-1$ . Supposons que  $\mathbf{G}$  n'est pas isomorphe à  $\mathbf{H}_n$ . D'après le théorème 2.3.1

$$|\mathbf{V}(\mathbf{G})| < \binom{2n}{n} \quad (1)$$

Remarquons tout d'abord, qu'en dénombrant les arêtes existantes entre  $N_{2n-1}$  et  $N_{2n-2}$ , on obtient :

$$\lceil \frac{2n-1}{2} \rceil |N_{2n-1}| \leq (n - \lceil \frac{2n-2}{2} \rceil) |N_{2n-2}|.$$

Donc  $|N_{2n-1}| \leq 1$ . Or  $\text{diam}(\mathbf{G}) = 2n-1$  ; alors  $|N_{2n-1}| = 1$ .

Sans perte de généralité, considérons une décomposition en niveaux relative à un sommet de  $\mathbf{G}$  de degré  $n$ , d'après la proposition 2.3.4 et l'inégalité (1), il existe un indice  $k$ ,  $0 \leq k \leq n-2$ , tel que :

$$|N_{2k+1}| < \frac{n}{k+1} \left( \binom{n-1}{k} \right)^2 \quad (\text{I})$$

ou

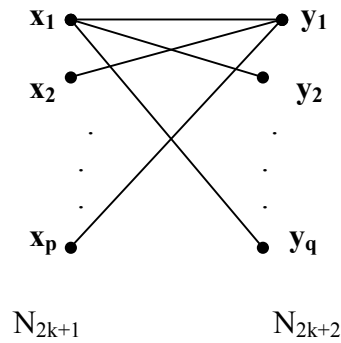
$$|N_{2k+2}| < \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left( \binom{n-1}{k} \right)^2 \quad (\text{II})$$

Supposons que (I) est valide.

La proposition 2.3.3 indique que

$$\forall \mathbf{u} \in N_{2k+2} : m(\mathbf{u}, N_{2k+1}) \geq \lceil \frac{2k+2}{2} \rceil = k+1.$$

En dénombrant les arêtes existantes entre  $N_{2k+1}$  et  $N_{2k+2}$ , il existe  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_p$  (resp.  $\mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2, \dots, \mathbf{y}_q$ ) dans  $N_{2k+1} \cap N(\mathbf{y}_1)$  (resp.  $N_{2k+2} \cap N(\mathbf{x}_1)$ ) où  $p \geq k+1$  et  $q \leq n-k-1$ . ( Figure 2.2 ).



**Figure 2.2**

Nous obtenons

$$(k+1) |N_{2k+2}| \leq (n-k-1) |N_{2k+1}|$$

alors

$$|N_{2k+2}| \leq \frac{n-k-1}{k+1} |N_{2k+1}|.$$

En faisant appel à l'expression (I), nous aurons :

$$|N_{2k+2}| < \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \left( \binom{n-1}{k} \right)^2.$$

Par itération, nous obtenons que :

$$\forall h \geq k : \begin{cases} |N_{2h+1}| < \frac{n}{h+1} \binom{n-1}{h}^2; \\ \text{et} \\ |N_{2h+2}| < \frac{n(n-h-1)}{(h+1)^2} \binom{n-1}{h}^2. \end{cases}$$

D'une part, pour  $\mathbf{u} \in N_{2n-1}$  :

$$m(\mathbf{u}, N_{2n-2}) \geq \lceil \frac{2n-1}{2} \rceil = n.$$

D'autre part, nous avons  $|N_{2n-2}| < n$ , absurde.  $\square$

### 2.3.5 Proposition.

Soient  $\mathbf{G}$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier, avec  $\delta(\mathbf{G}) \geq 2$ , et  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  deux sommets tels que :

$$|N(\mathbf{u}) \cap N(\mathbf{v})| \geq 2.$$

Alors  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  et tous les sommets de  $N(\mathbf{u}) \cap N(\mathbf{v})$  sont sur le même 6-cycle.

#### Preuve.

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux sommets d'un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier ayant au moins deux voisins en commun, notés  $\mathbf{a}, \mathbf{b}$  ( figure 2.3 )

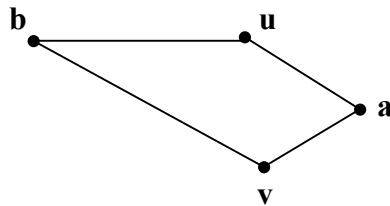


Figure 2.3

Comme  $\mathbf{G}$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier, la chaîne  $\mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{b}$  appartient à un unique 6-cycle  $\mu = \mathbf{v}, \mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{v}$ .

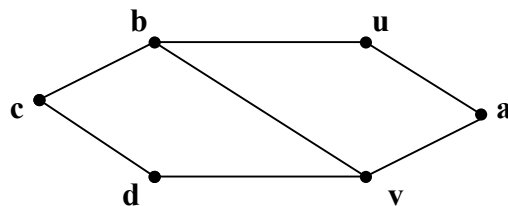


Figure 2.4

S'il existait un sommet  $e \in N(u) \cap N(v)$  n'appartenant pas au 6-cycle  $\mu$

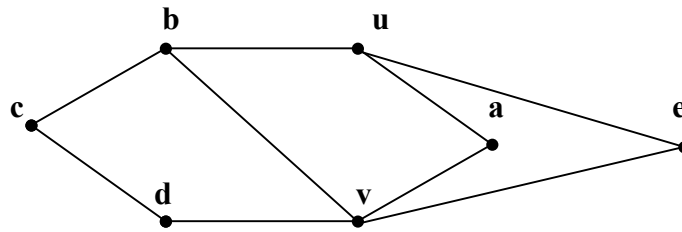


Figure 2.5

la chaîne  $d,c,b,u$  appartiendrait à au moins deux 6-cycles :

$$d,c,b,u,a,v,d \text{ et } d,c,b,u,e,v,d$$

absurde.  $\square$

### 2.3.6 Proposition.

Soient  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier et  $A = \{x, y, z, t, u, v\}$  l'ensemble des sommets d'un 6-cycle tel que :

$$d(x,t) = 1 .$$

Alors le sous-graphe induit par  $A$ ,  $G_A$ , est isomorphe au graphe de la figure 2.6

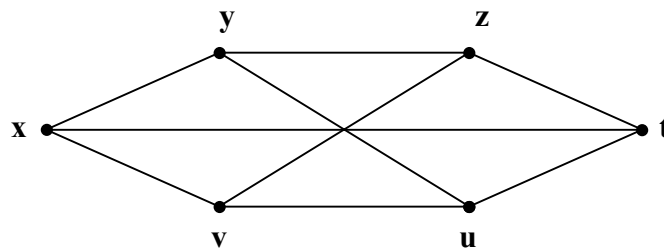


Figure 2.6

### Preuve.

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier. Considérons l'ensemble de sommets  $A = \{x, y, z, t, u, v\}$  d'un 6-cycle tel que :  $d(x,t) = 1$ .

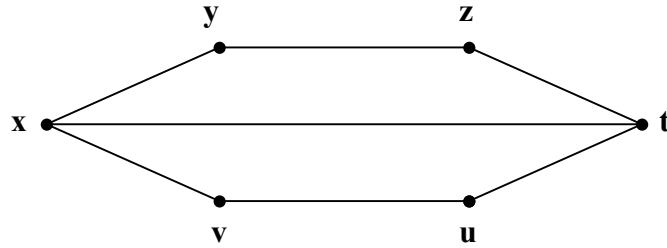


Figure 2.7

La chaîne  $z,t,x,v$  appartient à un unique 6-cycle  $u,t,x,v,x',t',z$ .

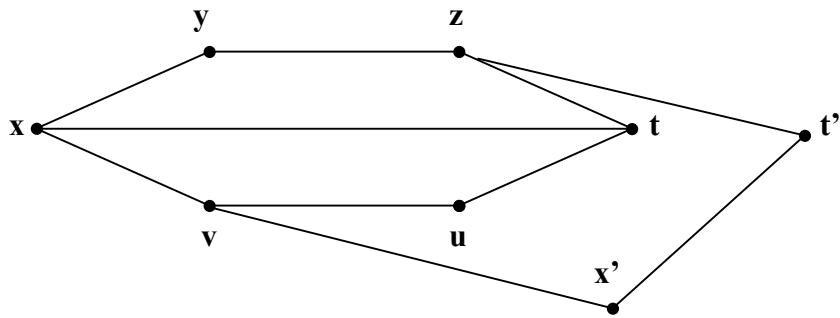


Figure 2.8

Si  $x' \notin A$  et  $t' \notin A$ ; la chaîne  $z,y,x,v$  appartient à au moins deux 6-cycles, dans  $G$  :

$$z,y,x,v,x',t',z \text{ et } z,y,x,v,u,t,z$$

absurde.

Les cas ( $x' = u$  et  $t' \notin A$ ) (figure 2.9) et ( $x' \notin A$  et  $t' = y$ ) (figure 2.10) n'ont pas lieu, d'après la proposition 2.3.5.

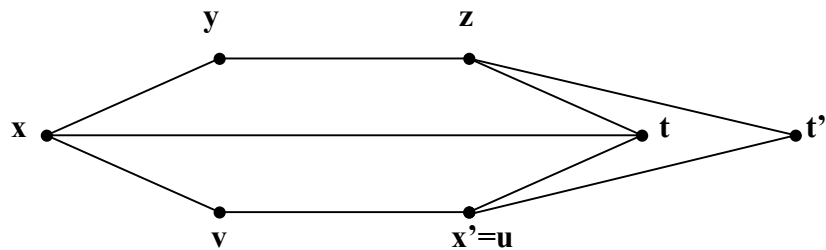


Figure 2.9

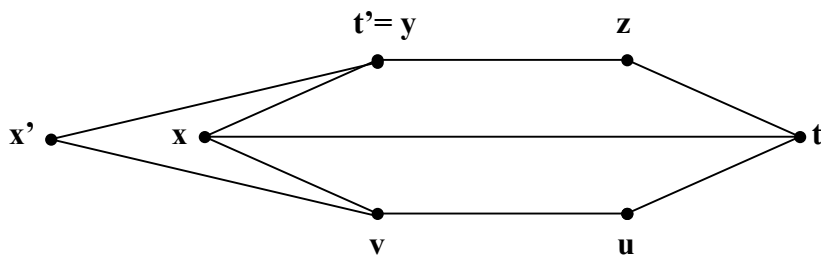


Figure 2.10

Alors :  $x' = u$  et  $t' = y$ . Par symétrie, on peut conclure que :  $zv \in E(G)$ .  $\square$

### 2.3.7 Proposition.

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier, avec  $\delta(G) \geq 2$ . Alors

$$\forall u, v \in V(G) : |N(u) \cap N(v)| \in \{0,1,3\}.$$

#### Preuve.

Soient  $u, v$  deux sommets de  $G$  ayant au moins un voisin en commun, noté  $a$ . Comme  $\delta(G) \geq 2$ , il existe  $b \in N(u)$ .  $b$  est distinct de  $v$ , puisque  $G$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier donc sans triangle.

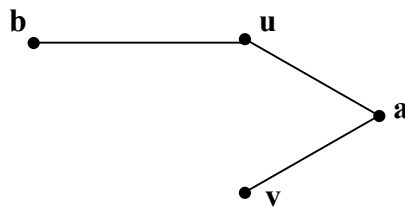


Figure 2.11

De la  $[3,1,6]$ -cycle régularité de  $G$ , la chaîne  $v,a,u,b$  appartient à un unique 6-cycle :  $\mu = v,a,u,b,c,d,v$ .

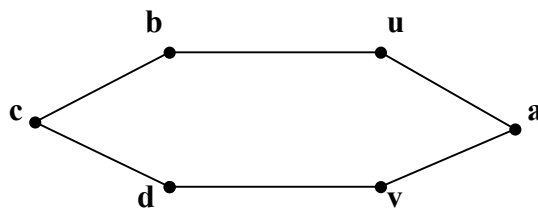


Figure 2.12

Si  $u$  et  $v$  avaient un deuxième voisin commun, il sera sur le cycle  $\mu$ , d'après la proposition 2.3.5. Ainsi, si le deuxième voisin commun existait, il serait  $b$  ou  $d$ . Sans perte de généralité, supposons que  $b \in (N(u) \cap N(v)) \setminus \{a\}$  (figure 2.4).

D'après la proposition 2.3.6,  $d$  sera le troisième voisin commun  $d$  de  $u$  et  $v$ . S'il existait un autre voisin commun différent de  $a$ ,  $b$  et  $d$ ; il ne serait pas sur  $\mu$ , impossible d'après la proposition 2.3.5. D'où le résultat.  $\square$

A la lumière des propositions présentées ci-dessus, nous avons tenté de notre part d'établir une borne inférieure à l'ordre de  $G$ , un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier semi-régulier de degrés  $n$  et  $n'$  ( $n \geq n'$ ).

### 2.3.8 Proposition.

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degrés  $n$  et  $n'$  ( $n \geq n'$ ). Alors :

$$1 + n \frac{n'+2}{3} \leq |V(G)| \leq \binom{2n}{n}.$$

#### Preuve.

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier de degrés  $n$  et  $n'$ , avec  $n \geq n'$ . Sans perte de généralité considérons la décomposition en niveaux relative à un sommet de degré  $n$ . Donc  $|N_1| = n$ .

Or d'après les propositions 2.3.3 et 2.3.7, on a :

$$\forall x \in N_2 : 1 \leq m(x, N_1) \leq 3.$$

Ainsi, en dénombrant les arêtes existantes entre  $N_1$  et  $N_2$ , on peut déduire que :

$$(n'-1) |N_1| \leq 3 |N_2| \leq 3 (n'-1) |N_1|$$

donc :

$$\frac{n'-1}{3} |N_1| \leq |N_2| \leq (n'-1) |N_1|.$$

Ainsi :

$$\begin{aligned} |V(G)| &\geq |N_0| + |N_1| + |N_2| \\ &\geq 1 + n \frac{n'+2}{3}. \end{aligned}$$

Et de la proposition 2.3.1, le résultat est obtenu.  $\square$

Pour un graphe  $G$ ,  $[3,1,6]$ -cycle régulier régulier de degré  $n$ , la borne inférieure devient :

### 2.3.9 Proposition.

Soit  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier régulier de degré  $n$ . Alors :

$$1 + n \frac{n+2}{3} \leq |V(G)| \leq \binom{2n}{n}$$

## 2.4 OPERATIONS SUR LES GRAPHEs $[3,1,6]$ -CYCLE REGULIERS.

### 2.4.1 Proposition.

Si  $G$  et  $H$  sont deux graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers sans 4-cycle, alors le graphe  $G \oplus H$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier.

#### Preuve.

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers sans 4-cycle. Posons  $V(G \oplus H) = V' \times V''$  où  $V' = V(G)$  et  $V'' = V(H)$ . Considérons une chaîne  $I = x, y, z, t$  dans  $G \oplus H$  de longueur trois avec :  $x = (x', x'')$ ,  $y = (y', y'')$ ,  $z = (z', z'')$  et  $t = (t', t'')$ .

1<sup>er</sup> cas. Si  $x'y', y'z'$  et  $z't'$  sont dans  $E(G)$  et  $x''=y''=z''=t''=p$  ( $p$  fixe).

Comme  $G$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier, il existe  $a', b'$  deux sommets dans  $G$  tels qu'il y ait un unique 6-cycle  $\beta' = x', y', z', t', a', b', x'$ , dans  $G$  contenant  $x', y', z', t'$ .

Alors il existe dans  $G \oplus H$  un 6-cycle  $\beta = x, y, z, t, a, b, x$  avec  $a = (a', a'')$ ,  $b = (b', b'')$  où  $t'a', a'b'$  et  $b'x'$  sont dans  $E(G)$  et  $a''=b''=p$ .

Si  $\beta$  n'était pas unique dans  $G \oplus H$ , il existerait au moins un deuxième 6-cycle contenant  $I$  dans  $G \oplus H$ . Deux cas de figures se présentent :

1)

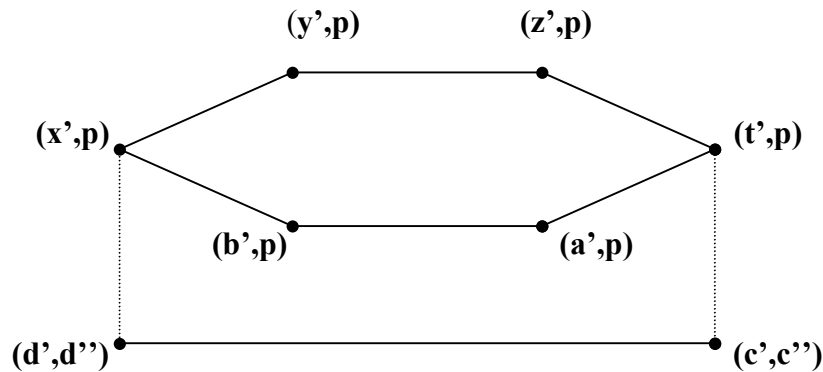


Figure 2.13



$(c',c'')$  et  $(d',d'')$  sont tels que :  $pc'' \in E(H)$  ,  $pd'' \in E(H)$  et  $d'c' \in E(G)$ . Alors  $t'=c'$  et  $x'=d'$  ; donc  $t'x' \in E(G)$ , contradiction avec le fait que  $G$  est sans 4-cycle.

2)

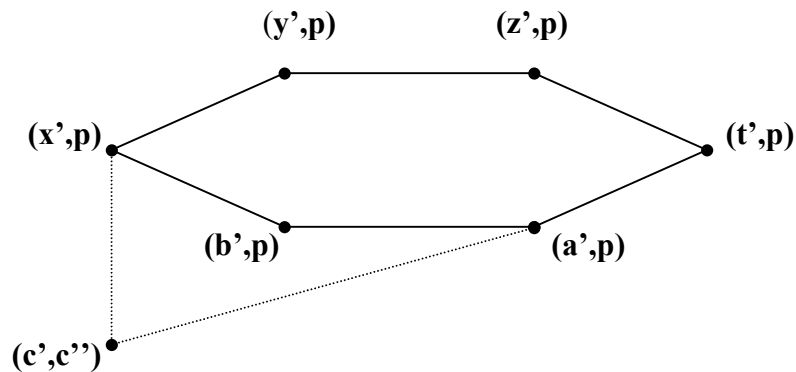


Figure 2.14

Dans ce cas on doit avoir  $pc'' \in E(H)$  et  $a' = c' = x'$  ( $x't' \in E(G)$  impossible)

Donc  $\beta$  est unique.

2<sup>ème</sup> cas. Si  $x'y'$  et  $y'z'$  sont dans  $E(G)$  ,  $x'' = y'' = z'' = p$  ,  $z' = t' = q$  et  $z''t''$  est dans  $E(H)$ .

Le 6-cycle  $(x',p),(y',p),(q,p),(q,t''),(y',t''),(x',t''),(x',p)$  qui contient la chaîne  $I$  est comme indiqué ci-dessous.

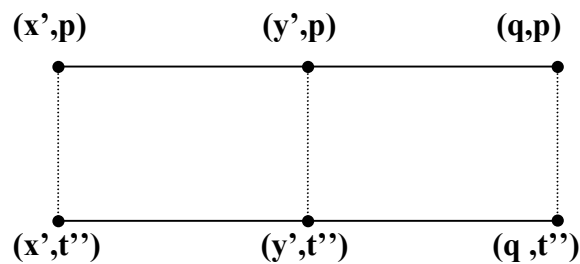


Figure 2.15

Si ce 6-cycle n'est pas unique une des situations suivantes aura lieu :

1)

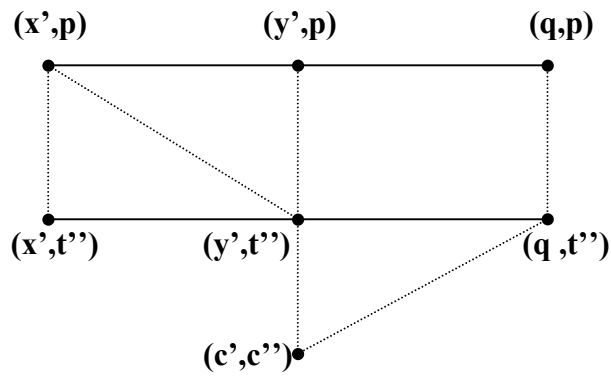


Figure 2.16

Avec  $c' = q = y' = x'$  et  $c''t''$  et  $t''p$  sont dans  $E(H)$ . Alors  $z' = x'$  impossible.

2)

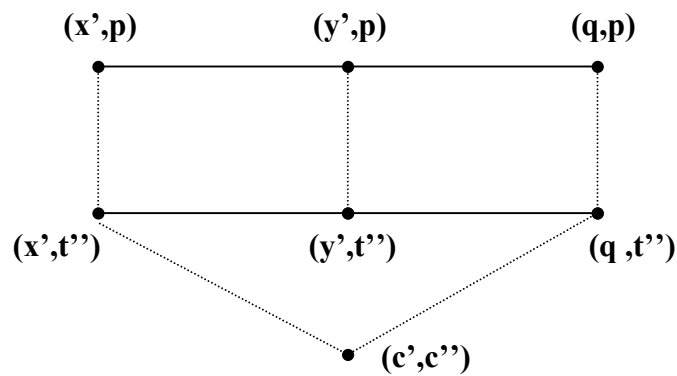


Figure 2.17

Avec  $c' = q = x'$  et  $c''t''$  dans  $E(H)$ . Alors  $z' = x'$  impossible.

3)

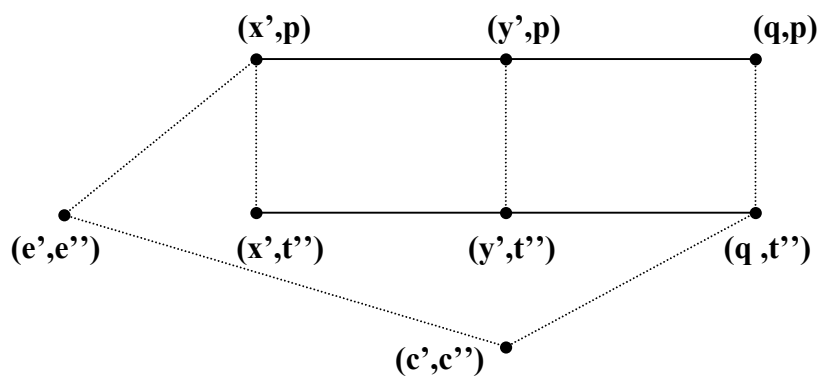


Figure 2.18

où  $c' = q = e' = x'$ ,  $c''t''$  et  $c''e''$  et  $e''p$  sont dans  $E(H)$ . Alors  $z' = x'$  impossible.

4)

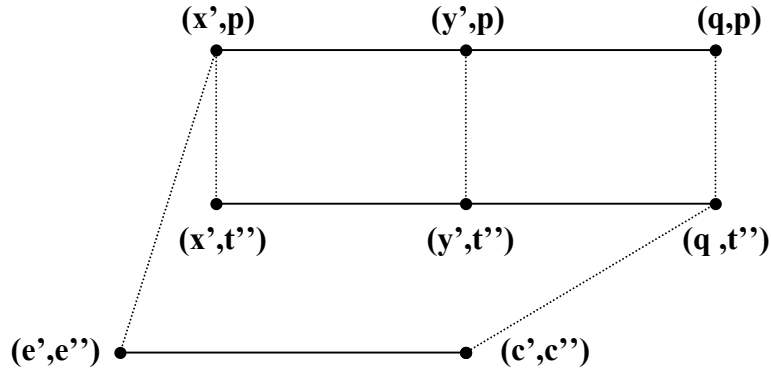


Figure 2.19

où  $e' = x'$ ,  $c' = q$  et  $c'' = e''$ ,  $e'p$  et  $c''t''$  sont dans  $E(H)$ . Alors  $x'z'$  est dans  $E(G)$ , absurde.

Donc ce 6-cycle est unique. D'où  $G \otimes H$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier.  $\square$

### 2.4.2 Proposition.

Si  $G$  et  $H$  sont deux graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers, alors le graphe  $G \otimes H$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier.

#### Preuve.

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers. Posons  $V(G \otimes H) = V' \times V''$  avec  $V' = V(G)$  et  $V'' = V(H)$ .

Soit  $I = x,y,z,t$  une chaîne de longueur trois reliant deux sommets  $x$  et  $t$  dans  $G \otimes H$  où  $x = (x',x'')$ ,  $y = (y',y'')$ ,  $z = (z',z'')$  et  $t = (t',t'')$ . Par construction de  $G \otimes H$ ,  $x'y'$ ,  $y'z'$  et  $z't'$  (resp.  $x''y''$ ,  $y''z''$  et  $z''t''$ ) sont dans  $E(G)$  (resp.  $E(H)$ ).

Comme  $G$  (resp.  $H$ ) est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier, il existe  $u', v'$  (resp.  $u'', v''$ ) dans  $G$  (resp.  $H$ ) tels que :

$x'u', u'v', v't'$  (resp.  $x''u'', u''v'', v''t''$ ) soient dans  $G$  (resp.  $H$ ) formant le 6-cycle  $\beta' = x',y',z',t',u',v',x'$  (resp.  $\beta'' = x'',y'',z'',t'',u'',v'',x''$ ).

Donc il existe dans  $G \otimes H$  un 6-cycle  $\beta = x,y,z,t,u,v,x$ , où  $u = (u',u'')$  et  $v = (v',v'')$  qui contient la chaîne  $I$ .

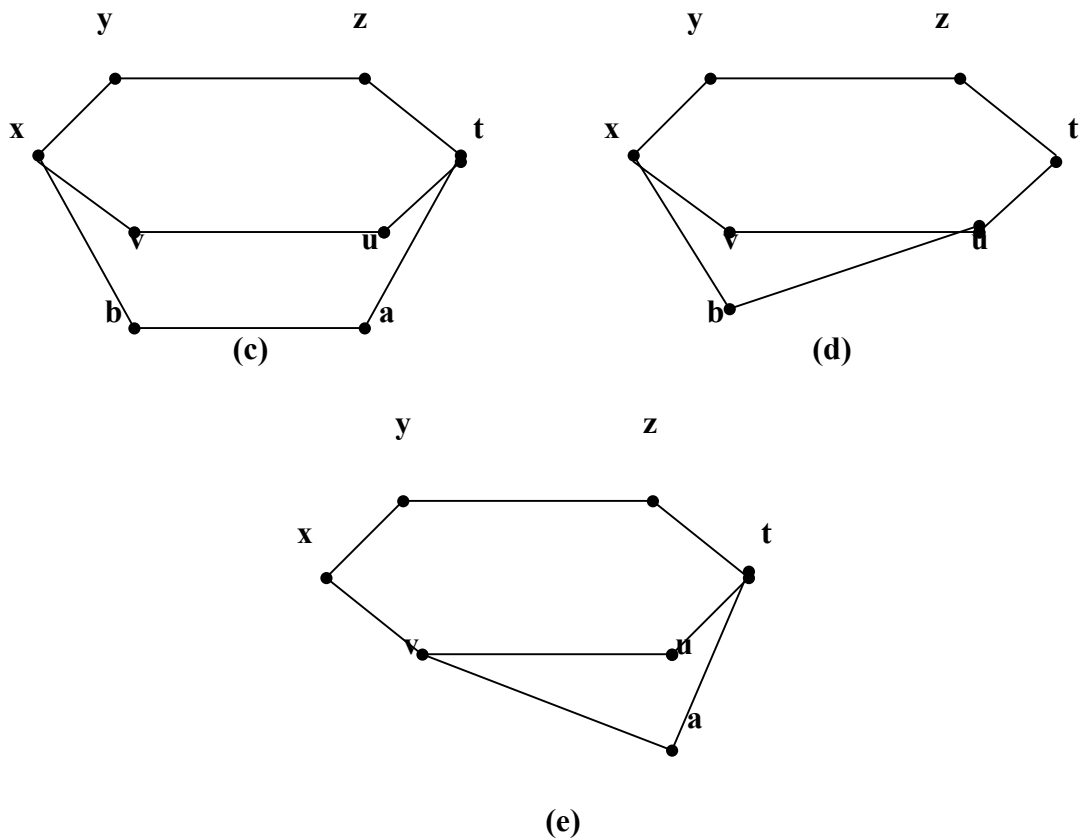


Figure 2.20

$\beta$  est l'unique 6-cycle dans  $G \otimes H$  qui contient  $I$ . Car sinon, il existe deux sommets  $a = (a', a'')$ ,  $b = (b', b'')$  dans  $G \otimes H$ , tels que :  $xb$ ,  $ba$ ,  $at$  soient dans  $G \otimes H$  ( $a$  (resp.  $b$ ) peut être éventuellement  $u$  (resp.  $v$ ) mais pas  $a = u$  et  $b = v$  simultanément).

Ainsi il existe dans  $G$  (resp.  $H$ ) un deuxième 6-cycle  $\rho' = x', y', z', t', a', b', x'$  (resp.  $\rho'' = x'', y'', z'', t'', a'', b'', x''$ ) distinct de  $\beta'$  (resp.  $\beta''$ ), absurde.  $\square$

### 2.4.3 Proposition.

$G \otimes K_2$  est un graphe [3,1,6]-cycle régulier si et seulement si  $G$  est un graphe [3,1,6]-cycle régulier.

#### Preuve.

Condition nécessaire vérifiée.

Inversement, posons  $V(K_2) = \{0,1\}$ , supposons que  $G \otimes K_2$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier. Alors toute chaîne de longueur trois appartient à un unique 6-cycle. Par construction de  $G \otimes K_2$ , il existerait dans  $G$  un 6-cycle semblable à celui de  $G \otimes K_2$ .

Si dans  $G$ , le 6-cycle contenant cette chaîne de longueur trois n'était pas unique, alors ceci reviendrait à la présence de sous-graphes de  $G$  isomorphes à au moins l'un des graphes présentés dans la figure 2.20 et alors dans  $G \otimes K_2$  aussi. Absurde.  $\square$

# CHAPITRE 3

Les graphes de la classe  $\mathfrak{S}$

« *les choses répétées, redemandées, plaisent* »

Aphonisme imaginé d'après un vers de l'art

Poétique **d'Horace**(365).

Soit la classe des graphes, notée  $\mathfrak{F}$ , qui est une généralisation de celle des graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers, définie comme suit :

### 3.1 DEFINITION.

Pour les graphes de la classe  $\mathfrak{F}$ , toute chaîne induite de longueur 3, dont les extrémités sont distinctes, appartient à un unique 6-cycle induit.

### 3.2 EXEMPLES DE GRAPHES DE LA CLASSE $\mathfrak{F}$ .

#### 3.2.1 Proposition.

L'Hypercube  $Q_n$  est dans  $\mathfrak{F}$ .

#### Preuve.

Soit  $I$  une chaîne induite de longueur 3 reliant deux sommets distincts  $x$  et  $y$  dans  $Q_n$ . Remarquons en premier lieu que  $x$  et  $y$  sont à distance 3, puisque  $Q_n$  est biparti.

De l'intervalle régularité de  $Q_n$  (voir [25],[26]),  $I(x,y)$  induit le cube  $Q_3$ , comme le montre la figure 3.1.

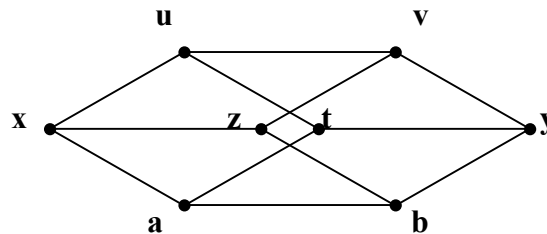


Figure 3.1

Les seuls 6-cycles de  $Q_n$ , qui contiennent  $I = x,u,v,y$  sont dans ce  $Q_3$ . Ils sont au nombre de 3 et sont  $x,u,v,y,t,a,x$ ,  $x,u,v,y,b,z,x$  et  $x,u,v,y,b,a,x$ . Le dernier cycle est le seul induit.  $\square$

#### 3.2.2 Proposition.

Pour  $k \geq 3$ , le graphe impair étendu  $E_k$  est dans  $\mathfrak{F}$ .

### Preuve.

Le graphe  $E_k$  consiste en le demi-inférieur de  $Q_{2k-1}$  avec le graphe impair  $O_k$  au  $(k-1)^{\text{ème}}$  niveau.

Pour  $k \geq 4$ , la chaîne induite de longueur 3, reliant deux sommets distincts, est une géodésique d'après la proposition 1.3.4.3. Et alors, elle est sur le  $Q_3$  comme l'indique la proposition 1.3.4.2. D'où le résultat.

Il reste à vérifier si le résultat persiste pour le graphe de Greenwood-Gleason  $E_3$ .

Soit  $I = A, x, y, B$  une chaîne induite de longueur 3 reliant deux sommets distincts  $A$  et  $B$ . Si  $d(A, B) = 3$ ;  $I$  est sur  $Q_3$  où se trouve toutes les géodésiques possibles entre  $A$  et  $B$ , d'après la proposition 1.3.4.2.

Sinon, sachant que  $\text{diam}(E_3) = 2$ , plusieurs cas de figures se présentent.

#### 1<sup>er</sup> cas.

Si la chaîne  $I$  est comme dans la figure 3.2

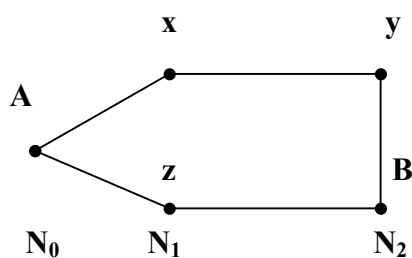


Figure 3.2

Comme  $d(A, B) = 2$ , il existe  $z$  dans  $N_1 \cap N(B)$ . De plus, d'après la proposition 1.3.4.2, il existe  $s$  dans  $N_2 \cap N(B) \cap N(x)$ . Comme  $m(s, N_1) = 2$ , il existe  $u \in N_1$  voisin de  $s$ , différent de  $z$ .  $u$  n'est adjacent ni à  $y$ , grâce à la proposition 1.3.4.2, ni à  $B$  d'après la proposition 1.3.4.3.



Comme  $m(\mathbf{B}, N_2) = 3$ , il existe un troisième voisin de  $\mathbf{B}$ , noté  $\mathbf{t}$ , dans  $N_2$ .  $\mathbf{t}$  n'est adjacent ni à  $\mathbf{x}$ , ni à  $\mathbf{z}$ , mais il est un voisin de  $\mathbf{u}$ . Et de même, il existe un autre sommet  $\mathbf{v} \in N(\mathbf{t}) \cap N_1$ .  $\mathbf{v}$  n'est pas adjacent à  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{s}$ . Par contre, il est voisin de  $\mathbf{y}$  (voir figure 3.3).

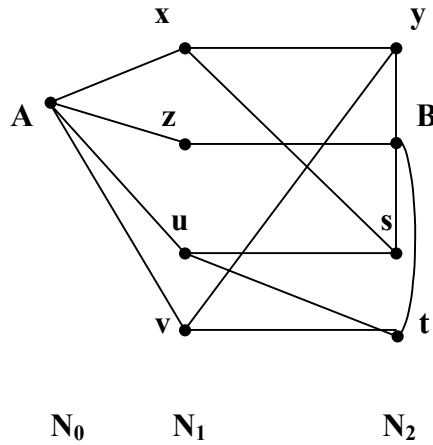


Figure 3.3

Tout 6-cycle, contenant la chaîne  $\mathbf{I}$  doit passer par les voisins de  $\mathbf{B}$  dans  $N_2$  distincts de  $\mathbf{y}$ .

Ils sont :  $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{B}, \mathbf{s}, \mathbf{u}, \mathbf{A}$ ,  $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{B}, \mathbf{t}, \mathbf{v}, \mathbf{A}$  et  $\mathbf{A}, \mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{B}, \mathbf{t}, \mathbf{u}, \mathbf{A}$ . Le dernier 6-cycle est le seul induit.

**2ème cas.**

Si  $\mathbf{I}$  est tel que  $\mathbf{A}$  appartient à  $N_1$  et  $\mathbf{B}$  est dans  $N_2$ , comme suit :

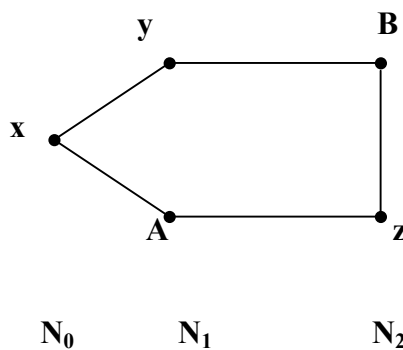


Figure 3.4

Comme  $m(\mathbf{B}, N_1) = m(\mathbf{z}, N_1) = 2$ , il existe  $\mathbf{u}, \mathbf{v}$  deux sommets distincts non adjacents, voisins de  $\mathbf{B}$  et  $\mathbf{z}$  respectivement.

De plus,  $m(\mathbf{B}, N_2) = 3$ , il y a deux sommets  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{t}$  distincts autre que  $\mathbf{z}$ , et non adjacents dans  $N(\mathbf{B}) \cap N_2$ .  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{A}$  sont adjacents d'après la proposition 1.3.4.2. Mais  $\mathbf{s}$  n'est adjacent ni à  $\mathbf{u}$ , d'après la proposition 1.3.4.3, ni à  $\mathbf{v}$  d'après la proposition 1.3.4.2. Comme ci-dessus, il existe  $\mathbf{w}$  dans  $N(\mathbf{s}) \cap N_1$ , autre que  $\mathbf{A}$ . Remarquons que  $N(\mathbf{x}) = \{\mathbf{y}, \mathbf{A}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ .

Pour les mêmes raisons  $\mathbf{t}$  n'est adjacent ni à  $\mathbf{y}$ , ni à  $\mathbf{A}$ , ni à  $\mathbf{u}$ . Mais il est voisin de  $\mathbf{v}$  et  $\mathbf{w}$ .

Les 6-cycles utilisant les voisins de  $\mathbf{z}$  et  $\mathbf{s}$  sont certainement non induits. Il suffit d'analyser le cas pour les voisins de  $\mathbf{t}$  dans  $N_2$ .

De même,  $m(\mathbf{t}, N_2) = 3$ , alors il existe  $\mathbf{p}$  et  $\mathbf{q}$  dans  $N_2$  distincts de  $\mathbf{B}$ .

Sans perte de généralité, pour les mêmes raisons  $\mathbf{p}$  est adjacent à  $\mathbf{y}$  et  $\mathbf{A}$ , tandis que  $\mathbf{q}$  est adjacent à  $\mathbf{A}$  et  $\mathbf{u}$ .

Notons que  $N(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{s}, \mathbf{p}, \mathbf{q}\}$ . Tout ceci est résumé dans la figure 3.5.

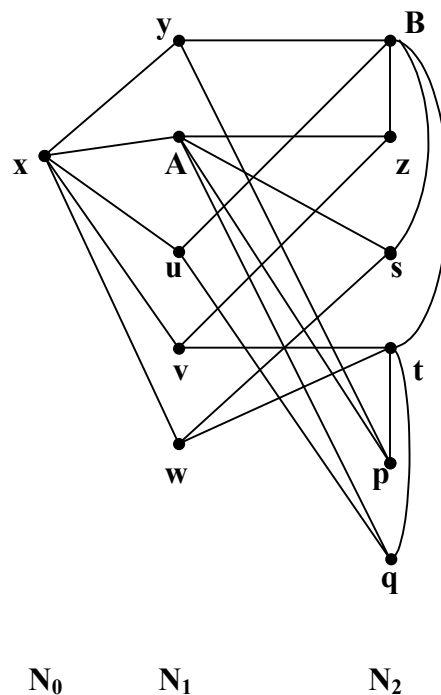


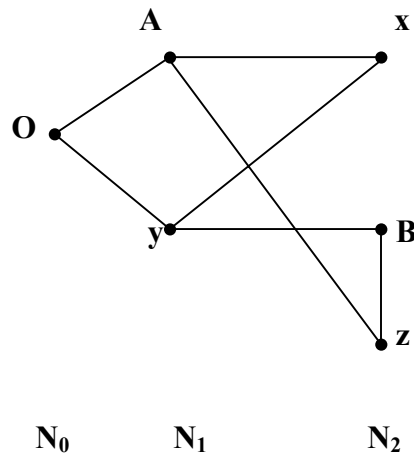
Figure 3.5

Tout 6-cycle contenant la chaîne  $\mathbf{I}$ , passe par un voisin aux sommets de  $N(\mathbf{B})$ .

Les 6-cycles qui contiennent la chaîne **I** sont : **A,x,y,B,t,p,A** et **A,x,y,B,t,q,A**, dont le deuxième est le seul induit.

**3<sup>ème</sup> cas**

Si **I** rencontre les deux niveaux  $N_1$  et  $N_2$ .



**Figure 3.6**

Le 6-cycle qui contient la chaîne **I**, peut rencontrer les 3 niveaux  $N_0$ ,  $N_1$  et  $N_2$  ou  $N_1$  et  $N_2$  seulement ou encore passer par un voisin de  $N(\mathbf{B})$  et **A**.

Comme  $m(\mathbf{B}, N_1) = 2$ , alors il existe  $\mathbf{u} \in N(\mathbf{B}) \cap N_1$ . De plus  $m(\mathbf{B}, N_2) = 3$ , alors il existe  $\mathbf{s}$  et  $\mathbf{t}$  dans  $N_2$ . Comme dans les cas précédents,  $\mathbf{s} \in N(\mathbf{A})$  et il existe aussi  $\mathbf{v} \in N(\mathbf{s}) \cap N_1$ . De plus,  $\mathbf{t} \in N(\mathbf{v})$  et il existe un autre sommet  $\mathbf{w} \in N(\mathbf{t}) \cap N_1$ .

D'autre part, il existe  $\mathbf{p}, \mathbf{q}$  dans  $N(\mathbf{t}) \cap N_2$ .  $\mathbf{p} \in N(\mathbf{y}) \cap N(\mathbf{A})$  et  $\mathbf{q} \in N(\mathbf{u}) \cap N(\mathbf{A})$  comme dans la figure 3.7.

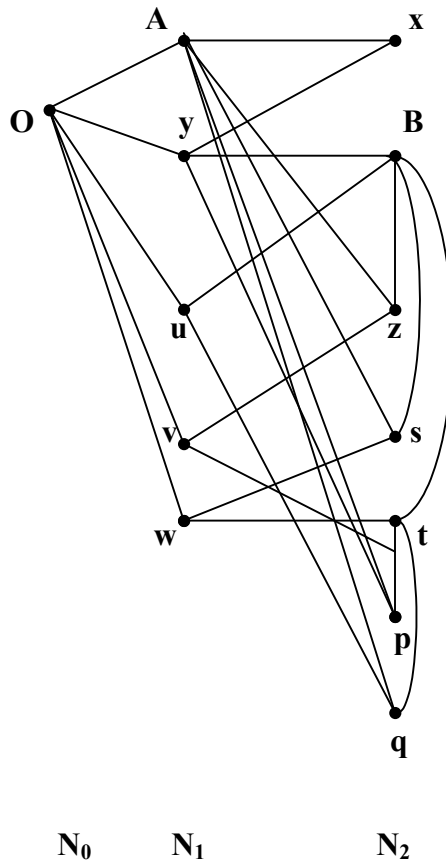


Figure 3.7

Ainsi,  $d(A) = 6$ , absurde. Donc ce cas n'a pas lieu.

**4<sup>ème</sup> cas.**

Si la chaîne I est sur  $N_2$ .

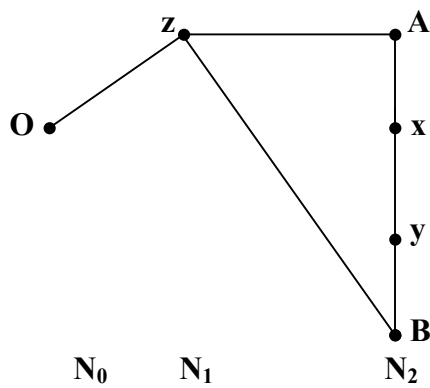


Figure 3.8

En raisonnant comme plus haut, on obtient la figure 3.9

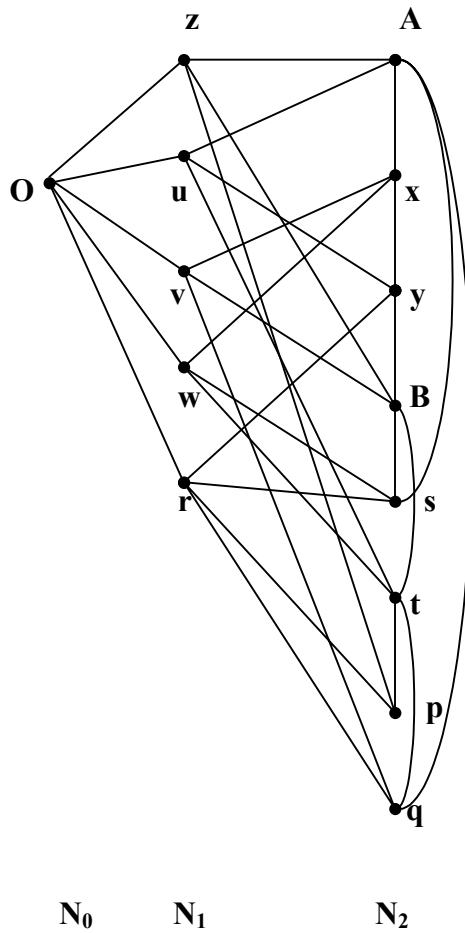


Figure 3.9

Les 6-cycles contenant **I** sont  $A, x, y, B, v, q, A$ ,  $A, x, y, B, t, u, A$  et  $A, x, y, B, t, q, A$ . Le dernier 6-cycle est le seul induit.  $\square$

En plus des hypercubes et des graphes impairs étendus (pour  $k \geq 3$ ), on y trouve dans la classe  $\mathfrak{I}$ , les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers.

### 3.2.3 Proposition.

Si  $G$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier alors  $G$  est dans  $\mathfrak{I}$ .

#### Preuve.

Soient  $G$  un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier et  $x, y, z, t$  une chaîne induite de longueur trois reliant les deux sommets distincts  $x$  et  $t$ . Comme  $G$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier alors il existe un unique 6-cycle  $x, y, z, t, u, v, x$  contenant la chaîne  $x, y, z, t$ .



Figure 3.10

Si ce 6-cycle n'était pas induit, il existerait alors au moins une des arêtes  $zv$ ,  $yu$ ,  $vt$  ou  $xu$  dans  $G$ . Ainsi, si au moins une des premières arêtes figuraient, alors  $x$  et  $t$  seraient adjacents d'après la proposition 2.3.6, absurde. Quand aux arêtes  $vt$  et  $xu$ , elles n'ont pas lieu, puisque  $G$  est sans triangle.  $\square$

La réciproque n'est pas toujours vraie, puisque l'hypercube  $Q_n$ , pour  $n \geq 2$ , est un graphe dans  $\mathfrak{S}$  mais il n'est pas un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier.

### 3.2.4 Proposition.

Si  $G$  est un graphe dans  $\mathfrak{S}$  sans triangle et sans 4-cycle, alors  $G$  est un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier.

#### Preuve.

Soit  $x,y,z,t$  une chaîne de longueur trois reliant deux sommets dans un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ . Comme  $G$  n'admet ni le triangle, ni le 4-cycle comme sous-graphes induits,  $x,y,z,t$  est induite et ses deux extrémités sont distinctes, la chaîne  $x,y,z,t$  appartient à un 6-cycle induit  $\beta = x,y,z,t,u,v,x$  (figure 3.10).

$\beta$  est l'unique 6-cycle qui contient la chaîne  $x,y,z,t$ . Car sinon, il existerait une autre chaîne induite de longueur trois,  $t,u',v',x$ , avec  $u' \neq u$  ou  $v' \neq v$ , formant le 6-cycle non induit  $\beta' = x,y,z,t,u',v',x$ , puisque  $G$  est dans  $\mathfrak{S}$ . Or ceci n'a pas lieu d'après les hypothèses, d'où le résultat.  $\square$

### 3.3 RESULTATS DE BASE.

#### 3.3.1 Proposition.

Soit  $G$  un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ , sans triangle. Alors pour toute paire de sommets  $u$  et  $v$  à distance 2 :

$$d(u) = d(v).$$

#### Preuve.

Soient  $u$  et  $v$  deux sommets dans un graphe  $G$  de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle.

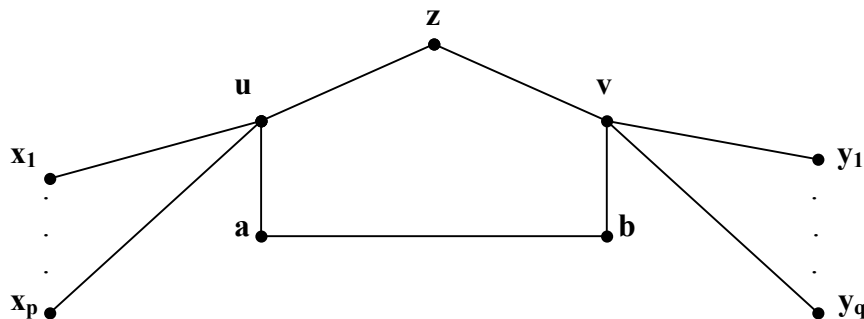


Figure 3.11

Posons:

$N(u) = (N(u) \cap N(v)) \cup A \cup B$ , avec :

$$A = \{a \in N(u) / \exists b \in N(v) : d(a,b) = 1\} \text{ et } B = N(u) \setminus (N(v) \cup A)$$

$N(v) = (N(v) \cap N(u)) \cup A' \cup B'$ , avec :

$$A' = \{b \in N(v) / \exists a \in N(u) : d(a,b) = 1\} \text{ et } B' = N(v) \setminus (N(u) \cup A').$$

Comme  $G$  est sans triangle,  $N(u) \cap N(v)$ ,  $A \cup B$ ,  $A' \cup B'$  sont stables . De plus,  $|A| = |A'|$ . Car sinon, sans perte de généralité supposons que  $|A| > |A'|$ . Autrement dit, il existe un sommet  $b$  dans  $A'$ , ayant au moins deux voisins distincts  $a_1$  et  $a_2$  dans  $A$ , comme ci-dessous :

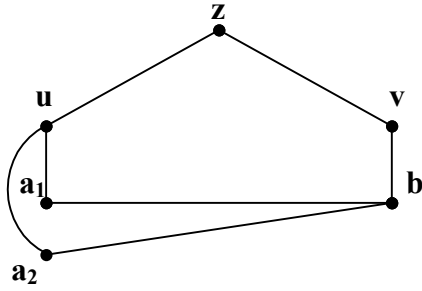


Figure 3.12

La chaîne  $z,u,a_1,b$  est induite puisque  $G$  est sans triangle. Alors elle appartient à un unique 6-cycle induit  $\mu = z,u,a_1,b,a',u',z$ .

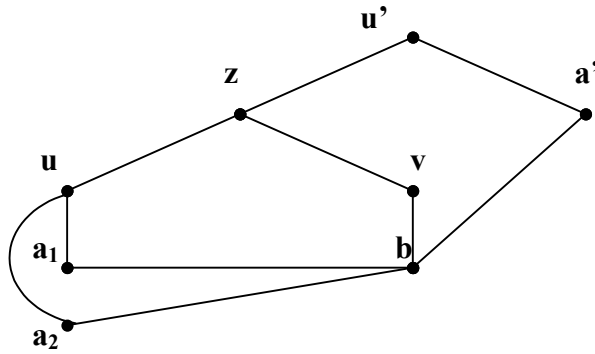


Figure 3.13

A partir des hypothèses et comme  $\mu$  est induite,  $a_2 \neq a' \neq v$ ,  $a' \notin N(v) \cup N(a_2)$ ,  $a_2 \neq u' \neq v$  et  $u' \notin N(v)$ . Etudions la possibilité ou non de l'existence d'une arête reliant  $u'$  et  $a_2$ .

Si  $u' \notin N(a_2)$ , la chaîne induite  $z,u',a',b$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $z,u',a',b,a_2,u,z$  et  $\mu$ , absurde.

Sinon, la chaîne induite  $u,a_2,u',a'$  appartient à un unique 6-cycle induit  $u,a_2,u',a',u'',a'',u$



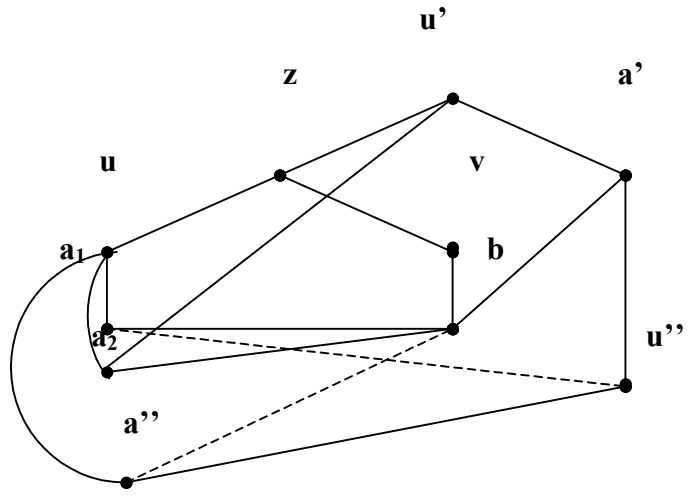


Figure 3.14

Si  $a'' = a_1$ .

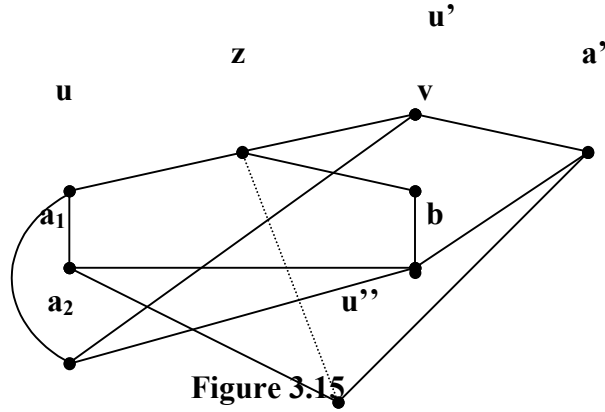


Figure 3.15

Si  $u'' \notin N(z)$ , la chaîne induite  $a_1, u, z, u'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $a_1, u, z, u', a', b$ ,  $a_1$  et  $a_1, u, z, u', a', u''$ ,  $a_1$ , absurde.

Si  $u'' \in N(z)$ , dans ce cas  $u'' \notin N(v)$ , puisque  $G$  est sans triangle.

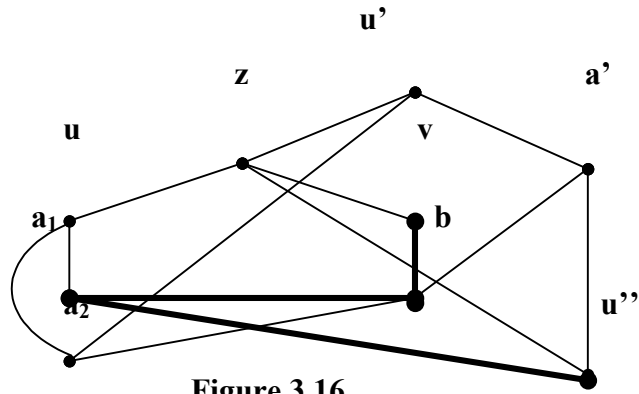


Figure 3.16

Soit la chaîne induite  $u'', a_1, b, v$ , elle appartient à un unique 6-cycle induit  $u'', a_1, b, v, w, d, u''$  ( $w \neq z, z \neq d \neq a', d \notin N(a')$ ).

$d \notin N(u)$ , car sinon, si  $d \notin N(u')$  la chaîne induite  $u, a_2, u', a'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u, a_2, u', a', u'', a_1, u$  et  $u, a_2, u', a', u'', d, u$ , absurde puisque  $d \notin N(a_2)$ . Par contre si  $d \in N(u')$ , la chaîne induite  $u, a_1, b, a'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u, a_1, b, a', u', z, u$  et  $u, a_1, b, a', u', d, u$ , absurde.

$w \notin N(a_2)$ , car sinon, dans ce cas  $w \notin N(u)$  et comme  $u'' \notin N(a_2)$  et  $d \notin N(u)$ , la chaîne induite  $w, d, u'', a_1$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $w, d, u'', a_1, b, v, w$  et  $w, d, u'', a_1, u, a_2, w$ , absurde.

Si  $w \notin N(a')$ , comme  $d \notin N(a')$ , la chaîne induite  $v, w, d, u''$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $v, w, d, u'', a_1, b, v$  et  $v, w, d, u'', a', b, v$ , absurde.

Si  $w \in N(a')$

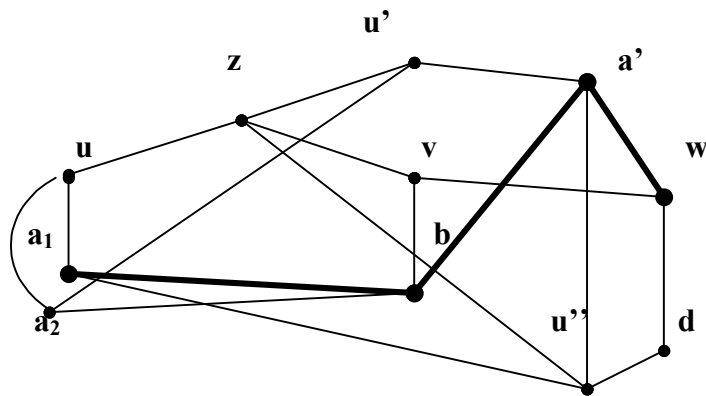


Figure 3.17

Soit la chaîne induite  $w, a', b, a_1$ , elle appartient à un unique 6-cycle induit  $w, a', b, a_1, s, t, w$ .

\* Cas général.

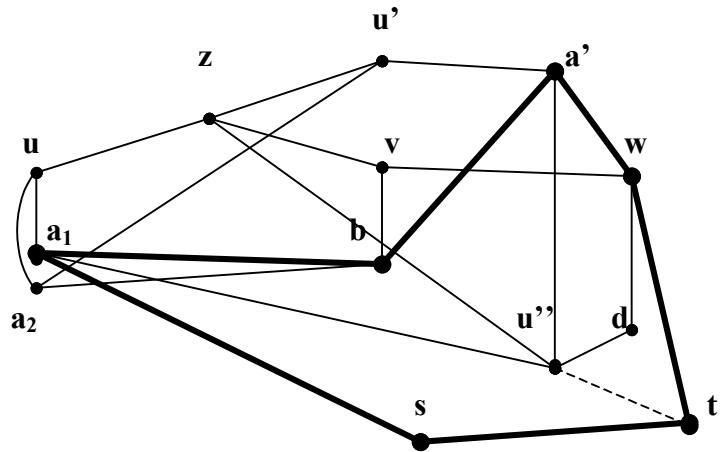


Figure 3.18

On a  $s \notin N(u'')$  et  $t \notin N(v)$ . Si  $t \in N(u'')$ , la chaîne induite  $v, b, a_1, u''$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $v, b, a_1, u'', d, w, v$  et  $v, b, a_1, u'', t, w, v$ , absurde. Si  $t \notin N(u'')$ , la chaîne induite  $a_1, s, t, w$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $a_1, s, t, w, a', b, a_1$  et  $a_1, s, t, w, a', u'', a_1$

\* Si  $s = u$ .

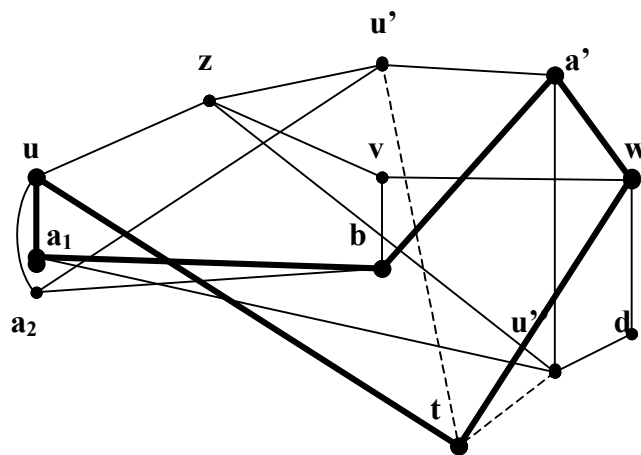


Figure 3.19

On a  $t \notin N(z) \cup N(a_2)$ . De plus,  $t \notin N(u')$  car sinon la chaîne induite  $u, a_1, b, a'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u, a_1, b, a', u'z, u$  et  $u, a_1, b, a', u', t, u$ , absurde. Si  $t \in N(u'')$ , la chaîne induite  $w, v, b, a_1$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $w, v, b, a_1, u'', d, w$  et  $w, v, b, a_1, u'', t, w$ , absurde. Si  $t \notin N(u'')$ , la chaîne induite  $w, d, u'', a_1$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, d, u'', a_1, b, v, w$  et  $w, d, u'', a_1, u, t, w$ , absurde.

\* Si  $t = d$ .

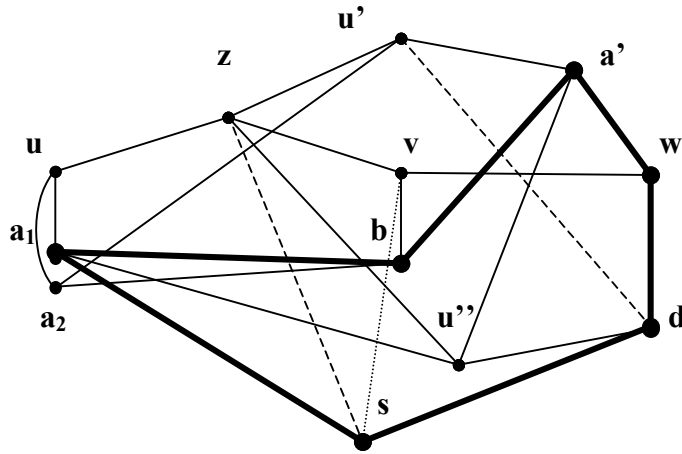


Figure 3.20

On a  $s \notin N(u'') \cup N(u)$ . D'autre part  $d \notin N(u')$ , car sinon la chaîne induite  $d, s, a_1, b$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $d, s, a_1, b, a', w, d$  et  $d, s, a_1, b, a', u', d$ , absurde. De plus,  $s \notin N(z)$  car sinon la chaîne induite  $a', w, d, s$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $a', w, d, s, a_1, b, a'$  et  $a', w, d, s, z, u', a'$ , absurde. Si  $s \notin N(v)$ , la chaîne induite  $w, d, s, a_1$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $w, d, s, a_1, b, a', w$  et  $w, d, s, a_1, b, v, w$ , absurde.

Si  $s \in N(v)$ .  $s \notin N(a_2)$ , car sinon la chaîne induite  $a_2, s, d, u''$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $a_2, s, d, u'', z, u, a_2$  et  $a_2, s, d, u'', a', b, a_2$ , absurde. Soit la chaîne induite  $d, u'', z, u$ , qui appartient à un unique 6-cycle induit  $d, u'', z, u, d', d'', d$ .

I Cas général.

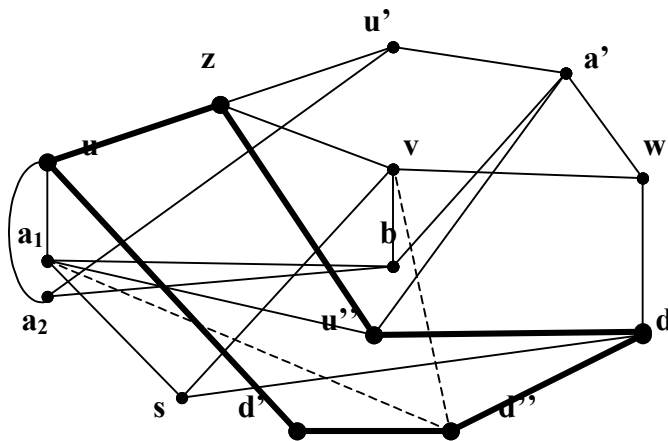


Figure 3.21

Si  $d'' \notin N(a_1)$ , la chaîne induite  $u, d', d'', d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u, d', d'', d, u'', z, u$  et  $u, d', d'', d, u'', a_1, u$ , absurde. Si  $d'' \in N(a_1)$ ,  $d'' \notin N(b) \cup N(w)$ ,

si  $d'' \notin N(v)$  la chaîne induite  $d, w, v, b$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $d, w, v, b, a_1, u'', d$  et  $d, w, v, b, a_1, d'', d$ , absurde. Mais si  $d'' \in N(v)$  la chaîne induite  $w, a', u'', a_1$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $w, a', u'', a_1, s, v, w$  et  $w, a', u'', a_1, d'', v, w$ , absurde.

II Si  $d' = a_2$ .

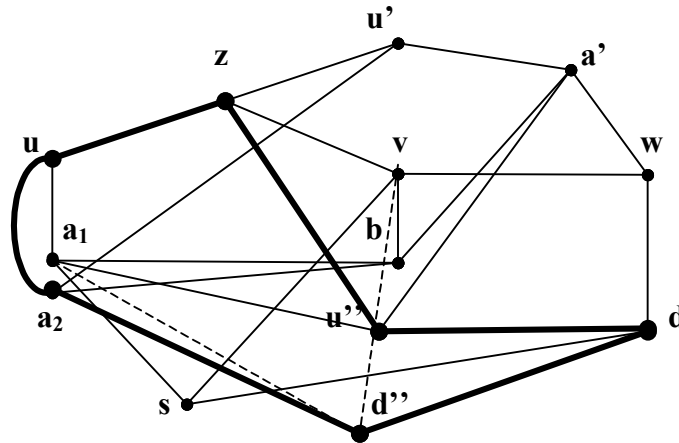


Figure 3.22

Même raisonnement que dans I.

III Si  $d'' = w$ . (dans ce cas  $w \notin N(u)$ )

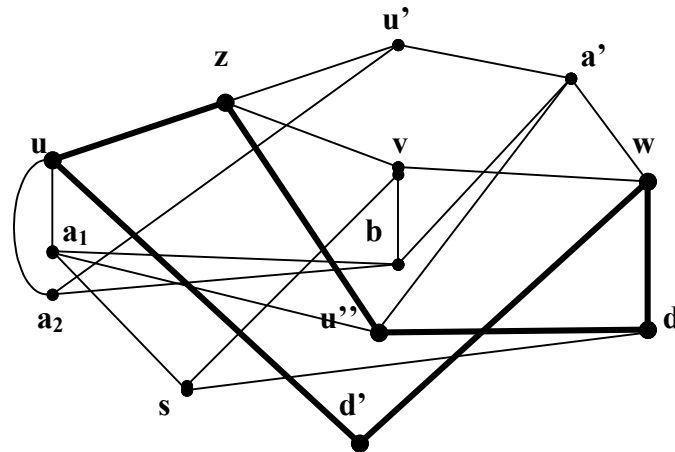


Figure 3.23

Comme  $d' \notin N(a_1)$  et  $w \notin N(a_1)$ , puisque dans le cas contraire la chaîne induite  $u', z, u, a_1$  appartiendrait à au moins deux 6-cycles induits  $u', z, u, a_1, b, a', u'$  et  $u', z, u, a_1, a', u'$ , absurde, la chaîne induite  $u, d', w, d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u, d', w, d, u'', z, u$  et  $u, d', w, d, u'', a_1, u$ , absurde.

IV Si  $d'' = s$ .

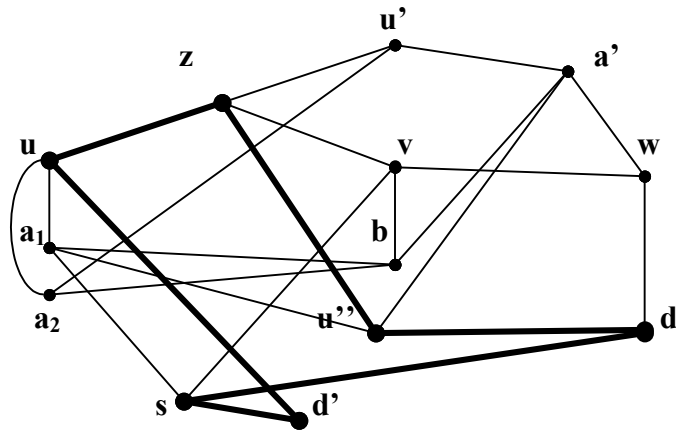


Figure 3.24

Soit la chaîne induite  $d, u'', a_1, u$ , elle appartient à un unique 6-cycle induit  $d, u'', a_1, u, s', a_1', d$ .

1. Cas général.

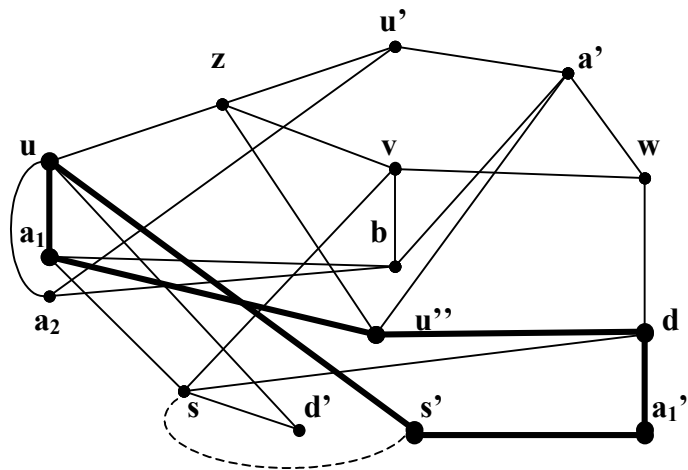


Figure 3.25

Si  $s' \notin N(s)$ , la chaîne induite  $u, s', a_1', d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u, s', a_1', d, u', a_1, u$  et  $u, s', a_1', d, s, a_1, u$ , absurde. Si  $s' \in N(s)$ , la chaîne induite  $d, u'', z, u$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $d, u'', z, u, d', s, d$  et  $d, u'', z, u, s', s, d$ , absurde.

2. Si  $s' = a_2$

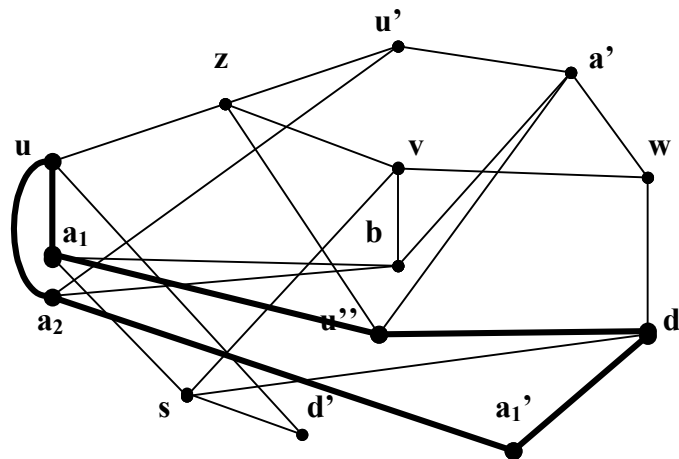


Figure 3.26

Comme  $s \notin N(a_2)$ , la chaîne induite  $d, a_1', a_2, u$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $d, a_1', a_2, u, a_1, u'', d$  et  $d, a_1', a_2, u, a_1, s, d$ , absurde.

3. Si  $a_1' = w$ . (dans ce cas  $w \notin N(u)$ )

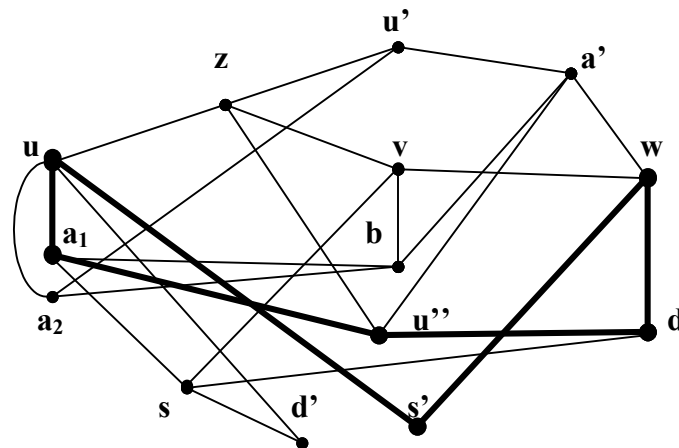


Figure 3.27

La chaîne induite  $d, u'', z, u$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $d, u'', z, u, d', s, d$  et  $d, u'', z, u, s', w, d$ , absurde.

4. Si  $s' = d'$ .

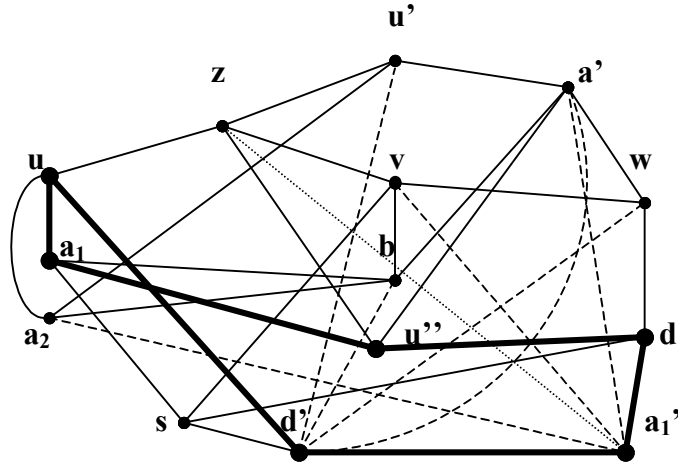


Figure 3.28

Si  $a_1' \notin N(z)$ , la chaîne induite  $u, d', a_1', d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u, d', a_1', d, u'', a_1, u$  et  $u, d', a_1', d, u'', z, u$ , absurde. Si  $a_1' \in N(z)$ , on a :

$d' \notin N(u')$ , puisque dans le cas contraire, comme  $d \notin N(u')$ , la chaîne induite  $s, d, u'', z$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $s, d, u'', z, u, d', s$  et  $s, d, u'', z, u', d', s$ , absurde.  $d' \notin N(w)$ , car sinon la chaîne induite  $u, z, u'', d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u, z, u'', d, s, d', u$  et  $u, z, u'', d, w, d', u$ , absurde. De même,  $d' \notin N(a')$ , car sinon la chaîne induite  $a', d', u, z$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a', d', u, z, v, w, a'$  et  $a', d', u, z, v, b, a'$ , absurde.  $d' \notin N(b)$ , car sinon la chaîne induite  $u, z, u', a'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u, z, u', a', b, a_1, u$  et  $u, z, u', a', b, d', u$ , absurde.

$a_1' \notin N(a')$ , car sinon la chaîne induite  $z, u, a_2, b$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $z, u, a_2, b, a', u'', z$  et  $z, u, a_2, b, a', a_1', z$ , absurde. Soit la chaîne induite  $u', z, a_1', d'$ , elle appartient à un unique 6-cycle induit  $u', z, a_1', d', a_1'', z', u'$ , absurde.



- Cas général.

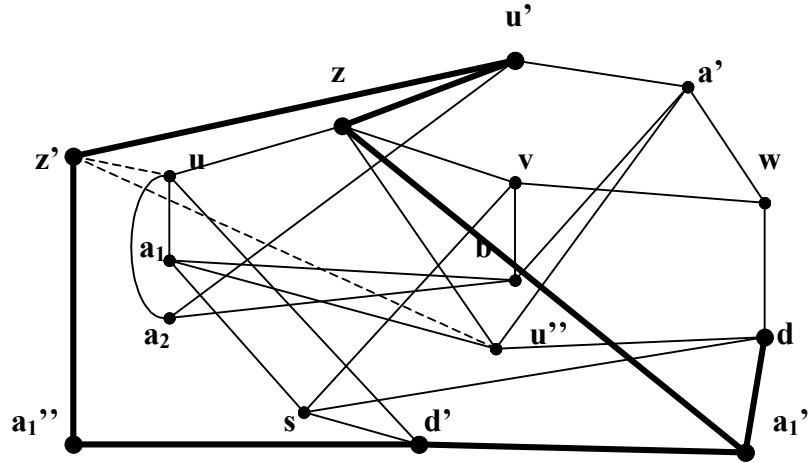


Figure 3.29

Si  $z' \notin N(u)$ , la chaîne induite  $u', z, a_1'', d'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u', z', a_1'', d', a_1', z, u'$  et  $u', z', a_1'', d', u, z, u'$ , absurde. Si  $z' \in N(u)$  et  $z' \notin N(u'')$ , la chaîne induite  $u', a', u'', a_1$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u', a', u'', a_1, u, a_2, u'$  et  $u', a', u'', a_1, u, z', u'$ , absurde., mais si  $z' \in N(u'')$ , la chaîne induite  $z', a_1'', d', a_1'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $z', a_1'', d', a_1', z, u', z'$  et  $z', a_1'', d', a_1', z, u'', z'$ , absurde.

- Si  $a_1'' = s$ .

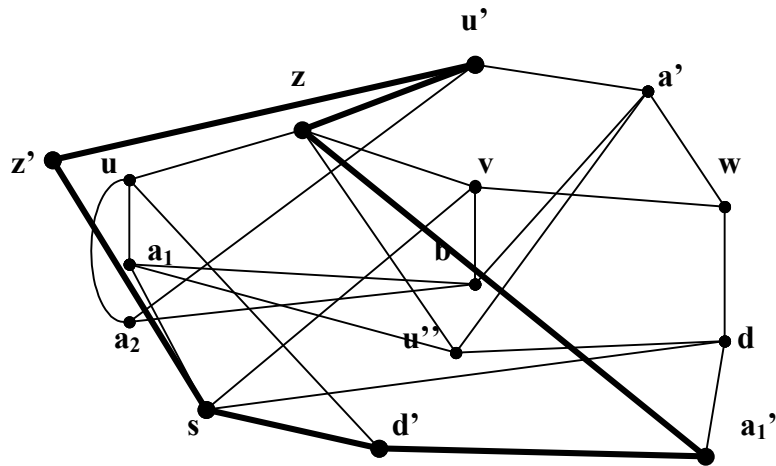


Figure 3.30

Comme  $z' \notin N(d)$ , la chaîne induite  $z', u', z, a_1'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $z', u', z, a_1', d', s, z'$  et  $z', u', z, a_1', d, s, z'$ , absurde.

- Si  $z' = a'$ .

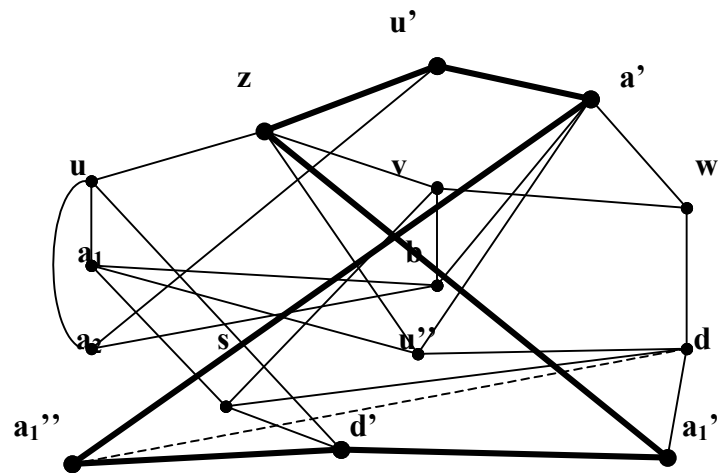


Figure 3.31

Si  $a_1'' \notin N(d)$ , la chaîne induite  $a', a_1'', d', a_1'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a', a_1'', d', a_1', z, u', a'$  et  $a', a_1'', d', a_1', d, w, a_1'$ , absurde. Si  $a_1'' \in N(d)$ , la chaîne induite  $a_1'', a', u', z$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_1'', a', u', z, a_1', d', a_1''$  et  $a_1'', a', u', z, a_1', d, a_1''$ , absurde.

- Si  $z' = a_2$ .

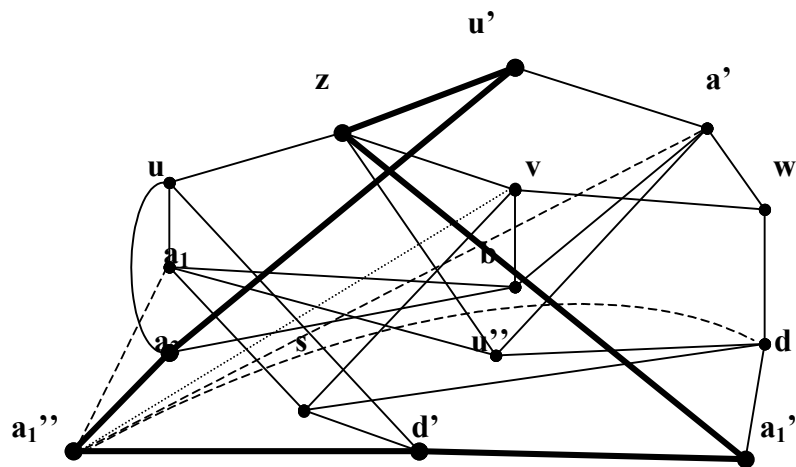


Figure 3.32

Si  $a_1'' \notin N(v)$ , la chaîne induite  $d', s, v, b$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $d', s, v, b, a_2, a_1'', d'$  et  $d', s, v, b, a_2, u, d'$ , absurde. Si  $a_1'' \in N(v)$ , on a  $a_1'' \notin N(d)$ , car sinon la chaîne induite  $a_1'', a_2, u', z$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_1'', a_2, u', z, a_1', d', a_1''$  et  $a_1'', a_2, u', z, u'', d, a_1''$ , absurde.  $a_1'' \notin N(a')$ , car sinon la chaîne induite  $a_1'', d', a_1', d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_1'', d', a_1', d, w, v, a_1''$  et  $a_1'', d', a_1', d, w, a', a_1''$ , absurde.  $a_1'' \notin N(a_1)$ , car sinon la chaîne induite  $u'', a_1, a_1'', d'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u'', a_1, a_1'', d', a_1', d, u''$  et  $u'', a_1, a_1'', d', a_1', z, u''$ ,

absurde. Soit la chaîne induite  $a',b,v,a_1''$ , elle appartient à un unique 6-cycle induit  $a',b,v,a_1'',b',v',a'$ .

◆ Cas général.

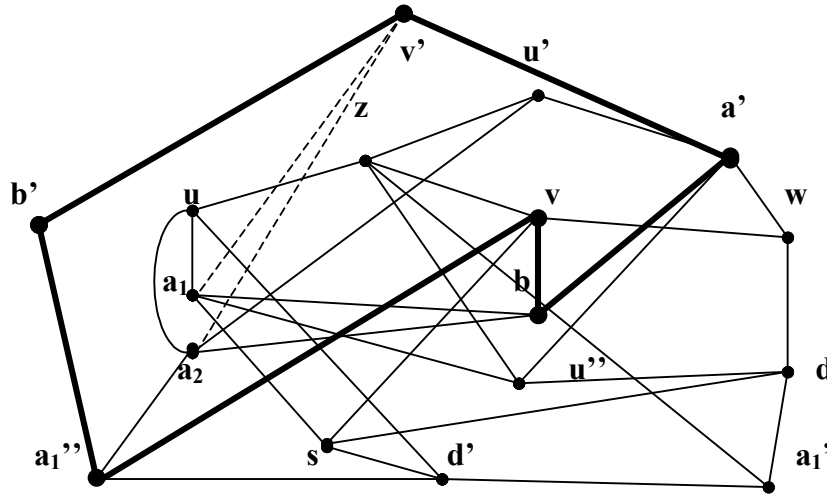


Figure 3.33

Si  $v' \notin N(a_2)$ , la chaîne induite  $a_1'',b',v',a'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_1'',b',v',a',b,v,a_1''$  et  $a_1'',b',v',a',b,a_2,a_1''$ , absurde. Si  $v' \in N(a_2)$  et  $v' \notin N(a_1)$ , la chaîne induite  $a_2,u,a_1,u''$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_2,u,a_1,u'',a',u',a_2$  et  $a_2,u,a_1,u'',a',v',a_2$  absurde. Si  $v' \in N(a_1)$ , la chaîne induite  $v',b',a_1'',v$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $v',b',a_1'',v,b,a',v'$  et  $v',b',a_1'',v,b,a_1,v'$ , absurde.

◆ Si  $b'=d'$ .

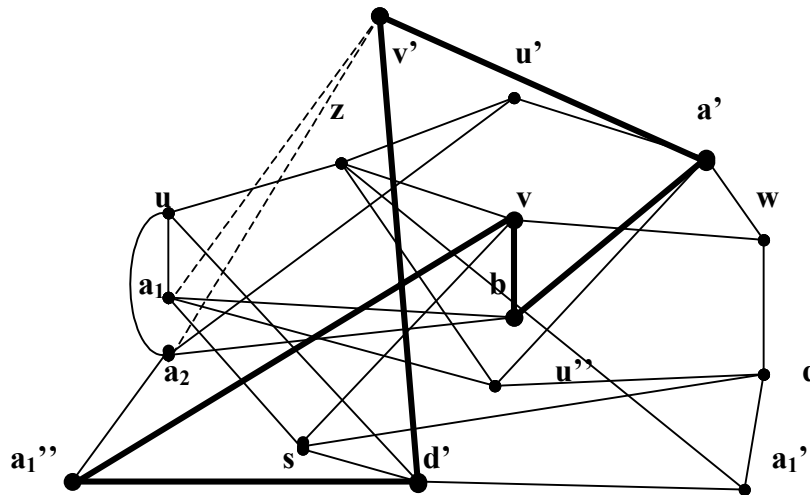


Figure 3.34

Même raisonnement que celui présenté dans le cas général.

◆ Si  $v' = u''$ .

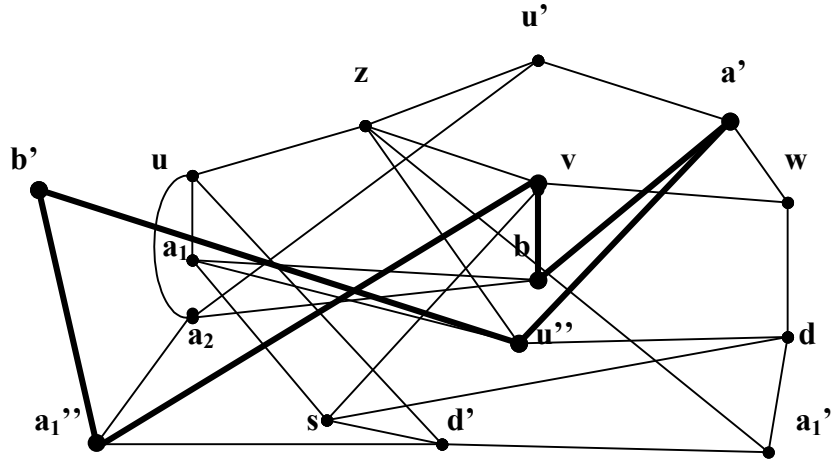


Figure 3.35

la chaîne induite  $a_1'', b', u'', a'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_1'', b', u'', a', b, v, a_1''$  et  $a_1'', b', u'', a', b, a_2, a_1''$ , absurde.

◆ Si  $v' = u'$ .

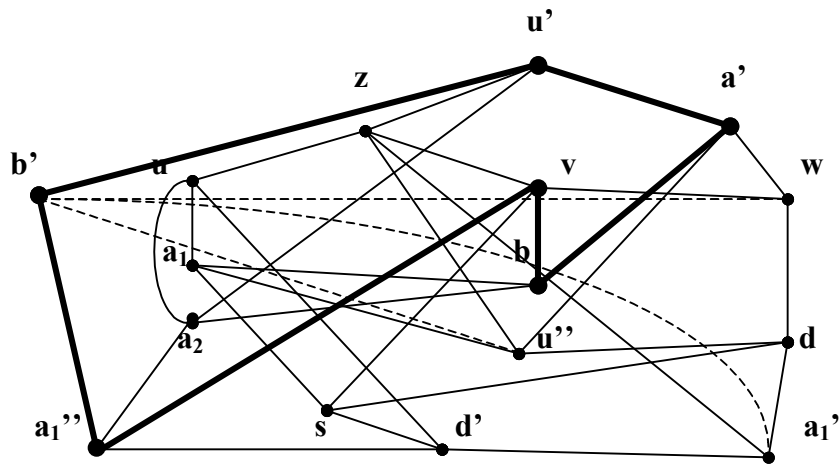


Figure 3.36

$b' \notin N(u'')$ , car sinon la chaîne induite  $a', b, v, a_1''$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a', b, v, a_1'', b', u', a'$  et  $a', b, v, a_1'', b', u'', a'$ , absurde. Si  $b' \notin N(w)$  la chaîne induite  $a', u', b', a_1''$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a', u', b', a_1'', v, b, a'$  et  $a', u', b', a_1'', v, w, a'$ , absurde. Si  $b' \in N(w)$  et  $b' \notin N(a_1')$ , la chaîne induite  $a_1'', d', a_1', d$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a_1'', d', a_1', d, w, v, a_1''$  et  $a_1'', d', a_1', d, w, b', a_1''$ , absurde. Si  $b' \in N(a_1')$ , comme  $b' \notin N(u'')$  la chaîne induite  $a', u'', z, a_1'$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $a', u'', z, a_1', b', w, a'$  et  $a', u'', z, a_1', b', u', a'$ , absurde. Donc  $a'' \neq a_1$ . De plus,  $a_1$  n'est pas adjacent à  $u''$ , puisque dans le cas contraire, la chaîne induite  $u'', a', u', a_2$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $u'', a', u', a_2, u, a'', u''$  et  $u'', a', u', a_2, u, a_1, u''$ ,

absurde. De même  $\mathbf{a}''$  et  $\mathbf{b}$  ne sont pas adjacents, puisque dans le cas contraire la chaîne  $\mathbf{z}, \mathbf{u}', \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{a}_1, \mathbf{u}, \mathbf{z}$  et  $\mathbf{z}, \mathbf{u}', \mathbf{a}', \mathbf{b}, \mathbf{a}'', \mathbf{u}, \mathbf{z}$ , absurde.

Ainsi la chaîne  $\mathbf{a}', \mathbf{u}'', \mathbf{a}'', \mathbf{u}$  appartient à au moins deux 6-cycles induits :  $\mathbf{a}', \mathbf{u}'', \mathbf{a}'', \mathbf{u}, \mathbf{a}_1, \mathbf{b}, \mathbf{a}'$  et  $\mathbf{a}', \mathbf{u}'', \mathbf{a}'', \mathbf{u}, \mathbf{a}_2, \mathbf{u}', \mathbf{a}'$ , absurde. D'où le résultat.

D'autre part, comme  $\mathbf{G}$  est dans  $\mathfrak{S}$ , pour tout  $\mathbf{x} \in \mathbf{B}$  (resp.  $\mathbf{a} \in \mathbf{A}$ ), la chaîne  $\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$  (resp.  $\mathbf{a}, \mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$ ), qui est induite de longueur trois, appartient à un unique 6-cycle induit. Donc la chaîne  $\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$  appartient à  $(|\mathbf{B}| + |\mathbf{A}|)$  6-cycles induits.

De même, en raisonnant sur chaque sommet  $\mathbf{y} \in \mathbf{B}'$  (resp.  $\mathbf{b} \in \mathbf{A}'$ ), on peut déduire que la chaîne  $\mathbf{u}, \mathbf{z}, \mathbf{v}$  appartient à  $(|\mathbf{B}'| + |\mathbf{A}'|)$  6-cycles induits.

Ainsi,  $|\mathbf{B}| + |\mathbf{A}| = |\mathbf{B}'| + |\mathbf{A}'|$ . Donc  $|\mathbf{B}| = |\mathbf{B}'|$ .

Alors :

$$\begin{aligned} d(\mathbf{u}) &= |\mathbf{N}(\mathbf{u}) \cap \mathbf{N}(\mathbf{v})| + |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}| \\ &= |\mathbf{N}(\mathbf{u}) \cap \mathbf{N}(\mathbf{v})| + |\mathbf{A}'| + |\mathbf{B}'| = d(\mathbf{v}). \square \end{aligned}$$

### 3.3.2 Proposition.

Si  $\mathbf{G}$  est un graphe dans  $\mathfrak{S}$  sans triangle, alors  $\mathbf{G}$  est régulier ou semi-régulier.

#### Preuve.

Soit  $\mathbf{G}$  un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ , sans triangle.

- Si  $\mathbf{G}$  est biparti

Soient  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$  deux sommets dans la même bipartition. Comme  $\mathbf{G}$  est connexe, il existe une chaîne dont les extrémités sont  $\mathbf{u}$  et  $\mathbf{v}$ .

Considérons la géodésique  $\mathbf{u}, \mathbf{u}_1, \dots, \mathbf{u}_{p-1}, \mathbf{v}$  de longueur  $p$ . Puisque  $\mathbf{G}$  est biparti,  $p$  est pair. Donc d'après, la proposition 3.3.1,  $d(\mathbf{u}) = d(\mathbf{v})$ . Et alors  $\mathbf{G}$  est semi-régulier ou régulier.

- Si  $G$  n'est pas biparti

Comme  $G$  n'est pas biparti, il existe un cycle de longueur impair, au moins égale à 5, puisque  $G$  est sans triangle.

Soit  $C = a_0, a_1, \dots, a_k, a_{k+1}, \dots, a_{2k+1}$  un cycle induit de longueur impair  $2k+1$ .

Pour tout  $i$ , considérons la chaîne  $a_{i-2}, a_{i-1}, a_i, a_{i+1}, a_{i+2}$ .

Si  $i$  est pair,  $d(a_i) = d(a_0) = d(a_{i+1})$  or  $d(a_{i-1}) = d(a_{i+1})$ . Alors  $d(a_i) = d(a_{i+1}) = d(a_{i-1})$ .

Si  $i$  est impair,  $d(a_i) = d(a_0) = d(a_{i-1})$  or  $d(a_{i-1}) = d(a_{i+1})$  et donc  $d(a_i) = d(a_{i+1}) = d(a_{i-1})$ .

Ainsi, tous les sommets de  $C$  ont le même degré. Si  $C$  est hamiltonien,  $G$  est régulier. Sinon, pour tout sommet  $u$  n'appartenant pas à  $C$ , de la connexité de  $G$ , il existe une plus courte chaîne de longueur  $p$  ayant une extrémité  $v$  dans  $C$  est l'autre  $u$ . Si  $p$  est pair, terminé. Sinon, le voisin de  $v$  dans  $C$  a le même degré que  $u$ . Donc  $G$  est régulier.  $\square$

Par analogie au travail établi par Mollard, on a pu délimiter inférieurement le nombre d'arêtes entre un sommet arbitraire et le sous-graphe induit par le premier niveau qui lui est antérieur, dans une décomposition en niveaux d'un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle.

### 3.3.3 Lemme.

Si  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ , sans triangle et  $N_0, N_1, \dots, N_p$  une décomposition en niveaux arbitraire de  $G$  et  $u$  un sommet dans  $N_i$ . Alors

$$d^-(u) = m(u, N_{i-1}) \geq \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil.$$

**Preuve.** Ceci est vrai pour  $i = 0, 1$  et  $2$ . Supposons que la propriété est vraie pour tous les sommets dans  $N_i$  et soient  $u$  dans  $N_{i+2}$  et  $v$  dans  $N_i$  sur une chaîne de longueur 2 :  $u, y_0, v$ .

Soient  $x_1, \dots, x_p$  les voisins de  $v$  dans  $N_{i-1}$  ( $p \geq \left\lceil \frac{i}{2} \right\rceil$ ) et  $y_1, \dots, y_q$  les voisins de  $u$  (distincts de  $y_0$ ) dans  $N_{i+1}$  (figure 3.37).

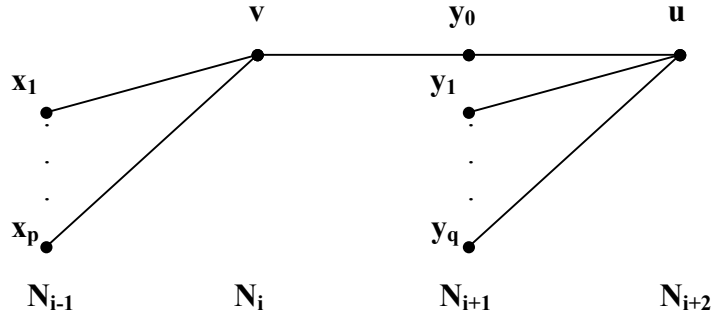


Figure 3.37

Soient  $N_{i,j}$  ( $i = 1, \dots, p$ ;  $j = 1, \dots, q$ ) le nombre de 6-cycles induits utilisant la chaîne  $x_i, v, y_0, u, y_j$ . Par le fait que  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  et sans triangle, en utilisant les deux chaînes de longueurs trois :  $x_i, v, y_0, u$  (une chaîne induite) et  $v, y_0, u, y_j$  (peut être induite si  $v$  et  $y_j$  n'étaient pas adjacents), on obtient

$$\forall i \quad \sum_j N_{i,j} = 1 \quad \text{et} \quad \forall j \quad \sum_i N_{i,j} \leq 1.$$

Alors  $\sum_i \sum_j N_{i,j}$  est égal à  $p$  et est au plus  $q$ ; mais  $d^-(u) = q+1$  et  $d^-(v) = p$ . Alors

le résultat est obtenu grâce à l'hypothèse de récurrence.  $\square$

En utilisant le lemme précédent, on peut déduire le corollaire suivant :

### 3.3.4 Corollaire.

Soit  $G$  un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ , sans triangle de degré maximum  $n$  et  $N_0, N_1, \dots, N_p$  une décomposition en niveaux relative à un sommet de degré  $n$ . Alors, pour  $k = 0, \dots, n-2$

$$|N_{2k+1}| \leq \frac{n}{k+1} \binom{n-1}{k}^2 \quad \text{et} \quad |N_{2k+2}| \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \binom{n-1}{k}^2.$$

**Preuve.** Ceci est vrai pour  $i = 0$ . On a aussi :  $|N_1| = n$  et  $|N_2| \leq n(n-1)$ . Supposons par récurrence que  $|N_{2k}| \leq \frac{n(n-k)}{k^2} \binom{n-1}{k-1}^2$ . Soit  $n'$  le degré des sommets dans les niveaux impairs ( $n'$  peut être éventuellement égal à  $n$ ).

En dénombrant les arêtes entre  $N_{2k}$  et  $N_{2k+1}$ , on obtient d'après le lemme précédent que ce nombre est au moins  $|N_{2k+1}| \lceil \frac{2k+1}{2} \rceil$  et au plus  $|N_{2k}| (n - \lceil \frac{2k}{2} \rceil)$ .

Ainsi, nous obtenons :

$$|N_{2k+1}| \leq |N_{2k}| \frac{(n-k)}{k+1} \leq \frac{n(n-k)^2}{k^2(k+1)} \binom{n-1}{k-1}^2 = \frac{n}{k+1} \binom{n-1}{k}^2.$$

De même, en dénombrant les arêtes entre  $N_{2k+1}$  et  $N_{2k+2}$ , on obtient :

$$|N_{2k+2}| \leq |N_{2k+1}| \frac{n-k-1}{k+1} \leq \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \binom{n-1}{k}^2. \square$$

D'après le lemme 3.3.3, pour un graphe  $\mathbf{G}$  sans triangle de la classe  $\mathfrak{S}$  de degré maximum  $n$ , pour chaque sommet de  $N_p$ , on a  $\lceil \frac{p}{2} \rceil \leq n$ . Alors  $p \leq 2n$ . Mais après dénombrement des arêtes entre  $N_{2n-1}$  et  $N_{2n}$ , on peut déduire que  $N_{2n} = \emptyset$ . Ainsi  $\mathbf{G}$  est de diamètre au plus  $2n-1$ . Toujours par le même procédé, l'inégalité  $|N_{2n-1}| \leq 1$  a lieu. A partir de cette remarque on a pu borner supérieurement l'ordre de  $\mathbf{G}$ , comme suit :

$$\begin{aligned} |\mathbf{V}(\mathbf{G})| &\leq |N_0| + |N_1| + \dots + |N_{2n-1}| \\ &\leq 2 + \sum_{i=0}^{n-2} \binom{n-1}{i}^2 \left( \frac{n}{i+1} + \frac{n((n-i-1))}{(i+1)^2} \right) \leq \sum_{i=0}^n \binom{n}{i}^2 \leq \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

Ainsi tout graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle est d'ordre maximum  $\binom{2n}{n}$ .

Montrons maintenant que le sous-graphe  $\mathbf{H}_n$  induit par les niveaux centraux  $N_{n-1}$  et  $N_n$  de l'hypercube de degré impair  $\mathbf{Q}_{2n-1}$ , est le seul graphe  $n$ -régulier, d'ordre  $\binom{2n}{n}$  et de diamètre  $2n-1$ .

Supposons que  $\mathbf{G}$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle, de degré maximum  $n$  et d'ordre  $\binom{2n}{n}$ . Alors, on a pour  $k = 1, \dots, n-1$

$$|N_{2k+1}| = \frac{n}{k+1} \binom{n-1}{k}^2 \quad \text{et} \quad |N_{2k+2}| = \frac{n(n-k-1)}{(k+1)^2} \binom{n-1}{k}^2.$$



Alors  $G$  est régulier et il est clair qu'en utilisant ces égalités dans la preuve du lemme cité ci-dessus, on obtient pour tout  $u$  dans  $N_i$  ( $i = 0, \dots, 2n-1$ )

$$d^-(u) = m(u, N_{i-1}) = \lceil \frac{i}{2} \rceil \quad \text{et} \quad d^+(u) = m(u, N_{i+1}) = n - \lceil \frac{i}{2} \rceil.$$

Sous ces hypothèses, on a le lemme suivant :

### 3.3.5 Lemme.

$G$  est sans 4-cycle

**Preuve.** Supposons que  $G$  admet au moins un 4-cycle. Comme  $G$  est sans triangle,  $\text{diam}(G) = 2n-1 \geq 3$ . D'après les hypothèses, on peut déduire que  $N_1$  est stable et pour tout  $u$  dans  $N_2$ ,  $m(u, N_1) = 1$ . Ainsi, on ne retrouve aucun 4-cycle sur les deux premiers niveaux de  $G$ , ni même ceux rencontrant  $N_0, N_1$  et  $N_2$ .

**1<sup>er</sup> cas.** Si ce 4-cycle, notons le  $u, v, x, w$  rencontre trois niveaux consécutifs  $N_i, N_{i-1}$  et  $N_{i-2}$ , tels que  $u$  soit sur  $N_i$ ,  $v$  et  $w$  sur  $N_{i-1}$  et  $x$  sur  $N_{i-2}$ . On a  $i \geq 3$ , il existe donc  $y$  dans  $N(x) \cap N_{i-3}$ . La chaîne induite  $y, x, v, u$  appartient à un unique 6-cycle induit  $y, x, v, u, t, t', y$ .

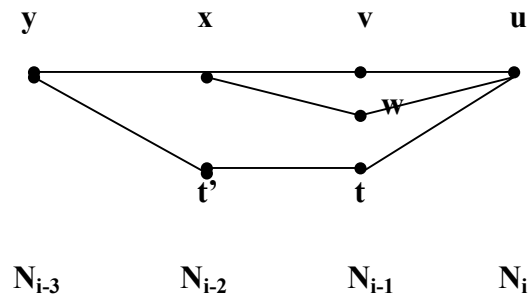


Figure 3.38

Si  $t'$  est dans  $N(w) \cap N_{i-2}$ ; considérons la chaîne induite  $u, w, t', y$  qui appartient à l'unique 6-cycle induit  $u, w, t', y, a, a', u$ .

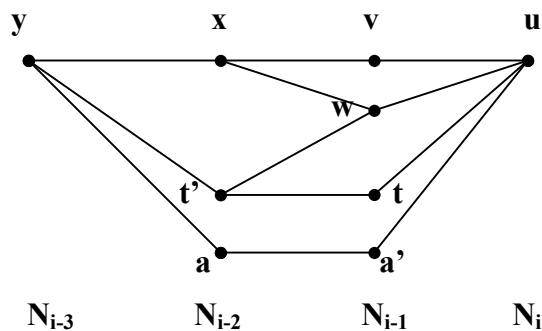


Figure 3.39

$a'$  n'appartient pas à  $N(x) \cap N_{i-1}$ , car sinon la chaîne induite  $x, y, t', t$  appartiendrait à au moins deux 6-cycles induits  $x, y, t', t, u, v, x$  et  $x, y, t', t, u, a', x$ , absurde. Mais alors la chaîne induite  $u, a', a, y$  appartiendrait à au moins deux 6-cycles induits  $u, a', a, y, t', w, u$  et  $u, a', a, y, x, w, u$ , absurde.

Alors  $t'$  n'est pas dans  $N(w) \cap N_{i-2}$ . D'où la chaîne induite  $u, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $u, t, t', y, x, v, u$  et  $u, t, t', y, x, w, u$ , absurde.

**2<sup>ème</sup> cas.** Si  $u, v, x, w$  rencontre deux niveaux consécutifs  $N_i, N_{i-1}$  ( $i \geq 2$ ). Quatre cas de figures se présentent.

1) Si  $u$  et  $x$  sont sur  $N_i$ ,  $v$  et  $w$  sur  $N_{i-1}$ . Il existe  $y$  dans  $N(v) \cap N_{i-2}$ . La chaîne induite  $y, v, u, w$  ( $y$  n'est pas dans  $N(w) \cap N_{i-1}$  d'après le 1<sup>er</sup> cas) appartient à un unique 6-cycle induit  $y, v, u, w, t, t', y$ .

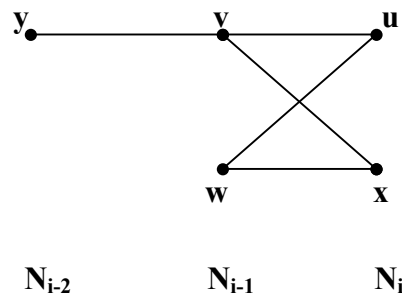


Figure 3.40

A) Si ( $t$  est dans  $N_{i-2}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-3}$ ) (figure 3.41) ou ( $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-2}$ ) (figure 3.42).

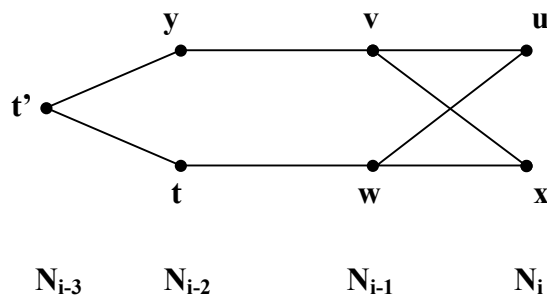


Figure 3.41

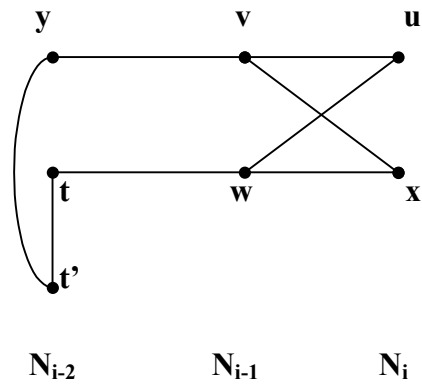


Figure 3.42

La chaîne induite  $t, t', y, v$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $t, t', y, v, u, w, t$  et  $t, t', y, v, x, w, t$ , absurde.

B) Si ( $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-2}$ ) (figure 3.43) ou ( $t$  est dans  $N_{i-2}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-1}$ ) (figure 3.44).

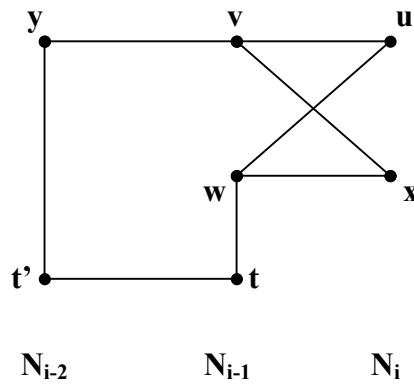


Figure 3.43

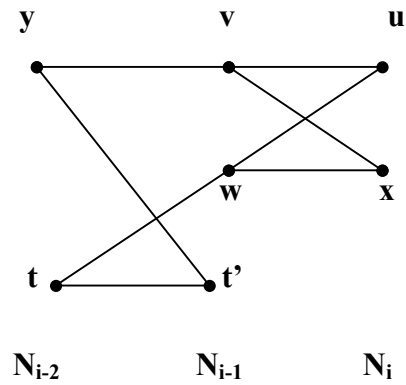


Figure 3.44

Puisque  $G$  est sans triangle e d'après le 1<sup>er</sup> cas, ni  $t$  ni  $t'$  ne sont dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

C) Si ( $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-1}$ ) (figure 3.45) ou ( $t$  est dans  $N_i$  et  $t'$  est dans  $N_{i-1}$ ) (figure 3.46).

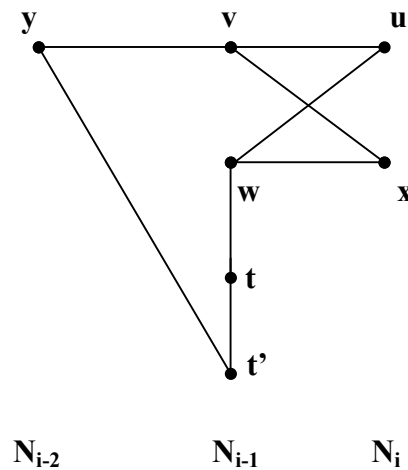


Figure 3.45

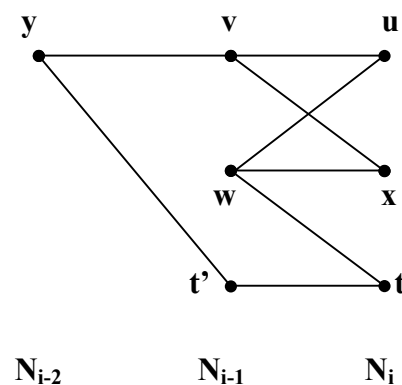


Figure 3.46

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . De plus d'après le 1<sup>er</sup> cas,  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

2) Si  $u, w, x$  sont dans  $N_i$ ,  $v$  est dans  $N_{i-1}$ . Il existe  $y$  dans  $N(v) \cap N_{i-2}$ . La chaîne induite  $y, v, u, w$  appartient à un unique 6-cycle induit  $y, v, u, w, t, t', y$ .

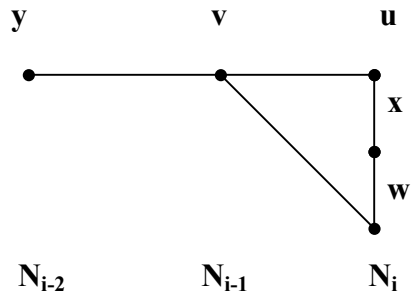


Figure 3.47

A) Si  $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-2}$ .

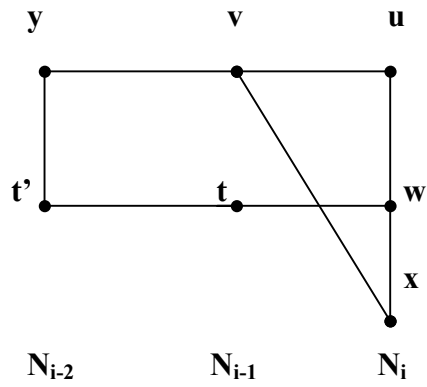


Figure 3.48

Comme  $G$  est sans triangle  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . La chaîne induite  $t, t', y, v$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $t, t', y, v, u, w, t$  et  $t, t', y, v, x, w, t$ , absurde.

B) Si  $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-1}$

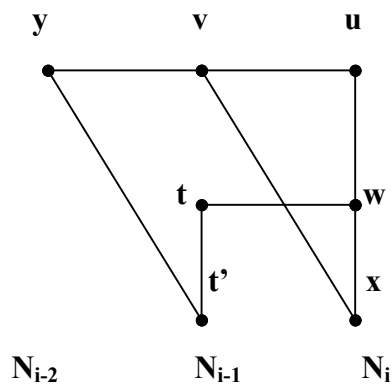


Figure 3.49

Comme  $G$  est sans triangle,  $n$  n'est pas dans  $N(x)$ . De plus, d'après le premier cas  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

C) Si  $t$  est dans  $N_i$  et  $t'$  est dans  $N_{i-1}$ .

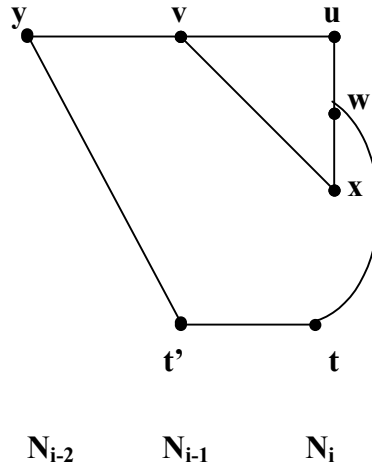


Figure 3.50

Puisque  $G$  est sans triangle et d'après le 1<sup>er</sup> cas,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$  et  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

3) Si  $u$  et  $w$  sont dans  $N_i$ ,  $v$  et  $x$  sont dans  $N_{i-1}$ . Il existe  $y$  dans  $N(v) \cap N_{i-2}$ . La chaîne induite  $y, v, u, w$  appartient à un unique 6-cycle induit  $y, v, u, w, t, t', y$ .

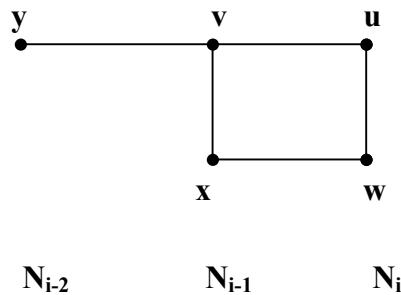


Figure 3.51

A) Si  $t$  est dans  $N_i$  et  $t'$  est dans  $N_{i-1}$ .

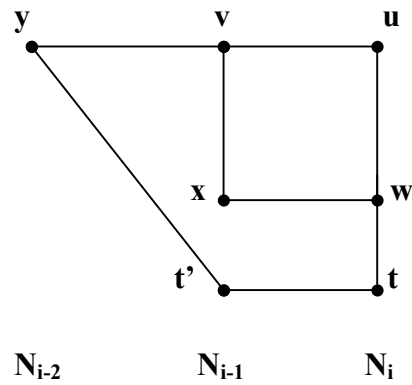


Figure 3.52

$x$  et  $t'$  ne sont pas adjacents, d'après le 2<sup>ème</sup> cas. La chaîne induite  $t, t', y, v$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $t, t', y, v, u, w, t$  et  $t, t', y, v, x, w, t$ , absurde.

B) Si  $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-2}$

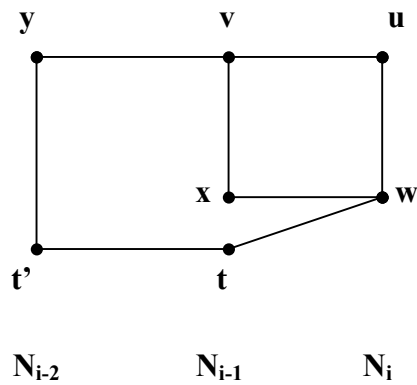


Figure 3.53

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . De même d'après le 1<sup>er</sup> cas  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

C) Si  $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-1}$ .

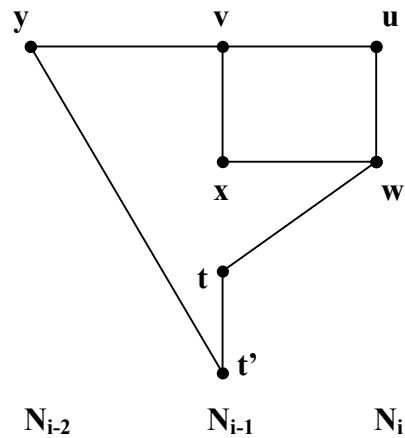


Figure 3.54

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . De plus d'après le 2<sup>ème</sup> cas,  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

4) Si  $v, w, x$  sont dans  $N_{i-1}$ ,  $u$  est dans  $N_i$  ( $i \geq 2$ ). Il existe  $y$  dans  $N(v) \cap N_{i-2}$ . La chaîne induite  $y, v, u, w$  appartient à un unique 6-cycle induit  $y, v, u, w, t, t', y$ .

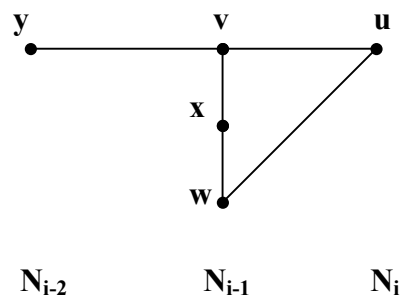


Figure 3.55

A) Si  $t$  est dans  $N_{i-2}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-3}$ .

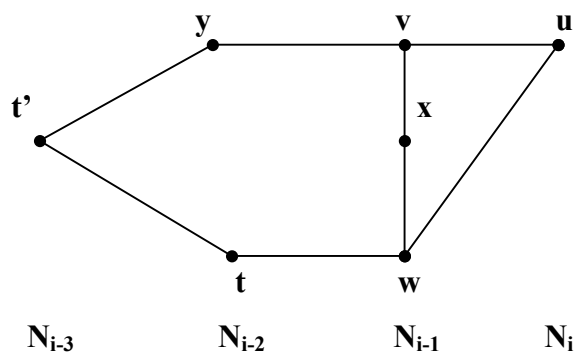


Figure 3.56



Comme  $G$  est sans triangle  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . La chaîne induite  $t, t', y, v$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $t, t', y, v, u, w, t$  et  $t, t', y, v, x, w, t$ , absurde.

B) Si  $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-2}$  ou  $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-1}$

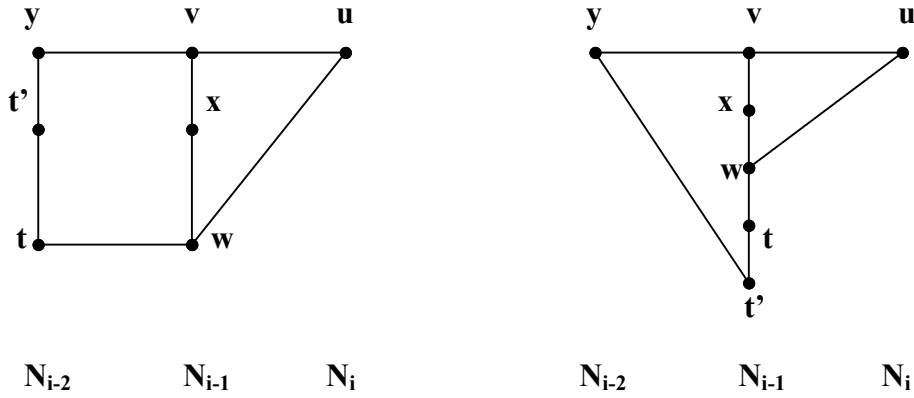


Figure 3.57

Comme  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

C) Si  $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-2}$  ou  $t$  est dans  $N_{i-2}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-1}$

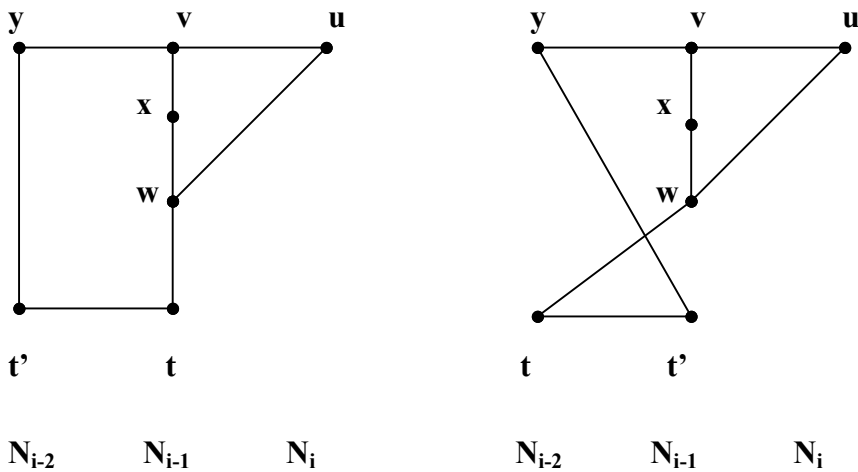


Figure 3.58

Puisque  $G$  est sans triangle et d'après le 1<sup>er</sup> cas,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$  et  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

D) Si  $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_i$

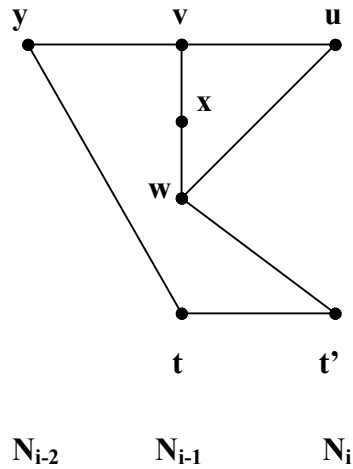


Figure 3.59

Puisque  $G$  est sans triangle et d'après le point 2 du 2<sup>ème</sup> cas,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$  et  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

**3<sup>ème</sup> cas.** Si  $u, v, x, w$  est dans  $N_i$  ( $i \geq 2$ ). Il existe  $y$  dans  $N(v) \cap N_{i-1}$ ,  $y$  n'est pas dans  $N(x)$ , du fait que  $G$  est sans triangle. La chaîne induite  $y, v, u, w$  (elle est induite du fait que  $G$  est sans triangle) appartient à un unique 6-cycle induit  $y, v, u, w, t, t', y$ . Plusieurs cas de figures se présentent.

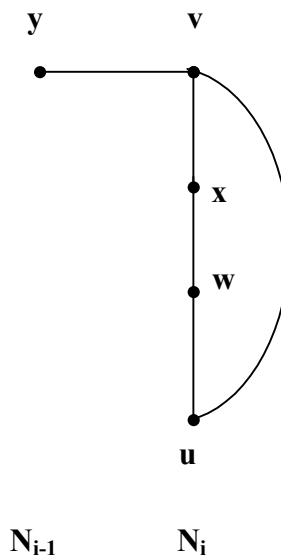
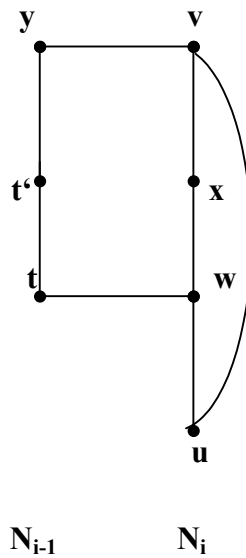


Figure 3.60

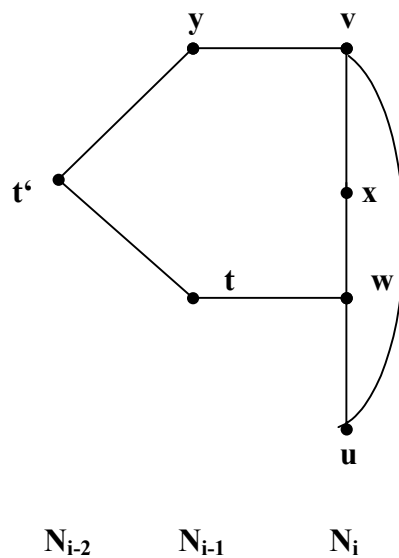
1) Si  $t$  et  $t'$  sont dans  $N_{i-1}$ .



**Figure 3.61**

Comme  $G$  est sans triangle  $t$  n'est pas dans  $N(x)$  et d'après le 2<sup>ème</sup> cas  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Ainsi la chaîne induite  $t, t', y, v$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $t, t', y, v, u, w, t$  et  $t, t', y, v, x, w, t$ , absurde.

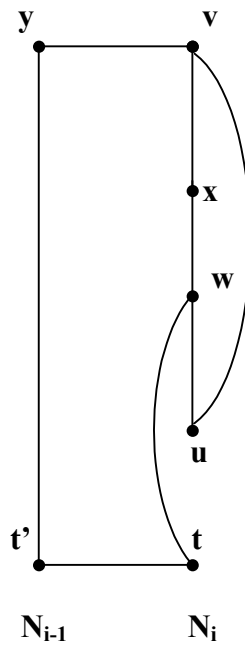
2) Si  $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_{i-2}$ .



**Figure 3.62**

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

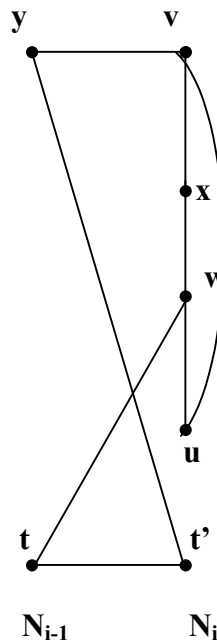
3) Si  $t$  est dans  $N_i$  et  $t'$  est dans  $N_{i-1}$ .



**Figure 3.63**

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . De plus d'après le 2<sup>ème</sup> cas,  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

4) Si  $t$  est dans  $N_{i-1}$  et  $t'$  est dans  $N_i$ .



**Figure 3.64**

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . De plus d'après le 2<sup>ème</sup> cas,  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.

5) Si  $t$  et  $t'$  sont dans  $N_i$ .

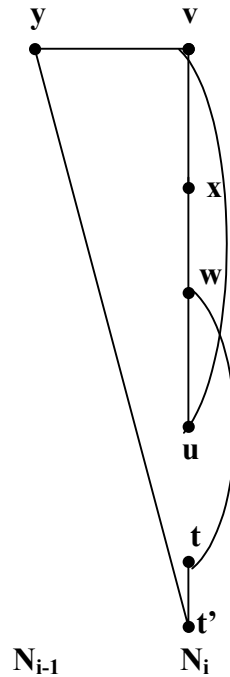


Figure 3.65

Puisque  $G$  est sans triangle,  $t$  n'est pas dans  $N(x)$ . De plus d'après le 2<sup>ème</sup> cas,  $t'$  n'est pas dans  $N(x)$ . Alors la chaîne induite  $w, t, t', y$  appartient à au moins deux 6-cycles induits  $w, t, t', y, v, u, w$  et  $w, t, t', y, v, x, w$ , absurde.  $\square$

### 3.3.6 Théorème.

Si  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{F}$  sans triangle, de degré maximum  $n$ . Alors:

- 1)  $|V(G)| \leq \binom{2n}{n}$ ,
- 2)  $|V(G)| = \binom{2n}{n}$  si et seulement si  $G$  est le sous-graphe  $H_n$ .

#### Preuve.

- 1) Le résultat est établi ci-dessus.

2)  $H_n$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle, régulier de degré  $n$  et d'ordre  $\binom{2n}{n}$

Si  $|V(G)| = \binom{2n}{n}$ , d'après le lemme 3.3.5,  $G$  est sans 4-cycle. Ainsi l'équivalence grâce la proposition 3.2.4 et le théorème 2.3.1  $\square$

### 3.3.7 Théorème.

Si  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle, de degré maximum  $n \geq 2$ . Alors:

- 1)  $\text{diam}(G) \leq 2n-1$ ,
- 2)  $\text{diam}(G) = 2n-1$  si et seulement si  $G$  est le sous-graphe  $H_n$ .

#### Preuve.

- 1) Le résultat est établi ci-dessus.
- 2)  $H_n$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle, régulier de degré  $n$  et de diamètre  $2n-1$ . Supposons maintenant que  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$  sans triangle de degré maximum  $n$ , où  $\text{diam}(G) = 2n-1$  et non isomorphe à  $H_n$ . Alors  $|V(G)| < \binom{2n}{n}$ , d'après le corollaire 3.3.6.

Le résultat est déduit par analogie à la preuve relative au théorème 2.3.2.  $\square$

## 3.4 OPERATIONS SUR LES GRAPHES DE LA CLASSE $\mathfrak{S}$ .

### 3.4.1 Proposition.

Si  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ , alors le graphe  $G \otimes K_2$  est dans  $\mathfrak{S}$ .

#### Preuve.

Posons  $V(K_2) = \{0,1\}$ . Soit  $x,y,z,t$  une chaîne induite de longueur trois, reliant deux sommets distincts  $x$  et  $t$  dans  $G \otimes K_2$ . Sans perte de généralité, il existe dans  $G$  quatre sommets  $x', y', z'$  et  $t'$  tels que  $x = (x',1)$ ,  $y = (y',0)$ ,  $z = (z',1)$  et  $t = (t',0)$  où  $x',y',z',t'$  est une chaîne induite de longueur trois dans  $G$ . Comme  $G$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{S}$ , la chaîne  $x',y',z',t'$  appartient à un unique 6-cycle induit  $\beta' = x',y',z',t',u',v',x'$ . Ainsi, il existe deux sommets  $u = (u',1)$  et  $v = (v',0)$  dans  $G \otimes K_2$ , formant le 6-cycle induit  $\beta = x,y,z,t,u,v,x$ .

$\beta$  est l'unique 6-cycle induit dans  $G \otimes K_2$ , car sinon il existerait au moins une deuxième chaîne induite ayant tous ses sommets internes non adjacents à ceux de la chaîne  $x,y,z,t$  selon une des configurations suivantes :

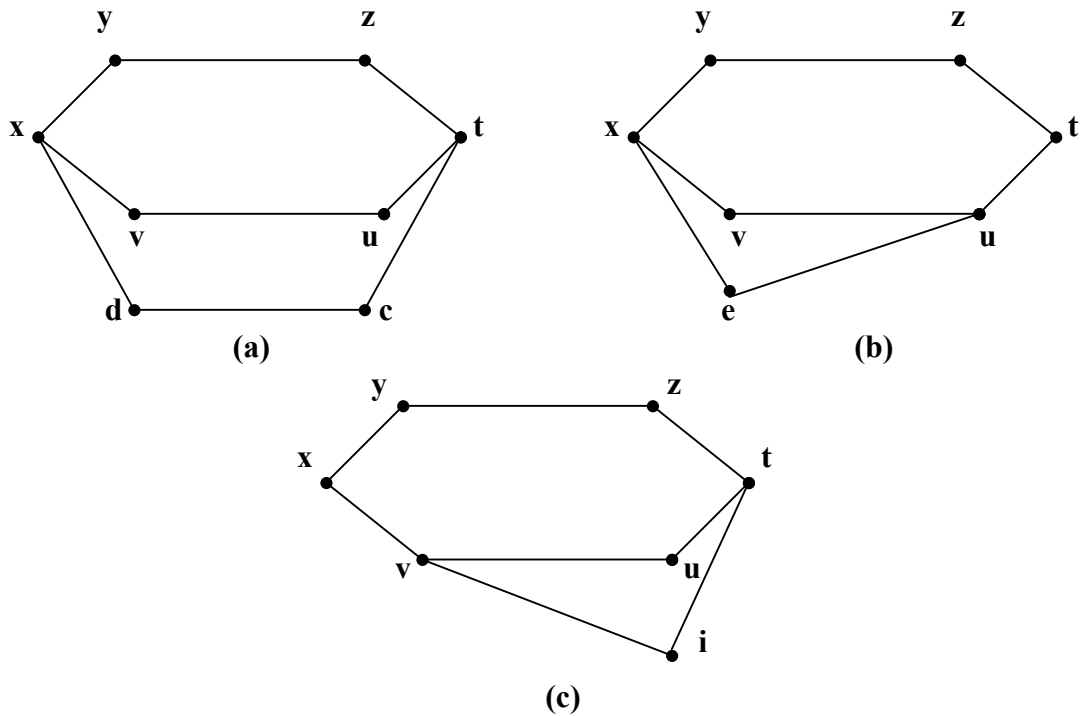


Figure 3.66

Alors il y aurait dans  $G$  un deuxième 6-cycle induit contenant  $x,y,z,t$ , absurde.

Inversement, supposons que  $G \otimes K_2$  est un graphe de la classe  $\mathfrak{F}$ . Alors toute chaîne induite de longueur trois reliant deux sommets distincts appartient à un unique 6-cycle induit. Par construction de  $G \otimes K_2$ , il existe dans  $G$  un 6-cycle induit isomorphe à celui de  $G \otimes K_2$ .

Si dans  $G$ , le 6-cycle induit qui contient cette chaîne de longueur trois n'est pas unique, ceci revient à l'existence de sous-graphes, dans  $G$ , isomorphes à au moins une des configurations indiquées dans la figure 3.66 et donc dans  $G \otimes K_2$  aussi, absurde.  $\square$

### 3.4.2 Proposition.

Si  $G$  et  $H$  sont deux graphes de la classe  $\mathfrak{F}$ , sans triangle, alors le graphe  $G \otimes H$  est dans  $\mathfrak{F}$ .

#### Preuve.

Soient  $G$  et  $H$  deux graphes de la classe  $\mathfrak{F}$ , sans triangle. Posons  $V(G \otimes H) = V' \times V''$  avec  $V' = V(G)$  et  $V'' = V(H)$ .

Soit  $I = x, y, z, t$  une chaîne induite de longueur trois reliant deux sommets distincts  $x$  et  $t$  dans  $G \otimes H$  où  $x = (x', x'')$ ,  $y = (y', y'')$ ,  $z = (z', z'')$  et  $t = (t', t'')$ . Par construction de  $G \otimes H$  et du fait que  $G$  et  $H$  soient sans triangle ( $x' \neq t'$  et  $x'' \neq t''$ ), on trouve dans  $G$  (resp.  $H$ ) la chaîne induite de longueur trois  $I' = x', y', z', t'$  (resp.  $I'' = x'', y'', z'', t''$ ) avec des extrémités distinctes (cité plus haut).

Comme  $G$  (resp.  $H$ ) est un graphe de la classe  $\mathfrak{F}$ , il existe  $u', v'$  (resp.  $u'', v''$ ) dans  $G$  (resp.  $H$ ) tels qu'il existe un unique 6-cycle induit dans  $G$  (resp.  $H$ )  $\beta' = x', y', z', t', u', v', x'$  (resp.  $\beta'' = x'', y'', z'', t'', u'', v'', x''$ ) contenant la chaîne  $I'$  (resp.  $I''$ ).

Donc il existe dans  $G \otimes H$  un 6-cycle induit  $\beta = x, y, z, t, u, v, x$ , qui contient la chaîne  $I$ , où  $u = (u', u'')$  et  $v = (v', v'')$ .  $\beta$  est l'unique 6-cycle induit dans  $G \otimes H$  qui contient  $I$ . Car sinon, il existe deux sommets  $a = (a', a'')$  et  $b = (b', b'')$  dans  $G \otimes H$ , tels que :  $xb, ba, at$  soient dans  $E(G \otimes H)$  ( $a$  (resp.  $b$ ) peut être éventuellement  $u$  (resp.  $v$ ) mais pas  $a = u$  et  $b = v$  simultanément). Ainsi il existe dans  $G$  (resp.  $H$ ) un deuxième 6-cycle induit  $\rho' = x', y', z', t', a', b', x$  (resp.  $\rho'' = x'', y'', z'', t'', a'', b'', x$ ) distinct de  $\beta'$  (resp.  $\beta''$ ), absurde.  $\square$



## NOTATIONS.

### Ensembles

$ A $	Nombre d'éléments de l'ensemble $A$ , cardinal de $A$
$a \in A$	$a$ est un élément de l'ensemble $A$
$a \notin A$	$a$ n'est pas un élément de l'ensemble $A$
$A \subset B$	L'ensemble $A$ est une partie de l'ensemble $B$
$A \cup B$	Réunion de $A$ et $B$
$A \cap B$	Intersection de $A$ et $B$
$A \setminus B$	$A$ moins $B$ (éléments de $A$ qui n'appartiennent pas à $B$ )
$A \Delta B$	Différence symétrique de $A$ et $B$ ( $A \Delta B = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$ )
$A \times B$	Produit cartésien de $A$ par $B$ (ensemble des couples $(a,b)$ avec $a \in A$ et $b \in B$ )
<b>p-sous-ensemble</b>	Sous-ensemble de cardinalité $p$
$\lceil x \rceil$	Partie entière supérieure (par excès) de $x$ dans $\mathbf{R}$ (ensemble des nombres réels)
$\binom{p}{q}$	$\frac{p!}{q!(p-q)!}$ Coefficient binomial en $p$ et $q$
$\sum_{i=1}^n x_i$	$x_1 + \dots + x_n$ Somme de $n$ éléments

### Graphes

$G = (V,E)$	Graphes dont l'ensemble des sommets est $V$ et celui des arêtes est $E$
$N(u)$	Ensemble des voisins du sommet $u$
$d_G(u)$	Degré d'un sommet $u$ dans $G$ (encore $d(u)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté)
$I_G(u,v)$	L'ensemble des sommets de $G$ appartenant aux plus courtes $(u,v)$ -chaînes ( $I(u,v)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté)
$d_G(u,v)$	La longueur d'une plus courte $(u,v)$ -chaîne ( $d(u,v)$ s'il n'y a pas confusion)
$K_n$	Graphe complet à $n$ sommets
$K_{m,n}$	Graphe biparti de la forme $K_{m,n} = (V_1 \cup V_2, E)$ avec $ V_1  = m$ , $ V_2  = n$ et dans lequel deux sommets quelconques $i_1 \in V_1$ et $i_2 \in V_2$ sont reliés par une arête

$Q_n$	Hypercube de degré $n$
$O_k$	Graphe d'intersection vide des parties à $k-1$ éléments pris parmi $2k-1$
$E_k$	Graphe de différence symétrique d'un ou de $2k-1$ éléments des parties à $k-1$ éléments au plus pris parmi $2k-1$
<b>(0,<math>\lambda</math>)-graphe</b>	Graphe dont toute paire de sommets ont deux ou aucun voisin commun
$L_n^k$	Sous-graphe de l'hypercube engendré par les $(k-1)^{\text{ème}}$ et $k^{\text{ème}}$ niveaux

## REFERENCES

- [1] A.T.Balaban, D.Farcasiu & R.Baniça, Graphs of multiple 1,2-shifts in carbonium ions and related systems, Rev. Roumaine, Chim. 11 (1966) 1205-1227.
- [2] C. Berge, Graphes, gauthier-villars, Paris 1983.
- [3] A.Berrachedi, Etude d'une classe de graphes bipartis, Thèse magister, Université Houari Boumedienne, Alger 1985.
- [4] A.Berrachedi, Une nouvelle caractérisation de l'hypercube, 3<sup>ème</sup> colloque Franco-Algérien de Recherche Opérationnelle, Alger mai 92.
- [5] A.Berrachedi and M.Mollard, On tow problems about (0,2)-graphs and interval regular graphs, à paraître dans Ars Combinatoria.
- [4] A.Berrachedi, Sur quelques propriétés métriques des graphes de type Hypercube, Thèse de Doctorat d'Etat, Université Houari Boumedienne, Alger 1997.
- [7] N.Biggs, Algebraic graph theory, Cambrige University Press, London 1974.
- [8] N.Biggs, An edge-coloring problem, Amer. Math. Monthly, 79 (1972) 1018-1020.
- [9] N.Biggs, E.K.Lloyd & R.J.Wilson, Graph theory 1736-1936, Clarendon Press, Oxford 1976.
- [10]J.A.Bondy and U.S.R.Murty, Graph Theory with applications, Macmillan & Co, London 1976.
- [11]R.E.Greenwood & A.M.Gleason, Combinatorial relations and chromatic graphs, Canad. J. Math, 7 (1955) 1-7.
- [12]I.Havel, "Semipaths in directed cubes", in : Graphs and Other Combinatorial Topics, B.59(Teubner Texte zum Mathematik, Teubner Leipzig)(3<sup>o</sup>symposium, Tchecoslovaque de Th. Graphes, Nov.1982).
- [13]J.Kalbfleisch & R.Stanton, On the maximal triangle-free edge-chromatic graph in three colors, J. combinatorial . theory, 5 (1968) 9-20.
- [14]A.Kowalowski, Topologische Deutung von Buntordnungsproblemen Sitzungsber. Akad. Wiss. Wien(Abt IIa), 126 (1917) 963-1007.
- [15]J.M.Laborde, Caractérisation locale du graphe du n-cube, Actes du Colloque algèbre appliquée et combinatoire, C.Benzaken, éditeur, Grenoble (1978) 198-200.
- [16]J.M.Laborde et S.P.Rao Hebbare, Another chararacterization of hypercubes. Discrete. Math, 39(82) 161-166.
- [17]L.Lovasz. British combinatorial conference, Southampton, Juillet 1983.

- [18]R.M.Madani, Sur l'existence de  $\{0,2\}$ -graphes d'ordre 18, Rapport de Recherche RR 887-I-, Institut Imag, Grenoble, Avril 1992.
- [19]R.M.Madani, Characterization of Laborde-Mulder graphs (Extended odd graphs), Discrete. Math, 150 (1996) 293-301.
- [20]M.Mollard, Les invariants du n-cube, Thèse 3<sup>ème</sup> cycle, Université Joseph Fourier, Grenoble 1981.
- [21]M.Mollard, Quelques problèmes combinatoires sur l'Hypercube et les graphes de Hamming, Thèse Doctorat es-Science, Université Joseph Fourier, Grenoble 1989.
- [22]M.Mollard, Interval-regularity does not lead to interval monotonicity, Discrete Math. 118 (1993) 233-237.
- [23]M.Mollard, Table of  $\{0,2\}$ -graphs of order less than 32, Rapport de Recherche RR 939-M-, Institut Imag, Grenoble, Juin 1994.
- [24]H.M.Mulder,  $(0,\lambda)$ -graphs and n-cubes, Discrete . Math, 28 (1979) 179-188.
- [25]H.M.Mulder, Interval-regular graphs, Discrete . Math, 41 (1982) 253-269.
- [26]H.M.Mulder, The interval function of a graph, Mathematics Centre Tracts 132, Mathematisch Centrum, Amsterdam 1980.
- [27]R.J.Wilson, Introduction to graph theory, 2<sup>nd</sup> edition, Longman Group, Harlow, Essex 1979.

## CONCLUSION

Tant que les questions continuent d'être posées, la science se développera et élargira ses domaines d'application.

Pour les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers le sous-graphe induit par les sommets d'un 6-cycle, dont la paire de sommets joints par la chaîne de longueur trois soient à distance 2, est-il isomorphe au graphe de Petersen ?

D'une façon générale, pour tout 6-cycle  $\mu = x,y,z,t,u,v,x$ , dans un graphe  $[3,1,6]$ -cycle régulier, a-t-on :

$$d(x,t) = d(y,u) = d(z,v) ?$$

Existe-il des graphes atteignant la borne inférieure proposée pour les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers, comme il est le cas pour la borne supérieure ?

Pouvons-nous proposer une borne inférieure pour les graphes de la classe  $\mathfrak{S}$ ? Existe-il aussi des graphes atteignant cette borne ?

Les résultats déjà établis pour les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers, sont-ils extensibles à ceux de  $\mathfrak{S}$  ?

Nous avons répondu à la question pour le cas où la distance est égale à l'unité. De plus, certains résultats pour les graphes  $[3,1,6]$ -cycle réguliers sont extensibles à ceux de la classe  $\mathfrak{S}$  soit directement ou en rajoutant d'autres conditions.