UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
(ALGER)

THÈSE

Présentée par

BEKKAI Siham

Pour obtenir le diplôme de : MAGISTER.
En : MATHÉMATIQUES.
Option :RECHERCHE OPÉRATIONNELLE.

SUR QUELQUES FACTEURS DE GRAPHES RÉGULIERS

Soutenue le : 05 octobre 2002.

Devant le jury composé de :

AIT HADDADENE Hacène	Maître de conférences, USTHB	Président
BERRACHEDI Abdelhafid	Maître de conférences, USTHB	Directeur de thèse
BENMEZIANE Zineb	chargée de recherche, USTHB	Examinatrice
BLIDIA Mustapha	Maître de conférences, USTB	Examinateur
BOUCHEMAKH Isma	Maître de conférences, USTHB	Examinatrice

A ma famille

A tous mes amis

Remerciements

A Abdelhafid Berrachedi (maître de conférences à l'institut de mathématiques, USTHB), j'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance pour la patience et la générosité avec lesquelles il a su guider mes recherches. Je le remercie vivement pour son soutien et sa disponibilité constante.

Je remercie Hacène Aït Haddadene (maître de conférences à l'institut de mathématiques, USTHB) pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Merci à Zineb Benmeziane(chargée de recherche à l'institut de mathématiques, USTHB) et Isma Bouchemakh (maître de conférences à l'institut de mathématiques, USTHB) qui ont bien voulu participer à ce jury, je les remercie également pour leur gentillesse et l'intérêt qu'elles ont porté à ce travail.

Merci à Mustapha Blidia (maître de conférences à l'institut de mathématiques, USTB) d'avoir accepté de participer à ce jury.

Que Ahmed Aïnouche (professeur à l'université de Martinique, France) trouve ici toute ma reconnaissance pour l'aide qu'il n'a pas hésité à m'apporter, je le remercie pour sa sympathie et ses précieux conseils.

Je remercie tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à mener ce travail à terme, je pense particulièrement à Odile Favaron (chercheur LRI-CNRS) et Evelyne Flandrin (chercheur LRI-CNRS).

Je désire rendre hommage à la compétence de toutes les personnes citées.

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

INTRODUCTION

De nos jours, confrontés à certaines situations pratiques, il arrive très souvent que l'on soit amené à traduire les problèmes posés par des graphes afin de les simplifier et même peut être dans certains cas, entrevoir leur solution. Le recours à la théorie des graphes remonte à bien plus loin, aussi loin que l'homme ait eu besoin de formuler une situation donnée par un dessin. Elle est devenue une discipline à part entière des mathématiques à laquelle on fait appel pour la résolution de divers problèmes dans différents domaines. Son utilisation s'est avérée nécessaire et indispensable dans l'informatique, la physique, l'économie, l'architecture, pour n'en citer que cela.

Un des problèmes dont l'étude s'est faite grâce à la théorie des graphes, le très célèbre problème du voyageur de commerce qui se résume comme suit :
Etant donné un ensemble de villages avec la carte des routes qui les relient, peut-on faire une tournée en passant par chaque village exactement une fois et en revenant au village initial et en prenant le plus court chemin? En faisant abstraction de la notion de distance, une telle tournée s'appelle cycle hamiltonien, du nom du mathématicien irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865), inventeur «du jeu du dodécaèdre » qui est, en fait, un cas particulier du problème du voyageur de commerce. Ce problème et bien d'autres encore n'ont fait qu'accroître l'intérêt apporté à l'étude de l'hamiltonicité malgré la difficulté du problème. Son importance pour les mathématiques, et plus encore, ses conséquences sur la résolution de problèmes concrets la rangent parmi les problèmes fondamentaux de la théorie des graphes ; un problème sur lequel de nombreux chercheurs se sont penchés répondant à beaucoup de questions, posant différentes conjectures et faisant naître de nouvelles interrogations dont certaines restent encore ouvertes à nos jours.

Le travail exposé dans cette thèse traite de l'hamiltonicité et est développé le long de trois chapitres.

Le chapitre I est consacré aux définitions et notations générales nécessaires pour se familiariser avec les concepts de la théorie des graphes.

Le chapitre II se veut être un survey sur le problème de l'hamiltonicité. Bermond et Thomassen avaient présenté dans [BT81] un survey sur le problème de l'hamiltonicité dans le cas des graphes orientés, nous nous intéressons au cas des graphes simples et non orientés. Certains des résultats énumérés donnent des conclusions bien plus fortes que l'hamiltonicité, à savoir la pancyclicité et la sommet pancyclicité. Deux types de conditions existent : des conditions nécessaires et des conditions suffisantes largement plus étudiées. Ces dernières sont rassemblées dans le survey. Plusieurs d'entre elles font intervenir certains invariants de graphes comme :

- Les degrés (degrés de sommets ou degrés d'ensembles)
- La stabilité.
- L'exclusion de certaines configurations ($K_{1,3}$, $K_{1,4}$, $K_{2,3}$,….)…..

Certaines de ces conditions peuvent être considérées comme fondamentales, car elles ont été à la base de multiples travaux de recherche et ont beaucoup été généralisées. On cite par exemple la condition établie par Dirac ([Dir52]) sur le degré minimum d'un graphe qui a été étendue par :

- Ore ([Ore60]) qui y a introduit les degrés des sommets,
- Häggkvist et Nicoghossian ([HN81]) qui y ont introduit la connectivité ou encore
- Faudree, Gould, Jacobson, et Lesniak ([FGJL92]) qui y ont introduit le degré généralisé ce qui leur a permis de donner un aspect plus combinatoire au résultat.

Nous parlerons dans ce survey d'un autre type de condition, il s'agit de la condition coriace introduite par Chvàtal ([Chv72b]). Dans certaines classes de graphes, et nous citerons quelques unes, pour montrer l'hamiltonicité il suffit de montrer que les graphes de celles-ci sont t- coriaces (pour un t bien précis).

Nous donnerons les résultats les plus importants établissant l'hamiltonicité dans la classe des graphes adjoints et dans des classes définies par des configurations exclues.

Nous ne pouvions passer sans parler de la classe des graphes de Cayley qui a une très riche structure et sur laquelle un survey a été proposé par Witte et Gallian ([WG84]). Curran et Gallian ([CG96]) l'ont par la suite mis à jour. Nous terminons ce survey en citant des résultats sur le nombre de cycles hamiltoniens dans des graphes hamiltoniens.

Dans le chapitre III, nous nous sommes intéressés à la conjecture sur l'hamiltonicité des (0,2) graphes qui sont définis à partir d'une propriété saillante de l'hypercube et qui sont aussi des graphes de Cayley ayant une certaine propriété. Nous donnons des résultats sur des opérations qui conservent la propriété d'être un (0,2) graphe dont certaines conservent l'hamiltonicité. Sachant que les (0,2) graphes que l'on connaît sont tous hamiltoniens, ces opérations vont nous permettre de générer de nouveaux (0,2) graphes hamiltoniens.

CHAPITRE I

DEFINITIONS ET NOTATIONS

1. GRAPHES :

Nous donnons ici les définitions utilisées dans ce document. Le lecteur pourra se référer à [Ber70] et [BM76] pour les notions non explicitées dans ce qui suit.

1.1. DEFINITIONS GENERALES :

Un graphe G= (V, E) est le couple formé d'un ensemble fini non vide V dit ensemble de sommets et d'un ensemble E de paires {u,v} de sommets $u,v \in V$ appelées arêtes. Lorsqu'on étudiera plusieurs graphes, on emploiera la notation V(G) (respectivement E(G)) pour distinguer l'ensemble des sommets (respectivement des arêtes) d'un graphe G. Le nombre de sommets du graphe G, appelé ordre de G, sera noté n. Le nombre d'arêtes sera noté m. une arête de type {u,u} avec $u \in V$ est appelée boucle. Il peut y avoir plusieurs arêtes reliant deux sommets u et v de G, leur nombre représente le multiplicité de l'arête {u,v}. Un graphe G est dit simple s'il ne contient ni boucles ni arêtes multiples. Dans tout ce qui suit nous ne considérons que des graphes simples.

Pour une arête {u,v} de G, qu'on notera dorénavant uv, on dira que :
Les sommets u et v sont adjacents, et dans ce cas les sommets u et v sont les extrémités de l'arête uv. On dira aussi que le sommet u est incident avec l'arête uv ou encore que le sommet u est un voisin du sommet v.

Deux arêtes seront dites adjacentes si elles ont une extrémité commune. Dans le plan, on représente un graphe G par une figure géométrique où les sommets sont représentés par des petits cercles (ou des points) et les arêtes par des traits joignant les points qui représentent leurs extrémités.

Pour tout sommet $v\in V$, on note N(v) l'ensemble des voisins de v, appelé voisinage de v. Le degré d'un sommet $v\in V$, noté d(v) est le cardinal de N(v). Le plus petit (respectivement plus grand) parmi tous les degrés des sommets de G est appelé degré minimum (respectivement maximum) du graphe G et est noté $\delta(G)$ (respectivement $\Delta(G)$). Si tous les sommets de G ont même degré d alors G est d-régulier.
La formule de base concernant les degrés pour tout graphe G est la suivante:

$$\sum_{v\in V(G)} d(v)= 2\,|E(G)|$$

Un sous graphe G'=(V', E') de G est un graphe dont l'ensemble des sommets V' est un sous-ensemble de V, et dont l'ensemble des arêtes E' est un sous-ensemble de E tel que toute arête de E' joint deux sommets de V'. Dans le cas où E' contiendrait toutes les arêtes qui relient les sommets de V' dans G, on dira que G' est induit par V' et on le notera G_V'. Si V'=V, on dit que G' est un graphe partiel de G. Cette notion de sous-graphe induit est très importante, car elle permet de définir des classes de graphes caractérisés par des sous graphes exclus, par exemples la classe des graphes bipartis définis en excluant les cycles impairs.

On appelle stable de G un sous-ensemble de sommets de G qui induit un graphe sans arêtes. Si le graphe G est lui-même un stable, c'est à dire que $E(G)=\varnothing$, alors le graphe G sera appelé graphe trivial. Le nombre de stabilité du graphe G noté $\alpha(G)$ est le cardinal d'un plus grand stable de G. Réciproquement, un graphe G d'ordre n dans lequel tous les sommets sont deux à deux adjacents est appelé graphe complet d'ordre n, et est noté K_n. un sous graphe induit de G qui est complet est appelé clique de G.

Une chaîne, de longueur p dans G, est une séquence de sommets distincts $v_0, v_1,\ldots,v_p$ dans laquelle deux sommets successifs sont adjacents. Les sommets v_0 et v_p sont les extrémités de la chaîne. Si p est pair alors le sommet $v_{p/2}$ est dit sommet central de la chaîne. Si p est impair alors $v_{(p-1)/2}$ et $v_{(p+1)/2}$ sont les sommets centraux de la chaîne.

Une chaîne qui ne passe pas deux fois par le même sommet est dite élémentaire ; une chaîne qui n'utilise pas deux fois la même arête est dite simple.

Un cycle, de longueur p dans G, est une chaîne simple $v_0, v_1, \ldots, v_p$ dans laquelle les deux extrémités coïncident ($v_0 = v_p$). Un cycle qui ne rencontre pas deux fois le même sommet est dit cycle élémentaire.

Un graphe G sera dit connexe si toute paire de sommets u et v de G, est reliée par une chaîne. Dans le cas contraire, G sera dit non connexe et pourra s'écrire comme l'union disjointe de graphes connexes (appelés composantes connexes de G). On dira que deux sommets u et v d'un graphe connexe G sont à distance p si et seulement si la plus courte chaîne les reliant est de longueur p. Le diamètre d'un graphe G est la distance maximum entre deux sommets de G. la circonférence d'un graphe G est la longueur d'un plus grand cycle dans G (autrement dit la longueur d'un cycle maximum dans G).

Un ensemble d'articulation du graphe G est un sous-ensemble de sommets de G dont la suppression déconnecte le graphe G s'il est connexe, et augmente le nombre de ses composantes connexes s'il ne l'est pas. Si l'ensemble d'articulation est réduit à seul sommet, alors ce sommet sera appelé point d'articulation. Un déconnectant est un ensemble d'arêtes dont la suppression déconnecte le graphe G s'il est connexe et augmente le nombre de ses composantes connexes s'il ne l'est pas.

La connectivité d'un graphe G d'ordre n, notée k(G), est le cardinal du plus petit ensemble d'articulation du graphe, si G ne possède pas d'ensemble d'articulation alors sa connectivité k(G)=n-1. Analogiquement l'arête connectivité de G, notée k'(G), est le cardinal du plus petit déconnectant du graphe. Un block d'un graphe G est un sous graphe de G sans point d'articulation et maximal pour cette propriété.

Une subdivision d'une arête uv est le remplacement de uv par une chaîne $u_0,\ldots,u_p$ telle que u_0=u et u_p =v et où les u_i sont de nouveaux sommets pour i=1,…,p-1. Une subdivision d'un graphe G est un graphe où les arêtes de G ont été subdivisées.

Le graphe adjoint (ou encore le graphe représentatif des arêtes) d'un graphe G est le graphe L(G)=(V(L(G)),E(L(G))), où V(L(G))=E(G) et E(L(G))={(e,e') / les arêtes e et e' sont adjacentes dans G }.

Un cycle hamiltonien d'un graphe G est un cycle élémentaire qui passe par tous les sommets du graphe G. Un graphe G qui possède un tel cycle sera dit graphe hamiltonien. Si un graphe G contient un cycle de longueur p, pour tous $3\leq p \leq n$, alors G sera dit pancyclique ; et si chacun des sommets de G appartient à un cycle de longueur p, pour tous $3\leq p \leq n$, alors G sera dit sommet pancyclique.

Sauf spécification contraire, tous les graphes utilisés sont connexes.

1.2 GRAPHES MULTIPARTIS :

Un graphe G multiparti est un graphe dont l'ensemble des sommets admet une unique partition minimum en stables ; autrement dit une unique partition en stables maximaux. Si toutes les arêtes possibles entre les stables sont dans le graphe G, alors G sera dit multiparti complet. Par exemple le graphe multiparti complet $K_{1,1,3}$ (figure1(a)) dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en 3 stables maximaux de cardinalités 1,1 et 3. Dans le cas où la partition se fait en deux stables, on obtient une classe qui suscite beaucoup d'intérêt qu'on appelle classe des graphes bipartis (on peut citer comme exemple le graphe biparti complet $K_{2,3}$ (figure1(b))). Et dans le cas où les deux stables qui partionnent l'ensemble des sommets d'un graphe multiparti ont même cardinal, on dira que le graphe en question est balancé.

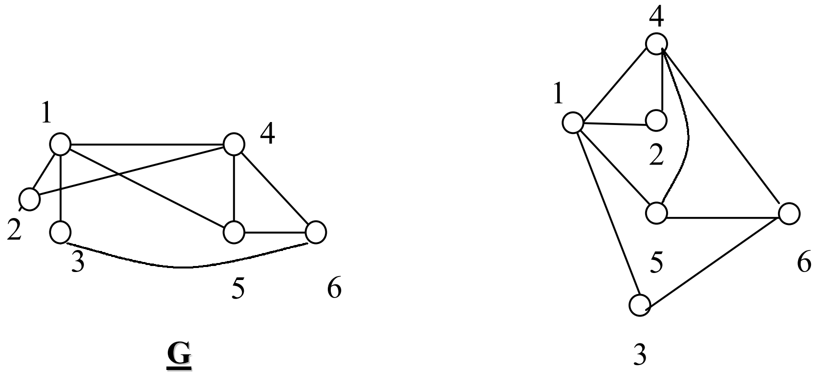
(a) **(b)**

Figure 1

1.3 **DECOMPOSITION EN NIVEAUX** *:*

Pour un sommet v d'un graphe G, on note $N_i(v)$ l'ensemble des sommets à distance i de v dans G. Pour i= 1, on obtient exactement l'ensemble des voisins de v. On appelle décomposition en niveaux relative au sommet v, la partition $N_0(v), N_1(v), \dots, N_p(v)$ de l'ensemble des sommets du graphe G, où p= min {d(v, u) / u est un sommet de G }.

Voici dans la figure 2 ci dessous la décomposition du graphe G en niveaux par rapport au sommet 1.



G

La décomposition en niveau de G par rapport au sommet 1

Figure2

2. HOMOMORPHISMES, ISOMORPHISMES :

Un graphe G est dit homomorphe à un graphe H, s'il existe une application f de V(G) dans V(H) telle que :

$uv \in E(G)$ alors $f(u)=f(v)$ ou $f(u)f(v) \in E(H)$

L'application f est, dans ce cas, appelée homomorphisme. Si de plus f est une bijection et f^{-1} est un homomorphisme, alors f sera un isomorphisme de G dans H, auquel cas G et H seront dit graphes isomorphes, ce qui sous entend qu'ils sont indissociables.

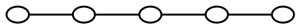
3. OPERATIONS SUR LES GRAPHES :

Beaucoup d'opérations, ont été développées, dans la classe des graphes en général ou, dans des classes plus restreintes de graphes particuliers dans le but de les élargir. Certaines de ces opérations sont très utilisées et sont, par conséquent, devenues classiques. Parmi ces opérations classiques on compte la somme cartésienne (selon la terminologie de C. Berge [Ber70]) qui est sans doute l'opération la plus étudiée et à l'aide de laquelle certaines classes de graphes ont été définies. On cite comme exemple la classe des grilles $n \times m$ obtenu par la somme cartésienne des deux chaînes P_n et P_m (voir comme exemple la grille 4×5, figure-2-).

3.1. LA SOMME CARTESIENNE :

La somme cartésienne de deux graphes G et H est le graphe $G \oplus H$ dont l'ensemble des sommets est le produit cartésien $V(G) \times V(H)$, et dans lequel deux sommets (u,v) et (u',v') sont adjacents si et seulement si $u = u'$ et $vv' \in E(H)$ ou bien $v=v'$ et $uu' \in E(G)$.

P_4



P_5

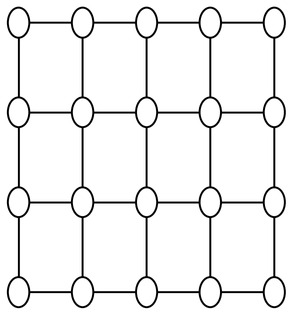
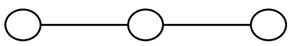


Figure 3

3.2. LE PRODUIT CARTESIEN:

Le produit cartésien de deux graphes G et H est le graphe G×H dont l'ensemble des sommets est V(G)×V(H), et dans lequel deux sommets (u,v) et (u',v') sont adjacents si et seulement si uu'$\in$E(G) et vv'$\in$E(H).
On cite comme exemple le produit cartésien de P_3 et P_2 (Figure-3-).

P_2



P_3

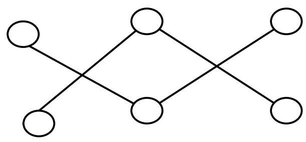


Figure-4-

Il est clair que ces deux opérations sont commutatives et associatives. Mais elles ont surtout été étudiées par rapport aux invariants des graphes. On appelle invariant de graphe une propriété (P) qui reste conservée par isomorphisme. Par exemple le nombre de sommets et le nombre d'arêtes sont des invariants de graphes.

3.3. L'OPERATION * :

Cette opération transforme un graphe G d'ordre n en un graphe G^* , appelé joint du graphe G, d'ordre 4n dont l'ensemble des sommets est :

$$V(G^*) = A \cup B \cup C \cup D \quad \text{où} \quad A,B,C,D \text{ sont quatre copies de } V(G) .$$

Pour ne pas qu'il ait de confusion on écrira : $A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$; $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$; $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ et $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$.

Et tel que :

$G^*_A \sim G$ et $G^*_D \sim G$

$G^*_{B \cup C} \sim G \times K_2$ et

$G^*_{\{ai,bi,ci,di\}} = a_i\, c_i\, d_i\, b_i\, a_i$ (un cycle de longueur 4), pour tout $i, 1 \leq i \leq n$.

Le graphe de la figure 6-a représente le joint du graphe K_3.

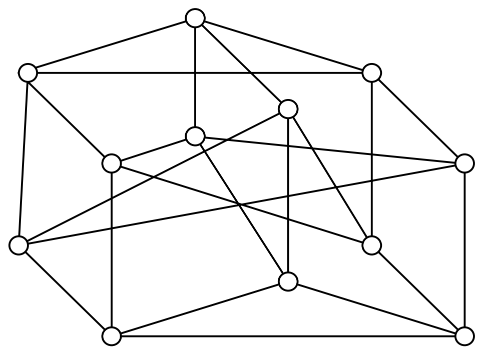
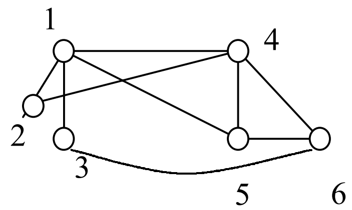


Figure 6-a

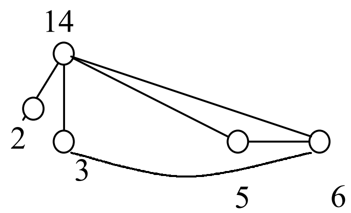
3.4. IDENTIFICATION DE SOMMETS:

soit G un graphe et soit A un sous-ensemble de sommets de G, l'identification des sommets de A est l'opération qui consiste à remplacer tous les sommets de A par un seul sommet qui sera relié à tous les voisins de A.

par exemple dans la figure ci dessous, le graphe de droite est obtenu à partir de celui de gauche en identifiant les sommets 1 et 4.



G



G (après identification des sommets 1et4)

Figure 6-b

CHAPITRE II

UN SURVEY SUR LE PROBLEME DE L'HAMILTONICITE

1.***INTRODUCTION:***

Le problème de l'hamiltonicité est un problème fondamental de la théorie des graphes. L'origine de son appellation remonte aux années 1850 et revient à M. William Rowan Hamilton qui a décrit dans une lettre adressée à son ami M. Graves un jeu mathématique sur le dodécahedron (Figure-7-) dans lequel le premier joueur doit piquer cinq épingles sur cinq sommets successifs, et le deuxième joueur doit compléter la chaîne pour former un cycle maximal (tracé en pointillé sur la figure). Depuis, d'autre jeux ont été inventés comme le jeu hamiltonien sur $K_{n,n}$ [Lu95], pour n'en citer qu'un seul, qui est un jeu qui oppose deux personnes A et B. Chaque joueur prend à son tour une arête du graphe $K_{n,n}$, le jeu s'achève quand il ne reste plus d'arêtes dans le graphe. C'est le joueur A qui commence. Appelons alors G le graphe induit par les arêtes prise par le joueur B. Ce dernier veut que le graphe G contienne autant de cycles hamiltoniens disjoints que possible, et le joueur A veut que G en contienne le moins possible. Lu a montré que pour n assez grand, le joueur B peut obtenir 1/37 n cycles hamiltoniens disjoints.

De part l'aspect interactif, le problème hamiltonien est devenu très étudié dans le but de résoudre des problèmes pratiques de la vie courante ; c'est pourquoi de nombreux chercheurs ont travaillé dessus, nous apportant de nouveaux résultats qui font surgir de nouveaux problèmes dans ce domaine.

Dans [BT81], Bermond et Thomassen ont présenté un survey sur l'hamiltonicité des graphes orientés , ici nous donnons un survey sur l'hamiltonicité des graphes finis, simples et non orientés.

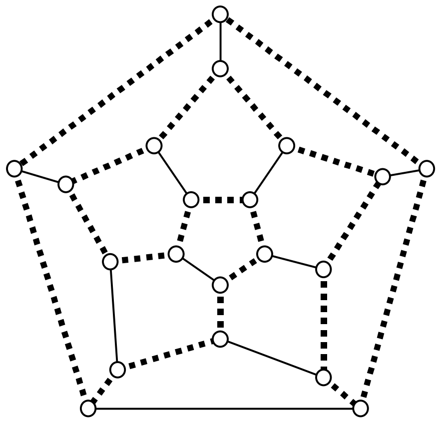


Figure-7-

Il existe deux types de conditions : des conditions nécessaires comme celles données par les théorèmes suivants :

Théorème 1.1 : (Chvàtal, [Chv72a])

Si G est un graphe hamiltonien alors G est 2- connexe.

Plus généralement,

Théorème 1.2 : (Chvàtal, [Chv72a])

Soit m(G-S) le nombre de composantes connexes du graphe G-S, pour tout sous-ensemble S de V(G). Si G est un graphe hamiltonien alors m(G-S) ≤ |S|.

Et des conditions suffisantes largement plus étudiées dont les plus importantes sont rassemblées dans notre survey. Plusieurs d'entre elles font intervenir certains invariants, en donnant des conditions dessus pour assurer l'hamiltonicité, entre autres :

- Conditions sur les degrés (Dirac 1952 [Dir52], Ore 1960 [Ore60], Posá 1962 [Pos62],…)

- Conditions sur la stabilité (Nash-Williams 1971 [Nas71], Chvátal et Erdös 1972 [CE72],..)
- Conditions faisant exclure une ou plusieurs configurations (Goodman et Hedetniemi 1974 [GH74], Oberly et Sumner 1979 [OS79],…)…..

Commençons par énumérer des conditions sur les degrés.

2.CONDITIONS SUR LES DEGRES :

2.1 CONDITIONS SUR LES DEGRES DE SOMMETS :

Sans doute, le premier résultat important donnant une condition suffisante pour qu'un graphe soit hamiltonien, est celui de Dirac qui s'énonce comme suit :

Théorème2.1 (Dirac, [Dir52]).

Si G est un graphe d'ordre $n \geq 3$ avec $\delta(G) \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Le théorème de Dirac a été suivi par celui d'Ore qui l'a étendu, donnant un résultat plus fort, en introduisant les degrés des sommets du graphe et en posant une condition pour contrôler leur somme.

Théorème2.2(Ore, [Ore60])

Soit G un graphe d'ordre n. Si pour toute paire de sommets non adjacents $u, v \in V$, on a $d(u)+d(v) \geq n$, alors G est hamiltonien.

Une conséquence du théorème2.2 est le corollaire suivant :

Corollaire2.3(Ore, [Ore60])

Soit G un graphe à n sommets et m arêtes vérifiant : $m \geq [(n-1)(n-2)/2]+2$, alors G est hamiltonien.

La borne donnée par le théorème2.2 est la meilleure possible car il existe des graphes simples avec un nombre d'arêtes $=[(n-1)(n-2)/2]+1$ et non hamiltonien, par exemple le graphe complet K_{n-1} auquel on ajoute un sommet x_0 que l'on relie à K_{n-1} par une seule arête. Le nombre d'arêtes de ce graphe est égal à $[(n-1)(n-2)/2]+1$ et pourtant ce graphe n'est pas hamiltonien.

Une autre condition suffisante pour l'hamiltonicité d'un graphe a été fournie par Posà :

Théorème2.4 (Posà, [Pos62])

Soit G simple d'ordre $n \geq 3$ dont les sommets sont indexés de sorte que :
$d(x_1) \leq d(x_2) \leq \ldots \leq d(x_n)$, si pour tout $k < n/2$ on a $d(x_k) > k$, alors G est hamiltonien.

Nash-Williams a introduit les définitions suivantes :
Soit S une séquence de degrés $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ (représentant les degrés des sommets d'un graphe G), S est dite « forcément hamiltonienne » si tout graphe possédant cette séquence de degrés est hamiltonien. Analogiquement S est dite «forcément non hamiltonienne » si tout graphe possédant cette séquence de degrés est non hamiltonien, et enfin S est dite «optionnellement hamiltonienne » si cette séquence n'est ni forcément hamiltonienne ni forcément non hamiltonienne.

Alors la question légitime qui se pose est de savoir comment reconnaître une séquence forcément hamiltonienne (et donc un graphe hamiltonien) ? Chvàtal y a répondu en donnant le résultat suivant :

Théorème2.5(Chvàtal, [Chv72a])

Si les degrés $d_1 \leq d_2 \leq \ldots \leq d_n$ des sommets d'un graphe G satisfont :

$d_k \leq k < n/2 \Rightarrow d_{n-k} \geq n-k$, alors G est hamiltonien.

Les théorèmes cités précédemment ont été au fil des années améliorés par plusieurs chercheurs, qui ont ainsi obtenu des résultats plus généraux. Parmi lesquels Häggkvist et Nicoghossian qui ont introduit la connectivité dans le théorème de Dirac, ce qui a donné une meilleure borne (du degré minimum).

Théorème2.6(Häggkvist et Nicoghossian, [HN81])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n et de connectivité k tel que $\delta(G) \geq (n+k)/3$, alors G est hamiltonien.

Le théorème2.6 a été par la suite généralisé par Bauer, Broersma, Veldman et Rao qui ont utilisé la notation suivante pour établir un résultat de type Ore:

$\sigma_k(G)=\min\{ \sum_{i=1,..,k} d(v_i) / \{v_1,\ldots,v_k\}$ est un stable dans G $\}$

et $\sigma_k(G)= \infty$ si aucun ensemble de k sommets indépendants n'existe dans G.

Théorème2.7(Bauer, Broersma, Veldman et Rao, [BBVR89])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n et de connectivité k tel que : $\sigma_3(G) \geq n+k$, alors G est hamiltonien.

Bondy avait auparavant considéré un plus grand nombre de sommets dans le stable, il a ainsi obtenu le résultat suivant (qu'on énonce en y introduisant la notation précédente pour la somme des degrés) :

Théorème2.8 (Bondy, [Bon80])

Si G est k-connexe d'ordre $n \geq 3$ tel que :
$\sigma_{k+1}(G) > (k+1)(n-1)/2$, alors G est hamiltonien.

Seulement la somme des degrés a un grand inconvénient pratique car elle est difficilement applicable, à cause du nombre important d'opérations qu'il faut effectuer.

Fan a introduit une nouvelle approche qui consiste à ne plus considérer toutes les paires de sommets non adjacents mais uniquement celles qui sont à distance 2.

Théorème2.9(Fan, [Fan84])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que :
$\mathrm{Min}\{\max(d(u), d(v)) / \mathrm{distance}(u, v)=2\} \geq n/2$, alors G est hamiltonien.

Bedrossian, Chen et Schelp ont amélioré le Théorème2.9 en considérant seulement les paires de sommets appartenant à une griffe induite (on appelle griffe le graphe $K_{1,3}$) ou à une griffe modifiée induite (une griffe modifiée est une griffe à laquelle une arête est rajoutée, il s'agit du graphe Z_1 ,voir figure-11-) comme suit :

Théorème2.10(Bedrossian, Chen et Schelp, [BCS93])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n, si $d(u,v)=2 \Rightarrow \max\{d(u),d(v)\} \geq n/2$ pour toute paire de sommets d'une griffe induite de G ou d'une griffe induite modifiée de G, alors G est hamiltonien.

Asratyan et Khachatryan ont considéré les sommets à distance au plus 2 d'un sommet donné v et ont noté $G_2(v)$ le sous graphe de G induit par ces sommets.

Théorème2.11(Asratyan et Khachatryan, [AK84])

Soit G un graphe d'ordre n. Supposons qu'à chaque fois que $d(v) \leq (n-1)/2$ et u un sommet à distance 2 de v on a : $d(v)+d_{G2(v)}(u) \geq |V(G_2(v))|$, alors G est hamiltonien.

2.2 CONDITIONS SUR LES DEGRES GENERALISES :

Une fois de plus, une généralisation du théorème de Dirac a été donnée par Faudree, Gould, Jacobson, et Schelp, cette fois ci en utilisant la notion de degré généralisé (utilisé pour les ensembles). Le degré d'un ensemble S est défini comme suit : $d(S)=|\cup_{v\in S}N(v)|$. Dans la pratique S est choisi ayant une certaine propriété P (par exemple S est un stable). Cette approche a offert une large utilisation et a permis d'établir les résultats qui suivent :

Théorème2.12(Faudree, Gould, Jacobson et Schelp, [FGJS89])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n tel que $d(S) \geq (2n-1)/3$ pour tout $S=\{u, v\}$ où u et v sont des sommets indépendants de G, alors G est hamiltonien.

Plus généralement pour un ensemble S de cardinalité t on a :

Théorème2.13(Fraisse, [Fra86])

Soit G un graphe k-connexe d'ordre n. supposons qu'il existe t, $1\leq t\leq k$ tel que pour tout stable S de cardinal t on a :

$d(S) \geq t\,(n-1)/(t+1)$, alors G est hamiltonien.

Théorème2.14(Aïnouche, [Aïn92])

Soit G un graphe k-connexe d'ordre n. supposons qu'il existe t, $1 \leq t \leq k$ tel que pour tout stable S de cardinalité t dans G on a :$d(S) > [t(n-1)/(t+1)] - k\lfloor t/2 \rfloor/(t+1)$, alors G est hamiltonien.

La restriction utilisée par Fan dans le théorème2.9 peut aussi servir pour les degrés généralisés, c'est ce qu'a montré Lindquester dans le résultat qui suit :

Théorème2.15(Lindquester, [Lin89])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n tel que :

$d(S) \geq (2n-1)/3$pour tout ensemble $S=\{u, v\}$de sommets à distance 2 dans G, alors G est hamiltonien.

Une autre généralisation du théorème de Dirac avec un aspect plus combinatoire a été établit par Faudree, Gould, Jacobson, et Lesniak.

Théorème2.16(Faudree, Gould, Jacobson, et Lesniak, [FGJL92])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre n (assez grand) tel que :

$d(S) \geq n/2$ pour tout ensemble S de deux sommets distincts, alors G est hamiltonien.

2.3 CONDITIONS COMBINANT LES DEGRES DE SOMMETS ET LES DEGRES GENERALISES :

Certains chercheurs ont posé des conditions utilisant en même temps les deux notions de degré généralisé et de degré de sommets et voici les résultats qu'ils ont proposés :

Théorème2.17(Chen, [Che90])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que pour toute paire de sommets non adjacents u et v on a :
$|N(u) \cup N(v)| + \max\{d(u), d(v)\} \geq n$, alors G est hamiltonien.

le théorème2.17 peut être obtenu comme conséquence du théorème suivant :

Théorème2.18(Aïnouche, [Aïn95])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que pour toute paire de sommets non adjacents u et v on a :
$2|N(u) \cup N(v)| + d(u) + d(v) > 2(n-1)$, alors G est hamiltonien.

Théorème2.19(Flandrin, Jung et Li, [FJL91])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que pour toute paire de sommets non adjacents u et v on a :
$3|N(u) \cup N(v)| + \max\{2, |N(u) \cap N(v)|\} > 2(n-1)$, alors G est hamiltonien.

Un résultat plus fort que les deux théorèmes 2.18 et 2.19 utilise des stables à trois sommets au lieu de deux, il s'énonce comme suit :

Théorème2.20(Flandrin et Li, [FL88])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n tel que :
$d(u)+d(v)+d(w) \geq n + |N(u) \cap N(v) \cap N(w)|$ pour tout ensemble stable $\{u, v, w\}$, alors G est hamiltonien.

Notons $J(a,b)= \{u\in N(a)\cap N(b)/\ N[u]\subseteq N[a]\cup N[b]\}$ et $N[u]=\{u\}\cup N(u)$, pour tous sommets a, b, u dans G, en adoptant cette notation Aïnouche a établi le résultat suivant :

Théorème2.21(Aïnouche, [Aïn98])

Soit G un graphe 2-connexe. Si $|N(a)\cap N(b)|\geq 2$ et $J(a,b) \neq\emptyset$ pour toute paire de sommets a et b tels que :
$d(a,b)=2$
$\{x\in N(a)\cap N(b)/\ d(x)=2\}= \emptyset$
et $d(a)\leq d(b)< n/2$,
alors G est hamiltonien.

Théorème2.22(Shen et Tian, [ST95])

Soit G un graphe 3- connexe d'ordre n, tel que toute paire de sommets dans G vérifie :
$d(u, v)= 2\Rightarrow |N(u)\cup N(v)| \geq (n+3)/2$, alors G est hamiltonien.

Zeng et Min ont résumé plusieurs conditions dans le théorème suivant :

Théorème2.23(Zeng et Min, [ZM94])

Soit G un graphe d'ordre n et de connectivité $k \geq 2$. Si pour tout stable S de cardinalité k+1 l'une des deux conditions suivantes est satisfaite :
(1) il existe $u\neq v$ dans S tels que $d(u)+d(v)\geq n$ ou $|N(u)\cap N(v)| \geq \alpha(G)$ ($\alpha(G)$ est le nombre de stabilité défini comme étant la taille d'un plus grand stable de G).
(2) pour toute paire de sommets distincts u et v dans S, $|N(u)\cup N(v)|\geq n- \max\{d(x)/\ x\in S\}$,
alors G est hamiltonien.

2.4 NOTION DE BON SOUS-ENSEMBLE :

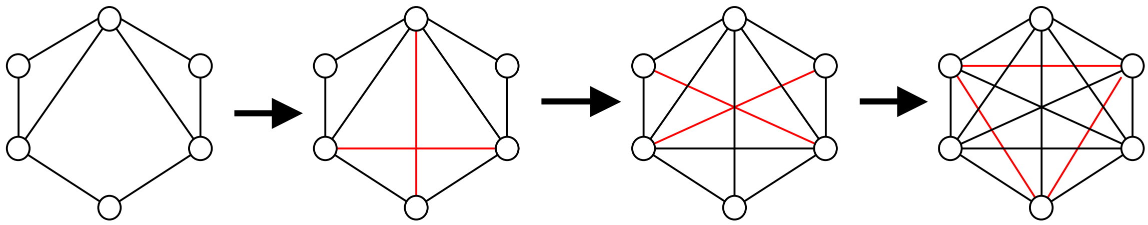
Aïnouche et Christofides ont introduit une nouvelle notion qui leur a permis d'établir un résultat très intéressant. Etant donné un graphe G=(V, E) et $W\subseteq V$, on numérote les sommets de W dans l'ordre croissant des degrés : $d(w_1)\leq d(w_2)\leq\ldots\leq d(w_{|W|})$, l'ensemble W sera dit bon si $d(w_i)> i$, pour tout $w_i\in W$.

Théorème2.24(Aïnouche et Christofides, [AC85])

Soit G un graphe d'ordre n et soit W un bon sous-ensemble de V. Si pour toute paire de sommets non adjacents u et v dans V-W on a : $d(u)+d(v)\geq n$, alors G est hamiltonien.

3.CONDITIONS SUR LA FERMETURE :

Bondy et Chvàtal ont étendu le théorème d'Ore en y introduisant la notion de k-fermeture. La k- fermeture d'un graphe G d'ordre n est le graphe noté $C_k(G)$ obtenu en joignant progressivement les paires de sommets non adjacents dont la somme des degrés est au moins égale à k, jusqu'à ce qu'il ne reste plus de telles paires. La k-fermeture $C_k(G)$ d'un graphe G est unique. Si le graphe G est égal à sa n-fermeture (qu'on appellera fermeture tout court) alors on dira que G est fermé.
Dans l'exemple suivant on construit la fermeture du graphe G.



Théorème3.1(Bondy et Chvàtal, [BC76])

Un graphe G d'ordre n est hamiltonien si et seulement si $C_n(G)$ l'est.

Ce théorème a un grand intérêt pratique dans le sens où il ne sera plus nécessaire de vérifier que toute la somme des degrés $\geq$ n pour toutes les paires de sommets non adjacents mais seulement pour quelques paires assurant l'hamiltonicité de la clôture.

Il a comme conséquence directe le corollaire suivant :

Corollaire3.2(Bondy et Chvàtal, [BC76])

Soit G un graphe simple d'ordre $n \geq 3$.si $C_n(G)$ est un graphe complet, alors G est hamiltonien.

4.CONDITIONS SUR LE NOMBRE DE STABILITE :

Une approche différente prise par Nash-Williams d'un coté et par Chvàtal et Erdös de l'autre leur a permis d'établir les théorèmes 4.1 et 4.2 respectivement, en utilisant $\alpha(G)$ le nombre de stabilité du graphe G. Le nombre de stabilité étant la taille d'un plus grand stable du graphe G.

Théorème4.1 (Nash-Williams, [Nas71])

Si $\alpha(G) \leq \delta(G)$ et si $\delta(G) \geq (n+2)/3$, alors G est hamiltonien.

Théorème4.2(Chvàtal et Erdös, [CE72])

Si G est un graphe de connectivité k tel que $\alpha(G) \leq k$, alors G est hamiltonien.
(ce qui équivaut à dire que tout graphe non hamiltonien de connectivité k contient un stable de cardinal k+1)

5.LA CONDITION CORIACE:

Notons m(G) le nombre de composantes connexes d'un graphe G. En se référant à [Gra97], on utilise ici le terme «coriace» (en anglais tough) pour définir un graphe G dans lequel m(G-S) ≤ $|S|$, pour tout ensemble d'articulation S de G.

Ce concept de graphe coriace a été introduit par Chvàtal [Chv72b]. Plus généralement, un graphe sera dit t-coriace si :

m(G-S)≤ $|S|$/t, pour tout ensemble d'articulation S de G. La coriacité du graphe G notée τ(G) est la plus grande valeur de t pour laquelle G est t- coriace.

Chvàtal avait remarqué que si un graphe G est hamiltonien alors $\tau(G)\geq 1$ (théorème1.2), malheureusement la réciproque n'est vrai que pour les graphes d'ordre au plus 6 (le graphe de la figure8 ci dessous n'est pas hamiltonien et pourtant il est 1-coriace).

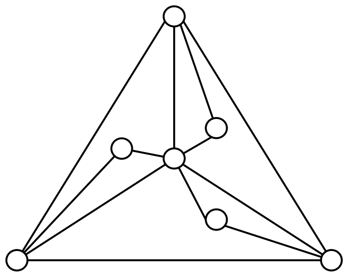


Figure-8-

Chvàtal avait aussi posé une conjecture qui supposait que tout graphe t- coriace (avec t > 3/2) est hamiltonien, mais plusieurs chercheurs ont donné des exemples de graphes non hamiltoniens avec t > 3/2. Alors la conjecture a été modifiée pour devenir comme suit :

Conjecture :[Chv72b]

Tout graphe 2- coriace est hamiltonien.

Mais récemment Bauer, Broersma et Veldman [BBV00] ont réfuté cette conjecture en construisant des contres exemples de graphes (9/4-ε)- coriaces sans chaîne hamiltonienne (∀ε> 0). L'étude de ce concept et son utilisation se sont beaucoup répandues car la condition coriace combinée avec d'autres conditions peut être utilisée pour obtenir de nouveaux résultats mais aussi pour améliorer des résultats déjà existants.

Notons que Bauer, Hakimi et Schmeichel [BHS90] ont montré que reconnaître la « coriacité » était un problème NP- complet. Ce problème était longtemps resté ouvert. Voici les principaux résultats qui établissent le rapport entre la « coriacité » et l'hamiltonicité :

Théorème5.1(Jung, [Jun78])

Soit G un graphe 1-coriace d'ordre n≥ 11 tel que $\sigma_2(G) \geq$ n-4, alors G est hamiltonien.

Théorème5.2(Bauer, Morgana, Schmeichel et Veldman, [BMSV90])

Soit G un graphe 2-coriace d'ordre n avec $\sigma_3(G) \geq$ n, alors G est hamiltonien.

Plus généralement pour un graphe t- coriace, Bauer, Broersma, Van Den Heuvel et Veldman ont montré le résultat suivant :

Théorème5.3(Bauer, Broersma, Van Den Heuvel et Veldman, [BBVV95])

Soit G un graphe t- coriace d'ordre n (n ≥ 3), si δ> n/ (t+1)-1, alors G est hamiltonien.

Hoang a montré qu'en combinant condition coriace et condition sur les degrés, on pouvait conclure à l'hamiltonicité:

<u>Théorème5.4</u>(Hoang, [Hoa95])

Soit G un graphe avec la séquence de degrés suivante $d_1, d_2, \ldots, d_n$ et soit t un entier égal au plus à 3. Si G est t- coriace et si $\forall i$, $t \leq i < n/2$, $d_i \leq i \Rightarrow d_{n-i+t} \geq n-i$, alors G est hamiltonien.

Plus particulièrement pour certaines classe de graphes, introduire la condition coriace peut mener à l'hamiltonicité, c'est ce qu'ont montré Kratsch, Lehel et Müller [KLM96] pour les graphes scindés, ce sont ceux qui peuvent être partitionnés en un stable et une clique, et Deogun, Kratsch et Steiner [DKS97] pour les graphes de cocomparabilité qui sont les complémentaires des graphes de comparabilité. Un graphe G est appelé un graphe de comparabilité s'il est possible en orientant ses arêtes d'en faire le graphe d'une relation d'ordre.

<u>Théorème5.5</u>(Kratsch, Lehel et Müller, [KLM96])

Tout graphe scindé 3/2 coriace est hamiltonien.

<u>Théorème5.6</u>(Deogun, Kratsch et Steiner [DKS97])

Tout graphe de cocomparabilité 1 coriace est hamiltonien.

6.HAMILTONICITE DU GRAPHE ADJOINT :

Avant d'aborder la question de l'hamiltonicité des graphes adjoints, il faut d'abords savoir reconnaître un graphe adjoint, c'est la question à laquelle a répondu Beineke [Bei70] en caractérisant les graphes adjoints par sept sous graphes exclus. Le résultat qu'il a établi se résume comme suit :

Théorème6.1(Beineke, [Bei70])

Un graphe G est le graphe adjoint d'un graphe si et seulement s'il ne contient aucun des graphes $K_{1,3}$, G_1, G_2,G_3,G_4,G_5,G_6 comme sous graphe induit.(voir figure 9)

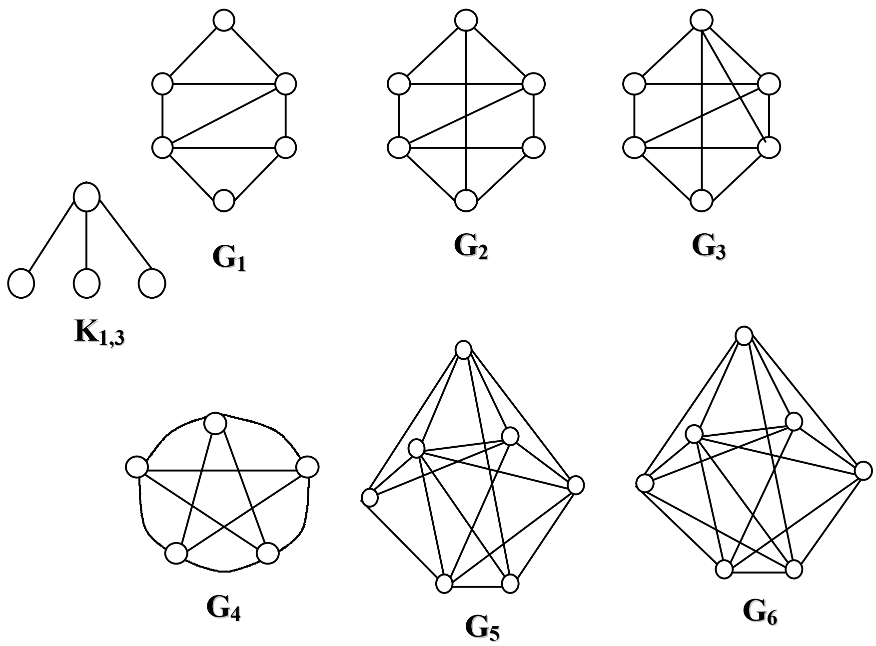


Figure 9

Différentes études sur l'hamiltonicité du graphe adjoint L(G) sont basées sur la remarque suivante : l'existence d'un cycle hamiltonien dans L(G) est équivalente à l'existence d'un cycle dominant dans G. Un cycle C dans G est dit dominant si tout sommet de G est adjacent à au moins un sommet dans C.

Clark, Colbourn et Erdös avaient posé la conjecture suivante :

Conjecture (Clark, Colbourn et Erdös [CCE85]) :

Il existe une fonction f tel que si G est un graphe k-connexe d'ordre n et de degré minimum $\delta(G) \geq n/(k+1)+f(k)$, alors G a un cycle dominant.

Bondy et Fan ont démontré cette conjecture grâce au théorème suivant qu'ils ont établi :

Théorème6.2(Bondy et Fan, [BF87b])

Soit G un graphe k-connexe ($k\geq 2$)d'ordre n. Si tout k+1 sommets indépendants v_i ($0\leq i\leq k$) avec $N(v_i)\cap N(v_j)=\emptyset$ ($0\leq i\neq j\leq k$) satisfont :$\sigma_{k+1}(G)\geq(n-2k)$, alors G contient un cycle dominant.

Le corollaire suivant découle immédiatement du théorème6.2 et prouve la conjecture :

Corollaire6.3 (Bondy et Fan, [BF87b])

Soit G un graphe k-connexe ($k\geq 2$)d'ordre n. Si $\delta(G)\geq(n-2k)/(k+1)$, alors G possède un cycle dominant.

Catelin a utilisé l'arête connectivité et a montré que :

Théorème6.4(Catelin, [Cat])

Si G est un graphe 2- arête connexe à n sommets ($n\geq 20$) et si $\delta(G)>n/5-1$, alors L(G) est hamiltonien.

Soit $D_1(G)$ l'ensemble des sommets de degré 1 dans G. Lai a montré que l'on pouvait obtenir l'hamiltonicité du graphe adjoint en utilisant l'arête connectivité du sous graphe $G\text{-}D_1(G)$, le résultat s'énonce comme suit :

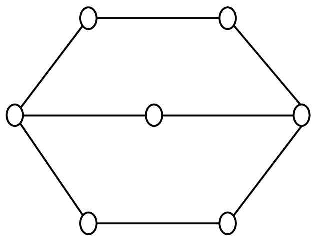
Théorème6.5(Lai, [Lai98])

Si $G\text{-}D_1(G)$ est un graphe 2- arête connexe avec n sommets et si pour toute arête $xy \in E(G)$, $d(x)+d(y)> [(2n)/5]-2$, alors pour n assez grand, L(G) est hamiltonien.

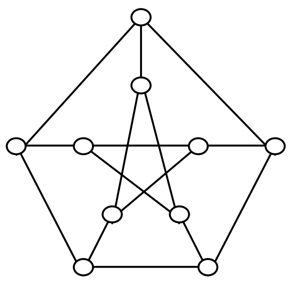
Benhocine et Foquet ont établi un résultat qui assure la pancyclicité du graphe adjoint :

Théorème6.6(Benhocine et Fouquet, [BF87a])

Si G est un graphe 2-connexe de connectivité k avec $\alpha(G) \leq k+1$, alors L(G) est pancyclique à moins que G ne soit l'un des graphes suivants :
C_4, C_5, C_6, C_7, le graphe de Petersen ou le graphe de la figure 10(a).



(a)



Le graphe de Petersen

Figure-10-

Xiong a montré que partant d'un graphe adjoint qui est hamiltonien on peut obtenir la pancyclicité exception faite pour certains graphes, comme le montre le théorème ci dessous :

Théorème6.7(Xiong, [Xio98])

Soit G un graphe d'ordre n≥ 72et de circonférence au moins 4, si de plus la somme des degrés de toute paire de sommets adjacents dans G est ≥ $(1+(8n+1)^{1/2})/2$ et L(G) est hamiltonien, alors L(G) est pancyclique sauf si G est le graphe C_4, C_5 ou le graphe de Petersen.

7.CONDITION D'HAMILTONICITE PAR DES SOUS-GRAPHES EXCLUS :

Une approche très utilisée dans la théorie des graphes s'est étendue au problème de l'hamiltonicité, c'est celle qui consiste à considérer des graphes sans un (ou des) sous graphe(s) précis. On dit qu'un graphe G est sans S si G ne contient aucun sous graphe induit isomorphe à S.

Les premiers à avoir introduit ce concept dans l'étude de l'hamiltonicité sont Goodman et Hedetniemi et depuis beaucoup de résultats ont été établis surtout pour les graphes sans $K_{1,3}$ (appelé aussi griffe ou encore étoile) ou sans des graphes très proches dans leur structure de $K_{1,3}$, parmi lesquels les graphes Z_i.

Les graphes Z_i sont obtenus en identifiant un sommet du triangle avec un sommet d'une chaîne de longueur i et le graphe B obtenu en identifiant un sommet dans deux triangles distincts (voir figure-11-).
Sans doute, la première motivation qui a poussé les chercheurs à étudier la classe des graphes sans $K_{1,3}$ est le résultat de Beineke [Bei70] qui a caractérisé la classe des graphes adjoints des arêtes par sept sous graphes exclus parmi lesquels figure la griffe.

Ce qui implique que la classe des graphes sans griffe généralise celle des graphes adjoints.

Cette classe est elle-même généralisée par la classe des graphes quasi sans griffe (voir [Aïn98]), sur laquelle nous exposerons des résultats ultérieurement.

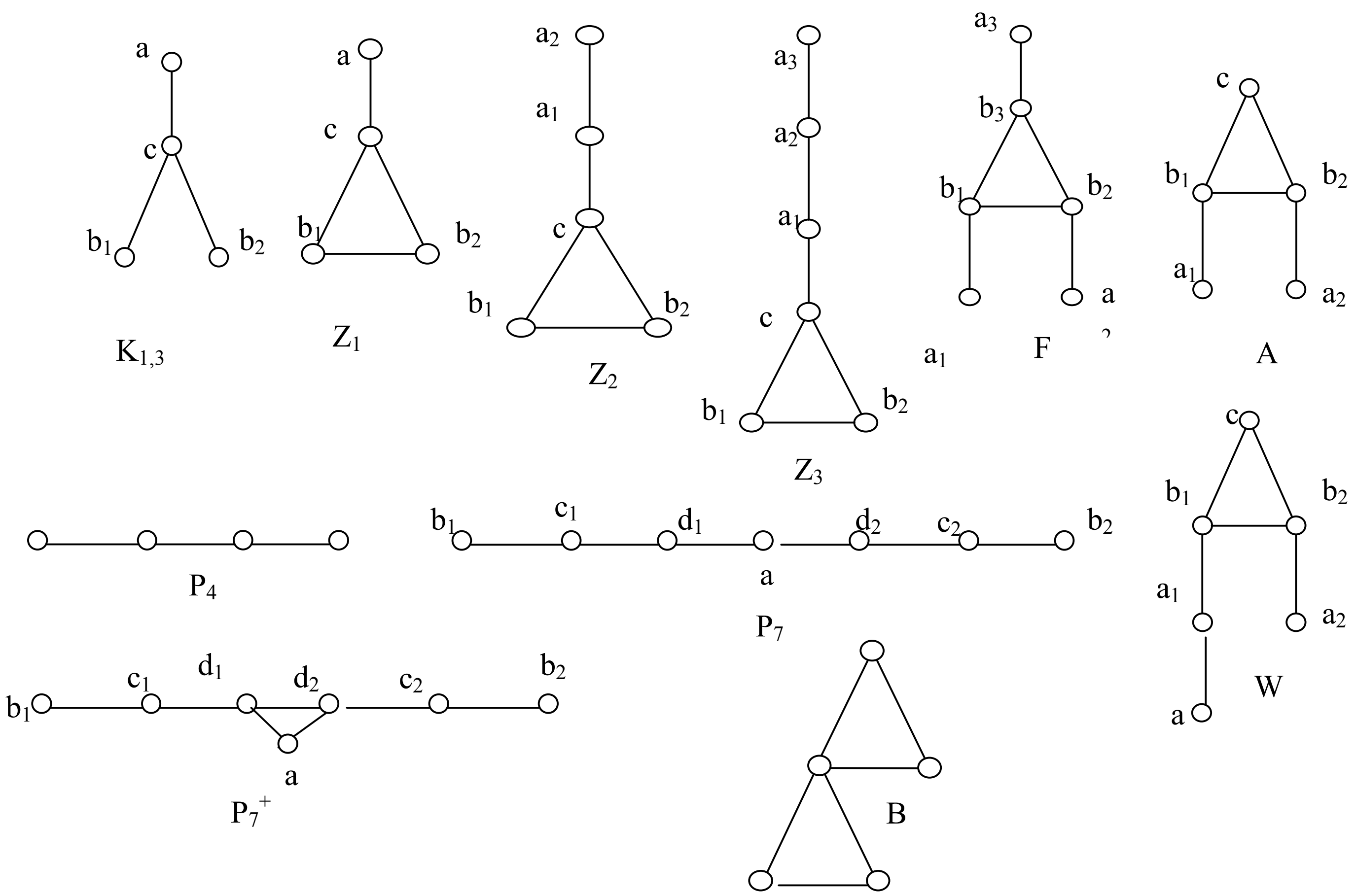


Figure-11-

Theorème7.1(Goodman et Hedetniemi, [GH74])

Si G est 2-connexe qui ne contient pas de sous graphes induits isomorphes à $K_{1,3}$ ni à Z_1, alors G est hamiltonien.

En fait les seuls graphes qui satisfont aux conditions du théorème7.1 sont les cycles ou les graphes pancycliques. C'est ce qu'ont montré Gould et Jacobson d'une part et Oberly et Sumner d'une autre :

<u>Theorème7.2</u>(Gould et Jacobson [GJ82] Oberly et Sumner [OS79])

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ et sans Z_1 , alors G est pancyclique ou G est un cycle.

Un graphe G est dit localement connexe (respectivement localement k- connexe) si pour tout sommet v de G le sous graphe induit par N(v) est connexe (respectivement k-connexe). Oberly et Sumner ont ajouté cette propriété aux graphes sans $K_{1,3}$, ils ont alors obtenu l'hamiltonicité, comme le confirme le résultat suivant :

<u>Theorème7.3</u>(Oberly et Sumner, [OS79])

Soit G un graphe connexe sans $K_{1,3}$ d'ordre $n \geq 3$. Si G est localement connexe alors il est hamiltonien.

Clarck a montré plus tard un résultat plus fort, à savoir :

<u>Theorème7.4</u>(Clarck, [Cla81])

Soit G un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, localement connexe sans $K_{1,3}$, alors G est sommet pancyclique.

Un graphe G est dit k- hamiltonien si G–U est hamiltonien pour tout sous-ensemble U de V(G) avec $0 \leq |U| \leq k$ $(k \geq 0)$. Chartrand, Gould et Polimeni ont montré que :

Theorème7.5 (Chartrand, Gould et Polimeni, [CGP97])

Si G est un graphe connexe, localement (k+1) connexe sans griffe alors G est k-hamiltonien.

On dit qu'un graphe G est quasi localement connexe si tout ensemble d'articulation de G contient un sommet avec un voisinage connexe. Utilisant cette propriété, Zhang que l'on pouvait assurer la pancyclicité :

Theorème7.6 (Zhang, [Zha89])

Tout graphe connexe quasi localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est pancyclique.

Aïnouche, Broersma, Ronghua et Veldman ont donné un résultat plus fort :

Theorème7.7(Aïnouche, Broersma, Ronghua et Veldman, [ABRV90])

Tout graphe connexe, quasi localement connexe sans griffe d'ordre $n \geq 3$ est sommets pancyclique.

Certains chercheurs (comme récemment Cai et Shreve [CS01]) se sont intéressés à l'étude de la pancyclicité modulo k des graphes sans griffe, notion moins forte que la pancyclicité mais qui donne des résultats intéressants selon le k. Pour tout entier naturel k, un graphe G est dit pancyclique mod k s'il contient un cycle de longueur p mod k, pour tous $3 \leq p \leq n$. Cai et Shreve ont montré qu'il suffisait de poser une condition sur le degré minimum d'un graphe sans griffe G pour obtenir la pancyclicité mod k, leur résultat se résume comme suit :

<u>Theorème7.8</u>(Cai et Shreve, [CS01])

Soit G un graphe sans griffe, si $\delta(G) \geq k+1$, alors G est pancyclique mod k.

Les travaux d'Oberly et Sumner ont incité beaucoup de chercheurs à investir dans la même voie en tentant d'élargir l'ensemble des sous graphes non induits dans la structure de G. Ce qui a donné :

<u>Theorème7.9</u>(Duffus, Gould, et Jacobson, [DGJ80])

Soit G est un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 3$ sans sous graphes induits isomorphes à $K_{1,3}$ et F alors G est hamiltonien.

Comme les graphes A et P_4 sont des sous graphes induits de F alors on déduit que :

<u>Corollaire7.10</u>

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ et A, alors G est hamiltonien.

<u>Corollaire7.11</u>

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ et P_4 alors G est hamiltonien.

Ryjáček a montré que l'on pouvait assurer l'hamiltonicité d'un graphe sans griffe en permettant l'existence de A sous une certaine condition :

Theorème7.12(Ryjáček, [Ryj95])

Soit G un graphe 2- connexe sans griffe, tel que les sommets de degré 1 de tout sous graphe induit isomorphe à A ont un voisin commun dans G, alors G est hamiltonien.

Shepherd a montré un résultat qui nous donne la pancyclicité pour les graphes 3-connexe :

Theorème7.13(Shepherd, [She87])

Si G est un graphe 3- connexe sans griffe et sans F alors G est pancyclique.

Récemment, Brousek, Favaron et Ryjacek ont établi le résultat suivant pour les graphes 3-connexes :

Theorème7.14(Brousek, Favaron et Ryjacek, [BFR99])

(a) Tout graphe 3- connexe sans griffe et sans P_7 est hamiltonien.
(b) Tout graphe 3- connexe sans griffe et sans Z_4 est hamiltonien.
(c) Tout graphe 3- connexe sans griffe et sans $N_{1,1,2}$ est hamiltonien.
(d) Tout graphe 3- connexe sans griffe, sans $N_{1,2,2}$ et sans $N_{1,1,3}$ est hamiltonien.
Où $N_{i,j,k}$ est le graphe obtenu en identifiant chaque sommet d'un triangle avec un l'extrémité de trois chaînes totalement disjointes de longueur i, j, k. (par exemple le graphe $N_{1,2,2}$ représenté dans la figure 12).

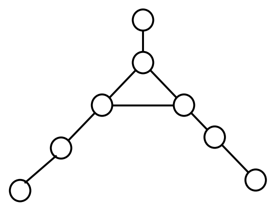


Figure-12-

Brousek et Ryjacek, cette fois en collaboration avec Schiermeyer ont montré que l'on pouvait obtenir un résultat similaire en excluant en plus de la griffe les graphes : {B et P_8}, {B et Z_5}, {B et $N_{1,1,4}$}.

Theorème7.15(Brousek Ryjacek et Schiermeyer, [BRS99])

(a) Tout graphe 3-connexe sans griffe, sans B et sans P_8 est hamiltonien.
(b) Tout graphe 3-connexe sans griffe, sans B et sans Z_5 est hamiltonien.
(c) Tout graphe 3-connexe sans griffe, sans B et sans $N_{1,1,4}$ est hamiltonien.

Gould et Jacobson ont posé des conditions plus générales que celles du théorème7.1 et ont obtenu un résultat similaire :

Theorème7.16(Gould et Jacobson, [GJ82])

Si G est un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ et Z_2 alors G est un cycle ou G est pancyclique.

En considérant le graphe Z_3, on obtient un nouveau résultat mais avec une conclusion plus faible que celle du théorème7.16.

Theorème7.17(Gould et Jacobson, [GJ82])

Soit G un graphe 2-connexe qui ne contient pas de sous graphes induits isomorphes à $K_{1,3}$, B et Z_3, alors G est hamiltonien.

En introduisant la somme des degrés dans les graphes sans $K_{1,3}$, Liu, Tian et Wu ont montré que :

Theorème7.18(Liu, Tian et Wu, [LTW86])

Si G est un graphe 2- connexe sans griffe avec $\sigma_3(G) \geq n-2$ alors G est hamiltonien.

Zhang a généralisé ce résultat comme suit :

Theorème7.19(Zhang, [Zha88])

Si G est un graphe k-connexe d'ordre n sans $K_{1,3}$ avec $\sigma_{k+1}(G) \geq n-k$, alors G est hamiltonien.

Li a montré que pour un graphe G sans griffe d'ordre n assez grand l'hamiltonicité implique la pancyclicité :

Theorème7.20(Li, [Li91])

Si G est un graphe hamiltonien sans griffe d'ordre n>100 avec $\sigma_3(G) \geq (n-2)/3$, alors G est pancyclique.

Li a donné une condition du type de Fan pour l'hamiltonicité des graphes sans griffe.

Theorème7.21(Li, [Li00])

Soit G un graphe 2- connexe sans griffe d'ordre n. Si pour toute paire de sommets on a :

$d(u, v)= 3 \Rightarrow \max (d (u), d (v)) \geq (n-4)/2$, alors G est hamiltonien.

On dit qu'un sous graphe H de G satisfait $\phi(u,v)$ si : $[N(u) \cap N(v)]-V(H) \neq \emptyset$, c'est à dire que u et v ont un voisin commun qui n'appartient pas à V(H).

En utilisant cette notion Broersma et Veldman ont obtenu une généralisation du théorème7.1 et de bien d'autres résultats en permettant l'existence de certains sous graphes induits sous certaines conditions.

Theorèm7.22(Broersma et Veldman, [BV90])

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$:

1. Si tout sous graphe induit Z_1 de G satisfait $\phi(a,b_1)$ ou $\phi(a,b_2)$ alors G est pancyclique ou G est un cycle.
2. Si tout sous graphe induit Z_2 de G satisfait $\phi(a_1,b_1)$ ou $\phi(a_1,b_2)$ alors G est pancyclique ou G est un cycle.

Broersma et Veldman ont généralisé le corollaire 7.11 dans le théorème qui suit :

Theorème7.23(Broersma et Veldman, [BV90])

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$, si tout sous graphe induit de G isomorphe à P_7 ou P_7^+ satisfait $\phi(a,b_1)$ ou $\phi(a,b_2)$ ou ($\phi(a,c_1)$ et $\phi(a,c_2)$) alors G est hamiltonien.

Bien avant Gould avait établi un théorème qui peut être considérer comme une conséquence du théorème7.23 :

Théorème7.24(Gould, [Gou79])

Si G est un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$, de diamètre au plus 2, alors G est hamiltonien.

En général, les graphes sans $K_{1,3}$ et sans P_6 ne sont pas pancycliques, mais Faudree, Ryjacek et Schiermeyer ont affirmé que les seuls exceptions sont les graphes d'ordre au plus 9, comme le montre le résultat suivant :

Théorème7.25(Faudree, Ryjacek et Schiermeyer, [FRS95])

Soit G un graphe connexe sans griffe d'ordre n.

- Si G est sans $P_{5,}$ alors G est pancyclique.
- Si G est sans P_6 et $n \geq 10$, alors G est pancyclique.
- Si G est sans P_7 et sans P_7^+ et $n \geq 13$, alors G est pancyclique.
- Si G est sans P_7 et sans B, alors G est hamiltonien.

Bedrossian a résumé plusieurs cas de sous graphes exclus dans les deux résultats suivants :

Théorème7.26(Bedrossian, [Bed91])

Soient X et Y deux graphes connexes ($X,Y \neq P_3$) et soit G un graphe 2-connexe qui n'est pas un cycle. Si G est sans X et Y, alors G est hamiltonien si et seulement si $X=K_{1,3 \text{et}}$ $Y= P_4, P_5, P_6, C_3, Z_2$, A, F ou W.

Théorème7.27(Bedrossian, [Bed91])

Soient X et Y deux graphes connexes ($X, Y \neq P_3$) et soit G un graphe 2-connexe qui n'est pas un cycle. Si G est sans X et Y, alors G est pancyclique si et seulement $X=K_{1,3 \text{et}}$ $Y= P_4, P_5, Z_1$ ou Z_2.

Un résultat du type de celui de Chvàtal et Erdös (théorème4.2)a été obtenu par Flandrin et Li.

Theorème7.28(Flandrin et Li, [FL88])

Si G est un graphe k- connexe ($k \geq 3$) sans $K_{1,3}$, avec $\alpha(G) \leq 2k$, alors G est hamiltonien.

Favaron, Flandrin, Li et Ryjacek ont considéré le nombre minimum de cliques qui partitionnent G (noté θ (G)) et ont montré que :

Theorème7.29(Favaron, Flandrin, Li et Ryjacek, [FFLR01])

Soit G un graphe fermé 2- connexe sans griffe tel que $\theta(G) \leq 2$, alors G est hamiltonien.

Flandrin, Li et Jung ont cette fois compté le nombre de griffe contenant deux sommets donnés distincts u et v, et ont noté ce nombre $n_c(u,v)$,en posant $n_c(G)$=max $n_c(u,v)$ où {u,v est une paire de sommets non adjacents de G} ils ont montré que :

Theorème7.30(Flandrin, Jung et Li, [FJL88])

Si G est un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 16$, si $\delta(G) \geq n/3$ et si $n_c(G) < \delta-1$ alors G est hamiltonien.

Theorème7.31(Flandrin, Jung et Li, [FJL88])

Soit G est un graphe 2-connexe d'ordre $n \geq 29$, et soit l un entier naturel. Si l'une des deux conditions ci dessous est vérifiée :

- $\delta=(n-2)/3$ et $n_c(G) < \delta/2$.
- $\delta=(n+l)/3$, $2 \leq l \leq (n-3)/2$ et $n_c(G) < \delta(l+2)-2$.

Alors G est hamiltonien.

Matthews et Sumner ont montré qu'un graphe 3- connexe sans griffe n'est pas toujours hamiltonien et ils ont donné une borne pour l'ordre du graphe qui assure l'hamiltonicité :

Theorème7.32(Matthews et Sumner, [MS84])

Tout graphe 3- connexe sans griffe avec moins de 20 sommets est hamiltonien.

Ils ont aussi donné l'exemple du plus petit graphe 3-connexe sans griffe non hamiltonien d'ordre 20 (figure -13-).

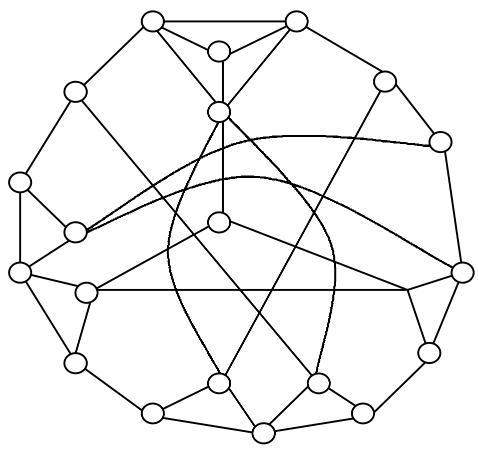


Figure-13-

Matthews et Sumner ont aussi étendu un résultat classique aux graphes sans griffe et ils ont montré que :

Theorème7.33(Matthews et Sumner, [MS85])

Si G est un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ avec $\delta(G) \geq (n-2)/3$, alors G est hamiltonien.

L'utilisation des degrés généralisés donne aussi des résultats sur l'hamiltonicité des graphes sans $K_{1,3}$. Gould, Faudree et Lindquester ont même obtenu un résultat sur la pancyclicité.

Theorème7.34(Gould, Faudree et Lindquester, [FGL88])

Soit G un graphe 2-connexe sans $K_{1,3}$ d'ordre $n \geq 14$ tel que $d(R) > (2n-2)/3$ pour tout stable $R=\{u,v\}$, alors G est pancyclique.

Bauer, Fan et Veldman ont amélioré cette borne comme suit :

Theorème7.35(Bauer, Fan et Veldman, [BFV91])

Soit G un graphe 2- connexe sans griffe tel que $d(R) \geq (2n-5)/2$, alors G est hamiltonien.

Sans rajouter de conditions supplémentaires, la borne donnée par le théorème7.35 reste la meilleure possible. En ajoutant des conditions de régularité sur le graphe G, on peut obtenir une autre borne, c'est ce qu'ont montré Liu et Wu dans le théorème suivant :

Theorème7.36(Liu et Wu, [LW87])

Si G est un graphe 2- connexe sans griffe et δ- régulier avec $\delta \geq (n-1)/4$, alors G est hamiltonien.

Li a montré qu'on pouvait obtenir un résultat similaire pour les graphes 3-connexe sans griffe sans pour autant supposer la régularité, en posant seulement une condition sur le degré minimum:

Theorème7.37(Li, [Li93])

Si G est un graphe 3- connexe sans griffe avec $\delta \geq (n-5)/5$, alors G est hamiltonien.

Li mais cette fois ci associé à Virlouvet a appliqué le théorème 2.13 aux graphes sans griffe, obtenant ainsi le résultat suivant :

Theorème7.38 (Li et Virlouvet, [LV90])

Soit G un graphe k- connexe ($k \geq 3$) d'ordre n sans griffe. S'il existe un t, $t \leq 2k$ tel que :
$d(S) > t(4k-t+1)(n-2k+1)/[2k(2k+1)]$ pour tout stable S de cardinal t de G , alors G est hamiltonien.

Pour les graphes réguliers, on a :

Theorème7.39 (Liu et Wu, [LW87])

Tout graphe 2- connexe k- régulier sans griffe d'ordre $n \leq 4k+1$ est hamiltonien.

Li a de sa part considéré les graphes 3- connexes sans griffe et a prouvé que :

Theorème7.40(Li, [Li93])

Tout graphe 3- connexe k- régulier sans griffe d'ordre $n \leq 5k-5$ est hamiltonien.

Matthews et Sumner [MS84] avaient posé la conjecture suivante «tout graphe 4- connexe sans griffe est hamiltonien », Plummer a montré cette conjecture dans le cas où le graphe 4- connexe sans griffe est 4- régulier contenant K_4.

Theorème7.41(Plummer, [Plu92])

Tout graphe 4-connexe, 4- régulier, sans griffe et contenant K_4 est hamiltonien.

Markus a considéré les graphes sans $K_{1,4}$ et a obtenu un résultat similaire à celui du théorème7.33.

Theorème7.42(Markus, [Mar93])

Tout graphe 2-connexe d'ordre n sans $K_{1,4}$ avec $\delta(G)\geq (n+2)/3$ est hamiltonien.

Chen et Schelp ont utilisé la somme des degrés et ont étendu le résultat de Markus comme suit :

Theorème7.43(Chen et Schelp, [CS96])

Soit G un graphe k- connexe sans $K_{1,4}$ d'ordre $n \geq 3$, tel que $\sigma_{k+1}(G)\geq n+k$, alors G est hamiltonien.

Ces mêmes chercheurs ont ensuite généralisé ce résultat en considérant les graphes sans $K_{1,r}$ et ils ont donné le résultat suivant :

Theorème7.44(Chen et Schelp, [CS96])

Si G est un graphe d'ordre n, k- connexe sans $K_{1,r}$ avec $n \geq (k+1)^2(r-1)-1$ et $\sigma_{k+1}(G)\geq n+k(k-1)$

Alors G est hamiltonien.

Cai et Shreve ont montré que l'on pouvait aussi poser une condition sur le degré minimum des graphes sans $K_{1,4}$ et obtenir un résultat sur la pancyclicité mod k .

<u>Theorème7.45</u>(Cai et Shreve, [CS01])

Soit G un graphe sans $K_{1,4}$ tel que $\delta(G) \geq k+3$, alors G est pancyclique mod k.

Flandrin, Jung et Li se sont intéressés aux classes des graphes sans $K_{1,1,3}$ et sans $K_{2,3}$ qui contiennent la classe des sans $K_{1,3}$ et ils ont montré que :

<u>Theorème7.46</u>(Flandrin, Jung et Li, [FJL91])

Soit G un graphe 2- connexe sans $K_{1,1,3}$ et sans $K_{2,3}$ et tel que $\sigma_3(G) \geq n+1$, alors G est hamiltonien.

Le carré d'un graphe G est défini comme étant le graphe dont les ensembles de sommets et d'arêtes sont respectivement définis par : $V(G^2)=V(G)$ et $E(G^2)=\{uv/ d_G(u,v) \leq 2\}$,et par conséquent :

$\alpha(G)=\max\{|R| / R \subseteq V(G)$ et $d(u,v) \geq 3$ pour $u,v \in R$ et $u \neq v\}$.

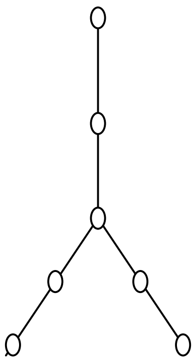
Aïnouche, Broersma, Ronghua et Veldman ont remarqué que tout graphe k- connexe non hamiltonien sans griffe possédait un stable de cardinal k+1, dans lequel deux sommets distincts quelconque u et v n'ont pas de voisin commun ; ils ont par la suite montré que :

<u>Theorème7.47</u>(Aïnouche, Broersma, Ronghua, [ABRV90])

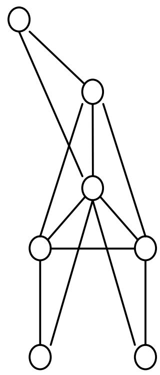
Si G est un graphe k-connexe ($k \geq 2$)sans $K_{1,3}$ avec $\alpha(G^2) \leq k$, alors G est hamiltonien.

A présent regardons l'hamiltonicité des carrés eux mêmes, le résultat le plus important dans ce domaine est celui de Fleischner [Fle74] qui a montré que :« Le carré de tout graphe 2-connexe est hamiltonien ».

Matthews et Sumner [MS84] ont de leur côté montré que : « Le carré d'un graphe connexe sans $K_{1,3}$ est sommets pancyclique ». Soit $S(K_{1,3})$ le graphe $K_{1,3}$ où chaque arête est subdivisée une fois. Il est facile de voir que $(S(K_{1,3}))^2$ n'est pas hamiltonien et par conséquent le carré de tout graphe contenant $S(K_{1,3})$ ne l'est pas.



$S(K_{1,3})$



$(S(K_{1,3}))^2$

Figure-14-

Gould et Jacobson ont montré que :

Theorème7.48(Gould et Jacobson, [GJ84])

(a) Si G est un graphe connexe sans $K_{1,4}$ et sans Y, alors G^2 est sommets pancyclique.

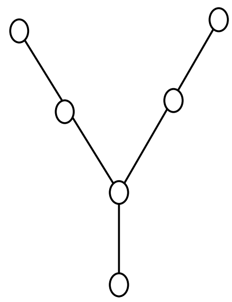
(b) Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$, sans $K_{1,4}$, sans $S(K_{1,3})$, sans F et sans R, alors G^2 est sommets pancyclique.

Où Y est le graphe obtenu en supprimant un sommet pendant dans $S(K_{1,3})$ et R obtenu en identifiant un sommet de K_3 avec un sommet central de P_4.

Un résultat similaire a été obtenu par Flandrin :

Theorème7.49(Flandrin, [Fla85])

Si G est un graphe connexe sans $K_{1,4}$ ni F ni R_1 ni R_2 , alors G^2 est sommet pancyclique.
Où R_1 est le graphe obtenu de $K_{1,4}$ en subdivisant une arête une fois, et R_2 est le graphe obtenu en identifiant un sommet de K_3 avec le sommet central de P_5.



Y

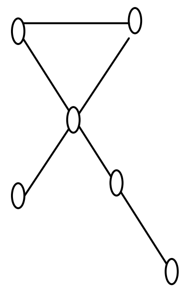


Figure-15-

Gould et Jacobson avaient posé une conjecture sur le carré d'un graphe sans $S(K_{1,3})$ qui a été par la suite démontré grâce à Hendry et Vogler, il s'agit du résultat suivant :

Théorème7.50(Hendry et Vogler, [HV85])

Si G est un graphe connexe d'ordre $n \geq 3$ sans $S(K_{1,3})$, alors G^2 est sommets pancyclique.

Récemment Abderrazzak, Flandrin et Ryjàcek ont donné un résultat en permettant l'existence de $S(K_{1,3})$ sous certaines conditions.

Théorème7.51(Abderrazzak, Flandrin et Ryjàcek, [AFR99])

Le carré d'un graphe connexe dans lequel tout $S(K_{1,3})$ induit possède au moins 3 arêtes dans un block de degré au plus 2 est hamiltonien.

A présent voici les résultats les plus important concernant l'hamiltonicité dans la classe des graphes quasi sans griffe, qui rappelons le, est une extension de la classe des graphes sans griffe. Un graphe est quasi sans griffe si toute paire de sommets (x,y) à distance 2 satisfait la condition $J(x,y)\neq\emptyset$ ($J(x,y)=\{u\in N(x)\cap N(y) \ / \ N[u]\subseteq N[x]\cup N[y]\}$ et $N[u]= \{u\}\cup N(u)$)

La Figure-16- illustre le plus petit graphe quasi sans griffe contenant une griffe induite(c'est un graphe à 7 sommets).

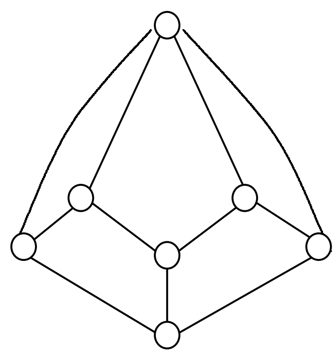


Figure-16-

Remarquons que si $d(a,b)=2$ et $\{x\in N(a)\cap N(b)/ \ d(x)=2\}= \emptyset$ alors $|N(a)\cap N(b)|\geq 2$ et $J(a,b) \neq\emptyset$ pour toute paire de sommets a et b non contenu dans une griffe induite ou une griffe modifiée induite. On en déduit donc que :

Corollaire7.52

Soit G un graphe d'ordre n connexe, quasi sans griffe ; si $|N(a)\cap N(b)|\geq 2$ pour toute paire de sommets a, b tels que $d(a,b)=2$, $\{x\in N(a)\cap N(b)/ \ d(x)=2\}= \emptyset$ et $d(a)\leq d(b)< n/2$, alors G est hamiltonien.

Aïnouche a montré un résultat plus fort :

Théorème7.53(Aïnouche, [Ain98])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n ≥ 3 quasi sans griffe. Si $|N(a) \cap N(b)| \geq 2$ pour toute paire de sommets a, b tels que d(a,b)=2, $\{x \in N(a) \cap N(b) / d(x)=2\} = \emptyset$, alors G est pancyclique ou G est un cycle.

On peut déduire le même résultat dans la classe des graphes sans griffe.
Partant du résultat de Clarck (théorème7.4), Aïnouche a montré un résultat similaire mais un peu plus faible pour les graphes quasi sans griffe :

Théorème7.54(Aïnouche, [Ain98])

Un graphe connexe, localement connexe, quasi sans griffe d'ordre n ≥ 3 est pancyclique.

Il a aussi étendu les théorèmes de Gould et Jacobson [GJ82] aux graphes quasi sans griffe comme suit :

Théorème7.55(Aïnouche, [Ain98])

Soit G un graphe 2-connexe quasi sans griffe d'ordre n qui ne contient pas de sous graphe induit isomorphe à Z_2, alors G est pancyclique ou est un cycle.

Théorème7.56(Aïnouche, [Ain98])

Soit G un graphe 2-connexe quasi sans griffe sans Z_3 et sans B, alors G est hamiltonien.

• ***QUELQUES RESULTATS SUR L'HAMILTONICITE DANS CERTAINES CLASSES DE GRAPHES :***

Les chercheurs ont étudié d'autres classes à part celle des graphes adjoints et celles définies par des sous graphes exclus, et ont obtenu des résultats intéressants sur l'hamiltonicité dans ces classes particulières. En travaillant sur des classes de graphes comme les graphes réguliers, multipartis ou autres on obtient des résultats plus spécifiques. La condition du théorème de Dirac implique que tout graphe m- régulier d'ordre $n \leq 2m$ est hamiltonien, travaillant sur les graphes réguliers Jackson a montré les deux résultats qui suivent (le second étant plus fort que le premier).

Théorème7.57(Jackson, [Jac80])

Tout graphe 2-connexe, k-régulier ayant au plus 3k sommets est hamiltonien.

Théorème7.58(Jackson, [Jac80])

Soit G un graphe 2-connexe d'ordre n avec $\delta(G)=k$.
Supposons que $n \leq 3k$ et $\sum_{v\in V}(d(v)-k) \leq k-1$, alors G est hamiltonien.

Jackson a ensuite posé une conjecture qui a été démontrée par Zhu, Liu, Yu, notons que le théorème 7.39 apporte une amélioration du résultat qui suit dans le cas des graphes sans griffe :

Théorème7.59(Zhu, Liu, Yu, [ZLY85])

Tout graphe 2-connexe k-régulier d'ordre $n \leq 3k+1$ est hamiltonien sauf le graphe de Petersen.

Yokomura s'est intéressé à l'étude de l'hamiltonicité des graphes tripartis balancés (c'est à dire ceux dont l'ensemble des sommets peut être partitionner en trois sous-ensembles V_i (i=1,2,3) tous de même cardinal ($|V_i| = n$), tels que toute arête relie un sommet de V_i et un sommet de V_j, (i, j=1,2,3 et $i \neq j$)). Il a montré que :

Théorème7.60(Yokomura, [Yok98])

Soit G un graphe triparti balancé, tel que pour toute paire de sommets non adjacents $u \in V_i$ et $v \in V_i$ ($1 \leq i < j \leq 3$) de G on a : $|N(u) \cap V_j| + |N(v) \cap V_i| \geq n+1$, alors G est hamiltonien.

Un graphe G est appelé L_1-graphe, si pour tout triplet de sommets u, v et w avec d(u, v)= 2 et $w \in N(u) \cap N(v)$ on a $d(u)+d(v) \geq |N(u) \cup N(v) \cup N(w)|-1$. En utilisant ce concept Li et Schelp ont montré le résultat suivant :

Théorème7.61(Li et Schelp, [LS00])

Soit G un L_1-graphe 2- connexe d'ordre n. si $\delta(G) \geq (n-2)/3$ ou $\sigma_3(G) \geq n$, alors G est hamiltonien ou bien $G \in K$. où $K = \{G : K_{p,p+1} \subseteq G \subseteq K_p + (p+1)K_1$ pour $p \geq 2\}$.

Nous ne pouvons terminer ce survey sans parler d'une classe importante de graphes qui apparaît beaucoup dans l'étude des groupes hyperbolique, dans l'automatisme, l'informatique, les représentations combinatoire et encore d'autres domaines d'autant plus que tout graphe peut être considéré comme sous graphe induit d'un graphe de cette classe ; il s'agit de la classe des graphes de Cayley. Un graphe de Cayley est défini comme suit :

Etant donné un groupe G et $\Omega \subseteq G$ tels que :

1. Ω engendre G.
2. $1 \notin \Omega$
3. $\omega \in \Omega \Rightarrow \omega^{-1} \in \Omega$

Le graphe de Cayley $\Gamma=\Gamma(G,\Omega)$ est le graphe dont l'ensemble des sommets est celui des éléments de G et tel que pour u,v éléments de G $\{u,v\}$ est une arête si et seulement si $u^{-1}v\in\Omega$.

Witte et Gallian avaient proposé dans [WG84] un survey sur le problème de l'hamiltonicité dans cette classe et Curran et Gallian [CG96] l'ont par la suite mis à jour. On sait que :
Tout graphe de Cayley associé à un groupe abélien possède un cycle hamiltonien.
Mais la question qui reste posée est :
Pour quel ensemble S, le graphe de Cayley associé est hamiltonien?

Cette classe nous importe d'autant plus que sous certaines conditions elle définit la classe des (0,2)- graphes, objet d'étude du prochain chapitre.

Théorème7.62(Mollard, [Mol81])

Soient G un groupe et $\Omega\subseteq G$ tels que :

1. Ω engendre G.
2. $1\notin\Omega$
3. $\omega\in\Omega \Rightarrow \omega^{-1}\in\Omega$
4. $\forall\omega_1\in\Omega$, $\forall\omega_2\in\Omega$ (ω_1 et ω_2 non forcément distincts) $\omega_2\neq\omega_1^{-1}$

   $\exists!\ (\omega_3,\omega_4)\in\Omega\times\Omega$ tels que $\omega_2\omega_1=\omega_3\omega_4$.

Alors le graphe de Cayley $\Gamma=\Gamma\ (G,\Omega)$ est un (0,2) graphe.

8.NOMBRE DE CYCLES HAMILTONIENS DANS UN GRAPHE HAMILTONIEN :

Dans certains problèmes pratiques auxquels on associe des graphes, il est non seulement important d'étudier l'existence de cycles hamiltoniens, mais aussi connaître leur nombre ou encore le nombre de ceux qui sont sans arêtes communes. C'est un domaine qu'ont investit plusieurs chercheurs et dans lequel les résultats les plus importants sont exposés ci dessous.

Nash-Williams a généralisé le théorème de Dirac pour obtenir un résultat sur le nombre de cycles hamiltoniens sans arêtes communes.

Théorème8.1(Nash-Williams, [Nas71])

Soit G un graphe d'ordre n avec $\delta(G) \geq n/2$, alors G contient $\lfloor 5(n+a_n+10)/224 \rfloor$ cycles hamiltoniens sans arêtes communes. Avec $a_n = 0$ si n est pair et $a_n = 1$ sinon.

Faudree, Rousseau et Schelp ont utilisé la somme des degrés et ont établi le résultat suivant :

Théorème8.2(Faudree, Rousseau et Schelp, [FRS84])

Soit G un graphe d'ordre n et soit k un entier positif. Si la somme des degrés de toute paire de sommets non adjacents est au moins égale à n+2k-2, alors pour n suffisamment grand ($n \geq 60k^2$), G possède k cycles hamiltoniens sans arêtes communes.

Faudree, Gould et Schelp ont utilisé l'arête connectivité k'(G)pour établir le théorème :

<u>Théorème8.3</u>(Faudree, Gould et Schelp, [FGS87])

Soit k un entier positif fixé. Alors il existe une constante c= c(k) tel que si G est un graphe d'ordre n (n suffisamment grand) satisfaisant :

1. $|N(u) \cup N(v)| \geq ((2n+c)/3)$ pour toute paire de sommets non adjacents u et v.
2. $\delta(G) \geq 4k+1$.
3. $k'(G) \geq 2k$.
4. $k'(G-v) \geq k$ pour tout sommet v de G.

alors G contient k cycles hamiltoniens sans arêtes communes.

Sheehan ne s'est pas intéressé au nombre de cycles hamiltoniens dans un graphe hamiltonien, mais au nombre d'arêtes dans graphes avec exactement un cycle hamiltonien. Il a ainsi obtenu le résultat suivant :

<u>Théorème8.4</u>(Sheehan, [She77])

Soit G un graphe d'ordre n contenant exactement un cycle hamiltonien, alors le nombre maximum d'arêtes dans G est $1+n^2/4$.

Jackson a travaillé sur les graphes réguliers et a établi le théorème suivant (qui est plus fort que le théorème8.1 dans le cas des graphes réguliers) :

<u>Théorème8.5</u>(Jackson, [Jac79])

Soit G un graphe k-régulier d'ordre n ($n \geq 14$) et $k \geq (n-1)/2$, alors G contient $(3k-n+1)/6$ cycles hamiltoniens sans arêtes communes.

Owens a montré que :

<u>Théorème8.6</u>(Owens, [Owe80])

Pour tout $r \geq 3$ et pour tout k, $0 \leq k \leq n/2$, il existe un graphe r-régulier, r-connexe qui contient k cycles hamiltoniens sans arêtes communes mais pas k+1 cycles hamiltoniens sans arêtes communes.

Thomason a montré que :

<u>Théorème8.7</u>(Thomason, [Tho78])

Soit r un entier positif impair, alors tout graphe hamiltonien r-régulier possède un deuxième cycle hamiltonien.

Récemment, Thomassen a montré qu'on pouvait obtenir un résultat similaire sans condition sur la parité de r.

<u>Théorème8.8</u>(Thomassen, [Tho98])

Tout graphe hamiltonien r-régulier ($r \geq 300$) possède un deuxième cycle hamiltonien.

Suivant la même voie et en raffinant la méthode de Thomassen, Horák et Stacho ont donné une borne inférieure du nombre de cycles hamiltoniens dans un graphe :

<u>Théorème8.9</u>(Horák et Stacho, [HS00])

Soit G un graphe hamiltonien de degré maximum Δ et de degré minimum δ. Alors pour tout réel $k \geq 1$ il existe $\Delta(k)$ tel que $\Delta \geq \Delta(k)$ alors G possède au moins $\delta - \lfloor \Delta/k \rfloor + 2$ cycles hamiltoniens.

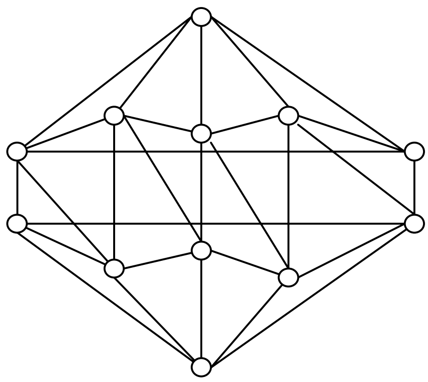
CHAPITRE III

HAMILTONICITE ET(0,2)-GRAPHES

1. <u>INTRODUCTION / GENERALITES SUR LES (0,2)GRAPHES</u> :

Les (0,2)- graphes sont des graphes connexes dans lesquels toute paire de sommets distincts possède 0 ou 2 voisins communs. Plus généralement, on parle de $(0,\lambda)$- graphe ($\lambda \geq 2$), notion qui a été introduite par H.M. Mulder [Mul80]. Le lecteur pourra consulter [Mul80] pour une étude (un aperçu) plus complète sur cette classe.

Comme exemples de (0,2)- graphes, on pourra citer K_4 et l'icosaèdre (Figure-17-)



<u>Figure –17-</u>

Pour la classe des (0,2)- graphes, nous donnons ci dessous les résultats les plus importants établis pour la plus part par H.M. Mulder [Mul79] :

<u>Théorème 1.1</u>(H.M. Mulder, [Mul79])

Un (0,2)- graphe est d régulier.

Le nombre de sommets d'un (0,2)- graphe est encadré (en fonction de son degré de régularité) par les deux bornes suivantes :

Théorème 1.2(H.M. Mulder, [Mul79])

Soit G un (0,2)- graphe de degré d, alors :
$1+(d(d-1)/2) \leq |V(G)| \leq 2^d$

Pour un (0,2)- graphe biparti de degré d, la borne inférieure devient comme suit :

Théorème 1.3(H.M. Mulder, [Mul79])

Soit G un (0,2)- graphe biparti de degré d, alors :
$2+d(d-1) \leq |V(G)| \leq 2^d$

La classe des (0,2)- graphes contient strictement une classe très étudiée connue sous le nom de la classe des hypercubes. Un hypercube de dimension d, qu'on note Q_d est le graphe dont les sommets sont les d- uplets $\{0,1\}^d$ et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement s'ils diffèrent exactement d'une composante. Il peut aussi être obtenu à partir de l'ensemble $S=\{1,2,\ldots,d\}$en considérant comme ensemble de sommets de Q_d l'ensemble des parties de S (i.e. $V(Q_d)=P(S)$). Q_d peut aussi être obtenu en faisant la somme cartésienne de d graphes complets à deux sommets K_2, $Q_d = K_2 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_2$. L'hypercube Q_d est un graphe d- régulier à 2^d sommets, d'ailleurs Laborde et Rao Hebbare [LR82] et Mulder [Mul79] ont montré chacun de son coté que l'hypercube Q_d était le seul (0,2) graphe d'ordre 2^d.

Théorème 1.4(J.M. Laborde et Rao Hebbare [LR82];H.M. Mulder, [Mul79])

Soit G un (0,2)- graphe, alors :
(a) G est régulier (soit d son degré).
(b) $|V(G)| \leq 2^d$
(c) $|V(G)| = 2^d$ si et seulement si G est l'hypercube.

Analogiquement au graphe Q_d qui atteint la borne supérieure, les chercheurs ont voulu connaître quels étaient les (0,2)- graphes dont l'ordre atteint la borne inférieure ? Ils en ont trouvé trois, un de degré 3 qui est le graphe complet à 4 sommets K_4 et deux de degré 6 qui sont les graphes : $K_4 \oplus K_4$ (à gauche dans Figure-18-) et le graphe de Shrikhande (à droite dans Figure-18-). M. Mollard s'est quant à lui intéressé à tous les ordres et a réussi à exhiber tous les (0,2)- graphes d'ordre ≤ 32 (voir le rapport de recherche [Mol94]).

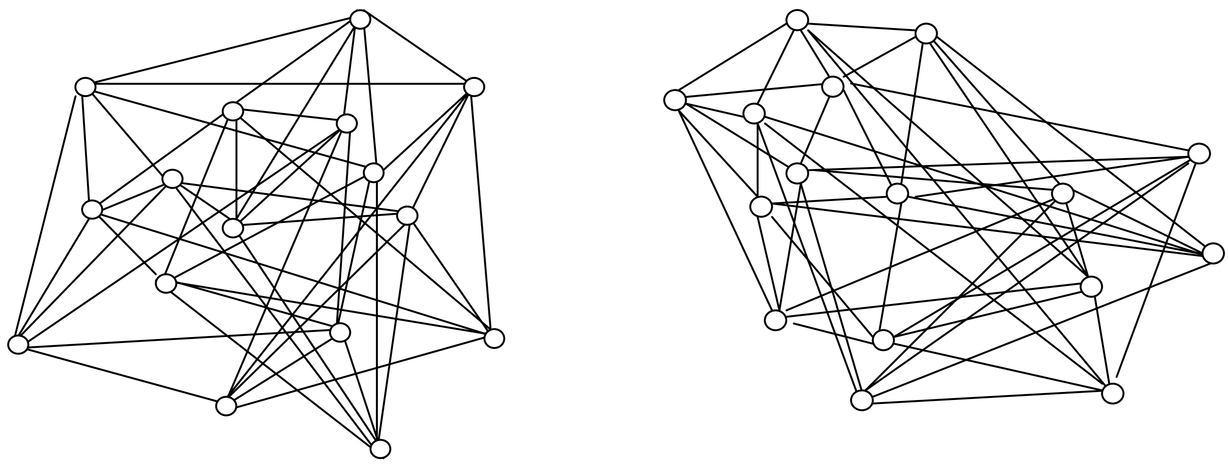


Figure-18-

2. OPERATIONS CONSERVANT LA PROPRIETE D'ETRE UN (0,2)-GRAPHE :

La recherche d'opérations qui conservent la propriété d'être un (0,2) graphe a fait l'objet de nombreuses études. Différentes constructions de (0,2) graphes par des opérations ont permis d'élargir cette classe et d'obtenir dans certains cas des (0,2) graphes non sommets transitifs. Un graphe G est dit sommet transitif si pour toute paire de sommets {x,u} de G, il existe un automorphisme *f* de G, tel que u=*f*(x). analogiquement, on dit que G est arête transitif si pour toute paire d'arêtes xy et uv de G, il existe un automorphisme *f* de G tel que u=*f*(x) et v=*f*(y).

Cette notion est généralisée par la notion de distance transitivité qui définit un graphe G dans lequel pour tout quadruplet de sommets x, y, u et v tels que d(x,y)=d(u,v), il existe un automorphisme f de G tel que u=f(x) et v=f(y).

Parmi les opérations conservant la propriété d'être un (0,2) graphe, on compte la somme cartésienne, l'opération * et d'autres opérations citées ci dessous. Le produit cartésien ne conserve pas en général cette propriété sauf dans le cas suivant :

Théorème 2.1 : (Berrachedi et Mollard, [BM98])

$G \times K_2$ est un (0,2) graphe si et seulement si G est un (0,2) graphe.

Soit f une involution (c'est à dire $f = f^{-1}$) du graphe G. Soient G(f) le graphe obtenu à partir du graphe G en identifiant dans G chaque paire de sommets {u, f(u)} et G'(f) le graphe obtenu à partir du graphe G en joignant dans G chaque paire de sommets {u,f(u)}. Alors :

Théorème 2.2 : (Berrachedi et Mollard, [BM98])

Soit G un (0,2) graphe et soit f un automorphisme involutif de G tel que d(u,f(u))=1 pour tout sommet u de G. alors le graphe partiel G' obtenu en supprimant le couplage {uf(u), u$\in$V(G)} est un (0,2) graphe.

Théorème 2.3 : (Berrachedi et Mollard, [BM98])

Soit G un (0,2) graphe et soit f un automorphisme involutif de G sans point fixe. Si pour toute paire de sommets u et v tels que $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$, on a $f(v) \notin N(u)$, alors G'(f) est un (0,2) graphe.

<u>Théorème 2.4 :</u> (Berrachedi et Mollard, [BM98])

Soit G un (0,2) graphe et soit f un automorphisme involutif de G sans point fixe. Si pour toute paire de sommets u et v tels que $N(u) \cap N(v) \neq \emptyset$, on a $N(u) \cap N(f(v)) = \emptyset$, alors $G(f)$ est un (0,2) graphe.

On appellera graphe joint du graphe G, le graphe G* obtenu à partir du graphe G auquel on applique l'opération * définie dans le chapitre I.

<u>Théorème 2.5 :</u> (Berrachedi et Mollard, [BM98])

Le graphe joint d'un (0,2) graphe est un (0,2) graphe.

Plusieurs problèmes relatifs à l'étude des (0,2) graphes restent à nos jours ouverts, nous en citons les problèmes suivantes :

- ✧ Existence de (0,2) graphes d'ordre impair.

Un élément de réponse à cette interrogation a été donné par Berrachedi et Mollard ([BM98]), il se résume comme suit :

<u>Théorème 2.6 :</u> (Berrachedi et Mollard, [BM98])

Soit G un (0,2) graphe d'ordre impair, alors son degré de régularité d est un multiple de 8.

- ✧ Existence de (0,2) graphe pour un ordre donné.
- ✧ Existence de (0,2) graphes bipartis d'ordre minimum pour un degré donné.
- ✧ Existence de couplage parfait dans un (0,2) graphe.

✧ On pensait que tout les (0,2) graphes étaient sommet transitifs jusqu'à ce que Berrachedi et Mollard ([BM98]) construisent un contre exemple réfutant cette conjecture.

✧ Hamiltonicité des (0,2) graphes.

Concernant ce derniers point, deux conjectures ont été posées :

Conjecture2.7: (_Havel, [Hav82])

Dans Q_n notons $L_n^k = N_k \cup N_{k+1}$, alors L_n^k admet une chaîne utilisant tous les sommets de N_k ou de N_{k+1}.

Cette conjecture est équivalente à la suivante :

Conjecture2.8: (_Havel, [Hav82])

L^k_{2k-1} est hamiltonien.

Conjecture2.9: (_Lovasz,)

Tout graphe sommet transitif admet une chaîne hamiltonienne.

3.HAMILTONICITE ET (0,2)- GRAPHES :

La conservation de l'hamiltonicité par des opérations sur les graphes a été beaucoup étudiée , notons par exemple que Aubert et Schneider [AS82] ont établi un résultat sur la décomposition de la somme cartésienne de graphes en sous graphes hamiltoniens, que Batagelj et Pisanski [BP82] ont étudié les cycles hamiltoniens dans le produit cartésien d'un cycle et d'un arbre et que Kheddouci et Kouider [KK95] ont donné un résultat partiel sur la décomposition de du produit cartésien de graphes en sous graphes hamiltoniens.
Dans ce qui suit, nous nous intéressons non pas à la décomposition du graphe résultant d'une certaine opération en sous graphes hamiltoniens mais nous cherchons à savoir si ce graphe est lui-même hamiltonien. Comme les opérations vues dans la section précédentes conservent, pour la majorité, la propriété d'être un (0,2) graphe, et comme tous les (0,2) graphes connus sont hamiltoniens, alors celles qui vont en plus conserver l'hamiltonicité vont nous permettre de générer d'autres (0,2) graphes hamiltoniens.

Commençons tout d'abord par la somme cartésienne:

Théorème 3.1 :

Soient G et H deux graphes hamiltoniens, alors $G \oplus H$ est hamiltonien.

La démonstration de ce théorème découle du lemme suivant :

Lemme 3.2 :

Soient C et C' deux cycles, alors $C \oplus C'$ est hamiltonien.

Preuve :
Soient $C= u_1u_2 \dots u_n u_1$ et $C'= v_1v_2\dots v_mv_1$ deux cycles de longueur respectives n et m.
Considérons dans $C \oplus C'$ les deux parcours suivants :

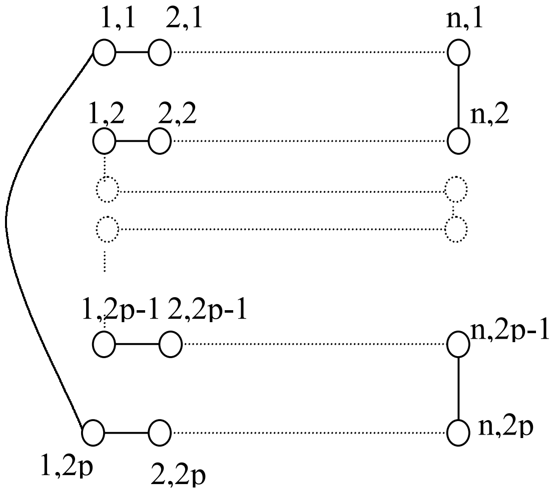
Si m est pair m =2p:

$(u_1,v_1)\ (u_2,v_1)\ \ldots(u_n,v_1)\ (u_n,v_2)\ (u_{n-1},v_2)\ \ldots(u_2,v_2)\ (u_1,v_2)$

$(u_1,v_3)\ (u_2,v_3)\ \ldots(u_n,v_3)\ (u_n,v_4)\ (u_{n-1},v_4)\ \ldots(u_2,v_4)\ (u_1,v_4)$

$(u_1,v_i)\ (u_2,v_i)\ \ldots(\ u_n,v_i)\ (u_n,v_{i+1})\ (u_{n-1},v_{i+1})\ \ldots(\ u_2,v_{i+1})\ (u_1,v_{i+1})$ avec i impair

$(u_1,v_{2p-1})\ (u_2,v_{2p-1})\ \ldots(u_n,v_{2p-1})\ (u_n,v_{24})\ (u_{n-1},v_{2p})\ \ldots(u_2,v_{2p})\ (u_1,v_{2p})\ (u_1,v_1).$



Le parcours considéré dans le cas m =2p

(Les sommets (u_i,v_j) sont noté i,j pour alléger le schéma)

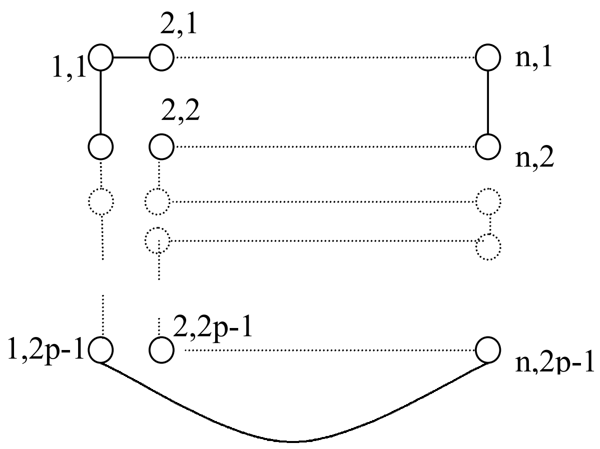
Si m est impair m =2p-1:

$(u_1,v_1)\ (u_2,v_1)\ \ldots(u_n,v_1)\ (u_n,v_2)\ (u_{n-1},v_2)\ \ldots(u_2,v_2)$

$(u_2,v_3)\ \ldots(u_n,v_3)\ (u_n,v_4)\ (u_{n-1},v_4)\ \ldots(u_2,v_4)$

$(u_2,v_{2i-1})\ \ldots(\ u_n,v_{2i-1})\ (u_n,v_{2i})\ (u_{n-1},v_{2i})\ \ldots(\ u_2,v_{2i})$

$(u_2,v_{2p-1})\ \ldots(\ u_n,v_{2p-1})\ (u_1,v_{2p-1})\ (\ u_1,v_{2p-2})\ldots(u_1,v_2)\ (u_1,v_1).$



Le parcours considéré dans le cas m =2p-1

Dans le cas où m est pair, comme dans le cas contraire, le cycle considéré est hamiltonien dans le graphe C⊕C' . Ce qui montre que la somme cartésienne conserve bien l'hamiltonicité.

Démonstration du théorème 3.1 :

Soient C et C' deux cycles hamiltoniens des graphes G et H respectivement, alors C⊕C' est un sous graphe de G⊕H, comme C⊕C' est hamiltonien d'après le lemme précédent alors G⊕H l'est aussi.

Pour le produit cartésien la conservation de l'hamiltonicité n'est pas si évidente à montrer. Considérons d'abord le produit cartésien de deux graphes dont l'un est d'ordre impair :

Théorème 3.3 :

Soient G_1 et G_2 deux graphes hamiltoniens avec G_1 d'ordre impair, alors le graphe $G_1 \times G_2$ est hamiltonien.

Lemme 3.4 :

Soient C_{2i+1} et C_m deux cycles de longueurs respectives 2i+1 et m, alors :
Le graphe $C_{2i+1}\times C_m$ et contient un cycle qui passe par tous ses sommets.

Preuve :

Posons $C_{2i+1}=\{1,2,\ldots,2i+1\}$ et $C_m=\{1,2,\ldots,m\}$.
Nous distinguons deux cas selon la parité de m, d'abord quand m=2j considérons dans le graphe $C_{2i+1}\times C_{2j}$ le parcours suivant (les sommets (k,l) seront notés kl pour alléger l'écriture) :

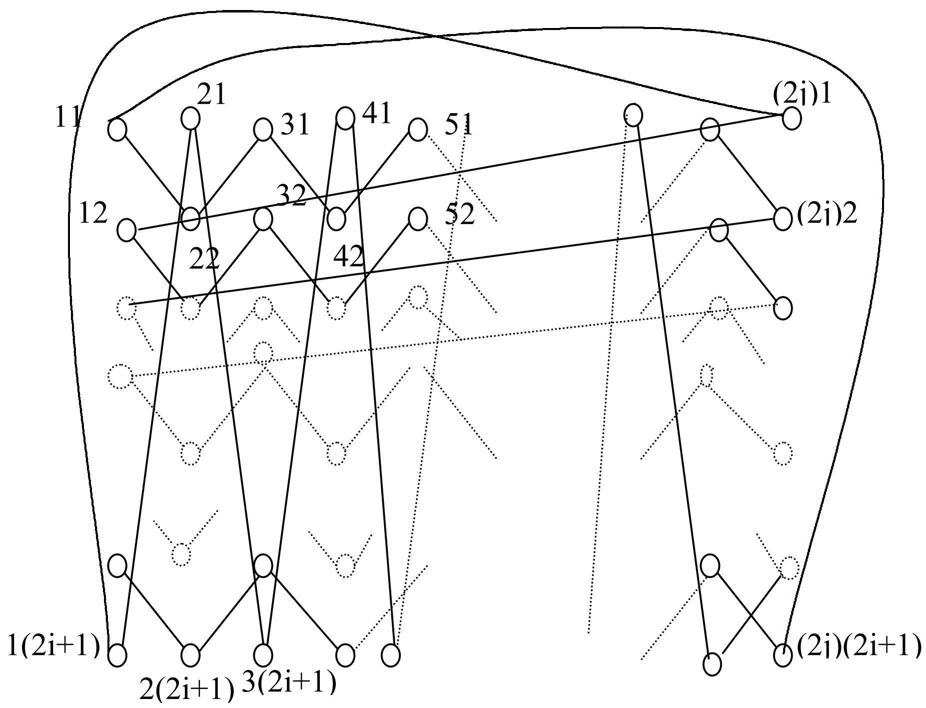
11 22 31 42 …(2j-1)1 (2j)2
13 24 33 44 …(2j-1)3 (2j)4

1(2k-1) 2(2k) 3(2k-1) 4(2k) ...(2j-1)(2k-1) (2j)(2k) pour k=1,....,i

1(2i-1) 2(2i) 3(2i-1) 4(2i) ...(2j-1)(2i-1) (2j)(2i)
(2j-1)(2i+1) (2j-2)1 (2j-3)(2i+1) ... 21 1(2i+1) (2j)1
12 23 32 43 … (2j-1)2 (2j)3
14 25 34 45 … (2j-1)4 (2j)5

1(2k) 2(2k+1) 3(2k) 4(2k+1) ... (2j-1)(2k) (2j)(2k) pour k=1,....,i

1(2i) 2(2i+1) 3(2i) 4(2i+1) ... (2j-1)(2i) (2j)(2i+1)
11



<u>Le parcours considéré dans le graphe $C_{2i+1}\times C_{2j}$</u>

Quand m=2j+1 considérons dans le graphe $C_{2i+1}\times C_{2j+1}$ le parcours suivant :

11 22 31 42 … (2j)2 (2j+1)1

1(2i+1) 21 3(2i+1) 41 5(2i+1) ... (2j)1

(2j+1)2 (2j)3 (2j-1)2 (2j-2)3 ... 23 12

(2j+1)3 (2j)4 (2j-1)3 ... 24 13

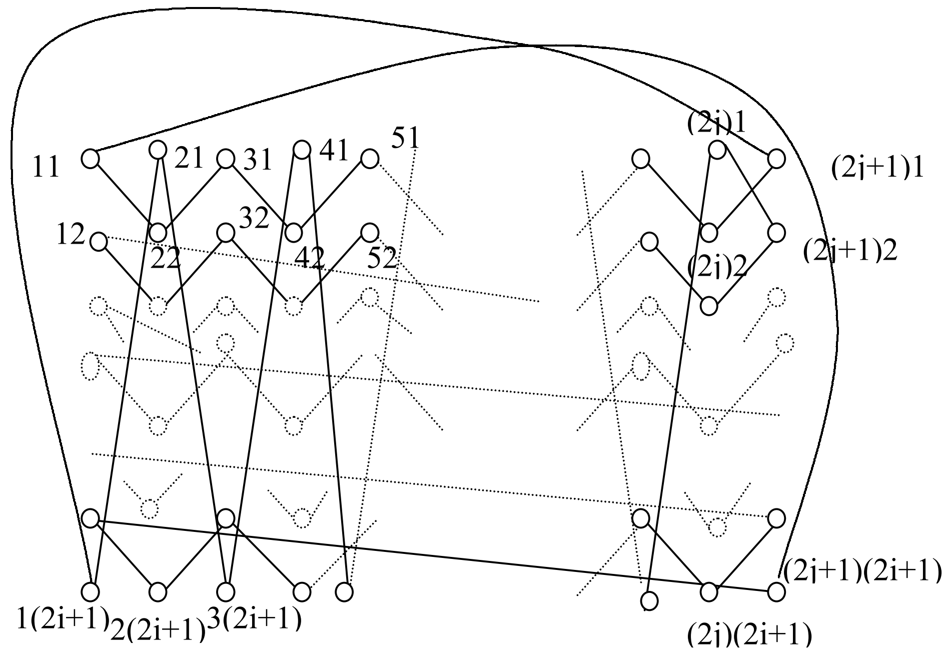
(2j+1)k (2j)(k+1) ... 2(k+1) 1k

(2j+1)(k+1) (2j)(k+2) ... 2(k+2) 1(k+1)

(2j+1)(2i) (2j)(2i+1) ... 2(2i+1) 1(2i)

(2j+1)(2i+1)

11



Le parcours considéré dans le graphe $C_{2i+1} \times C_{2j+1}$

Dans les deux cas cités ci dessus le cycle décrit passe par tous les sommets du graphe $C_{2i+1} \times C_m$, par conséquent ce graphe est hamiltonien.

Preuve du théorème 3.3 :

Soient C_{2i+1} et C_m deux cycles hamiltoniens des graphes G_1 et G_2 respectivement (rappelons que G_1 est supposé hamiltonien d'ordre impair), alors $C_{2i+1} \times C_m$ est un sous graphe de $G_1 \times G_2$, comme $C_{2i+1} \times C_m$ est hamiltonien d'après le lemme précédent alors $G_1 \times G_2$ l'est aussi.

Le théorème3.3 répond au problème de l'hamiltonicité du produit cartésien de deux graphes tous deux d'ordre impair ou l'un d'ordre impair et l'autre d'ordre pair. Reste alors le cas où les deux graphes sont d'ordre pair. Notons que le graphe $C_{2i} \times C_{2j}$ (où $C_{2i}=\{1,2,\ldots,2i\}$ et $C_{2j}=\{1,2,\ldots,2j\}$) n'est pas hamiltonien, car il contient deux composantes connexes.

Ces deux composantes sont isomorphes, et deux sommets pq et rs de $C_{2i}\times C_{2j}$ appartiennent à la même composantes connexes si et seulement si p+q et r+s ont même parité. Notons aussi que le graphe $C_{2i}\times C_{2j}$ est biparti. Plus généralement le graphe $C_n \times C_m$ est biparti sauf pour n et m tous deux impairs et il a une très riche structure en cycles (voir [Jha98]).

Donc pour montrer l'hamiltonicité du graphe $G_1 \times G_2$ où G_1 et G_2 sont tous deux d'ordre pair, considérer des cycles hamiltoniens C_{2i} et C_{2j} respectivement dans G_1 et G_2 ne permet pas de conclure sauf si l'un de ces cycles contient deux cordes (p,q) et (r,s) où p et q sont pairs et r et s sont impairs. Une corde étant une arête reliant deux sommets non consécutifs dans un cycle. C'est ce qu'a montré Gravier dans [Gra97] en donnant une condition nécessaire et suffisante pour que le produit cartésien de deux graphes hamiltoniens tous deux d'ordre pair le soit aussi. Il a regroupé tous les cas dans le théorème ci dessous :

<u>Théorème 3.5 :</u> (Gravier, [Gra97])

Soient G_1 et G_2 deux graphes hamiltoniens. Le graphe $G_1 \times G_2$ est hamiltonien si et seulement si G_1 ou G_2 est dans ***H***.
Où ***H*** est l'ensemble des graphes hamiltoniens G=(V,E) et si V est de cardinal pair, alors il existe un cycle hamiltonien de G noté C={1,…,2i} avec deux cordes (p,q) et (r,s) où p et q sont pairs et r et s sont impairs.

Pour le cas où G_1 et G_2 seraient tous deux d'ordre impair et dans le cas où leurs ordres seraient de parités différentes le théorème3.5 devient le théorème3.3 qui a été démontré. Dans le cas qui reste c'est à dire celui où les deux graphes G_1 et G_2 sont d'ordres pairs, la démonstration du théorème3.5 repose sur le lemme suivant :

Lemme 3.6 :

Le produit cartésien d'un cycle pair ayant deux cordes (p,q) et (r,s) où p et q sont pairs et r et s sont impairs par un cycle sans cordes d'ordre pair est un graphe hamiltonien.

Dans ce qui suit on s'intéresse à l'opération qui associe à un graphe G d'ordre n son joint le graphe G^* d'ordre 4n défini dans le chapitre I, et qui peut aussi être défini comme suit :

$V(G^*) = V(G) \times \{1,2,3,4\}$, (u,i) et (v,j) sont adjacents dans G^* si et seulement si une des trois conditions suivantes est satisfaite :

1. $uv \in E(G)$ et i=j et sont impairs.
2. $uv \in E(G)$ et $i \neq j$ et sont pairs.
3. u=v et les parités de i et de j sont différentes.

Est-ce que le graphe G^* obtenu à partir d'un graphe hamiltonien G est hamiltonien ? la réponse est :

Théorème3.7 :

Soit G un graphe hamiltonien, alors le graphe G^* est hamiltonien.

Lemme3.8:

Soit C un cycle de longueur n, alors le graphe C^* est hamiltonien.

Preuve:

Soit $C= u_1u_2 u_3 \ldots u_n u_1$ un cycle de longueur n, et soit C^* son image par l'opération *.

L'ensemble $V(C^*)= A\cup B\cup C\cup D$, où A, B, C et D sont définis isomorphes à V(C) .

$A=\{a_1,a_2,\ldots,a_n\}$; $B=\{b_1,b_2,\ldots,b_n\}$; $C=\{c_1,c_2,\ldots,c_n\}$ et $D=\{d_1,d_2,\ldots,d_n\}$.

Et tel que :

$C^*_A \sim C$ et $C^*_D \sim C$

$C^*_{B\cup C} \sim C\times K_2$ et $C^*_{\{ai,bi,ci,di\}}= a_i\, c_i\, d_i\, b_i\, a_i$ (un cycle de longueur 4), pour tout $i, 1 \leq i \leq n$.

Considérons à présent suivant la parité de n les deux parcours suivants :

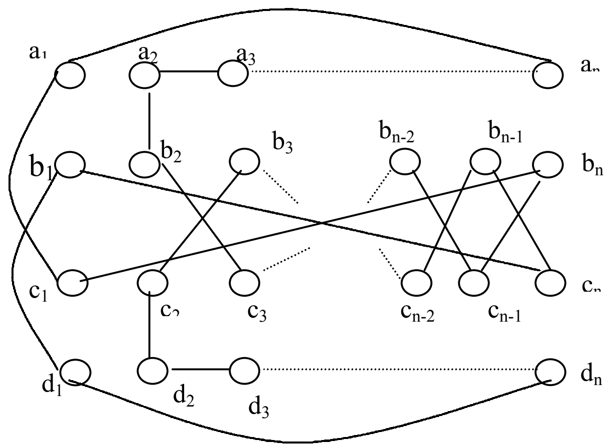
$a_2\, a_3\ldots a_n\, a_1\; c_1\; b_n\; c_{n-1}\; b_{n-2}\ldots\; c_4\; b_3\; c_2\; d_2\; d_3\; \ldots\; d_n\; d_1\; b_1 c_n\; b_{n-1} c_{n-2}\ldots\; b_4\; c_3\; b_2\; a_2$ (si n est impair)

$a_2\, a_3\ldots a_n\, a_1\, b_1 c_n\, b_{n-1} c_{n-2} \ldots c_4\, b_3\, c_2\, d_2\, d_3 \ldots d_n\, d_1\, c_1\, b_n\, c_{n-1}\, b_{n-2}\ldots\, c_3\, b_2\, a_2$ (si n est pair)

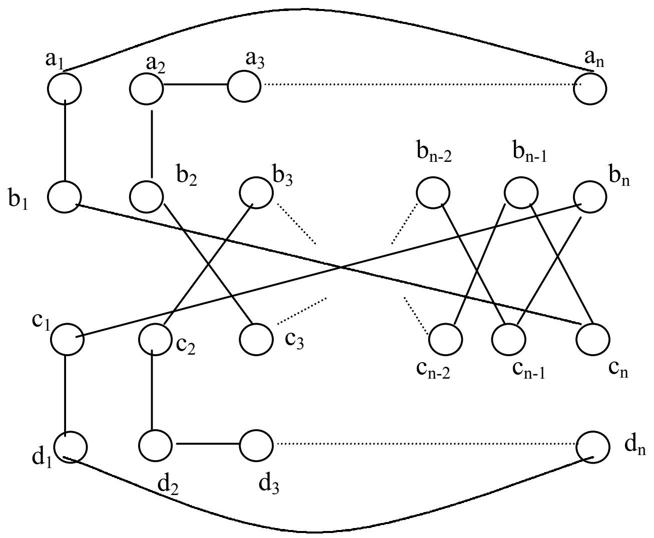
dans le cas pair on peut aussi considérer le parcours suivant :

$d_1c_1a_1b_1c_2a_2b_2\, d_2d_3\ldots d_ic_ia_ib_ic_{i+1}a_{i+1}b_{i+1}d_{i+1}d_{i+2}\ldots d_{n-1}c_{n-1}a_{n-1}b_{n-1}c_na_nb_nd_nd_1$. (avec $i \equiv 1[2]$)

($i=1,\ldots,n-1$)



Le parcours considéré dans le cas où n est impair.



<u>Le parcours considéré dans le cas où n est pair.</u>

Il est facile de vérifier que dans le cas pair (respectivement dans le cas impair), le cycle défini ci dessus passe par tous les sommets du graphe C^* ,et décrit donc un cycle hamiltonien. Ce qui démontre le lemme3.8.

<u>Preuve du théorème 3.7 :</u>

Comme G est un graphe hamiltonien, alors il possède un cycle hamiltonien C.
C^* étant hamiltonien l'hamiltonicité du graphe G^* est une conséquence directe du lemme3.8.

<u>Remarque :</u>

Dans le cas où n est pair (respectivement quand n est impair), il n'y a pas unicité du cycle hamiltonien. On peut même affirmer que le nombre de cycles hamiltoniens dans G^* est $\eta(G^*) \geq n.\eta(G)$; où $\eta(G)$ représente le nombre de cycles hamiltoniens dans G.

Nous concluons que :

La somme cartésienne de deux (0,2)- graphes hamiltoniens est un (0,2)- graphe hamiltonien.

Et que

Le joint d 'un (0,2)- graphe hamiltonien est un (0,2)- graphe hamiltonien.

Nous ne pouvons, en général, pas en dire autant pour le produit cartésien, néanmoins :

Le produit cartésien d 'un (0,2)- graphe hamiltonien appartenant à ***H*** par K_2 est un (0,2)- graphe hamiltonien.

Concernant l'hamiltonicité, il reste encore des problèmes sans réponse, notamment la conjecture suivante :

Conjecture de Barnette: Tout graphe 3- connexe planaire, biparti et cubique (dont tous les sommets sont de degré 3) est hamiltonien.

Nous savons que lorsque la condition de bipartition est supprimée, cette conjecture est fausse et que le plus petit graphe 3- connexe cubique et planaire non hamiltonien est d'ordre 38.

Holton, Manvel et McKay ([HMM85]) ont montré (en utilisant un ordinateur) que les graphes 3-connexes cubiques bipartis et planaires d 'ordre au plus 66 vérifient la conjecture.

REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES

[AFR99] M. E. K. Abderrezzak, E. Flandrin et Z. Ryjácek, Induced $S(K_{1,3})$ and hamiltonian cycles in the square of a graph. Discrete Math.207 (1999) 263-269.

[Aïn92] A.Aïnouche, An improvement of Fraisse's sufficient condition for hamiltonian graphs. J. Graph Theory 16 (1992) 529-543.

[Aïn95] A.Aïnouche, A common generalization of Chvàtal-Erdös and Fraisse's sufficient conditions for hamiltonian graphs. Discrete Math. 142 (1995) 1-19.

[Aïn98] A.Aïnouche, Quasi claw free graphs. Discrete Math. 179 (1998) 13-26.

[ABRV90] A.Aïnouche, H. J Broersma, S. Ronghua et H. J Veldman, Remarks on hamiltonian properties of claw free graphs. Ars combinat. 29C (1990) 110-121.

[AC85] A.Aïnouche et N. Christofides, Conditions for the existence of of hamiltonian circuits in graphs based on vertex degrees. J. London Math. Soc. (2) 32 (1985) 385-391.

[AK84] A.S. Asratyan et N. K. Khachatryan, Two theorems on hamiltonian graphs. Math. Zamethki 35 (1984) 55-61.

[AS82] J. Aubert et B. Schneider, Décomposition de la somme cartésienne d'u cycle et de l'union de deux cycles hamiltoniens en cycles hamiltoniens. Discrete Math. 38 (1982) 7-16.

[BBV00] D. Bauer, H. J. Broersma et H. J. Veldman, Not every 2- tough graph is hamiltonien. Discrete Math. 99 (2000) 317-321.

[BBVR89] D. Bauer, H.J. Broersma, H.J. Veldman et L. Rao, A ganaralization of a result of Häggkvist and Nicoghossian. J. Combinat. Theory B 47 (1989) 237-343.

[BBVV95] D. Bauer, H.J. Broersma, J. Van Den Heuvel et H.J. Veldman, Long cycles in graphs with prescripted toughness and minimum degree. Discrete Math. 141 (1995) 1-10.

[BFV91] D. Bauer, G. Fan et H. J. Veldman, Hamilton properties of graphs with large neighbourhood unions. Discrete Math. 96 (1991) 33-49.

[BHS90] D. Bauer, S. Hakimi et E. Schmeichel, Recognising tough graphs is NP-hard. Discrete Applied Math. 28 (1990) 191-195.

[BMSV90] D. Bauer, A. Morgana, E. Schmeichel et H. J. Veldman, Long cycles in graphs with large degree sum. Discrete Math. 79 (1990) 59-70.

[BP82] V. Batagelj et T. Pisanski, Hamiltonien cycles in the cartesian product of a tree and a cycle. Discrete Math. 37 (1982) 311-312.

[Bed91] P. Bedrossian, Forbidden subgraphs and minimum degree conditions for hamiltonicity. Thesis, Memphis State University, U.S.A (1991).

[BCS93] P. Bedrossian, G. Chen et R. H. Schelp, A generalization of Fan's condition for hamiltonicity, pancyclicity and hamiltonian connectdness. Discrete Math. 115 (1993) 39-50.

[Bei70] L.W. Beineke, Characterisation of derived graphs. J. Combinat. Theory 9 (1970) 129-135.

[BF87a] A. Benhocine et J. Fouquet, The Chvatal-Erdös condition and pancyclic line graphs. Discrete Math. 66 (1987) 21-26.

[Ber70] C. Berge, Graphes et hypergraphes. Dunod, Paris (1970).

[BT81] J. C. Bermond et C. Thomassen, Cycles in digraphs- A survey. J. Graph Theory 5 (1981) 1-43.

[BM98] A. Berrachedi et M. Mollard, On two problems about (0,2) graphs and interval regular graphs. Ars Combinat. 49 (1998) 303-309.

[Bon80] J. A. Bondy, Longest paths and cycles in graphs of high degree. Research report CORR 80-16, Departement of Combinatorics and Optimization, Faculty of Mathematics, University of Waterloo, Canada (1980).

[BC76] J.A. Bondy et V. Chvàtal, a method in graph theory. Discrete Math. 15 (1976) 111-136.

[BF87b] J. A. Bondy et G. Fan, Asufficient condition for dominating cycles. Discrete Math. 67 (1987) 205-208.

[BM76] J. A. Bondy et U. S. R. Murty, Graph theory with applications. Macmillan & Co. London (1976).

[Bro93] H. J. Broersma, A note on K_4 closures in hamiltonian graph theory. Discrete Math. 121 (1993) 19-23.

[BV90] H. J. Broersma et H. J. Veldman, Restriction on induced subgraphs ensuring hamiltonicity or pancyclicity of $K_{1,3}$ free graphs. In R. Bodendiek Ed. Comtemporary Methods in Graph Theory, (BI-Wiss.-Verl., Mannheim-Wien-Zürich, 1990) 181-194.

[BFR99] J. Brousek, O. Favaron et Z. Ryjácek, Forbidden Subgraphs, hamiltonicity and closure in claw free graphs. Discrete Math. 196 (1999) 29-50.

[BRS99] J. Brousek, Z. Ryjácek et I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs, stability and hamiltonicity. Discrete Math. 197/198 (1999) 143-155.

[CS01] X. Cai et W. E. Shreve, Pancyclicity mod k of claw free graphs and $K_{1,4}$ free graphs. Discrete Math. 230 (2001) 113-118.

[Cat] P. A. Catelin, A reduction method to find spanning eulerian subgraphs.

[CGP79] G. Chartrand, R. G. Gould et A. D. Polimeni,A note on locally connected and hamiltonian connected graphs. Israel J. Math. 33 (1979) 5-8.

[CS96] G. Chen et R. Schelp, Hamiltonicity for $K_{1,r}$ –free graphs. Journal of Graph Theory 21 (1996) 243-249.

[Che90] G. Chen, One sufficient condition for hamiltonian graphs.J. Graph Theory 14 (1990) 501-508.

[Chv72a] V. Chvàtal, On Hamilton's ideals. J. Combinat. Theory 12 (1972) 163-168.

[Chv72b] V. Chvàtal, Tough graphs and hamiltonian circuits. Discrete Math.38 (1972) 111-113.

[CE72] V. Chvàtal et P.Erdös, A note on hamiltonian circuits. Discrete Math. 2 (1972) 111-113.

[CCE85] B. N. Clark, C. J. Colburn et P. Erdös, A conjecture on dominating cycles. Congr. Numer. 47 (1985) 189-197.

[Cla81] L. Clark,Hamiltonian properties of connected, locally connected graphs. Cong. Numer. 32 (1981) 199-204.

[CG96] S. Curran et J.A Gallian, Hamiltonian cycles and paths in Cayley graphs and digraphs- A survey. Discrete Math. 156 (1996) 1-18.

[DKS97] J. S. Deogun, D. Kratsch et G. Steiner, 1- tough cocomparability graphs. Discrete Math. 170 (1997) 99-106.

[Dir52] G.A. Dirac, Some theorems on abstract graphs. Proc. London Math. Soc. 2 (1952) 69-81.

[DGJ80] D. A. Duffus, R. J. Gould et M. S. Jacobson, Forbidden subgraphs and the hamiltonian theme. Theory and Applications of Graphs (Kalamazoo, Michigan, 1980).

[Fan84] G. H. Fan, New sufficient condition for cycles in graphs. J. Combinat. Theory Ser. B 37 (1984) 221-227.

[FGJLL92] R. J. Faudree, R. J. Gould, M. S. Jacobson, L. Lesniak et T. E. Lindquester On a generalization of Dirac's theorem for $K_{1,3}$ free graphs. Periodica Math. Hungar. 24 (1992) 35-50.

[FGJS89] R.J. Faudree, R.J. Gould, M.S. Jacobson et R.H. Schelp, Neighbourhood unions and hamiltonian properties in graphs. J. Combinat. Theory B 46 (1989) 1-20.

[FGL88] R.J. Faudree, R.J. Gould et T. Lindquester, Hamiltonian properties and adjacency conditions in $K_{1,3}$ free graphs. Proceedings of the 6th international conference on theory and applications of graphs (Kalamazoo, Michigan, 1988).

[FGS87] R. J. Faudree, R. J. Gould et R. H. Schelp, Neighbourhood condition and edge disjoint hamiltonian cycles. Congr. Numer. 59 (1987) 55-68.

[FRS84] R. J. Faudree, C. C. Rousseau et R. H. Schelp, Edge disjoint hamiltonian cycles. Graph Theory with Applications to Algorithms and Computer Science (Kalamazoo, Michigan, 1984)

[FRS95] R. J. Faudree, Z. Ryjácek et I. Schiermeyer, Forbidden subgraphs and cycle extendibility. J. Comb. Math. Comp. 19 (1995) 109-128.

[FFLR01] O. Favaron, E. Flandrin, H. Li et Z. Ryjacek, Clique covering and degree conditions for hamiltonicity in claw free graphs. Discrete Math. 236 (2001) 65-80.

[Fla85] E. Flandrin, cycles hamiltoniens et dominants dans le carré d'un graphe connexe. Rapport L.R.I n° 208, Université Paris Sud, Orsay (1985).

[FFL91] E. Flandrin, J. L. Fouquet et H. Li, Hamiltonism in bipartite biclaw free graphs. Rapport L.R.I n° 693. Université Paris Sud, Orsay (1991).

[FJL88] E. Flandrin, H.A Jung et H. Li, Hamiltonism and claws. Rapport de recherche n° 398, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay (1988).

[FJL91] E. Flandrin, H.A Jung et H. Li, Hamiltonism, degree sums and neighbourhood intersections. Discrete Math. 90 (1991) 41-52.

[FL89] E. Flandrin et H. Li, Chvàtal-Erdös for hamiltonicity in 3-connected claw free graphs. Rapport L.R.I n° 500, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay (1989).

[FL88] E. Flandrin et H. Li, Hamiltonism and Neighbourhood intersections. Rapport de recherche n° 406, Université de Paris Sud, Centre d'Orsay (1988).

[Fle74] H. Fleischner, The square of every 2- connected graph is hamiltonian. J. Combinat. Theory B 16 (1974) 29-34.

[Fra86] P. Fraisse, A new sufficient condition for graphs. J. Graph Theory 10 (1986) 405-409.

[GH74] S. Goodman et S. Hedetniemi, Sufficient conditions for a graph to be hamiltonian. J. Combinat. Theory B 16 (1974) 175-180.

[Gou79] R.J Gould, Traceability in graphs. Doctoral Thesis, Western Michigan University (1979).

[GJ82] R. J. Gould et M. S. Jacobson, Forbidden subgraphs and hamiltonian properties in graphs. Discrete Math. 42 (1982) 189-196.

[GJ84] R. J. Gould et M. S. Jacobson, Forbidden subgraphs and hamiltonian properties in the square of a connected graph. J. Graph Theory 8 (1984) 147-154.

[Gra97] S. Gravier, Hamiltonicity of the cross product of two hamiltonian graphs. Discrete Math. 170 (1997) 253-257.

[Hav82] I. Havel, Semi paths in directed cubes. L. V. Quintas Ed, Int. Conf. Combinatorial Topics B 59 (1982).

[HN81] R. Häggkvist et G. G. Nicoghossian, A remark on hamiltonian cycles. J. Combinat. Theory B 30 (1981) 118-120.

[HV85] G. R. T. Hendry et W. Vogler, The square of a connected $S(K_{1,3})$ free graph is vertex pancyclic. J. Graph Theory 9 (1985) 535-537.

[Hoa95] C. T. Hoang, Hamiltonian degree conditionsfor though graphs. Discrete Math. 142 (1995) 121-139.

[HMM85] D. Holton, B. Manvel et B. D. McKay, Hamiltonian cycles in cubic 3-connected bipartite planar graphs, J. combinat. Theory B38 (1985) 279-297.

[HS00] P. Horàk et L. Stacho, A lower bound o the number of hamiltonian cycles. Discrete Math. 222 (2000) 275-280.

[Jac79] B. Jackson, Edge disjoint hamiltonian cycles in regular graphs of large degree. J. London Math. Soc. 19 (1979) 13-16.

[Jac80] B. Jackson, Hamiltonian cycles in regular 2- connected graphs. J. Combinat. Theory B 29 (1980) 27-46.

[Jha98] P. K. Jha, Kronecker products of paths and cycles : Decomposition, factorization and bi-pancyclicity. Discrete Math. 182 (1998) 153-167.

[Jun78] H. A. Jung, on a maximal circuits in finite graphs. Ann. Discrete Math. 3 (1978) 129-144.

[KK95] H. Kheddouci et M. Kouider. Produit de Kronecker de certains graphes par des cycles. 5eme colloque international de graphe combinatoire, Marseille Luminy (1995).

[KLM96] D. Kratsch, J. Lehel et H. Müller, Toughness, hamiltonicity and split graphs. Discrete Math. 150 (1996) 231-245.

[LR82] J. M. Laborde et S. P. Rao Hebbare, Another characterisation of hypercubes. Discrete Math. 39 (1982) 161-166.

[Lai98] H. J. Lai, Euleri subgraphs containing given vertices and hamiltonian line graphs. Discrete Math. 178 (1998) 93-107.

[Li91] M. Li, Pancyclism in claw free graphs. (Chinese, English Summery), J. Nanjing University. Nat. Sci. (Spec. Issue on Graph Theory) 27 (1991) 123-126.

[Li93] M. Li, Hamiltonian cycles in 3- connected claw free graphs, J. Graph Theory 17 (1993) 303-313.

[Li00] R. Li, A Fan type condition for claw free graphs to be hamiltonian. Discrete Math. 219 (2000) 195-205.

[LS00] R. Li et R. H. Schelp, Some hamiltonian properties of L_1- graphs. Discrete Math. 223 (2000) 207-216.

[LV90] M. Li et C. Virlouvet, Neighbourhood conditions for claw free hamiltonian graphs. Ars Combinat. 29A (1990) 109-116.

[Lin89] T. E. Lindquester, The effects of distance and Neighbourhood union conditions on hamiltonian properties in graphs. J. Graph Theory 13 (1989) 335-352.

[LTW86] Y. Liu, F. Tian et Z. Wu, Some results on longest paths and cycles in $K_{1,3}$ free graphs. J. Changsha Railway isnt. 4 (1984) 105-106.

[LW87] Y. Liu et Z. Wu, Hamiltonian cycles in 2-connected regular $K_{1,3}$ free graphs. Nanjing University, China 1987.

[Lu95] X. Lu, A hamiltonian game on $K_{n,n}$. Discrete Math. 142 (1995) 185-191.

[Mar93] L.R. Markus, Hamiltonian results in $K_{1,r}$–free graphs. Cong. Numer. 98 (1993) 143-149.

[MS84] M. M. Matthews et D. P. Sumner, Hamiltonian results in $K_{1,3}$ free graphs. J. Graph Theory 8 (1984) 139-146.

[MS85] M. M. Matthews et D. P. Sumner, Longest paths and cycles in $K_{1,3}$ free graphs. J. Graph Theory 9 (1985) 269-277.

[Mol81] M. Mollard, Thèse 3eme cycle, Université Joseph Fourier, Grenoble (1981).

[Mol94] M. Mollard, Table of (0,2) graphs of order less than 32. Rapport de recherche RR939-M-, Institut IMAG, Grenoble (Juin 1994).

[Mul79] H. M. Mulder, $(0,\lambda)$ graphs and n- cubes. Discrete Math. 28 (1979) 179-188.

[Mul80] H. M. Mulder, The interval fction of a graph. Mathematical Centre Tracts 132 Mathematisch Centrum, Amsterdam (1980).

[Nas71] C. St. J. A. Nash Williams, Edge disjoint hamiltonian circuits in graphs with vertices of large valency. Studies in Pure Mathematics (L. Mirsky, Ed.), Academic Press, London (1971) 157-183.

[OS79] D. J. Oberly et D. P. Sumner, Every conected, locally connected nontrivial graph with no induced claw is hamiltonian. J. Graph Theory 3 (1979) 351-356.

[Ore60] O. Ore, A note on hamiltonian circuits. Am. Math. Moth. 67 (1960) 55.

[Owe80] P. J. Owens, On regular graphs and hamiltonian circuits. J. Combinay. Theory B 28 (1980) 262-277.

[Plu92] M. D. Plummer, 2- extendibility and hamiltonicity in 2 classes of claw free graphs. Pre-print (1992).

[Pos62] L. Posà, A theorem concerning Hamilton lines. Magyar Tud. Akad. Mat. Kutato Int. Közl. 7 (1962) 225-226.

[Ryj95] Z. Ryjácek, Hamiltonicity in claw free graphs through induced bulls. Discrete Math. 140 (1995) 141-147.

[She77] J. Sheehan, Graphs with exactely one hamiltonian circuit. J. Graph Theory 1 (1977) 37-43.

[ST95] R. Shen et F. Tian, Neighbourhood unions and hamiltonicity of graphs. Discrete Math. 141 (1995) 213-225.

[She87] F. B. Shepherd, Claws. Thesis, University of Waterloo (1987).

[Tho78] A. Thomason, Hamiltonian cycles and uniquely colourable graphs, Ann. Discrete Math. 3 (1978) 259-268.

[Tho98] C. Thomassen, Independent dominating sets and a second hamiltonian cycle in regular graphs. J. Combinat. Theory B 72 (1998) 104-109.

[Xio98] L, Xiong, Edge degree conditions for subpancyclicity in line graphs. Discrete Math. 188 (1998) 225-232.

[Yok98] K. Yokomura, Adegree sum condition on hamiltonian cycles in balanced 3-partite graphs. Discrete Math. 178 (1998) 293-297.

[ZM94] M. S. Zeng et Z. K. Ming, Neighbourhood unions and hamiltonian properties. Discrete Math. 133 (1994) 319-324.

[Zha88] C. Q. Zhang, Hamiltonian cycles in claw- free graphs. J. Graph Theory 12 (1988) 209-216.

[Zha89] C. Q. Zhang, Cycles of given length in some claw free graphs. Discrete Math. 78 (1989) 307-313.

[ZLY85] Y. J. Zhu, Z. H. Liu et Z. G. Yu, An improvement of Jackson's result on hamiltonian cycles in 2- connected regular graphs. North Holland Mathematics Studies vol. 115 (1985) 237-247.