N° d'ordre **: 31** / 2002-M/M T


# UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE

## FACULTE DES SCIENCES MATHEMATIQUES PURES ET APPLIQUEES


Thèse présentée pour l'obtention du grade de Magister
EN MATHEMATIQUES

**Spécialité :** *Analyse - Equations aux dérivées partielles*


Par : **NOUAR Leïla**


**THEME**

# EXISTENCE GLOBALE ET COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE POUR UN SYSTEME D'EVOLUTION DEGENERE

Soutenue le 02/12/2002, devant le Jury suivant :

| | |
|---|---|
| Mr. D. TENIOU, Professeur, USTHB | Président |
| MR. Med. S. MOULAY, Professeur, USTHB | Directeur de thèse |
| Mr. K. LEMRABET, Professeur, | Examinateur |
| Mr. A. HEMINA, Maître de Conférences, USTHB | Examinateur |
| Mr. T. ALIZIANE, Chargé de Cours, USTHB | Examinateur |

## Remerciements

Je tiens à remercier M.TENIOU d'avoir accepté de présider le Jury de ma soutenance, ainsi que MM. LEMRABET, HEMINA et ALIZIANE d'avoir bien voulu faire partie du Jury.

Je voudrais remercier mon promoteur, M.MOULAY pour m'avoir orientée sur ce sujet , pour toute la documentation qu'il m'a fournie , et surtout pour la patience dont il a fait preuve à mon égard tout au long de la préparation de ce travail.

Un merci particulier à M.ALIZIANE et ma camarade Mlle HADJADJ Lila pour leur précieuse aide , leurs conseils et leur disponibilité.

Un grand merci à mes amis M.BENFERRAH, Mlle ARROUDJ Hassina et à tous ceux qui de près ou de loin m'ont aidée sur le plan mathématique, et m'ont soutenue moralement.

Je suis reconnaissante à ma famille et à mon fiancé de m'avoir soutenue et permis d'atteindre cette étape, ils ont été plus que patients et ont toujours su me "supporter" !

Enfin, toute ma gratitude va à la personne qui m'a fait découvrir les mathématiques, qui a su m'en faire apprécier la beauté, mon maître depuis toujours : Mon Papa.

Je dédie ce travail à la mémoire de Souad FELLOUS.

# Contents

# Préface

## Introduction

Ces vingts dernières années, les systèmes de réaction-diffusion se sont vus accorder un intérêt particulier de la part des chercheurs en EDP , d'une part parcequ'ils modélisent de nombreux phénomènes rencontrés dans divers branches, telles la physique, la biologie, la chimie, la dynamique des populations, etc... et d'autre part à cause des spécifités particulières sur le plan mathématique, imprévisibles si l'étude ne portait que sur des systèmes sans termes de réaction ou, inversement, sans termes de diffusion spatiale.

Plusieurs articles ont traité de la résolution de ces systèmes ainsi que du comportement asymptotique de leurs solutions. Nous en citerons quelques uns à la fin de ce chapitre.

L'intérêt des résultats obtenus se situe dans le fait qu'ils peuvent servir à la prévision de l'évolution dans le temps de certains phénomènes, par exemple la propagation de maladies infectieuses au sein de populations animales.

Dans le présent travail, nous nous intéressons justement à l'étude mathématique d'un système de réaction-diffusion modélisant l'évolution spatio-temporelle d'une maladie au sein d'une population isolée. Le système étudié est un cas plus général que celui traité par M.M Aliziane et Langlais dans leur article intitulé : "Existence globale et comportement asymptotique pour un système d'évolution dégénéré" [AL].

Le contenu de cette thèse s'organise comme suit :

*Nous parlerons de l'équation de la chaleur, et de modélisation mathématique en dynamique des populations . Il s'agit surtout de donner une idée sur les étapes suivies lors de la modélisation d'un phénomène physique.

*Dans le Chapitre 1, nous préciserons toutes les notations utilisées dans la suite, et nous rappellerons certaines définitions, et quelques propositions de l'analyse élémentaire. Puis nous ferons un rappel sur les résultats connus pour des équations linéaires et quasilinéaires paraboliques, pour lesquelles nous expliciterons certains points des démonstrations.

*Dans le Chapitre 2, nous énoncerons le problème à étudier et les résultats que nous voulons démontrer .

*C'est dans le Chapitre 3 que le travail commence : le système étant dégénéré, l'idée est de se ramener à une suite de problèmes non dégénérés qui approchent le système initial. Donc il nous faudra introduire un problème auxilliaire adéquat : c'est ce que nous ferons dans cette partie.

*Dans le chapitre suivant, nous utiliserons les résultats rappelés dans le Chapitre 1 pour démontrer l'existence d'une unique solution au problème approché.

*Les estimations établies dans le Chapitre 4 serviront à démontrer dans le Chapitre 5 l'existence d'une solution au problème initial, tandis que l'unicité de la solution sera étudiée dans le Chapitre 6.

# Equation de la chaleur :

Soit $Q$ un domaine de $\mathbb{R}^3$, et un corps dans $Q$ de densité $\rho(x) > 0$ et de capacité calorifique $c(x) > 0$. On désignera par $k(x) > 0$ la conductibilité thermique.

Si on note par $u(x,t)$ la température en $x \in Q$ à l'instant $t$, on se propose de déterminer $u$ pour $t > t_0$ connaissant la valeur de $u(x,t)$ en $t = t_0$ ( par exemple $u(x,t_0) = \psi_0(x)$ pour $x \in Q$ ) .

Soit $Q'$ un sous-domaine de $Q$ . La chaleur entrant dans $Q'$ à travers $\partial Q'$ entre les instants $t_1$ et $t_2$ ( avec $t_0 \leqslant t_1 < t_2$ ) est , selon une loi de Newton :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} dS$$

Si $Q$ contient des sources chauffantes de densité $f(x,t)$ connue, alors on rajoute le terme

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x,t) dx$$

L'équation des échanges de chaleur de $Q'$ s'écrit :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\partial Q'} k(x) \frac{\partial u}{\partial \eta} dS + \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{Q'} f(x,t) dx = \int_{Q'} c(x)\rho(x) \left[ u(x,t_2) - u(x,t_1) \right] dx$$

Par la formule d'Ostrogradski, on obtient :

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \int \left[ c(x)\rho(x) \frac{\partial u}{\partial t} - div(k(x)\nabla u) - f(x,t) \right] dx = 0$$

Si la fonction à intégrer est continue dans $Q$ , comme $t_1$ , $t_2$ et $Q'$ sont arbitraires, il résulte de l'équation précédente :

$$c(x)\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} - div(k(x)\nabla u) = f(x,t) \text{ pour } x \in Q \text{ et } t > t_0 \,.$$

Lorsque $c(x)$, $\rho(x)$ et $k(x)$ sont constantes, on a l"'équation de la chaleur" :

$$\frac{1}{a^2}u_t - \Delta u = \frac{1}{c\rho}f(x,t) \text{ avec } a^2 = \frac{k}{c\rho}$$

(On peut trouver cet exemple dans [M])

# Dynamique des populations

1. **Modèle non structuré** :

Soit à étudier l'évolution au cours du temps d'une population "théorique".On désigne par $P(t)$ la densité de cette population à l'instant $t$ . Sa dynamique est alors modélisée par une équation de la forme : $P'(t) = F(P(t), t)$ , où $F$ dépend à la fois de la démographie de la population (fertilité-mortalité) et de ses fluctuations spatiales ( immigration , émigration, dispersion d'une partie de la population).

En supposant que $F$ ne dépend que des fluctuations démographiques et que la population totale n'est pas nulle, l'équation précédente s'écrit

$$\begin{cases} P'(t) = f(P(t), t) = g(P, t)P \\ P(0) = P_0 \end{cases}$$

avec

$$\begin{aligned} g(P, t) &= \beta(P, t) - \mu(P, t) \\ &= taux\ de\ natalit\acute{e} - taux\ de\ mortalit\acute{e} \\ &= taux\ \ de\ croissance\ \ intrins\grave{e}que \end{aligned}$$

On fait les hypothèses suivantes :

$$\begin{aligned} 0 &\leqslant \mu(P, t) \quad \text{pour } P > 0 \\ 0 &\leqslant \beta(P, t)) \leqslant \beta_{\max} < +\infty \ \text{ pour } P > 0 \end{aligned}$$

Pour différentes fonctions $\beta$ et $\mu$, on obtient différents modèles. En voici quelques exemples classiques :

– *Modèle à croissance logistique :*

Danc ce cas, le taux de natalité diminue lorsque la taille de la population augmente, tendis que la mortalité augmente avec la population. Ceci signifie que le milieu naturel a une capacité d'accueil limitée (par exemple dans le cas où la nourriture n'est pas assez abondante pour le nombre d'individus).

– *Modèle de Allee 1950 :*

Dans ce cas la natalité et la mortalité dépendent toutes deux de la population mais pas du temps. Le taux de croissance $g(P)$ est faible dans les deux cas suivants :

- Si la taille de la population est petite, car la fertilité est faible à faible densité.

- Si la taille de la population est grande, car alors la mortalité qui est dépendante de la densité croît avec la taille de la population.

– *Modèle de Malthus1798 :*

C'est un modèle à croissance exponentielle, $\beta$ et $\mu$ sont indépendants de $P$ et de $t$, donc $g(P,t) = \beta - \mu = \lambda$ où $\lambda$ est une constante. Notre équation s'écrit $P'(t) = \lambda P$ avec condition initiale $P(0) = P_0$. La solution est $P(t) = P_0\, e^{\lambda t}$ .

– *Modèle de Verhulst 1838 :*

Ici $\beta(P,t) = b$ est une constante, et $\mu(P,t) = m + \dfrac{rp}{K}$ où $r = b - m, \quad r > 0$, ce qui donne pour équation

$$P'(t) = (r - \frac{r}{K}P)P$$

Ce type de modèle est aussi appelé modèle logistique ou (r-k)modèle. Si on a une population de petite taille alors $f(P) = rP - \frac{r}{K}P^2$ est équivalent à $rP$ et on retrouve un modèle de type malthusien à faible densité. Mais dans le cas d'une population de grande taille, $\frac{r}{K}P^2$ joue un rôle de "terme frein", c'est un terme d'auto-régulation (ceci traduit , par exemple, le fait qu'il y a une limitation des ressources naturelles ou des compétitions intra-spécifiques).

La résolution de l'équation

$$P' = rP(1 - \frac{P}{K}), \quad \text{avec} \quad P(0) = P_0$$

nous donne

$$P(t) = \frac{KP_0}{P_0 + (K - P_0)e^{-rt}}$$

Lorsque $P_0 > 0$, la population tend vers $K$ quand $t \longrightarrow +\infty$. $K$ représente la "capacité d'accueil du milieu", plus $K$ est grand , plus le milieu est favorable à la population.

2. **Modèle avec structuration spatiale :**

Soit toujours une population théorique de densité $P$ dépendant du temps et de l'espace , i.e : $P = P(x,t)$ avec $x \in \mathbb{R}^n$, $t \in \mathbb{R}^+$.

On introduit un domaine fermé borné $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ et on note $q(P,x,t)$ le flux de la population à l'instant $t$ dans $\Omega$.

Soit $f$ le taux de croissance démographique :

$$f = f(P,x,t) = [\beta(P,x,t) - \mu(P,x,t)]$$

Soit $\omega$ un sous-ensemble ouvert de $\Omega$, la loi de conservation nous donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\int_\omega P(x,t)dx &= -flux \;\; de\, la\;\, population + (fertilit\acute{e}/mortalit\acute{e}) \\ &= -\int_{\partial\omega} q(P,x,t)d\sigma + \int_\omega f(P,x,t)dx \end{aligned}$$

Par le théorème de la divergence ( ou formule de Green ) on obtient :

$$\int_\omega \frac{\partial P}{\partial t}(x,t)dx = -\int_\omega divq\ dx = \int_\omega f(P,x,t)dx \quad , \quad \text{pour tout } \omega \subset \Omega$$

ce qui équivaut à $\dfrac{\partial P}{\partial t} = -divq + f$ .

– *Quelques exemples d'équations avec différents flux :*

a) Equation de Fokker-Planck : $q(P,x,t) = -d\nabla P$, d'où l'équation suivante :

$$\frac{\partial P}{\partial t} - d\Delta P = f(P,x,t)$$

b) Equation de Fischer (1935) : $q(P,x,t) = -d\nabla P$ et $f(P,x,t) = rP(1-\dfrac{P}{K})$.

On obtient l'équation :

$$\frac{\partial P}{\partial t} - d\Delta P = rP\left[1-\frac{P}{K}\right]$$

(On pourra trouver cet exemple dans Okubo 1980, et Kolmogorov, Pertrovskii et Piskounov, 1937)

c) Si $q(P,x,t) = -D(P)\nabla_x P$ avec $D(P) = dP^{m-1}Id$ , m>0 , d>0, alors l'équation est :

$$P' - div(P^{m-1}\nabla P) = f(P) \quad \text{avec} \quad m > 0$$

Ce problème est dégénéré en $P = 0$ si $n > 0$.

– Pour tous ces modèles, on pose $P(x,0) = P_0(x) \geqslant 0$ comme condition initiale, et l'une des conditions aux limites suivantes :

$$\begin{cases} P(x,t) = 0 \ , \ x \in \partial\Omega \ , \ t > 0 \ : \text{Conditions de Dirichlet homogènes.} \\ \dfrac{\partial P}{\partial \eta}(x,t) = 0 \ : \ \text{Conditions de Neumann.} \\ \alpha\dfrac{\partial P}{\partial \eta}(x,t) + (1-\alpha)P(x,t) = 0 \ , \ 0 \leqslant \alpha < 1 : \ \text{Conditions mixtes.} \end{cases}$$

Les conditions homogènes de Dirichlet peuvent être imposées dans le cas d'un domaine à bords inhospitaliers, quant à celles de Neumann, on les retrouve dans le cas de populations isolées.

3. **Modèles de type SEIRS :**

Il s'agit de modèles obtenus lors de l'étude de la propagation d'une épidémie où la population considérée est subdivisée en quatre classes. A la suite d'un contact "efficace", un individu infecté passe par différents états sanitaires successifs.

La population est divisée en 4 classes :

S : la classe des individus sensibles (non-contaminés)

E : la classe des individus exposés (infectés par la maladie mais non contagieux)

I : la classe des individus infectieux (capables de transmettre la maladie aux sensibles)

R : la classe des immunisés, des retirés ou des morts suite de la maladie (de manière générale , ce sont ceux qui n'interviennent plus dans la propagation de l'épidémie)

Nous nous interessons à un modèle où le stade "exposé" peut être suivie d'une immunisation complète.

Le passage entre les différentes classes est représenté par le schéma suivant :

On note par :

$$S = S(t) \geqslant 0, \quad E = E(t) \geqslant 0, \quad I = I(t) \geqslant 0, \quad R = R(t) \geqslant 0$$

les densités spécifiques dans chaque classe, et on définit les différents paramètres biologiques :

* $\mu$ : taux de mortalité naturelle en l'absence de l'épidémie.

* $\beta$ : taux de fertilité naturelle en l'absence de l'épidémie.

$\mu$ et $\beta$ ne dépendent que de la population totale, ce sont des paramètres de démographie naturelle non influencée par l'épidémie.

* $\beta_Z$ avec $Z = S, E, I, R$ sont les taux de natalité spécifiques dans chaque classe ;

$0 \leqslant p_Z \leqslant 1$ avec $Z = E, I, R$ représente la proportion de petits sensibles nés de parents exposés, infectés et retirés respectivement ;

$0 \leqslant q_{E,}q_I, q_R \leqslant 1$ est la proportion de petits exposés (resp. infectés et retirés) nés de parents exposés (resp. infectés et retirés).

Ces paramètres représentent la transmission "verticale" de la maladie, c'est-à-dire la transmission à la naissance.

* $\gamma$ : incidence ou nombre de nouveaux exposés par unité de temps.

* $(1 - \pi)$ : pourcentage d'immunisation après le stade "exposé".

Ces paramètres interviennent dans la transmission dite " horizontale" , c'est-à-dire le passage de la maladie entre individus de différentes classes.

* $\varepsilon > 0$ : taux de mortalité dû à la maladie.

* $\lambda > 0$ : taux de sortie du stade exposé.

* $c \geqslant 0$ et $e \geqslant 0$ sont respectivement le taux de guérison après le stade infectieux, et la perte d'immunité après le stade retiré.

Si on étudie uniquement la propagation temporelle de l'épidémie (i.e : son évolution au cours du temps ) on obtient le système d'équations differentielles ordinaires :

$$\begin{cases} S' = \beta_S S + p_E \beta_E E + p_I \beta_I I - \mu S - \gamma + eR \\ E' = q_E \beta_E E - \mu + \gamma - \lambda E \\ I' = q_I \beta_I I - \mu I + \pi \lambda E - cI - \varepsilon I \\ R' = q_R \beta_R R - \mu R + (1-\pi)\lambda E + cI - eR \end{cases}$$

Si la densité de chaque classe d'individus dépend à la fois du temps et de l'espace :

$$S = S(x,t)\ ,\ E = E(x,t)\ ,\ I = I(x,t)\ ,\ R = R(x,t)$$

alors l'évolution spatio-temporelle de la population est décrite par le système d'EDP :

$$\begin{cases} S' = d_S \Delta S + \beta_S S + p_E \beta_E E + p_I \beta_I I + p_R \beta_R R - \mu S - \gamma(S,E,I,R) + eR. \\ E' = d_E \Delta E + q_E \beta_E E - \mu E + \gamma(S,E,I,R) - \lambda E \\ I' = d_I \Delta I + q_I \beta_I I - \mu I + \pi \lambda E - cI - \varepsilon I \\ R' = d_R \Delta R + q_R \beta_R R - \mu R + (1-\pi)\lambda E + cI - eR \end{cases}$$

avec comme conditions initiales :

$$S(x,o) = S_0(x), \quad E(x,0) = E_0(x), \quad I(x,0) = I_0(x), \quad R(x,0) = R_0(x)$$

et les conditions aux limites :

$$\frac{\partial S}{\partial \eta} = \frac{\partial E}{\partial \eta} = \frac{\partial I}{\partial \eta} = \frac{\partial R}{\partial \eta} = 0 \qquad \text{sur } \partial\Omega \times \mathbb{R}^+$$

4. **Différentes fonctions d'incidence** : La fonction d'incidence représente le nombre d'individus sensibles qui vont devenir infectés au cours d'un pas de temps.

En général, elle prend la forme suivante : $\gamma(S,E,I,R) = \rho ba\dfrac{I}{P}S$ où :

– $a$ est le nombre de rencontres au cours d'un pas de temps pour un individu.

– $\frac{I}{P}$ est la probabilité qu'un individu rencontre un infecté (P=S+E+I+R).

– $b$ est la probabilite pour que le virus passe d'un individu infecté à un individu sensible.

– $\rho$ est la probabilité que le virus , une fois transmis , se développe dans S.

On apelle le terme $\rho ba\frac{I}{P}$ la force d'infection.

-Dans un modèle où la population étudiée est homogène , le nombre de rencontres est proportionnel à la taille de la population : $a = c.P$ ; la fonction d'incidence est donc $\gamma(S,E,I,R) = \gamma SI$, on a ici affaire à une ”loi d'action de masse”.

-Dans le cas d'une population hétérogène, un individu rencontre toujours le même nombre d'individus, quelleque soit la taille de la population totale : $a = c$; la fonction d'incidence s'écrit alors : $\gamma(S,E,I,R) = \dfrac{SI}{P}$ ; on a là affaire à un ”mélange proportionné” .

-Autre fonction plus générale : $\gamma(S,E,I,R) = \gamma\dfrac{S^qI^p}{I+\alpha I^r}$.

On pourra retrouver toutes ces informations avec plus de détails dans la thèse de doctorat de Christelle Supo et ses références [S] .

## Quelques travaux sur le sujet

Parmi les articles traitant des systèmes de Réaction-Diffusion, ceux de L.Maddalena [M1,M2] concernant l'existence et les propriétés qualitatives des solutions de systèmes non linéaires paraboliques (1984,1987), celui de M.Fila [Mf] sur la majoration des solutions globales d'équations de diffusion non linéaire (1992). En 1991, E.H.Laamri étudie l'existence de solutions globales pour un système de réaction-diffusion parabolique fortement non linéaire et leur non-existence dans un cas limite.

Fitzgibbon, Morgan et Waggoner s'interessent à un système quasilinéaire modélisant la propagation d'une maladie infectieuse dans un article datant de 1992 [FMW]. Ils étudient le comportement asymptotique du système et obtiennent des résultats de convergence asymptotique. Dans un autre article [FMM], Fitzgibbon, Martin et Morgan étudient un modèle d'épidémie se propageant au sein de deux populations par un mécanisme d' "entrecroisement".

MM.Moulay et Aliziane [MA1] apportent une contribution à l'étude de la régularité des solutions d'équations du type $u_t - \Delta\varphi(u) = f$, leurs résultats généralisent ceux établis pour l'équation des milieux poreux $u_t - \Delta u^m = f, u \geqslant 0, m > 1$. Plus récent, un article des mêmes auteurs [MA2] s'intéresse à l'étude mathématique d'un système dégénéré pour un modèle épidémiologique de type SIS.

# Chapter 1
# Rappels Mathématiques

### 1.0.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous préciserons les notations et nous rappellerons des définitions et quelques propositions utilisées dans toute la suite.

Dans la plupart des articles traitant des équations paraboliques , les résultats sur l'existence locale sont considérés comme étant classiques et découlant de résultats standard de la théorie parabolique abstraite. Cependant ces résultats ne s'appliquent jamais directement aux problèmes étudiés. En fait, il faut le plus souvent passer par une adaptation des démonstrations, adaptation propre à chaque cas. Le principe de la démonstration étant toujours le même, les auteurs n'exposent jamais le détail de celle-ci.

C'est pourquoi nous avons jugé utile de donner une démonstration détaillée d'un théorème d'existence locale dans le cas particulier d'une équation parabolique non dégénérée de la forme $u_t - \Delta\varphi(u) = f(u)$ , afin d'illustrer l'utilisation du principe de Leray-Schauder , outil clé de la démonstration et cité par tous les auteurs, puis dans le cas d'un système afin d'appliquer le résultat directement aux problèmes approchés du **Chapitre3**. Nous espérons que cette partie pourra servir aux étudiants qui abordent les EDP , principalement paraboliques.

## 1.1 Notations-Terminologie

Bien que nous utilisions les notations standard de l'analyse, nous allons en rappeler les principales.

$\mathbb{R}^n$ désigne l'espace euclidien de dimension n , et dont l'élément générique est noté $x = (x_1, x_2..., x_{n)}$.

$\Omega$ sera une partie ouverte et bornée de $\mathbb{R}^n$ , à bord $\partial\Omega = S$ régulier ou encore "lisse par morceaux", on entend par là un domaine $\Omega$ dont l'adhérence peut être représenté sous la forme $\overline{\Omega} = \overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 \cup ... \cup \overline{\Omega}_N$ , chaque $\overline{\Omega}_k$ pouvant être représenté homéomorphiquement sur la boule unité à l'aide de fonctions $z_i^k(x), i = 1...n (k = 1...N)$ continues et lipschitziennes, et telles que les jacobiens $|\dfrac{\partial z^k}{\partial x}|$ soient supérieurs à une constante strictement positive. On dira que $S \in H^{1+\beta}$ (resp. $H^{2+\beta}$) s'il existe $\rho > 0$ tel que $S \cap B(x_0, \rho)$ où $x_0$ est un point quelconque de $S$, soit une surface connexe dont l'équation (dans un système cartésien de coordonées locales $(y_1, ..., y_n)$ ) ait la forme $y_n = \omega(y_1, ..., y_{n-1})$ avec $\omega \in H^{1+\beta}(\overline{D})$ (resp. $H^{2+\beta}(\overline{D})$ ) et $\overline{D}$ la projection de la $S \cap B(x_0, \rho)$ sur l'hyperplan $y_n = 0$ (voir la section suivante pour la définition des espaces $H^{l+\beta}(\overline{D})$) .

$\nabla$ désigne l'opérateur du gradient, et $\Delta$ le laplacien.

$L^p(\Omega)$ désigne l'espace de Banach des fonctions mesurables définies sur $\Omega$ , de puissance p intégrable sur $\Omega$, muni de la norme :

$$\|f\|_{p,\Omega} = \int_{\Omega} |f(x)|^p \, dx$$

tandis que $H^p(\Omega)$ représente l'espace des éléments de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées généralisées jusqu'à l'ordre p inclus, sont encore dans $L^2(\Omega)$.

## 1.2 Définitions

Dans les hypothèses de notre problème, nous retrouverons la condition ”localement liptschitzienne” pour les fonctions définissant le second membre des équations, et l'appartenance des fonctions qui définissent le problème à des espaces de Hölder. C'est pourquoi nous allons donner quelques définitions rappelant ces notions et quelques résultats les concernant.

**Définition 1.3.1 :** On dira que la fonction $f(x)$ définie sur $\mathbb{R}^n$ est localement lipschitzienne (ou lipschitzienne sur les bornés de $\mathbb{R}^n$ ) si

$$\forall M > 0, \exists k(M) > 0/ \ |f(x) - f(y)| \leqslant k(M) \ , \forall x, y \in B(0, M).$$

Si la constante $k(M)$ est indépendante de $M$ , on dira que $f$ est lipschitzienne (ou encore globalement lipschitzienne).

**Définition 1.3.2 :** On dit qu'une fonction $u(x)$ définie sur $\overline{\Omega}$ satisfait une condition de Hölder en $x$, d'exposant $\alpha, \alpha \in (0,1)$ et de constante de Hölder $\langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)}$ dans $\overline{\Omega}$ si

$$\sup_{x,x' \in \Omega; |x-x'| \leqslant \rho_0} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^{\alpha}} = \langle u \rangle_{\Omega}^{(\alpha)} \text{ est finie}$$

$\rho_0$ étant un nombre positif. Cette définition n'est valable que dans le cas d'un domaine $\Omega$ à bord ”pas trop mauvais”, par exemple régulier par morceaux sans points doubles.

Soit l un nombre non entier positif et $\alpha \in (0,1)$ :

– $H^l(\overline{\Omega})$ désigne l'espace de Banach dont les éléments sont les fonctions $u(x)$ continues dans $\Omega$ et possédant dans $\overline{\Omega}$ des dérivées d'ordre $k \leqslant [l]$ pour lesquelles la quantité

$$|u|_{\Omega}^{(l)} = \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_{\Omega}^{(j)}$$

est finie. Cette inégalité définit la norme de $H^l(\overline{\Omega})$.

Nous détaillons le membre de droite dans les trois cas suivants :

– pour l=$\alpha$ : $$|u|_{\Omega}^{(\alpha)} = \langle u\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} + \max_{\Omega}|u|$$

– pour l=1+$\alpha$ : $$|u|_{\Omega}^{(1+\alpha)} = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} + \max_{\Omega}|u| + \sum_{i=1}^{n}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$$

– pour l=2+$\alpha$ : $$|u|_{\Omega}^{(2+\alpha)} = \sum_{i,j=1}^{n}\left\langle\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right\rangle_{\Omega}^{(\alpha)} + \max_{\Omega}|u| + \sum_{i=1}^{n}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right| + \sum_{i,j=1}^{n}\max_{\Omega}\left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}\right|$$

$H^l(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions appartenant à $H^l(\overline{\Omega'})$ pour toute partie fermée $\overline{\Omega'} \subset \Omega$.

–$H^{l,\frac{l}{2}}(\overline{Q_T})$ est l'espace de Banach des fonctions $u(x,t)$ continues dans $\overline{Q_T}$ possédant des dérivées de la forme $D_t^r D_x^s$ pour 2r+s<l , continues dans $\overline{Q_T}$ et dont la norme est définie par

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u\rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]}\langle u\rangle_{Q_T}^{(j)}$$

Ce qui donne dans les trois cas suivants :

– l=$\alpha$ : $|u|_{Q_T}^{(\alpha)} = \langle u\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \langle u\rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} + \max_{Q_T}|u|$

– l=1+$\alpha$ : $$|u|_{Q_T}^{(1+\alpha)} = \sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n}\left\langle\frac{\partial u}{\partial x_i}\right\rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} + \max_{Q_T}|u| + \sum_{i=1}^{n}\max_{Q_T}\left|\frac{\partial u}{\partial x_i}\right|$$

– l=2+$\alpha$ : $|u|_{Q_T}^{(2+\alpha)} = \langle \partial_t u \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{t,Q_T}^{(1+\alpha/2)}$

$$+ \sum_{i,j=1}^{n} \left\langle \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right\rangle_{t,Q_T}^{(\alpha/2)} + \max_{Q_T} |\partial_t u|$$
$$+ \langle \partial_t u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} + \sum_{i=1}^{n} \left\langle \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)}$$
$$+ \max_{Q_T} |u| + \sum_{i=1}^{n} \max_{Q_T} \left| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right| + \sum_{i,j=1}^{n} \max_{\Omega} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} \right|$$

Précisons que

$$\langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x',t) \in \overline{Q_T};|x-x'| \leqslant \rho_0} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}}$$

$$\langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha)} = \sup_{(x,t),(x,t') \in \overline{Q_T};|t-t'| \leqslant \rho_0} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha}}$$

**Remarque :**Les normes définies ci-dessus dépendent toutes de $\rho_0$, mais pour différents $\rho_0 > 0$, elles sont équivalentes, par conséquent, leur dépendance par rapport à $\rho_0$ ne sera plus mentionnée.

Tous les espaces décrits sont complets.

## 1.3 Propositions

Nous aurons à utiliser plusieurs inégalités connues mais sous différentes formes, il est donc utile de rappeler les versions qui nous intéressent pour faciliter la lecture des chapitres suivants.

**Inétgalité de Young :** Pour deux nombres réels quelconques $a$ et $b$ , et $p$ ,$q$ tels que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$, on a :

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p}+\frac{b^q}{q}$$

Mais nous utiliserons plus souvent une autre inégalité de Young , à laquelle nons nous réfèrerons par $(Y)$ :

$$ab \leqslant \left(\frac{1}{\varepsilon}\right)^{p-1}\frac{a^p}{p}+\varepsilon\frac{b^q}{q}, \varepsilon>0$$

**Inétgalité de Gronwall sous forme intégrale :** Soit $\xi$ une fonction définie et intégrable sur $[0,T]$ , telle que $\xi(t)\geqslant 0$ et

$$\text{pour presque tout } t\in[0,T]\text{ , }\xi(t)\leqslant C_1\int_0^t \xi(s)ds+C_2$$

$C_1,C_2$ étant deux constantes supérieures ou égales à zéro.

Alors

$$\xi(t)\leqslant C_2\left(1+C_1te^{C_1t}\right)\qquad\text{presque partout sur }[0,T]$$

En particulier si

$$\xi(t)\leqslant C_1\int_0^t \xi(s)ds\text{ ,}\quad\text{pour presque tout } t\in[0,T]$$

alors

$$\xi(t)=0\qquad\text{presque partout sur }[0,T]$$

**Théorème de la convergence dominée de Lebesgue :**

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$ . On suppose que

a) $f_n(x)\longrightarrow f(x)$ presque partout sur $\Omega$

b) Il existe $g \in L^1(\Omega)$ tel que $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ presque partout sur $\Omega$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

Alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad et \quad \|f_n - f\|_{1,\Omega} \longrightarrow 0$$

**Principe de Leray-Schauder :**

Soit $H$ un espace de Banach et $\overline{\mathcal{M}}$ l'adhérence d'un ensemble ouvert connexe borné $\mathcal{M}$ de $H$.

Soient $\mathcal{E}$ le produit topologique de $H$ par le segment $[0 \leqslant \tau \leqslant 1]$ et $\overline{\mathcal{M}_1} = \overline{\mathcal{M}} \times [0,1]$. L'équation $u = \Phi(u, \tau)$ admet au moins une solution dans $\mathcal{M}$ pour tous les $\tau \in [0,1]$ si les conditions suivantes sont remplies :

**1/** La transformation $\Phi(v, \tau)$ est définie et complètement continue sur $\overline{\mathcal{M}_1}$.

**2/** La transformation $\Phi(v, \tau)$ est uniformément continue par rapport à $\tau$ sur $\overline{\mathcal{M}_1}$.

**3/** La frontière du domaine $\mathcal{M}$ ne contient pas de solutioon de l'équation $u = \Phi(u, \tau)$ pour $\tau \in [0,1]$.

**4/** Pour $\tau = 0$, l'équation $u = \Phi(u, \tau)$ admet un nombre fini de solutions dans $\mathcal{M}$ et leur indice total est différent de zéro.

## 1.4 Théorie parabolique

Le résultat rappelé dans cette partie concerne les équations quasilinéaires paraboliques. Il s'agit d'un théorème d'existence pour lequel nous donnerons les grandes lignes de la démonstration. Ensuite, nous énoncerons et démontrerons un théorème d'existence locale après avoir affaibli les hypothèses sur le second membre.

### 1.4.1 Cas d'une équation quasilinéaire non dégénérée

Considérons le problème :

$$(\mathrm{P}_0)\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f(u) & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u_{|t=0} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ \dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial\eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

Une fonction $u$ dans $C^{2,1}(Q_T)$ qui vérifie ces trois équations est appelée solution classique du problème $(\mathrm{P}_0)$ .

**Remarque :** Si on choisit une condition initiale $u_{|t=0} = u_0$ non nulle, on peut se ramener au problème $(\mathrm{P}_0)$ en posant $u = v - u_0$.

Nous ferons les hypothèses suivantes sur les fonctions qui définissent le problème :

- $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ est une fonction de classe $C^3$ sur $\mathbb{R}$, telle que et $\varphi'(s) > 0$ si $s > 0$.

- f est une fonction lipschitzienne sur $\mathbb{R}$.

Le problème $(\mathrm{P}_0)$ s'écrit sous forme divergentielle comme suit :

$$(\mathrm{P}_1)\begin{cases} u_t - \varphi'(u)\Delta u + b(u,\nabla u) = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ u_{|t=0} = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ \dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial\eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

avec $b(u,p) = -\varphi''(u)|p|^2 - f(u)$.

**<u>Théorème 1</u> :** *Soient $M > 0$ et $T > 0$ deux nombres réels fixés. Supposons que les conditions suivantes soient vérifiées, pour des constantes positives $\mu, \mu_1, \nu$, et $c_i \geqslant 0$ :*

*a/* $0 \leqslant \varphi'(u) \leqslant \mu_1 \quad \forall u \in R$

$-ub(u,p) \leqslant c_0 p^2 + c_1 u^2 + c_2 \quad \forall u, p \in R.$

$$\text{b/ } \left.\begin{array}{l} \nu \leqslant \varphi'(u) \leqslant \mu \\ |\varphi''(u)| \leqslant \mu \end{array}\right\} \forall u \in [-M, M].$$

$$\text{c/ } \left.\begin{array}{c} |b_p|(1+|p|) + |b_u| \leqslant \mu(1+p^2) \\ |\varphi'''(u)| \leqslant \mu \end{array}\right\} \forall u \in [-M, M], \forall p \in R.$$

*d/* $S \in H^{2+\beta}$

*Alors le problème (P$_1$) admet une unique solution* $u \in H^{2+\beta, 1+\frac{\beta}{2}}(Q_T)$.

(Théorème 7.4, page 491 [LSU] ).

Preuve :

L'idée de la preuve est de se ramener à une famille de problèmes linéaires dont la résolution unique est établie, et, à l'aide du principe de Leray–Schauder , démontrer l'existence de la solution au problème quasilinéaire (P$_1$).

Incluons l'étude du problème (P$_1$) dans celle d'une famille de problèmes dépendant d'un paramètre, à savoir

$$(\mathrm{P}_\tau)\begin{cases} \tau\mathcal{L}u + (1-\tau)[u_t - \mu\Delta u] = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,T) \\ \tau\mathcal{L}^{(S)}u + (1-\tau)\mu(\dfrac{\partial u}{\partial \eta} - u) = 0 & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ u_{|t=0} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,T) \end{cases}$$

avec $\mathcal{L}u = u_t - \varphi'(u)\Delta u + b(u,p)$ , $\mathcal{L}^{(S)}u = \dfrac{\partial \varphi(u)}{\partial \eta}$.

D'après [LSU] , l'hypothèse a/ permet d'obtenir l'estimation suivante sur toute solution $u \in C^{2,1}(Q_T)$ possible du problème (P$_1$) :

$\max_{Q_T} |u(x,t)| \leqslant c$

(voir le théorème 7.3, page 487 [LSU] )

En particulier, on pourra vérifier que les coefficients des équations de (P$_\tau$) satisfont des conditions du même type que celle de a/ et permettent ainsi d'obtenir la même estimation sur toute solution possible $u^\tau \in C^{2,1}(Q_T)$ de (P$_\tau$) . Cette estimation est uniforme par rapport à $\tau$.

Les hypothèses b/ et c/ permettent d'établir les estimations suivantes :

$$\max_{Q_T} |u_x| \leqslant M_1 \quad , \quad |u|_{Q_T}^{(1+\delta)} \leqslant c'$$

(Théorème 7.2, page 486 [LSU] )

Considérons la famille de problèmes suivants :

$$(\mathrm{L}_\tau)\begin{cases} v_t - (\tau\varphi'(w) + (1-\tau)\,\mu)\Delta v + \tau b(w, w_x) = 0 \\ [\tau\varphi'(w) + (1-\tau\mu]v_{x_j}\cos(n, x_i) + (1-\tau)\mu v_{|S_T} = 0 \\ v_{|t=0} = 0 \end{cases}$$

où $w$ est un élément du sous espace $B_\alpha$ de $H^{1+\alpha,\frac{1+\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$ dont les éléments sont les fonctions qui s'annulent pour $t = 0$. On prendra $\alpha = \min\{\delta, \beta\}$.

Pour toute fonction $w(x,t)$ de $B_\alpha$ telle que $\max_{Q_T} |w| \leqslant \min\{c, M\}$ et $\max_{Q_T} |w_x| \leqslant M_1$, le problème (L$_\tau$) est un problème linéaire dont la résolution unique est garantie par le Théorème 5.3 du Chapitre IV de [LSU]. Sa solution est un élément $v(x,t;\tau)$ de $H^{2+\alpha,1+\frac{\alpha}{2}}(\overline{Q_T})$. On définit ainsi une transformation complètement continue $v = \Phi(w;\tau)$ dont les points fixes sont des solutions du problème (P$_\tau$).

Pour établir l'existence de ces points fixes, nous allons utiliser le principe de Leray-Schauder.

Soit $\mathcal{M} = \{w \in B_\alpha / \max\limits_{Q_T}|w| \leqslant \min\{c, M\} + \varepsilon, \max\limits_{Q_T}|w_x| \leqslant M_1 + \varepsilon, \leqslant c' + \varepsilon\}.$
Il est clair qu'un point fixe $u^\tau$de $\Phi(w;\tau)$ appartient de $\mathcal{M}$, car c'est une solution du problème (P$_\tau$).

On vérifie que $\Phi(.;\tau)$ sur $\mathcal{M}\times[0,1]$ est une famille d'opérateurs qui satisfait toutes les conditions du principe de Leray-Schauder ( pour le détail, voir [LSU] p 454 ). De plus, à l'aide des résultats obtenus dans le cas linéaire, on montre que $u^\tau \in H^{2+\beta,1+\frac{\beta}{2}}(\overline{Q_T})$.

Pour l'unicité, le raisonnement est classique :
Si $u$ et $u'$ étaient deux solutions, $v = u - u'$ serait l'unique solution d'un problème linéaire homogène et donc $v \equiv 0$ (voir les théorèmes 2.4 et 2.6 Chapitre I [LSU] ).

Supposons maintenant, comme c'est le plus souvent le cas, que $f$ est localement lipschitzienne. Nous allons fixer $M$ et déterminer $T > 0$ pour que les conditions du théorème précédent soient vérifiées.

Soit à résoudre le problème

$$(\mathrm{P})\begin{cases} u_t - \Delta\varphi(u) = f(u) & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty) \\ u_{|t=0} = u_0 & \text{sur } \Omega \times \{0\} \\ \dfrac{\partial\varphi(u)}{\partial\eta} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) \end{cases}$$

**Théorème d'existence locale :** *Soit* $M > M_0 = max_\Omega |u_0|$

*Il existe* $T_M^* > 0$ *telle que (P) admet une unique solution* $u$ *classique définie sur* $\Omega \times (0, T_M^*)$ *avec :*

$$\max_{Q_{T_M^*}} |u(x,t)| \leqslant M$$

Preuve :

Posons $\widetilde{f}(u) = \begin{cases} f(u) & si \quad u < M \\ f(M) & si \quad u > M \end{cases}$

et soit $\tilde{\varphi} \in C^3(\mathbb{R})$ telle que $\tilde{\varphi}(u)$=$\varphi(u)$ si $u \leqslant M$ et $\tilde{\varphi}'(u)$=$\varphi'(M)$ si $u \geqslant 2M.$

Alors la fonction $\widetilde{b}(u,p) = -\varphi''(u)p^2 - \widetilde{f}(u)$ vérifie les conditions du théorème 1.

Le problème (P) avec $\widetilde{f}$ et $\tilde{\varphi}$ admet d'après le Théorème 1 une unique solution $\widetilde{u}$ définie sur $[0,T]$ vérifiant l'estimation :

$$\max_{Q_T} |u(x,t)| \leqslant e^{\lambda T} \max \left\{ \sqrt{\frac{c_2}{\lambda - c_1}}, \max_\Omega |u_0| \right\} \ , \forall \lambda > c_1.$$

( Nous obtenons cette inégalité en posant $u(x,t) = e^{\lambda T} v(x,t)$ et en utilisant les hypothèses du théorème.)

En choisissant $\lambda$ tel que $M_0 < \sqrt{\frac{c_2}{\lambda - c_1}} < M,$ et $T^* < \frac{1}{\lambda} \log \frac{M}{\sqrt{\frac{c_2}{\lambda - c_1}}}$ on pourra avoir

$$\max_{Q_{T^*}} |u(x,t)| \leqslant M$$

Si on se restreint maitenant à $[0, T^*)$, on peut remplacer $\widetilde{f}$ et $\tilde{\varphi}$ par $f$ et $\varphi$ dans l'équation à résoudre, ce qui donne l'existence d'une solution locale au problème (P).

### 1.4.2 Cas d'un système :

Soit à résoudre un système du type :

$$(S)\left\{\begin{array}{l} u_t-\Delta\varphi(u)=f(u,v) \\ v_t-\Delta\psi(v)=g(u,v) \end{array}\right. \text{ sur } \Omega\times[0,T]$$

avec comme conditions initiales :

$$u(x,0)=u_0(x), v(x,0)=v_0(x) \quad \text{sur} \quad \Omega$$

et comme conditions au bord :

$$\frac{\partial\varphi(u)}{\partial\eta}=\frac{\partial\psi(u)}{\partial\eta}=0 \quad \text{sur} \quad \partial\Omega\times(0,T)$$

Les fonctions qui composent les équations vérifient les mêmes hypothèses que dans la section 1.5.1 précédente.

Pour une fonction $v=w_1$ fixée dans l'espace $H=H^{2+\alpha,1+\alpha/2}(\overline{Q_T})$, la première équation de $(S)$ admet une unique solution $u$ dans $H$ telle que $\max_{Q_T}|u(x,t)|$ est majoré par une constante $M_1$. De même pour la deuxième équation, pour $u=w_2$ fixée, il existe une unique solution $v$ dans $H$ telle que $\max_{Q_T}|v(x,t)|$ soit majoré par une constante $M_2$.Donc à chaque élément $(w_1,w_2)\in H^2$ correspond un unique élément $(u,v)\in H^2$ avec $\|(u,v)\|_{H^2}\leqslant M=\max\{M_1,M_2\}$. On définit ainsi une transformation continue $(u,v)=\Psi(w_1,w_2)$ de $H^2$ dans $H^2$ qui vérifiera les hypothèses du théorème du point fixe. Un point fixe de $\Psi$ sera une solution du système (S).

La démonstration se généralise aisément pour un système de n équations à n fonctions inconnues.

# Chapter 2
# Enoncé du problème

## 2.1 Introduction

Le but du travail est la généralisation des résultats obtenus dans l'article de base de T.Aliziane et M.Langlais [AL]. Il s'agit d'un système de réaction-diffusion modélisant l'évolution spatio-temporelle d'une population en présence d'une épidémie.

Les termes de diffusion sont non linéaires et le système est dégénéré, les conditions initiales sont uniquement bornés. En suivant les mêmes idées que celles exposées dans l'article sus-cité, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution globale du système ; on étudie aussi le comportement asymptotique de cette dernière.

## 2.2 Enoncé du problème et de ses paramètres.

Nous nous intéressons à la résolution du problème suivant

$$\begin{cases} \partial_t U_1 - \Delta\varphi_1(U_1) = -\gamma(U_1, U_2, U_3, U_4) - \nu U_1 \\ \partial_t U_2 - \Delta\varphi_2(U_2) = \gamma(U_1, U_2, U_3, U_4) - (\lambda + \mu)U_2 \\ \partial_t U_3 - \Delta\varphi_3(U_3) = \lambda\pi U_2 - (\alpha + m + \mu)U_3 \\ \partial_t U_4 - \Delta\varphi_4(U_4) = (1-\pi)\lambda U_2 + \alpha U_3 + \nu U_1 \end{cases} \qquad (1)$$

dans $\Omega \times (0, +\infty)$ , avec conditions initiales

(2) $$U_i(x,0) = U_{i,0}(x) \geqslant 0 \quad , \quad x \in \Omega \ \ , \ i = 1...4$$

et conditions au bord de type Neumann

$$(3) \qquad \frac{\partial \varphi_i(U_i)}{\partial \eta}(x,t) = 0 \ \ , \ \ x \in \partial\Omega \ , \ t > 0 \ , \ i = 1...4$$

On se réferera au problème (1-2-3) par (*P*).

Comme d'habitude, $\Omega$ est un domaine ouvert de $\mathbb{R}^n, n \geqslant 1$, à bord régulier noté $\partial\Omega$ ou $S$.

Nous ferons les hypothèses suivantes :

$(H_0)$ $\varphi_i$ sont des fonctions définies sur $\mathbb{R}$ de classe $C^3$ telles que : $\varphi_i(0) = \varphi_i'(0) = 0$, $\varphi_i(s) > 0, \varphi_i'(s) > 0, \varphi_i''(s) > 0$ pour $s > 0$.

$(H_1)$ $\mu, \alpha, \nu, m, \lambda, \pi$ sont des constantes positives vérifiant : $\lambda + \mu > 0$, $\alpha + m + \mu > 0$, et $0 \leqslant \pi \leqslant 1$.

$(H_2)$ $U_{i,0} \in L^\infty(\Omega)$ et $U_{i,0}(x) \geqslant 0$ pour tout $x \in \Omega$ et $i \in \{1, ..., 4\}$

$(H_3)$ $\gamma : \mathbb{R}_+^4 \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction localement lipschitzienne, différentiable en chacune de ses variables et à croissance polynômiale avec $\gamma(0, U_2, U_3, U_4) = 0$ pour tout $(U_2, U_3, U_4) \in \mathbb{R}_+^3$.

$(H_4)$ Il existe des constantes strictement positives $C_1, C_2$ et $r$ telles que : $\gamma(U_1, U_2, U_3, U_4) \leqslant C_1 + C_2 U_1^r$ sur $\mathbb{R}_+^4$.

Ce système modélise la propagation d'une maladie infectieuse au sein d'une population isolée dans un domaine borné. La fonction $\gamma$ représente "l'incidence" ou le nombre d'individus sensibles infectés par unité de temps et devenant exposés. $\lambda$ représente le taux de passage de la classe des exposés à la classes des infectés, tandis que $m$ est le taux de mortalité induite par la maladie. Quant à $\nu$ et $\mu$ , ce sont des paramètres de contrôle, à savoir un paramètre de vaccination (pour $\nu$) et dans le cas de populations animales (renards, chats, ..) $\mu$ est un paramètre d'élimination ( dans le cas de la rage par exemple, les individus infectés n'ont aucune chance de guérison, mais représentent un risque important de contamination ). Enfin, $\pi$ mesure la proportion des individus exposés qui deviennent réellement infectieux, alors que $(1-\pi)$ représente la proportion des exposés qui entrent dans la classe des resistants (ou retirés).

## 2.3 Enoncés des résultats principaux :

Le problème principal qui se pose à nous est : comment attaquer la question de l'existence ?

En effet, les résultats classiques concernant les problèmes d'évolution de type parabolique ne sont pas applicables à notre système puisque celui-ci n'est pas uniformément parabolique ; le fait que la fonction $\varphi_i'$ s'annule en zéro fait que le système ne peut être parabolique et le fait dégénérer en un système d'équations de premier ordre dans les régions où $U_i = 0$. Il est bien connu que de tels problèmes n'admettent pas en général de solutions classiques, c'est pourquoi on introduit la notion de solution faible suivante (telle que celle introduite par Oleinik [OKY] ) :

**Définition 1 :** *On dira que le quadruplet* $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ *de fonctions définies sur* $\Omega \times [0, +\infty)$ *est solution faible du problème (P) si pour tout* $T > 0, i = 1 \ldots 4$ *et pour toute fonction test* $\psi_i \in C^1(\overline{Q_T})$ *telle que* $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = 0$ *sur* $\partial\Omega \times (0,T)$ *,* $U_i$ *vérifie :*

*i/* $U_i$ *appartient à* $L^2(Q_T)$

*ii/* $\nabla\varphi_i(U_i)$ *appartient à* $L^2(Q_T)$.

*iii/* $\int\limits_{\Omega} U_i(x,T)\psi_i(x,T)dx + \int\limits_{Q_T} \nabla\varphi_i(U_i)\nabla\psi_i(x,t)dxdt$

(eq I) $$= \int\limits_{Q_T} \partial_t\psi_i.U_i - f_i.\psi_i)(x,t)dxdt + \int\limits_{\Omega} U_{i,0}(x)\psi_i(x,0)dx$$

Dans les prochains chapitres, nous nous attèlerons à démontrer les résultats principaux suivants concernant l'existence d'une unique solution au problème $(P)$ et le comportement asyptotique de cette solution.

**<u>Théorème 2.1</u> :** Existence et unicité.

*Il existe un unique quadruplet* $(U_1, U_2, U_3, U_4)$ *de fonctions positives ou nulles, définies sur* $\Omega \times [0, +\infty)$ *, qui soit solution faible de (P) au sens de la définition précédente.*

*De plus :*

*i/* $U_2, U_3 \in L^1(Q_\infty) \cap L^\infty(Q_\infty)$ *et* $\nabla\varphi_i(U_i), \partial_t\varphi_i(U_i) \in L^2(\Omega \times [0, +\infty))$ *, pour* $i = 1, 2, 3$ .

*Lorsque* $\nu = 0$ *,* $U_1 \in L^\infty(Q_\infty)$ *,* *et* $U_1 \in L^1(Q_\infty) \cap L^\infty(Q_\infty)$ *si* $\nu > 0.$

*ii/* $U_4 \in L^1(Q_T) \cap L^\infty(Q_T)$ *et* $\nabla\varphi_4(U_4), \partial_t\varphi_4(U_4) \in L^2(\Omega \times [0, T))$ , $T > 0.$

**<u>Théorème 2.2</u> :** Comportement asymptotique.

*Il existe une constante non négative* $U_1^*$ telle que

$$U_1(.,t) \longrightarrow U_1^* \quad dans \quad L^1(\Omega) \quad lorsque \quad t \longrightarrow +\infty$$

*et on a*

$$U_2(.,t), U_3(.,t) \longrightarrow 0 \quad dans \quad L^1(\Omega) \quad lorsque \quad t \longrightarrow +\infty$$

*De plus, si* $\nu > 0$, *alors* $U_1^* = 0$.

# Chapter 3
# Approximation du problème

## 3.1 Approximation

Comme nous l'avons déjà fait remarquer, le problème est dégénéré et n'admet pas de solution classique, nous allons montrer qu'une solution faible de ($P$) peut s'obtenir comme la limite , dans un sens à préciser , d'une suite de solutions de problèmes non dégénérés approchant ($P$).

Considérons le problème quasilinéaire dépendant d'un "petit" paramètre $\varepsilon > 0$ , amené à tendre vers 0, à résoudre dans $\Omega \times (0, \infty)$ :

$$(P_\varepsilon) \begin{cases} \partial_t U_1 - \Delta d_1(U_1) = -\gamma((U_1-\varepsilon)^+, U_2, U_3, U_4) - \nu(U_1 - \varepsilon) \\ \partial_t U_2 - \Delta d_2(U_2) = \gamma((U_1-\varepsilon)^+, U_2, U_3, U_4) - (\lambda+\mu)(U_2 - \varepsilon) \\ \partial_t U_3 - \Delta d_3(U_3) = \lambda\pi(U_2-\varepsilon) - (\alpha + m + \mu)(U_3 - \varepsilon) \\ \partial_t U_4 - \Delta d_4(U_4) = (1-\pi)\lambda(U_2-\varepsilon) + \alpha(U_3-\varepsilon) + \nu(U_1 - \varepsilon) \end{cases} \tag{4}$$

$$(\mathrm{CI}_\varepsilon) \begin{cases} U_i(x,0) = U_{i,0,\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega \quad , \quad i = 1...4 & (5) \\ \dfrac{\partial d_i(U_i)}{\partial \eta}(x,t) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \quad , \quad t > 0 & (6) \end{cases}$$

Pour $i = 1...4$, $d_i : \mathbb{R} \longrightarrow (\varepsilon/2, +\infty)$ est une fonction croissante et régulière telle que $d_i(u) = \varphi_i(u)$ pour $M \geqslant u \geqslant \varepsilon, d_i(u) = d_i(M)$ pour $u \geqslant M$ et $d_i'(u) \geqslant \alpha_0 > 0$ , $M$ étant une constante .

D'autre part, les données initiales $U_{i,0,\varepsilon}$ vérifient la condition suivante

$$(\mathrm{C}_I)\begin{cases} i/ \quad U_{i,0,\varepsilon}(x) \geqslant \varepsilon \ , \ \ x \in \Omega \\ ii/ \displaystyle\int_\Omega [U_{i,0,\varepsilon}(x) - \varepsilon] \ dx \leqslant \int_\Omega U_{i,0}(x) \ dx \ , \ i = 1...4 \\ iii/ \ U_{i,0,e} \longrightarrow U_{i,0} \ \ dans \ \ L^p(\Omega) \ \ lorsque \ \ \varepsilon \longrightarrow 0 \end{cases}$$

**Remarque :**On reviendra sur la construction de ces données initiales dans la section 3 de ce chapitre.

## 3.2 Résolution du système $(P_\varepsilon)$

Le système $(P_\varepsilon)$ est un système auquel le théorème 1 du Chapitre 1 peut s'appliquer. On a donc existence d'une unique solution classique non négative sur un intervalle maximal $[0, T_{\max,\varepsilon})$ au problème $(P_\varepsilon)$ (revenir au chapitre des rappels).

En remarquant que $\varepsilon$ est une sous-solution de $(P_\varepsilon)$ , on a

$$\varepsilon \leqslant U_{i,\varepsilon} \quad \forall x \in \Omega, \, \forall t \in [0, T_{\max,\varepsilon})$$

De plus, par le principe du maximum on a :

$$U_{1,\varepsilon}(x,t) \leqslant \|U_{1,0,\varepsilon}\|_{\infty,\Omega} \qquad , \, x \in \Omega \, , 0 < t < T_{\max,\varepsilon}.$$

Grâce à ces résultats , on peut affirmer que le problème

$$\begin{cases} \partial_t U_1 - \Delta\varphi_1(U_1) = -\gamma(U_1 - \varepsilon, U_2, U_3, U_4) - \nu(U_1 - \varepsilon) \\ \partial_t U_2 - \Delta\varphi_2(U_2) = \gamma(U_1 - \varepsilon, U_2, U_3, U_4) - (\lambda + \mu)(U_2 - \varepsilon) \\ \partial_t U_3 - \Delta\varphi_3(U_3) = \lambda\pi(U_2 - \varepsilon) - (\alpha + m + \mu)(U_3 - \varepsilon) \\ \partial_t U_4 - \Delta\varphi_4(U_4) = (1 - \pi)\lambda(U_2 - \varepsilon) + \alpha(U_3 - \varepsilon) + \nu(U_1 - \varepsilon) \end{cases}$$

avec les conditions

$$U_i(x,0) = U_{i,0,\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega \quad , \quad i = 1...4$$
$$\frac{\partial \varphi_i(U_i)}{\partial \eta}(x,t) = 0 \quad , \quad x \in \partial\Omega \quad , \quad t > 0$$

admet une unique solution $U_\varepsilon$ sur un intervalle maximal $[0, T_{\max,\varepsilon})$. Pour l'exitence de la solution sur tout l'intervalle $[0, +\infty[$ , il nous suffira de montrer que la solution en question n'explose pas à temps fini.On montrera dans la partie "estimations à priori" du chapitre suivant que la solution est bornée.

## 3.3 Construction de données initiales vérifiant la condition (C$_I$)

Pour $u \in L^\infty(\Omega)$ ($\Omega$ borné) telle que $u \geqslant 0$ , il s'agit de construire une suite $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ de fonctions régulières telles que

$*u_\varepsilon \geqslant \varepsilon$

$* \int_\Omega (u_\varepsilon - \varepsilon)dx \leqslant \int_\Omega u(x)dx$

$*u_\varepsilon \longrightarrow u \quad dans \quad L^p(\Omega) \ , \ \forall p \in [1, +\infty[.$

Soit $(\rho_\varepsilon)_\varepsilon$ une suite régularisante ( i.e : $\rho_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^n)$ avec $\rho_\varepsilon \geqslant 0$ , $\int_\Omega \rho_\varepsilon(x)\,dx = 1$ et $Supp\ \rho_\varepsilon \subset B(0,\varepsilon)$ ) et soit $\tilde{u}$ le prolongement de u par 0 sur $\mathbb{R}^n$ , alors $\tilde{u} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ , $\forall p \in [1, +\infty]$ et on a :

* $\tilde{v}_\varepsilon = \rho_\varepsilon * \tilde{u} \longrightarrow \tilde{u}$ dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ pour tout $p$ tel que $1 \leqslant p < +\infty$.

* $\tilde{v}_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\tilde{v}_\varepsilon \geqslant 0$.

(Ces résultats sont donnés par le théorème de régularisation que l'on peut trouver dans la référence [VK]).

Posons $v_\varepsilon \equiv \tilde{v}_{\varepsilon|\Omega}$ , et $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \varepsilon$, alors on a : $u_\varepsilon \in \mathcal{C}^\infty(\Omega)$ et $u_\varepsilon \geqslant \varepsilon$.

Montrons que $u_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ , et ce pour tout $p \in [1, +\infty[$:

D'une part on a

$$\int\limits_{\Omega} |v_\varepsilon(x) - u(x)|^p \, dx = \int\limits_{\Omega} |\tilde{v}_\varepsilon(x) - \tilde{u}(x)|^p \, dx \leqslant \int\limits_{R^n} |\tilde{v}_\varepsilon(x) - \tilde{u}(x)|^p \, dx$$

la dernière quantité tendant vers 0 lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$ , donc $v_\varepsilon \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$.

D'autre part , $\varepsilon \longrightarrow 0$ dans $L^p(\Omega)$ (car $mes\Omega < +\infty$). Finalement, on a $u_\varepsilon = v_\varepsilon + \varepsilon \longrightarrow u$ dans $L^p(\Omega)$ quand $\varepsilon \longrightarrow 0$ , pour tout $p \in [1, +\infty[$.

Montrons enfin que $\int_\Omega (u_\varepsilon - \varepsilon)\, dx \leqslant \int_\Omega u(x)\, dx$ ; grâce au théorème de Fubini on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\Omega} (u_\varepsilon - \varepsilon)\, dx &= \int\limits_{\Omega} v_\varepsilon(x) dx \\
&= \int_\Omega \left[ \int_{R^n} \rho_\varepsilon(x-y)\, \tilde{u}(y) dy \right] dx \\
&= \int_{R^n} \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, \tilde{u}(y) dx dy \\
&= \int_{R^n} \left[ \tilde{u}(y) \int_\Omega \rho_\varepsilon(x-y)\, dx \right] dy \\
&\leqslant \int_{R^n} \tilde{u}(y) dy \\
&= \int_\Omega u(x) dx
\end{aligned}$$

Ainsi , on a démontré l'existence d'une suite de fonctions régulières approchant les données initiales $U_{i,0}$ et vérifiant la condition $(C_I)$ .

**Remarque 3.3.1 :**

L'inégalité suivante nous sera utile pour établir les estimations à priori sur les solutions :

$$\|U_{i,0,\varepsilon}-\varepsilon\|_\infty \leqslant \|U_{i,0}\|_\infty \qquad i=1...4 \quad , \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

En effet, pour $(u_\varepsilon)_\varepsilon$ comme précédemment , on a :

$$\int_\Omega [u_\varepsilon-\varepsilon]^p dx = \int_\Omega \left[\int_{R^n} \rho_\varepsilon(x-y)\,\tilde{u}(y)dy\right]^p dx \leqslant \int_\Omega \|u\|^p_{\Omega,\infty}.1 \ dx \quad , \ \forall p\geqslant 1$$

En passant à la puissance $\frac{1}{p}$ et en faisant $p \longrightarrow +\infty$ , on obtient le résultat voulu ; en particulier on aura l'estimation uniforme suivante

$$\|U_{i,0,\varepsilon}\|_\infty \leqslant \|U_{i,0}\|_\infty + 1 \ = c_i \quad , \quad i=1...4 \quad , \quad 0<\varepsilon\leqslant 1.$$

Dans les prochaînes sections, nous allons étudier le problème auxilliaire non dégénéré et nous établirons des estimations à priori sur sa solution. Ces dernières nous serviront à démontrer la résolution unique du problème initial (*P*).

# Chapter 4
# Estimations à priori et existence globale pour les systèmes approchés

## 4.1 Estimations à priori

Dans cette partie , nous établissons des estimations sur les solutions $U_{i,\varepsilon}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1$. On fixe $T$ dans $(0, T_{\max,\varepsilon})$ ainsi que $\varepsilon > 0.$

Pour commencer , on établit trois inégalités dont nous aurons besoin dans la suite :

*Lemme 0 :* *on a les trois inégalités* :

(0.1) $$\int_{Q_T} [\gamma(U_{1,\varepsilon} - \varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon}) + \nu(U_{1,\varepsilon} - \varepsilon)]\, dxdt \leqslant \int_\Omega U_{1,0}(x)\, dx$$

*en particulier*

(0.1') $$\int_{Q_T} \gamma(U_{1,\varepsilon} - \varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\, dxdt \leqslant \int_\Omega U_{1,0}(x)\, dx$$

(0.2) $$(\lambda + \mu) \int_{Q_T} (U_{2,\varepsilon} - \varepsilon) dxdt \leqslant \int_\Omega [U_{1,0}(x) + U_{2,0}(x)] dx$$

(0.3) $$(\alpha + m + \mu) \int_{Q_T} (U_{3,\varepsilon} - \varepsilon)\, dxdt \leqslant \int_\Omega [U_{1,0}(x) + U_{2,0}(x) + U_{3,0}(x)] dx$$

*Preuve :*

1. Intégrons la première équation sur $\Omega \times (0,T)$ :

$$\begin{aligned}
&-\int_{Q_T} [\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon}) + \nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)] \\
&= \int_{\Omega} \left[\int_0^T \partial_t U_{1,\varepsilon} \ dt\right] \ dx - \int_0^T \int_{\Omega} div[\nabla\varphi_1(U_1)]dxdt \\
&= \int_{\Omega} [U_{1,\varepsilon}(x,T) - \varepsilon - U_{1,\varepsilon}(x,0) + \varepsilon]dx - \int_0^T \int_{\partial\Omega} \tfrac{\partial\varphi_1(U_1)}{\partial\eta} d\sigma
\end{aligned}$$

d'où

$$-\int_{Q_T} [\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon}) + \nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)] + \int_{\Omega} [U_{1,\varepsilon}(x,T)-\varepsilon]dx = \int_{\Omega} (U_{1,0,\varepsilon}-\varepsilon)$$

compte tenu de la non négativité de $U_{1,\varepsilon}-\varepsilon$ et de la condition (C$_I$) sur les données initiales on obtient les inégalités (0.1) et (0.1').

2. On procède comme pour (0.1), on obtient alors :

$$\begin{aligned}
(\lambda+\mu)\int_{Q_T} (U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)dxdt &\leqslant \int_{\Omega} [U_{2,\varepsilon}(x,0)-\varepsilon]dx + \int_{Q_T} \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})dxdt \\
&\leqslant \int_{\Omega} U_{2,0}(x)dx + \int_{Q_T} \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})dxdt \\
&\leqslant \int_{\Omega} [U_{2,0}(x)+U_{1,0}(x)]dx \qquad (d'apr\grave{e}s \quad (0.1')\ )
\end{aligned}$$

ce qui établit (0.2).

3. De la même façon que pour (0.2) et en utilisant cette dernière on a :

$$(\alpha+m+\mu)\int_{Q_T} (U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)dxdt \leqslant \int_{\Omega} U_{3,0}(x)dx + \frac{\lambda\pi}{\lambda+\mu}\int_{\Omega} [U_{2,0}(x)+U_{1,0}(x)]dx$$

comme par hypothèse $\dfrac{\lambda\pi}{\lambda+\mu} \leqslant 1$, (0.3) découle de ce qui précède.

*Lemme 1 :* *Il existe une constante positive $M$ et une fonction non décroissante$F$, de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$ indépendantes de $\varepsilon$ , telles que :*

**a/** $0<\varepsilon\leqslant U_{i,\varepsilon}(x,t)\leqslant M, \qquad x\in\Omega\ \ ,t>0\ \ ,\ \ i=1,2,3.$

**b/** $0<\varepsilon\leqslant U_{4,\varepsilon}(x,t)\leqslant F(T) \qquad x\in\Omega\ \ ,0<t<T.$

*Preuve :*

– Nous avons déjà vu que $0<\varepsilon\leqslant U_{1,\varepsilon}(x,t)\leqslant \|U_{1,\varepsilon,0}\|_\infty$ , $x\in\Omega$ , $t>0$; et d'après la remarque de la fin du chapitre précédent, on a :

$$0<\varepsilon\leqslant U_{1,\varepsilon}(x,t)\leqslant \|U_{1,0}\|_\infty+1=m_1 \text{ sur } \Omega\times(0,+\infty)$$

– Pour $U_{2,\varepsilon}$ $et$ $U_{3,\varepsilon}$ , les démonstrations sont identiques : multiplions l'équation en $U_{2,\varepsilon}$ par $p(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}$ (où p>2) et intégrons sur $\Omega$

$$\begin{aligned}
&p\int_\Omega \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}dx-p(\lambda+\mu)\int_\Omega(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^p dx\\
&=\int_\Omega[\partial_t U_{2,\varepsilon}-\Delta\varphi_2(U_{2,\varepsilon})]p(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}\,dx\\
&=\int_\Omega \partial_t(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^p\,dx-\int_\Omega p(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}div[\varphi_2'(U_{2,\varepsilon})\nabla U_{2,\varepsilon}]dx\\
&=\tfrac{d}{dt}\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\|_{p,\Omega}^p+\int_\Omega\varphi_2'(U_{2,\varepsilon})p(p-1)(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-2}\left|\nabla U_{2,\varepsilon}\right|^2dx\\
&\qquad+\int_{\partial\Omega}\varphi_2'(U_{2,\varepsilon})\nabla U_{2,\varepsilon}.\overrightarrow{\eta}\,d\sigma
\end{aligned}$$

L'intégrale sur $\Omega$ de la dernière ligne est positive (car $\varphi_2'(U_{2,\varepsilon})>0$ pour $s>0$ ) et l'intégrale sur $\partial\Omega$ est nulle grâce à la condition (6). Finalement on obtient l'inégalité :

$$\frac{d}{dt}\left\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}+p(\lambda+\mu)\left\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}$$
$$\leqslant p\int_{\Omega}\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}dx$$

à laquelle l'application de l'inégalité (y) avec $\varepsilon=\lambda+\mu$ donne

$$\frac{d}{dt}\left\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}+p(\lambda+\mu)\left\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}$$

$$\leqslant\left[\frac{1}{\lambda+\mu}\right]^{p-1}\int_{\Omega}\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})^{p}\,dx\;+(p-1)(\lambda+\mu)\left\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}$$

d'où :

$$\frac{d}{dt}\left\|U_{2,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}\leqslant\left[\frac{1}{\lambda+\mu}\right]^{p-1}\int_{\Omega}\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})^{p}\,dx$$

– En intégrant les deux membres de cette inégalité entre 0 et $t$ $(t<T)$ et en utilisant l'hypothèse $(H_4)$ section 2.2, on obtient :

$$\left\|U_{2,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}$$
$$\leqslant\quad\left\|U_{2,0,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^{p}+\left[\frac{1}{\lambda+\mu}\right]^{p-1}(C_1+C_2m_1^r)^{p-1}\int_{Q_T}\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})dxdt$$
$$\leqslant\quad 2Max\left\{\left\|U_{2,0}\right\|_{\infty}^{p}(mes\Omega),\frac{1}{(\lambda+\mu)^{p-1}}(C_1+C_2m_1^r)^{p-1}\left\|U_{1,0}\right\|_{1,\Omega}\right\}$$

(pour cette dernière inégalité , on a utilisé la remarque3.3.1 du chapitre précédent, et l'inégalité (0.1))

d'où

$$\left\|U_{2,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}\leqslant(2)^{\frac{1}{p}}Max\left\{\left\|U_{2,0}\right\|_{\infty}(mes\Omega)^{\frac{1}{p}},\tfrac{1}{(\lambda+\mu)^{\frac{1}{q}}}(C_1+C_2m_1^r)^{\frac{1}{q}}\left\|U_{1,0}\right\|_{1,\Omega}^{\frac{1}{p}}\right\}$$

où q est tel $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1.$ Lorsque $p\longrightarrow+\infty$ on obtient :

$$\left\|U_{2,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\right\|_{\infty,\Omega}\leqslant Max\left\{\left\|U_{2,0}\right\|_{\infty},\tfrac{1}{(\lambda+\mu)}(C_1+C_2m_1^r)\right\}=m_2$$

– Les mêmes arguments permettent d'écrire les implications suivantes :

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)^p dx+\int\limits_{\Omega}\varphi_3'(U_{3,\varepsilon})p(p-1)(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-2}\left|\nabla U_{3,\varepsilon}\right|^2 dx$$

$$=\lambda\pi\int\limits_{\Omega}(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)p(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}-p(\alpha+m+\mu)\int\limits_{\Omega}(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)^p$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left\|U_{3,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p+p(\alpha+m+\mu)\left\|U_{3,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p$$

$$\leqslant p\lambda\pi\int\limits_{\Omega}(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)p(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}\ \ (car\ \ \varphi_3'\geqslant 0)$$

$$\Longrightarrow \frac{d}{dt}\left\|U_{3,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p$$

$$\leqslant \frac{(\lambda\pi)^{2-p}}{(\alpha+m+\mu)^{p-1}}\left\|U_{3,\varepsilon}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p\ \ [(Y)\ avec\ \varepsilon=\lambda\pi(\alpha+m+\mu)\,]$$

$$\Longrightarrow \left\|U_{3,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p$$

$$\leqslant\ \ \left\|U_{3,\varepsilon,0}-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p+\frac{(\lambda\pi)^{2-p}}{(\alpha+m+\mu)^{p-1}}m_2^{p-1}\int\limits_{Q_T}(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)dxdt$$

$$\leqslant\ \ \left\|U_{3,0}\right\|_{p,\Omega}^p(mes\Omega)+\frac{(\lambda\pi)^{2-p}}{(\alpha+m+\mu)^{p-1}}m_2^{p-1}(\frac{1}{\lambda+\mu})\int\limits_{Q_T}U_{1,0}+U_{2,0}\ \ [utiliser\ (2)]$$

$$\Longrightarrow \left\|U_{3,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\right\|_{p,\Omega}^p\leqslant 2Max\left\{\left\|U_{3,0}\right\|_{p,\Omega}^p(mes\Omega),\left(\frac{(\lambda\pi)^{2-p}}{\lambda+\mu}\right)^{\frac{1}{p}}(c)^{\frac{p-1}{p}}\left(\int\limits_{Q_T}U_{1,0}+U_{2,0}\right)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

$$\Longrightarrow \left\|U_{3,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\right\|_{\infty,\Omega}\leqslant Max\left\{\left\|U_{3,0}\right\|_{\infty,\Omega},\ \frac{m_2}{(\lambda\pi)(\alpha+m+\mu)}\right\}=m_3$$

donc a/ est démontré , il suffit de poser $M=max\{m_1,m_2,m_3\}$.

– Comme pour les estimations précédentes, on multiplie la dernière équation par $p(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}$ et on intègre sur $\Omega$. En tenant compte des hypothèses, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}\,dx \quad (1-\pi)\lambda p\int\limits_{\Omega}&(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}\,dx\\ +\alpha p\int\limits_{\Omega}&(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}\,dx\\ +\nu p\int\limits_{\Omega}&(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p-1}\,dx\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Young et on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int\limits_{\Omega}(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}\,dx &\leqslant (1-\pi)\lambda\int_{\Omega}(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}dx+\alpha\int_{\Omega}(U_{i,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}dx\\ &+\nu\int\limits_{\Omega}(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}dx+(p-1)[(1-\pi)\lambda+\alpha+\nu]\int\limits_{\Omega}(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}\,dx\end{aligned}$$

L'inégalité de Gronwall sous forme différentielle nous donne :

$$\int\limits_{\Omega}(U_{4,\varepsilon}-\varepsilon)^{p}\,dx \leqslant e^{(p-1)C\,t}2\max(\|U_{4,0}\|^{p}_{\infty,\Omega}\,, tCM^{p}mes\Omega)$$

où $C=[(1-\pi)+\alpha+\nu]$ , et donc

$$\|U_{4,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\|_{p,\Omega}\leqslant e^{\frac{p-1}{p}CT}(2)^{\frac{1}{p}}\max\left\{\|U_{4,0}\|_{\infty,\Omega}\,, M(Tmes\Omega)^{\frac{1}{p}}\right\}$$

et lorsque $p\longrightarrow\infty$ on obtient :

$$\|U_{4,\varepsilon}(.,t)-\varepsilon\|_{\infty,\Omega}\leqslant e^{CT}\max\left\{\|U_{4,0}\|_{\infty,\Omega}\,, M\right\}=F(T)$$

*Lemme 2 :*

*Il existe une constante $M_1$ et une fonction $F_1$ non décroissante , indépendantes de $\varepsilon$ telles* *que*

$$\int_{Q_T} (\nabla\varphi_i(U_i))^2(x,t)dxdt \leqslant M_1 \quad , T>0 \quad , i=1,2,3$$

$$\int_{Q_T} (\nabla\varphi_4(U_4))^2(x,t)dxdt \leqslant F_1(T) \quad , T>0$$

*Preuve :*

– <u>Pour $\nabla\varphi_1(U_1)$</u>: On multiplie la première équation du système (P$_\varepsilon$) par $\varphi_1(U_{1,\varepsilon})$ et on intègre sur $\Omega$

$$\int_\Omega \left[\partial_t U_{1,\varepsilon} - \Delta\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\right]\varphi_1(U_{1,\varepsilon})dxdt =$$

$$-\int_\Omega \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\varphi_1(U_{1,\varepsilon}) - \nu\int_\Omega (U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\varphi_1(U_{1,\varepsilon})$$

Comme $\varphi_1(0)=0$ et que $\dfrac{\partial\varphi_1(U_1)}{\partial\eta}=0$ sur $\partial\Omega\times(0,T)$ , il vient

$$\begin{aligned}\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}\int_0^{U_{1,\varepsilon}} \varphi_1(s)ds\right]dx + \int_\Omega \left|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\right|^2 dx\\ = \; -\int_\Omega \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\varphi_1(U_{1,\varepsilon}) - \nu\int_\Omega (U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\\ \leqslant \; 0\end{aligned}$$

L'intégration sur $(0,T)$ donne :

$$\int_\Omega \int_0^{U_{1,\varepsilon}(x,T)} \varphi_1(s)dsdx + \int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\right|^2 dxdt$$

$$\leqslant \int_\Omega \int_0^{U_{1,0,\varepsilon}(x)} \varphi_1(s)dsdx$$

d'où

$$\int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\right|^2 dxdt \leqslant \int_\Omega\int_0^{c_1} \varphi_1(s)dsdx$$

Rappelons que les constantes $c_i$ sont définies dans la remarque 3.3.1 page 39.

– <u>Pour $\nabla\varphi_2(U_{2,\varepsilon})$ :</u> On multiplie la deuxième équation par $\varphi_2(U_{2,\varepsilon})$ , on intègre sur $\Omega$, puis sur $(0,T)$, en tenant compte de la non négativité de $\varphi_2$, $U_{2,\varepsilon}-\varepsilon$, et des constantes $\lambda,\mu$ on obtient :

$$\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}\int_0^{U_{2,\varepsilon}} \varphi_2(s)ds\right]dx + \int_\Omega \left|\nabla\varphi_2(U_{2,\varepsilon})\right|^2 dx$$
$$= \int_\Omega \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\varphi_2(U_{2,\varepsilon}) - (\lambda+\mu)\int_\Omega (U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\varphi_2(U_{2,\varepsilon})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \int_0^{U_{2,\varepsilon}(x,T)} \varphi_2(s)dsdx + \int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_2(U_{2,\varepsilon})\right|^2 dxdt$$
$$= \int_{Q_T} \left[\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon}) + (\lambda+\mu)(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\right]\varphi_2(U_{2,\varepsilon})$$
$$+ \int_\Omega \int_0^{U_{2,0,\varepsilon}(x)} \varphi_2(s)dsdx$$

$$\Longrightarrow \int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_2(U_{2,\varepsilon})\right|^2 dxdt$$
$$\leqslant \int_\Omega \int_0^{U_{2,0,\varepsilon}(x)} \varphi_2(s)dsdx + \int_{Q_T} \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\varphi_2(U_{2,\varepsilon})$$
$$\leqslant \int_\Omega \int_0^{U_{2,0,\varepsilon}(x)} \varphi_2(s)dsdx + \max_{0\leqslant s\leqslant M}\varphi_2(s)\int_\Omega U_{1,0}(x)dx$$

Pour cette dernière inégalité, on a utilisé les résultats des lemmes 0 et1. D'où l'estimation uniforme

$$\int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_2(U_{2,\varepsilon})\right|^2 dxdt \leqslant \int_\Omega \int_0^{c_2} \varphi_2(s)dsdx + \max_{0\leqslant s\leqslant M}\varphi_2(s)\int_\Omega U_{1,0}(x)dx$$

– <u>Pour $\nabla\varphi_3(U_{3,\varepsilon})$ :</u> On procède exactement comme ci-dessus avec la troisième équation du système, ce qui donne la suite d'implications suivantes

$$\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}\int_0^{U_{3,\varepsilon}} \varphi_3(s)ds\right]dx + \int_\Omega |\nabla\varphi_3(U_{3,\varepsilon})|^2\,dx$$

$$= \int_\Omega \left[\lambda\pi(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon) - (\alpha+m+\mu)(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon)\right]\varphi_3(U_{3,\varepsilon})$$

$$\Longrightarrow \int_\Omega \int_0^{U_{3,\varepsilon}(x,T)} \varphi_3(s)dsdx + \int_{Q_T} |\nabla\varphi_3(U_{3,\varepsilon})|^2\,dxdt$$

$$\leqslant \int_\Omega \lambda\pi(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon)\varphi_3(U_{3,\varepsilon}) + \int_\Omega \int_0^{U_{3,0,\varepsilon}(x)} \varphi_3(s)dsdx$$

$$\Longrightarrow \int_{Q_T} |\nabla\varphi_3(U_{3,\varepsilon})|^2\,dxdt$$

$$\leqslant \int_\Omega \int_0^{U_{3,0,\varepsilon}(x)} \varphi_3(s)dsdx + \max_{0\leqslant s\leqslant M}\varphi 3(s)\int_\Omega \left[U_{1,0}(x)+U_{2,0}(x)\right]dx$$

D'où

$$\int_{Q_T} |\nabla\varphi_3(U_{3,\varepsilon})|^2\,dxdt \leqslant \int_\Omega \int_0^{c_3} \varphi_3(s)dsdx + \max_{0\leqslant s\leqslant M}\varphi_3(s)\int_\Omega \left[U_{1,0}(x)+U_{2,0}(x)\right]dx$$

– Pour $\nabla\varphi_4(U_{4,\varepsilon})$ : Comme précédemment, on a :

$$\int_\Omega \left[\frac{d}{dt}\int_0^{U_{4,\varepsilon}} \varphi_4(s)ds\right]dx + \int_\Omega |\nabla\varphi_4(U_{4,\varepsilon})|^2\,dx$$

$$= \int_\Omega \left[(1-\pi)\lambda(U_{2,\varepsilon}-\varepsilon) + \alpha(U_{3,\varepsilon}-\varepsilon) + \nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\right]\varphi_4(U_{4,\varepsilon})$$

$$\Longrightarrow \int_{\Omega} \int_{0}^{U_{4,\varepsilon}(x,T)} \varphi_4(s) ds dx + \int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_4(U_{4,\varepsilon})\right|^2 dx dt$$

$$\begin{aligned} \leqslant & \int_{\Omega} \int_{0}^{U_{4,0,\varepsilon}(x)} \varphi_4(s) ds dx + \lambda(1-\pi) \int_{Q_T} (U_{2,\varepsilon} - \varepsilon)\varphi_4(U_{4,\varepsilon}) \\ & +\alpha \int_{Q_T} (U_{3,\varepsilon} - \varepsilon)\varphi_4(U_{4,\varepsilon}) + \nu \int_{Q_T} (U_{1,\varepsilon} - \varepsilon)\varphi_4(U_{4,\varepsilon}) \end{aligned}$$

D'où

$$\int_{Q_T} \left|\nabla\varphi_4(U_{4,\varepsilon})\right|^2 dx dt \leqslant \int_{\Omega} \int_{0}^{c_4} \varphi_4(s) ds dx + T \max_{0\leqslant s\leqslant F_1(T)} \varphi_4(s) \times C$$

Avec $C = c(\alpha, m, \mu, \nu) \int_{\Omega} [U_{1,0} + U_{2,0} + U_{3,0}] dx \times mes(\Omega)$.

A présent nous allons démontrer un lemme qui servira à la fois à la démonstration de l'existence d'une solution de (P), et à l'étude de son comportement asymptotique.

*Lemme 3 :* *Pour tout* $t > 0$ *, il existe une constante* $c(t) > 0$ telle que

$$\left\|\nabla\varphi_i(U_{i,\varepsilon})(.,t)\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant c(t) \quad \text{pour } \ i = 1,2,3,4\,,\ \varepsilon > 0$$

Autrement dit, $\nabla\varphi_i(U_{i,\varepsilon})(.,t) \in L^2(\Omega)$ pour tout $t > 0$ .

Preuve : La démonstration est la même pour tous les $i \in \{1,2,3,4\}$. On la donne pour $i = 1$, et on commence par établir l'inégalité :

$$
\begin{aligned}
\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})(.,t)\|_{2,\Omega}^2 \qquad & \leqslant \frac{2}{t}\int_\Omega \left(\int_0^{U_{1,0,\varepsilon}} \varphi_1(s)ds\right)dx \\
& +\nu^2\varphi'\left(\|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty\right)\int_{Q_{t/2,t}}(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2 dxds \\
& +\varphi'\left(\|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty\right)\left(C_1+C_2\|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty^r\right) \\
& \times\int_{Q_{t/2,t}}\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})dxds
\end{aligned}
$$

Multiplions la première équation du problème ($\mathrm{P}_\varepsilon$) par $\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon})$ et intégrons sur $\Omega\times(\tau,T)$ avec $t/2<\tau<t$ ; le premier membre donne :

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^t\int_\Omega \partial_t U_{1,\varepsilon}\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon})-\Delta\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon}) \\
&\qquad = \int_\tau^t\int_\Omega (\partial_t U_{1,\varepsilon})^2\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})+\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\partial_t[\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})] \\
&\qquad = \int_\tau^t\int_\Omega \left\{(\partial_t U_{1,\varepsilon})^2[\psi'(U_{1,\varepsilon})]^2+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}[\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})]^2\right\}
\end{aligned}
$$

$\psi(u)$ étant une primitive de $\sqrt{\varphi_1'(u)}$, En égalisant avec le second membre on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^t\int_\Omega \{(\partial_t U_{1,\varepsilon})^2[\psi'(U_{1,\varepsilon})]^2\}+\tfrac{1}{2}\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,t))\|_{2,\Omega}^2 \\
&\qquad = -\int_\tau^t\int_\Omega \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon})\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon}) \\
&\qquad\quad -\nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon})+\frac{1}{2}\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,\tau))\|_{2,\Omega}^2
\end{aligned}
$$

Pour majorer les termes du second membre, on utilisera le fait que

$\partial_t\varphi(u)=\psi'(u)\partial_t(\psi(u)$ et l'inégalité -2ab$\leqslant$a$^2$+b$^2$ :

$$
\begin{aligned}
-\nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon}) &= -2\frac{1}{\sqrt{2}}\nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\psi'(U_{1,\varepsilon})\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_t(\psi(U_{1,\varepsilon})) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2\left[\psi'(U_{1,\varepsilon})\right]^2+\frac{1}{2}\left[\partial_t(\psi(U_{1,\varepsilon}))\right]^2
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
-\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon}) &= -2\frac{1}{\sqrt{2}}\gamma\psi'(U_{1,\varepsilon})\frac{1}{\sqrt{2}}\partial_t(\psi(U_{1,\varepsilon})) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\gamma^2\left[\psi'(U_{1,\varepsilon})\right]^2 + \frac{1}{2}\left[\partial_t(\psi(U_{1,\varepsilon}))\right]^2
\end{aligned}
$$

En remarquant que $\psi'(U_{1,\varepsilon})^2(\partial_t U_{1,\varepsilon})^2 = (\partial_t\psi(U_{1,\varepsilon}))^2$ et que $\left[\psi'(U_{1,\varepsilon})\right]^2 = \varphi_1'(U_{1,\varepsilon})$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\int_\tau^t\int_\Omega(\partial_t\psi(U_{1,\varepsilon}))^2 + \tfrac{1}{2}\left\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,t))\right\|_{2,\Omega}^2 \\
&\qquad\leqslant \frac{1}{2}\left\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,\tau))\right\|_{2,\Omega}^2 + \int_\tau^t\int_\Omega\frac{1}{2}\nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2\varphi_1'(U_{1,\varepsilon}) \\
&\qquad\quad + \frac{1}{2}\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})^2\varphi_1'(U_{1,\varepsilon}) + (\partial_t\psi(U_{1,\varepsilon}))^2
\end{aligned}
$$

d'où

$$
\begin{aligned}
&\left\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,t))\right\|_{2,\Omega}^2 \leqslant \left\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,\tau))\right\|_{2,\Omega}^2 \\
&\qquad + \int_{t/2}^t\int_\Omega\left\{\nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2 + \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})^2\right\}\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})
\end{aligned}
$$

en intégrant sur $(t/2, t)$ par rapport à $\tau$ on obtient :

$$
\begin{aligned}
&\frac{t}{2}\left\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,t))\right\|_{2,\Omega}^2 \\
&\qquad\leqslant \int_{t/2}^t\int_\Omega\left[\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(x,\tau))\right]^2 + \frac{t}{2}\int_{Q_{t/2,t}}\left\{\nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2+\gamma^2\right\}\varphi_1'(U_{1,\varepsilon}) \\
&\qquad\leqslant \int_{Q_T}\left[\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\right]^2 + \frac{t}{2}\int_{Q_{t/2,t}}\left\{\nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2+\gamma^2\right\}\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})
\end{aligned}
$$

A présent, on utilise la majoration faite sur $\|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})\|_{2,\Omega}$ dans la preuve du lemme 2, le fait que $\varphi_1'(s) > 0$ , l'hypothèse $(H_4)$ sur $\gamma$ et $\|U_{1,\varepsilon}\|_\infty \leqslant \|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty$ pour écrire :

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,t))\|_{2,\Omega}^2 \leqslant\ & \frac{2}{t}\int_\Omega \int_0^{U_{1,0,\varepsilon}(x)} \varphi_1(s)dsdx \\ & + \int_{Q_{t/2,t}} \left\{\nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2+\gamma^2\right\}\varphi_1'(U_{1,\varepsilon}) \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon}(.,t))\|_{2,\Omega}^2 \leqslant\ & \frac{2}{t}\int_\Omega \int_0^{U_{1,0,\varepsilon}(x)} \varphi_1(s)dsdx \\ & +\varphi_1'(\|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty)\int_{Q_{t/2,t}} \nu^2(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)^2 \\ & +\varphi_1'(\|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty)\left(C_1+C_2\|U_{1,0,\varepsilon}\|_\infty^r\right)\int_{Q_{t/2,t}} \gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon,U_{2,\varepsilon},U_{3,\varepsilon},U_{4,\varepsilon}) \end{aligned}$$

Grâce aux lemmes précédents, on peut majorer le second membre de cette inégalité indépendamment de $\varepsilon$.

Le lemme suivant nous servira à préciser la régularité de la solution obtenue :

*Lemme 4 :*

*Il existe une constante $M_2$ et une fonction non décroissante $F_2$ indépendantes de $\varepsilon$, $0 < \varepsilon \leqslant 1$ telles que :*

$$\int_{Q_T} |(\varphi_i(U_i))_t|^2(x,t)dxdt \leqslant M_2 \quad , T > 0 \quad , i = 1,2,3$$

$$\int_{Q_T} |(\varphi_4(U_4))_t|^2(x,t)dxdt \leqslant F_2(T) \quad , T > 0.$$

Preuve : nous nous réfèrerons à l'article [AL] pour la démonstration de ce lemme.

## 4.2 Existence globale dans le cas non dégénéré :

D'après le lemme 1, la solution $U_\varepsilon$ du problème (P$_\varepsilon$) est bornée par une constante sur son intervalle d'existence $[0, T_{\max}]$, on peut donc conclure que $T_{\max} = +\infty$, ce résultat découle du fait que l'on a :

$$\text{Si} \qquad T_{\max} < +\infty, \qquad \text{alors} \qquad \lim_{t \longrightarrow T_{\max}} U_\varepsilon(.,t) = +\infty \; .$$

# Chapter 5
# Existence

## 5.1 Existence de la solution dans le cas dégénéré :

A l'aide des estimations établies sur les solutions approchées $U_\varepsilon$, on va montrer l'existence d'un quadruplet de fonctions $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ solution du problème (P) au sens de la définition 1, chapitre 2, i.e qui vérifie pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$ et $T > 0$ :

* $U_i \in L^2(Q_T), \nabla\varphi_i(U_i) \in L^2(Q_T)$

* Pour chaque fonction test $\psi \in C^1(\overline{Q_T})$ telleque $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\eta} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0, T)$, on a l'égalité :

$$\int_\Omega U_i(x,T)\psi(x,T)dx + \int_{Q_T} \nabla\varphi(U_i)\nabla\psi(x,t)dx\,dt = \int_{Q_T} (\partial_t\psi.U_i - f.\psi)\,dx\,dt + \int_\Omega U_{i,0}(x)\psi(x,0)dx$$

La démonstration étant identique pour chaque $i = 1, 2, 3, 4$, on omettra de mentionner l'indice afin d'alléger les notations.

D'après le lemme 2 , la suite $(\varphi(U_\varepsilon))_\varepsilon$ est bornée dans $H^1(Q_T)$, et comme l'injection (canonique) de $H^1(Q_T)$ dans $L^2(Q_T)$ est compacte, il existe une sous-suite de $(\varphi(U_\varepsilon))_\varepsilon$, encore notée $(\varphi(U_\varepsilon))_\varepsilon$ , qui converge :

-faiblement dans $H^1(Q_T)$
-presque partout dans $Q_T$
-fortement dans $L^2(Q_T)$

} vers un élément $W \in H^1(Q_T)$.

Vu la continuité de $\varphi^{-1}$ , on a $U_\varepsilon \longrightarrow \varphi^{-1}(W)$ presque partout et donc au sens des distributions (par le théorème de Lebesgue).

Par ailleurs, grâce au lemme 1 et au théorème de Lebesgue, la suite $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$, donc on peut en extraire une sous-suite encore notée $(U_\varepsilon)_\varepsilon$ , qui converge faiblement vers un élément $U$ de $L^2(Q_T)$, et donc au sens des distributions. Comme la limite d'une suite dans $D'(Q_T)$ est unique, on conclut que $U = \varphi^{-1}(W)$ dans $D'(Q_T)$ , dans $L^2(Q_T)$ (car $U \in L^2(Q_T)$ ) et donc presque partout dans $Q_T$. Ainsi , la fonction $\varphi(U) = W \in H^1(Q_T)$ est limite faible de la suite $(\varphi(U_\varepsilon))_\varepsilon$ dans $H^1(Q_T)$.

Il s'ensuit que pour toute fonction test $\psi \in C^1(\overline{Q_T})$ telleque $\dfrac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T)$ , on a :

$$\int_{Q_T} \nabla\varphi(U_\varepsilon)\nabla\psi(x,t)\,dxdt \;\longrightarrow\; \int_{Q_T} \nabla\varphi(U)\nabla\psi(x,t)\,dxdt$$
$$\int_{Q_T} U_\varepsilon(\partial_t\psi)dx\,dt \;\longrightarrow\; \int_{Q_T} U(\partial_t\psi)dx\,dt$$

A présent montrons que $U$ admet un représentant dans $L^2(Q_T)$ défini pour tout $T \geqslant t > 0$.

D'après le lemme 4 , $(\nabla\varphi(U_\varepsilon)(.,t))_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$ , $\forall t > 0$. Comme $U_\varepsilon$ est bornée par $M$ et que $\varphi$ est croissante et continue , que $\Omega$ est borné, la suite $(\varphi(U_\varepsilon)(.,t))_\varepsilon$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. Ainsi, $(\varphi(U_\varepsilon)(.,t))_\varepsilon$ est bornée dans $H^1(\Omega), \forall t > 0$.

Donc il existe $V_t \in H^1(\Omega)$ limite faible de $(\varphi(U_\varepsilon)(.,t))_\varepsilon$ dans $H^1(\Omega)$ , et presque partout dans $\Omega$. Si on écrit $V_t = V(.,t)$ on a

$\forall t > 0 :$ $\varphi(U_\varepsilon)(.,t) \longrightarrow V(.,t)$ pour presque tout $x \in \Omega$,

et comme $\varphi^{-1}$ est une fonction continue, on a :

$$\forall t > 0 : \ U_\varepsilon(.,t) \longrightarrow \varphi^{-1}(V)(.,t) \ \text{ pour presque tout } \ x \in \Omega.$$

Montrons que $U_\varepsilon \longrightarrow \varphi^{-1}(V)$ dans $D'(Q_T)$.

Soit $\psi \in C^1(\overline{Q_T})$, alors

$$\forall t > 0 : \ U_\varepsilon(.,t)\psi(.,t) \longrightarrow \varphi^{-1}(V)(.,t)\psi(.,t) \quad \text{presque partout dans } \Omega.$$

Comme $U_\varepsilon$ et $\psi$ sont bornées par rapport à $t$ et $x$ , et que $\Omega$ est borné on peut appliquer le théorème de Lebesgue et montrer que

$$(*) \quad \forall t > 0 : \int_\Omega U_\varepsilon(x,t)\psi(x,t)\, dx \to \int_\Omega \varphi^{-1}(V)(x,t)\psi(x,t)\, dx$$

En appliquant le théorème de Lebesgue à la fonction $t \to \int_\Omega U_\varepsilon(x,t)\psi(x,t)\, dx$ on obtient

$$\int_0^T \left| \int_\Omega (U_\varepsilon(x,t)\psi(x,t) - \varphi^{-1}(V)(x,t)\psi(x,t))dx \right| dt \to 0$$

en particulier

$$\int_0^T \int_\Omega U_\varepsilon(x,t)\psi(x,t)\, dx\, dt \to \int_0^T \int_\Omega \varphi^{-1}(V)(x,t)\psi(x,t)\, dx\, dt$$

Cette convergence étant encore valable pour $\psi \in D(Q_T)$ , cela signifie que $U_\varepsilon \to \varphi^{-1}(V)$ dans $D'(Q_T)$.

Comme par ailleurs $U_\varepsilon \to U$ dans $D'(Q_T)$, et $U \in L^2(Q_T)$, on en déduit que $U = \varphi^{-1}(V)$ dans $L^2(Q_T)$, donc $U$ admet un représentant dans $L^2(Q_T)$ défini en tout $t > 0$.

Grâce à $(*)$ , on conclut que $\forall T > 0$, pour une fonction $\psi \in C^1(\overline{Q_T})$ , on a :

$$\int_\Omega U_\varepsilon(x,T)\psi(x,T)\, dx \longrightarrow \int_\Omega U(x,T)\psi(x,T)\, dx$$

Enfin , pour voir que

$$\int_{Q_T} f_i(U_{1,\varepsilon}, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\psi(x,t)dx\, dt \longrightarrow \int_{Q_T} f_i(U_1, U_2, U_3, U_4)\psi(x,t)dx\, dt$$

pour tout $i = 1, 2, 3, 4$ , il suffit d'appliquer le théorème de la convergence dominée de Lebesgue à la suite de fonctions $(f_i(U_{1,\varepsilon}, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\psi)_\varepsilon$ qui converge presque partout vers la fonction $f_i(U_1, U_2, U_3, U_4)\psi$ (la convergence est préservée grâce à la continuité de la fonction $f_i$ ) et qui est dominée par une fonction appartenant à $L^1(Q_T)$ , à savoir $c \times \psi$ ( la constante $c$ s'obtient en utilisant les hypothèses $(H_1), (H_3)$ et $(H_4)$ faites sur les seconds membres des équations qui définissent le problème (P) et le fait que les $U_i$ sont bornés. )

# Chapter 6
# Unicité

## 6.1 Unicité de la solution du problème (P)

Supposons qu'il existe deux solutions faibles au problème, $U = (U_1, U_2, U_3, U_4)$ et $V = (V_1, V_2, V_3, V_4)$. Elles vérifient toutes deux l'égalité intégrale [eqI] (de la Définition 1, section 2.3). En soustrayant ces deux égalités membre à membre, l'une pour $U$ , l'autre pour $V$ , on obtient :

$$\int_\Omega [U_i - V_i]\,(x,T)\psi_i(x,T)dx + \int_{Q_T} \nabla\left[\varphi_i(U_i) - \varphi_i(V_i)\right]\nabla\psi_i(x,t)dxdt$$

(eq U) $$= \int_{Q_T} \partial_t\psi_i.\,[U_i - V_i]\,(x,t)dx - \int_{Q_T} [f_i(U) - f_i(V)]\,\psi_i(x,t)dxdt$$

pour toute fonction test $\psi_i \in C^1(\overline{Q_T})$ telle que $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial\eta} = 0$ sur $\partial\Omega \times (0,T)$ et $\psi_i \geqslant 0.$

Introduisons la fonction

$$\eta_i(x,t) = \begin{cases} \dfrac{\varphi_i(U_i) - \varphi_i(V_i)}{U_i - V_i} & \text{si } U_i \neq V_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Puis, construisons la suite $(\eta_{i,\varepsilon})_{\varepsilon\geqslant 0}$ de fonctions régulières, uniformément bornées dans $L^\infty(Q_T)$ telle que :

$$\eta_{i,\varepsilon} \geqslant \varepsilon$$

$$\text{et } \lim \left\|\frac{\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i}{\sqrt{\eta_{i,\varepsilon}}}\right\|_{L^2(Q_T)} = 0$$

Pour la construction de cette suite, voir [ACP] et ses références.

Pour tout $\varepsilon \in ]0,1]$, on introduit le problème adjoint non dégénéré suivant :

$$\begin{cases} \partial_t \psi_i + \eta_{i,\varepsilon} \Delta \psi_i = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,T) \\ \dfrac{\partial \psi_i}{\partial \eta} = 0 & \text{dans } \partial\Omega \times (0,T) \qquad i = 1...4 \\ \psi_i(x,T) = \chi_{i,\varepsilon} & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où $\chi_{i,\varepsilon} = sign_\varepsilon (U_i - V_i)^+$ est l'approximation régulière de la fonction $sign$ définie par $sign(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } & x > 0 \\ 0 \text{ si } & x = 0 \\ -1 \text{ si } & x < 0 \end{cases}$

Ce problème admet une unique solution classique $\psi_{i,\varepsilon}$ vérifiant :

$$0 \leqslant \psi_{i,\varepsilon}(x,t) \leqslant 1$$

$$\int_{Q_T} \eta_i (\Delta \psi_{i,\varepsilon})^2 dxdt \leqslant K_1$$

où $K_1$ est une constante indépendante de $\varepsilon$. (Voir [M2] )

en prenant cette solution comme fonction test dans [eqU], on obtient

$$\int_\Omega [U_i - V_i]^+(x,T)\chi_{i,\varepsilon}(x,T)dx - \int_{Q_T} \nabla \left[\varphi_i(U_i) - \varphi_i(V_i)\right] \nabla \psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

$$= \int_{Q_T} \left[-\eta_{i,\varepsilon}(\Delta\psi_{i,\varepsilon})\right](U_i - V_i)dxdt - \int_{Q_T} \left[f_i(U) - f_i(V)\right]\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

d'où

$$\int_\Omega (U_i - V_i)^+(x,T)dx - \int_{Q_T} \left[\varphi_i(U_i) - \varphi_i(V_i)\right] \Delta \psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

$$= \int_{Q_T} \left[-\eta_{i,\varepsilon}(\Delta\psi_{i,\varepsilon})\right](U_i - V_i)dxdt - \int_{Q_T} \left[f_i(U) - f_i(V)\right]\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

mais comme $\varphi_i(U_i) - \varphi_i(V_i) = \eta_i(x,t)(U_i - V_i)$ on obtient :

$$\int_\Omega (U_i - V_i)^+(x,T)dx - \int_{Q_T} \left[\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i\right](x,t)\left[U_i - V_i\right](x,t)\Delta\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

$$= -\int_{Q_T} \left[f_i(U) - f_i(V)\right]\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz , on peut déduire :

$$\int\limits_{Q_T} \left[\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i\right](x,t)\left[U_i - V_i\right](x,t)\Delta\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} (U_i - V_i)^2 dxdt \int\limits_{Q_T} (\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i)^2 (\Delta\psi_{i,\varepsilon})^2 dxdt$$

et donc d'après les propriétés de $\psi_{i,\varepsilon}$

$$\int\limits_{Q_T} \left[\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i\right](x,t)\left[U_i - V_i\right](x,t)\Delta\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt$$

$$\leqslant \int\limits_{Q_T} (U_i - V_i)^2 dxdt \int\limits_{Q_T} \frac{(\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i)^2}{\eta_{i,\varepsilon}} dxdt \quad .K_1$$

Par ailleurs , comme $f_i$ est localement lipschitzienne, on peut écrire :

$$\int\limits_{Q_T} \left[f_i(U) - f_i(V)\right]\psi_{i,\varepsilon}(x,t)dxdt \leqslant K \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \left|U_i - V_i\right| dxdt$$

On obtient finalement :

$$\int\limits_{\Omega} (U_i - V_i)^+(x,T)dx + \left\|U_i - V_i\right\|^2_{L^2(Q_T)} \left\|\tfrac{\eta_{i,\varepsilon} - \eta_i}{\sqrt{\eta_{i,\varepsilon}}}\right\|^2_{L^2(Q_T)}$$

$$\leqslant K \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \left|U_i - V_i\right| dxdt$$

pour tout $\varepsilon > 0$, et lorsque $\varepsilon$ tend vers zéro , il nous reste :

$$\int\limits_{\Omega} (U_i - V_i)^+(x,T)dx \leqslant K \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \left|U_i - V_i\right| dxdt$$

En procédant exactement de la même façon avec $\chi_{i,\varepsilon} = sign_{\varepsilon}(U_i - V_i)^-$, on obtient

$$\int\limits_{\Omega} (U_i - V_i)^-(x,T)dx \leqslant K \int\limits_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} \left|U_i - V_i\right| dxdt$$

De ces deux inégalités on tire

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{4} |U_i - V_i| \, (x,T) dx \leqslant K \int_{Q_T} \sum_{i=1}^{4} |U_i - V_i| \, dx dt$$

Cette inégalité étant valable pour tout $T > 0$, l'application du lemme de Gronwall nous donne

$$\int_{\Omega} \sum_{i=1}^{4} |U_i - V_i| \, (x,T) dx \leqslant 0 \ \ , \ \ \forall T > 0$$

c'est-à-dire

$$U = V$$

ce qui termine la démonstration.

# Chapter 7
# Comportement asymptotique

Dans cette partie nous montrons le second théorème énoncé dans le Chapitre2. Nous aurons à considérer deux cas : $\nu = 0$ et $\nu > 0$.

Lorsque $\nu > 0$ :

Rappelons l'inégalité (0.1) du Lemme0, Chapitre4 :

$$\int\limits_{Q_T} [\gamma(U_{1,\varepsilon} - \varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon}) + \nu(U_{1,\varepsilon} - \varepsilon)] \, dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega} U_{1,0}(x) \, dx$$

Comme $\gamma$ est continue et que la suite $(U_{1,\varepsilon})_\varepsilon$ converge presque partout vers $U_1$ ,on obtient la même inégalité pour $U_1$ , à savoir

$$\int\limits_{Q_T} [\gamma(U_1, U_2, U_3, U_4) + \nu U_1] \, dxdt \leqslant \int\limits_{\Omega} U_{1,0}(x) \, dx$$

En particulier

$$\int\limits_{Q_T} \nu U_1(x,t) dxdt \leqslant \|U_{1,0}\|_{1,\infty}, \forall T > 0$$

Donc $U_1 \in L^1(Q_\infty)$.

Il existe alors une suite $\tau_j \longrightarrow +\infty$ telle que $\int\limits_{\Omega} U_1(x, \tau_j) dxdt \longrightarrow 0$ lorsque $j \longrightarrow +\infty$ (voir la fin du chapitre pour la justification de cette affirmation).

Pour tout $j \in \mathbb{N}$ et $t > \tau_j$ on a :

$$0 \leqslant \int\limits_{\Omega} U_1(x,t) dx \leqslant \int\limits_{\Omega} U_1(x, \tau_j) dx$$

( On obtient cette inégalité en intégrant la première équation du système approché (P$_\varepsilon$) - voir page 32- et en faisant tendre $\varepsilon$ vers 0 ).

Et donc, quand $j \longrightarrow +\infty$ et $t \longrightarrow +\infty$ on obtient :

$$U_1(.,t) \longrightarrow_{t\longrightarrow+\infty} 0 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Le même raisonnement en utilisant les inégalités (0.2) et (0.3) du Lemme0 conduit au résultat suivant

$$U_2(.,t), U_3(.,t) \longrightarrow_{t\longrightarrow+\infty} 0 \quad \text{dans} \quad L^1(\Omega).$$

Lorsque $\nu = 0$ :

Dans ce cas on ne peut plus utiliser l'inégalité (0.1) pour conclure à l'appartenance de $U_1$ à l'espace $L^1(Q_\infty)$ . Nous rappelons le résultat du Lemme 3 démontré dans le Chapitre 4 et valable pour $\nabla\varphi_1(U_1)$ :

*Pour tout t>0 on a :*

$$\begin{aligned}
\|\nabla\varphi_1(U_1(.,t))\|^2_{2,\Omega} \quad \leqslant \quad & \frac{2}{t}\int\limits_{\Omega}\int\limits_{0}^{U_{1,0}(x)} \varphi_1(s)dsdx \\
& +K_1 \int\limits_{Q_{t/2,t}} \nu^2(U_1)^2 \\
& +K_2 \int\limits_{Q_{t/2,t}} \gamma(U_1,U_2,U_3,U_4)
\end{aligned}$$

Pour une fonction donnée $g$ des deux varibles $x,t,$ posons :

$$\overline{g}(t) = \frac{1}{mes(\Omega)}\int\limits_{\Omega} g(x,t)dx$$

Puis, multiplions la première équation du système (P$_\varepsilon$) par $\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})$ et intégrons le résultat sur $\Omega\times(\tau,\tau+t)$ , il vient alors :

$$\int_{\tau}^{\tau+t}\int_{\Omega} \partial_t U_{1,\varepsilon}.\varphi_1'(U_{1,\varepsilon}) + \nabla\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})\nabla\varphi_1(U_{1,\varepsilon})$$

$$= -\int_{\tau}^{\tau+t}\int_{\Omega} \left[\gamma(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon, U_{2,\varepsilon}, U_{3,\varepsilon}, U_{4,\varepsilon})\varphi_1'(U_{1,\varepsilon}) + \nu(U_{1,\varepsilon}-\varepsilon)\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})\right] dxdt$$

d'où

$$\int_{\Omega}\int_{\tau}^{\tau+t} \partial_t\varphi_1(U_{1,\varepsilon})dxdt + \int_{\tau}^{\tau+t}\int_{\Omega} \varphi_1''(U_{1,\varepsilon})\varphi_1'(U_{1,\varepsilon})|\nabla U_{1,\varepsilon}|^2 dxdt \leqslant 0$$

et donc

$$\int_{\Omega} \varphi_1(U_{1,\varepsilon})(x,\tau+t)dx - \varphi_1(U_{1,\varepsilon})(x,\tau)dx \leqslant 0$$

On en conclut que

$$0 \leqslant \overline{\varphi_1(U_{1,\varepsilon})}(\tau+t) \leqslant \overline{\varphi_1(U_{1,\varepsilon})}(\tau), \forall\tau, t>0$$

et par conséquent, après passage à la limite sur $\varepsilon$, la moyenne $\overline{\varphi_1(U_1)}$ est une fonction non-croissante en temps. L'inégalité de Poincaré-Wirtinger (voir [AL]) permet de conclure à l'existence d'une constante $K(\Omega)$ telle que pour tout $t > 0$ :

$$\left\|\varphi_1(U_1)(.,t) - \overline{\varphi_1(U_1)}(t)\right\|_{2,\Omega} \leqslant K(\Omega)\left\|\nabla\varphi_1(U_1)(.,t)\right\|_{2,\Omega}$$

Maintenant, on utilise l'inégalité du lemme 3 rappelée plus haut avec $\nu = 0$, à savoir :

$$\begin{aligned}\|\nabla\varphi_1(U_1(.,t))\|_{2,\Omega}^2 \quad &\leqslant \quad \frac{2}{t}\int_{\Omega}\int_0^{U_{1,0}(x)} \varphi_1(s)dsdx \\ &\quad + K_2\int_{Q_{t/2,t}} \gamma(U_1,U_2,U_3,U_4)^2\end{aligned}$$

De cette inégalité, on voit $\|\nabla\varphi_1(U_1(.,t))\|_{2,\Omega} \longrightarrow 0$ lorsque $t \longrightarrow +\infty$, il s'ensuit que

$$\left\|\varphi_1(U_1)(.,t) - \overline{\varphi_1(U_1)}(t)\right\|_{2,\Omega} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \longrightarrow +\infty$$

Comme la fonction $\quad t \longrightarrow \overline{\varphi_1(U_1)}(t) \quad$ est non-croissante, qu'elle est continue et minorée par 0, elle admet une limite $l \geqslant 0$ , et donc $\varphi_1(U_1)(.,t)$ converge vers $l$ dans $L^2(\Omega)$ , et aussi dans $L^1(\Omega)$.

Montrons que $\quad U_1(.,t) \to \varphi^{-1}(l) \quad$ dans $\quad L^1(\Omega) \quad$ lorsque $t \to +\infty$.

On a , par le théorème des accroissements finis :

$$\int_\Omega \left|U_1(x,t) - \varphi^{-1}(l)\right| \, dx = \int_\Omega (\varphi^{-1})'(v_x) \left|\varphi(U)(x,t) - l\right| \, dx$$

avec $v_x$ compris entre $l$ et $\varphi(U)(x,t)$, d'où :

$$\begin{aligned} \int_\Omega \left|U_1(x,t) - \varphi^{-1}(l)\right| \, dx \quad &\leqslant \quad c \int_\Omega \left|\varphi(U)(x,t) - l\right| \, dx \\ &= \quad c \left\|\varphi(U)(.,t) - l\right\|_{1,\Omega} \end{aligned}$$

la dernière quantité tendant vers 0 lorsque $t \to +\infty$.

Si on pose $\quad U_1^* = \varphi^{-1}(l) \quad$ qui est une constante positive ou nulle, alors :

$$\|U(.,t) - U_1^*\|_{1,\Omega} \to 0 \ \text{ , lorsque } \quad t \to +\infty.$$

et le Théorème 2.2 est complètement démontré.

**Remarque :** Au cours de la démonstration de la convergence de $U_1$ vers $0$ dans $L^1(\Omega)$ dans le cas $\nu > 0$, nous avons affirmer l'existence d'une suite numérique $(\tau_n)_n$ qui tend vers $+\infty$ $\quad$ et pour laquelle $\int_\Omega U_1(x,\tau_n)dx$ $\quad$ tend vers 0 lorsque $n \longrightarrow +\infty$.

Posons $\quad f(t) = \int_\Omega U_1(x,t)dx$ . Alors d'après le Lemme 0 , $f \in L^1(0,+\infty)$, donc $\lim_{T\longrightarrow+\infty} \int_T^{T+1} f(t)dt = 0$ $\quad$ (reste d'une intégrale convergente).

Soit $\quad (T_n)_n \quad$ une suite de réels positifs telle que $\quad T_n \longrightarrow +\infty \quad$ lorsque $\quad n \longrightarrow +\infty$ , alors d'après le théorème de la moyenne, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $\quad \tau_n \in ]T_n, T_n+1[$

tel que

$$\int_{T_n}^{T_n+1} f(t)dt = f(\tau_n)$$

et donc $\lim_{n\longrightarrow+\infty} f(\tau_n) = \lim_{n\longrightarrow+\infty} \int_{T_n}^{T_n+1} f(t)dt = 0$ , ce qui achève la démonstration.

# Références


[AL] Aliziane T. Langlais L., ”*Global existence and asymptotic behavior for a system of degenerate evolution equation*”, ALiziane T., Département de Mathématiques, USTHB ; Langlais M., Université Victor Segalen Bordeaux 2.

[A] Aliziane T. ”*Etude de la régularité pour un problème d'évolution dégénéré en dimension supérieure de l'espace*” . Thèse de Magistère. U.S.T.H.B Alger (1993).

[ACP] Aronson D., Crandall M.G., Peletier L.A. ”*Stabilization of solutions of a degenerate nonlinear diffusion problem*”. Non-linear analysis. 6 .(1982) p.1001-1022.

[EHL] El Haj Laamri, ”*Etude de l'existence de solutions globales d'un système de réaction-diffusion parabolique fortement non linéaire*”, Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse, Vol XII, No 3, 1991.

[FMW] Fitzgibbon W.E., Morgan J.J., Waggoner S.J., ”*A quasilinear system modeling the spread of infectious disease*”. Rocky Mountain Journal of Mathematics, 2, 1992, p.579-592.

[FMM] Fitzgibbon W.E., Martin C.B.,Morgan J.J.,” *A diffusive epidemic model with criss-cross dynamics*” Department of Mathematics, Houston University (disponible dans un recueil d'articles de M.ALIZIANE, Faculté de Mathématiques, USTHB ).

[L] Langlais M., ”*Equations elliptiques et paraboliques*” cours de D.E.A 1983-1984 ( Documentation de M.ALIZIANE ).

[LSU] Ladyzenskaja O.A., Solonikov V.A., Ural'ceva N.N., ”*Linear and Quasilinear Equation of Parabolic Type* ” Trans. Math. Monographs, 23 american Math Society, Providence (1968).

[M1] Maddalena L.,”*Existence of global solution for reaction-diffusion systems with density dependent diffusion*” Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications, Vol.8,No. 11, p.1383-1394, (1984).

[M2] Maddalena L., ”*Existence, uniqueness and qualitative properties of the solution of a degenerate nonlinear parabolic system*”. J. Math. Anal. Applications, 127 1987, p. 443-458.

[Mf] Marek Fila, ”*Boundedness of global solutions of nonlinear diffusion equations*”, Journal of Differential Equations **98**, 226-240 (1992).

[Mi] Mikhaïlov " *Equations aux dérivées partielles*" Edition MIR, Moscou.

[MA1] Moulay M.S., Aliziane T., "*Régularité des solutions d'un problème d'évolution dégénéré en dimension N*" Maghreb Math. Revue, Vol. 3, No 1, June 94, p.89-96.

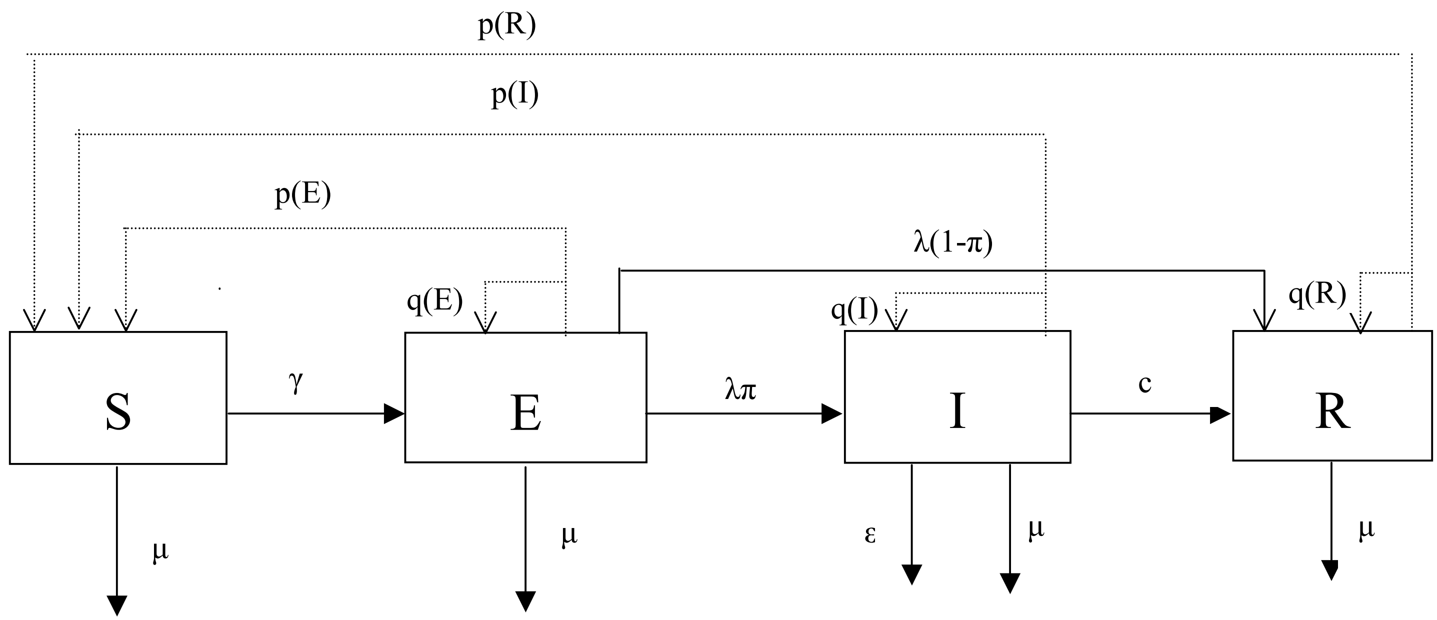
[MA2] Moulay M.S., Aliziane T.,"*Global existence and asymptotic behavior for a system of degenerate evolution equations*", Maghreb Math.,Rev., Vol. 9, No 1&2, June & Dec. 2000, p.9-22.

[O] Okubo ,"*Diffusive and Ecological Problems : Mathematical Models* " Vol.10, Springer-Verlag, Berlin Heidelgerg New-york,1980.

[OKY) Oleinik D.A, Kalashnikov A.S, Yui-lin C.,"*The Cauchy and Boundary value problem for the equation of Insteady Filtration type*" Izv. Akad. Nauk SSSR, Soc. Math. 22, 1958, p.667-704.

[S] Christelle Supo, "*Modélisation et analyse mathématique de la propagation des viroses dans les populations de carnivores*" Thèse de Doctorat, n° d'ordre 1657, Ecole Doctorale de Mathématiques et Informatique, Université Bordeaux 1, Décembre 1996.

[VK] Vo Khac Khoan , "*Distributions. Analyse de Fourier.Opérateurs aux dérivées partielles* " Edition Vuibert,1972.


p(R)
p(I)
p(E)
λ(1-π)
q(E)
q(I)
q(R)
S
γ
E
λπ
I
c
R
μ
μ
ε
μ
μ