N° d'ordre :26/2005 – M/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTE DE PHYSIQUE

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de **MAGISTER**

EN : **Physique Théorique**

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

Par **: BENRABIA Djaafer**

Sujet

LES MODES DE MASSE NULLE DANS LE MODELE GEOMETRO-DIFFERENTIEL DE LA PARTICULE ETENDUE

Soutenue publiquement le : 06 /07/2005 devant le Jury composé de :

Mr. A. Smida	**Professeur**	**Président**
Mr. M. Hachemane	**Maître de conférences**	**Directeur de Thèse**
Mme. F. Z. Ighezou	**Professeur**	**Examinateur**
Mme. A. Frahi	**Maître de conférences**	**Examinateur**
Mme. F. Chafa	**Maître de conférences**	**Examinateur**
Mr. R. Annou	**Maître de conférences**	**Examinateur**

REMERCIEMENTS

Ce travail a été réalisé au sein du laboratoire de Physique théorique de la Faculté de Physique théorique de l'Université des sciences et de la technologie Houari Boumediene (USTHB) sous la direction de Monsieur Hachemane Mahmoud à qui j'adresse au terme de ce travail une sincère reconnaissance pour son assistance continuelle.
Ma reconnaissance s’adresse aussi à Monsieur M. Fellah, Professeur à l’USTHB, pour m’avoir accueilli dans le laboratoire qu’il dirige.

Je remercie Monsieur A. Smida Professeur à l'USTHB pour avoir accepté de présider le jury de soutenance de ce Magister. Les membres du jury, Madame F.Z. Ighezou Professeur à l'USTHB, Madame F. Chafa maître de Conférences à l'USTHB, Madame A. Frahi Maître de Conférences à l'USTHB, et Monsieur R. Annou Maître de Conférences à l'USTHB sont tout aussi remerciés pour avoir accepté de juger ce travail.

Je remercie également mes collègues, le groupe enseignants du labo : 05 et en particulier, Madame A.-H. Hamici Maître Assistante et Monsieur A. Chouchaoui Professeur pour leur encouragement.

Pour finir, je voudrais remercier mes frères et sœurs, mon oncle Mohand et mes parents pour leur soutien tout au long de ce travail.

Table des matières

INTRODUCTION **2**

1 FORMALISME MATHEMATIQUE DE LA SYMETRIE ET QUANTIFICATION PAR LA METHODE DES REPRESENTATIONS INDUITES **6**

1.1 Généralités et définitions 7

1.2 La représentation des groupes 10

1.3 Groupes de Lie 13

1.4 La méthode des représentations induites 16

2 PARTICULE PONCTUELLE DE MASSE NULLE **21**

2.1 Espace-temps de Minkowski 22

2.2 Le groupe de Lorentz 25

2.3 Le groupe de Lorentz et le groupe $SL(2, C)$ 31

2.4 Le groupe de Poincaré 33

2.5 Masse et spin des particules 35

2.6 Les représentations induites de masse nulle du groupe de Poincaré 36

3 PARTICULE ETENDUE DE MASSE NULLE **45**

3.1 Variété différentiable 47

3.2 Espace tangent à une variété 48

3.3 Espaces fibrés 51

3.4 Particule étendue en théorie fonctionnelle 55

3.5 Modèle géométrique de la particule étendue 56

3.6 Propagateur de la particule étendue 60

CONCLUSION **68**

INTRODUCTION

La relativité restreinte et la mécanique quantique se trouvent à la base de la description des lois fondamentales de la physique contemporaine. La synthèse de ces deux théories en termes de théorie des groupes a été initiée par Wigner [1] dans sa publication de 1939 où il donne la classification de toutes les représentations unitaires et irréductibles du groupe de Poincaré et des petits groupes correspondants. On considère depuis, que les particules élémentaires sont décrites par des représentations unitaires et irréductibles du groupe de symétrie de l'espace-temps.

L'un des résultats du travail de Wigner est de constater que les petits groupes décrivent les propriétés intrinsèques des particules élémentaires. Dans le cas de l'électron, particule massive de spin 1/2, le petit groupe est localement isomorphe au groupe des rotations tridimensionnelles et décrit le spin de l'électron [2, 3]. Dans le cas des particules de masse nulle, tels que le photon et les neutrinos, le petit groupe est localement isomorphe au groupe euclidien à deux dimensions constitué des translations et rotations bidimensionnelles de l'espace euclidien à deux dimensions. Cependant, l'interprétation physique complète de ce groupe n'a pas été donnée par Wigner, ce dernier associe l'hélicité des particules sans masse au sous-groupe des rotations bidimensionnelles du groupe euclidien, sans donner un sens physique aux degrés de liberté des translations. Ce n'est qu'en 1971 [4] et récemment [5, 6, 7] que l'on a reconnu que les translations correspondent aux transformations de jauge qui ne sont pas mesurables. C'est ainsi qu'on arrive à comprendre les transformations de jauge du quadri-vecteur potentiel du champ électromagnétique et la polarisation gauche et droite du neutrino et de l'antineutrino, respectivement, à partir des propriétés du petit groupe [2, 8].

D'intenses recherches ont suivi le travail de Wigner et ont abouti à l'élaboration de la méthode des représentations induites basée sur la notion d'orbite, de petit groupe et (dans notre cas) de groupe contenant un sous-groupe invariant abélien (Mackey,1951-1953) [9, 10]. Le petit groupe ou encore le groupe d'isotropie est un sous-groupe du groupe de Lorentz [2, 9, 10, 11] et [12, 13] ces représentations irréductibles permettent de construire les représentations unitaires

et irréductibles du groupe de Poincaré. Dans le cas des représentations de masse nulle, il s'agit du groupe produit semi-direct du groupe des translations de l'espace-temps et du groupe de recouvrement du groupe euclidien à deux dimensions. Les particules de masse nulle, le photon et les neutrinos, apparaissent alors comme des représentations unitaires et irréductibles du groupe de Poincaré d'hélicité 1 et 1/2, respectivement. Les particules scalaires massives (spin 0), les électrons et les particules vectorielles massives (spin 1) correspondent aux représentations du groupe de Poincaré induites à partir du groupe produit semi-direct du groupe des translations de l'espace-temps et du groupe de recouvrement du groupe des rotations tridimensionnelles. A notre connaissance, il n'existe pas de particule scalaire sans masse dans la nature, cependant son étude présente un intérêt théorique.

Les difficultés connues liées à la description des particules massives, telles que l'impossibilité de définir une densité de courant de probabilité définie positive et la non existence d'opérateur position relativiste, subsistent dans le cas des particules sans masse et se trouvent même aggravées par l'absence de référentiels de repos pour ces particules [14]. D'autre part, l'électrodynamique quantique n'a pu fournir de densité de courant de probabilité pour les photons et l'application de la théorie des perturbations s'est heurtée à de grandes difficultés. Seule la première approximation de la série donne un résultat en accord avec l'expérience, les approximations d'ordre supérieur non seulement ne précisent pas le résultat mais présentent des divergences. Cette difficulté a été résolue grâce au procédé de renormalisation de la masse et de la charge des électrons introduit par Feynman, Tomonaga et Schwinger. Ceci a permis de compenser les termes divergents, cependant le problème de la convergence de la série entière reste un problème ouvert [15]. Toutes ces difficultés témoignent des inconsistances internes de la théorie des champs.

Ceci a conduit certains physiciens à lier ces difficultés à notre conception de la particule comme étant ponctuelle (sans dimension géométrique). Ainsi, l'approximation de la particule par un point ayant atteint ses limites, il faut tenir compte de l'extension de la particule. La théorie quantique fonctionnelle[1] s'inscrit dans ce contexte et se base sur la constatation qu'une particule est un système physique influençable dans ses caractéristiques propres. De ce fait, la particule doit être décrite par une fonction u appartenant à un espace séparable R_u et rendant

[1] Remarquons que la théorie quantique fonctionnelle n'est pas la seule théorie disponible qui remet en question la ponctualité de la particule. Une théorie quantique stochastique a été élaborée par Prugovecki en reconsidérant la notion de mesure [16, 17]. Cette théorie associe a la particule une extension stochastique liées aux imperfections des appareils de mesure.

compte de ses caractéristiques [18]. En d'autres termes l'application d'un champ externe doit se manifester sur la forme de la particule et sur la forme de la fonction u. Cependant, le caractère ponctuel de la particule reste un aspect partiel de la réalité physique, représenté géométriquement par un point M qui est une certaine fonctionnelle de u. L'onde prévisionnelle donnant les probabilités de mesure est aussi une fonctionnelle $X[u,t]$ de u et du temps t.

Par ailleurs, les récents développements de la physique théorique ont conduit à une géométrisation de la physique. Le contenu géométrique de la théorie de la relativité restreinte et de la relativité générale est bien connu. La géométrie différentielle permet d'associer à ces théories une structure géométrique de fibré [19]. Un espace fibré s'obtient en remplaçant les points de l'espace-temps par de nouveaux espaces, les fibres. Notons que cette structure géométrique s'adapte bien à la description des particules. Un fibré dont les points de l'espace-temps sont des espaces des états d'isospin (de spin) permet de décrire à la fois la localisation de la particule dans l'espace-temps et son état interne d'isospin (de spin) [20].

Le travail que nous présentons s'inscrit dans la continuité des travaux effectués au sein du laboratoire qui tentent de décrire les particules étendues par un modèle géométro-différentiel [21, 22, 23, 24, 25]. Dans ce modèle, la particule est représentée par une section du fibré de Hilbert dans lequel la variété de base peut être un espace de configuration donnant une représentation partiellement ponctuelle en accord avec le point de vue de Wigner et correspond à un mode quantique externe. La fibre est un espace support d'une représentation induite de configuration interne du groupe de Poincaré. Chaque point de la variété de base de cette section est associé à une fonction d'onde définie sur l'espace interne de configuration décrivant les caractéristiques propres de la particule conformément à la théorie fonctionnelle et correspond à un mode quantique interne de la particule étendue. Les amplitudes de probabilité sont données par des fonctionnelles X dont les arguments sont les sections des fibrés. Les représentations impulsion peuvent être considérées aussi bien pour le mode externe que pour le mode interne. La commutation (le passage) des représentations configuration et impulsion s'interprètent comme des localisations et matérialisations de la particule étendue comme dans le cas de la particule ponctuelle. De plus, le propagateur s'obtient aussi de la même façon que pour le cas des particules ponctuelles en combinant une matérialisation avec une localisation.

En particulier, le présent travail vient compléter les travaux précédents dans le sens où l'on s'intéresse aux particules de masse nulle qui n'ont pas été considérées auparavant dans le modèle géométro-différentiel. Il se donne comme objectif la familiarisation avec ce type de

particules. Pour cela, nous avons dû étudier les représentations induites du groupe de Poincaré qui sont susceptibles de décrire les particules ponctuelles de masse nulle dans les espaces de configuration et des impulsions. Bien que ce sujet soit traité dans plusieurs références, son étude n'en demeure pas moins difficile à cause de la multitude de notions de théorie des groupes qui y interviennent et des diverses formulations qui existent. Ensuite, nous avons tenté d'appliquer le procédé de commutation aux deux représentations précédentes. Nous avons pu déterminer le propagateur de la particule ponctuelle scalaire de masse nulle mais nous n'avons pas eu le temps de traiter la commutation pour la particule de spin 1/2, et le courage de considérer les particules de spin 1. Après ce premier résultat, nous nous sommes attelés à la généralisation du modèle géométro-différentiel aux particules étendues en passant par une étude sommaire de ses deux composantes principales, la géométrie différentielle et la théorie quantique fonctionnelle. Nous avons construit les fibrés décrivant les états de la particule étendue pour des spins quelconques des deux modes composant la particule. Cependant, la commutation n'a été considérée que dans le cas scalaire, dont le propagateur est le produit de deux propagateurs ponctuels scalaires.

Le premier chapitre traite de la théorie des groupes et des représentations de ces derniers. Nous commençons par donner quelques définitions d'ordre général concernant ces deux aspects de la théorie des groupes. Nous introduisons ensuite la méthode des représentations induites.

Le deuxième chapitre contient une étude du groupe de Poincaré. Nous donnons en particulier ses représentations induites de masse nulle dans les espaces de configuration et des impulsions. La première est réductible et décrit des états localisés, alors que la seconde est irréductible et décrit des états réels de la particule ponctuelle de masse nulle. Nous analysons les processus de matérialisation et de localisation de cette particule dans le cas scalaire, car le cas spinoriel mérite une étude particulière alors que le cas vectoriel est difficile à cause de la liberté de jauge.

Le troisième chapitre s'organise de la manière suivante : on commence par introduire quelques notions de géométrie différentielle dont on aura besoin, telles que les variétés différentiables et les espaces fibrés. Ensuite, nous présentons les idées de la théorie quantique fonctionnelle qui est la source des interprétations physiques du modèle géométrique en fibré de la particule étendue. Nous introduisons alors ce modèle en fibré et nous analysons les processus de matérialisation et de localisation de la particule étendue. Nous terminons notre travail avec une conclusion où nous résumons l'ensemble des résultats obtenus et en donnant quelques commentaires concernant les particules de masse nulle d'hélicité 1/2 et 1.

Chapitre 1

FORMALISME MATHEMATIQUE DE LA SYMETRIE ET QUANTIFICATION PAR LA METHODE DES REPRESENTATIONS INDUITES

La découverte des symétries en physique et leur exploitation ont largement contribué au développement de cette science [9, 26]. Un système physique est symétrique, ou possède des propriétés de symétrie, s'il reste inchangé par rapport à certaines transformations [9, 27, 28]. La théorie des groupes est le cadre mathématique qui se prête à l'étude systématique de ces propriétés et permet ainsi de mieux voir les implications et les simplifications liées à l'existence de ces propriétés de symétrie. Actuellement, les méthodes de la théorie des groupes couvrent des domaines aussi variés que la physique du solide, la chimie et notamment la physique des particules [2, 29, 30, 31]. En particulier, la mécanique quantique peut être formulée en termes de théorie des groupes [9, 29].

En physique des particules, on distingue deux types de symétries. Les symétries spatio-temporelles sont liées aux propriétés géométriques de l'espace-temps, telles que les translations d'espace et du temps et les rotations tridimensionnelles auxquelles le théorème de Noether fait correspondre les grandeurs conservées de quantité de mouvement, d'énergie et de moment cinétique, respectivement [28, 32]. Les symétries qui n'ont pas une origine géométrique sont

appelées symétries "internes" telles que les symétries unitaires $U(1)$ de la charge électrique, $SU(2)$ d'isospin et $SU(3)$ de saveur [32].

Dans ce chapitre, nous allons introduire la méthode des représentations induites qui permet pour un choix de groupe de symétrie donné, de construire la théorie quantique qui lui correspond [9, 33]. De manière générale, une représentation induite est une représentation construite à partir d'une représentation d'un sous-groupe [9, 10]. Dans le cas du groupe de Poincaré, cette méthode reproduit les résultats de la théorie des champs habituelle pour une particule de masse m et de spin j [33, 34, 35].

Nous commençons, dans le premier paragraphe, par donner quelques définitions d'ordre général sur les groupes. Ensuite, dans le second paragraphe, nous passons à la notion de représentation d'un groupe qui est largement utilisée en mécanique quantique et sur laquelle se base la méthode que nous nous proposons de décrire. Dans le troisième paragraphe, nous nous intéresserons à une famille importante de groupes appelés groupes de Lie (continus) dont le groupe de Poincaré est un exemple. Nous décrirons la méthode des représentations induites dans le cas général dans le dernier paragraphe. Un souci de précaution nous incite à noter que plusieurs détails trop mathématiques ont été omis dans les définitions car ils nécessitent une formation et un cadre qui dépassent ceux du présent travail.

1.1 Généralités et définitions

Les opérations de symétrie d'un système physique constituent les éléments d'un groupe, le groupe de symétrie du système considéré. Par définition, un groupe G est un ensemble d'éléments muni d'une loi de composition interne vérifiant les propriétés suivantes [2, 11, 29] :

1. l'ensemble G contient un élément neutre e ou 1 : $ge = eg = g$.
2. chaque élément g de G a son inverse g^{-1} : $gg^{-1} = g^{-1}g = e$.
3. la loi de composition est associative : $(gg_1)g_2 = g(g_1g_2)$, pour tous les éléments g, g_1 et g_2 de G.

Pour un groupe commutatif ou abélien, la loi de composition est commutative : $g_1g_2 = g_2g_1$. L'ordre d'un groupe est le nombre d'éléments qu'il contient. Par conséquent, un groupe est fini ou infini selon que son ordre soit fini ou infini, respectivement. Le groupe discret (fini ou infini) se distingue par le fait que ses éléments restent dénombrables, alors qu'un groupe infini dont les éléments ne sont pas dénombrables est un groupe "continu".

La répartition des groupes en classes de groupes isomorphes simplifie considérablement leur étude car deux groupes G et G' isomorphes sont considérés comme étant identiques. L'isomorphisme est une application f qui fait correspondre à chaque élément g de G un seul élément $f\,(g)$ de G' (en particulier à l'élément neutre e dans G correspond l'élément neutre $f\,(e) = e'$ dans G') telle que la loi de multiplication dans G entraîne la loi de multiplication dans G' [11, 29, 36] :

$$f(g_1 g_2) \ = f(g_1)\ f(g_2) \tag{1.1}$$

Dans le cas où la correspondance entre les éléments de G et G' n'est pas biunivoque, mais conserve la loi de multiplication (1.1), l'application f est appelée homomorphisme.

La classification des éléments d'un même groupe est tout aussi importante pour son étude que la classification des groupes. Considérons deux types de classification. La première est celle de la conjugaison ; deux éléments g_1 et g_2 appartenant au groupe G sont dits conjugués l'un de l'autre si l'on peut trouver un autre élément g du même groupe tel que :

$$g_2 \ = g g_1 g^{-1} \tag{1.2}$$

Cette relation est une relation d'équivalence, c'est-à-dire réflexive, symétrique et transitive. L'ensemble des éléments conjugués est alors une classe d'équivalence de G. Un élément du groupe appartient à une seule classe, autrement dit, les classes sont ou bien disjointes ou bien identiques et réalisent donc une partition de G . La seconde classification se base sur la notion de sous-groupe. La restriction de la loi de multiplication définie sur G à un sous-ensemble H, pour lequel les propriétés définissant un groupe restent valables, fait de H un sous-groupe de G. On définit alors la classe à gauche gH (à droite Hg) contenant l'élément g par l'ensemble [2, 29] :

$$gH \ = \{\ gh,\ h \in H\}\ \ ; \quad (Hg \ = \{\ hg,\ h \in H\}) \tag{1.3}$$

des élément obtenus par multiplication à gauche (à droite) de g par tous les éléments de H. L'ensemble dont les éléments sont les classes à gauche (à droite) s'appelle l'ensemble quotient G/H (ou $H\backslash G$ pour les classes à droite). Le nombre de ses éléments est l'indice de H dans G.

De la première classification découle la notion, de sous-groupe conjugué H' de H défini par

$$H' \ = \ gHg^{-1} = \{h' = ghg^{-1},\ h \in H\};\ g \in G \tag{1.4}$$

Cette notion est importante dans la classification des groupes car elle permet de distinguer les sous-groupes invariants ou distingués de G vérifiant $H' = H$. La classe des groupes simples est celle des groupes ne contenant pas de sous-groupe invariant autre que le groupe trivial (l'élément neutre). La classe des groupes semi-simples est celle des groupes qui ne contiennent pas de sous-groupe invariant abélien autre que le groupe trivial. Ces deux types de groupes ont des applications considérables en physique bien que le groupe de Poincaré qui nous intéresse ne soit ni simple ni semi-simple [9].

La seconde classification des éléments d'un même groupe est utile dans le cas concret où un groupe agit sur un certain espace M (comme l'espace-temps). Le groupe G est un groupe de transformation de l'ensemble M si [9, 37] :

1. à chaque point x appartenant à l'ensemble M et pour tout élément g appartenant à G, le point transformé gx est dans M.
2. l'élément neutre e du groupe s'identifie à la transformation identique dans M, $ex = x$.
3. pour tous les éléments g_1 et g_2 de G, on a $(g_1 g_2)\, x = g_1\, (g_2 x)$.

L'action du groupe G est dite effective, si l'élément neutre e est le seul à correspondre à la transformation identique dans M. Le groupe est dit transitif si, pour deux points quelconques x et y de M, il existe une transformation g de G qui nous fait passer de x à y. Dans ce dernier cas, l'espace M devient un espace homogène isomorphe au quotient G/K, où K est un sous-groupe stabilisateur (le petit groupe ou groupe d'isotropie) d'un point x_0 considéré comme origine de M

$$kx_0 = x_0; \qquad \forall k \in K \tag{1.5}$$

Quand l'action de G sur M n'est pas transitive, ce dernier est subdivisé en domaines de transitivité ou orbites. Une orbite O_{x_0} de G au point x_0 est l'ensemble des points y atteints sous l'action de tous les éléments g du groupe G sur le point x_0 [2, 9]

$$O_{x_0} = \{y = gx_0,\ g \in G\} \tag{1.6}$$

Nous verrons dans le second chapitre que l'espace-temps de Minkowski est entièrement un espace homogène du groupe de Poincaré alors que seul l'hyperboloïde des vitesses d'une particule de masse m est une orbite, et donc un espace homogène, obtenue à partir de l'impulsion de repos p_0 (la partie supérieure ou inférieure du cône de lumière dans le cas d'une particule de

masse nulle). La notion d'espace homogène est une notion importante pour la construction des représentations induites[1]. En effet, chaque point x d'un espace homogène M est mis en correspondance avec une classe $x \in G/K$. Cet isomorphisme permet de ramener l'étude des propriétés de l'espace M sous l'action du groupe G à son action sur les classes (à gauche ou à droite) représentées par des éléments x_G du même groupe G. L'action d'un élément $g \in G$ sur x_G est égale au produit du représentant $(gx)_G$ de la classe gx par un facteur $(g, x)_K$ appartenant au sous-groupe K [33]

$$gx_G = (gx)_G (g\ , x)_K \tag{1.7}$$

Le système de facteurs vérifie les propriétés suivantes :

$$(e, x)_K = e \tag{1.8}$$

$$(g_1 g_2, x)_K = (g_1, g_2 x)_K (g_2, x)_K \tag{1.9}$$

$$(g, x)_K^{-1} = \left(g^{-1}, x\right)_K \tag{1.10}$$

Le système de facteurs intervient directement dans la formule définissant les représentations induites. Pour introduire cette dernière, nous allons présenter la notion de représentation d'un groupe dans le cas général dans le paragraphe suivant.

1.2 La représentation des groupes

La notion de représentation ou de réalisation d'un groupe de transformations dans un espace donné peut être introduite par l'exemple du groupe des rotations tridimensionnelles dans l'espace euclidien à trois dimensions $\mathbb{R}^3$; c'est la substitution de l'opération géométrique qui est la rotation (élément du groupe) par une matrice qui nous fait passer d'un point de $\mathbb{R}^3$ à un autre. D'une manière générale, une représentation U d'un groupe G est un homomorphisme qui fait correspondre à chaque élément g appartenant au groupe un opérateur $U(g)$ agissant dans un espace vectoriel H^n de dimension n [2, 11, 29, 31]

[1] La notion d'homogénéité est en réalité beaucoup plus importante. Par exemple, elle simplifie l'étude des propriétés locales des groupes topologiques ([9] page 63).

$$\begin{aligned} U &: g \mapsto U(g) \\ U(g_1)\,U(g_2) &= U(g_1 g_2) \end{aligned} \tag{1.11}$$

L'espace H^n sur lequel agit la représentation est l'espace support de la représentation. Sa dimension est la dimension de la représentation[2]. Cette représentation est dite fidèle si la correspondance entre les éléments g et les opérateurs $U(g)$ est un isomorphisme, ou dégénérée dans le cas contraire. La représentation est unitaire quand les opérateurs adjoints hermitiques s'identifient aux inverses

$$U^\dagger U = U U^\dagger = I \tag{1.12}$$

Remarquons, qu'en mécanique quantique, un élément g d'un groupe de transformation G est représenté par un opérateur $U(g)$ agissant dans l'espace de Hilbert des états $\mid \psi\rangle$. L'action de l'opérateur $U(g)$ sur un état $\mid \psi\rangle \rightarrow \mid \psi'\rangle = U(g) \mid \psi\rangle$ est soit unitaire et linéaire, soit anti-unitaire et anti-linéaire (Théorème de Wigner) [38, 39]. Dans la plupart des cas, il s'agit d'opérateurs unitaires qui préservent donc le produit scalaire

$$\langle U\varphi \mid U\psi\rangle = \langle \varphi \mid \psi\rangle \tag{1.13}$$

Comme les états $\mid \psi\rangle$ ne sont connus qu'à une phase ω près, autrement dit les états $\mid \psi\rangle$ et les états $\exp i\omega(g) \mid \psi\rangle$ donnent les mêmes densités de probabilités, ce sont plutôt les représentations projectives que l'on considère en mécanique quantique non relativiste à la place des représentations habituelles (vectorielles) définies plus haut [9, 38, 39]

$$\begin{aligned} U(g_1)\,U(g_2) &= \exp\left[i\omega(g_1,\, g_2)\right] U(g_1 g_2) \\ g_1, g_2 &\in G \end{aligned} \tag{1.14}$$

[2]Dans le cas d'une représentation linéaire de dimension finie, on peut choisir une base $\{e_i\}_{i=1,2,\ldots,n}$ sur H^n et chaque élément g de G est mis en correspondance avec une matrice $D(g)$ dont les éléments sont donnés par

$$U(g)\, e_j = e_i \left[D(g)\right]^i{}_j$$

Une sommation sur l'indice de ligne i est sous-entendue (j étant l'indice de colonne). L'ensemble des matrices $D(g)$ forme une représentation matricielle du groupe G.

Cependant, pour le groupe de Poincaré, les représentations vectorielles doivent être utilisées car ce sont elles qui laissent invariantes les équations relativistes.

Notons que la recherche de toutes les représentations d'un groupe est considérablement simplifiée par l'existence d'une relation d'équivalence

$$U' = SUS^{-1} \tag{1.15}$$

où S est une application inversible de l'espace H^n de la représentation U vers l'espace H'^n de la représentation U'. Ces deux représentations sont dites équivalentes [11, 19] et appartiennent donc à la même classe d'équivalence. Il suffit donc de connaître une seule représentation pour déduire toutes les autres par la relation d'équivalence (1.15). En physique, ce qui est important c'est la recherche des représentations irréductibles car elles peuvent décrire des systèmes élémentaires [10]. Elles correspondent à la décomposition de l'espace H^n en sous-espaces invariants minimaux. Un sous-espace H_1 de H^n qui se transforme en lui-même sous l'action de $U(g)$ est un sous-espace invariant (stable). La représentation $U(g)$ est dite irréductible dans le cas où l'espace support de la représentation est minimal, c'est-à-dire qu'il ne contient aucun sous-espace stable. Elle est réductible dans le cas contraire et peut être complètement réductible quand le sous-espace $H_1^{\perp}$ (complément orthogonal de H_1 dans H^n) est lui aussi invariant sous l'action de $U(g)$. Alors, cette dernière peut s'écrire comme une somme directe $U = U_1 \oplus U_1^{\perp}$ (la matrice correspondante $D(g)$ est diagonale en deux blocs D_1 et $D_1^{\perp}$). De manière générale, dans le cas d'une représentation complètement réductible [9, 36]

$$U = \sum_i \oplus U_i \tag{1.16}$$

où les U_i sont les restrictions de la représentation U aux sous-espaces invariants H_i. Ainsi, l'espace support de la représentation est lui-même qualifié de réductible et se décompose en somme directe de sous-espaces invariants

$$H^n = \sum_i \oplus H_i \tag{1.17}$$

Les représentations réductibles mais non complètement réductibles sont dites indécomposables [9].

Dans plusieurs cas, il s'agit de décomposer la représentation régulière d'un groupe qui est

un cas particulier des représentations induites que nous verrons plus loin. La représentation régulière à gauche $\tilde{U}_l$ d'un groupe continu G est définie sur l'espace de Hilbert $\tilde{H}$ des fonctions $\tilde{\psi}$ définies sur G et à valeurs sur un espace linéaire L par [10, 37]

$$\begin{aligned} \tilde{U}_l(g)\ \tilde{\psi}(g') &= \psi\left(g^{-1}g'\right) \\ g, g' &\in G \end{aligned} \tag{1.18}$$

De même, on définit la représentation régulière à droite par

$$\begin{aligned} \tilde{U}_r\ \tilde{\psi}(g') &= \psi(g'g) \\ g, g' &\in G \end{aligned} \tag{1.19}$$

Les représentations régulières à gauche et à droite sont équivalentes et appartiennent donc à la même classe.

1.3 Groupes de Lie

Plusieurs groupes utilisés en physique sont des groupes continus ou de Lie. Nous avons déjà donné des exemples de tels groupes, à savoir les rotations et translations de l'espace et du temps. Nous donnons à présent la définition mathématique d'un groupe continu G qui est un groupe dont les éléments $\{g_1(\omega^n), g_2(\omega^n), ...\}$ sont des fonctions analytiques (différentiables) d'un nombre fini de paramètres réels $\omega^n, n = 1, 2, ...r$, variant dans des intervalles continus [29, 31, 32]. Comme exemples de ces paramètres, citons les angles de rotation et les vecteurs de translation.

Tout élément d'un groupe continu peut s'écrire sous la forme

$$g(\omega^n) = \exp(-i\omega^n X_n) \tag{1.20}$$

où nous avons adopté la convention de sommation d'Einstein : la sommation porte sur toutes les valeurs de l'indice deux fois répété, une fois en position basse (covariant) et une fois en position haute (contravariant). Les générateurs X_n (en nombre égal au nombre des paramètres)

$$X_n = i\frac{\partial g(\omega^n)}{\partial \omega^n\ |_{\omega^n=0}} \tag{1.21}$$

engendrent l'algèbre de Lie du groupe. Celle-ci est un espace vectoriel dont les vecteurs de base sont les générateurs et sur lequel est définie une loi de commutation $[,]$ (les crochets de Lie) ayant les propriétés suivantes [2, 9, 31] :

1. La relation fondamentale de l'algèbre de Lie

$$[X_n, X_m] = X_n X_m - X_m X_n = C^k_{n\,m} X_k \tag{1.22}$$

   où les $C^k_{n\,m}$sont les constantes de structure du groupe.

2. La commutation est antisymétrique

$$[X_n, X_m] = -[X_m, X_n] \tag{1.23}$$

3. Pour des nombres α, β quelconques, nous avons la propriété de linéarité

$$[X_n, \alpha X_k + \beta X_m] = \alpha [X_n, X_k] + \beta [X_n, X_m] \tag{1.24}$$

4. L'identité de Jacobi

$$[X_n, [X_k, X_m]] + [X_k, [X_m, X_n]] + [X_m, [X_n, X_k]] = 0 \tag{1.25}$$

Les constantes de structure, dont les propriétés

$$C^k_{m\,n} = -C^k_{n\,m} \tag{1.26}$$

$$C^i_{k\,m} C^r_{i\,n} + C^j_{n\,k} C^r_{j\,m} + C^l_{m\,n} C^r_{l\,k} = 0 \tag{1.27}$$

se déduisent des propriétés (1.23) et (1.25), caractérisent l'algèbre de Lie du groupe. Pour un groupe abélien, ces constantes sont nulles. Par définition, le rang d'une algèbre est le nombre de générateurs qui commutent entre eux et forment ainsi une sous-algèbre de Cartan. Si aucun des générateurs ne commute avec les autres, l'algèbre est alors de rang un. Un opérateur de casimir est un opérateur qui commute avec tous les générateurs du groupe. En général, le nombre de casimir que contient un groupe est égal à son rang (Théorème de Racah) [31, 32]. Les valeurs propres du casimir caractérisent les représentations irréductibles du groupe (ce

sont les paramètres d'irréductibilité du groupe) et correspondent à des valeurs d'une grandeur physique invariante représentée par ce casimir comme le carré du moment cinétique pour les rotations.

Le domaine de variation des paramètres du groupe définit un espace appelé variété[3] [2] du groupe. Pour un groupe à un paramètre, il s'agit d'une droite ou un cercle, et dans le cas du groupe des rotations[4] $SO(3)$ la variété est le volume d'une sphère de rayon 2π. Chaque élément du groupe occupe une position sur la variété ; ainsi à l'origine de la variété correspond la transformation identité du groupe. Toute transformation finie du groupe peut s'écrire comme une succession de transformations infinitésimales dont celles au voisinage de l'identité possèdent la forme

$$g\left(\delta\omega^n\right) = I - i\delta\omega^n X_n \tag{1.28}$$

Géométriquement, ceci se traduit par le fait que l'on peut joindre l'origine de la variété du groupe à la position que l'élément du groupe occupe par une ligne continue. Un tel groupe est dit connexe car sa variété n'est pas une union de parties disjointes. En exigeant, en plus, que toutes les lignes liant deux points quelconques peuvent se transformer les unes en les autres de manière continue et sans quitter la variété du groupe, celui-ci devient simplement connexe [2, 30].

L'algèbre de Lie décrit le groupe au voisinage de l'identité et détermine donc ses propriétés locales. Deux groupes partageant une algèbre identique sont localement isomorphes mais peuvent avoir des propriétés globales complètement différentes. Ainsi, le groupe $SO(3)$ et le groupe $SU\,(2)$ sont localement isomorphes, mais globalement, nous avons deux transformations du groupe $SU\,(2)$ qui correspondent à une même transformation du groupe $SO(3)$. L'application inverse de $SO(3)$ vers $SU(2)$ est un homomorphisme doublement valué, continu et bijectif, ce qui fait de $SU(2)$ un groupe de recouvrement (ou revêtement) de $SO(3)$. De plus, parmi tous les groupes qui partagent une algèbre de Lie identique, le groupe de recouvrement universel est le seul qui soit simplement connexe et c'est le cas pour $SU(2)$.

[3] Un groupe de Lie est défini aussi comme étant une variété différentiable possédant une structure de groupe [9].

[4] En théorie des groupes,
S signifie spécial (le déterminant des matrices est égal à un). La lettre O désine l'orthogonalité (la matrice transposée est égale à la matrice inverse).

1.4 La méthode des représentations induites

Considérons un groupe G, un sous-groupe K et une représentation $D(k)$ de K. Notons par $\tilde{H}^D$ l'espace des fonctions $\tilde{\psi}$ définies sur G à valeurs sur un espace linéaire L^D support de la représentation $D(k)$

$$\begin{aligned} \tilde{H}^D \ni \tilde{\psi} : G &\to L^D \\ g &\longmapsto \tilde{\psi}(g) \end{aligned} \tag{1.29}$$

Les fonctions $\tilde{\psi}$ vérifient la condition de structure

$$\tilde{\psi}(gk) \;=\; D(k^{-1})\;\tilde{\psi}(g) \tag{1.30}$$

La représentation $\tilde{U}^D = D(K) \uparrow G$, induite à partir de la représentation $D(K)$ de K, est définie dans l'espace $\tilde{H}^D$ par [9]

$$\left[\tilde{U}^D(g)\,\tilde{\psi}\right](g') = \left[\frac{d\mu(g^{-1}x)}{d\mu(x)}\right]^{1/2} \tilde{\psi}\left(g^{-1}g'\right) \tag{1.31}$$

où $d\mu(g^{-1}x)/d\mu(x)$ est la dérivée de Radon-Nykodim [9] de la mesure quasi-invariante $d\mu(x)$ dans $M = G/K$. Pour une mesure invariante,[5] cette dérivée est égale à l'unité et la relation (1.31) se réduit à la représentation régulière

$$\left[\tilde{U}^D(g)\,\tilde{\psi}\right](g') = \tilde{\psi}\left(g^{-1}g'\right) \tag{1.32}$$

En notant par x_G le représentant de la classe x de G/K, alors tout élément g appartenant à cette classe peut s'écrire d'une manière unique sous la forme d'un produit $g = k_g x_G$ où k_g est un élément du petit groupe K [9, 10]. Cette décomposition permet de définir une application entre l'espace $\tilde{H}^D$ des fonctions $\tilde{\psi}$ définies sur le groupe G et l'espace H^D des fonctions ψ définies sur l'espace homogène $M = G/K$ par la relation suivante [9] :

$$\tilde{\psi}(g) = D\left(k_g^{-1}\right)\psi(x) \tag{1.33}$$

[5] $d\mu\left(g^{-1}x\right) = d\mu(x)$

La relation (1.33) se déduit de la relation (1.30) en posant $g = k_g x_G$ et en identifiant les fonctions ψ sur M avec les fonctions $\tilde{\psi}$ sur G qui sont constantes sur les classes

$$\tilde{\psi}(x_G) = \psi(x) \tag{1.34}$$

Nous pouvons donc redéfinir une représentation induite U^D dans l'espace H^D en identifiant l'action de la représentation $\tilde{U}^D$ dans $\tilde{H}^D$ avec l'action de la représentation U^D dans l'espace H^D

$$\left[U^D(g)\psi\right](x) \;=\; \left[\tilde{U}^D(g)\tilde{\psi}\right](x_G) \tag{1.35}$$

L'utilisation de la définition des facteurs $(g,x)_K$ et la condition de structure donne [33]

$$\left[U^D(g)\psi\right](x) \;=\; D\left[(g^{-1},x)_K^{-1}\right]\psi(g^{-1}x) \tag{1.36}$$

Si l'espace homogène se réalise comme l'espace de configuration, alors la relation (1.36) définit la représentation configuration. La même chose est vraie pour la représentation impulsion sauf que, dans ce cas, le sous-groupe K (le petit groupe) change de telle sorte que l'espace quotient G/K soit isomorphe à un hyperboloïde de masse (la partie supérieure ou inférieure du cône de lumière dans l'espace des impulsions). Nous considérerons ces deux types de représentations dans le chapitre suivant.

Pour le moment, nous poursuivons la présentation générale de la théorie en considérant deux sous-groupes K et H et les espaces quotients (homogènes) respectifs G/K et G/H (les espaces de configuration et des impulsions). Nous voulons définir la notion de commutaion de deux représentations induites du même groupe qui sert à déterminer le propagateur. Les deux représentations $\tilde{U}^\Delta \equiv \Delta(H) \uparrow G$ et $\tilde{U}^D \equiv D(K) \uparrow G$ du même groupe G agissent sur les espaces support $\tilde{H}^\Delta$ et $\tilde{H}^D$ contenant les fonctions $\tilde{\varphi}$ et $\tilde{\psi}$ définies sur le groupe G et à valeurs sur les espaces L^Δ et L^D supports des représentations $\Delta(H)$ et $D(K)$, respectivement. Par définition, l'opération de commutation est une application linéaire [33]

$$\begin{aligned} T &: \tilde{H}^\Delta \to \tilde{H}^D \\ \tilde{\varphi} &\longmapsto \tilde{\psi} = T\tilde{\varphi} \end{aligned} \tag{1.37}$$

qui vérifie la relation

$$T\tilde{U}^\Delta(g) = \tilde{U}^D(g)\,T; \qquad \forall g \in G \tag{1.38}$$

Cet opérateur a la forme intégrale suivante

$$\tilde{\psi}\left(x_G\right) = \left(T\tilde{\varphi}\right)\left(x_G\right) = \int_{G/H} d\mu\left(y_G\right) t\left(x_G^{-1} y_G\right) \tilde{\varphi}\left(y_G\right) \tag{1.39}$$

où y_G est le représentant de la classe $y \in G/H$ et t une application linéaire, de L^{Δ} vers L^{D}, qui vérifie la condition de structure suivante

$$t\left(kgh\right) = D\left(k\right) t\left(g\right) \Delta\left(h\right) \tag{1.40}$$
$$g \in G,\ h \in H,\ k \in K$$

Pour les fonctions définies sur les espaces homogènes, la commutation des deux représentations prend la forme suivante

$$\psi\left(x\right) = \left(T\varphi\right)\left(x\right) = \int\limits_{G/H} d\mu\left(y\right) t\left(x_G^{-1} y_G\right) \varphi\left(y\right) \tag{1.41}$$

Le passage inverse est réalisé à l'aide d'un autre opérateur $T' : \tilde{H}^{D} \rightarrow \tilde{H}^{\Delta}$

$$\varphi\left(y\right) = \left(T'\psi\right)\left(x\right) = \int_{G/K} d\mu\left(x\right) t'\left(y_G^{-1} x_G\right) \psi\left(x\right) \tag{1.42}$$

La composition des deux commutations, c'est-à-dire le passage $\tilde{H}^{D} \rightarrow \tilde{H}^{\Delta}$ et le retour $\tilde{H}^{\Delta} \rightarrow \tilde{H}^{D}$, définit un autre opérateur qui a le sens d'une propagation.

Ce sens de transition d'un état localisé à un autre est renforcé par la propriété d'imprimitivité de la représentation induite $U^{D}\left(G\right)$ du groupe G. En effet, toute représentation induite possède une application P qui associe à chaque sous-ensemble B de M un opérateur de projection $P(B)$ dans l'espace support H^{D} de la représentation U^{D}. Un système d'imprimitivité, ayant l'espace homogène $M = G/K$ comme base d'imprimitivité, est une application satisfaisant aux conditions suivantes :

1. P est une mesure spectrale, c'est-à-dire :
   - $P(\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} B_i) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} P(B_i); \qquad (B_i \cap B_j = \emptyset; \quad i \neq j)$
   - $P(\emptyset) = 0$
   - $P(M) = 1$
   - $P(B) = P^{\dagger}(B) = P^{2}(B)$

2. P est covariante vis-à-vis de $U^D(g)$

$$U^D(g)P(B)U^D(g)^{-1} \;=\; P(gB); \qquad\qquad \forall B \;\subset\; M$$

Réciproquement, la représentation $U^D\,(G)$ d'un groupe G ne possède un système d'imprimitivité que si et seulement si elle est équivalente à une représentation induite (théorème de Mackey) [9, 10].

L'opérateur de projection défini par[6]

$$[P(B)\psi]\,(x) = \chi_B\,(x)\,\psi(x), \tag{1.43}$$

est un système d'imprimitivité (la fonction caractéristique $\chi_B\,(x)$ est égale à un quand x appartient à B, et nulle dans le cas contraire). Par conséquent, la probabilité $\mathcal{P}_\psi\,(B)$ de trouver une particule décrite par un état quantique normalisé $|\psi\rangle$ dans une région $B \subset M$ de l'espace est la valeur moyenne du projecteur $P(B)$ dans cet état

$$\mathcal{P}_\psi\,(B) = \langle\psi|P\,(B)\,|\psi\rangle = \int_B |\psi\,(x)|^2 \;d\mu\,(x) \tag{1.44}$$

Un élément g du groupe G transforme la région $B \subset M$ en la région $gB \subset M$ et sa représentation transforme l'état $|\psi\rangle$ en l'état $|\psi'\rangle = U^D(g)\,|\psi\rangle$. La propriété de covariance du système d'imprimitivité est équivalente à l'invariance de la probabilité lors de cette transformation

$$\langle\psi|P\,(B)\,|\psi\rangle = \langle\psi'|P\,(gB)\,|\psi'\rangle \tag{1.45}$$

Ceci signifie que deux observateurs, transformés l'un de l'autre par g, voient la même particule dans des états différents et mesurent des coordonnées différentes de la même région avec la même probabilité, c'est le point de vue passif. Le point de vue actif interprète la dernière relation d'invariance de la façon suivante : deux systèmes physiques identiques, localisés dans des régions transformées l'une de l'autre par g, se trouvent dans des états transformés par $U^D\,(g)$. En général, la représentation U^D transforme le sous-espace des états localisés en B en le sous-espace des états localisés en gB. Les systèmes physiques vérifiant cette propriété sont dits localisables [9, 40].

Expliquons mieux cette dernière propriété en soulignant que l'imprimitivité signifie que

[6] La variable x peut être aussi bien celle de la position ou de l'impulsion dans le cas d'une symétrie non relativiste. Dans le cas relativiste, l'impulsion est mieux adaptée à l'interprétation probabiliste.

l'espace support de la représentation induite se décompose en sous-espaces qui, sous l'action de la représentation induite, se transforment et s'interchangent sans se mélanger. Il se trouve que cette décomposition est parfaitement identique à la décomposition de l'espace des états d'un système quantique en sous-espaces propres correspondant à des valeurs propres déterminées d'une certaine observable. En effet, l'action de l'opérateur position Q sur un état $|\psi\rangle$ appartenant à l'espace H des états d'une particule scalaire est définie par :

$$\begin{aligned} [Q\psi](x) &= x\psi(x) \\ \langle x|\psi\rangle &= \psi(x) \end{aligned} \tag{1.46}$$

où la valeur propre x appartient à l'espace homogène $M = G/K$. L'espace des états H se décompose en sous-espaces H_x correspondant à des états localisés en x. Quand un élément g du groupe G agit sur le point x, il le transforme en le point gx et sa représentation transforme H_x en H_{gx} sans mélanger ces deux sous-espaces. On identifie alors un certain sous-espace H_{x_0} avec l'espace L^D défini plus haut et qui s'interprète, désormais, comme espace des degrés de liberté de spin de la particule vis-à-vis des transformations du sous-groupe K qui ne change pas x_0.

Tout ceci montre que le théorème d'imprimitivité de Mackey décrit bien la localisation d'un système quantique. Il trouve aussi d'autres applications en physique comme la classification des représentations irréductibles des groupes de Galilée et de Poincaré ainsi que la démonstration de l'équivalence des points de vue de Schrödinger et de Heisenberg de la mécanique quantique [9].

Chapitre 2

PARTICULE PONCTUELLE DE MASSE NULLE

En théorie de la relativité restreinte, la notion de symétrie est directement liée au principe de relativité qui stipule l'équivalence des référentiels galiléens en mouvements rectilignes uniformes les uns par rapport aux autres pour la description des lois de la nature [41]. En d'autre termes, les équations du mouvement doivent garder la même forme dans un changement de référentiel inertiel. La constance de la vitesse de la lumière (vitesse limite des interactions) apparaît alors comme une conséquence du principe de relativité et conduit à l'abandon du temps absolu de la relativité galiléenne pour confondre le temps et l'espace dans un nouveau cadre géométrique pour la description de la physique, l'espace-temps à quatre dimension de Minkowski. La seule considération du principe de relativité, et le fait que la vitesse de la lumière soit la même dans tous les référentiels inertiels, permet d'expliciter les transformations de Lorentz comme groupe de symétrie de l'espace-temps [38, 41]. Si on inclu les translations quadri-dimensionnelles de l'espace-temps (transformation inhomogène correspondant à un changement d'origine des coordonnées), il s'agit alors du groupe de Poincaré [38, 39].

La méthode des représentations induites que nous avons introduite au premier chapitre permet une formulation mathématique plus constructive de la théorie quantique relativiste fondée sur l'invariance sous le groupe de Poincaré. En effet, une particule élémentaire libre[1] au sens de Wigner [1] est une représentation unitaire et irréductible de son groupe de symétrie spatio-temporel qui est, dans le cas présent, le groupe de Poincaré. Les représentations irréductibles du petit groupe et l'espace homogène (l'orbite) lui correspondant définissent cette représentation.

[1] On ne tient pas compte de l'interaction.

L'état quantique d'une particule élémentaire est décrit par une fonction d'onde solution d'une équation d'onde (relativiste) telle que l'équation de Klein-Gordon d'une particule scalaire (spin zéro) et l'équation de Dirac pour une particule de spin un-demi. L'ensemble de ces fonctions constitue un espace de Hilbert, support d'une certaine représentation du groupe de Poincaré [11].

Pour décrire la propagation des particules élémentaires, cette méthode suppose l'utilisation des deux représentations[2] couramment utilisées en mécanique quantique, à savoir, les représentations impulsion et configuration. Nous allons donc commencer par introduire ces espaces pour passer ensuite à l'étude du groupe de Poincaré. Cette étude débute par celle du sous-groupe de Lorentz homogène, les translations étant des transformations assez simples et ne présentent aucune difficulté particulière. Puis, nous passons aux représentations induites de masse nulle du groupe de Poincaré.

2.1 Espace-temps de Minkowski

La géométrie de l'espace de configuration de Minkowski $M \equiv \mathbb{R}^4$ est celle d'un espace plan quadri-dimensinnel et pseudo-euclidien $E_{1.3}$. Sa métrique de signature $(+,-,-,-)$ sera notée η_{ij} et est définie par [11, 42]

$$e_i.e_j = \eta_{ij}, \qquad \eta_{ij} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \tag{2.1}$$

L'expression $e_i.e_j$ représente le produit scalaire des vecteurs de base $\{e_i\}$ dans l'espace de Minkowski $(i,j = 0,1,2,3)$. Les coordonnées d'un point (événement) de l'espace de Minkowski seront notées x^i, avec $x^0 = ct$ (où t désigne le temps et c la vitesse de la lumière) et $\mathbf{x} = (x^\alpha) \equiv (x^1, x^2, x^3)$ correspond aux composantes spatiales[3]. L'ensemble des composantes spatiales et la composante temporelle constituent les composantes contravariantes (indices en position haute)

[2] En physique on utilise le terme de représentation pour designer l'espace contrairement à son usage par les mathématiciens.

[3] De manière générale, les indices en lettres grecques peuvent prendre les valeurs $1,2,3$ et les lettres latines les valeurs $0,1,2,3$. De plus, nous travaillerons dans un système d'unités où $c = \hbar = 1$ et nous noterons indifféremment la composante temporelle par t ou x^0.

du quadri-vecteur position x

$$x = x^i e_i \tag{2.2}$$

A coté des composantes contravariantes, nous pouvons définir pour n'importe quelle base et n'importe quel quadri-vecteur des composantes covariantes (indices en position basse) qui sont des projections orthogonales sur les vecteurs de base

$$x_i = x.e_i \tag{2.3}$$

Pour une métrique euclidienne, les composantes contravariantes et les composantes covariantes se confondent si les vecteurs de base sont orthogonaux. Dans notre cas Minkowskien

$$x^0 = x_0, \quad x^\alpha = -x_\alpha \tag{2.4}$$

On passe des composantes contravariantes aux composantes covariantes d'un quadri-vecteur et vice-versa à l'aide du tenseur métrique

$$x_j = \eta_{ji} x^i, \; x^i = \eta^{ij} x_j \tag{2.5}$$

$$\eta_{ji} = \eta_{ij}, \quad \eta^{ij} = \left[\eta^{-1}\right]_{ij} \tag{2.6}$$

Le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs x et y s'obtient par contraction des composantes contravariantes de l'un avec les composantes covariantes de l'autre

$$x.y = x^i y_i = \eta_{ij} x^i y^j = x^0 y^0 - \mathbf{xy} \tag{2.7}$$

En particulier, la pseudo-norme d'un quadri-vecteur x est $x^2 = (x^0)^2 - \mathbf{x}^2$ et l'élément de longueur ou l'intervalle entre deux points voisins x^i et $x^i + dx^i$ est donné par la forme quadratique

$$ds^2 = \eta_{ij} dx^i dx^j \tag{2.8}$$

La nature pseudo-euclidienne de l'espace de Minkowski fait que la norme d'un quadri-vecteur est non définie-positive et peut donc prendre des valeurs positives, nulles ou négatives. Ceci conduit à classer les quadri-vecteurs en trois genres [11, 41] : le genre temps, le genre lumière et le genre espace. Cette classification correspond à la position d'un événement par rapport à

l'origine du cône de lumière pris comme origine des événements. Dans les deux premiers cas, on distingue deux catégories selon le signe de la composante temporelle. Pour $x^0 > 0$, on se trouve dans la région du futur absolu, ces points correspondent à une évolution d'une ligne d'univers à partir de l'origine. La région du passé absolu est caractérisée par une composante temporelle $x^0 < 0$; ses points correspondent à une évolution d'une ligne d'univers vers l'origine. L'extérieur du cône correspond à des événements du genre espace pour lesquels $x^2 < 0$.

Par suite de l'invariance de l'intervalle dans les transformations des coordonnées et systèmes de référentiels inertiels dans l'espace de Minkowski, la propriété d'être du genre lumière, espace ou temps est une propriété intrinsèque de l'intervalle. Deux événements séparés par un intervalle du genre lumière ou temps gardent un même ordre chronologique dans tous les référentiels inertiels et peuvent être reliés par un lien causal. Par contre, les événements séparés par un intervalle du genre espace n'ont pas cette propriété et ne peuvent donc avoir un lien causal.

Tout comme l'espace et le temps, l'énergie et l'impulsion tridimensionnelle d'une particule sont aussi intimement liées en relativité restreinte. En effet, ces derniers constituent les composantes du quadri-vecteur impulsion (ou énergie-impulsion).

Une particule élémentaire de masse au repos m, animée d'une vitesse $\mathbf{u}$ par rapport à un repère (R) et décrite dans le cadre de la relativité restreinte, ne peut avoir de dimension spatiale sans subir des déformations (la notion de solide n'existe pas en cinématique relativiste). En pratique, on l'assimile à un point géométrique sans dimension [42]. Le quadri-vecteur énergie-impulsion de cette particule est [38, 42] $p^i = mv^i$ où $v^i = dx^i/d\tau$ est le quadri-vecteur vitesse et τ est le temps propre. Dans le système d'unités où la vitesse de la lumière est $c = 1$, nous avons

$$p^i = \left(\frac{m}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}},\ \frac{mu^\alpha}{\sqrt{1-\mathbf{u}^2}} \right) \equiv \left(p^0 = E,\ p^\alpha \right) \tag{2.9}$$

E est l'énergie totale de la particule et p^α son impulsion tridimensionnelle. Le produit scalaire dans l'espace des impulsions est donné par

$$p.p = \eta_{ij} p^i p^j \tag{2.10}$$

dont un cas particulier est la contrainte

$$p^2 = E^2 - \mathbf{p}^2 = m^2 \tag{2.11}$$

qui montre que l'espace des impulsions quadri-dimensionnelles $C_m = \{p/p^2 = m^2,\ p \in E_{1.3}\}$ est

un hyperboloïde à deux nappes tridimensionnelles

$$C_m = C_m^+ \cup C_m^- \tag{2.12}$$

$$C_m^{\pm} = \left\{ p/p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2},\, \mathbf{p} \in R^3 \right\} \tag{2.13}$$

correspondant aux valeurs positives et négatives de l'énergie $E = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}$. Les éléments de volume dans chaque nappe s'écrivent

$$d\Omega_m^{\pm}(p) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\pm p^0} = \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2 + m^2}} \tag{a-2}$$

et correspondent à des mesures invariantes sur l'espace des impulsions car ils découlent de la mesure $d\Omega_m(p) = \delta(p^2 - m^2)\, d^4p$.

A la limite des masses nulles, on tombe sur la partie supérieure et la partie inférieure du cône de lumière

$$C_0^{\pm} = \left\{ p/p^0 = \pm\sqrt{\mathbf{p}^2},\, \mathbf{p} \in R^3 \right\} \tag{2.14}$$

La mesure invariante est alors donnée par [41]

$$d\Omega_0^{\pm}(p) = \frac{d^3\mathbf{p}}{\pm p^0} = \frac{d^3\mathbf{p}}{\sqrt{\mathbf{p}^2}} \tag{2.15}$$

Les quadri-vecteurs positions et impulsions se transforment de la même manière lors d'un changement de repère. Or, un changement de repère correspond à un élément du groupe de Lorentz homogène (ou de manière générale à un élément du groupe de Poincaré). Il se trouve que les grandeurs physiques (scalaires, vectorielles, tensorielles) forment des classes en fonction de leur comportement dans un changement de référentiel. En particulier, une grandeur scalaire ne change pas dans une telle transformation. Nous allons consacrer le paragraphe qui suit à l'étude du groupe de Lorentz homogène.

2.2 Le groupe de Lorentz

Les transformations homogènes de Lorentz sont des transformations linéaires continues l de l'espace-temps qui préservent le produit scalaire entre deux quadri-vecteurs [11]. Ces trans-

formations peuvent s'interpréter de deux manières équivalentes, adoptant un point de vue actif ou bien passif [38]. Dans le point de vue actif, les transformations agissent sur le système alors que le repère dans lequel il est décrit est considéré comme fixe. Par contre, dans le point de vue passif, c'est le repère qui se transforme alors que le système est considéré comme fixe. Nous adoptons ce dernier point de vue. Dans ce cas, les vecteurs de base $\{e_i\}$ se transforment par l'inverse de la matrice l en les vecteurs de base $\left\{e'_j\right\}$, contrairement aux coordonnées x^i :

$$e'_j = \left[l^{-1}\right]^i{}_j \; e_i \qquad x'^i = [l]^i{}_j \; x^j \tag{2.16}$$

Le quadri-vecteur $x = x^i e_i = x'^j e'_j$ ne change pas dans une transformation passive de Lorentz.

De l'invariance du produit scalaire dans les transformations homogènes de Lorentz découle la relation de pseudo-orthogonalité (par opposition au cas euclidien[4]) suivante

$$\eta_{ij} l^i{}_k \; l^j{}_l = \; [l^t]^i{}_k \eta_{ij} l^j{}_l = \eta_{kl}; \qquad [l^t]^i{}_j = l_i{}^j \tag{2.17}$$

que l'on peut écrire sous la forme

$$l^t \eta l = \eta \tag{2.18}$$

L'ensemble de toutes les transformations qui satisfont à la relation de pseudo-orthogonalité constituent le groupe de Lorentz complet noté $O(1,3)$ pour indiquer qu'il s'agit d'un groupe orthogonal pour la métrique de Minkowski. La relation (2.18) nous permet d'apprendre d'avantage sur les propriétés de ce groupe. En effet, en prenant le déterminant des deux cotés on obtient $(\det(l))^{\,2} = 1$, ce qui implique que $\det(l) = \pm 1$ et que les transformations de Lorentz se décomposent en deux ensembles. L'ensemble des transformations avec $\det(l) = +1$ forment un sous-groupe. Quant aux transformations de $\det(l) = -1$, ils ne constituent pas un groupe car elles sont privées de la matrice identité et la loi du produit n'est pas interne. Ces transformations sont celles du sous-groupe composées avec des transformations discrètes de l'espace-temps appelées renversement du sens du temps :

$$I_t : \left(x^0, \; \mathbf{x}\right) \rightarrow \left(-x^0, \; \mathbf{x}\right); \qquad I_t = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & +1 \end{bmatrix} \tag{2.19}$$

[4]Pour un choix euclidien $\eta = \mathbf{1}$, on retrouve la relation d'orthogonalité $l^t \mathbf{1} l = \mathbf{1}$ du groupe des rotations.

et inversion d'espace ou réflexion (la Parité) :

$$I_s : \left(x^0,\ \mathbf{x}\right) \rightarrow \left(x^0,\ -\mathbf{x}\right); \qquad I_s = \begin{bmatrix} +1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.20}$$

En posant $k = l = 0$ dans la relation (2.17), on obtient $\left(l^0_0\right)^2 = 1 + l^0_i l^0_i$ d'où l'on peut déduire que $\left(\ l^0_0\right)^2 \geq 1$. En combinant les indications $\det(l) = \pm 1$ et $l^0_0 \geq 1$ ou $l^0_0 \leq -1$, on voit que le groupe $O(1,3)$ se décompose en quatre classes (nappes) disjointes

$\det(l) = +1$	$\det(l) = +1$	$\det(l) = -1$	$\det(l) = -1$
$l^0_0 \geq 1$	$l^0_0 \leq -1$	$l^0_0 \leq -1$	$l^0_0 \geq 1$

Les transformations spéciales $(\det(l) = +1)$ et orthochrones $(\ l^0_0 \geq 1)$ constituent le sous-groupe propre de Lorentz $SO(1,3)$. Contrairement à l'ensemble des transformations non orthochrones, pour lesquelles $l^0_0 \leq -1$ et qui ne forment pas un groupe, le sous-groupe $SO(1,3)$ préserve le sens du temps, les angles entre les vecteurs et les éléments de volume dans l'espace de configuration et des impulsions. Toute transformation du groupe généralisé $O(1,3)$ peut s'écrire comme le produit d'une transformation discrète et d'un élément du groupe propre $SO(1,3)$. Autrement dit, les classes à gauche [29, 36] :

$$SO(1,3),\ I_t SO(1,3),\ I_{st} SO(1,3),\ I_s SO(1,3)$$

coïncident avec les quatre nappes de la table précédente (dans un ordre respectif), où I_{st} est l'inversion spatio-temporelle

$$\left(x^0,\ \mathbf{x}\right) \rightarrow \left(-x^0, -\mathbf{x}\right); \qquad I_{\mathbf{st}} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \tag{2.21}$$

En résumé, nous pouvons écrire

$$O(1,3) = SO(1,3) \cup I_{st} SO(1,3) \cup I_s SO(1,3) \cup I_t SO(1,3) \tag{2.22}$$

Ainsi, l'étude du groupe $O(1,3)$ revient à l'étude du groupe propre et de ses transformations discrètes. Nous n'allons pas nous intéresser davantage à ces dernières transformations mais plutôt aux transformations du groupe propre de Lorentz homogène $SO(1,3)$.

Le groupe de Lorentz contient les rotations tridimensionnelles $SO(3)$ de l'espace euclidien, ces transformations n'affectent que les composantes spatiales. Les transformations qui mélangent les coordonnées spatiales et temporelles sont appelées des transformations spéciales ou boosts de Lorentz. Toute transformation finie du groupe de Lorentz peut se mettre sous la forme

$$l(\omega) = \exp -\frac{i}{2}\omega^{mn} M_{mn} \tag{2.23}$$

où $\omega^{mn} = -\,\omega^{nm}$ désigne le paramètre des rotations dans le plan (m,n). Les générateurs M_{mn} sont antisymétriques ($M_{mn} = -M_{nm}$) et se transforment comme les composantes d'un tenseur d'ordre deux

$$l M_{mn} l^{-1} = M_{kl} l^k_m l^l_n \tag{2.24}$$

Pour une transformation infinitésimale $\delta\omega$

$$l(\delta\omega) = I - \frac{i}{2}\delta\omega^{mn} M_{mn} \tag{2.25}$$

Les rotations tridimensionnelles $\mathbf{R} \in SO(3)$ correspondent aux transformations spatiales d'angle $\theta^\alpha \equiv \omega^{\beta\gamma}$ dans les plans (β,γ) où (α,β,γ) prennent les valeurs $(1,2,3)$ cycliques. Une rotation tridimensionnelle peut s'écrire en fonction de ses générateurs $J_\alpha = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma} M_{\beta\gamma}$ et paramètres θ^α sous la forme exponentielle suivante [11]

$$\mathbf{R}(\theta) = \exp -i\theta^\alpha J_\alpha \tag{2.26}$$

Dans un espace de Minkowski à quatre dimensions, ces transformations sont représentées par des matrices (4×4) en fonction du vecteur nul tridimensionnel $\mathbf{0}$, de son transposé $\mathbf{0}^t$ et de la matrice de rotation tridimensionnelle $\mathbf{R}$

$$l_r = \begin{bmatrix} 1 & \mathbf{0}^t \\ \mathbf{0} & \mathbf{R} \end{bmatrix},\ \mathbf{R}^t = \mathbf{R}^{-1},\ \det \mathbf{R} = \mathbf{1} \tag{2.27}$$

Les générateurs des rotations spatiales du groupe de Lorentz prennent alors la forme explicite

suivante [11]

$$J_1 = i\left[\frac{\partial l_r(\theta)}{\partial \theta^1}\right]_{\theta=0} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix},\ J_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -i & 0 & 0 \end{bmatrix},\ J_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.28}$$

Les boosts sont les transformations spéciales de Lorentz qu'on a l'habitude de voir en théorie de la relativité restreinte. Ces transformations lient les coordonnées de deux repères galiléens en mouvement rectiligne uniforme l'un par rapport à l'autre avec une vitesse $\mathbf{u} = (u^1,u^2,u^3)^t$. Dans le cas général, ces transformations ont la forme suivante

$$v_L = \begin{pmatrix} v^0 & \mathbf{v}^t \\ \mathbf{v} & \mathbf{1} + \mathbf{v}\mathbf{v}^t/\left(v^0+1\right) \end{pmatrix}, \quad v = \begin{pmatrix} v^0 \\ \mathbf{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{1-(\mathbf{u})^2}} \\ \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-(\mathbf{u})^2}} \end{pmatrix} \tag{2.29}$$

$$l^0{}_0 = v^0 = \cosh\zeta \geq 1,\ v^2 = \left(v^0\right)^2 - \mathbf{v}^2 = \left(l^0{}_0\right)^2 = 1 + l^0{}_i l^0{}_i = 1 \tag{2.30}$$

En d'autres termes, un boost de vitesse est paramétré par un quadri-vecteur vitesse appartenant à la partie positive de l'hperboloïde de masse unité $\left(v \in C_1^+\right)$. En fonction de la rapidité $\omega^{0\alpha} \equiv \zeta^\alpha = \sinh^{-1}\left(\mathbf{v}^\alpha\right) = \tanh^{-1}\left(\mathbf{u}^\alpha\right)$, les boosts de vitesses s'interprètent géométriquement comme des rotations hyperboliques dans les plans spatio-temporels $(0,\alpha)$. Dans le cas d'un boost de vitesse $\mathbf{u} = (0,0,u)$ suivant l'axe oz, ceci donne

$$\left(v_\zeta\right)_{3L} = v_{3L} = \begin{bmatrix} \cosh\zeta & 0 & 0 & \sinh\zeta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \sinh\zeta & 0 & 0 & \cosh\zeta \end{bmatrix} \tag{2.31}$$

avec $0 \leq \zeta \leq +\infty$. Les boosts de vitesse peuvent s'écrire en fonction de leurs générateurs $K_\alpha = M_{0\alpha}$ et paramètres de transformation ζ^α sous la forme

$$\left(v_\zeta\right)_L = \exp -i\zeta^\alpha K_\alpha \tag{2.32}$$

Les générateurs des boosts se calculent de la même manière que pour les rotations spatiales,

leur forme explicite est donnée par

$$K_1 = \begin{bmatrix} 0 & i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; K_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \; K_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{2.33}$$

Remarquons que la forme explicite des générateurs (relations (2.28) et (2.33) est donnée dans une interprétation active des transformations de Lorentz et correspond à la relation générale

$$\left(M_{mn}\right)^{i}_{\ j} = -i\left(\delta^{i}_{\ m}\eta_{nj} - \delta^{i}_{\ n}\eta_{mj}\right) \tag{2.34}$$

La représentation différentielle des générateurs K et J est donnée par [2]

$$J_\alpha = -i\epsilon^{\alpha\beta\gamma}x_\beta\left(\partial/\partial x^\gamma\right) \tag{2.35}$$

$$K_\alpha = -i\left[x_0\left(\partial/\partial x^\alpha\right) + x_\alpha\left(\partial/\partial x^0\right)\right] \tag{2.36}$$

Ces générateurs vérifient l'algèbre de Lie suivant :

$$[J_\alpha, J_\beta] = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}J_\gamma \tag{2.37}$$

$$[J_\alpha, K_\beta] = \epsilon^{\alpha\beta\gamma}K_\gamma \tag{2.38}$$

$$[K_\alpha, K_\beta] = -\epsilon^{\alpha\beta\gamma}J_\gamma \tag{2.39}$$

Les générateurs J_α vérifient les relations de commutations d'un moment cinétique, ces derniers génèrent le sous-groupe des rotations $SO\left(3\right)$ du groupe de Lorentz. Remarquons que l'algèbre des boosts n'est pas fermée et par conséquent les boosts ne constituent pas un groupe.

La forme différentielle des générateurs des boost et des rotations peut se réunir en une seule écriture covariante

$$M_{ij} = -i\left[x_i\ \left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right) - x_j\ \left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)\right] \tag{2.40}$$

Nous pouvons alors réécrire les relations de commutations précédentes sous la forme condensée suivante [11]

$$[M_{ij}, M_{kl}] = i\left(\eta_{ik}M_{lj} - \eta_{il}M_{kj} + \eta_{jk}M_{il} - \eta_{jl}M_{ik}\right) \tag{2.41}$$

2.3 Le groupe de Lorentz et le groupe $SL(2,C)$

Le groupe de Lorentz homogène $SO(1,3)$ admet pour groupe de recouvrement le groupe spécial linéaire $SL(2,C)$ des matrices complexes (2×2). Ce dernier contient le sous-groupe $SU(2)$ groupe de recouvrement du groupe des rotations tridimensionnelles $SO(3)$. L'homomorphisme qui lie le groupe $SL(2,C)$ au groupe $SO(1,3)$ est analogue à celui du groupe $SU(2)$ et $SO(3)$. A une matrice l appartenant au groupe $SO(1,3)$ correspondent deux matrices $\pm\Lambda_l$ du groupe $SL(2,C)$ [9, 36, 38]. Le rôle que joue le groupe $SL(2,C)$ pour le groupe de Lorentz est aussi similaire à celui que l'on connaît du groupe $SU(2)$ pour le groupe $SO(3)$ en mécanique quantique. Les représentations irréductibles du groupe $SL(2,C)$ vont nous servir pour construire les représentations irréductibles du groupe $SO(1,3)$.

A chaque quadri-vecteur x de l'espace-temps, correspond une matrice d'ordre deux unique $X = \sigma_i x^i$. L'identité et les matrices de Pauli

$$\sigma_i \equiv \left\{ \sigma_0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix},\ \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} \tag{2.42}$$

forment donc une base pour l'écriture des matrices

$$X = \begin{pmatrix} x^0 + x^3 & x^1 - ix^2 \\ x^1 + ix^2 & x^0 - x^3 \end{pmatrix} \tag{2.43}$$

L'action d'un élément $\Lambda_l \in SL(2,C)$ sur la matrice X est donnée par

$$X \to X' = \Lambda X \Lambda^{-1} \tag{2.44}$$

Comme la norme du quadri-vecteur x est donnée par

$$x^i x_i = \left|x^0\right|^2 - |\mathbf{x}|^2 = \det X \tag{2.45}$$

et que le déterminant de X reste invariant, on voit que la transformation Λ_l induit une transformation de Lorentz l pour x. Les générateurs du groupe $SL(2,C)$ correspondant aux générateurs

des rotations et des boosts sont respectivement

$$J_\alpha = \frac{1}{2}\sigma_i \tag{2.46}$$

$$K_\alpha = \frac{i}{2}\sigma_i \tag{2.47}$$

Ces générateurs vérifient les relations de commutations (2.37) du groupe de Lorentz dans lesquelles la substitution suivante (complexification) [11, 38]

$$\begin{aligned} M_\alpha &= \frac{1}{2}\left(J_\alpha + iK_\alpha\right) \\ N_\alpha &= \frac{1}{2}\left(J_\alpha - iK_\alpha\right) \end{aligned} \tag{2.48}$$

donne

$$\begin{aligned} [M_\alpha, M_\beta] &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma} M_\gamma \\ [N_\alpha, N_\beta] &= \epsilon^{\alpha\beta\gamma} N_\gamma \\ [M_\alpha, N_\beta] &= 0 \end{aligned} \tag{2.49}$$

Cette algèbre est identique à celle du produit direct $SU(2) \otimes SU(2)$. Par conséquent, les représentations irréductibles de dimension finie du groupe $SL(2, C)$ sont caractérisées par deux nombres[5] $(j,\ j')$ qui peuvent prendre chacun les valeurs $0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \cdots$.

Ces représentations irréductibles notées $D^{(j,\ j')}$ ne sont pas unitaires et sont de dimension $(2j+1)(2j'+1)$. Pour des valeurs entières de $(j + j')$, les représentations irréductibles du groupe $SL(2, C)$ sont des représentations fidèles (représentations monovaluées) du groupe de Lorentz. Les représentations spinorielles, sont des représentations bi-valuées du groupe de Lorentz et correspondent à des valeurs demi-entières de $(j + j')$. Toutes les représentations irréductibles du groupe de Lorentz peuvent s'obtenir par produit direct des représentations fondamentales du groupe $SL(2, C)$, à savoir les représentations $D^{(\frac{1}{2},\ 0)}$ et $D^{(0,\ \frac{1}{2})}$ [2, 9]

[5] Ces nombres designent les spins des représentations irréductibles des groupes $SU(2)$.

$$
\begin{aligned}
D^{(\frac{1}{2},\,0)} &= \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha}+i\zeta^{\alpha}\sigma_{\alpha}\right)\right] \\
J_{\alpha} &= \frac{1}{2}\sigma_{\alpha}, \qquad K_{\alpha}=\frac{i}{2}\sigma_{\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.50}
$$

$$
\begin{aligned}
D^{(0,\,\frac{1}{2})} &= \exp\left[-\frac{i}{2}\left(\theta^{\alpha}\sigma_{\alpha}-i\zeta^{\alpha}\sigma_{\alpha}\right)\right] \\
J_{\alpha} &= \frac{1}{2}\sigma_{\alpha}, \qquad K_{\alpha}=-\frac{i}{2}\sigma_{\alpha}
\end{aligned}
\tag{2.51}
$$

Les deux représentations précédentes sont identiques pour des rotations pures ($\zeta = 0$), et se réduisent dans ce cas aux représentations unitaires et irréductibles de spin 1/2 du groupe $SU(2)$. Par contre, pour des boosts ($\theta = 0$), ces deux représentations sont inverses l'une de l'autre.

Afin d'inclure les spins demi-entiers relativistes, c'est le groupe $SL\,(2,C)$ que l'on considère. Nous allons par la suite suivre l'usage de confondre les représentations irréductibles $D\,(l)$ du groupe de Lorentz avec celle de son groupe de recouvrement $D\,(\Lambda_l)$.

2.4 Le groupe de Poincaré

Le groupe de Poincaré $P = T_4 \oslash L$ (ou son groupe de recouvrement $\tilde{P} = T_4 \oslash SL(2,C)$) est le groupe de transformations de l'espace de Minkowski M et se réalise comme le produit semi-direct des sous-groupes des translations de l'espace-temps T_4 et de Lorentz homogène $L \equiv SO\,(1,3)$ [2, 11]. Un élément g du groupe de Poincaré peut donc être écrit sous la forme $g\,(a,l) = a_t l$, où $a_t = T\,(a) = g(a,I)$ est une translation d'un quadri-vecteur a et $g\,(0,l) = l$ une transformation de Lorentz. L'action d'un élément $g\,(a,l) \in P$ sur les points de l'espace-temps de Minkowski

$$
x' = g(a,l)\;x \;\longrightarrow\; x'^{\,i} = [l]^{i}{}_{j}\;x^{j} + a^{i} \tag{2.52}
$$

peut être écrite sous la forme d'une matrice 5×5

$$
\begin{pmatrix} x' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \tag{2.53}
$$

La loi de multiplication du groupe est le produit de deux transformations successives de Poincaré, ce qui donne

$$g(a,l)g(a',l') = g(la'+a, ll') \tag{2.54}$$

On peut facilement déduire de la loi du groupe que l'élément inverse est $g\left(-l^{-1}a,\ l^{-1}\right)$ et que les translations forment un sous-groupe invariant $\left(lT\left(a\right)l^{-1} = T\left(la\right)\right)$ abélien du groupe de Poincaré. Une translation finie ou infinitésimale peut se mettre sous la forme

$$T\left(a\right) = \exp -ia^i P_i \tag{2.55}$$

$$T\left(\delta a\right) = I - i\delta a^i P_i \tag{2.56}$$

En utilisant la forme matricielle (2.53), les générateurs du groupe des translations peuvent se mettre sous la forme

$$P_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ P_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix},\ P_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \tag{2.57}$$

En pratique, les générateurs des translations spatiales $P^{\alpha=1,2,3}$ s'identifient à l'opérateur impulsion $\mathbf{P}$ et le générateur temporel à l'opérateur d'énergie E (ou l'hamiltonien du système). Ces générateurs ont la forme différentielle bien connue

$$P_i = i\frac{\partial}{\partial x^i} \tag{2.58}$$

et se transforment comme les composantes d'un quadri-vecteur sous l'action du groupe de Lorentz

$$lP_i l^{-1} = \left[l\right]^l{}_i P_l \tag{2.59}$$

Le caractère abélien du groupe des translations et la forme explicite de ses générateurs montrent que son algèbre de Lie est commutative

$$\left[P_i, P_j\right] = 0 \tag{2.60}$$

Le groupe de Poincaré est donc un groupe à dix paramètres réels, dont les générateurs sont les générateurs de ses sous-groupes. L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré contient les relations de commutation propres à chaque sous-groupe et les relations de commutation du mélange [2, 11]

$$\begin{aligned}
[P_i, P_j] &= 0 \\
[M_{ij}, M_{kl}] &= i(n_{ik}M_{lj} - n_{il}M_{kj} + n_{jk}M_{il} - n_{jl}M_{ik}) \\
[P_i, M_{jk}] &= i(n_{ji}P_k - n_{ik}P_j)
\end{aligned} \tag{2.61}$$

2.5 Masse et spin des particules

Une représentation unitaire et irréductible du groupe de Poincaré est caractérisée par les paramètres d'irréductibilité qui sont la masse de la particule et son spin. Ces derniers sont les valeurs propres des deux casimirs que contient le groupe de Poincaré. Un casimir (voir chapitre 1) est un opérateur qui commute avec tous les générateurs P_i et M_{jk} du groupe de Poincaré.

L'opérateur de casimir auquel est associée la masse de la particule comme valeur propre n'est autre que le carré des générateurs de translation (l'impulsion)

$$P^2 = P_i P^i = m^2 \tag{2.62}$$

P^2 peut prendre des valeurs positives, nulles ou négatives. Les particules observées dans la nature correspondent aux valeurs positives et nulles uniquement. Les représentations massives du groupe de Poincaré ($p^2 = m^2 > 0,\ p^0 > 0$) décrivent des particules de masse $m \neq 0$. Pour ces particules, on peut toujours se ramener à un référentiel où la particule est au repos. On peut alors montrer [11, 38] que le spin de la particule est lié à la valeur propre du deuxième casimir que contient le groupe de Poincaré. Ce dernier se construit comme le carré du vecteur de Pauli-Lubanski

$$W^i = \frac{\epsilon^{ijkl}}{2} P_j M_{kl} \tag{2.63}$$

où ϵ^{ijkl} est le tenseur de Levi-Civita invariant de Lorentz et complètement antisymétrique. Le vecteur de Pauli-Lubanski vérifie les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
&W^i P_i = 0 \\
&[W^i, P^j] = 0 \\
&\left[W^i, M^{jk}\right] = i(W^j \eta^{ik} - W^k \eta^{ji}) \\
&[W^i, W^j] = i\epsilon^{ijkl} W_k P_l.
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

La première relation montre que le quadri-vecteur impulsion et le vecteur de Pauli-Lubanski sont orthogonaux et que ce dernier ne contient que trois composantes indépendantes[6]. A l'aide des relations de commutation que vérifie le vecteur de Pauli-Lubanski, on peut facilement vérifier que l'opérateur $W^2 = W^i W_i$ commute avec tous les générateurs du groupe de Poincaré c'est-à-dire

$$
\left[W^2, P^j\right] = \left[W^2, M^{jk}\right] = 0 \tag{2.65}
$$

Ses valeurs propres sont $-mj\,(j+1)$.

Les représentations de masse nulle du groupe de Poincaré pour lesquelles $P^2 = 0$ et $p^0 \neq 0$, décrivent des particules de masse nulle ($m = 0 \rightarrow W^2 = 0$). Ces dernières se meuvent à la vitesse de la lumière et ne peuvent donc être au repos dans aucun référentiel. On peut alors montrer que l'hélicité d'une particule d'impulsion $\mathbf{p}$ (la projection du spin sur la direction de $\mathbf{p}$) ne peut prendre que deux valeurs [9, 11, 38]

$$
\frac{\mathbf{J}.\mathbf{p}}{\parallel \mathbf{p} \parallel} = \lambda, \qquad \lambda = 0, \pm\frac{1}{2}, \pm 1, ... \tag{2.66}
$$

C'est la raison pour laquelle le photon, particule de spin un n'a que deux états d'hélicité $+1$ et -1. Ceci se traduit par le fait que le photon n'a que deux états de polarisation et, par conséquent, le champ électromagnétique est transverse et n'a pas de composante longitudinale. C'est le cas aussi du graviton, particule sans masse de spin 2.

2.6 Les représentations induites de masse nulle du groupe de Poincaré

L'espace de configuration de Minkowski M peut être vu comme l'espace homogène isomorphe au quotient $M = \tilde{P}/SL\,(2, C)$, du groupe de recouvrement du groupe de Poincaré

[6] Ceci est important car il existe un théorème qui stipule que les composantes indépendantes du vecteur de Pauli-Lubanski constituent l'algèbre de Lie du petit groupe [2, 11]. Ce théorème nous permet donc d'identifier le petit groupe pour le cas massif et le cas de masse nulle.

par le groupe de recouvrement du groupe de Lorentz ; car ce dernier est le groupe qui stabilise l'origine des coordonnées $x_0 = (0,0,0,0)^t$ [13]. L'induction se fait à partir d'une représentation irréductible $D(\Lambda_l)$ du groupe $SL(2,C)$.

La représentation induite $U^D(P)$, qui agit sur l'espace de Hilbert H^Ddes fonctions ψ définies sur l'espace de Minkowski M et à valeurs dans l'espace L^D des composantes spinorielles, est donnée par [33]

$$\left[U^D(a_T\Lambda_l)\psi\right](x) = D(\left(\Lambda_l^{-1}(-a)_T,\ x\right)_L^{-1})\psi(l^{-1}(x-a)) \tag{2.67}$$

$$a_T \in T_4,\ \Lambda_l \in SL(2,C) \tag{2.68}$$

$$x \in M,\ l \in SO(1,3) \tag{2.69}$$

Les propriétés du système de facteurs du groupe de Poincaré,

$$(a_T, x)_L = 1,\ (\Lambda_l, x)_L = \Lambda_l,\ (a_T\Lambda_l, x)_L = \Lambda_l \tag{2.70}$$

permettent de réécrire cette représentation sous une forme plus simple

$$\left[U^D(a_T\Lambda_l)\psi\right](x) = D(\Lambda_l^{-1})\psi(l^{-1}(x-a)) \tag{2.71}$$

En théorie quantique des champs la représentation $D(\Lambda_l)$ est une représentation de dimension finie qui peut être scalaire, spinorielle ou vectorielle (tensorielle pour un spin entier supérieur ou égal à 2).

Pour une particule scalaire, la représentation D est triviale $D(\Lambda_l) \equiv D^{(0,0)}(\Lambda_l) = 1$ de dimension un ; la fonction d'onde $\psi(x)$ est une fonction à une composante pour laquelle

$$\left[U^D(a_T\Lambda_l)\psi\right](x) = \psi(\Lambda_l^{-1}(x-a)) \Leftrightarrow \psi'(x') = \psi(x) \tag{2.72}$$

Pour une particule de spin 1/2, la représentation $D(\Lambda_l) \equiv D^{(1/2,0)}(\Lambda_l) \oplus D^{(0,1/2)}(\Lambda_l)$ de dimension quatre est la réalisation bien connue de l'équation de Dirac[7] [9, 43]

$$(i\gamma^\mu\partial_\mu - m)\psi(x) = 0 \tag{2.73}$$

[7] Les γ^μ sont les matrices (4×4) de Dirac.

Les bispineurs de Dirac $\psi = \begin{pmatrix} \psi_L \\ \psi_R \end{pmatrix}$ (fonction à quatre composantes) se transforment par la représentation précédente. Les deux spineurs à deux composantes $\psi_L$et ψ_R sont couplés par le terme de masse et à la limite des masses nulles $m \to 0$ l'équation de Dirac se décompose en deux équations découplées de Weyl décrivant les neutrinos. En représentation chirale (de Weyl) [44, 45]

$$\gamma = \begin{pmatrix} \sigma & 0 \\ 0 & -\sigma \end{pmatrix},\ \gamma^0 = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -I & 0 \end{pmatrix},\ \gamma^5 = -i\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix} \tag{2.74}$$

L'équation de Dirac $i\gamma^\mu \partial_\mu \psi(x) = 0$ peut s'écrire alors sous la forme

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} - \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{P}\right)\psi_L(x) = 0 \tag{2.75}$$

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma}.\mathbf{P}\right)\psi_R(x) = 0 \tag{2.76}$$

Le neutrino possède une projection du spin anti-parallèle à la direction de l'impulsion ($\lambda = -\frac{1}{2}$, hélicité gauche), et est décrit par le spineur de Weyl de masse nulle ψ_L qui se transforme par la représentation $D^{(1/2,0)}$. L'antineutrino a une projection du spin parallèle à la direction de l'impulsion ($\lambda = \frac{1}{2}$, hélicité droite) et est décrit par le spineur de Weyl ψ_R qui se transforme par la représentation $D^{(0,1/2)}$. Le fait que le neutrino et l'antineutrino ne peuvent se trouver que dans un seul état de polarisation, et ne peuvent exister dans les deux états de polarisation gauche et droite en même temps, est un signe en faveur de la violation de la parité dans l'interaction faible [11, 46]. La parité interchange la représentation spinorielle droite $D^{(0,1/2)}$ et la représentation spinorielle gauche $D^{(1/2,0)}$.

Une particule vectorielle (spin 1) massive est décrite par une fonction à trois composantes $\psi(x) = (\psi^\alpha(x))$ (une composante pour chaque projection du spin) qui se transforme par la représentation $D(\Lambda_l) = D^{(1,0)}$. Cependant, on préfère utiliser la représentation $D(\Lambda_l) = D^{(1/2,1/2)}(\Lambda_l) \sim l$ à quatre dimensions qui contient, en plus de la représentation vectorielle précédente, une représentation scalaire

$$D^{(1/2,1/2)} = D^{(1,0)} \oplus D^{(0,0)} \tag{2.77}$$

La fonction ψ est alors une fonction à quatre composantes $\psi = \left(\psi^i(x)\right)$ qui se transforme selon cette même représentation. La représentation $D^{(1/2,1/2)}$ est la réalisation de l'équation de Proca décrivant une particule massive de spin 1 [9, 45].

Le passage à la limite de masse nulle présente quelques difficultés [15, 45, 47] liées au fait que (classiquement) le champ électromagnétique est décrit en termes du quadri-vecteur potentiel électromagnétique $A^i(x)$ qui n'est pas défini de manière unique, mais représente toute une classe d'équivalence de jauge

$$A'^i \equiv A^i + \frac{\partial f}{\partial x_i} \tag{2.78}$$

conduisant aux mêmes équations de Maxwell. La fonction arbitraire $f(x)$ possède des dérivées du premier et du deuxième ordre.

Ceci signifie que les composantes du quadri-vecteur $A^i(x)$ ne sont pas toutes indépendantes et ne possèdent pas toutes un contenu physique. D'autre part, du fait de sa masse nulle, le photon est transverse et ne possède que deux projections du spin contrairement au cas massif. Nous avons donc deux fois plus de composantes pour décrire le champ vectoriel de masse nulle. C'est la raison pour laquelle plusieurs méthodes de quantification ont été élaborées [2, 14, 15, 44, 45, 48].

Remarquons que la représentation $U^D(P)$ est réductible bien que la représentation $D(\Lambda_l)$ soit irréductible. Les paramètres d'irréductibilité, comme la masse et le spin, apparaissent quand on considère la représentation impulsion. Dans le cas de la masse nulle, le petit groupe est défini [10, 13] comme étant un produit semi-direct du groupe T_4 des translations quadri-dimensionnelles et d'un sous-groupe de $SL(2,C)$ stabilisateur du quadri-vecteur $v_0 = \left(\frac{1}{2}, 0, 0, \frac{1}{2}\right)^t$ appartenant à la partie supérieure du cône de lumière $C_0^+ = \{v|\ v^0 = |\mathbf{v}|\,,\ \mathbf{v} \in R^3\}$. Ce sous-groupe est le groupe de recouvrement $\tilde{E}(2) = T_2 \oslash \tilde{O}(2)$,

$$\tilde{E}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \exp i\frac{\theta}{2} & z \exp -i\frac{\theta}{2} \\ 0 & \exp -i\frac{\theta}{2} \end{pmatrix} \in SL(2,C)\,,\ 0 \leq \theta < 4\pi,\ z \in \mathbf{C} \right\} \tag{2.79}$$

du groupe euclidien à deux dimensions $SE(2) = T_2 \oslash SO(2)$ qui est aussi un produit semi-direct des translations et des rotations à deux dimensions [13, 14, 49]. Ainsi, C_0^+ est l'espace homogène isomorphe à l'un des quotients suivants

$$C_0^+ = \tilde{P}/(T_4 \oslash \tilde{E}(2)) = P/(T_4 \oslash SE(2)) \tag{2.80}$$

$$= SL(2,C)/(\tilde{E}(2)) = L/(SE(2)) \tag{2.81}$$

Le groupe $\tilde{E}(2)$ étant un groupe non compact avec une structure de produit semi-direct, ces représentations unitaires et irréductibles peuvent être déduites par la méthode des représentations induites. Nous en citons le résultat qui nous intéresse : les représentations irréductibles de dimension finie du groupe $\tilde{E}(2)$ qui reproduisent les représentations de masse nulle du groupe de Poincaré sont de dimension un[8] [9, 13, 50]. C'est essentiellement une représentation du sous-groupe des rotations $\tilde{O}(2)$, les translations de T_2 étant trivialement représentées [13, 49, 47]. Ainsi, l'induction se fait à partir d'une représentation irréductible du groupe produit semi-direct $T_4 \oslash \tilde{O}(2)$ de la forme

$$\Delta^{0\lambda} = \Delta(T_4)\,\Delta^{\lambda}\left(\tilde{O}(2)\right) \tag{2.82}$$

$$\Delta(a_T) = \exp i\,(v_0\ .a) \tag{2.83}$$

$$\Delta^{\lambda}(\tilde{r}(\theta)) = \exp(i\lambda\theta) \tag{2.84}$$

spécifiée par les paramètres de masse nulle $m = 0$ et d'hélicité $\lambda = 0,\ \pm\frac{1}{2},\ \pm 1, \cdots$, et où $(v_0.a)$ désigne le produit scalaire dans l'espace de Minkowski.

La représentation irréductible $U^{0\lambda}$ qui décrit des particules de masse nulle et d'hélicité discrète λ est donnée par

$$\left[U^{0\lambda}(p)\varphi^{0\lambda}\right](v) = \exp(iva)\exp(i\lambda\theta(l,v))\,\varphi^{0\lambda}\left(l^{-1}v\right), \tag{2.85}$$

$$p = a_T\Lambda_l, \quad v \in C_0^+, \quad \varphi^{0\lambda} \in H^{0\lambda} \tag{2.86}$$

L'angle $\theta(l,v)$ dépend de l et de $v = (|\mathbf{v}|, \mathbf{v})$ et correspond au facteur $(l,v)_{E(2)}$ correspondant à la factorisation $C_0^+ = SO(1,3)/SE(2) = SL(2,C)/\tilde{E}(2)$. Autrement dit, il est défini par la relation

$$lv_L = (l,v)_{SE(2)}\,(lv)_L \qquad (l,v)_{SE(2)} = r[\theta(l,v)] \tag{2.87}$$

$$\Lambda_l\Lambda_v = (l,v)_{\tilde{E}(2)}\,\Lambda_{lv} \qquad \Lambda_v = \Lambda_{v_L},\ \ (l,v)_{\tilde{E}(2)} = \tilde{r}[\theta(l,v)] \tag{2.88}$$

L'élément v_L qui renvoie v_0 vers v est une transformation de Lorentz $v_L = r_{\hat{\mathbf{v}}}v_{3L}$ composée d'un boost v_{3L} le long de la direction oz transformant v_0 en $(|\mathbf{v}|, |\mathbf{v}|e_z)$ et d'une rotation $r_{\hat{\mathbf{v}}}$

[8] $\tilde{E}(2)$ est un groupe "solvable", ses représentations unitaires et irréductibles sont de dimension un [9, page 202].

(transformant l'axe $\mathbf{e}_z$ en l'axe $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}/|\mathbf{v}|$) autour d'un axe perpendiculaire à $\mathbf{e}_z$ et $\hat{\mathbf{v}}$ [14].

Remarquons, que la représentation irréductible $U^{0\lambda}$ de masse nulle du groupe de Poincaré est de dimension un, alors que la représentation configuration est au moins de dimension deux (si on exclut la représentation scalaire). Pour cette raison, on peut dire que la commutation des représentations configuration et impulsion dans le cas de la masse nulle ne peut s'appliquer de manière directe qu'au cas scalaire. Pour le cas des neutrinos, la représentation impulsion irréductible, *avec prise en compte de la parité*, est la somme directe $U^{\lambda} = U^{+1/2} \oplus U^{-1/2}$ de dimension 2 où λ désigne le spin 1/2 et non ses projections $\pm 1/2$. Comme la représentation configuration peut également être de dimension 2 (ou 4) avec les matrices $D^{(1/2,0)}$ et $D^{(0,1/2)}$, ceci pourrait permettre l'application de la méthode des représentations induites à ce cas comme dans le cas massif [35]. Nous n'avons pas eu le temps d'étudier ce cas. Le cas du champ électromagnétique est plus problématique à cause de la métrique indéfinie et la liberté de jauge.

Dans les paragraphes précédents, nous avons vu que la représentation configuration $U^D(P)$ est réductible et que son espace support H^D contient des états localisés $\psi(x)$. Par contre, la représentation impulsion $U^{0\lambda}(P)$ agissant sur l'espace $H^{0\lambda}$ des fonctions $\varphi^{0,\,\lambda}(v)$ est irréductible et décrit des états de masse nulle et d'hélicité bien définies. C'est pour cette raison qu'on appelle l'espace $H^{0\lambda}$ l'espace des états matériels ou réels [33]. La commutation des représentations configuration et impulsion permet de sélectionner, parmi les états localisés, ceux qui sont réels. Nous allons présenter la commutation des représentations configuration et impulsion en conservant la notation λ pour l'hélicité et en sous-entendant qu'elle est nulle ($\lambda = 0$). Nous avons choisi cette notation car nous espérons que la méthode reste applicable pour les particules spinorielles ($\lambda = \pm 1/2$) en utilisant une somme directe de ces deux représentations. Nous devons toutefois reconnaître que l'applicabilité de cette méthode n'est pas garantie, surtout pour les particules de spin supérieur.

Le passage de l'espace des états localisés H^D vers l'espace des états matériels $H^{0\lambda}$, s'appelle matérialisation et se réalise à l'aide de l'opérateur de commutation $K_{0\lambda}$ défini comme suit

$$\begin{aligned} K_{0\lambda} : \psi \in H^D &\rightarrow \varphi^{0,\,\lambda} \in H^{0\lambda} \\ K_{0\lambda} U^D(\tilde{P}) &= U^{0\lambda}(\tilde{P}) K_{0\lambda} \end{aligned} \tag{2.89}$$

L'opérateur $K_{0\lambda}$ peut s'écrire sous la forme intégrale suivante

$$\varphi^{0,\ \lambda}(v) \quad = \quad [K_{0\lambda}\psi]\,(v) = \int_M d\mu\,(x)\ \ t\left(\Lambda_v^{-1}x_T\right)\ \ \psi(x) \tag{2.90}$$

$$d\mu\,(x) \quad = \quad d^4x = dx^0dx^1dx^2dx^3 \tag{2.91}$$

où x_T est le représentant de la classe x de $\tilde{P}/SL\,(2,C)$ et Λ_v, le représentant de la classe v de $\tilde{P}/T_4 \oslash \tilde{E}(2)$. La condition de structure de t et la relation (qui découle de la loi de groupe de $\tilde{P}$)

$$\Lambda_v^{-1}x_T = \left(\Lambda_v^{-1}x\right)_T\ \ \Lambda_v^{-1} \tag{2.92}$$

nous permettent de réécrire la forme intégrale précédente sous la forme

$$\varphi^{0,\ \lambda}(v) = [K_{0\lambda}\psi]\,(v) = \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\int_M d\mu\,(x)\exp i(v.x)K_\lambda D(\Lambda_v^{-1})\psi(x) \tag{2.93}$$

La commutation inverse $H^{0\lambda} \to H^{D,\ 0\lambda} \subset H^D$ s'interprète comme une localisation de l'état réel et se réalise par un autre opérateur $I_{0\lambda}$ défini de la même manière que l'opérateur précédent à savoir

$$\begin{gathered} I_{0\lambda}U(\tilde{P}) = I_{0\lambda}U^D(\tilde{P}) \\ H^{0\lambda} \ni \varphi^{0,\ \lambda} \to \psi^{0,\ \lambda} \in H^{D,\ 0\lambda} \subset H^D \end{gathered} \tag{2.94}$$

où $H^{D,\ 0\lambda}$ est un sous-espace qui contient des états à la fois réels et localisés dans H^D. La forme intégrale de l'opérateur $I_{0\lambda}$ est

$$\psi^{0,\ \lambda}\ (x') \quad = \quad \left[I_{0\lambda}\varphi^{0,\ \lambda}\right](x') = \int_{C_0^+} d\Omega_0^+\,(v)\,\tilde{t}\left(x_T^{-1}\Lambda_v\right)\varphi^{0,\ \lambda}\,(v) \tag{2.95}$$

$$d\Omega_0^+\,(v) \quad = \quad \frac{d^3\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v}^2}} \tag{2.96}$$

En utilisant encore la relation

$$x_T^{-1}\Lambda_v = \Lambda_v\left(-\Lambda_v^{-1}x\right)_T \tag{2.97}$$

Nous obtenons

$$\psi^{0,\ \lambda}\ (x') = \frac{1}{4\pi^{\frac{3}{2}}}\int_{C_0^+} d\Omega_0^+\,(v)\exp -i(v.x')D(\Lambda_v)I_\lambda\ \varphi^{0,\ \lambda}\,(v) \tag{2.98}$$

Ceci nous donne des états qui sont à la fois localisés et réels.

La double commutation $H^D \overset{K_\lambda}{\to} H^{0\lambda} \overset{I_\lambda}{\to} H^{D,\ 0\lambda}$, c'est-à-dire la composition $\Pi_{0\lambda} = I_{0\lambda}K_{0\lambda}$ des

deux opérateurs précédents peut alors s'écrire sous la forme intégrale

$$\psi^{0,\,\lambda}(x') = [\Pi_{0\lambda}\psi](x) = \int_M d\mu(x)\Pi_{0\lambda}(x',x)\,\psi(x) \tag{2.99}$$

$$\Pi_{0\lambda}(x',x) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{C_0^+} d\Omega_0^+(v)\exp\left[-(iv.(x'-x))\right]\times D(\Lambda_v)\,I_\lambda K_\lambda D\left(\Lambda_v^{-1}\right) \tag{2.100}$$

Le noyau $\Pi_{0\lambda}(x',x)$ de l'opérateur $\Pi_{0\lambda}$ s'interprète comme le propagateur d'un état $\psi(x)$ localisé en x vers un état $\psi^{0,\,\lambda}(x')$ localisé en x' à travers un état réel $\varphi^{0,\,\lambda}(v)$. Comme nous considérons le cas scalaire correspondant à $\lambda = 0$ et $D(\Lambda_l) = 1$, et en choisissant $I_0 = K_0 = 1$, nous obtenons

$$\Pi_{00}(x',x) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{C_0^+} d\Omega_0^+(v)\exp\left[-(iv.(x'-x))\right] \tag{2.101}$$

Ce propagateur défini sur C_0^+ décrit des particules et sera noté Π_{00}^+. Le propagateur Π_{00}^- défini sur $C_0^- = \{v/\ v^0 = -|\mathbf{v}|,\ \mathbf{v}\in R^3\}$ décrivant des antiparticules, s'obtient d'une manière analogue et possède la même expression avec la mesure $d\Omega_0^-(v)$ au lieu de $d\Omega_0^+(v)$

$$\Pi_{00}^\pm(x',x) = \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{C_0^\pm} d\Omega_0^\pm(v)\exp\left[\mp(iv.(x'-x))\right] \tag{2.102}$$

$$= \frac{1}{2(2\pi)^3}\int_{C_0^+} d\Omega_0^+(v)\exp\left[\mp(iv.(x'-x))\right] \tag{2.103}$$

$$d\Omega_0^\pm(v) = \pm\frac{d^3\mathbf{v}}{v^0} = \frac{d^3\mathbf{v}}{\sqrt{\mathbf{v}^2}} \tag{2.104}$$

Le propagateur causal est alors

$$\Pi_{00}^c(x',x) = \theta\left(x^{0\prime}-x^0\right)\Pi_{00}^+(x',x) + \theta\left(x^0-x^{0\prime}\right)\Pi_{00}^-(x',x) \tag{2.105}$$

où $\theta(t)$ est la fonction de Heaviside dont la forme intégrale est

$$\theta(t'-t) = \frac{-1}{2\pi i}\int\frac{d\omega}{\omega+i\varepsilon}\exp -i\omega(t'-t) = \begin{cases} +1 & t' > t \\ 0 & t' < t \end{cases} \tag{2.106}$$

Notons que le propagateur causal

$$\Pi^c_{00}(x', x) = \frac{i}{(2\pi)^4} \int \frac{d^4 v}{v^2 + i\varepsilon} \exp -iv(x' - x) \tag{2.107}$$

ainsi déterminé, peut s'obtenir aussi par passage à la limite de la masse nulle du propagateur causal $\Pi^c_{m\ 0}(x', x)$ d'une particule scalaire massive

$$\Pi^c_{00}(x', x) = \Pi^c_{m\ 0}(x', x)|_{m \to 0} \tag{2.108}$$

Chapitre 3

PARTICULE ETENDUE DE MASSE NULLE

Les recherches en physique effectuées à la fin du XIX^e siècle et au début du XX^e siècle ont révélé que la mécanique classique n'était plus valable à l'échelle atomique. C'est à la base de ces recherches que fut élaborée la mécanique ondulatoire [51].

Le développement de la mécanique ondulatoire fut long et difficile. Certes, l'appareil mathématique de la nouvelle théorie fut rapidement élaboré mais la question de son interprétation, et du contenu physique de la fonction d'onde, est restée pendant longtemps l'objet de débats passionnés, et a fini par partager les physiciens de l'époque en deux courants principaux.

Les partisans de l'interprétation probabiliste, connue sous le nom de l'interprétation de l'école de Copenhague, sont principalement Bohr, Born et Heisenberg. Le formalisme mathématique élégant construit sur cette base permet le calcul des prévisions en accord remarquable avec l'expérience. Cependant, son fondement se fixe pour objet non pas de décrire la réalité physique, mais uniquement de faire des prévisions sur la mesure et enlève ainsi toute réalité physique à la fonction d'onde.

Le courant réaliste soutenu par de Broglie, Einstein et bien d'autres physiciens associent à la fonction d'onde une réalité physique et se propose de décrire cette réalité. Selon le point de vue d'Einstein, l'état réel d'un système physique est quelque chose qui existe objectivement, c'est-à-dire indépendamment du processus d'observation. La description de cet état devrait être possible, mais les moyens appropriés pour cette description semblent inconnus [52].

A l'époque, de Broglie avait abandonné aussi bien sa théorie de l'onde pilote, suivant laquelle chaque particule est guidée par une onde selon la règle d'un accord de phase, que sa version

la plus évoluée de son modèle dualiste auquel il a donné le nom de ‹‹ Théorie de la double solution››. Dans cette théorie, il fait figurer pour la première fois une singularité mathématique qu'il associe à un corpuscule. De Broglie pensait pouvoir lier son interprétation à l'interprétation probabiliste de la fonction d'onde mais a rencontré de grandes difficultés mathématiques dans sa conception et n'a pu mener à terme sa théorie de la double solution ce qui l'a mené à admettre provisoirement la conception probabiliste.

En 1951, de Broglie réactualise son idée d'un dualisme réel de l'onde et du corpuscule, en lui donnant une nouvelle version de sa théorie de la double solution. Cette théorie comme son nom l'indique consiste à identifier deux solutions couplées de l'équation d'onde. L'une est la fonction d'onde de la mécanique ondulatoire et l'autre appelée onde u, comportant une singularité sensée représenter la particule [53]. L'année qui suit, David Bhom publie une version modernisée de la théorie initiale de l'onde pilote et conforte ainsi de Broglie dans sa nouvelle réorientation.

J.L. Destouches, un disciple de de Broglie, reproche à la mécanique quantique le caractère ponctuel des objets qu'elle décrit. En fait, il lie les difficultés encore nombreuses de la mécanique quantique et de la théorie quantique des champs à cette approximation ponctuelle. Généralisant les idées de de Broglie, il propose alors une théorie quantique fonctionnelle dans laquelle chaque particule est représentée comme dans la théorie de la double solution de de Broglie par une fonction u qui obéit à une équation différentielle non linéaire. La seule différence entre les deux théories est d'ordre philosophique puisque Destouches remplace la conception réaliste de de Broglie par une conception phénoméniste et fonctionnelle.

Une conception géométro-différentielle d'une particule étendue et sa quantification par la méthode des représentations induites a été réalisée pour la symétrie de de Sitter [54], et appliquée ensuite à la symétrie de Poincaré [34, 21] dans le cas massif, c'est-à-dire, en considérant les représentations induites massives du groupe de Poincaré et les interprétations de la théorie quantique fonctionnelle introduite par Destouches. Nous allons reprendre ce modèle dans le cas d'une masse nulle.

La théorie quantique fonctionnelle a permis de donner à la particule étendue une structure géométrique de fibré. Nous allons donc commencer par donner quelques notions de géométrie différentielle pour nous familiariser avec les espaces fibrés. Ceci nous sera utile lors de l'introduction du modèle. Nous introduisons ensuite les idées de la théorie fonctionnelle qui a permis cette construction. A la fin, nous présentons le modèle géométro-différentiel de la particule étendue de masse nulle et nous décrivons les processus de matérialisation et de localisation de

cette particule.

3.1 Variété différentiable

La variété différentiable est une généralisation des espaces euclidien. En d'autres termes, le voisinage U_i d'un point quelconque p d'une variété M ressemble (ou est localement homéomorphe) à un ouvert de $\mathbb{R}^m$. Ainsi, nous pouvons définir pour tout point de la variété un système de coordonnées locales donnant les coordonnées canoniques du point dans $\mathbb{R}^m$. Une variété est donc le résultat du recollement d'ouverts de $\mathbb{R}^m$. Localement, nous aurons les propriétés d'un espace euclidien mais globalement nous aurons autre chose. De manière plus précise une variété différentiable M de dimension m est un espace topologique[1] vérifiant les propriétés suivantes [55, 56, 57] :

1. M est pourvu d'une famille de paires $((U_i, \varphi_i))$
2. La famille d'ouverts $\{U_i\}$ recouvrent (reconstituent) M, et les homéomorphismes φ_i sont des fonctions de U_i vers un ensemble $U_i' \subset \mathbb{R}^m$.

$$\begin{array}{rcl} \varphi_i & : & U_i \to U_i' \subset \mathbb{R}^m \\ p & \longmapsto & \varphi_i(p) = x(p) \end{array} \tag{3.1}$$

3. Si U_i et U_j sont deux ouverts tels que $U_{i\ j} \equiv U_i \cap U_j \neq \varnothing$, alors l'application composée de φ_i et φ_j^{-1} est de classe $\mathbf{C}^\infty$ (infiniment différentiable)

$$\varphi_i o \varphi_j^{-1} : \varphi_i(U_{i\ j}) \to \varphi_j(U_{i\ j}) \tag{3.2}$$

Nous appelons la paire (U_i, φ_i) une carte de M et l'ensemble des cartes $\{(U_i, \varphi_i)\}$ un atlas. Une carte est un système de coordonnées locales du point p appartenant au voisinage U_i dans M par rapport à l'homéomorphisme φ_i. Autrement dit, nous pouvons définir des coordonnées

[1] Un espace M muni d'un ensemble $\mathcal{U} = \{U_i\}$ de sous-ensembles U_i de M est un espace topologique de topologie $\mathcal{U}$, si pour tout sous-ensemble U_i de M l'ensemble $\mathcal{U}$ satisfait aux propriétés suivantes [9, 10] :

1. L'ensemble vide $\emptyset$ et M appartiennent à $\mathcal{U}$.
2. L'intersection de deux éléments quelconque de $\mathcal{U}$ appartient toujours à $\mathcal{U}$.
3. La réunion d'un nombre fini d'éléments de $\mathcal{U}$ appartient à $\mathcal{U}$.

locales (ou fonctions coordonnées) $\in \mathbb{R}^m$

$$\begin{gathered} \varphi_i(p) = (x^\mu(p)) \in \mathbb{R}^m \\ \mu = 1, 2, ..., m \end{gathered} \tag{3.3}$$

Les fonctions coordonnées $\varphi_i(p)$ donnent les coordonnées canoniques du point p dans $\mathbb{R}^m$. Pour un point $p \in U_{i\ j}$ les cartes (U_i, φ_i) et $\left(U_j, \varphi_j\right)$ définissent deux systèmes de coordonnées locales x^μ et y^μ du point p. Ainsi, les espaces images $\varphi_i(U_{i\ j})$ et $\varphi_j(U_{i\ j})$ sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^m$ et l'application $\varphi_i o \varphi_j^{-1}$ définit un homéomorphisme entre ces deux ouverts qui décrit le passage du système de coordonnées y^μ au système de coordonnées x^μ. Exprimé en fonction des coordonnées locales, l'homéomorphisme $\varphi_i o \varphi_j^{-1}$ représente m fonctions coordonnées $x^\mu(y)$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^m$.

Le fait qu'une variété différentiable soit localement un espace euclidien nous permet d'accéder aux notions habituelles que l'on connaît sur $\mathbb{R}^m$ telle que la notion de continuité et de différentiabilité. Il faut noter que nous n'avons pas en général un accès direct à ces notions sur une variété quelconque.

Considérons deux variétés M et N de dimensions respectives m et n, et sur lesquelles les cartes (U, φ) et (V, ψ) définissent les systèmes de coordonnées x^μ et y^μ, respectivement. L'application $f: M \to N$ associe au point $p \in U$ dans M un point $f(p) \in V$ dans N. Cette application a une représentation en coordonnée

$$\psi o f o \varphi^{-1}: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n \tag{3.4}$$

qui définit une fonction d'un espace euclidien vers un autre espace euclidien. Nous dirons que f est continue ou différentiable si la fonction $\psi o f o \varphi^{-1}$ l'est. C'est un homéomorphisme si elle est continue et possède un inverse f^{-1} continue. Si de plus les deux fonctions sont infiniment différentiables, la fonction f est alors appelée un difféomorphisme [20, 55, 57].

3.2 Espace tangent à une variété

Un vecteur sur une variété peut s'introduire comme étant une tangente à une courbe. Une courbe dans une variété M de dimension m est une application γ d'un intervalle (a, b) de $\mathbb{R}$ vers cette variété, $\gamma: (a, b) \to M$. La représentation coordonnée de γ dans la carte (U_i, φ_i)

est une courbe dans $\mathbb{R}^m$ définie par

$$\begin{aligned} x^\mu(t) &= \varphi_i \, o \, \gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m \\ t &\in (a,b), \ \mu = 1, \cdots, m \end{aligned} \tag{3.5}$$

Deux courbes γ et γ' sont dites équivalentes et appartiennent à la même classe d'équivalence si elles possèdent le même vecteur tangent au point $p = \gamma(0) = \gamma'(0)$ de M

$$\gamma \sim \gamma' \Leftrightarrow \left.\frac{dx^\mu}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{dx'^\mu}{dt}\right|_{t=0} \tag{3.6}$$

L'espace tangent à M, noté T_pM est l'ensemble des classes d'équivalences pour cette relation [56]. Cela signifie que T_pM est constitué des vecteurs tangents aux courbes γ dans M.

Considérons une fonction différentiable $f : M \to \mathbb{R}$, définie sur M et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Le vecteur tangent au point p de M peut aussi être défini comme étant une loi de dérivation sur les fonctions f

$$X = \xi^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu} \Rightarrow Xf = \xi^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \tag{3.7}$$

Xf est la dérivée de f dans la direction du vecteur X (la dérivée directionnelle). L'opérateur X, appliqué à la fonction f, contient toutes les composantes du vecteur tangent. Ainsi, le vecteur $X \in T_pM$ est identifié à l'ensemble des classes d'équivalences des courbes ayant le même vecteur tangent au point p, dont les composantes sont les ξ^μ [56]. Une base naturelle de T_pM est donnée par les dérivations

$$\frac{\partial}{\partial x^\mu}, \ \mu = 1, ..., m \tag{3.8}$$

d'où l'égalité de la dimension de T_pM et celle de M . Dans une base locale $\{e_\mu\} \in T_pM$, un vecteur s'écrit sous la forme habituelle

$$X = X^\mu e_\mu \tag{3.9}$$

Le passage d'une base locale à une base naturelle peut s'effectuer au moyen des matrices $h^i_\mu(p)$ et

$h_i^\mu(p)$ inverse l'une de l'autre (i.e. $h_\mu^i h_j^\mu = \delta_j^i$)

$$\begin{aligned} X^i &= h_\mu^i X^\mu, \qquad X^\mu = h_i^\mu\ X^i \quad (3.10) \\ e_i &= h_i^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}, \qquad \frac{\partial}{\partial x^\mu} = h_\mu^i e_i \quad (3.11) \end{aligned}$$

L'espace cotangent $T\ {}_p^*M$ est l'espace dual de l'espace T_pM de même dimension. C'est l'ensemble des applications ω_p de l'espace tangent vers $\mathbb{R}$

$$\omega_p :\ T_pM \to \mathbb{R} \quad (3.12)$$

L'application ω_p est appelée une forme (1-forme). La différentielle d'une fonction df est une 1-forme. Les différentielles des coordonnées

$$dx^\mu, \quad \mu = 1, ..., m \quad (3.13)$$

constituent une base naturelle de l'espace $T\ {}_p^*M$. La base $\{dx^\mu\}$ est la base duale de la base naturelle$\left\{\dfrac{\partial}{\partial x^\mu}\right\}$ dans T_pM

$$\begin{aligned} dx^\mu\left(\frac{\partial}{\partial x^\nu}\right) &= \delta_\nu^\mu \quad (3.14) \\ \frac{\partial}{\partial x^\nu}(dx^\mu) &= \delta_\nu^\mu \quad (3.15) \end{aligned}$$

La base $\left\{\theta^i\right\}$, duale de la base locale $\{e_i\}$

$$\theta^i(e_j) = \delta_j^i \quad (3.16)$$

est liée à la base naturelle par les même matrices h_μ^i utilisées dans les bases naturelles et locales de l'espaces tangent

$$\begin{aligned} \theta^i &= h_\mu^i\ dx^\mu \\ dx^\mu &= h_i^\mu \theta^i \end{aligned} \quad (3.17)$$

Une 1-forme quelconque peut s'écrire sur la base duale

$$\omega = \omega_i \theta^i = \omega_\mu\ dx^\mu \quad (3.18)$$

où les quantités ω_μ sont les composantes d'un tenseur covariant. En général, un tenseur est un élément du produit tensoriel d'un nombre q d'espaces tangents et d'un nombre r d'espaces cotangents de la variété M . En d'autres termes, un tenseur de type (q, r) est un objet multilinéaire qui associe à q éléments de $T^{*}_{p}M$ et r éléments de T_pM un nombre réel. La décomposition du tenseur sur les bases naturelles est

$$T = T^{\mu_1 \cdots\cdots \mu_q}_{\nu_1 \cdots\cdots \nu_r} \left[\frac{\partial}{\partial x^{\mu_1}} \otimes \cdots \otimes \frac{\partial}{\partial x^{\mu_q}} \otimes dx^{\nu_1} \otimes \cdots \otimes dx^{\nu_r} \right] \tag{3.19}$$

En particulier, un tenseur de type $(0, 0)$ est une fonction scalaire sur M au point p, un tenseur de type $(1, 0)$ est un vecteur et un tenseur de type $(0, 1)$ est une forme. Dans un changement de coordonnées $x^\mu \to y^\nu (x)$ les composantes du tenseur changent selon la relation

$$T^{\mu_1 \cdots\cdots \mu_q}_{\nu_1 \cdots\cdots \nu_r} = \left[\frac{\partial y^{\mu_1}}{\partial x^{\alpha_1}} \times \cdots \times \frac{\partial y^{\mu_q}}{\partial x^{\alpha_q}} \right] \left[\frac{\partial x^{\beta_1}}{\partial y^{\nu_1}} \times \cdots \times \frac{\partial x^{\beta_r}}{\partial y^{\nu_q}} \right] T^{\alpha_1 \cdots\cdots \alpha_q}_{\beta_1 \cdots\cdots \beta_r} \tag{3.20}$$

Au lieu des espaces tangents en chaque point p, nous aurons besoin d'espaces de Hilbert décrivant les états de notre particule. Ceci correspond à une structure de fibré que nous allons introduire.

3.3 Espaces fibrés

Un fibré est une structure de variété différentiable un peu particulière caractérisée par le fait d'être décomposable en une fibre F qui est une variété différentiable greffée en tout point d'une autre variété, la variété de base M. Par construction, le fibré possède localement une structure de produit cartésien $U \times F$ où $U \subset M$. Les fibrés peuvent être classés en fonction de la structure algébrique de la fibre (espace vectoriel, groupe,...). Nous allons d'abord donner la définition d'un fibré quelconque.

Un fibré $E\,(M,\ F,\ \pi,\ G)$ de groupe structural G, est une variété différentiable E appelée espace total munie d'une variété de base M, d'une fibre type F et d'une projection $\pi :\ E \ \to\ M$ telle que, pour tout point p appartenant à M, l'ensemble $F_p = \pi^{-1}(u)$ est une sous-variété de E qu'on appelle fibre sur p. La fibre F_p est difféomorphe à F. Cela signifie qu'il y a une copie de F au dessus de chaque point p de M. D'autre part, il existe un système de trivialisation locale $\{(U_i, \phi_i)\}_{i\in I}$ déterminé par une famille d'ouverts $\{U_i\}$ recouvrant M et des difféomorphismes ϕ_i tels que [19, 20] :

(1) Pour tout point p de M, il existe un ouvert U_i de M contenant p et un difféomorphisme ϕ_i qui permet de donner au fibré une structure de produit cartésien local

$$\phi_i : U_i \times F \to \pi^{-1}(U_i) \tag{3.21}$$

vérifiant

$$\pi(\phi_i(p, f)) = p \tag{3.22}$$

pour tout couple (p, f) appartenant à $U_i \times F$.

(2) Pour deux ouverts U_i et U_j appartenant à M et contenant le point $p \in M$. Les fonctions de transition

$$t_{ij} = \phi_i^{-1} o \phi_j\big|_p : F \to F \tag{3.23}$$

décrivent une transition dans la fibre type d'un système de coordonnées (U_i, ϕ_i) vers un autre système de coordonnées $\left(U_j, \phi_j\right)$ et s'identifie aux éléments du groupe structural G. Ce dernier agit sur la fibre type à gauche. Les fonctions de transitions satisfont aux propriétés suivantes :

a) t_{ii} est l'élément neutre de G.

b) $t_{ij} = t_{ji}^{-1}$

c) Si $p \in U_i \cap U_j \cap U_k, \quad t_{ij} t_{jk} = t_{ik}$.

Avant de terminer cette présentation générale, donnons la définition d'une section locale S_i d'un fibré quelconque qui est une fonction sur un voisinage U_i de la variété de base M dans F_p

$$\begin{aligned} S_i \quad &: \quad U_i \to F_p \\ p \quad &\longmapsto \quad S_i(p) \end{aligned} \tag{3.24}$$

Nous pouvons considérer maintenant des cas spécifiques de fibrés et de leurs sections. Commençons par le fibré tangent qui est l'union de tous les espaces tangents T_pM en tous les points p de M

$$TM = \bigcup_{p \in M} T_pM \tag{3.25}$$

La variété M est alors appelée variété de base et chaque espace tangent une fibre sur p. Un élément u de TM correspond à un point p de M et à un vecteur v de T_pM. Pour dégager le

sens de la trivialisation locale, considérons une carte (U_i, φ_i) dans M définissant le système de coordonnées $\varphi_i(p) = x^\mu(p)$ du point $p \in U_i \subset M$. Comme U_i est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$ et que chaque espace tangent T_pM est homéomorphe à $\mathbb{R}^m$, le fibré tangent TU_i est identifié au produit cartésien $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Considéré alors comme élément du fibré tangent TU_i, le point u est associé au point $p \in M$ au vecteur $v \in T_pM$ par cette trivialisation. Ceci nous permet de définir la projection $\pi : TM \to M$ par $\pi(u) = p$ et la représentation en coordonnées $(p, v) \to (x^\mu(p), v^\mu(p))$. Nous avons donc $2m$ coordonnées pour caractériser un élément de TM, c'est donc un espace de dimension $2m$.

Considérons deux ouverts U_i et U_j d'une variété M tels que $U_i \cap U_j \neq 0$, définissant les coordonnées locales $x^\mu = \varphi_i(p)$ et $y^\mu = \varphi_j(p)$, respectivement. Le vecteur $v \in T_pM$ aura alors deux systèmes de coordonnées

$$v = v^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right)\Big|_p = \tilde{v}^\mu \left(\frac{\partial}{\partial y^\mu}\right)\Big|_p \tag{3.26}$$

On passe d'un système de coordonnées $\tilde{v}^\mu$ du fibré TM à un autre système de coordonnées v^μ par les éléments

$$G^\nu_\mu = \frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \tag{3.27}$$

du groupe général linéaire $GL(m, \mathbb{R})$, des matrices inversibles $m \times m$, constituant le groupe structural du fibré TM.

Un champ de vecteurs X est une application qui fait correspondre à chaque point p de M un vecteur de l'espace tangent à ce point sur la variété. De cette manière, un champ vectoriel est une section du fibré tangent.

Les fibrés tangents et cotangents sont des éléments d'une classe de fibrés dits associés à des fibrés principaux. Un fibré principal est un fibré dont la fibre $\pi^{-1}(p)$ au-dessus du point p d'une variété de base M est difféomorphe au groupe structural G. Ce fibré est noté $P(M, G)$. C'est le cas du fibré de repères linéaires LM dont la fibre L_pM, sur un point $p \in M$, est l'ensemble de touts les vecteurs de bases de l'espace tangent en ce point. Un point de LM est donc un repère, c'est-à-dire un point représentant une origine et une famille de m vecteurs constituant une base. Le groupe structural $GL(m, \mathbb{R})$ agit à droite sur L_pM selon la relation

$$\{X_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,m} \to \{Y_\beta\} = \left\{X_\alpha a^\alpha_\beta\right\}_{\beta,\ \alpha=1,\cdots,m} \tag{3.28}$$

où $\{X_\alpha\}_{\alpha=1,\cdots,m} \in L_pM$ et $a^\alpha_\beta \in GL(m, \mathbb{R})$. Le fibré des repères est par définition

$$LM = \bigcup_{p \in M} L_p M \tag{3.29}$$

Une trivialisation locale de LM est donnée par les difféomorphismes

$$\phi_i = U_i \times GL(m, \mathbb{R}) \to \pi^{-1}(U_i) \tag{3.30}$$

$$(p,\ (X_\alpha^\mu)) \mapsto X_\alpha = X_\alpha^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p \tag{3.31}$$

Sur un point $p \in U_i \cap U_j$ dans M défini par ses coordonnées locales respectives $x^\mu(p)$ et $y^\mu(p)$, le même repère peut s'écrire

$$X_\alpha = X_\alpha^\mu \left.\frac{\partial}{\partial x^\mu}\right|_p = Y_\alpha^\nu \left.\frac{\partial}{\partial y^\nu}\right|_p \tag{3.32}$$

Nous avons donc

$$X_\alpha^\mu = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)_p Y_\alpha^\nu \tag{3.33}$$

D'où l'on peut identifier les fonctions de transition avec les éléments du groupe structural.

$$t_{\mu\nu} = \left(\frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}\right)_p \in GL(m, \mathbb{R}) \tag{3.34}$$

En physique, un fibré principal correspond à une structure contenant tous les repères locaux et une section de celui-ci correspond à un choix particulier d'un système de référence local (ou un choix de jauge). Ce choix de repère est nécessaire dans la définition des champs (tensoriels) qui sont des sections de fibrés tensoriels associés au même fibré principal au sens que leurs fibres sont des espaces de représentations (tensorielles) d'un groupe structural commun. Précisément, un fibré associé à un fibré principal $P(M, G)$ se construit en faisant agir le groupe structural sur une fibre type F à gauche de sorte que l'action d'un élément $g \in G$ sur $P \times F$ soit définie par

$$(u, f) \ \to \ \left(ug, g^{-1}f\right) \tag{3.35}$$

$$u \ \in \ P, \quad f \in F \tag{3.36}$$

Le fibré associé $(P,\ M,\ \pi,\ G,\ F)$ est défini comme étant l'ensemble des classes d'équivalences $(P \times F)/G$ dans lequel le point (u, f) est identifié au point $(ug, g^{-1}f)$. Dans le cas où F est un espace de Hilbert, on parle de fibré de Hilbert et l'équivalence précédente a le sens bien connu

que la transformation simultanée du repère par g et le vecteur d'état par g^{-1} ne change pas les résultats d'observation sur le système physique (on obtient les mêmes valeurs des composantes, i.e. des probabilités). La particule étendue sera décrite par un fibré de Hilbert associé à un fibré de repères de Lorentz dans le paragraphe suivant.

3.4 Particule étendue en théorie fonctionnelle

L'analyse des implications liées à la distinction d'un système (la particule) du reste de l'univers (l'extérieur) et du caractère approximatif de l'introduction du champ qui caractérise l'influence de l'extérieur sur le système considéré, montre que d'un point de vue physique la représentation de la particule par un point est insuffisante[2] car elle ne permet pas de prendre en compte l'influence de l'extérieur sur les caractéristiques propres de la particule [18]. Ces caractéristiques ainsi que les actions auxquelles est soumise la particule conditionnent son mouvement. La théorie fonctionnelle se présente comme une alternative pour améliorer ces approximations, sans nier complètement le caractère ponctuel de la particule mais le considère comme un aspect partiel de la réalité physique. La totalité des caractéristiques propres sont représentées au moyen de la fonction u (à valeur complexe) appartenant à un espace séparable R_u [58]. Remarquons que $u = u(P, T)$ est une fonction de deux variables libres P et T n'ayant aucune signification physique et parcourant tous les points et tous les instants, respectivement. La fonction u est alors difficile à traiter et doit être associée à un modèle réaliste qui rend son traitement plus intuitif et avec lequel on peut trouver des équations de mouvement pour cette fonction [18].

En théorie fonctionnelle, le rôle joué par M est repris par la fonction u, et celui de l'onde $\psi(M, t)$ de la mécanique quantique usuelle est repris par une onde fonctionnelle $X[u, t]$ qui est dans le cas général une onde qui se propage dans l'espace R_u des fonctions u [58].

Comme l'aspect géométrique n'est qu'un aspect partiel de la réalité physique, la particule est représentée géométriquement par un point M qui est une certaine fonctionnelle[3] F de u, soit

$$M = \sin g\,(u) = F\,[u] \tag{3.37}$$

Remarquons aussi que la fonctionnelle $X[u, t]$ se réduit à une fonction $\Psi(M, t)$ si on ne s'intéresse

[2] Ces mêmes considérations montrent qu'on ne peut adopter pour la particule une figure géométrique de corps rigide [18].

[3] La notation "$\sin g$" rappelle la théorie de la double solution de M. Louis de Broglie (1927), où il représente le corpuscule par une fonction u. Le point M est la singularité mathématique de cette fonction.

qu'à l'aspect géométrique de la particule. Cette fonction d'onde prévisionnelle est l'analogue de $\psi(M,t)$ dans la théorie fonctionnelle.

La théorie fonctionnelle a permis de représenter la particule étendue par une structure de fibré [59]. Le point $x=(M,T)$ forme la base de la variété et les fonctions $u\,(P,T)$ appartiennent à la fibre. L'interprétation physique de $u\,(P,T)$ est qu'elle représente un mode local au point (P,T) de la symétrie spatio-temporelle interne de la particule et x représente la localisation du mode externe. Ceci peut se comprendre facilement dans le cas particulier où

$$X[u]\left((M,t)\,;(P,T)\right)=\psi\,(M,t)\,u\,(P,T) \tag{3.38}$$

Ainsi, la particule étendue est conçue comme étant composée de deux modes de masses nulles. Nous présentons dans ce qui suit les fibrés du modèle dans lesquels on remplace (M,t) et (P,T) par x et ξ, respectivement.

3.5 Modèle géométrique de la particule étendue

La commutation des représentations induites de configuration et impulsion dans le cas des particules massives donne le propagateur de ces particules. Ceci a conduit à la considération de ces deux représentations pour les modes externe et interne. Nous allons considérer la même structure pour les particules de masse nulle sauf que nous n'allons considérer la propagation que dans le cas scalaire.

Commençons par introduire ce qu'on appelle le fibré configuration-configuration

$$E^D=\left(M,\ H^D,\ U^D(\tilde{\Pi})\right) \tag{3.39}$$

dans lequel le mode interne et le mode externe sont dans la représentation configuration et peuvent donc être aussi bien réels que virtuels. L'espace de Minkowski externe M constitue la variété de base et l'espace de la représentation configuration H^D forme la fibre type. Le rôle de groupe structural est joué par la représentation induite de configuration $U^D(\tilde{\Pi})$ du groupe de symétrie interne $\tilde{\Pi}$, le groupe de recouvrement du groupe de Poincaré.

La particule est représentée par la section

$$\begin{aligned} \Psi \quad &: \quad M \to E^D \\ x \quad &\mapsto \quad \Psi_x \end{aligned} \tag{3.40}$$

Cette section associe au point x de la variété de base une fonction d'onde $\Psi_x(\xi)$ définie aux points ξ de l'espace de configuration interne de Minkowski, et correspondant à l'onde physique u. La fonction $\Psi_x(\xi)$ représente à la fois les caractéristiques propres de la particule et l'aspect géométrique partiel (de la particule étendue), identifié au point de contact x entre la variété de base et la fibre, et déterminé par la projection π du fibré

$$x = \pi(\Psi_x) \tag{3.41}$$

Conformément à la théorie fonctionnelle, les probabilités de mesure sont données par la fonctionnelle

$$X[\Psi](x,\xi) \equiv \psi(x,\xi) \tag{3.42}$$

$$\psi(x,\xi) = \psi(x)\,\Psi_x(\xi) \tag{3.43}$$

Cette fonctionnelle donne les probabilités de trouver le mode externe $\psi(x)$ localisé au point x et le mode interne $\Psi_x(\xi)$ localisé au point ξ. Notons que Ψ_x se transforme par la représentation induite de configuration du groupe de symétrie interne $\tilde{\Pi}$ selon la relation

$$\left[U^D\left(a_T\tilde{\Lambda}_l\right)\Psi_x\right](\xi) = D\left(\tilde{\Lambda}_l^{-1}\right)\Psi_x\left(l^{-1}(\xi-a)\right) \tag{3.44}$$

$$a_T \in T, \qquad \tilde{\Lambda}_l \in SL(2,C), \quad \xi \in M' \tag{3.45}$$

La fonction $\psi(x)$ se transforme par la représentation induite de configuration du groupe de symétrie externe (de recouvrement du groupe de Poincaré $\tilde{P}$) selon la même relation précédente avec les notations adéquates.

Le deuxième fibré que l'on peut construire est le fibré configuration-impulsion

$$E^{0\lambda} = \left(M,\ H^{0\lambda},\ U^{0\lambda}(\tilde{\Pi})\right) \tag{3.46}$$

dont la variété de base est toujours un espace externe de configuration de Minkowski, alors que la fibre est un espace de Hilbert support de la représentation induite irréductible $U^{0\lambda}(\tilde{\Pi})$ dans l'espace impulsion. Cette représentation décrit un mode interne de masse nulle et d'hélicité λ, la particule est alors représentée par la section

$$\begin{array}{rcl} \Phi^{0\lambda} & : & M \to E^{0\lambda} \\ x & \mapsto & \Phi_x^{0\lambda} \end{array} \tag{3.47}$$

Cette section associe au point x de la variété de base une onde physique $\Phi_x^{0\lambda}(\zeta)$ définie aux points ζ de l'espace des impulsions internes, la partie supérieure $C_0^{\prime +}$ du cône de lumière[4]. La fonctionnelle prévisionnelle est donnée par

$$X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta) \equiv \psi^{0\lambda}(x,\zeta) \tag{3.48}$$

$$\psi^{0\lambda}(x,\zeta) = \psi(x)\,\Phi_x^{0\lambda}(\zeta) \tag{3.49}$$

Ainsi, le mode externe est toujours localisé alors que le mode interne est réel. La fonctionnelle $X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta)$ permet de calculer la probabilité de trouver la particule localisée au point x avec un mode interne d'impulsion ζ. La loi de transformation de la partie externe $\psi(x)$ de cette fonctionnelle est identique à celle du fibré configuration-configuration, alors que la partie interne $\Phi_x^{0\lambda}(\zeta)$ se transforme par la représentation $U^{0\lambda}(\tilde{\Pi})$ suivant la relation

$$\left[U^{0\lambda}(a_T\tilde{\Lambda}_l)\Phi_x^{0\lambda}\right](\zeta) = \exp(i\ \zeta a)\exp(i\lambda\theta(l,\zeta))\,\Phi_x^{0\lambda}\left(l^{-1}\zeta\right) \tag{3.50}$$

Le troisième fibré est le fibré impulsion-configuration

$$F^D = \left(C_0^+,\ H^D,\ U^D(\tilde{\Pi})\right) \tag{3.51}$$

dans lequel on garde la fibre type et le groupe structural du fibré configuration-configuration mais on remplace la variété de base (l'espace de configuration externe) par l'espace impulsion

[4]Rappelons que pour des anti-modes, nous devons considérer la partie inférieure C_0^- du cône de lumière. Dans le but d'alléger les expressions, nous ne considérons ce cas que dans les résultats finaux.

externe C_0^+. Dans ce cas, la section et la fonctionnelle sont respectivement

$$\begin{aligned} \Psi &: C_0^+ \to E^D \\ v &\mapsto \Psi_v \end{aligned} \tag{3.52}$$

et

$$X_{0S}[\Psi](v,\xi) \equiv \psi_{0S}(v,\zeta) \tag{3.53}$$

$$\psi_{0S}(v,\zeta) = \varphi_{0S}(v)\,\Psi_v(\xi) \tag{3.54}$$

La première composante est réelle et décrit un mode externe de masse nulle et d'hélicité S. Par contre, la deuxième composante est un mode interne localisé dans l'espace de Minkowski interne et peut donc être aussi bien réel que virtuel. Le point de contact de la variété de base et la fibre est donné par la projection du fibré

$$v = \pi(\Psi_v(\xi)) \tag{3.55}$$

et correspond à l'impulsion du mode externe. La loi de transformation de chaque composante est la même que l'une des deux lois données ci-dessus selon qu'elle soit une représentation configuration ou impulsion.

Le quatrième fibré est le fibré impulsion-impulsion

$$F^{0S,\,0\lambda} = \left(C_0^+,\ H^{0\lambda},\ U^{0\lambda}(\tilde{\Pi})\right) \tag{3.56}$$

dans lequel la variété de base est un espace des impulsions externes. Les modes externe et interne sont dans les représentations irréductibles correspondant à l'hélicité externe S et l'hélicité interne λ. De manière explicite, la section du fibré est

$$\begin{aligned} \Phi^{0\lambda} &: C_0^+ \to F^{0\lambda} \\ v &\mapsto \Phi_v^{0\lambda} \end{aligned} \tag{3.57}$$

et la fonctionnelle est

$$X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) \equiv \psi_{0S}^{0\lambda}(v,\zeta) \tag{3.58}$$

$$\psi_{0S}^{0\lambda}(v,\zeta) = \varphi_{0S}(v)\,\Phi_v^{0\lambda}(\zeta) \tag{3.59}$$

Remarquons, que les deux termes décrivent des états réels. Les fonctions $\varphi_{0S}(v)$ se transforment par la représentation irréductible $U^{0S}(\tilde{P})$ du groupe de symétrie externe $\tilde{P}$ et les fonctions $\Phi_v^{0\lambda}(\zeta)$ se transforment par la représentation irréductible $U^{0\lambda}(\tilde{\Pi})$; les deux termes se transforment selon (3.50) en effectuant les changements adéquats. Notons que cette dernière relation montre que n'importe quelle combinaison des hélicités, externe et interne, est possible dans ce modèle.

3.6 Propagateur de la particule étendue

Les commutations considérées pour les particules ponctuelles peuvent être reconsidérées pour la particule étendue en les appliquant séparément aux modes externes et internes[5]. Nous avons donc quatre processus : la localisation et la matérialisation du mode externe ainsi que ces deux mêmes processus pour le mode interne. Pour la particule étendue, il est question de définir le passage de la fonctionnelle X définie sur un fibré à une fonctionnelle définie sur un autre fibré. Par exemple, le passage de la fonctionnelle $X[\Psi](x,\xi)$ correspondant au fibré configuration-configuration à la fonctionnelle $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$ du fibré impulsion-impulsion a été interprété comme une matérialisation complète de la particule étendue (les deux modes se matérialisent). Ce processus est une combinaison de deux processus de matérialisation, l'un interne et l'autre externe, qui peuvent se réaliser indifféremment de leur ordre [21]. Ainsi, nous avons deux possibilités pour la matérialisation de la particule étendue dont le mode externe et interne sont localisés aux points x et ξ, respectivement. Nous pouvons commencer par la matérialisation du mode interne puis ensuite la matérialisation du mode externe. Ceci correspond au chemin suivant :

$$E^D \to E^{0\lambda} \to F^{0S,\ 0\lambda} \tag{3.60}$$

[5]Rappelons que ceci n'est valable que pour les particules *scalaires* sans masse. Le cas des particules de spin 1/2 n'a pas encore été étudié alors que celui des particules de spin supérieur ou égal à 1 semble encore plus difficile.

$$X[\Psi](x,\xi) \overset{K_\lambda}{\mapsto} X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta) \overset{K_s}{\mapsto} X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) \tag{3.61}$$

La commutation dans l'espace interne se réalise à l'aide de l'opérateur K_λ et permet de déterminer le lien entre les fonctions d'ondes $X[\Psi](x,\xi)$ et $X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta)$ décrivant respectivement les états complètement localisés et les états localisés dans l'espace-temps externe mais dont le mode interne est réel

$$\begin{aligned} X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta) &= \int_{M'} d\mu(\xi) K_\lambda D\left(\Lambda_\zeta^{-1}\right) \exp i(\zeta.\xi) X[\Psi](x,\xi) && (3.62)\\ d\mu(\xi) &= d\xi^0 d\xi^1 d\xi^2 d\xi^3 && (3.63) \end{aligned}$$

Les états complètement matériels s'obtiennent en considérant en plus la commutation dans l'espace-temps externe grâce à l'opérateur K_s qui est une transition d'un état $X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta)$ vers des états décrits par $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$

$$\begin{aligned} X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) &= \int_M d\mu(x) K_s D\left(\Lambda_v^{-1}\right) \exp i(v.x) X[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta) && (3.64)\\ d\mu(x) &= dx^0 dx^1 dx^2 dx^3 && (3.65) \end{aligned}$$

La combinaison des deux relations précédentes nous permet d'obtenir une relation entre les fonctions d'onde décrivant les états matériels $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$ et les états complètement localisés $X[\Psi](x,\xi)$, c'est-à-dire le processus de matérialisation de la particule étendue

$$\begin{aligned} X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) &= \int_{M,\ M'} d\mu(x)\, d\mu(\xi) K_s D\left(\Lambda_v^{-1}\right) \exp i(v.x) \times \\ &\quad K_\lambda D\left(\Lambda_\zeta^{-1}\right) \exp i(\zeta.\xi) X[\Psi](x,\xi) && (3.66) \end{aligned}$$

Le même processus peut se réaliser en choisissant de matérialiser d'abord le mode externe ensuite le mode interne ; le chemin correspondant est

$$E^D \to F^D \to F^{0S,\ 0\lambda} \tag{3.67}$$

$$X[\Psi](x,\xi) \overset{K_s}{\mapsto} X_{0S}[\Psi](v,\xi) \overset{K_\lambda}{\mapsto} X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) \tag{3.68}$$

La première composante de cette voie est une matérialisation d'un état complètement localisé vers un état réel par rapport à l'espace-temps externe mais dont le mode interne est localisé.

Les fonctions d'ondes $X[\Psi](x,\xi)$ et $X_{0S}[\Psi](v,\xi)$ sont liées par la relation suivante

$$X_{0S}[\Psi](v,\xi) = \int_M d\mu(x)\, K_s D\left(\Lambda_v^{-1}\right) \exp i(v.x) X[\Psi](x,\xi) \tag{3.69}$$

Les états matériels s'obtiennent en considérant en plus la commutation dans l'espace interne de la particule étendue qui est une transition d'un état décrit par $X_{0S}[\Psi](v,\xi)$ vers un état matériel $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$

$$X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) = \int_{M'} d\mu(\xi) K_\lambda D\left(\Lambda_\zeta^{-1}\right) \exp i(\zeta.\xi) X_{0S}[\Psi](v,\xi) \tag{3.70}$$

La combinaison des deux processus précédents reproduit la même matérialisation (3.66) sauf que l'ordre des opérateurs $K_s D(\Lambda_v^{-1})$ et $K_\lambda D\left(\Lambda_\zeta^{-1}\right)$ est interverti. Ceci n'affecte pas le résultat car chaque opérateur agit sur une partie bien définie de la fonction d'onde au sens d'un produit tensoriel.

La localisation des états matériels $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$ correspond au processus inverse de la matérialisation. Nous pouvons par exemple considérer la voie suivante

$$F^{0S,\ 0\lambda} \rightarrow E^{0\lambda} \rightarrow E^D \tag{3.71}$$

$$X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) \overset{I_s}{\mapsto} X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta) \overset{I_\lambda}{\mapsto} X_{0S}[\Psi^{0\lambda}](x',\xi') \tag{3.72}$$

dans laquelle on procède d'abord par la localisation du mode externe correspondant à la commutation dans l'espace externe. Ceci nous permet d'écrire le lien entre les fonctions $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$ décrivant les états matériels et les fonctions $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](x',\zeta)$ décrivant les états dont le mode externe est localisé et réel alors que le mode interne est réel seulement

$$X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](x',\zeta) = \int_{C_0^+} d\Omega_0^+(v)\ \ D(\Lambda_v)\, I_s \exp\left[-i(v.x)\right]\ \ X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) \tag{3.73}$$

La localisation complète de la particule étendue s'obtient en passant à la seconde étape qui est la commutation dans l'espace interne. On obtient ainsi une relation qui lie les états décrits par $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](x,\zeta)$ aux états $X_{0S}[\Psi^{0\lambda}](x',\xi')$ dont les modes interne et externe sont tous les deux localisés et réels

$$X_{0S}[\Psi^{0\lambda}](x',\xi') = \int_{C_0'^+} d\Omega_0^+(\zeta)\, D(\Lambda_\zeta)\, I_\lambda \exp\left[-i(\zeta.\xi)\right]\ \ X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](x',\zeta) \tag{3.74}$$

La combinaison des deux relations précédentes décrivant la localisation du mode externe et du mode interne nous permet de relier les états $X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta)$ aux états $X_{0S}[\Psi^{0\lambda}](x',\xi')$, en d'autres termes nous avons défini le processus de localisation des états matériels

$$\begin{aligned} X_{0S}[\Psi^{0\lambda}](x',\xi') &= \int_{C_0^+,C_0'^+} d\Omega_0^+(v)\, d\Omega_0^+(\zeta)\ D(\Lambda_v)\, I_s \exp[-i(v.x)] \times \\ &\quad D(\Lambda_\zeta)\, I_\lambda \exp[-i(\zeta.\xi)]\ X_{0S}[\Phi^{0\lambda}](v,\zeta) \end{aligned} \tag{3.75}$$

Remarquons que nous aurions pu aboutir à la même localisation si nous avions commencé par localiser le mode interne puis le mode externe. Ceci correspond à une transition d'un état du fibré $F^{0S,\,0\lambda}$ vers un état du fibré F^D suivie d'une transition du même état du fibré F^D vers un autre état du fibré E^D.

La propagation de la particule étendue correspond à une transition d'un état localisé au point (x,ξ) vers un autre état localisé au point (x',ξ'). Ce processus peut se réaliser selon plusieurs voies toutes commençant dans E^D et finissant dans E^D. Notons aussi qu'il peut se réaliser sans passer par un état complètement matériel (contrairement au cas ponctuel), mais aussi n'importe quel chemin passant par l'espace des états complètement matériels $F^{0S,\,0\lambda}$ fournit la même propagation [54]. Par exemple, considérons la propagation de la particule étendue selon le schéma suivant

$$E^D \to E^{0\lambda} \to F^{0S,\,0\lambda} \to E^{D,0\lambda} \to E_{0S}^{D,0\lambda} \tag{3.76}$$

$$\psi(x,\xi) \mapsto \psi^{0\lambda}(x,\zeta) \mapsto \psi_{0S}^{0\lambda}(v,\zeta) \mapsto \psi_{0S}^{0\lambda}(x',\zeta) \mapsto \psi_{0S}^{0\lambda}(x',\xi') \tag{3.77}$$

Cette propagation est décrite par la relation suivante

$$X_{0S}[\Psi^{0\lambda}](x',\xi') = \int_{M,\ M'} d\mu(x)\, d\mu(\xi) \Pi_{0S,\pm}^{0\lambda\pm}(x,\xi;x',\xi')\, X[\Psi](x,\xi) \tag{3.78}$$

où le propagateur total

$$\Pi_{0S,\pm}^{0\lambda\pm}(x,\xi;x',\xi') = \Pi_{0S,\pm}(x,x')\, \Pi^{0\lambda\pm}(\xi,\xi') \tag{3.79}$$

$$\begin{aligned} \Pi_{0S,\pm}(x,x') &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{C_0^+} d\Omega_0^+(v) \exp[\mp(iv.(x-x'))] \times \\ &\quad D(\Lambda_v)\, I_s^\pm K_s^\pm D\left(\Lambda_v^{-1}\right) \end{aligned} \tag{3.80}$$

$$\begin{aligned} \Pi^{0\lambda\pm}(\xi,\xi') &= \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{C_0'^+} d\Omega_0^+(\zeta) \exp[\mp(i\zeta.(\xi-\xi'))] \times \\ &\quad D(\Lambda_\zeta)\, I_\lambda^\pm K_\lambda^\pm D\left(\Lambda_\zeta^{-1}\right) \end{aligned} \tag{3.81}$$

est le produit de deux propagateurs ponctuels correspondant à la propagation du mode externe ignorant l'existence du mode interne et le propagateur du mode interne ignorant l'existence du mode externe. En d'autres termes, les deux modes ponctuels sans masse se propagent librement sans interagir. Les signes + et − désignent les propagateurs des modes et anti-modes, respectivement. Dans la supposition où la particule étendue est composée de deux modes et que l'antiparticule est composée de deux anti-modes, nous devons choisir les propagateurs $\Pi_{0S,+}^{0\lambda+}$ et $\Pi_{0S,-}^{0\lambda-}$, respectivement. La composition mixte où la particule contient un mode externe et un anti-mode interne est tout aussi envisageable avec le choix suivant des propagateurs pour la particule et l'antiparticule, $\Pi_{0S,+}^{0\lambda-}$ et $\Pi_{0S,-}^{0\lambda+}$.

A cause des problèmes liés aux hélicités d'ordre supérieur ($S \neq 0$ et $\lambda \neq 0$), nous préférons ne pas donner une forme générale même formelle du propagateur causal et nous passons tout de suite au cas scalaire où les représentations D du groupe $SL(2,C)$, externe et interne, sont triviales ($D = 1$). Il en est de même des opérateurs I_s, I_λ, K_s et K_λ. Par conséquent, le processus de matérialisation s'exprime par la relation

$$X_{00}[\Phi^{00}](v,\zeta) = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{M,M'} d\mu(x)\, d\mu(\xi) \exp i(v.x) \exp i(\zeta.\xi) X[\Psi](x,\xi) \tag{3.82}$$

et le processus inverse de la localisation complète de la particule étendue par

$$X_{00}[\Psi^{00}](x',\xi') = \frac{1}{4\pi^{3/2}} \int_{C_0^+, C_0'^+} d\Omega_0^+(v)\, d\Omega_0^+(\zeta) \exp -i(v.x) \exp -i(\zeta.\xi)\; X_{00}[\Phi^{00}](v,\zeta) \tag{3.83}$$

Le propagateur $\Pi(x,\xi;x',\xi')$ est le produit du propagateur du mode ponctuel externe scalaire et celui du mode interne. Ces deux propagateurs ont été déterminés dans le chapitre précédent et le résultat final est

$$\Pi_{\pm}^{\pm}(x,\xi;x',\xi') = \Pi_{00,\pm}(x,x')\,\Pi^{00\pm}(\xi,\xi') \tag{3.84}$$

$$\Pi_{00,\pm}(x,x') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{C_0^+} d\Omega_0^+(v) \exp\left[\mp(iv.(x-x'))\right] \tag{3.85}$$

$$\Pi^{00\pm}(\xi,\xi') = \frac{1}{2(2\pi)^3} \int_{C_0'^+} d\Omega_0^+(\zeta) \exp\left[\mp(i\zeta.(\xi-\xi'))\right] \tag{3.86}$$

Le propagateur causal de la particule étendue est aussi le produit des propagateurs causals

ponctuels

$$\Pi^{c}\left(x,\xi;x',\xi'\right) = \Pi_{00}^{c}\left(x,x'\right)\Pi^{00c}\left(\xi,\xi'\right) \tag{3.87}$$

$$\Pi_{00}^{c}\left(x,x'\right) = \frac{i}{\left(2\pi\right)^{4}}\int d^{4}v\frac{\exp -iv\left(x'-x\right)}{v^{2}+i\varepsilon} \tag{3.88}$$

$$\Pi^{00c}\left(\xi,\xi'\right) = \frac{i}{\left(2\pi\right)^{4}}\int d^{4}\zeta\frac{\exp -i\zeta\left(\xi'-\xi\right)}{\zeta^{2}+i\varepsilon} \tag{3.89}$$

Ce propagateur s'obtient en supposant que les deux modes se propagent d'une manière causale de sorte que

$$\Pi^{c}\left(x,\xi;x',\xi'\right) = \theta\left(x^{0\prime}-x^{0}\right)\theta\left(\xi^{0\prime}-\xi^{0}\right)\Pi_{+}^{+}+\theta\left(x^{0}-x^{0\prime}\right)\theta\left(\xi^{0}-\xi^{0\prime}\right)\Pi_{-}^{-} \tag{3.90}$$

$$= \theta\left(x^{0\prime}-x^{0}\right)\theta\left(\xi^{0}-\xi^{0\prime}\right)\Pi_{-}^{+}+\theta\left(x^{0}-x^{0\prime}\right)\theta\left(\xi^{0\prime}-\xi^{0}\right)\Pi_{+}^{-} \tag{3.91}$$

$$= \theta\left(x^{0}-x^{0\prime}\right)\theta\left(\xi^{0\prime}-\xi^{0}\right)\Pi_{+}^{-}+\theta\left(x^{0\prime}-x^{0}\right)\theta\left(\xi^{0}-\xi^{0\prime}\right)\Pi_{-}^{+} \tag{3.92}$$

Les trois expressions sont égales à cause de la structure en produit tensoriel local des fibrés et de la symétrie de l'expression (2.105) du propagateur causal ponctuel par rapport aux propagateurs ponctuels de la particule et de l'antiparticule.

CONCLUSION

Dans ce travail, nous avons reconsidéré le modèle géométro-differentiel de la particule étendue dans le cas de la masse nulle. La particule est conçue comme composée d'un mode ponctuel externe d'hélicité S et d'un mode ponctuel interne d'hélicité λ, tous les deux de masse nulle. Le mode interne correspond à l'onde physique u de la théorie fonctionnelle, alors que le mode externe apparaît comme une partie de la fonctionnelle X donnant les prévisions (les probabilités) sur la mesure et décrit la localisation de la particule étendue dans l'espace-temps en tant que tout. En suivant la ligne de construction du cas massif, nous avons adopté les mêmes structures de fibrés. A savoir, le fibré configuration-configuration, le fibré configuration-impulsion, le fibré impulsion-configuration et finalement le fibré impulsion-impulsion. Dans chacun des fibrés précédents, la fibre est un espace de Hilbert support d'une représentation induite de masse nulle du groupe de Poincaré interne. La section du fibré représente l'onde physique u et l'aspect géométrique correspond au point de contact entre la variété de base et la fibre. La fonctionnelle prévisionnelle X est présentée comme le produit tensoriel local des fonctions d'ondes du mode externe et du mode interne. A ce stade, la particule étendue possède des hélicités S et λ quelconques.

La commutation des représentations configurations et impulsions nous a permis de décrire les processus de matérialisation et de localisation des particules ponctuelles de masse nulle dans le cas scalaire. En particulier, ceci nous a permis de définir le propagateur pour ces particules. En appliquant ces deux processus aux modes internes et externes, nous avons décrit les processus de matérialisation et de localisation de la particule étendue complètement scalaire ($S = 0$ et $\lambda = 0$). Le propagateur ainsi obtenu est le produit de deux termes, un terme décrivant la propagation du mode interne dans l'espace-temps interne et un autre décrivant la propagation du mode externe dans l'espace-temps externe de la particule étendue. Cette forme en produit du propagateur n'est qu'un cas particulier car nous n'avons pas tenu compte de l'interaction.

La faisabilité de la commutation des états spinoriels et vectoriels reste posée car le cas des

particules de masse nulle, d'hélicité 1/2 ou 1, n'a été considéré que dans la construction des fibrés de Hilbert sans lui appliquer la commutation. Dans le dernier paragraphe du deuxième chapitre, nous avons noté que la différence de dimension des représentations configuration et impulsion d'hélicité 1/2 ne nous permet pas de commuter ces deux représentations. Nous avons noté aussi que cette difficulté semble être surmontable si on considère la représentation, du groupe de Poincaré élargi à la parité, qui est une somme directe de la représentation d'hélicité $+1/2$ correspondant aux neutrinos (polarisation gauche) et de la représentation $-1/2$ correspondant aux antineutrinos (polarisation droite). Dans ce cas, il semble possible de lier les fonctions d'onde décrivant la localisation de ces particules aux fonctions décrites par cette somme directe et de définir ainsi le propagateur par la méthode des représentations induites. Nous n'avons pas eu le temps de mener à terme l'étude de ce cas. Une thèse [35] a été réalisée dans le cas des particules massives de spin 1/2, et nous espérons pouvoir lier ces deux travaux et d'intégrer les neutrinos dans le modèle géométro-differentiel de la particule étendue de masse nulle.

Le cas du photon pose un problème plus difficile pour les raisons indiquées au Chapitre 2. A l'état actuel de nos connaissances, nous n'avons pas acquis la certitude que la méthode des représentations induites ne peut fournir le propagateur pour ces particules. On trouve dans la littérature plusieurs méthodes de quantification du champ électromagnétique. La méthode de quantification de Gupta et Bleuler, la plus utilisée pour des raisons de covariances, introduit une métrique indéfinie. Une formulation mathématique rigoureuse de cette méthode est donnée dans les références [12] et [14]. Du point de vue mathématique, la quantification de Gupta et Bleuler correspond à la construction des représentations du groupe de Poincaré dans un espace pseudo-hilbertien, un espace de Kreine[6]. Notons que les représentations configuration et impulsion construites dans cet espace sont toutes les deux pseudo-unitaires et réductibles. L'unitarité et l'irréductibilité de la représentation impulsion n'est acquise que dans un certain espace quotient qui correspond aux composantes transverses du quadri-vecteur potentiel du champ électromagnétique [12] et [14]. Nous espérons que la commutation demeure possible dans le cas vectoriel. Cependant, ceci n'est pas une condition nécessaire à cause de la diversité des méthodes de quantification. De plus, le champ électromagnétique est un champ d'interaction qui s'intègre dans un cadre de théorie de jauge qui dépasse l'objet de ce travail.

[6] Un espace de Kreine K est un espace vectoriel topologique réel ou complexe muni d'un produit scalaire défini-positif (J-produit) et d'un produit scalaire non défini-positif. L'espace K se décompose en une somme directe de deux sous-espaces K^+ et K^- (K^+ est le complément de K^-), où K^+ porte une métrique définie-positive et K^- porte une métrique définie-négative.

Notons finalement que le groupe de Poincaré peut être élargi au groupe conforme $SO(4,2)$ à 15 paramètres réels. Celui-ci contient, en plus des transformations du groupe de Poincaré, les dilatations (transformations à un paramètre)

$$D: \ x'^i = \rho x^i, \ \rho > 0$$

et les transformations spéciales conformes (transformations à quatre paramètres)

$$\begin{aligned} x \mapsto \quad x'^i \ &= x^i + a^i x^2 \ /\sigma(x) \\ \sigma(x) &= 1 + 2a^i x_i + x^2 a^2 \end{aligned}$$

L'importance du groupe conforme réside dans le fait que les lois dynamiques des particules de masse nulle sont invariantes sous les transformations du groupe conforme. Le groupe conforme prend de plus en plus d'importance dans la description des particules de masse nulle [9, 60]. A notre avis, l'étude de ce groupe dans le cadre de la commutation des représentations induites mérite une attention particulière.

Bibliographie

[1] E. P. Wigner, On unitary representations of the inhonomogeneous Lorentz group, Ann. Math. 40, 149-204 (1939).

[2] Y.S.Kim & Marilyn.E.Noz , Theory and Application of Poincaré Group, Reidel publishing company (1986).

[3] Y. S. Kim, Wigner's Last Papers on Space-time Symmetries, hep-th/9512151 v1.

[4] A. Janner and T. Janssen, Physica **53**, 1 (1971).

[5] D. Han and Y.S.Kim, Am. J. Phys. **49**, 348 (1981).

[6] D. Han, Y.S.Kim and D. Son, Phys. Rev. D **26**, 3717 (1982).

[7] Y. S. Kim, Eugene Wigner and translational Symmetries, cond-mat/9612057 v1.

[8] Y. S. Kim, Internal Space-time Symmetries of Massive and Massless Particles and their Unification, hep-th/014051 v1.

[9] A.O.Barut and R. Raczka, *Theory of Group Representations and Applications*, World Scientific (1986).

[10] A.J.Coleman, in Group Theory and its Applications Vol I, edited by E. M. Loebel, Academic Press, New York (1968).

[11] W.K.Tung , Group Theory in Physics, Singapore National Printers, Singapore (1985).

[12] E.Prugovecki, *Principles of Quantum General Relativity*, World Scientific (1995).

[13] Fernando Lledo, Massless relativistic wave equations and quantum field theory, math-ph/0303031 v1.

[14] E. Prugovecki, *Quantum Geometry, A frame work for General Relativity*, Kluwer (1992).

[15] N. N. Bogoliobov et D. V. Chirkov, Introduction à la Théorie Quantique des Champs, Dunod, Paris (1960).

[16] E. Prugovecki, Stochastic Quantum Mechanics and Quantum Space-Time, Reidel, Dordreicht, (1986).

[17] E. Prugovecki Nuevo Cimento t. **89 A**, (1985), p. 105.

[18] J.L. Destouches, La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules, Gautier-Villars (1956).

[19] Théo Khan, Théorie des groupes en physique classique et quantique, tome 1, Dunod (1980).

[20] Bernard Shultz, Geometrical Methods of Mathematical Physics, Cambridge University Press (1999).

[21] A. Smida, M. Hachemane and M. Fellah, Found. Phys. 25, 1769 (1995).

[22] M. Hachemane, M. A. Benbitour and A. Smida, Found. Phys. 27, 645 (1997).

[23] A. Smida, M. Hachemane et A.-H. Hamici, Found. Phys. 28, 1367 (1998).

[24] M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid, Found. Phys. 29, 1479 (1999).

[25] M. Hachemane, A. Smida and R. Djelid,Found. Phys. 30, 287 (2000).

[26] David J. Gross, The role of symmetry in fundamental physics, Proc. Natl. Acad. Sci. Vol. 93, pp. 14256-14259, (1996).

[27] Joe Rosen, Symmetry in Science, Springer, New York (1995).

[28] François Gieres, About Symmetries in Physics, hep-th/9712154 v1.

[29] M.Pétrachéne & E.Trifanov, Application de la Théorie des Groupes à la Mécanique Quantique, Masson et C^{IE} éditeurs (1970).

[30] A. W. Joshi, Group Theory for Physicists, Wiley Eastern Limited (1977).

[31] Jean-Paul Blaizot, Symetries & Physique Microscopique, ellipses (1997).

[32] Greiner Muller, Mécanique Quantique Symétrie, Springer (1999).

[33] M. B. Mensky, The Method of Induced Representations : Space-time and the Concept of Particles [in Russian] Nauka, Moscou (1976).

[34] A-H. Hamici, Théorie Quantique des Champs des Particules Etendues à Symétrie de Poincaré, Thèse de Magister, USTHB, Alger (1994).

[35] Karim Bouchachia, Les Modes de Spin 1/2 dans le Modèle Géométro-differentiel de la Particule Etendue, Thèse de Magister, USTHB, Alger (2005).

[36] Jean Hladik, Les Spineurs en Physique, Masson Editeur (1996).

[37] N.Vilenkin, Fonctions spéciales et théorie de la représentation des groupes, Dunod, Paris (1969).

[38] R.U.Sexl and H.K.Urbanthe, Special Relativity and Relativistic Symmetry in Field and Particles Physics, Springer, New York (2001).

[39] S.Weinberg, The Quantum Theory of Fields, Volume I Foundations, Cambridge University Press (1995).

[40] N. P. Landsman, Quantum Mechanics on Phase Space, Stud. Hist. Mod. Phys. Vol. 30, No. 2, 287-305, (1999).

[41] L.Landau & E.lifchitz, Théorie des champs, Edition Mir Moscou (1970).

[42] Max Bausset, Dynamiques, Principes classiques et relativistes Milieux solides et déformables, Hermann, Collection Enseignement des Sciences (1982).

[43] M. Laoues, Représentation unitaire du groupe de Poincaré, Notes d'exposé (Janvier 2001), au groupe de travail sur la Théorie Quantique des Champs, Institut Elie Cartan (Univ. Nancy).

[44] C. Itzycson et J.B. Zubeir, Quantum field theory, McGraw-Hill (1985).

[45] Jean-Pierre Derendendinger, Théorie Quantique des Champs, Presses Polytechniques et universitaires Romandes (2001).

[46] Luc Valentin, Physique Subatomique Noyaux et Particules II. Developpements, O.P.U (1989).

[47] S. Weinberg, Feynman Rules For Any Spin. II. Massless Particles, Phy-Rev 134 B882 (1964).

[48] J. D. Bjorken and S. D. Drell, Relativistic Quantum Fields, McGraw-Hill, New York, (1964).

[49] Shnebert et L. P. Horvitz, Gauge and group properties of massless fields in any dimension, J. Phy. A Math. Gen. 27 (1994) 3565-3574.

[50] M. Laoues, Modèle Mathématique de la Physique : Le problème de la masse nulle sure l'espace Anti-de Sitter, La Feuille de Vigne **72**, 37-55 (1999).

[51] L. Tarassov, Physique Quantique et Opérateurs Linéaires, Edition Mir Moscou (1980).

[52] Jean-Pierre Vigier, Structure des Micro-objets dans l'interprétation Causale de la Théorie des Quanta,Gautier-Villars (1956).

[53] M. Bitbol, "Jean-Louis Destouches, Théorie de la prévision et individualité", Philosophia Scienctiae, 5 (1), 1-30, (2001).

[54] M. Hachemane, Conception Géométro-différentiélle de la Particule Etendue et sa Quantification par la Méthode des Représentations Induites : Symétrie de de Sitter, Thèse de Magister, USTHB, Alger (1994).

[55] M. Nakahara, Geometry, Topology and Physics, Institute of Physics Publishing, Bristol (1992).

[56] C.J. Isham, Modern Differential Geometry for Physicists, World Scientific (1999).

[57] Sean M. Carrol, Lecture Notes on General Relativity, gr-qc/9712019.

[58] J.L. Destouches et Florence Aeschlimann, Les systèmes de corpuscules en théorie fonctionnelle. Hermann (1958).

[59] A. Smida, A.H. Hamici, M. H. Hachemane, Annales de La Fondation Louis de Broglie, 25, no **2**, (2000).

[60] E. Angelopoulos, C. Fronsdal, and D. Sternhimer, Massless particles, conformal group and De Sitter universe, Phy. Rev. **D 23** (1981), 1278-1289.