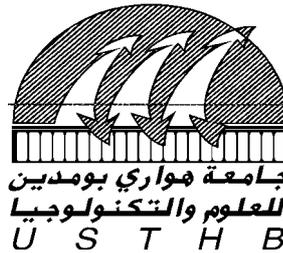


N° d'ordre : 12/2007 – M/G.C.

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Génie Civil



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
En GENIE CIVIL
Spécialité : Constructions

Par : Mr. SEDDIKI HASSENE

Sujet

**ANALYSE DES INTERACTIONS ENTRE UNE FISSURE PRINCIPALE
ET UNE ZONE AVOISINANTE FORMEE DE MICROFISSURES
PROLONGEES.**

Soutenu le 22/07/2007, devant le jury composé de :

Mr. D. BENOUAR	Professeur (USTHB), Alger	Président
Mr. M. CHABAAT	Professeur (USTHB), Alger	Directeur de thèse
Mr. A. BALI	Professeur (ENP), Alger	Examineur
Mr. A. BENYAHIA	Professeur (USTHB), Alger	Examineur
Mr. A. NECHNECH	Maître de Conférences (USTHB), Alger	Examineur
Mme. H. HADJAB	Maître Assistante, (USTHB), Alger	Invitée

($\sigma_{\infty} \equiv$)

(K_I)

(Mohr)

(J)

Résumé

La présente étude traite l'interaction entre une fissure principale et une zone avoisinante formée de microfissures prolongées. L'analyse de la distribution des champs de contraintes induites pendant ces interactions est basée sur la résolution de quelques équations différentielles avec des états de frontière appropriés et l'utilisation d'une approche numérique. Ces équations sont établies selon les critères de Mohr puisque la croissance de la fissure principale se produit le long des directions parallèles à l'axe des contraintes principales minimales. Le Facteur d'Intensité de Contraintes en mode I (F.I.C) est utilisé pour étudier les effets de la zone de microfissures prolongées sur la propagation de la fissure principale, puisque ces dommages peuvent constituer un mécanisme important de durcissement. Le taux de restitution d'énergie a été déterminé par un simple calcul de la surface délimitée par la courbe d'iso-contrainte et l'axe des ordonnées x . Dans cette étude, il a été montré que les microfissures prolongées proches de la fissure principale dominent l'effet résultant d'interaction et par conséquent, reflètent l'effet d'amplification d'endommagement tandis qu'une réduction constitue une dureté du matériau.

Abstract

In this study, interactions between a main crack and a surrounding layer of crazing patterns are considered. Analysis of the stress field distribution induced during these interactions is based on the resolution of some differential equations along with appropriate boundary conditions and the use of a numerical approach. These equations are established according to Mohr's criteria since the craze growth occurs along directions parallel to the minor principal stress axis. Because this damage can constitute an important toughening mechanism, the mode I Stress Intensity Factor (SIF) is employed to quantify the effects on a crack of the damage consisting of crazing patterns. It is proven, herein, that crazes closer to the main crack dominate the resulting interaction effect and reflect an anti-shielding of the damage while a reduction constitutes a material toughness.

REMERCIEMENTS

Je remercie en premier lieu « ALLAH » notre grand seigneur le tout puissant.
Je remercie mes parents pour leur soutien moral et financier durant mes études.

J'adresse mes remerciements les plus sincères à mon directeur de thèse Monsieur le Professeur Chabaat de m'avoir proposé un sujet d'actualité et d'avoir assuré la direction de cette thèse. Je lui exprime toute ma gratitude pour l'attention, son aide, ses conseils précieux et surtout la confiance qu'il m'a toujours témoigné durant l'élaboration de cette thèse.

Je remercie Monsieur Benouar, Professeur à l'USTHB, qui me fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. J'adresse également mes remerciements à Monsieur Bali, Professeur à l'ENP, Monsieur Benyahia, Professeur à l'USTHB, Monsieur Nechnech, Maître de Conférences à l'USTHB et Madame Hadjab, Chargée de cours à l'USTHB, pour l'intérêt qu'ils ont bien voulu porter à ce travail en acceptant de faire partie du jury en examinant mon travail.

Je remercie Monsieur Ben Marlaoui, Professeur à l'Université de Constantine et Monsieur Chaoui, Professeur à l'Université de Annaba, M^{elle} Chaouch, chargée de cours à l'Université de Blida.

Mes profonds remerciements sont adressés à mon frère Sofiane, à Messieurs Bencharif, Loucif, Belaifa, Iklef, Harizi et tout le personnel du Centre de Développement des Technologies Avancées de Baba Hassen pour l'accueil et l'aide qu'ils m'ont fourni.

Mes remerciements vont également à l'ensemble du corps enseignant de la Faculté de Génie Civil de l'Université de Blida et ceux de la Faculté de Génie Civil de l'U.S.T.H.B qui ont contribué à mon encadrement durant la graduation et la post-graduation, respectivement.

Enfin que toutes les personnes qui, d'une façon ou d'une autre m'ont apporté leurs aides, trouvent ici l'expression de ma profonde gratitude.

DEDICACES

A la terre de mes ancêtres, hommes et femmes libres.
A la contrée d'un million et demi de martyrs.
A la nation de l' ancestrale résistance.
A ma mère et mon père.
A mes frères et mes sœurs.
A toute ma famille.
A tous mes amis.
A la mémoire du Professeur Laradi.
A l'Algérie.

H. Seddiki

Sommaire

Remerciements	
Liste de figures	i

Introduction

Chapitre I : **Synthèse bibliographique**

1) Introduction	5
2) Modes de rupture.....	6
3) Etat de contrainte	7
3.1) Etat de contrainte plane.....	7
3.2) Etat de déformation plane.....	8
4) Zones de microfissuration dans un milieu homogène.....	8
5) Processus de fissuration.....	10
6) Types de fissures.....	13
6.1) Origine des fissures.....	13
6.2) Caractéristiques d'une fissure.....	16

Chapitre II : **Etude des iso-contraintes lors de l'interaction entre une fissure et des microfissures prolongées.**

1) Introduction.....	19
2) Principe de la méthode	21
3) Formulation du problème.....	22
4) Détermination des champs des contraintes principales.....	23
5) Etablissement des équations différentielles des champs des iso-contraintes principales	25
5.1) Champ des tangentes.....	25
5.2) Détermination de l'équation différentielle des champs des iso- contraintes principales maximales.....	26
5.3) Détermination de l'équation différentielle des champs des iso- contraintes principales minimales.....	29
5.4) Détermination de l'équation différentielle des champs des iso- contraintes de cisaillement maximum.....	29
6) Résultats et discussions.....	35

Chapitre III : **Détermination du facteur d'intensité de contrainte**

1) Introduction.....	37
2) Détermination du facteur d'intensité de contrainte.....	37
3) Résultats et discussions.....	43

Chapitre IV : **Evaluation du taux de restitution d'énergie**

1) Introduction	45
2) Détermination du taux de restitution d'énergie.....	45
3) Résultats et discussions.....	46

Chapitre V : **Conclusion générale et Recommandations**

1) Conclusion générale	48
2) Recommandations	49

Bibliographie

Annexes

- A) Détermination des champs de contraintes principales en coordonnées polaires.
- B) Equations différentielles des champs des iso-contraintes principales en coordonnées polaires.
- C) Détermination du facteur d'intensité de contrainte.
- D) Détermination du taux de restitution d'énergie.

Liste de Figures

Figure 01: Modes fondamentaux de rupture.....	6
Figure 02: Comportement au fond de fissure en état de Contrainte Plane (C.P).....	7
Figure 03: Comportement au fond de fissure en état de Déformation Plane (D.P).....	8
Figure 04: Description du milieu au voisinage d'une pointe de fissure.....	9
Figure 05: Fissures de Compressions.....	14
Figure 06: Fissure de traction pure.....	14
Figure 07: Fissure de flexion.....	14
Figure 08: Fissures de cisaillement.....	14
Figure 09: Fissure de retrait ou d'hygrométrie.....	15
Figure 10: Fissure d'origine thermique.....	15
Figure 11: Fissure aggravées par le Gel.....	15
Figure 12: Fissure due à la corrosion.....	15
Figure 13: Géométrie du spécimen (Single Edge Notch Specimen).....	23
Figure 14: Champ des tangentes « courbe intégrale ».....	26
Figure 15: Observations microscopiques des fissures dans le polystyrène (PS) sous une charge de traction [44].....	27
Figure 16: Représentation schématique des contraintes principales le long des microfissures prolongées.....	27
Figure 17: Courbes d'iso contraintes cas $r_1(\theta, r_1)$ pour $\theta = [0, \pi]$	31
Figure 18: Courbes d'iso contraintes cas $r_1(\theta, r_1)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$	31
Figure 19: Courbes d'iso contraintes cas $r_2(\theta, r_2)$ pour $\theta = [0, \pi]$	31
Figure 20: Courbes d'iso contraintes cas $r_2(\theta, r_2)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$	32
Figure 21: Courbes d'iso contraintes cas $r_3(\theta, r_3)$ pour $\theta = [0, \pi]$	33

Figure 22: Courbes d'iso contraintes cas $r_3(\theta, r_3)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$	34
Figure 23: Courbes d'iso contraintes cas $r_4(\theta, r_4)$ pour $\theta = [0, \pi]$	33
Figure 24: Courbes d'iso contraintes cas $r_4(\theta, r_4)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$	34
Figure 25: Courbes d'iso contraintes cas $r_5(\theta, r_5)$ pour $\theta = [0, \pi]$ et $\theta = [-\pi, 0]$	35
Figure 26: Variation tridimensionnelle de K_I / K_0 fonction de la longueur et de la position des microfissures θ par rapport à la fissure principale.....	39
Figure 27: Variation de K_I / K_0 fonction de la longueur de la fissure pour des positions variables de microfissures θ par rapport à la fissure principale...	39
Figure 28: Variation de K_I / K_0 fonction de la position des microfissures et de la variation de la longueur de la fissure initiale.....	40
Figure 29: Variation de la longueur de la fissure fonction de l'angle θ et de la variation de K_I / K_0	40
Figure 30: Variation tridimensionnelle de $\Delta K / K_0$ fonction de la position de la microfissure et de la longueur de la fissure initiale.....	41
Figure 31: Variation de $\Delta K / K_0$ fonction de la position de la microfissure par rapport à la fissure initiale et de la variation de la longueur de la fissure.....	42
Figure 32: Facteur d'intensité de contraintes $\Delta K / K_0$ fonction de la longueur de la fissure initiale et de la position des microfissures prolongées.....	42
Figure 33: Variation du taux de restitution d'énergie J/J_0 fonction de la position des microfissures prolongées définies par les contours $r_3(\theta_3, r_3)$ et $r_4(\theta_4, r_4)$	46

Introduction

Introduction

La Mécanique Linéaire de la Rupture (M.L.R) est une discipline récente dans le domaine des sciences des matériaux. Son application a été d'un apport considérable pour les ingénieurs et chercheurs dans les approches pour la résolution de problèmes ayant trait aux ruptures de matériaux en général et aux structures en particulier.

Elle s'intéresse essentiellement aux phénomènes de la rupture à l'échelle macroscopique, aux ruptures survenant sans déformation plastique, aux défauts déjà existants dans les matériaux ainsi qu'aux discontinuités générées dans les structures. Ces fissures peuvent engendrer des dégâts et des ruines aux structures.

L'idée fondamentale de ce travail repose essentiellement sur la détermination des champs de contraintes générés lors des interactions entre une fissure initiale (ou macrofissure) et des microfissures prolongées d'où l'apparition de phénomènes d'amplification et de réduction de ces champs au niveau du front de la fissure.

Par conséquent, une approche mathématique est envisagée pour l'analyse des champs au bout de la singularité, donc une évaluation des équations différentielles de forme des champs d'iso-contraintes pouvant être générés lors de l'interaction entre une fissure principale et une zone de microfissures prolongées avoisinantes.

Pour mener à bien ce travail, les étapes suivantes sont adoptées:

- Chapitre I : Recherche bibliographique sur les travaux récents. Cette partie concerne uniquement les travaux menés par des chercheurs sur l'étude des interactions entre une macro fissure et des microfissures avoisinantes.
- Chapitre II : Ce chapitre est divisé en deux sous-chapitres comme suit :
 - a) Proposition d'un modèle de rupture : Ce modèle est un spécimen du type standard ayant une fissure principale à une de ces extrémités et soumis à une

charge en mode I de rupture et répondant aux hypothèses de la théorie linéaire de l'élasticité.

- b) Formulation du problème et calcul des champs singuliers : L'utilisation d'une approche mathématique a permis d'établir les équations différentielles de forme des différents champs d'iso-contraintes lors de l'interaction entre une fissure principale et une zone des microfissures prolongées avoisinantes.
- Chapitre III : Evaluation du Facteur d'Intensité de Contraintes (F.I.C) lors de l'interaction entre une fissure principale et une zone avoisinante formée de microfissures prolongées.
 - Chapitre IV : Evaluation du taux de restitution d'énergie translationnel lors des l'interaction entre une fissure principale et une zone avoisinante formée de microfissures prolongées.

Une conclusion générale du travail assigné au début de cette thèse ainsi que des recommandations pour une utilisation ultérieure des résultats trouvés en guise de comparaison avec les résultats expérimentaux, feront l'objet du dernier chapitre.

Chapitre I
Synthèse Bibliographique

1) Introduction :

La rupture est un problème auquel l'homme aura à faire face aussi longtemps qu'il construira des structures. Les études et les recherches dans ce domaine demeurent un sujet d'actualité et continuent de donner des résultats de plus en plus intéressants mais le problème est loin d'être totalement résolu lorsqu'on utilise des matériaux avec de nouveaux procédés.

Plusieurs études expérimentales ont été menées dans le but d'éclairer les ingénieurs de conception sur les problèmes liés aux ruptures des matériaux en général et des structures en particulier. De nos jours, la Mécanique Linéaire de la Rupture (MLR) est développée en utilisant les approches analytiques, numériques et semi empiriques dans le but d'analyser d'une façon plus ou moins correcte les structures ayant des défauts tels les fissures, les vides, les pores etc... Ces approches à elles seules, ne sont pas suffisantes pour une étude fiable de ces structures sans l'apport des résultats expérimentaux.

Le développement de la MLR est devenu un outil indispensable qu'il faut associer à l'expérimentation pour une meilleure analyse des ruines de structures dues essentiellement à la présence de défauts.

L'utilisation de la MLR résulte du fait que la mécanique classique des matériaux est inadéquate pour l'analyse de structures dans le cas où plusieurs fissures sont déjà présentes. La MLR a été développée dans le but de prédire le comportement du matériau lors de la propagation de fissures. Par exemple, pour les matériaux dont leur comportement est élastique et soumis à un champ de traction, les contraintes générées au bout de la fissure tendent vers l'infini. A ce niveau, les matériaux sont sensés ne pas supporter cette concentration de contraintes et que le comportement à ce stade devient non élastique (ou plastique). Donc, les techniques classiques telles que la MLR deviennent caduques à cause de la complexité du phénomène de la singularité.

Plusieurs chercheurs ont utilisés la MLR pour l'analyse des matériaux tels les poutres en béton ou les verres qui sont considérés comme étant des matériaux quasi fragiles. Parmi ces chercheurs, Westergaard [1] a traité le problème de fissures en utilisant la technique des variables complexes pour la détermination des champs de contraintes, Griffith [2] a abordé le problème d'un point de vue énergétique en établissant le critère d'énergie pour l'instabilité de

fissures, et Inglis [3], qui en étudiant une fissure interne à l'aide des surfaces limites elliptiques, a réussi à déterminer différents champs de contraintes.

Irwin a généralisé le calcul énergétique de Griffith et a ainsi défini le Facteur d'Intensité de Contrainte (F.I.C) comme étant un paramètre qui dépend de la géométrie et du chargement. Par conséquent, Irwin admet l'existence de la valeur critique du F.I.C qui peut être considérée comme une propriété du matériau [4 - 6]. Il a montré par ailleurs que la théorie purement élastique était insuffisante dans le traitement des structures en aciers fissurées à caractère élasto- plastique. Les paramètres semi- locaux sont largement utilisés pour étudier la rupture fragile ou la rupture par fatigue des milieux bidimensionnels, ensuite généralisé pour les structures en 3D.

Entre ces deux approches, globale et semi- local se situent les intégrales de contour communément appelées les intégrales de Rice [7] et Biu [8]. Cette dernière caractérise la singularité du point de vue énergétique. Donc, les études expérimentales et théoriques sur le phénomène de la rupture n'ont cessé d'attirer l'attention des chercheurs ces dernières décennies d'où une panoplie d'ouvrages et d'articles ont été publiés.

2) Modes de rupture :

Il est d'usage de considérer trois modes fondamentaux de sollicitation tout autre modes s'en déduisant par des combinaisons linéaires (Figure 1 : Mode I, II et III).

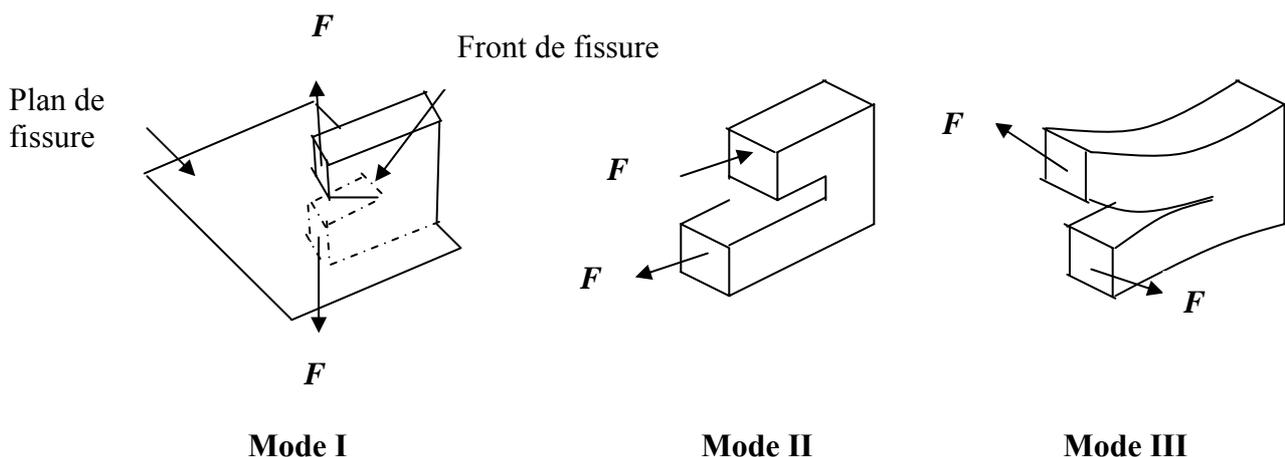


Figure 1: Modes fondamentaux de rupture.

La Figure 1 représente les différents modes de chargement d'une fissure : par traction ou par cisaillement. Le mode I : correspond à un mode d'ouverture. Les modes II et III correspondent à des propagations par glissement droit et par glissement vis : le mode II est un mode de cisaillement, perpendiculaire au fond de la fissure alors que le mode III est également un cisaillement mais parallèlement au fond de la fissure.

En ce qui concerne l'extension d'une microfissure pour développer une rupture fragile, c'est le mode I qui est le plus critique. En effet, pour une dimension donnée de défaut, le risque de rupture brutale sera d'autant plus important si l'orientation du défaut par rapport à la sollicitation extérieure correspond au mode I. Comme dans une structure réelle on ne sait pas, à priori, dans quelle direction un défaut se développera, c'est le mode I qu'il faut considérer lorsqu'on s'intéresse au risque procuré par l'existence d'une fissure. Ceci donnera des résultats conservatifs et place en sécurité.

3) Etat de contrainte :

Il est remarqué expérimentalement qu'un matériau présente un comportement ductile dans les plaques minces, cependant il se rompt d'une façon brutale dans les plaques épaisses. Par ailleurs, une transition ductile- fragile est observée dans le cas des matériaux ductiles avec des sections très épaisses et une transition fragile- ductile dans le cas des matériaux à haute résistance avec de très faibles sections [9].

3-1) Etat de Contrainte Plane (C.P) :

Considérons une plaque mince ayant une fissure à une des extrémités et sollicitée en traction dans la direction y comme montrée sur la Figure 2. Puisqu'il y'a un volume du matériau perdu dans la fissure alors, la contrainte supportée par ce volume est transférée à la région du fond de la fissure d'où une augmentation de contrainte près de la fissure. Donc, une contrainte locale est développée dans la direction x , et par conséquent, dans la direction z la plaque peut être déformée transversalement à cause de la petite épaisseur, d'où la déformation $\varepsilon_z \neq 0$ et la contrainte $\sigma_z \approx 0$. Cet état se réfère à la condition de contrainte plane.

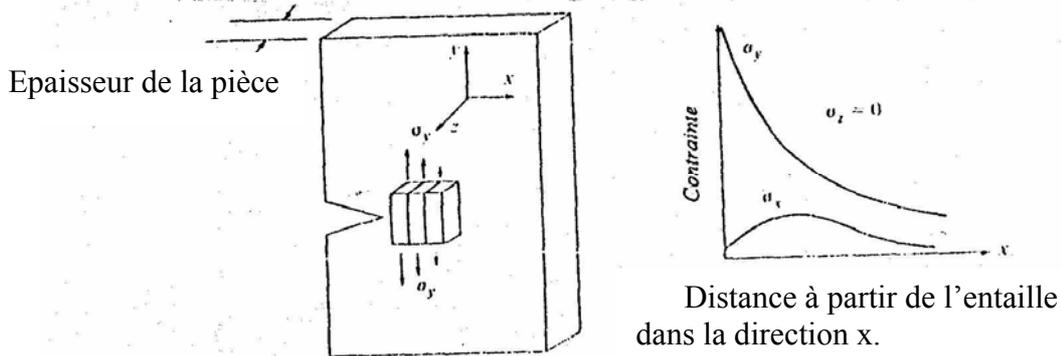


Figure 2 : Comportement au fond de fissure en état de (C.P)

3 -2) Etat de Déformation Plane (D.P) :

Avec le même raisonnement, mais pour une plaque épaisse (voir Figure 3), la contrainte se développe dans la direction z au milieu de l'épaisseur à cause de la résistance du matériau à la déformation transversale. Donc, le matériau n'est pas libre à se contracter $\epsilon_z \approx 0$ d'où l'appellation condition de déformation plane.

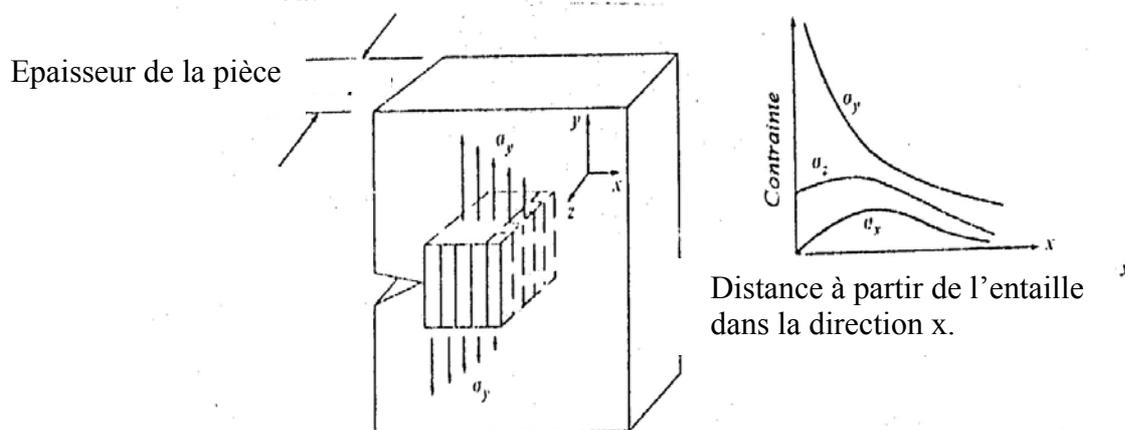


Figure 3 : Comportement au fond de fissure en état de (D.P).

4) Zones de microfissuration dans un milieu homogène :

D'un point de vue mécanique, on distingue schématiquement trois zones successives dans un milieu fissuré (Figure 4) [10]:

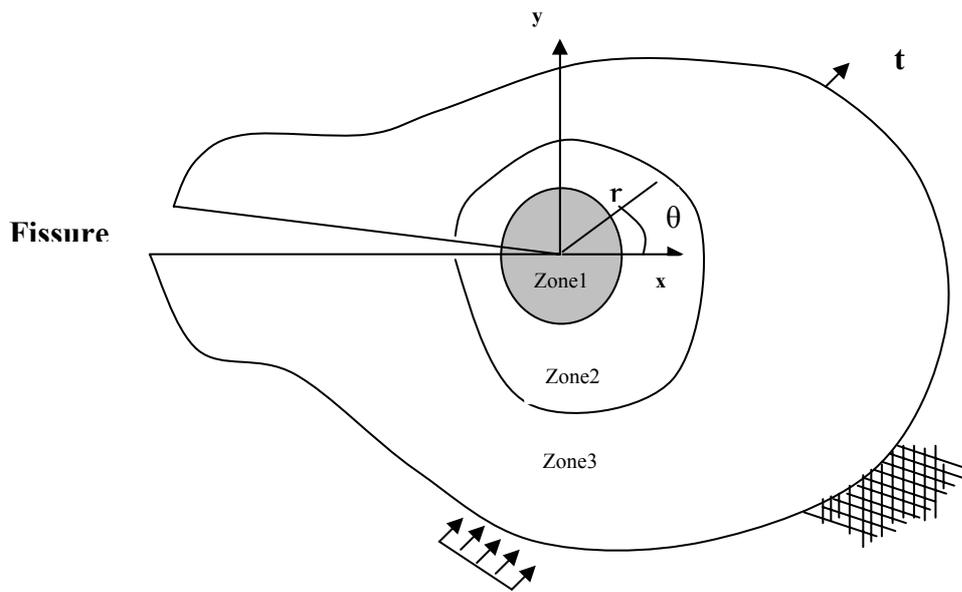


Figure 4 : Description du milieu au voisinage d'une pointe de fissure.

- La zone (1) se trouve à la pointe de la fissure. L'étude de cette zone est très complexe à cause des contraintes importantes qui se développent au niveau de la pointe de la fissure pouvant endommager le matériau. La théorie classique de la mécanique de la rupture réduit cette zone à un point pour les problèmes plans et à une courbe pour les problèmes tridimensionnels.
- La zone (2) dans laquelle les champs de déplacements, déformations et contraintes sont continus et indépendants de la géométrie lointaine de la structure. Donc, dans cette zone [11], les composantes du champ de contraintes sont infinies lorsque r approche de 0. En sus de cela, la singularité est affectée du terme $(1/\sqrt{r})$ en milieu élastique linéaire.
- La zone (3) extérieure comprend aux champs lointains tout en tenant en compte des champs se rapportant d'une part à la zone (2) et d'autre part à vérifier les conditions aux limites en charges et en déplacements. Dans cette zone, les champs de déplacements, de déformations et de contraintes varient et peuvent être exprimés par des polynômes utilisés généralement dans la méthode des éléments finis.

L'objectif de la mécanique appliquée de la rupture est de caractériser le comportement à la fissuration des structures à l'aide des paramètres quantifiables au sens de l'ingénieur, notamment la contrainte, la taille de la fissure et la résistance à la fissuration du matériau. Diverses méthodes d'analyse permettent d'étudier les champs de déplacements, de déformations et de contraintes au voisinage d'une fissure. On regroupe l'ensemble de ces méthodes sous forme d'approches comme suit :

- approches directes : ces approches permettent de résoudre directement les problèmes en utilisant les méthodes développées par la mécanique des solides.
- approches énergétiques : ces approches sont basées sur l'analyse énergétique du milieu continu contenant une fissure. Il s'agit de l'énergie globale intégrant le taux de restitution d'énergie dû à un accroissement virtuel de la fissure [12].

5) Processus de fissuration :

Il est généralement admis que la fissuration se produit dans un matériau suivant quatre étapes [13]

- **Etape 1 :**

La première étape est la plastification locale au voisinage des défauts et singularités géométriques ou matérielles. Le degré de la singularité a une influence primordiale sur l'ampleur de la zone plastique ainsi que sur la concentration de la contrainte. Lors d'un chargement répété, il y a écrouissage. Cet écrouissage conduit à élever la contrainte seuil σ_y . Le matériau se trouvant au voisinage de la pointe du défaut par rapport à la sollicitation extérieure correspond au mode I comme dans une structure réelle on ne sait pas, à priori, dans quelle direction un défaut se développera, c'est le mode I qu'il faut considérer lorsqu'on s'intéresse au risque procuré par l'existence d'une fissure. Ceci donnera des résultats conservatifs et place en sécurité ou de la singularité, se comportera alors comme un matériau à haute résistance, entraînant la création d'une première fissure.

- **Etape 2 :**

La deuxième étape est celle de la formation des fissures. Cette étape peut être déclenchée par des traitements de surfaces, des traitements ou chargement thermique générant des contraintes résiduelles dépassant le seuil plastique. On peut également avoir des formations de fissures à partir d'un chargement mécanique statistique ou variable.

- **Etape 3 :**

La troisième étape est celle de la propagation des fissures réelles naissantes. Cette propagation peut être brutale ou progressive. Souvent on assiste à une propagation progressive faisant augmenter la taille de la fissure jusqu'à atteindre une taille critique (correspondant à la résistance intrinsèque du matériau à la fissuration), entraînant une propagation brutale.

Plusieurs lois de propagation de fissure ont été proposées [13], et donnent généralement la vitesse de propagation en fonction des grandeurs mécaniques calculées pour chaque dimension de la fissure propageante et en fonction des grandeurs intrinsèques du matériau mesurées expérimentalement. On peut distinguer quatre types de propagation de fissure résumée dans le tableau 1.

Type I : Cas de la rupture fragile

Une fissuration brutale provoquant une rupture fragile est une fissuration pour laquelle la loi de comportement du matériau reste dans le domaine élastique linéaire. On peut également envisager dans ce type une loi de comportement élastoplastique mais à petites déformations. On ne parlera pas de vitesse de propagation dans ce type de rupture sinon d'une vitesse de l'ordre de la vitesse du son.

Type II : Cas de la rupture ductile

Une fissuration brutale provoquant une rupture ductile est une fissuration pour laquelle la loi de comportement du matériau est généralement élastoplastique à

grandes déformations. Ce type de propagation est peu traité du fait de la difficulté que présente la modélisation des champs mécaniques et de la rareté de ce type dans le domaine industriel.

		Type d'évolution de la fissure.	
		Brutale.	Progressive.
Type de comportement du matériau.	Elastique	Rupture fragile (I)	Rupture par fatigue à grands nombres de cycles (III)
	Elastoplastique	Rupture ductile (II)	Rupture par fatigue à petits nombres de cycles (IV)

Tableau 1 : Types de rupture en fonction du comportement du matériau et de l'évolution de la fissure.

Type III : Cas de la rupture par fatigue à grand nombre de cycles

Une fissuration successive à caractère fragile dont la loi de comportement considérée est élastique linéaire et la vitesse de fissuration est lente (10^{-7} à 10^{-4} mm/cycle de chargement) cette fissuration est constatée sous charge répétée à des contraintes très basses par rapport à la limite élastique.

Type IV : Cas de la rupture par fatigue à petit nombre de cycles (Oligocyclique)

Une fissuration progressive ductile dont la loi de comportement considérée est élastoplastique à petites déformations et la vitesse de propagation est relativement rapide. Cette fissuration est provoquée sous charge répétée à des contraintes élevées.

- **Etape 4 :**

Cette étape est celle de la rupture finale à caractère brutale et constitue la dernière étape. Elle peut être accompagnée de grandes déformations généralisées (striction), ou sans déformation importante (rupture fragile).

Les facteurs qui influencent le comportement des matériaux à la rupture par fissuration sont de deux natures : mécanique et métallurgique. Les facteurs mécaniques concernent l'état de déplacements, déformations et contraintes, les conditions d'environnement telle que la température. On entend par facteurs métallurgiques les impuretés, la taille des grains, l'état de surface, etc....dans la présente étude ne seront traités que les facteurs mécaniques.

6) Types de fissures :

6-1) Origine des fissures :

En réalité, une fissuration visible peut être un indice de dysfonctionnement ou de défaut d'exécution de la structure. Elle doit à ce titre, faire l'objet d'une analyse détaillée permettant d'en déterminer l'origine et d'en évaluer les conséquences sur la vie de l'ouvrage. Donc, une fissure est la manifestation visible d'un état de contraintes anormal, de traction ou de cisaillement, qui a atteint la limite de rupture du matériau [14].

En effet, les scientifiques ont pu classer les fissures suivant leur origine :

- Fissure de compression,
- Fissure de traction pure,
- Fissure de flexion,
- Fissure de cisaillement,
- Fissure de retrait,
- Fissure d'origine thermique ou hygrométrique,
- Fissure due au gel,
- Fissure sous l'effet de la corrosion des armatures,

Il n'en demeure pas moins qu'elles sont toutes issues d'un dépassement de la contrainte limite de traction à un moment donné de la vie de l'ouvrage.

Les fissures de compression sont la conséquence du gonflement du matériau dû à l'effet de poisson (voir Figure 5).

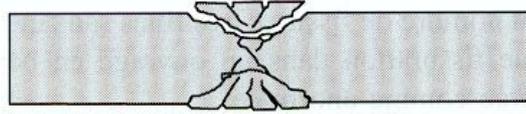


Figure 5 : Fissures de Compressions.

Les fissures de traction pure résultent d'une traction directe comme montré sur la Figure 6.

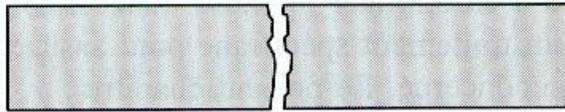


Figure 6 : Fissure de traction pure.

Les fissures de flexion sont dues à l'allongement de la fibre tendue (Figure 7)

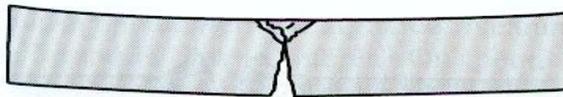


Figure 7 : Fissures de flexion.

Les fissures de cisaillement sont dues aux contraintes de traction principales (Figure 8).



Figure 8 : Fissures de cisaillement.

Les fissures de retrait sont dues à des efforts de traction superficielle conséquence d'une perte de volume du matériau (Figure 9).

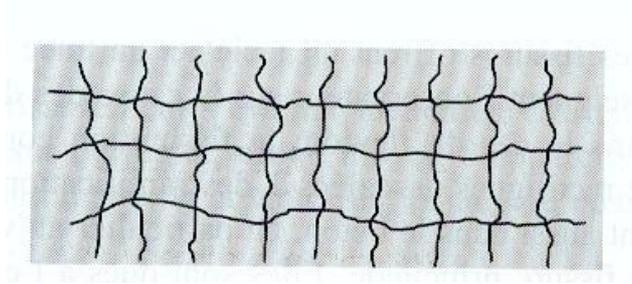


Figure 9 : Fissures de retrait ou d'hygrométrie.

Les fissures thermiques ou les fissures hygrométriques sont dues à des efforts de traction engendrés par la contraction d'une pièce bridée (Figure 10).

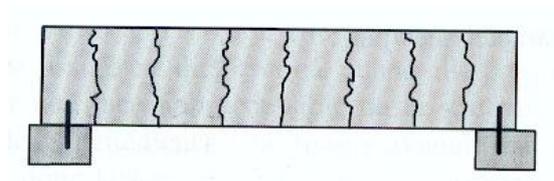


Figure 10 : Fissure d'origine thermique

Les fissures dues au gel ont pour origine la rupture du béton sous la poussée due au gonflement de l'eau sous l'effet du gel (Figure 11).

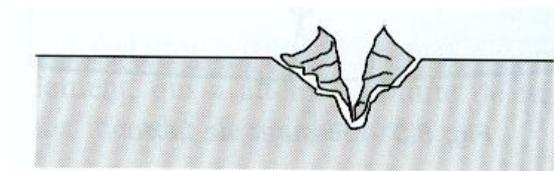


Figure 11 : Fissures aggravées par le Gel

Les fissures par effet de corrosion sont la manifestation d'une augmentation de volume des armatures (Figure 12).

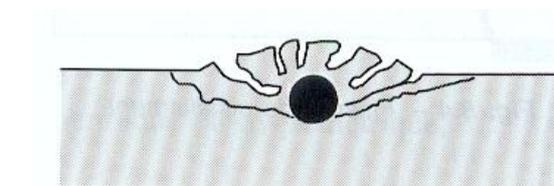


Figure 12 : Fissures due à la corrosion

Selon leur origine, les fissures offrent un faciès et un tracé typique, leur forme et leur direction renseignent l'observateur sur la cause des désordres. Très souvent, notamment dans

le cas de flexion, la fissuration comporte des fissures principales nettes et rectilignes associées à des ramifications nombreuses. Ces ramifications existent dans le béton, en particulier au voisinage des armatures très près de la fissure principale. Elles sont dues à l'effet d'entraînement des aciers dans la zone perturbée ; donc, pour bien comprendre l'origine d'une fissure, il est indispensable d'observer attentivement aussi bien la fissure principale que le réseau de ramification [14].

6-2) Caractéristiques d'une fissure :

Les fissures sont caractérisées par :

- Leur âge,
- Leur tracé,
- Leur ouverture,
- Leur profondeur,
- Leur activité et/ou leur évolution (variation de l'ouverture moyenne).

• L'âge

L'âge d'une fissure est difficile à cerner de façon précise quand elle n'est pas provoquée par une cause accidentelle et signalée. Néanmoins, la connaissance de cette donnée ne manque pas d'intérêt. On peut, selon les conditions ambiantes, se faire une idée de l'injectabilité de la fissure : en effet, une fissure risque, avec le temps, de se trouver partiellement obstrués par la formation de cristaux de calcite, la végétation ou la poussière et devenir alors difficilement injectable. On admet couramment qu'une fissure « jeune » de moins de deux ans ne présente pas de difficulté d'injection et que le résultat est plus aléatoire pour des fissures « anciennes » de plus de deux ans.

• Le tracé

Le tracé d'une fissure se définit par son orientation et sa longueur mesurable sur l'ouvrage. L'orientation de la fissure est souvent révélatrice de son origine. Lorsque la fissure est continue sur l'axe d'orientation, elle est dite fissure franche. Lorsque l'axe d'orientation est défini par plusieurs fissures successives, elle est dite discontinue. Le tracé d'une fissure est

rarement rectiligne, donc rarement confondu avec son axe d'orientation. La longueur de la fissure est le développé de la partie visible.

- **L'ouverture**

L'ouverture de la fissure peut s'évaluer facilement à l'œil nu sur son tracé en prenant un repère sur un réglet, ou au moyen d'appareils de mesure spécialisés, tels que le fissuromètre, le compte-fils, la jauge d'épaisseur ou la loupe de mesure linéaire. Certaines méthodes de laboratoire permettent d'obtenir une précision sur l'ouverture de l'ordre de 0,01mm, mais en général une précision du dixième de millimètre est suffisante. Il est couramment admis de définir l'ouverture d'une fissure par l'ouverture maximale relevée sur le tracé.

- **La profondeur**

Une fissure est dite traversante lorsqu'elle est visible sur au moins deux faces de la structure. Une fissure est dite aveugle quand elle est supposée traversante, mais débouche sur une face non accessible de la structure (par exemple, une fissure d'un mur de soutènement). Une fissure aveugle est souvent d'ouverture importante et peut donc laisser passer les fluides corrosifs – eau ou air.

Une fissure est dite de surface quand son ouverture est maximale en surface et devient nulle au sein du matériau. Sa profondeur peut néanmoins être importante si l'épaisseur du matériau est, elle-même, importante.

- **L'activité**

L'activité caractérise la variation dimensionnelle de l'ouverture de la fissure dans le temps. On appelle fissures mortes les fissures dont l'ouverture reste constante quelles que soient les variations de températures ou de charge de l'ouvrage. On désigne par fissures actives les fissures dont l'ouverture varie en fonction de facteurs extérieurs tels que température, charges, vibrations, hygrométrie etc. La variation de cette ouverture définit le souffle de la fissure. L'ouverture moyenne d'une fissure active est la demi-somme de l'ouverture minimale et de l'ouverture maximale [14].

Chapitre II

**Etude des iso- contraintes lors de
l'interaction entre une fissure et des
microfissures prolongées.**

1) Introduction :

La rupture est généralement influencée dans la majorité des cas par la composition microstructurale des matériaux. Ces derniers sont considérés hétérogènes. Leur comportement est soit ductile ou fragile. Donc, la présence de particules telles une inclusion, une fissure, un défaut, un vide ...etc. dans ces matériaux influence grandement la propagation des fissures déjà existantes.

Dans des études récentes, les observations microscopiques ont montré que la zone d'endommagement, qui est essentiellement considérée comme étant une région intensive de microfissures ou de défauts, se développe au voisinage du front de la fissure. Cette zone présente une concentration très importante des champs de contraintes d'où l'appellation de zone à fortes perturbations. Par conséquent, l'étude de problèmes de rupture revient généralement à la détermination des champs de contraintes et de déplacements autour de la fissure tout en tenant compte des conditions aux limites.

En général, il est difficile de déterminer ces champs en raison de la présence de la singularité au devant de la fissure. Donc, l'existence de cette zone précèdent la fissure affecte d'une façon continue la propagation de cette dernière et par conséquent, la détérioration du matériau jusqu'à sa rupture. En d'autres termes, le processus de la propagation de la fissure est l'origine de la coalescence subséquente des microdéfauts au voisinage de la pointe de la fissure. Ce phénomène a été observé expérimentalement par de nombreux chercheurs [15 - 18].

Il convient alors de chercher à développer des méthodes ou bien de trouver celles qui sont plus fiables pour le calcul des champs de contraintes permettant ainsi aux fissures de se développer ou à défaut maîtrisant leur progression.

Du point de vue conceptuelle, il existe trois approches différentes pour la détermination des champs de contraintes élastiques associées à la présence des microfissures autour de la fissure principale. Parmi les plus récentes, on cite celle où la microfissure est modélisée par une inclusion d'un milieu élastique effectif. Ce problème a été adressé par plusieurs auteurs [19 - 21].

Cependant, il existe des failles dans leurs résultats du point de vue physique. D'abord, les fluctuations locales des microfissures (densités et longueurs) considérées comme des paramètres importants dans le processus de rupture, ont été ignorées. Ensuite, la distribution des microfissures est en général une distribution hétérogène. Mais, une inclusion élastique équivalente se distingue par un comportement non homogène et anisotrope, d'où des difficultés dans les calculs.

Dans une autre approche, l'interaction entre la fissure et les microfissures repose sur une description détaillée des lieux de chaque microfissure [22 - 24]. Apparemment, l'approche en elle-même présente des limitations dans les calculs et devient peu pratique pour un nombre assez élevé de microfissures.

Dans une toute autre approche, la zone de microfissures est caractérisée par une distribution aléatoire de densités de microfissures. Ce qui a amené les auteurs [25 - 26] à évaluer des paramètres d'intégrations associés aux microfissures d'où l'utilisation d'une méthode semi-empirique reposant sur des données expérimentales.

Le modèle proposé dans [27] traite la méthode de la double couche dans un milieu élastique linéaire au front de la fissure principale inter-actant avec les microfissures. Dans ce cas, la microfissure considérée est petite par rapport aux dimensions de la fissure principale (la surface occupée par les microfissures est petite en comparaison à celle occupée par la fissure principale). Sous ces hypothèses, le champ de contrainte apparaît dominant et est défini par un facteur d'intensité de contraintes dénoté K_I .

Le modèle proposé par Hadjab et co. [28] donne une analyse simplifiée du comportement d'une microfissure au voisinage de la fissure principale. L'auteur a réussi à combiner le modèle bien connu développé par Burgers et Cottrell [29] pour décrire par des dislocations une microfissure dont la solution est celle de l'interaction entre une dislocation et fissure développée par Lo [30]. Dans cette analyse, l'introduction d'un modèle qui considère les aspects physiques de la microfissure tels leurs positions ainsi que leurs orientations par rapport à la fissure principale semble être un modèle représentatif par rapport aux deux autres modèles précités. En outre, la méthode des variables complexes a été utilisée pour déterminer

les expressions des facteurs d'intensité de contraintes et le taux de restitution d'énergie due à la translation provenant lors de l'interaction entre une fissure de longueur finie et une dislocation dipôle.

Chabaat et co. [31, 32] ont utilisé une Approche Semi-Empirique (A.S.E) basée sur la technique de la double couche pour la détermination de la distribution des champs de contraintes générée au bout de la fissure principale lors de l'interaction. Les différents champs de déplacement et de contraintes pouvant être générés à partir de l'interaction fissure-microfissures ont été ainsi déterminés par l'utilisation des fonctions de green et par conséquent, l'obtention du facteur d'intensité de contraintes K_I .

Dans ce présent travail [33], l'analyse du comportement des microfissures prolongées au voisinage de la fissure principale est faite sur la base d'une approche purement mathématique. Les équations différentielles de forme des champs d'iso- contraintes ainsi que les conditions aux limites ont été développées et analysées en prenant en compte l'interaction entre une fissure principale et des microfissures prolongées avoisinantes.

Le phénomène d'amplification et de réduction des champs de contraintes a été élucidé à partir d'une étude du facteur d'intensité de contraintes en mode I caractérisant ainsi les contraintes au niveau de la fissure principale.

Le taux de restitution d'énergie a été déterminé par un simple calcul par le choix de la délimitation entre la courbe d'iso- contrainte et l'axe des abscisses x .

2) Principe de la méthode :

La méthode consiste en l'interaction entre une fissure principale et une zone avoisinante de microfissures prolongées [34 - 41] en utilisant une technique mathématique basée sur la résolution des équations différentielles avec des états de frontière appropriés et l'utilisation d'une approche numérique.

L'interaction entre une fissure principale et une zone avoisinante de microfissures prolongées est analysée sur la base de la théorie de la physique, néanmoins, cette analyse

utilise en sus, l'outil informatique pour la résolution des problèmes liés aux ruptures d'une façon plus réaliste.

L'approche mathématique envisagée dans cette étude fait appel aux trois domaines suivants :

- Science de l'ingénieur pour l'aspect de la compréhension physique du phénomène d'interactions pour l'établissement des équations différentielles de forme concernant les champs d'iso-contraintes.
- Méthodes numériques pour la résolution de ces équations différentielles en tenant compte des conditions aux limites imposées.
- Programmation pour exécution efficace des calculs et construction des graphes sur ordinateur.

Une fois ces paramètres déterminés, les prédictions théoriques sont comparées aux résultats expérimentaux. Pour cela, la technique la plus simple consiste à utiliser les graphes comme moyens de comparaisons.

3) Formulation du problème :

Le problème considéré est un spécimen fissuré latéralement et soumis à un chargement uniforme à l'infini sous le mode pure I (voir Figure 13). La fissure initiale de longueur L est considérée à deux dimensions et est précédée par une zone de microfissures.

Les hypothèses de calcul à considérer sont comme suit :

- Le mode de rupture est le mode I.
- Etat de contrainte plane.
- Matériau utilisé étant élastique, homogène et isotrope.
- La fissure principale se propage d'une manière rectiligne.
- La zone microfissurée est symétrique par rapport à la ligne de la fissure principale.

Le Matériau utilisé est le polystyrène [Ps] dont les dimensions du spécimen et les caractéristiques intrinsèques sont mentionnées ci-dessous (voir Figure 13).

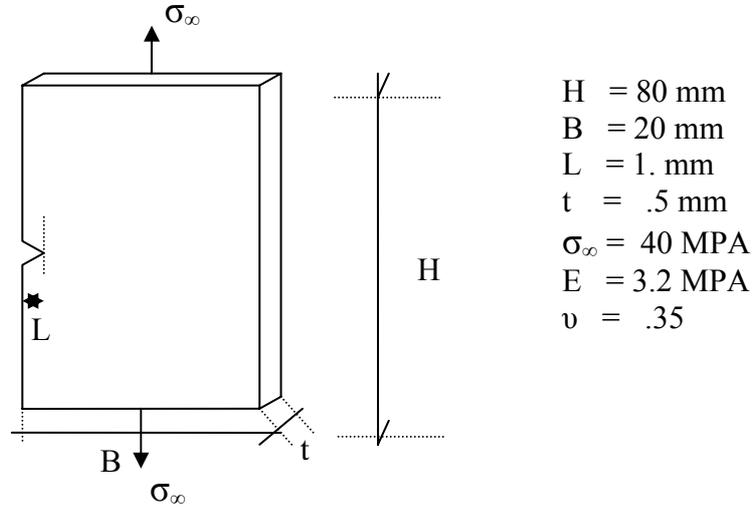


Figure 13: Géométrie du spécimen
(Single Edge Notch Specimen)

4) Détermination des champs des contraintes principales : (Système de coordonnées polaires)

Les champs des contraintes élastiques sont données par [42] en coordonnées polaires comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \begin{Bmatrix} \varphi_{rr}(\theta) \\ \varphi_{\theta\theta}(\theta) \\ \varphi_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix} + \sigma'_{\infty} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \cos \theta/2 (1 + \sin(\theta/2))^2 + \sigma_{rr}'_{\infty} \\ \sigma_{\theta\theta} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \cos(\theta/2)^3 + \sigma_{\theta\theta}'_{\infty} \\ \sigma_{r\theta} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + \sigma_{r\theta}'_{\infty} \end{cases} \quad (2)$$

On note que le premier terme de l'équation (1) exprime la solution asymptotique des champs de contraintes proches de la singularité. Le terme additionnel correspond aux contraintes matérielles homogènes qui sont définies comme suit;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr}'_{\infty} = (\sin \theta)^2 \sigma_{\infty} \\ \sigma_{\theta\theta}'_{\infty} = (\cos \theta)^2 \sigma_{\infty} \\ \sigma_{r\theta}'_{\infty} = 1/2 \sin 2\theta \sigma_{\infty} \end{array} \right. \quad (3)$$

En introduisant l'équation (3) dans l'équation (2); on obtient la forme générale des champs de contraintes dans un corps élastique;

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \cos \theta/2 (1 + (\sin \theta/2)^2) + (\sin \theta)^2 \sigma_{\infty} \\ \sigma_{\theta\theta} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \cos (\theta/2)^3 + (\cos \theta)^2 \sigma_{\infty} \\ \sigma_{r\theta} = K_I / (2\pi r)^{1/2} \sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + (1/2) \sin 2\theta \sigma_{\infty} \end{array} \right. \quad (4)$$

où, $K_I = 1,12(\pi L)^{1/2} \sigma_{\infty}$ est le facteur d'intensité de contraintes effective au bout d'une fissure de bord pour le mode I.

En d'autres termes, on a :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = 1,12/\sqrt{2} (L/r)^{1/2} (\cos \theta/2 (1 + (\sin \theta/2)^2) + \sqrt{2}/1,12 (\sin \theta)^2 (r/L)^{1/2}) \sigma_{\infty} \\ \sigma_{\theta\theta} = 1,12/\sqrt{2} (L/r)^{1/2} (\cos (\theta/2)^3 + \sqrt{2}/1,12 (\cos \theta)^2 (r/L)^{1/2}) \sigma_{\infty} \\ \sigma_{r\theta} = 1,12/\sqrt{2} (L/r)^{1/2} (\sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + \sqrt{2}/1,12 (\sin 2\theta)/2 (r/L)^{1/2}) \sigma_{\infty} \end{array} \right. \quad (5)$$

En posant $A = 1,12/\sqrt{2} \approx 0,8$; les équations (5) deviennent telles suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{rr} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\cos \theta/2 (1 + (\sin \theta/2)^2) + 1/A (r/L)^{1/2} (\sin \theta)^2) \\ \sigma_{\theta\theta} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\cos (\theta/2)^3 + 1/A (r/L)^{1/2} (\cos \theta)^2) \\ \sigma_{r\theta} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + (1/2A) (r/L)^{1/2} (\sin 2\theta)) \end{array} \right. \quad (6)$$

Les contraintes principales sont données par [39] ;

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2 \pm (((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/2)^2 + (\sigma_{r\theta})^2)^{1/2} \quad (7)$$

Ainsi la substitution de l'équation (6) dans l'équation (7) donne les relations suivantes :

$$\sigma_{1,2} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} [(\cos \theta/2 + (1/2A) (r/L)^{1/2}) \pm ((\sin \theta)^2/4 + 1/(2A) \sin \theta \sin (3/2)\theta (r/L)^{1/2} + 1/(2A)^2 (r/L))^{1/2}] \quad (8)$$

La fonction de Tresca appelée aussi la fonction des contraintes de cisaillement maximum relativement à l'effort appliqué est donnée comme suit

$$\sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (9)$$

$$\sigma_{12} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} ((\sin \theta)^2/4 + 1/(2A) \sin \theta \sin (3/2)\theta (r/L)^{1/2} + 1/(2A)^2 (r/L))^{1/2} \quad (10)$$

5) Etablissement des équations différentielles des champs des iso- contraintes principales:

Pour résoudre le problème de Cauchy, il revient de trouver une « courbe intégrale » de l'équation différentielle passant par un point donné (x_0, y_0) sur un ouvert de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^m$. Cette dernière apparaît comme étant un système différentiel du premier ordre à m fonctions inconnues y_1, \dots, y_m donnée sous la forme suivante :

$$\begin{cases} y'_1(x) = f_1(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \\ \dots \\ y'_m(x) = f_m(x, y_1(x), \dots, y_m(x)) \end{cases} \quad (11)$$

Physiquement, il revient à prévoir l'évolution du système au cours de la variation de x, sachant qu'en $x = x_0$ le système est décrit par les paramètres $y_0 = (y_{0,1}, \dots, y_{0,m})$. Dans ce cas, les coordonnées (x_0, y_0) sont considérées comme les données initiales du problème de Cauchy.

5-1) Champ des tangentes :

A tout point $M = (x_0, y_0)$, on associe la droite D_M passant par M et de coefficient directeur $f(x_0, y_0)$:

$$D_M : y - y_0 = f(x_0, y_0) (x - x_0) \quad (12)$$

L'application $M \longrightarrow D_M$ est appelée champ des tangentes associé à l'équation différentielle.

Une courbe intégrale de l'équation différentielle est une courbe différentiable C qui a pour tangente en chaque point $M \in C$ la droite D_M du champ des tangentes (voir Figure 14) [43].

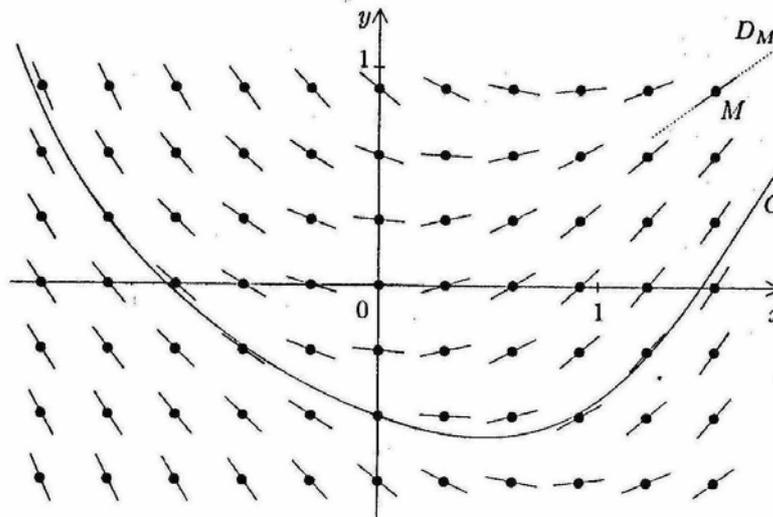


Figure 14: Champ des tangentes « courbe intégrale ».

5-2) Détermination de l'équation différentielle des champs des iso-contraintes principales maximales:

L'observation microscopique du spécimen de PS comme montré sur la Figure 15 a permis d'examiner la répartition et la densité des microfissures et surtout de suivre leur direction et leur orientation par rapport à la fissure initiale. Selon [44], ces microfissures émanant de la fissure principale suivent les directions parallèles à l'axe des iso-contraintes principales minimales par contre leurs orientations est dirigée selon l'axe des iso-contraintes principales maximales d'où le principe de Mohr.

Pour cela, la distribution de ces iso-contraintes principales est schématisée comme sur la Figure 16.

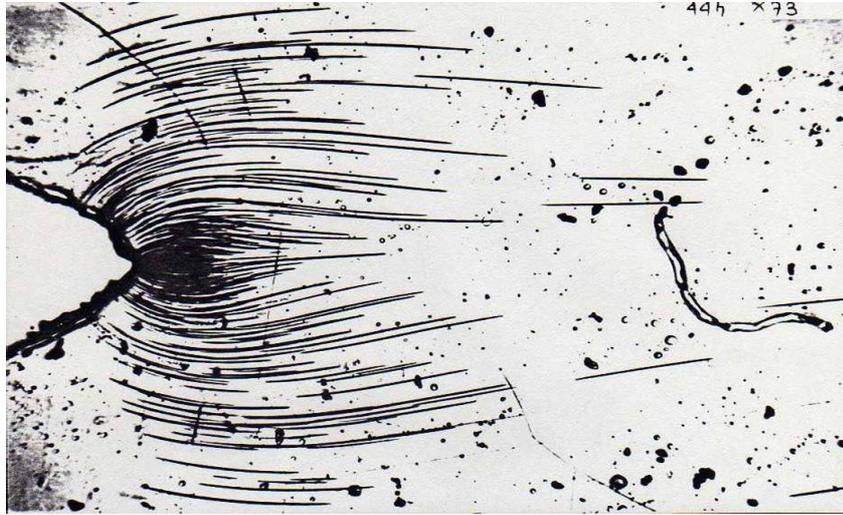


Figure 15: Observations microscopiques des fissures dans le polystyrène (PS) sous une charge de traction (prise par [44])

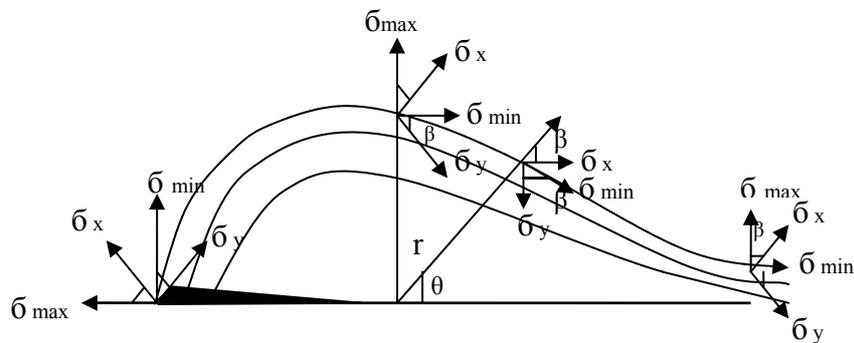


Figure 16 : Représentation schématique des contraintes principales le long des microfissures prolongées

En utilisant les transformations géométriques suivantes ;

$$\tan 2\beta = 2 \tan \beta / (1 - (\tan \beta)^2) \quad \text{avec : } y' = \tan \beta \quad (13)$$

l'équation précédente prend la forme ;

$$\tan 2\beta = 2 y' / (1 - (y')^2) \quad (14)$$

ce qui correspond à la relation:

$$y'^2 + (2/\tan 2\beta) y'^{-1} = 0 \quad (15)$$

En utilisant les coordonnées polaires, on obtient ;

$$y' = dy/dx = (r' \sin\theta + r \cos\theta) / (r' \cos\theta - r \sin\theta) \quad (16)$$

L'équation (15) prend la forme suivante :

$$r'^2 - r^2 + 2r r'(\sin 2\theta \tan 2\beta + \cos 2\theta) / (-\cos 2\theta \tan 2\beta + \sin 2\theta) = 0 \quad (17)$$

La direction des contraintes principales est donnée par ;

$$\tan 2\beta = 2\sigma_{r\theta} / (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \quad (18)$$

et par conséquent, on a une forme rétrécie comme suit ;

$$\tan 2\beta = (A \sin\theta \cos\theta/2 + (r/L)^{1/2} \sin 2\theta) / (A \sin\theta \sin\theta/2 - (r/L)^{1/2} \cos 2\theta) \quad (19)$$

En posant $L = 1$, on obtient ;

$$\tan 2\beta = (A \sin\theta \cos\theta/2 + \sqrt{r} \sin 2\theta) / (A \sin\theta \sin\theta/2 - \sqrt{r} \cos 2\theta) \quad (20)$$

En substituant (20) dans (17), on obtient les équations différentielles des champs des iso-contraintes maximales:

$$r'^2 - r^2 + 2r r'(\sqrt{r} \cos 4\theta - A \sin\theta \sin(5\theta/2)) / (\sqrt{r} \sin 4\theta + A \sin\theta \cos(5\theta/2)) = 0 \quad (21)$$

En posant,

$$\varphi(\theta, r) = (\sqrt{r} \cos 4\theta - A \sin\theta \sin 5\theta/2) / (\sqrt{r} \sin 4\theta + A \sin\theta \cos 5\theta/2) \quad (22)$$

L'équation (21) devient :

$$r'^2 - r^2 + 2r r'(\varphi(\theta, r)) = 0 \quad (23)$$

ou bien d'une façon plus explicite, on a ;

$$\begin{cases} r'_1 = -r_1 [\varphi(\theta, r_1) + (\varphi^2(\theta, r_1) + 1)^{1/2}] \\ r'_2 = -r_2 [\varphi(\theta, r_2) - (\varphi^2(\theta, r_2) + 1)^{1/2}] \end{cases} \quad (24)$$

avec les conditions aux limites comme suit;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad [r_1 = r_{01}, r_2 = r_{02}]$$

5-3) Détermination de l'équation différentielle des champs des iso- contraintes principales minimales:

D'une façon similaire on obtient l'équation différentielle des champs des iso- contraintes principales minimales en remplaçons β par β' .

Tel que:

$$\tan 2\beta' = \tan 2(\pi/2 - \beta) = \tan(\pi - 2\beta) = -\tan 2\beta \quad \text{and: } y' = \tan \beta' \quad (25)$$

On obtient;

$$r'^2 - r^2 + 2 r r'(-A \sin \theta \sin (3/2)\theta + \sqrt{r}) / (A \sin \theta \cos (3/2)\theta) = 0 \quad (26)$$

En posant:

$$\psi(\theta, r) = - (A \sin \theta \sin (3/2)\theta + \sqrt{r}) / (A \sin \theta \cos (3/2)\theta) \quad (27)$$

L'équation (26) devient :

$$r'^2 - r^2 + 2 r r'(\psi(\theta, r)) = 0 \quad (28)$$

Ou bien d'une façon plus explicite, on a ;

$$\begin{cases} r'^3 = - r_3 [\psi(\theta, r_3) + (\psi^2(\theta, r_3) + 1)^{1/2}] \\ r'^4 = - r_4 [\psi(\theta, r_4) - (\psi^2(\theta, r_4) + 1)^{1/2}] \end{cases} \quad (29)$$

Avec les conditions aux limites comme suit;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad [r_3 = r_{03}, \quad r_4 = r_{04}]$$

5-4) Détermination de l'équation différentielle des champs des iso- contraintes de cisaillement maximum:

La relation donnant l'équation différentielle des champs des iso- contraintes de cisaillement maximum est donnée sous la forme suivante ;

$$(\text{Eq. (23)} - \text{Eq.(28)}) / 2 = r r'(\varphi(\theta,r) - \psi(\theta,r)) = 0 \quad (30)$$

En d'autres termes ; l'équation (30) devient

$$(dr/d\theta) (\varphi(\theta, r) - \psi(\theta, r)) = 0 \quad (31)$$

En posant ; $f(\theta, r) = \varphi(\theta, r) - \psi(\theta, r)$ (32)

on obtient la relation suivante ;

$$r_5 (dr_5/d\theta) f(\theta, r_5) = 0 \quad (33)$$

Avec les conditions aux limites comme suit;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad [r_5 = r_{05}]$$

Finalement, on obtient les équations suivantes;

$$\left\{ \begin{array}{ll} r'_{1,2} = -r_{1,2} [\varphi(\theta, r_{1,2}) \pm (\varphi^2(\theta, r_{1,2}) + 1)^{1/2}] & \theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad [r_1 = r_{01}, r_2 = r_{02}] \\ r'_{3,4} = -r_{3,4} [\psi(\theta, r_{3,4}) \pm (\psi^2(\theta, r_{3,4}) + 1)^{1/2}] & \theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad [r_3 = r_{03}, r_4 = r_{04}] \\ r_5 (dr_5/d\theta) f(\theta, r_5) = 0 & \theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \quad \text{et} \quad [r_5 = r_{05}] \end{array} \right. \quad (34)$$

Les fonctions trigonométriques sus-citées sont données telles suit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \varphi(\theta, r) = (\sqrt{r} \cos 4\theta - A \sin \theta \sin 5\theta/2) / (\sqrt{r} \sin 4\theta + A \sin \theta \cos 5\theta/2) \\ \psi(\theta, r) = -(A \sin \theta \sin (3/2)\theta + \sqrt{r}) / (A \sin \theta \cos (3/2)\theta) \\ f(\theta, r) = \varphi(\theta, r) - \psi(\theta, r) \end{array} \right. \quad (35)$$

En faisant varier les conditions initiales des équations différentielles de forme des champs des iso-contraintes principales ainsi que l'équation différentielle des champs des iso-contraintes de cisaillement maximum en tenant compte des conditions aux limites imposées pour chaque équation différentielle, on obtient les courbes suivantes.

(En tenant compte que la fissure principale se trouve aux extrémités : $\theta = -\pi$ et $\theta = \pi$ des courbes des iso-contraintes).

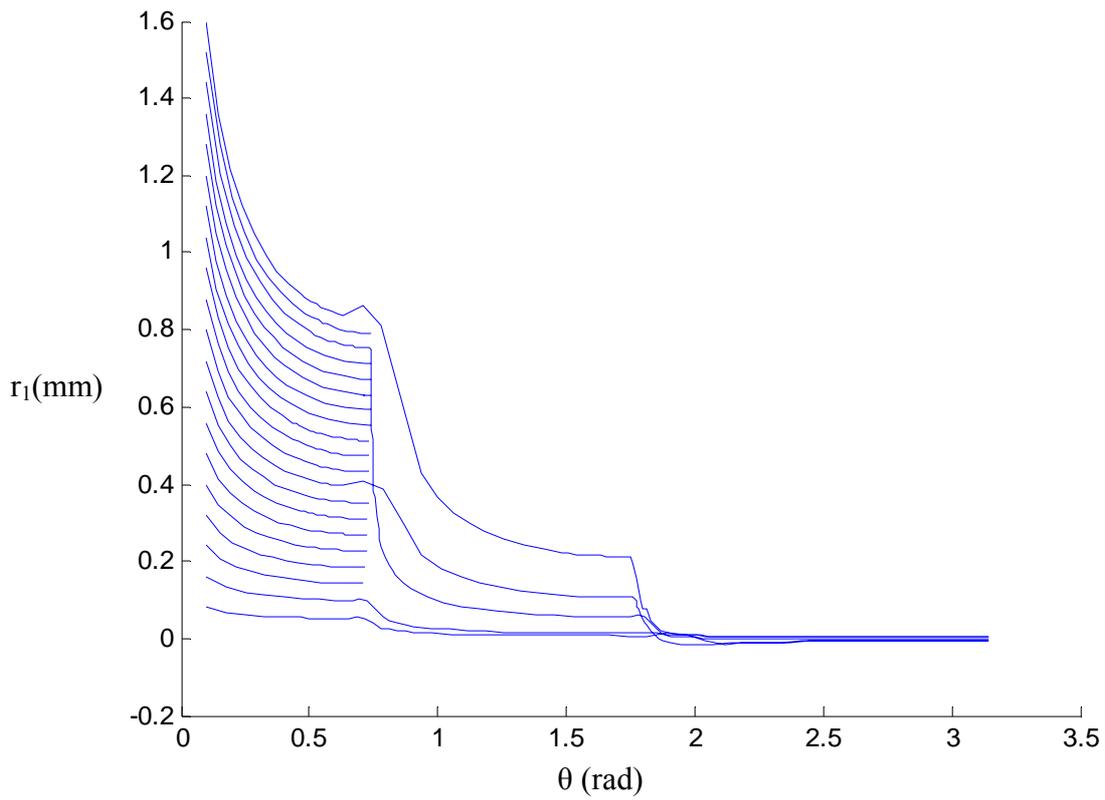


Figure 17: Courbes d'iso-contraintes (cas $r_1(\theta, r_1)$ pour $\theta = [0, \pi]$)

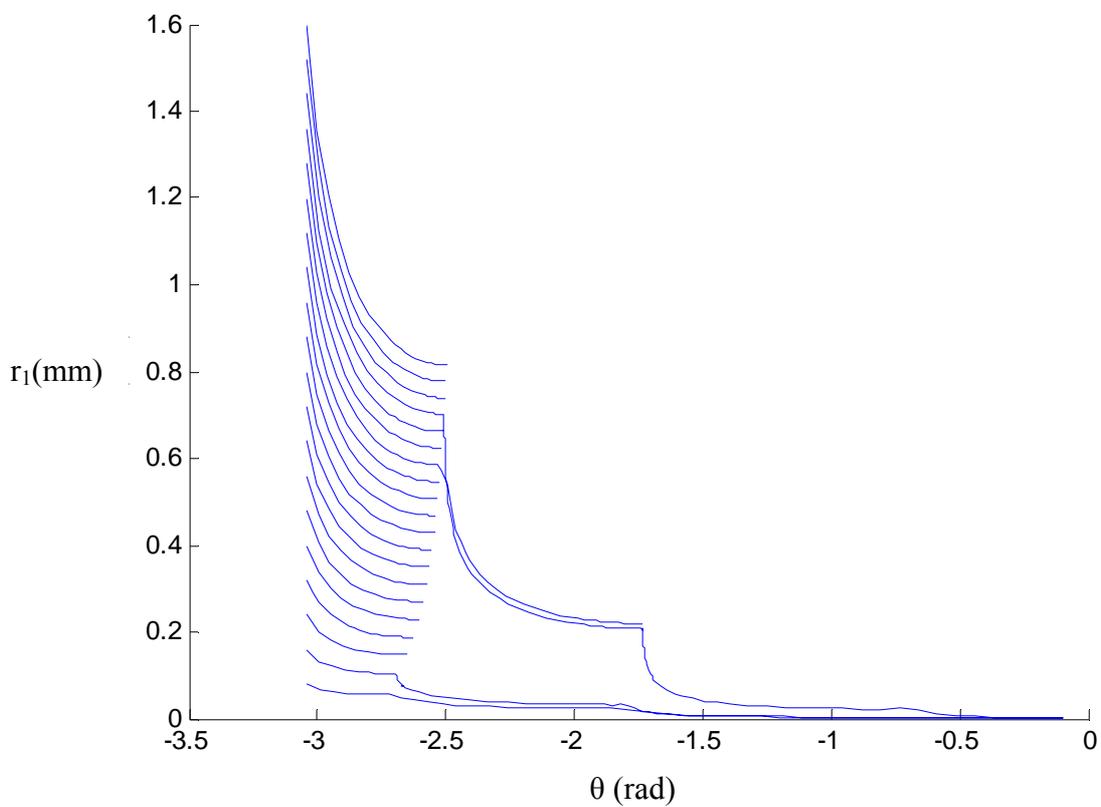


Figure 18 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_1(\theta, r_1)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$)

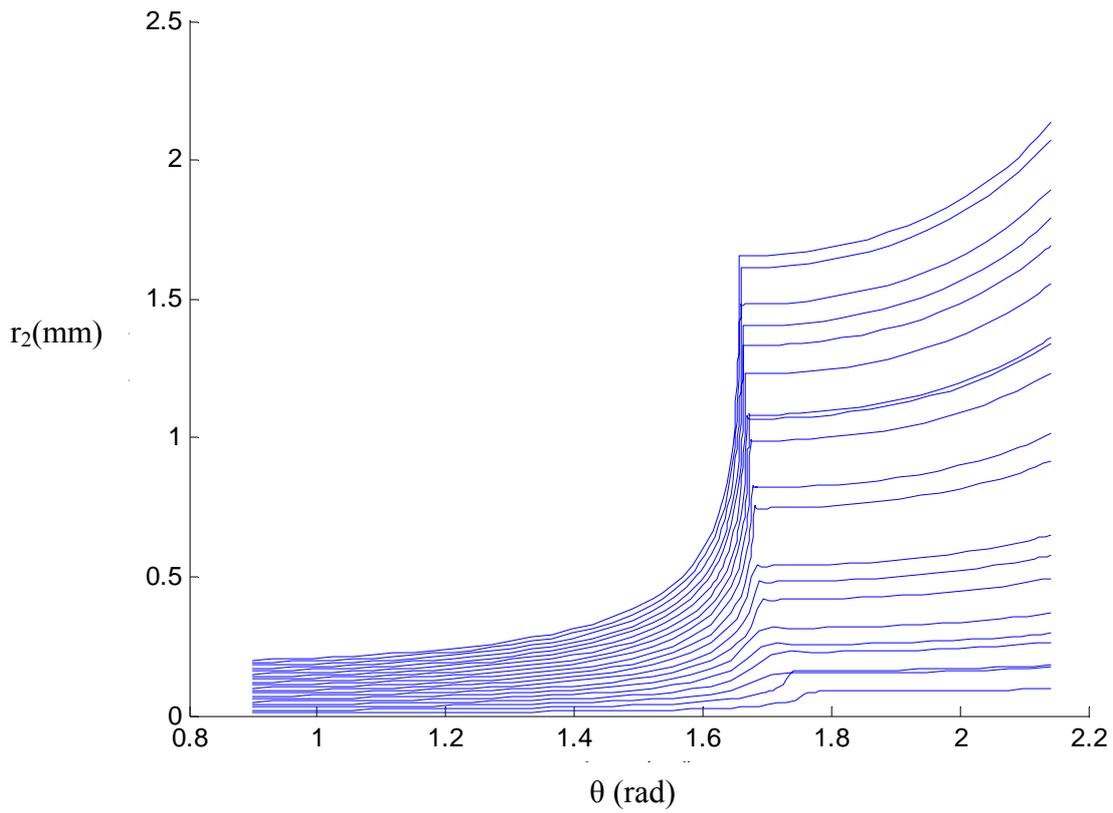


Figure 19 : Courbes d'iso- contraintes (cas $r_2(\theta, r_2)$ pour $\theta = [0, \pi]$)

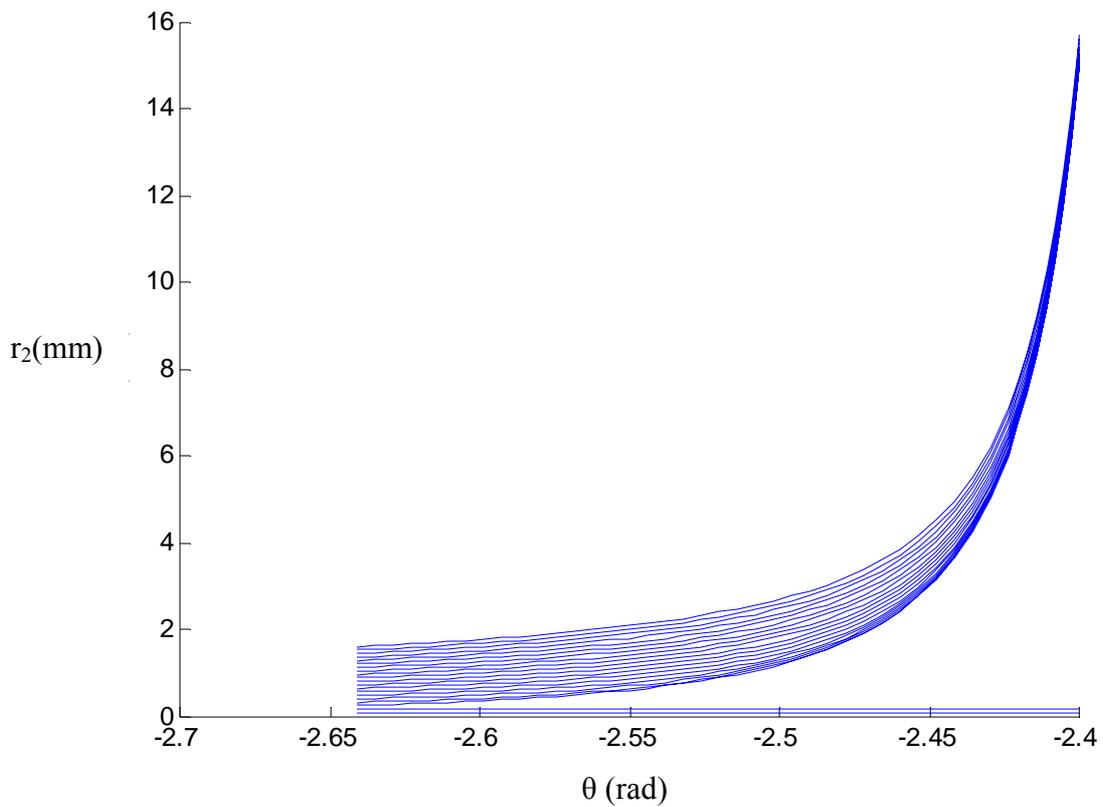


Figure 20 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_2(\theta, r_2)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$)

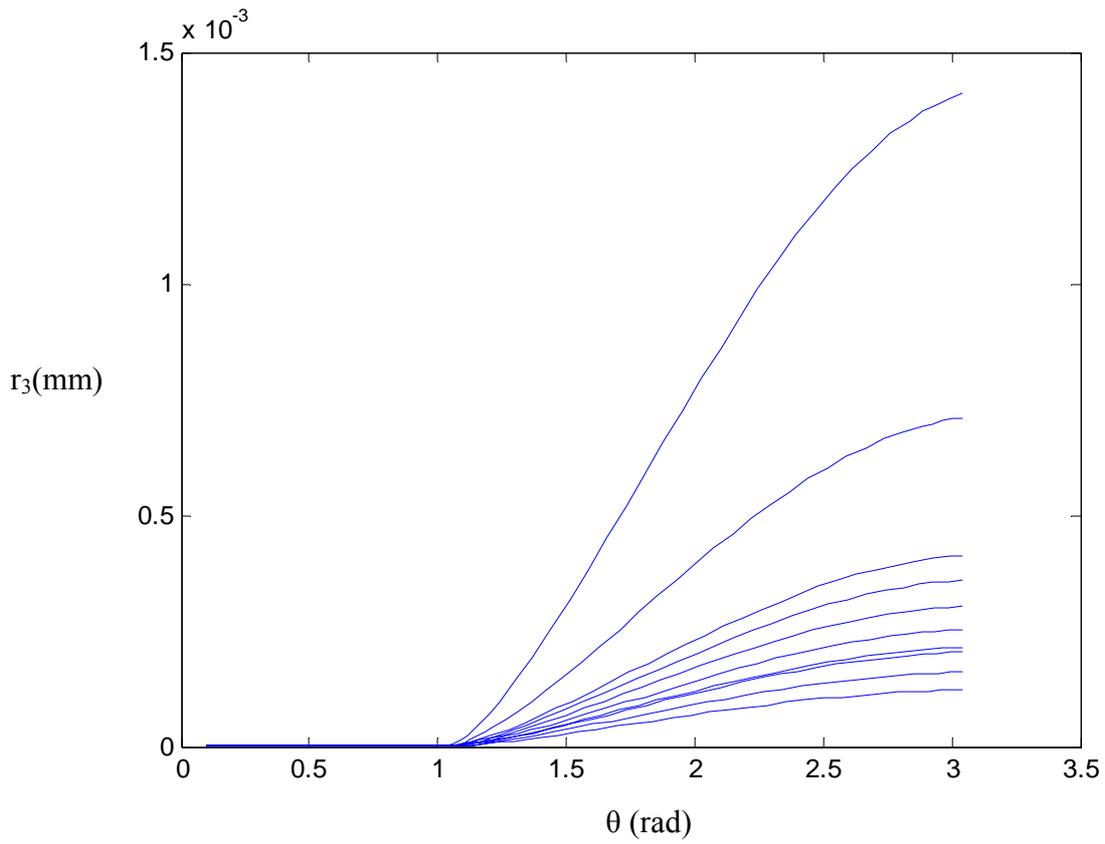


Figure 21 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_3(\theta, r_3)$ pour $\theta = [0, \pi]$)

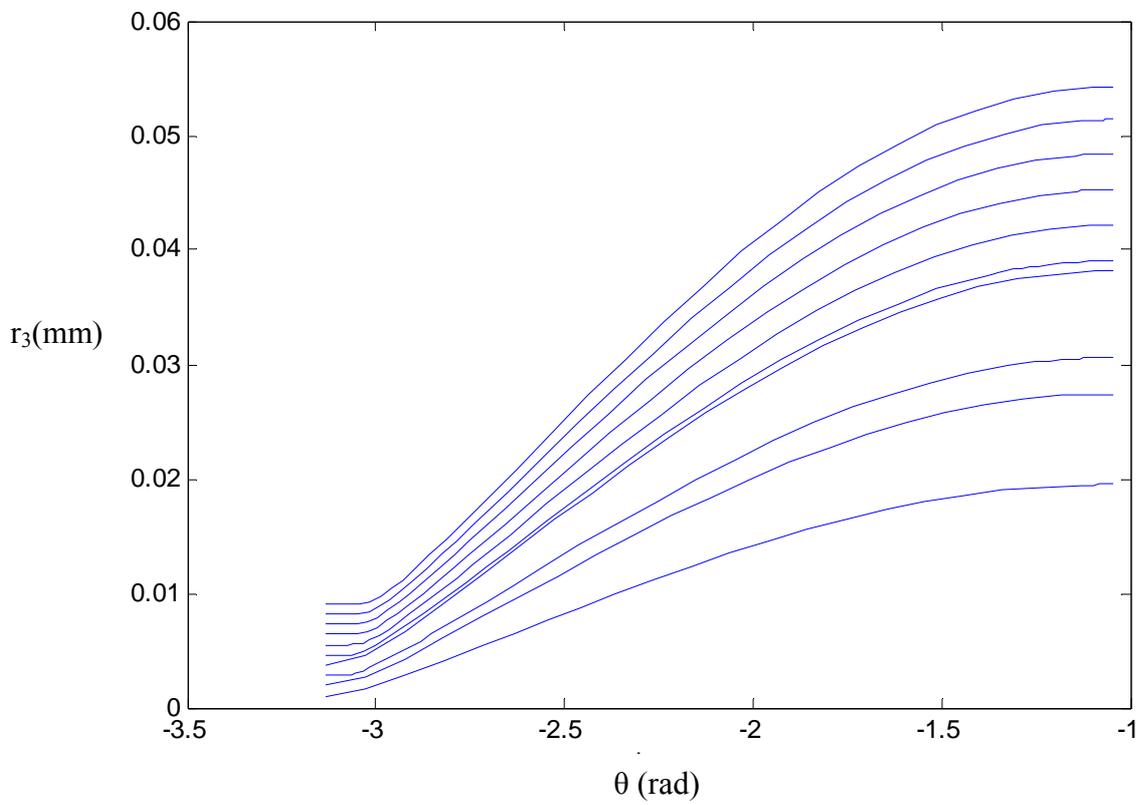


Figure 22 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_3(\theta, r_3)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$)

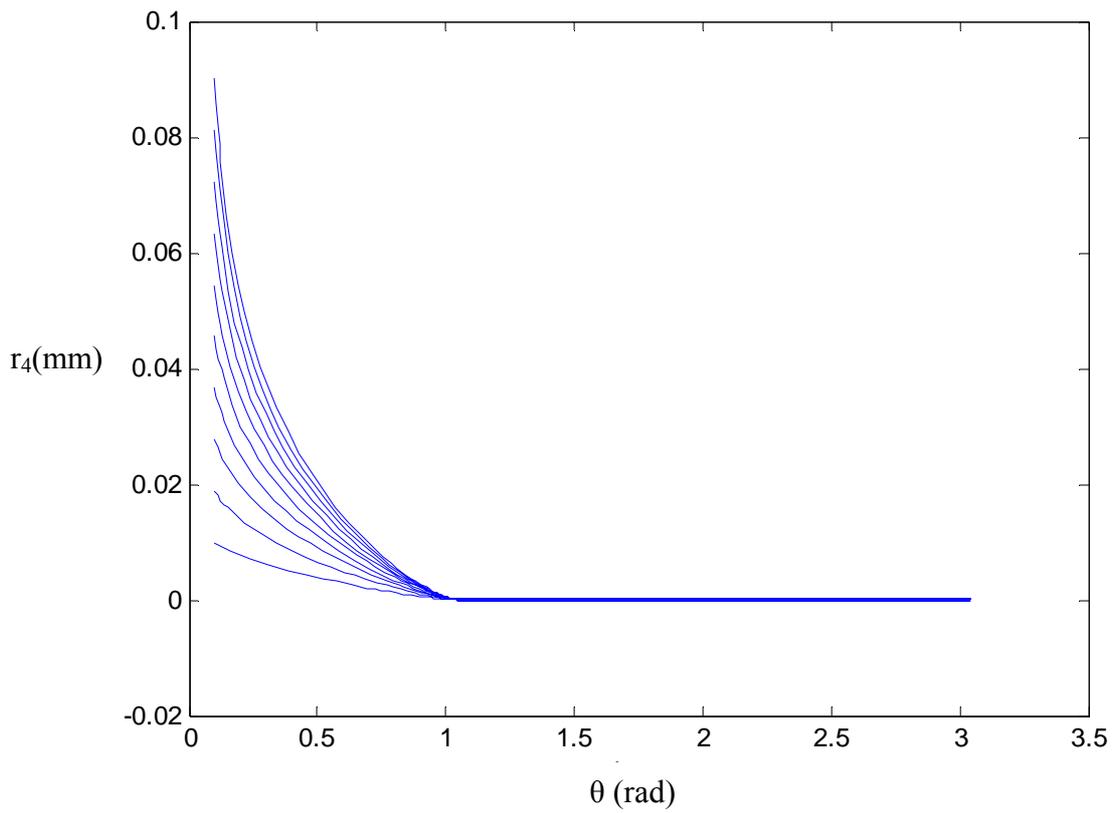


Figure 23 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_4(\theta, r_4)$ pour $\theta = [0, \pi]$)

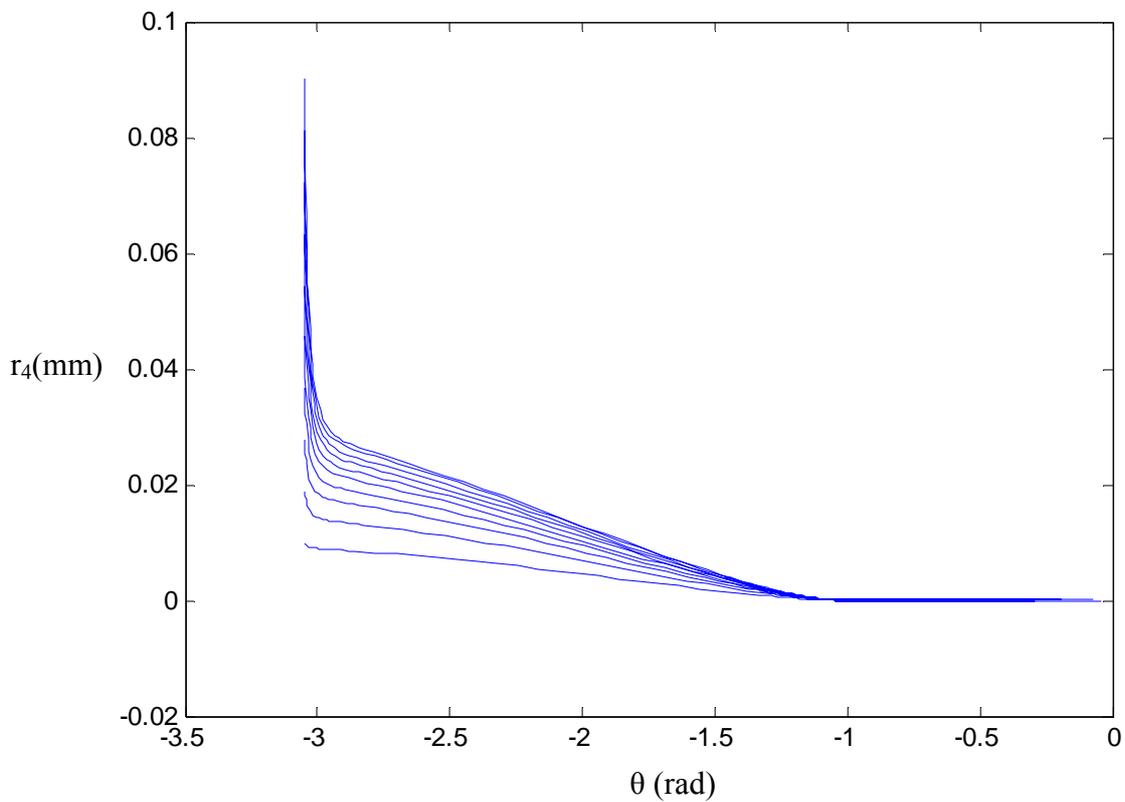


Figure 24 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_4(\theta, r_4)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$)

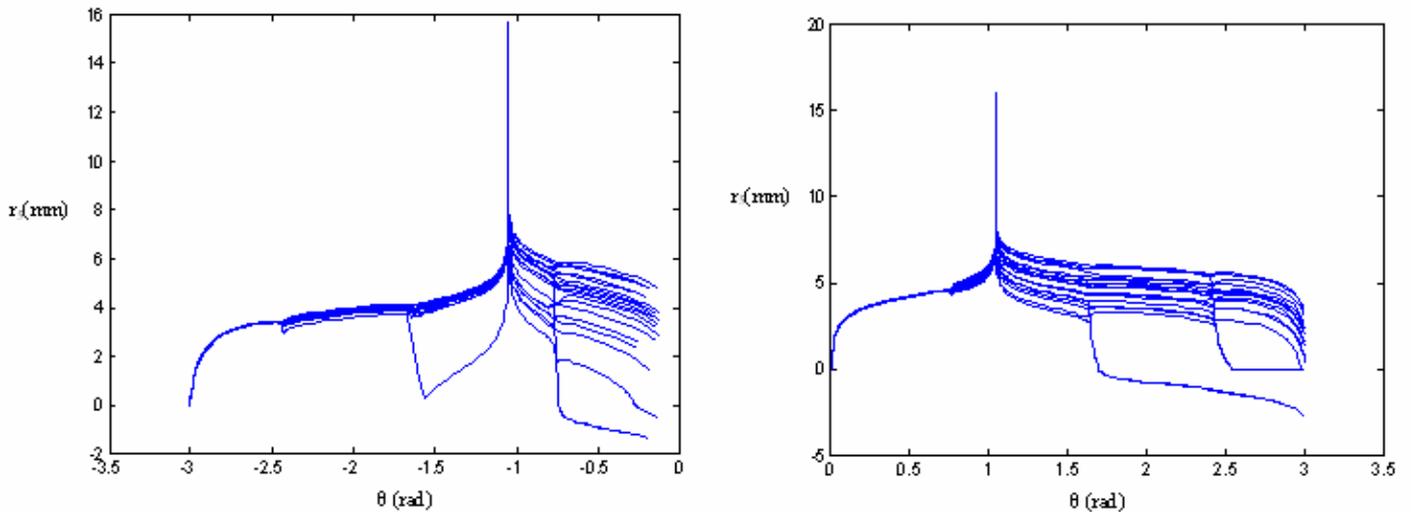


Figure 25 : Courbes d'iso-contraintes (cas $r_s(\theta, r_s)$ pour $\theta = [-\pi, 0]$ et $\theta = [0, \pi]$)

6) Résultats et Discussions :

Les courbes des iso-contraintes correspondant aux équations différentielles données précédemment sont illustrées par les Figures 17 à 25.

On remarque à travers l'étude de ces courbes d'iso-contraintes, l'existence de la zone endommagée au voisinage de la fissure principale. Cette dernière connue comme étant une Zone de Processus de Rupture renferme en son sein deux effets agissant mutuellement : un effet d'amplification (+) et un effet de réduction (-). Selon les travaux de [31, 32] ces effets dépendent de l'orientation et de la position des micro fissures à l'intérieur de la zone de rupture par rapport à la fissure initiale.

Par conséquent, il a été montré dans cette étude que les champs de contraintes déterminés par la résolution d'équations différentielles sont à l'origine des différents effets générés au voisinage de la fissure principale. En d'autres termes, plus l'effet amplificateur est dominant et plus la propagation de la fissure principale est évidente. Donc, les deux effets sont généralement proportionnels à la propagation de la fissure.

Chapitre III
Détermination du Facteur
d'Intensité de Contrainte

1) - Introduction :

L'analyse dimensionnelle montre que le facteur d'intensité de contrainte F.I.C est une fonction linéaire de la contrainte et la racine d'une caractéristique de la longueur de la fissure. Le F.I.C rassemble les paramètres de chargement et de la géométrie et représente l'intensité du champ de contrainte autour de la fissure.

Physiquement F.I.C est interprété comme l'intensité de charge transmise à travers la région du fond de fissure par l'introduction de la fissure dans la pièce saine. Par conséquent la valeur du F.I.C est affectée par la contrainte appliquée, la forme et les dimensions de la fissure, la configuration de la structure et le mode de déformation.

La détermination du F.I.C pour un problème de fissures constitue une partie importante de la solution dans la M.L.E.R. Depuis l'introduction de la M.D.R, plusieurs efforts ont été faits pour la détermination du F.I.C. Ainsi, plusieurs méthodes ont été développées afin d'élucider le phénomène de rupture dans les matériaux et les solides. Dans le cas des structures de géométrie simple, les méthodes numériques telles que la méthode des éléments finis (M.E.F) et la méthode des intégrales aux frontières sont nécessaires pour la résolution de problèmes ayant trait à la mécanique de la rupture. Pour cela, les notions mathématiques assez développées sont considérées comme un outil essentiel à utiliser pour ce type de méthodes. D'autres méthodes dites directes sont aussi efficaces en mécanique de la rupture, on cite par exemple les méthodes expérimentales basées sur l'utilisation de microscope électronique à balayage et les méthodes récentes des émissions acoustiques.

Pour cette étude, on envisage une approche mathématique et pour des raisons de simplicité les équations obtenues sont élaborées sans dimensions.

2)- Détermination du facteur d'intensité de contrainte :

Irwin [45] a été le pionnier dans la détermination d'un paramètre aussi important que le F.I.C. en se basant principalement sur la théorie d'élasticité. Il a montré que les facteurs

d'intensité de contrainte pour les milieux fissurés plans pour le mode I de rupture peuvent être définie par le champ de contrainte défini comme suit ;

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_y (2\pi r)^{1/2}] \quad (36)$$

$$\text{Soit; } \sigma_{\theta\theta} = A (L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\cos(\theta/2))^3 + 1/A (r/L)^{1/2} (\cos\theta)^2 \quad (37)$$

En conséquence,

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [(A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\cos(\theta/2))^3 + 1/A (r/L)^{1/2} (\cos\theta)^2) (2\pi r)^{1/2}] \quad (38)$$

$$K_I = 1.12 .(\pi.L)^{1/2} . \sigma_{\infty} . \cos (\theta/2)^3 \quad (39)$$

$$\text{On a: } K_0 = \sigma_{\infty} / (\pi.L)^{1/2} \quad (40)$$

Puisque K_0 est le facteur d'intensité de contrainte en absence de la zone d'endommagement alors le facteur de contrainte global est donné par :

$$K_I / K_0 = 1.12 .(\pi.L) . \cos(\theta/2)^3 \quad (41)$$

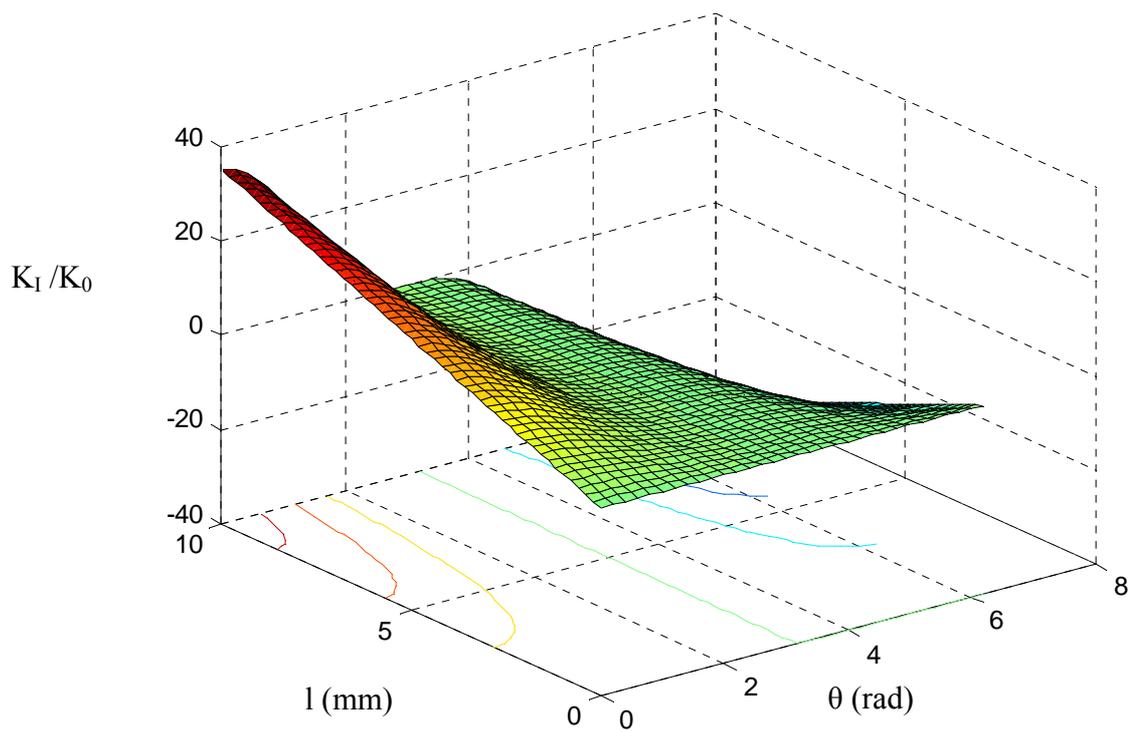


Figure 26 : Variation tri-dimensionnelle de K_I / K_0 fonction de la longueur de la fissure et de la position des microfissures θ par rapport à la fissure principale.

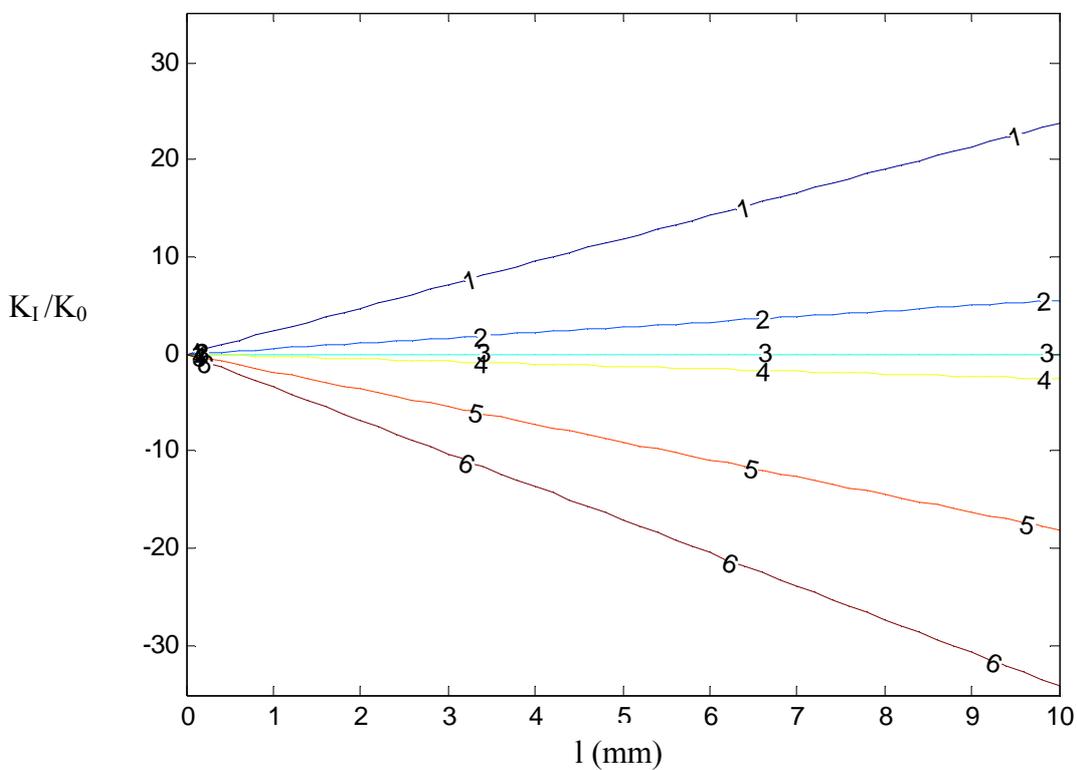


Figure 27 : Variation de K_I / K_0 fonction de la longueur de la fissure pour des positions variable de microfissures θ par rapport à la fissure principale.

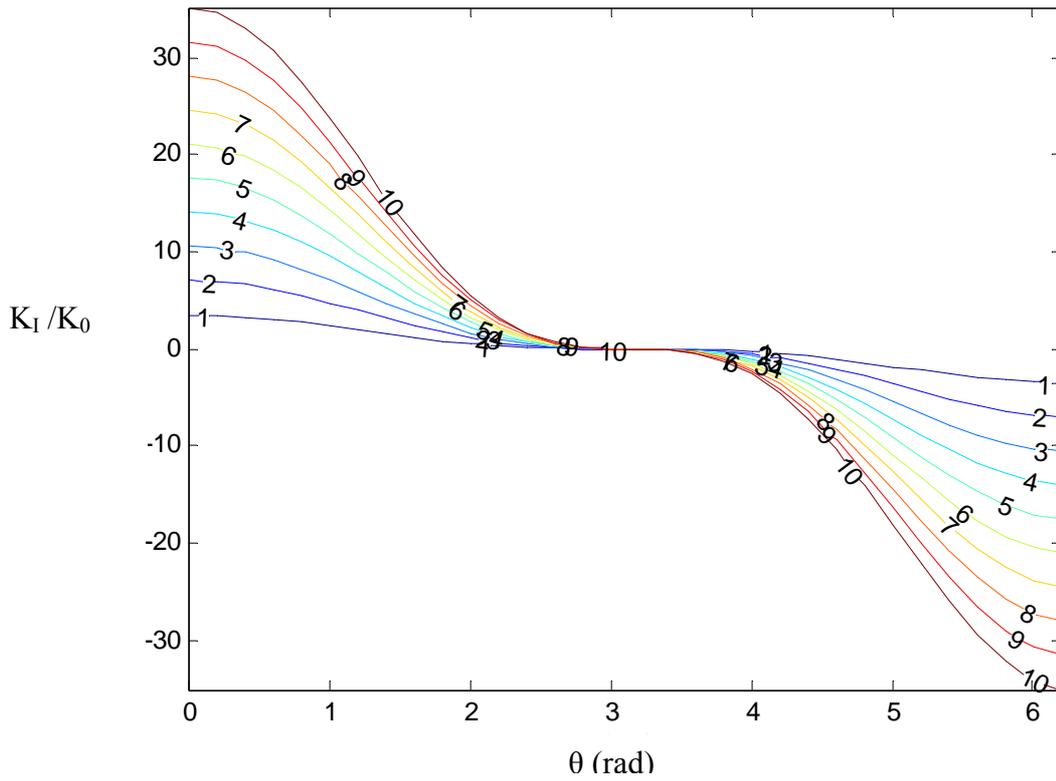


Figure 28 : Variation de K_I / K_0 fonction de la position des microfissures et de la variation de la longueur de la fissure

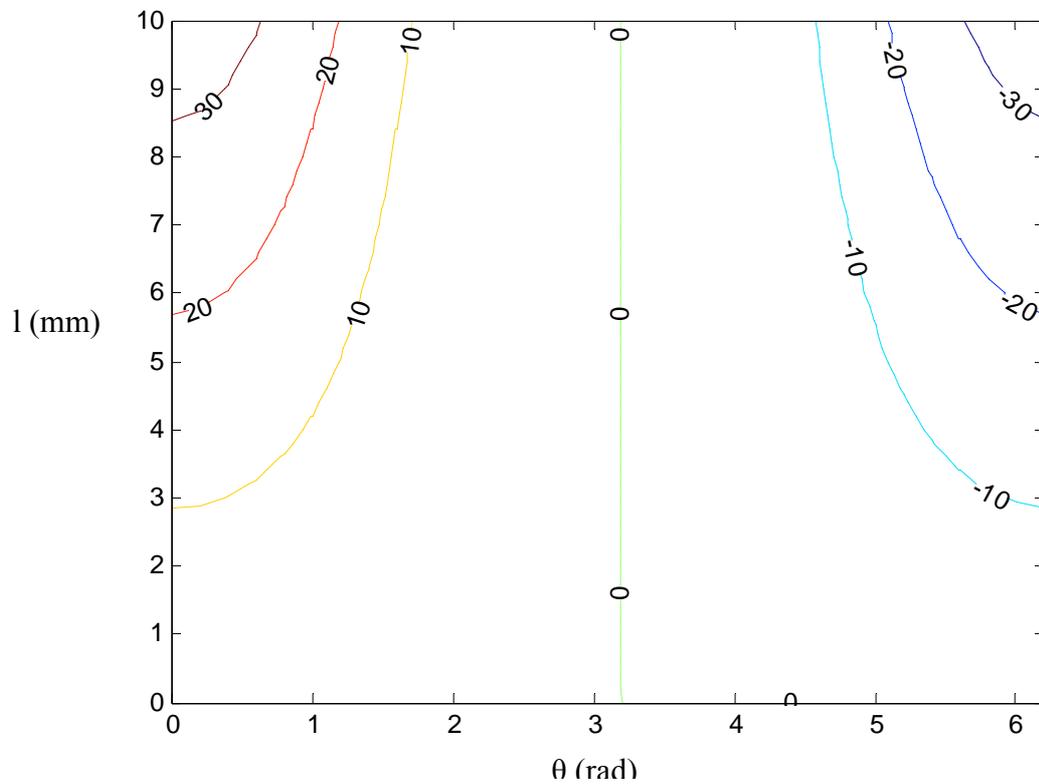


Figure 29 : Variation de la longueur de la fissure fonction de l'angle θ et de la variation de K_I / K_0 .

En utilisant le principe de la superposition des effets dus à la fissure en absence et en présence de la zone d'endommagement, le facteur d'intensité peut aussi prendre la forme suivante:

$$K_I = K_0 + \Delta K \quad (42)$$

avec; $\Delta K = \Delta K (+) + \Delta K (-)$ (43)

Soit l'équation (4) donnant $K_I = 1,12(\pi L)^{1/2} \sigma_\infty$ (44)

On note par $\Delta K (-)$ l'effet de réduction et par $\Delta K (+)$ l'effet d'amplification de contrainte due à la présence des microfissures et pour des raisons de simplicité, les équations ainsi obtenues sont données sans dimension. Donc, la fonction donnant l'allure du facteur d'intensité de contraintes est déduite à partir de l'équation suivante :

$$\Delta K / K_0 = 1,12 \cdot (\pi \cdot L) / (2\pi r)^{1/2} \quad (45)$$

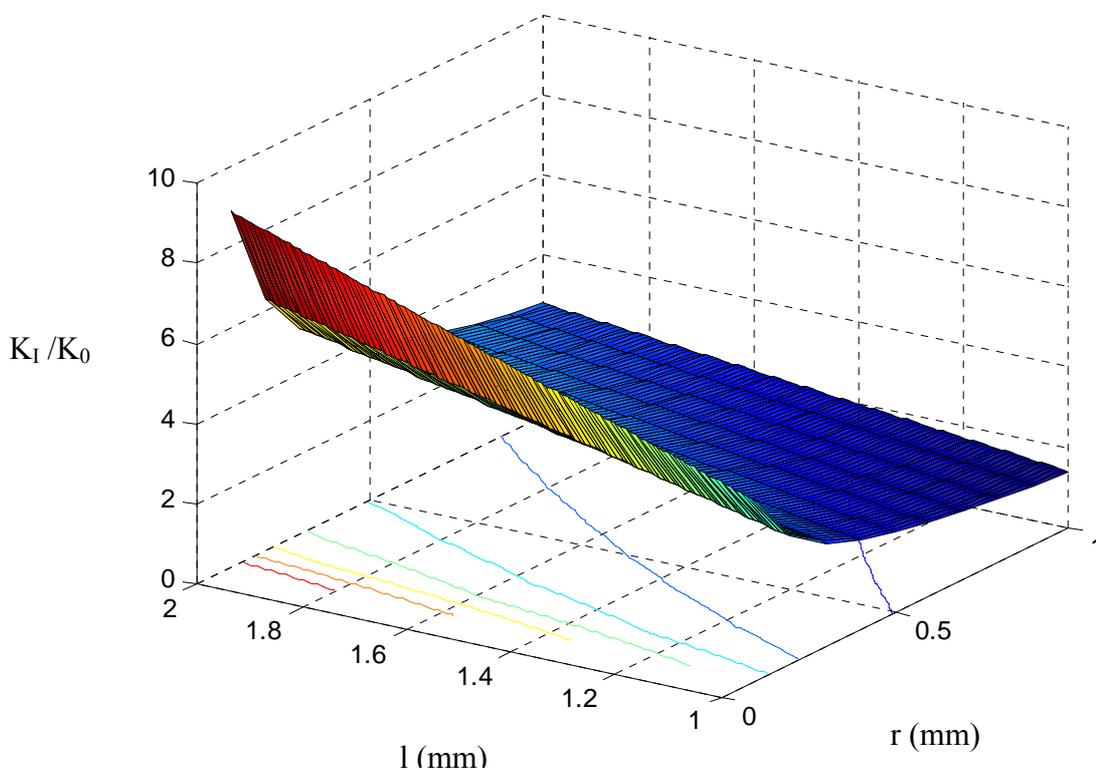


Figure 30 : Variation tri-dimensionnelle de $\Delta K / K_0$ fonction de la position de la micro fissure et de la longueur de la fissure initiale.

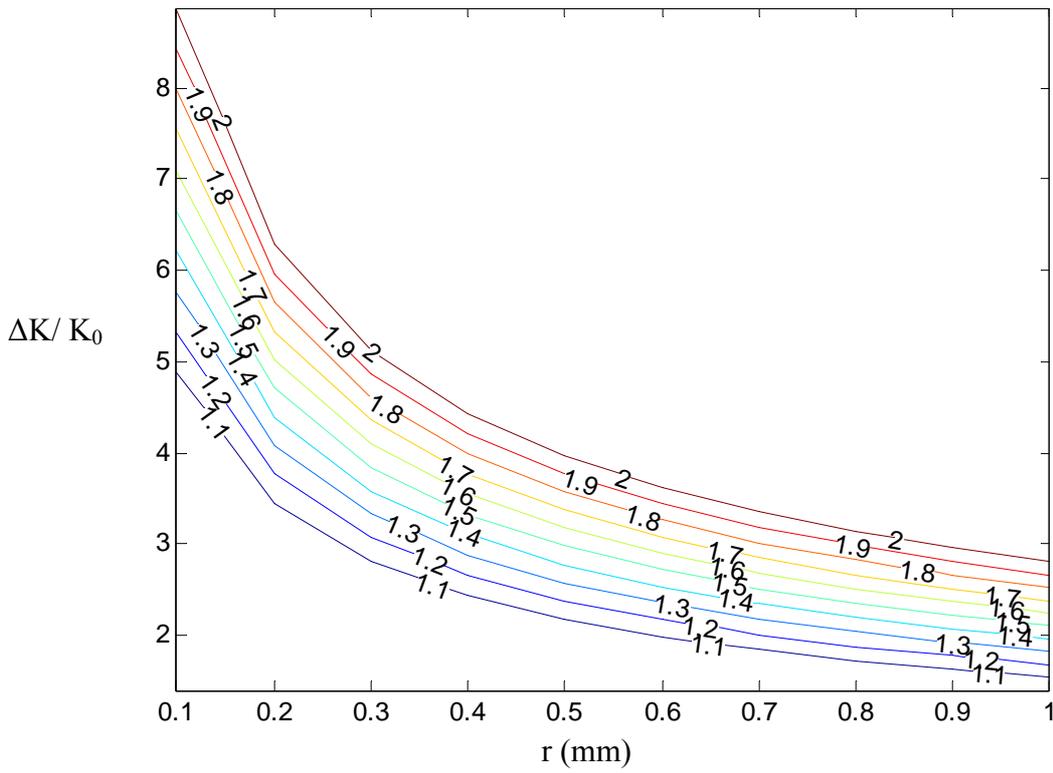


Figure 31 : Variation de $\Delta K/ K_0$ fonction de la position de la micro fissure par rapport à la fissure initiale et de la variation de la longueur de la fissure.

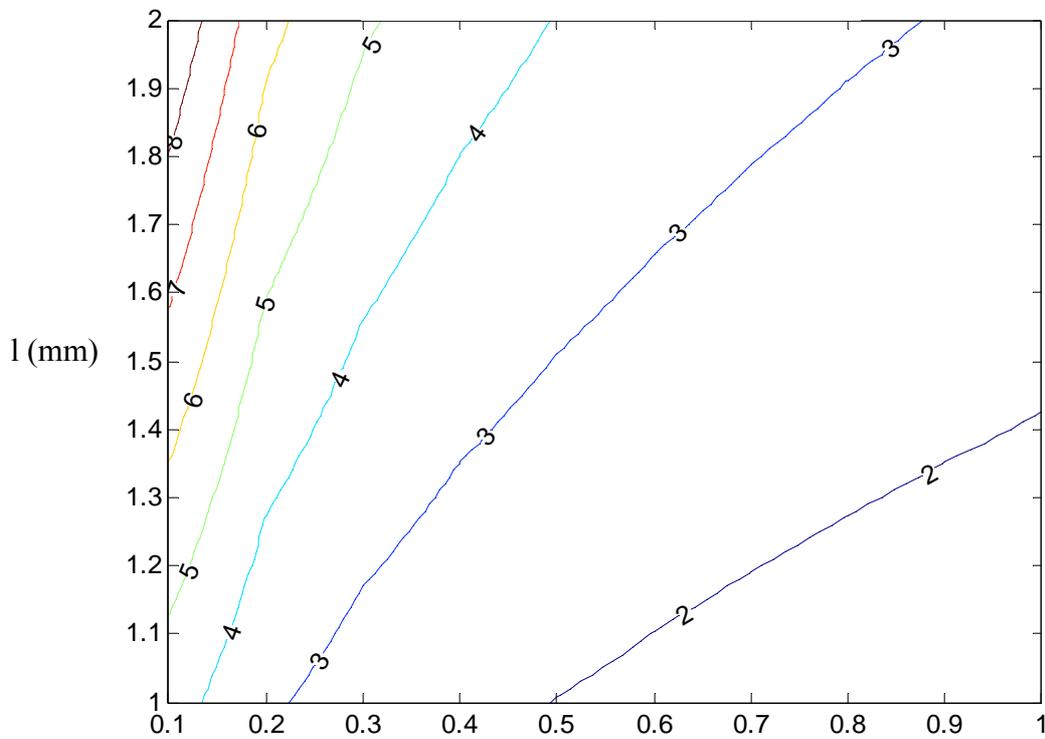


Figure 32 : Variation de $\Delta K/ K_0$ fonction de la longueur de la fissure initiale et de la position des microfissures prolongées.

3) Résultats et Discussions :

Les Figures 26 à 32 montrent que les différentes variations tri-dimensionnelles du facteur d'intensité de contrainte $\Delta K/ K_0$ sont déterminées en fonction de la longueur de la fissure principale et de la position des microfissures prolongées par rapport à cette dernière. On constate que la zone micro fissurée perturbe la propagation de la fissure principale soit par une accélération progressive d'où la valeur positive de $\Delta K/ K_0$, soit par une diminution assez drastique retardant ainsi cette propagation d'où la valeur négative de $\Delta K/ K_0$.

En fixant la position des microfissures prolongées dans la zone endommagée et tout en faisant varier la longueur de la fissure progressivement, on remarque que le facteur d'intensité de contraintes $\Delta K/ K_0$ présente deux domaines assez distincts l'un de l'autre. Premier cas, l'augmentation de $\Delta K/ K_0$ favorise la fissure à aller vers l'avant, par conséquent la propagation est considérée rectilinéaire, dans le deuxième cas, la diminution de $\Delta K/ K_0$ provoque une retardation dans la propagation d'où l'appellation de « crack-arrest » signifiant l'arrêt de la propagation.

En faisant varier la position des microfissures prolongées dans la zone endommagée et tout en fixant la longueur de la fissure principale, on constate que $\Delta K/ K_0$ diminue d'une façon drastique jusqu'à son annulation. Dans ce cas, on considère que l'effet de réduction est prédominant d'où une diminution de l'intensité des contraintes au niveau du bout de la fissure et par conséquent la propagation de la fissure est retardée. D'un autre côté, en fixant la position de ces microfissures et tout en variant la longueur de la fissure, on retient que c'est l'effet amplificateur qui prend le dessus d'où une augmentation de l'intensité de contraintes au voisinage de la fissure principale. Cette dernière provoquera une accélération de la fissure.

Chapitre IV
Evaluation du Taux de Restitution
d'Energie

1)- Introduction :

Depuis les travaux de Griffith [4, 5, 45], l'analyse du phénomène de rupture a fait de nombreux progrès. Il a montré que l'instabilité se produit lorsque l'énergie potentielle mécanique libérée par l'extension d'une fissure dépasse l'énergie absorbée par cette extension. A partir de ce principe, Rice [7] a montré que cette énergie est définie comme étant une intégrale de contour notée par J et est indépendante du contour choisi. Si le comportement du matériau est élastique alors $J_0 = G$ (se référant à l'énergie de Griffith).

Pour l'étude de l'évolution de la fissure lors de l'interaction avec une zone avoisinante de microfissures prolongées. On utilise une approche mathématique basée sur l'intégrale de contour.

2)- Détermination du taux de restitution d'énergie :

Le contour fermé d'intégration englobant la fissure principale est choisi de telle sorte que la zone d'endommagement est à l'intérieur. Ces contours sont définis par les équations différentielles de forme déterminant ainsi les différents champs d'iso- contraintes minimales correspondantes. Le taux de restitution d'énergie est déterminé par un simple calcul de la surface délimitée par le contour et l'axe des abscisses x . Ce taux est donné par la relation suivante ;

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r (r_3(\theta, r_3)) dr d\theta \quad (46)$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r (r_4(\theta, r_4)) dr d\theta \quad (47)$$

où $r_3(\theta_3, r_3)$ et $r_4(\theta_4, r_4)$ sont les solutions de l'équation différentielle des contraintes minimales exprimées en coordonnées polaires. Soit,

$$K_0 = \sigma_{\infty} / (\pi.L)^{1/2} \quad (48)$$

L'énergie due à la présence de la fissure principale en l'absence de la zone microfissurée donnée par Griffith sous la forme suivante ;

$$G = J_0 = K_0^2 / E \quad (49)$$

Pour des raisons de simplifications, les équations obtenues sont données sans dimension. Donc, la fonction donnant l'allure du taux de restitution d'énergie est déduite à partir de l'équation suivante : J / J_0

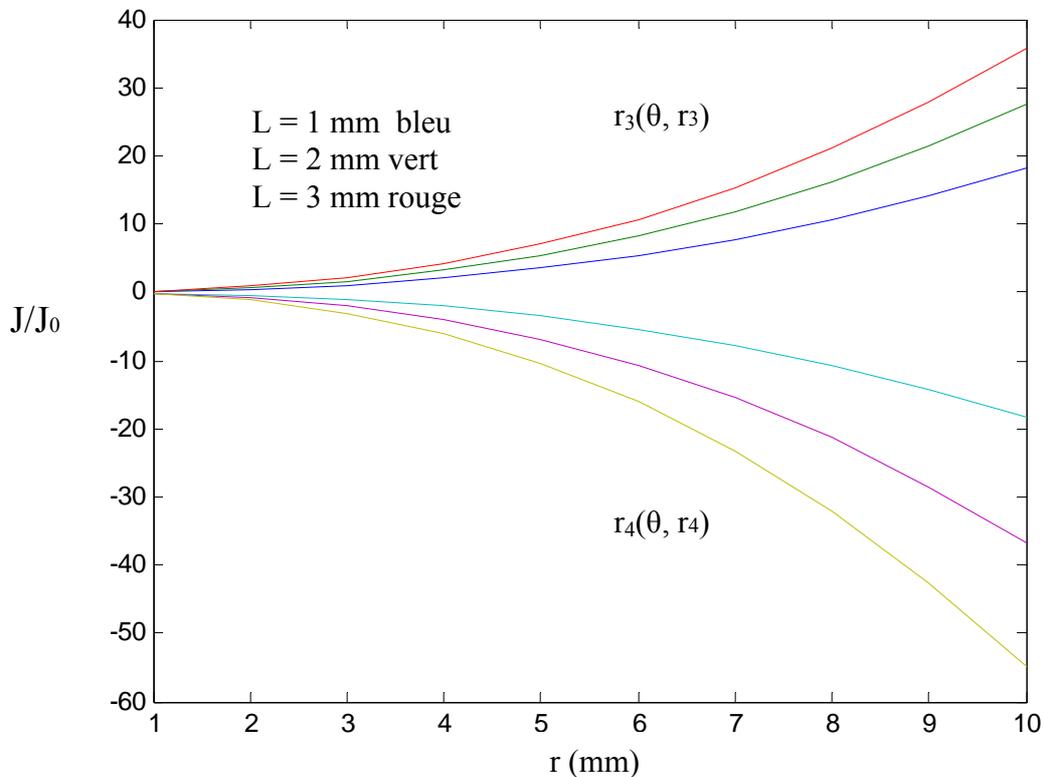


Figure 33 : Variation du taux de restitution d'énergie J/J_0 fonction de la position des microfissures prolongées définies par les contours $r_3(\theta, r_3)$ et $r_4(\theta, r_4)$.

3) Résultats et Discussions :

La Figure 33 montre la variation du taux de restitution d'énergie dû à la translation de la zone d'endommagement en fonction de la position des microfissures par rapport à la fissure principale en considérant les contours d'intégration définies par les équations différentielles. On remarque comme pour le F.I.C. que pour chaque longueur de la fissure et pour un contour choisi tel r_3 , J/J_0 augmente d'une façon exponentielle et par conséquent accélère la propagation de la fissure et diminue de la vulnérabilité du matériau. On constate par ailleurs que pour un autre contour choisi tel r_4 , J/J_0 décroît aussi exponentiellement prouvant par la même une décélération de la propagation de la fissure et augmentant la résistance du matériau.

**Conclusion Générale
et
Recommandations**

1) Conclusion générale :

L'analyse de la distribution des microfissures prolongées au voisinage de la fissure principale dans le cas d'une plaque de polystyrène fissurée à une de ses extrémités et soumise à une contrainte en mode I a montré que ces microfissures suivent les directions parallèles à l'axe des contraintes principales minimales et leur orientation se fait le long des directions perpendiculaires à l'axe des contraintes principales maximales.

On remarque ainsi que l'effet global de ces contraintes est identifié comme étant un effet d'amplificateur au bout de la fissure principale d'où une accélération de la fissure initiée et surtout du changement dans la forme de la zone endommagée (translation, rotation, expansion et distorsion).

Au cours de la propagation de la fissure principale, la zone endommagée induit deux effets :

- Un effet d'amplification (augmentation de l'intensité de la contrainte provoquant la propagation de la fissure principale).
- Un effet de réduction ou effet d'écran (diminution de l'intensité de la contrainte entraînant un ralentissement de la propagation de la fissure).

En se propageant, la fissure initiale développe une zone sombre invisible à l'oeil nu. Cette dernière communément appelée « zone d'endommagement » ou « zone de processus de rupture » est à l'origine de deux effets : un effet d'écran (diminution) et un effet d'amplification de ces champs de contraintes au bout de la fissure.

Il a été constaté que la fissure principale se propage dès que l'effet d'amplification fait son apparition, en d'autres termes, l'effet amplificateur est prédominant par rapport à l'effet réducteur. Donc, cette augmentation de contraintes en sus de la contrainte déjà existante au niveau de la singularité accélérera la propagation de la fissure. Par contre, cet effet peut être réduit d'une façon drastique permettant ainsi à l'effet d'écran de prendre le relais et par conséquent réduira l'intensité de la contrainte au bout de la fissure d'où une retardation dans la propagation de la fissure.

2) Recommandations :

- il est important d'étudier d'autres paramètres comme les différents taux de restitution d'énergie dus à la rotation, l'expansion, la distorsion de la zone d'endommagement ainsi que les effets pouvant être générés lors des interactions entre la fissure initiale et la zone avoisinante et de voir l'influence de la répartition de ces dernières sur la propagation de la fissure initiale.
- un autre point important est de tenir en compte l'aspect tridimensionnel du problème. En effet, la rigidité de la formulation 2D ne permet pas d'obtenir des résultats comparables à ceux trouvés expérimentalement.
- Malgré le progrès de l'informatique (espace et temps d'exécution), le nombre de degrés de liberté nécessaires pour simuler un matériau tel le polystyrène multifissuré en 3D risque de rester encore inaccessible à moyen terme.
- La discrétisation au processus de localisation de la déformation et la réduction du nombre d'éléments finis utilisés pour contourner le problème de singularité. Ce dernier reste de nos jours irrésolu et ce malgré les solutions préconisées en utilisant des techniques mathématiques récentes telles les intégrales de frontières.

Bibliographie

References

- [1] H. M. Westergaard, “Bearing Pressures and Cracks”, *Journal of Applied Mechanics.*, Vol. 11, pp49, 1939.
- [2] A. Griffith, “The Phenomena of Rupture and Flow in Solids”, *Philosophical Trans Royal Soc*; London, series A. Vol. 221, 163 - 198, 1921.
- [3] C. E. Inglis, “Stress in Cracked Plate due to the Presence of Cracks and Sharp Corners”, *Transaction of Naval Architects*, 60, 213, London, 1913.
- [4] R. Labbens, Préface du Professeur G. R. Irwin, “ Introduction à la Mécanique de la Rupture ”, *Editions Pluralis*, 1980.
- [5] B. Barthélémy, “ Notions Pratiques de Mécanique de la Rupture ”, *Editions Eyrolles*, Paris 1980.
- [6] H.O Fuches and R.I Stephens, “Metal Fatigue in Engineering”, *Edition John Wiley & Sons*, New York U. S. A, 1980.
- [7] J. R. Rice, “A Path Independent Integral and the Approximate Analysis of Strain Concentration by Notches and Cracks”, *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 35, pp. 379 - 386, 1968.
- [8] H. D. Bui, “ Mécanique de la Rupture Fragile ”, *Edition Masson*, 1978.
- [9] R. A. Thin, “Engineering Materials and Their Applications”, *Second edition*, London, 1970.
- [10] H. D. Bui, “ Introduction à la Mécanique de Rupture. In Rupture Contrôle Sureté ”, édité par Masounave, Batias, Dickson, Conseil National de Recherches du Canada, Institut de Génie des Matériaux, p. 3 - 5, 1980.

- [11] J. Lemaitre et J. L. Chaboche, “Mécanique des Matériaux Solides”, *Edition Dunod*, Paris, 1985.
- [12] Jia Li and N. Recho, “Méthodes Asymptotiques en Mécanique de la Rupture”, *Edition Hermès*, 2002.
- [13] N. Recho, “Rupture par Fissuration des Structures”, *Traites des nouvelles Technologies Série Matériaux, Editions Hermès*, Septembre 1995.
- [14] J. A. Calgaro et R. Lacroix, “Maintenance et Réparation des Ponts”, *Presses de l’Ecole Nationale des Ponts et Chaussées*, 1997.
- [15] C. Bathias and J. P. Bailon, “La Fatigue des Matériaux et des Structures”, 2^{ème} édition, *Edition Hermès*, 1997.
- [16] A. Chudnovsky and S. Wu, “Elastic Interaction of a Crack with a Random Array of Microcracks”, *International Journal of Fracture Mechanics*, Vol. 49, pp. 123 - 140, 1991.
- [17] K. L. Lam and C. Wen, “Interaction Between Microcracks and a Main Crack in a Semi – Infinite Medium”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44 N° 5, pp. 753 - 761, 1993
- [18] M. Amestoy and K. Dangvan, “Propagation de Fissures de Fatigue dans les Situations Tridimensionnelles”, *Rapports Internes, Ecole Polytechnique de Paris* 6, 1994.
- [19] R. Ballarini, A, “Semi-Empirical Analysis of Micro-Cracking in Concrete”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 20, pp. 433 - 445, 1986.
- [20] B. A. Biby and J. D. Esleby, “Dislocations and the Theory of Fracture”, *Fracture*, edited by H. Liebowitz, Vol. 1, pp. 21 - 22, 1992.

- [21] C. H. Wu, "A Semi Infinity Crack Partially Penetrating Inclusion", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 55, pp. 736 - 738, 1986.
- [22] G. R. Miller, "The Behaviour of Crack near a Low- Angle Grain Boundary", *International Journal of Fracture*, Vol. 31, pp. 143 - 150, 1986.
- [23] L. R. F. Rose, "Recent Theoretical and Experimental Results on Fast Brittle Fracture", *International Journal of Fracture*, Vol. 33, pp. 799 - 813, 1986.
- [24] A. A. Rubinstein, "Macrocrack-Microdefect Interaction", *Journal Applied Mechanics*, Vol. 53, pp. 505 - 510, 1983.
- [25] J. W. Hutchinson, "Crack-Tip Shielding by Micro-cracking in Brittle Solids", *Acta Metallica*, Vol. 35, pp.1605 - 1619, 1987.
- [26] C. C. Wu; R. W. Rice and P. F. Becker, "In Fracture Mechanics Methods for Ceramics", *Rocks and Concrete*, ASTM, STP 745, Philadelphia, pp. 127 - 140, 1981.
- [27] A. Chudnovsky and M. Kachanov, "Interaction of a Crack with a Field of Microcracks", *International Journal of Engineering Sciences*, Vol. 21, pp.1009 - 1018, 1983.
- [28] H. Hadjab, "Interaction Fissure-Microfissure par les Potentiels", *Thèse de Magistère*, IGC/USTHB, 1995.
- [29] A. H. Cortrell, "Dislocations and plastic Flow in Crystals", *Oxford University Press*, pp 89 - 98, 1953.
- [30] K. K. Lo, "Analysis of Branched Cracks", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 45, pp. 797 - 802, 1987.

- [31] M. Chabaat, “Crack Damage Interactions in a Brittle Material”, *International Symposia in Mechanics*, Dublin, 1996.
- [32] M. Chabaat et S. Djouder, “Interaction entre Fissure et Microfissure par une Approche Semi-Empirique”, *2^{ème} Congrès de Mécanique*, Faculté des Sciences Ain Chok, Casablanca, Société Marocaine des Sciences Mécanique, Avril 1995.
- [33] M. Chabaat and H. Seddiki, “Stress analysis during crack-crazing patterns interactions: A mathematical approach”, *International Journal of Key Engineering Materials*, Vol. 345 – 346, pp. 1617 – 1620, 2007.
- [34] N. I. Mushkelishvili, *Some Basic Problems of Mathematical Theory of Elasticity*, Noordhoff, Holland, 1975.
- [35] G. P. Cherepanov, “On Microcrack and Dislocations Initiation”, *Prikladnaja Mehanika Kiev*, Vol. 23, part 12, pp. 67 - 81, 1993.
- [36] D. François, “Mécanique de la Rupture et lois de Comportement”, *Cahier du groupe Français de Rhéologie*, pp. 49, 1979.
- [37] L. L. Helms, “Introduction to Potential Theory”, *Edition Wiley Inter science* 1978.
- [38] R. G. Hoagland and J. D. Embury, “A Treatment of Inelastic Deformations around a Crack Tip due to Microcracking”, *Journal of American Ceramics Society*, Vol. 63, pp. 404 - 410, 1980.
- [39] K. L. Lam and C. Wen, “Interaction between Microcracks and a Main Crack in a Semi – Infinite Medium”, *Engineering Fracture Mechanics*, Vol. 44 N° 5, pp. 753 - 761, 1993.
- [40] J. Lemaitre, “Prévision de la Croissance des Fissures dans les Structures”, *Edition Maloine*, 1985.

- [41] M. Ortiz, "A Continuum Theory of Crack Shielding in Ceramics", *Journal of Applied Mechanics*, Vol. 54, pp. 54 - 58, 1987.
- [42] N. Tada, P.C. Paris and G.R. Irwin: "The Stress Analysis of Cracks Handbook", *Del Research Corporation*, Hellertown, PA, 1973.
- [43] J. P. Demailly, "Analyse numérique et équations différentielles", *Presses Universitaires de Grenoble*, 1996.
- [44] J. Botsis, Ph.D. *Dissertation*, C.W.R.U., Ohio (U.S.A.) 1984.
- [45] H. L Ewalds and R. J. H. Wanhill, "Fracture Mechanics", *Edition Arnold*, Australia, 1985.
- [46] D. Hull, "Effect of Crazes on the Propagation of Cracks in Polystyrene", *Journal of Materials Science* 5 (1970) 357 - 363
- [47] C. Kittel, "Physique de l'Etat Solide", *Edition Dunod Université*, 1991.
- [48] A. E. Green and I. N. Sneddon, "The Distribution of Stress in the Neighbour Hood of a Crack in an Elastic Solid", *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, pp.159, 1950.
- [49] L. M. Kachanov, "Introduction to Continuum Damage Mechanics", *Edition Brookline*, Ma 02146, 1986, USA.

ANNEXES

ANNEXE A

Détermination des champs de contraintes principales

Les champs des contraintes élastiques sont donnés par [42] dans le système de coordonnées polaires comme suit :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{rr} \\ \sigma_{\theta\theta} \\ \sigma_{r\theta} \end{Bmatrix} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \begin{Bmatrix} \varphi_{rr}(\theta) \\ \varphi_{\theta\theta}(\theta) \\ \varphi_{r\theta}(\theta) \end{Bmatrix} + \sigma'_{\infty} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \cos \theta/2 (1 + \sin(\theta/2))^2 + \sigma_{rr}'_{\infty} \\ \sigma_{\theta\theta} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \cos(\theta/2)^3 + \sigma_{\theta\theta}'_{\infty} \\ \sigma_{r\theta} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + \sigma_{r\theta}'_{\infty} \end{cases} \quad (2)$$

Le premier term de l'équation (1) exprime la solution asymptotique des champs de contraintes près de la singularité. Le terme additionnel correspond aux contraintes matérielles homogènes. Ces dernières sont définies sous la forme matricielle suivante;

$$\begin{pmatrix} \sigma_{rr}'_{\infty} & \sigma_{r\theta}'_{\infty} \\ \sigma_{r\theta}'_{\infty} & \sigma_{\theta\theta}'_{\infty} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{\infty} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \quad (3)$$

ainsi;

$$\begin{cases} \sigma_{rr}'_{\infty} = (\sin \theta)^2 \sigma_{\infty} \\ \sigma_{\theta\theta}'_{\infty} = (\cos \theta)^2 \sigma_{\infty} \\ \sigma_{r\theta}'_{\infty} = 1/2 \sin 2\theta \sigma_{\infty} \end{cases} \quad (4)$$

En introduisant l'équation (3) dans l'équation (2); on obtient la forme générale des champs de contraintes dans un corps élastique sous la forme suivante;

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \cos \theta/2(1 + (\sin \theta/2)^2) + (\sin \theta)^2 \sigma_\infty \\ \sigma_{\theta\theta} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \cos (\theta/2)^3 + (\cos \theta)^2 \sigma_\infty \\ \sigma_{r\theta} = K_I/(2\pi r)^{1/2} \sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + (1/2) \sin 2\theta \sigma_\infty \end{cases} \quad (5)$$

où, $K_I = 1,12(\pi L)^{1/2} \sigma_\infty$ est le facteur d'intensité de contraintes effective au bout d'une fissure de bord pour le mode I.

Par conséquent, les équations précédentes prennent la forme suivante :

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = 1,12/\sqrt{2} (L/r)^{1/2} (\cos \theta/2 (1 + (\sin \theta/2)^2) + \sqrt{2}/1,12 (\sin \theta)^2 (r/L)^{1/2}) \sigma_\infty \\ \sigma_{\theta\theta} = 1,12/\sqrt{2} (L/r)^{1/2} (\cos (\theta/2)^3 + \sqrt{2}/1,12 (\cos \theta)^2 (r/L)^{1/2}) \sigma_\infty \\ \sigma_{r\theta} = 1,12/\sqrt{2} (L/r)^{1/2} (\sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + \sqrt{2}/1,12 (\sin 2\theta)/2 (r/L)^{1/2}) \sigma_\infty \end{cases} \quad (6)$$

En posant $A = 1,12/\sqrt{2} \approx 0,8$, on obtient;

$$\begin{cases} \sigma_{rr} = A(L/r)^{1/2} \sigma_\infty (\cos \theta/2 (1 + (\sin \theta/2)^2) + 1/A (r/L)^{1/2} (\sin \theta)^2) \\ \sigma_{\theta\theta} = A(L/r)^{1/2} \sigma_\infty (\cos (\theta/2)^3 + 1/A (r/L)^{1/2} (\cos \theta)^2) \\ \sigma_{r\theta} = A(L/r)^{1/2} \sigma_\infty (\sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + (1/2A) (r/L)^{1/2} (\sin 2\theta)) \end{cases} \quad (7)$$

Les contraintes principales sont telles suit :

$$\sigma_{1,2} = (\sigma_{rr} + \sigma_{\theta\theta})/2 \pm (((\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta})/2)^2 + (\sigma_{r\theta})^2)^{1/2} \quad (8)$$

ainsi, la substitution des Eqs. (7) dans l'Eq. (8), on obtient ;

$$\begin{aligned} \sigma_{1,2} = A (L/r)^{1/2} \sigma_\infty [(\cos \theta/2 + (1/2A) (r/L)^{1/2}) \pm ((\sin \theta)^2/4 + 1/(2A) \sin \theta \sin (3/2)\theta (r/L)^{1/2} \\ + 1/(2A)^2 (r/L)^{1/2}] \end{aligned} \quad (9)$$

La fonction de Tresca ou la fonction des contraintes de cisaillement maximum relativement à l'effort appliqué est donnée comme suit

$$\sigma_{12} = (\sigma_1 - \sigma_2)/2 \quad (10)$$

La substitution des Eqs. (7) dans l'Eq. (10) donne la fonction suivante :

$$\begin{aligned} \sigma_{12} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} & \left((\sin \theta)^2/4 + 1/(2A) \sin \theta \sin (3/2)\theta (r/L)^{1/2} \right. \\ & \left. + 1/(2A)^2 (r/L)^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (11)$$

ANNEXE B

Equations différentielles des champs de contraintes

1) Equation différentielle des champs des contraintes maximales en coordonnées polaires:

En utilisant les transformations géométriques suivantes, on a:

$$\tan 2\beta = 2 \tan \beta / (1 - (\tan \beta)^2) \quad (1)$$

En posant : $\dot{Y} = \tan \beta$ (2)

$$\tan 2\beta = 2\dot{Y} / (1 - (\dot{Y})^2) \quad (3)$$

$$\dot{Y}^2 + (2 / \tan 2\beta) \dot{Y} - 1 = 0 \quad (4)$$

En utilisant, les coordonnées polaires, on obtient ;

$$X = r \cos \theta \quad (5)$$

$$Y = r \sin \theta \quad (6)$$

$$dy/dx = \partial y / \partial r (dr/dx) + \partial y / \partial \theta (d\theta/dx) \quad (7)$$

$$d\theta/dx = 1/(dx/d\theta) = 1/(d(r \cos \theta) / d\theta) = 1 / (r' \cos \theta - r \sin \theta) \quad (8)$$

$$dr/dx = (r' / (r' \cos \theta - r \sin \theta)) \quad (9)$$

d'où :

$$dy/dx = (r' \sin \theta + r \cos \theta) / (r' \cos \theta - r \sin \theta) \quad (10)$$

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\sin 2\theta + (\cos 2\theta / \tan 2\beta)) / (-\cos 2\theta + (\sin 2\theta / \tan 2\beta)) = 0 \quad (11)$$

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\sin 2\theta \tan 2\beta + \cos 2\theta) / (-\cos 2\theta \tan 2\beta + \sin 2\theta) = 0 \quad (12)$$

La direction des contraintes principales est donnée par :

$$\tan 2\beta = 2\sigma_{r\theta} / (\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}) \quad (13)$$

et en substituant les équations définissant les contraintes $\sigma_{r\theta}$, σ_{rr} et $\sigma_{\theta\theta}$ dans l'équation (13) ; on obtient ce qui suit ;

$$\tan 2\beta = 2A (L/r)^{1/2} \sigma_{\infty}(\sin \theta/2 (\cos \theta/2)^2 + 1/(2A) (r/L)^{1/2} \sin 2\theta) / (A (L/r)^{1/2} \sigma_{\infty}(\cos \theta/2 (1 + (\sin \theta/2)^2 - (\cos \theta/2)^2) + 1/A (r/L)^{1/2} ((\sin \theta)^2 - (\cos \theta)^2)) \quad (14)$$

et après simplification, cette dernière prend la forme suivante;

$$\tan 2\beta = (A \sin \theta \cos \theta/2 + (r/L)^{1/2} \sin 2\theta) / (A \sin \theta \sin \theta/2 - (r/L)^{1/2} \cos 2\theta) \quad (15)$$

pour $L=1$; on obtient ;

$$\tan 2\beta = (A \sin \theta \cos \theta/2 + \sqrt{r} \sin 2\theta) / (A \sin \theta \sin \theta/2 - \sqrt{r} \cos 2\theta) \quad (16)$$

En substituant l'équation (16) dans l'équation différentielle (11), on obtient ce qui suit;

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\sin 2\theta (A \sin \theta \cos \theta/2 + \sqrt{r} \sin 2\theta) + \cos 2\theta (A \sin \theta \sin \theta/2 - \sqrt{r} \cos 2\theta)) / (-\cos 2\theta (A \sin \theta \cos \theta/2 + \sqrt{r} \sin 2\theta) + \sin 2\theta (A \sin \theta \sin \theta/2 - \sqrt{r} \cos 2\theta)) = 0 \quad (17)$$

Et d'une façon simple, on écrit ;

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (A \sin \theta (\sin 2\theta \cos \theta/2 + \cos 2\theta \sin (\theta/2) + \sqrt{r} ((\sin 2\theta)^2 - (\cos 2\theta)^2)) / (A \sin \theta (\sin 2\theta \sin \theta/2 - \cos 2\theta \cos \theta/2) - \sqrt{r} (2\cos 2\theta \sin 2\theta)) = 0 \quad (18)$$

Finalement, l'équation différentielle prend la forme suivante:

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (A \sin \theta \sin (5/2)\theta - \sqrt{r} \cos 4\theta) / (-A \sin \theta \cos (5/2)\theta - \sqrt{r} \sin 4\theta) = 0 \quad (19)$$

en d'autres termes;

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\sqrt{r} \cos 4\theta - A \sin \theta \sin (5\theta/2)) / (\sqrt{r} \sin 4\theta + A \sin \theta \cos (5\theta/2)) = 0 \quad (20)$$

En posant :

$$\varphi(\theta, r) = (\sqrt{r} \cos 4\theta - A \sin \theta \sin 5\theta/2) / (\sqrt{r} \sin 4\theta + A \sin \theta \cos 5\theta/2) \quad (21)$$

l'équation (20) devient ;

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\varphi(\theta, r)) = 0 \quad (22)$$

Les racines de cette équation sont données telles suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_1 = -r_1 [\varphi(\theta, r_1) + (\varphi^2(\theta, r_1) + 1)^{1/2}] \\ r'_2 = -r_2 [\varphi(\theta, r_2) - (\varphi^2(\theta, r_2) + 1)^{1/2}] \end{array} \right. \quad (23)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_1 = -r_1 [\varphi(\theta, r_1) + (\varphi^2(\theta, r_1) + 1)^{1/2}] \\ r'_2 = -r_2 [\varphi(\theta, r_2) - (\varphi^2(\theta, r_2) + 1)^{1/2}] \end{array} \right. \quad (24)$$

et les conditions aux limites sont données sous la forme suivante ;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \text{ et } [r_1 = r_{01}, r_2 = r_{02}] \quad (25)$$

2) Equation différentielle des champs des contraintes minimales en coordonnées polaires:

En utilisant les transformations géométriques suivantes, on obtient ce qui suit :

$$\tan 2\beta' = 2 \tan \beta' / (1 - (\tan \beta')^2) \quad (26)$$

En posant :

$$\dot{Y} = \tan \beta' \quad (27)$$

on a ce qui suit:

$$\tan 2\beta' = 2\dot{Y} / (1 - (\dot{Y})^2) \quad (28)$$

$$\dot{Y}^2 + (2 / \tan 2\beta') \dot{Y} - 1 = 0 \quad (29)$$

En considérant les coordonnées polaires, les équations précédentes deviennent:

$$X = r \cos \theta \quad (30)$$

$$Y = r \sin \theta \quad (31)$$

$$dy/dx = \partial y / \partial r (dr/dx) + \partial y / \partial \theta (d\theta/dx) \quad (32)$$

$$d\theta/dx = 1 / (dx/d\theta) = 1 / (d(r \cos \theta) / d\theta) = 1 / (r' \cos \theta - r \sin \theta) \quad (33)$$

$$dr/dx = (r' / (r' \cos \theta - r \sin \theta)) \quad (34)$$

En d'autres termes, on obtient :

$$dy/dx = (r' \sin \theta + r \cos \theta) / (r' \cos \theta - r \sin \theta) \quad (35)$$

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\sin 2\theta + (\cos 2\theta / \tan 2\beta')) / (-\cos 2\theta + (\sin 2\theta / \tan 2\beta')) = 0 \quad (36)$$

$$r'^2 - r^2 + 2r r' (\sin 2\theta \tan 2\beta' + \cos 2\theta) / (-\cos 2\theta \tan 2\beta' + \sin 2\theta) = 0 \quad (37)$$

soit:

$$\tan 2\beta' = \tan 2(\pi/2 - \beta) = \tan (\pi - 2\beta) = -\tan 2\beta \quad (38)$$

et par conséquent ;

$$\tan 2\beta = (A \sin \theta \cos \theta / 2 + (r/L)^{1/2} \sin 2\theta) / (A \sin \theta \sin \theta/2 - (r/L)^{1/2} \cos 2\theta) \quad (39)$$

Dans le cas où $L=1$ alors $A \approx 0,8$; par conséquent, on obtient ;

$$\tan 2\beta = (A \sin \theta \cos \theta/2 + \sqrt{r} \sin 2\theta) / (A \sin \theta \sin \theta/2 - \sqrt{r} \cos 2\theta) \quad (40)$$

Finalement, l'équation différentielle précédente devient;

$$r'^2 - r^2 + 2r r'(-A \sin \theta (\sin 2\theta \cos \theta/2 - \cos 2\theta \sin (\theta/2)) - \sqrt{r} ((\sin 2\theta)^2 + (\cos 2\theta)^2) / (A \sin \theta (\sin 2\theta \sin \theta/2 + \cos 2\theta \cos \theta/2) + \sqrt{r} (\cos 2\theta \sin 2\theta - \cos 2\theta \sin 2\theta)) = 0 \quad (41)$$

Et par simplification, l'équation (41) s'écrit comme suit ;

$$r'^2 - r^2 + 2r r'(- (A \sin \theta \sin (3/2)\theta + \sqrt{r}) / (A \sin \theta \cos (3/2)\theta)) = 0 \quad (42)$$

Si on pose;

$$\psi (\theta, r) = -(A \sin \theta \sin (3/2)\theta + \sqrt{r}) / (A \sin \theta \cos (3/2)\theta) \quad (43)$$

alors l'équation différentielle (42) prend la forme suivante ;

$$r'^2 - r^2 + 2r r'(\psi (\theta, r)) = 0 \quad (44)$$

Les racines de cette équation sont définies telles suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} r'^3 = -r_3 [\psi(\theta, r_3) + (\psi^2(\theta, r_3) + 1)^{1/2}] \\ r'^4 = -r_4 [\psi(\theta, r_4) - (\psi^2(\theta, r_4) + 1)^{1/2}] \end{array} \right. \quad (45)$$

$$(46)$$

avec les conditions aux limites comme suit;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \text{ et } [r_3 = r_{03}, r_4 = r_{04}] \quad (47)$$

3) Equations différentielles des champs des contraintes tangentielles en coordonnées polaires:

On considère les équations (22) et (44) :

$$\begin{cases} r'^2 - r^2 + 2r r'(\varphi(\theta, r)) = 0 & (48) \\ r'^2 - r^2 + 2r r'(\psi(\theta, r)) = 0 & (49) \end{cases}$$

ayant pour fonctions;

$$\begin{cases} \varphi(\theta, r) = (\sqrt{r} \cos 4\theta - A \sin \theta \sin 5\theta/2) / (\sqrt{r} \sin 4\theta + A \sin \theta \cos 5\theta/2) & (50) \\ \psi(\theta, r) = -(A \sin \theta \sin (3/2)\theta + \sqrt{r}) / (A \sin \theta \cos (3/2)\theta) & (51) \end{cases}$$

Par conséquent, on définit l'équation différentielle des champs des contraintes de cisaillement maximum relativement à l'effort appliqué comme suit :

$$(\text{Eq. (49)} - \text{Eq. (50)}) / 2 = r r' (\varphi(\theta, r) - \psi(\theta, r)) = 0 \quad (52)$$

En d'autres termes, on obtient l'équation différentielle correspondante ;

$$r (dr/d\theta) (\varphi(\theta, r) - \psi(\theta, r)) = 0 \quad (53)$$

En posant;

$$f(\theta, r) = \varphi(\theta, r) - \psi(\theta, r) \quad (54)$$

l'équation différentielle précédente prend la forme simplificatrice suivante:

$$r (dr / d\theta) f(\theta, r) = 0 \quad (55)$$

dont les conditions aux limites sont données telles suit;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \text{ et } [r = r_0] \quad (56)$$

ANNEXE C

Détermination du facteur d'intensité de contrainte

Le facteur d'intensité de contrainte est donné par Irwin [45] comme suit:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [\sigma_y (2\pi r)^{1/2}] \quad (1)$$

On sait que;

$$\sigma_{\theta\theta} = A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\cos(\theta/2))^3 + 1/A (r/L)^{1/2} (\cos \theta)^2 \quad (2)$$

par conséquent; on obtient:

$$K_I = \lim_{r \rightarrow 0} [(A(L/r)^{1/2} \sigma_{\infty} (\cos(\theta/2))^3 + 1/A (r/L)^{1/2} (\cos \theta)^2) (2\pi r)^{1/2}] \quad (3)$$

$$K_I = 1.12 \cdot (\pi \cdot L)^{1/2} \cdot \sigma_{\infty} \cdot \cos(\theta/2)^3 \quad (4)$$

$$K_0 = \sigma_{\infty} / (\pi \cdot L)^{1/2} \quad (5)$$

Pour des raisons de simplicité, les équations obtenues sont données sans dimension. Donc, la fonction donnant l'allure du facteur d'intensité de contraintes réel est déduite à partir de l'équation suivante :

$$K_I / K_0 = 0.12 \cdot (\pi \cdot L) \cdot \cos(\theta/2)^3 \quad (6)$$

ANNEXE D

Détermination des taux de restitution d'énergie

Le taux de restitution d'énergie est déterminé par un simple calcul de la surface délimitée par un contour donné et l'axe des abscisses x. En utilisant l'intégrale de Rice [7], on obtient ;

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r (r_3(\theta, r_3)) dr d\theta \quad (1)$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} \int_0^r (r_4(\theta, r_4)) dr d\theta \quad (2)$$

où $r_3(\theta_3, r_3)$ et $r_4(\theta_4, r_4)$ sont les solutions de l'équation différentielle de contraintes minimales exprimées en coordonnées polaires.

$$\left\{ \begin{array}{l} r'_3 = -r_3 [\psi(\theta, r_3) + (\psi^2(\theta, r_3) + 1)^{1/2}] \\ r'_4 = -r_4 [\psi(\theta, r_4) - (\psi^2(\theta, r_4) + 1)^{1/2}] \end{array} \right. \quad (3)$$

$$(4)$$

dont les conditions aux limites sont données comme suit;

$$\theta = \theta_0 = [-\pi, \pi] \text{ et } [r_3 = r_{03}, r_4 = r_{04}]$$

$$K_I = 1.12 \cdot (\pi \cdot L)^{1/2} \cdot \sigma_{\infty} \cdot \cos(\theta/2)^3 \quad (5)$$

$$J_0 = K_I^2 / E \quad (6)$$

Pour des raisons de simplifications, les équations obtenues sont données sans dimension. Donc, la fonction donnant l'allure du taux de restitution d'énergie est déduite à partir de l'équation suivante : J / J_0 (J_0 se réfère à l'énergie selon Griffith [2]).