N^0 d'ordre : 07/ 2019-D/ MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieure Et De La Recherche Scientifique

Université Des Sciences Et De La Technologie Houari Boumedienne

Faculté de Mathématiques

Thèse De Doctorat En Science

Presentée Pour L'obtention Du Grade De Docteur

En Mathématiques

Spécialité : Modélisations Mathématiques Et Numérique

Par

TSAMDA Hocine

Analyse mathématique de problèmes paraboliques non-linéaires issus de la biologie

Soutenu publiquement le 16/07/2019, devant le jury composé de :

M. M.S. Moulay	Professeur, U.S.T.H.B	Président
Mme. N. Aissa	Professeur, U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M. T. AliZiane	Professeur, U.S.T.H.B	Examinateur
M. A. Benaissa	Professeur, U.D.L.Sidi-Bel-Abbes	Examinateur
M. L. Rahmani	Professeur, U.M.M.Tizi ouzou	Examinateur
M. F. Mokhtari	Maitre de Conférence A, U.B.B.Alger 1	Examinateur

Remerciements

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements au Professeur M.S. Moulay de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ce mémoire. Je voudrais aussi sincèrement exprimer mes plus vifs remerciements à Professeure N.Aïssa pour les conseils efficaces, les encouragements ainsi que pour le temps qu'elle m'a consacré pour me poursuivre ce travail.

Je remercie vivement Monsieur T. AliZiane, Professeur à l'U.S.T.H.B et Monsieur F. Mokhtari, MCA à l'U.B.B.Alger 1 et Madame L. Rahmani, Professeur à l'U.M.M.Tizi ouzou et Monsieur A. Benaissa, Professeur à l'U.D.L.Sidi-Bel-Abbes d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury, qu'ils trouvent ici toute ma gratitude.

Mes derniers et profonds remerciements vont à mes chers parents, pour leur soutien, ainsi qu'au reste de la famille, sans oublier mes amis et toute l'équipe pédagogique qui a contribué, de près ou de loin à ma formation.

Résumé

L'objectif de ce travail est l'ètudie de l'existence globale de solution pour un problème parabolique semi-linéaire lié au phénomène chimiotaxie-haptotaxie.

Notre première contribution est consacrée à l'étude de l'existence locale des solutions de système de réaction-diffusion dans le cas chimiotaxie-haptotaxie, l'outil principal est le Théorèmes 2.1. de A. Yagi [26].

Nous nous intéressons ensuite à l'étude de l'existence globale en temps pour un système d'haptotaxie. Pour cela, nous utilisons des techniques appropriées qui sont basées sur les semi groupes, les injections de Sobolev et les estimations a priori.

Nous terminons le travail par l'étude de système chimiotaxie-haptotaxie en montrant que l'existence globale résulte par une technique usuelle basée sur la régularité maximale de Sobolev en supposant que la norme en L^1 de donnée initiale u_0 est suffisamment petite.

Mots clefs : Existence locale et globale, équation parabolique, systèmes de réaction diffusion,chimiotaxie-haptotaxie.

Abstract

The objective of this work is to study the global existence of solutions to a semi-linear parabolic problem system related to the chemotaxis-haptotaxis phenomenon.

Our first contribution is devoted to the study of the local existence of solutions of the reaction-diffusion systems in the case of chemotaxis-haptotaxis, the main tool is the Theorem 2.1. from A. Yagi cite 20.

We are then interested in the study of global existence in time for a haptotaxis system. For this, we use appropriate techniques that are based on semi-groups, Sobolev injections and prior estimates.

We finish the work by studying chemotaxis-haptotaxis system by showing that the global existence results from a usual technique based on the maximum regularity of Sobolev assuming that the norm in L^1 of initial data u_0 is sufficiently small.

Key words : Local and global existence, parabolic équations, diffusion reaction systems,chemotaxis-haptotaxis.

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes :

Ω : Ouvert de $\mathbb{R}^d$, $(d \geq 1)$.

$\partial\Omega$: Frontière de Ω.

$x = (x_1, x_2, ..., x_n)$: Un point de $\mathbb{R}^d$.

d_t : Dérivée par rapport à t.

$\partial_{x_i} = \partial/\partial x_i$: Dérivée partielle par rapport à x.

$\nabla = \left(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}, ..., \partial_{x_n}\right)$: Gradient par rapport à x.

$D^\alpha u = \dfrac{\partial^{\alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}.\partial x_2^{\alpha_2}...\partial x_n^{\alpha_n}}$.

$L^p(\Omega)$: Ensemble des fonctions de puissances $p^{ième}$ intégrable sur Ω.

$W^{s,p}(\Omega)$: Espace de Sobolev construit sur $L^p(\Omega)$ et s réel.

$H^s(\Omega) = W^{s,2}(\Omega)$.

$H^s_N(\Omega)$: $\{u \in H^s(\Omega) ; \partial_n u|_{\partial\Omega} = 0\}$, $\frac{3}{2} < s \leq 2$.

$\| \bullet \|$: La norme de X.

$\| \bullet \|_{L^p(\Omega)}$: désigne la norme des espace des espace $L^p(\Omega)\,(p \geq 1)$.

$\| \bullet \|_{H^s(\Omega)}$: désigne la norme des espace des espace $H^s(\Omega)$.

$d\sigma$: Mesure superficielle sur Γ.

$\overrightarrow{n}$: Le vecteur normal extérieure à $\partial\Omega$.

$\partial_n u$: Dérivée normale.

$|\Omega|$: la mesure de Lebesgue du Ω.

Introduction générale

L'objet de ce mémoire est l'étude de quelques équations paraboliques non linéaires issues de la biologie.

Le premier modèle est proposé par M.A.J chaplin et al [1], ce dernier se focalise sur la migration cellulaire due à l'haptotaxie ou encore à l'invasion-dégradation de la matrice extracellulaire par les cellules tumorales.

Le deuxième modèle diffère du précédent par l'ajout d'un terme supplémentaire de chimiotaxie qui ajoute une difficulté supplémentaire au problème. Ce modèle a été traité au [11], [22] et [23] en présence d'un terme de source logistique qui a l'avantage de faciliter l'étude de l'existence globale sans avoir recours à des hypothèses restrictives sur les données initiales.

Le phénomène biologique décrit la migration des cellules tumorales.

Le phénomène se déroule selon un schéma de plusieurs étapes. Chaque étape est décrite par un système d'équations de réaction-diffusion.

Décrivons brièvement le modèle d'invasion.

L'invasion du tissu sain par les cellules tumorales se déroulerait selon un schéma classique en quatre étapes : 1. détachement des cellules de la masse tumorale, 2. adhérence des cellules à la matrice extracellulaire (MEC), 3. dégradation de la MEC, 4. migration.

Le modèle est gouverné par deux facteurs : haptotaxie ; diffusion. Il est décrit par le modèle suivant [1]

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \overbrace{D\triangle u}^{diffusion} - \overbrace{\rho\nabla.\left(u\nabla w\right)}^{haptotaxie} \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = \overbrace{\alpha\triangle v}^{dispersion} - \overbrace{\beta v}^{mortalité} + \overbrace{\lambda u}^{production} \qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \dfrac{dw}{dt} = \overbrace{-\gamma vw}^{dégradation} \end{cases} \tag{1}$$

$u = u(t, x)$: densité de la cellule tumorale.

$v = v(t, x)$: concentration de matrice dégradative d'enzyme (MDE).

$w = w(t, x)$: concentration de matrice extracellulaire (ECM).

Les solution :$u; v; w$ dépendent des deux variables : x, et t, $t \geq 0, t$:le temps. $x \in \Omega$; Ω : domaine borné régulier de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$.

$D; \rho; \gamma; \lambda; \alpha; \beta$: sont des constantes positives. Ces paramètres sont caractérisés comme suit :

$D; \alpha$:les coefficients de diffusion, ρ : caractérise le coefficient d'haptotataxie.

λ : coefficient de dégradation de fibronectine w, β : le taux de mortalité.

γ : caractérise le taux de production par une cellule endothéliale individuelle de MDE v.

Le deuxième modèle concernant l'invasion tumorale a été introduit par Chaplain et Lolas.

Les cellules cancéreuses se disputent l'espace avec la MEC et aux échelles de temps considérées ; en outre, la cinétique des cellules de type logistique doit être prise en compte. Si, en outre, la capacité de l'ECM à se renouveler spontanément est incluse, le modèle Chaplain et Lolas [13] devient :

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} = \overbrace{D\triangle u}^{diffusion} - \overbrace{\chi\nabla.\left(u\nabla v\right)}^{chimiotaxie} - \overbrace{\rho\nabla.\left(u\nabla w\right)}^{haptotaxie} \\ \\ \dfrac{dv}{dt} = \overbrace{\alpha\triangle v}^{dispersion} - \overbrace{\beta v}^{mortalité} + \overbrace{\lambda u}^{production} \qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \dfrac{dw}{dt} = \overbrace{-\gamma vw}^{dégradation} \end{cases} \tag{2}$$

$u = u(t, x)$: densité de la cellule tumorale.

$v = v(t, x)$: concentration de matrice dégradative d'enzyme (MDE).

$w = w(t, x)$: concentration de matrice extracellulaire (ECM).

Les solution :$u; v; w$ dépend de deux variables : x et t.

t : représente le temps avec $t \geq 0$. $x \in \Omega$; Ω : domaine borné de $\mathbb{R}^2$.

$D; \rho; \chi; \alpha; \beta; \lambda; \gamma$: sont des constantes positives. Ces paramètres sont caractérisés comme suit :

$D; \alpha$:les coefficients de diffusion, β : le taux de mortalité, λ : coefficient de dégradation de fibronectine.

$\rho; \chi$: caractérise les coefficients de chimiotaxie et haptotataxie, respectivement.

γ : caractérise le taux de production par une cellule endothéliale individuelle de MDE v.

Nous allons maintenant présenter les différents chapitres de ce mémoire.

Dans le premier chapitre, nous donnons quelques rappels généraux.

On commence le deuxième chapitre par une synthèse des travaux de A. Yagi [26]. On termine ce chapitre par un bref survey des travaux qui ont été précédemment publies afin de situer notre travail par rapport a ces derniers.

Dans le troisième chapitre, nous traitons l'existence locale d'une solution faible pour (2).

L'outil principal est l'un des Théorèmes 4.1 de A. Yagi [26] qui est présenté au chapitre deux.

Le quatrième chapitre correspond à l'étude d'existence globale du premier modèle (1).

Dans ce dernier, nous montrons que la solution locale précédemment construite au troisième chapitre est en fait une solution globale pour $(\wp_{\mathbf{1}})$. Pour cela on transforme l'équation satisfaite par u en une autre équation par la substitution de terme u par $\frac{u}{\varphi}$ où $\varphi = e^{\frac{\rho}{D}w}$. La multiplication de nouvelle équation par le terme $\frac{u}{\varphi}$ et les injections de Sobolev assureront l'existence globale.

Nous étudions dans le cinquième chapitre l'existence globale pour (2). En utilisant la régularité maximale de Sobolev [18] avec les injections et nous concluons que l'existence globale résulte en supposant l'hypothèse $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ suffisamment petite.

Chapitre 1

Rappels généraux

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout au long de ce travail, en premier lieu, nous rappelons quelques définitions et les inégalités sur les espaces de Sobolev ainsi que les espaces $L^p(0,T;X)$. De plus, on trouvera dans ce chapitre un certain nombre d'outils d'analyse tels que le théorème de point fixe de Schauder, l'inégalité de Gronwall et autres inégalités qui seront utilisées dans la suite. On terminera ce chapitre par un rappel sur les notions des opérateurs sectoriels qui sont d'une grande importance dans notre travail.

1.1 Définition d'espace de Sobolev

Soit Ω : un ouvert borné quelconque de $\mathbb{R}^d$ et $p \in [1,\infty]$.

Définition 1.1. *On définit l'espaces de Sobolev d'ordre m $(m \in \mathbb{N})$ que l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u,\ u \in L^p(\Omega),\ D^\alpha u \in L^p(\Omega),\quad |\alpha| \leq m\}.$$

On le munit de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{1/p},\ 1 \leq p < \infty\ ,$$

$$\|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^\infty(\Omega)}\ ;$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

Remarque 1.1. *On posera*

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega),$$

$H^m(\Omega)$ *est un espace de Hilbert muni du produit scalaire :*

$$(u,v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha|\leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)}.$$

1.1.1 Les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire

On commence d'introduire les espaces $H^s(\mathbb{R}^d)$.

Définition 1.2. *l'espace de Sobolev* $H^s(\mathbb{R}^d)$ *peut être défini grâce à la transformée de Fourier pour* $s \geq 0$ *:*

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \left\{ u \in L^2(\mathbb{R}^d), \int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi < \infty \right\},$$

est un espace de Hilbert muni de la norme :

$$\left(\int_{\mathbb{R}^d} \left(1+|\xi|^2\right)^s \left|\hat{u}(\xi)\right|^2 d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

On peut alors caractériser les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire $H^s(\Omega)$ *grâce au produit scalaire donné par :*

$$(u,v)_{H^s(\Omega)} = (u,v)_{H^k(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=k} \int_\Omega \int_\Omega \frac{(D^\alpha u(x) - D^\alpha u(y))(D^\alpha v(x) - D^\alpha v(y))}{|x-y|^{d+2\theta}} dxdy,$$

où $s = k+\theta$, k *est un entier avec* θ *tel que* $0<\theta<1$ *et* d *est la dimension du domaine* $\Omega \subset \mathbb{R}^d$*.La norme induite est essentiellement l'analogue pour* L^2 *de la continuité au sens de Holder.*

On passera maintenant d'introduire les espaces $W^{s,p}(\Omega)$

Définition 1.3. *Soit* Ω *un domaine ouvert de* $\mathbb{R}^n$*. Pour tout réel* $s>0$ *et pour tout* $p \in [1,\infty)$*, nous voulons définir les espaces de Sobolev fractionnaires* $W^{s,p}(\Omega)$*. Les espaces fractionnaires de type Sobolev sont également appelés espaces Aronszajn, Gagliardo ou Slobodeckij, du nom de ceux qui les ont introduits, presque simultanément.*

Nous commençons par fixer l'exposant fractionnaire s *dans* $(0,1)$*. Pour tout* $p \in [1,\infty)$*, nous définissons* $W^{s,p}(\Omega)$ *comme suit*

$$W^{s,p}(\Omega) := \left\{ u \in L^p(\Omega) : \frac{|u(x) - u(y)|}{|x-y|^{\frac{n}{p}+s}} \in L^p(\Omega \times \Omega) \right\};$$

c'est-à-dire un espace de Banach intermédiaire entre $L^p(\Omega)$ *et* $W^{1,p}(\Omega)$*, muni de la norme naturelle*

$$\|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} := \left(\int_\Omega |u|^p \, dx + \int_\Omega \int_\Omega \frac{|u(x) - u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} dxdy \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Remarque 1.2. *Une troisième approche pour définir les espaces de Sobolev d'ordre fractionnaire consiste à utiliser la méthode d'interpolation complexe qu'on verra plus tard dans la section d'interpolation des espaces de Sobolev.*

Théorème 1.1. *(Inégalité de Poincaré)*

On suppose que Ω *est un ouvert borné dans une direction. Alors il existe une constante* C *(dépendante de* Ω, p*) tel que*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p < \infty). \tag{1.1}$$

Théorème 1.2. *(Inégalité de Poincaré-Wirtinger)*

Ω *est un ouvert connexe de classe* C^1 *ou à frontière Lipschitzienne.*

Alors il existe une constante C *(dépendante de* Ω, p*) tel que*

$$\|u - \overline{u}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W^{1,p}(\Omega) \quad (1 \leq p \leq \infty), \tag{1.2}$$

où $\overline{u} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega u dx$ *est la valeure moyenne de* u *sur* Ω*.*

Remarque 1.3. *On peut montrer que si* Ω *est assez régulier, avec* $\partial\Omega$ *borné, alors la norme de* $W^{m,p}(\Omega)$ *est équivalente à la norme*

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|\alpha|=m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

Plus précisément, on montre que pour tout multi-indice α *avec* $0 < |\alpha| < m$ *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe une constante* C_Ω*(dépendant de* $\Omega, \varepsilon, \alpha$*) tel que*

$$\|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)} \leq \varepsilon \sum_{|\beta|=m} \left\|D^\beta u\right\|_{L^p(\Omega)} + C_\Omega \|u\|_{L^p(\Omega)}, \ \forall u \in W^{m,p}(\Omega). \tag{1.3}$$

Démonstration. Voir Adams. □

Théorème 1.3. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d\,(d \leq 3)$ à frontière $\partial\Omega$ régulière.*

Alors, pour tout $u \in H^2(\Omega)$, il existe une constante c_Ω, telle que

$$\|e^u\|_{H^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + \|u\|_{H^2(\Omega)}\right)^2. \tag{1.4}$$

Démonstration. On a la formule

$$\triangle(e^u) = e^u\left(|\nabla u|^2 + \triangle u\right),$$

alors

$$\begin{aligned}
\|e^u\|_{H^2(\Omega)} &\leq c_\Omega \|e^u\|_{L^2(\Omega)} + 2\|\nabla u e^u\|_{L^2(\Omega)} + \left\|\left((\nabla u)^2 + \triangle u\right) e^u\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_\Omega \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + \|\nabla u\|^2_{L^4(\Omega)} + 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

de (1.5), pour $d \leq 3$ $H^1(\Omega) \subset L^4(\Omega)$, avec l'inégalité de Cauchy

$$\begin{aligned}
\|e^u\|_{H^2(\Omega)} &\leq c_\Omega \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + c_\Omega \|\nabla u\|^2_{H^1(\Omega)} + 2\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \|\triangle u\|_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq c_\Omega \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + \|\nabla u\|^2_{H^1(\Omega)} + \frac{2^2}{4} + \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 1 + \|\triangle u\|^2_{L^2(\Omega)}\right),
\end{aligned}$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}
\|e^u\|_{H^2(\Omega)} &\leq c_\Omega \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + \|\nabla u\|^2_{H^1(\Omega)} + \|\triangle u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) \\
&\leq c_\Omega \|e^u\|_{L^\infty(\Omega)} \left(1 + \|u\|_{H^2(\Omega)}\right)^2.
\end{aligned}$$

□

1.2 Injections de Sobolev

Théorème 1.4. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière $\partial\Omega$ régulière ou $\Omega = \mathbb{R}, \mathbb{R}_+$; soient $1 < p < \infty$ et $0 \leq s < \infty$. Alors*

*(**1**) si* $\quad \dfrac{1}{p} - \dfrac{s}{d} > 0, \quad$ *alors* $\quad W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ *où* $\dfrac{1}{q} = \dfrac{1}{p} - \dfrac{s}{d}$. (1.5)

(2) si $\quad \dfrac{1}{p} - \dfrac{s}{d} = 0, \quad$ *alors* $\quad W^{s,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)\ \ \forall q \in [p, +\infty[$. (1.6)

$$\textit{(3) si} \quad \frac{1}{p} - \frac{s}{d} < 0, \quad \textit{alors} \quad W^{s,p}(\Omega) \subset L^{\infty}(\Omega) \quad . \tag{1.7}$$

Dans le cas (3) : $W^{s,p}(\Omega)$ *est une algèbre de Banach*

(i.e) : il existe une constante c_Ω *(dépendante de* Ω*) telle que*

$$\|uv\|_{W^{s,p}(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|_{W^{s,p}(\Omega)} \|v\|_{W^{s,p}(\Omega)}, \forall u, v \in W^{s,p}(\Omega). \tag{1.8}$$

De plus si $sp > d$*, on a*

$$W^{s,p}(\Omega) \subset C\left(\overline{\Omega}\right).$$

On peut conclure pour $\left(s = 1, p = 2, \frac{d}{2} < \delta, d \leq 3\right)$

$$\|uv\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^\delta(\Omega)}, \forall u \in H^1(\Omega), \forall v \in H^\delta(\Omega). \tag{1.9}$$

Remarque 1.4. *Pour la preuve, il suffit remarquer en utilisant les inégalités* (1.5), (1.7), *avec* q *satisfaisant* $q = \frac{2d}{d-1+\delta}$:

$$\begin{aligned}
\|uv\|_{H^1(\Omega)} &\leq \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u\|_{L^{\frac{2q}{q-2}}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^q(\Omega)} + \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} \\
&\leq c_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \|v\|_{H^\delta(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Théorème 1.5. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^d$ *à frontière* $\partial\Omega$ *régulière ou* $\Omega = \mathbb{R}$, $\mathbb{R}_+$.

Soient p, q *tels que* $1 \leq q \leq p \leq \infty$. *Alors*

(1) si $1 \leq p < d$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega),$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{p,q,r,\Omega} \|u\|^a_{W^{1,p}(\Omega)} \|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)} \;, u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega). \tag{1.10}$$

$q \leq r \leq \frac{dp}{d-p}$, *le paramètre* a *est donné par*

$$\frac{1}{r} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{d}\right) + \frac{1-a}{q},$$

(2) si $p = d$, *alors*

$$W^{1,d}(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega),$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{p,q,r,\Omega} \|u\|^a_{W^{1,d}(\Omega)} \|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)}, \ u \in W^{1,n}(\Omega) \cap L^q(\Omega). \tag{1.11}$$

$q \leq r < \infty$, *le paramètre* a *donné par*

$$\frac{1}{r} = \frac{1-a}{q},$$

(3) si $d < p \leq \infty$, *alors*

$$W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega) \subset L^r(\Omega).$$

avec l'estimation

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq C_{p,q,r,\Omega} \|u\|^a_{W^{1,p}(\Omega)} \|u\|^{1-a}_{L^q(\Omega)}, \ u \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^q(\Omega). \tag{1.12}$$

$q \leq r \leq \infty$, *le paramètre* a *donné par*

$$\frac{1}{r} = a\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{d}\right) + \frac{1-a}{q},$$

Démonstration. Cf [26], [11]. □

Proposition 1.1. *Soit* Ω *un ouvert borné de* $\mathbb{R}^2$ *à frontière régulière.*

Il existe une constante c_Ω (dépendante de Ω) telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$:

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} + c^2_\Omega \|u\|^2_{L^1(\Omega)}, \tag{1.13}$$

et

$$\|u\|^3_{L^3(\Omega)} \leq c_\Omega \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} + c_\Omega \|u\|^3_{L^1(\Omega)}. \tag{1.14}$$

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ à frontière régulière. $\forall \epsilon > 0$. Il existe une constante $c_{\Omega,\epsilon}$ (dépendante de Ω, ϵ) telle que

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{\Omega,\epsilon} \|u\|^2_{L^1(\Omega)}, \tag{1.15}$$

et

$$\|u\|^2_{L^4(\Omega)} \leq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{\Omega,\epsilon} \|u\|^2_{L^1(\Omega)}. \tag{1.16}$$

Démonstration. $1^{\text{ère}}$étape (dimension deux) : En utilisant l'inégalité d'interpolation (1.11), pour $\left(r = p = 2, n = 2, a = \frac{1}{2}, q = 1\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} &\leq c_\Omega \|u\|_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq c_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} + c_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Cauchy pour le terme $c_\Omega \|u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)}$, on a

$$\left(\|u\|_{L^2(\Omega)}\right) . \left(c_\Omega \|u\|_{L^1(\Omega)}\right) \leq \frac{1}{2} \|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c^2_\Omega}{2} \|u\|^2_{L^1(\Omega)}, \tag{1.17}$$

on utilise (1.17) afin de trouver (1.13).

On applique ensuite l'inégalité de Cauchy pour le terme $2c_\Omega \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)}$,

$$\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}\right) . \left(2c_\Omega \|u\|_{L^1(\Omega)}\right) \leq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c^2_\Omega}{\epsilon} \|u\|^2_{L^1(\Omega)}, \ \epsilon > 0, \tag{1.18}$$

de (1.13), (1.18) on a, $\forall \epsilon > 0$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \epsilon \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \left(1 + \frac{1}{\epsilon}\right) c^2_\Omega \|u\|^2_{L^1(\Omega)}.$$

Pour montrer la dernière inégalité (1.16), en utilisant l'inégalité d'interpolation (1.11), pour $\left(r = 4, p = d = 2, a = \frac{9}{10}, q = 1\right)$, on trouve

$$\|u\|^2_{L^4(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|^{\frac{9}{5}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{5}}_{L^1(\Omega)},$$

on applique Inégalité de Young$\left(p = \frac{10}{9}, q = 10\right)$ pour le terme $c_\Omega \|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)}$, alors pour $0 < \epsilon$

$$c_\Omega \|u\|^{\frac{9}{5}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{5}}_{L^1(\Omega)} \leq \epsilon \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + c_{\Omega,\epsilon} \|u\|^2_{L^1(\Omega)} \tag{1.19}$$

grâce à (1.15), on a

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2c^2_\Omega \|u\|^2_{L^1(\Omega)}. \tag{1.20}$$

de les inégalités (1.19), (1.20), on a

$$\|u\|^2_{L^4(\Omega)} \leq \epsilon \left\|\nabla u\right\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{\Omega,\epsilon} \left\|u\right\|^2_{L^1(\Omega)}.$$

On utilise l'inégalité de Sobolev (1.11), avec $\left(r = 3, p = n = 2, a = \frac{1}{3}, q = 1\right)$, on trouve

$$\begin{aligned}\|u\|^3_{L^3(\Omega)} &\leq c_\Omega \|u\|^2_{H^1(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} \\ &\leq c_\Omega \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)} + c_\Omega \|u\|^2_{L^2(\Omega)} \|u\|_{L^1(\Omega)},\end{aligned}$$

compte tenu de (1.20) , on a (1.14) .

$2^{\text{ème}}$étape (dimension trois) : En utilisant l'inégalité de Sobolev (1.11) , avec $r = p = 2, n = 3, a = \frac{9}{10}, q = 1$, on trouve

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|^{\frac{9}{5}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{5}}_{L^1(\Omega)},$$

pour montrer l'inégalité (1.15) , on applique l'inégalité de Cauchy, on a l'existence de $0 < c_\Omega$, $\forall \epsilon > 0$

$$\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \frac{\epsilon}{4}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c^2_\Omega}{\epsilon}\|u\|^2_{L^1(\Omega)} + \frac{1}{2}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \frac{c_\Omega}{2}\|u\|^2_{L^1(\Omega)}.$$

Pour la dernière inégalité (1.16) , en utilisant l'inégalité de Sobolev (1.11) , avec remplacement $\left(r = 4, p = 2, d = 3, a = \frac{3}{4}, q = 1\right)$, on trouve

$$\|u\|^2_{L^4(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)},$$

on applique Inégalité de Young$\left(p = \frac{4}{3}, q = 4\right)$ pour le terme $c_\Omega \|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)}$, alors pour $0 < \epsilon$

$$\begin{aligned} c_\Omega \|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1(\Omega)} \|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)} &= \left(\frac{\epsilon^{\frac{3}{4}} 2^{\frac{3}{4}}}{3^{\frac{3}{4}}}\|u\|^{\frac{3}{2}}_{H^1(\Omega)}\right) \cdot \left(\frac{3^{\frac{3}{4}} c_\Omega}{2^{\frac{3}{4}} \epsilon^{\frac{3}{4}}}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^1(\Omega)}\right) \\ &\leq \frac{\epsilon}{2}\left(\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \|u\|^2_{L^2(\Omega)}\right) + \frac{27 c^4_\Omega}{8\epsilon^3}\|u\|^2_{L^1(\Omega)}, \end{aligned} \tag{1.21}$$

due(1.15) , on a $\|u\|^2_{L^2(\Omega)} \leq \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2c^2_\Omega \|u\|^2_{L^1(\Omega)}$, avec l'inégalité (1.21), d'où le résultat. □

1.3 Lemmes techniques

1.3.1 Inégalité différentielle

1.3.1.1 Inégalité différentielle classique

Soient $a(t)$, $f(t)$ deux fonctions continues sur $[0, T]$, et soit $u(t)$ une fonction positive dérivable sur $[0, T]$ satisfaisant l'équation différentielle suivante :

$$u'(t) + a(t)u(t) \leq f(t),$$

alors

$$u(t) \leq e^{-\int_0^t a(\tau)d\tau}\left[u(0) + \int_0^t e^{\int_0^s a(\tau)d\tau} f(s)\, ds\right] \quad \text{pour } t \in [0, T]. \tag{1.22}$$

Démonstration. Cf [11]. □

1.3.1.2 Inégalité de Gronwall

Proposition 1.2. *i) Soit $\eta(t)$ fonction continue positive sur $[0,T]$. Si*

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\,\eta(t) + \psi(t) \quad \textit{où} \;\; \phi(t) \;\; \textit{et} \;\; \psi(t) \;\; \textit{positives,}$$

où les deux fonctions $\phi(t), \psi(t)$ sont sommables sur $[0,T]$, alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds} \left[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)\,ds \right] \quad \textit{pour } t \in [0,T]. \tag{1.23}$$

ii) En particulier, si

$$\eta' \leq \phi.\eta \;\; \textit{dans} \;\; [0,T] \;\; \textit{et} \; \eta(0) = 0,$$

donc

$$\eta \equiv 0.$$

iii) Dans les même conditions sur $[0,T]$, si

$$\eta(t) \leq K + L \int_0^t \phi(t)\,\eta(t),$$

où K et L sont des constantes positives, et $\phi(t)$ fonction positive, alors

$$\eta(t) \leq K e^{L \int_0^t \phi(s)ds} \quad \textit{pour } t \in [0,T]. \tag{1.24}$$

Démonstration. Cf [11]. □

1.3.2 Inégalités incontournables.

1.3.2.1 Inégalité de Cauchy

Soient $a, b > 0, \varepsilon > 0$, alors

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}. \tag{1.25}$$

1.3.2.2 Inégalité de Young

Soient $1 < p, q < \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \tag{1.26}$$

on peut écrire aussi pour $a, b > 0, \varepsilon > 0$

$$ab \leq \varepsilon a^p + \frac{p^{\frac{q}{p}}}{\varepsilon^{\frac{q}{p}} q} b^q.$$

1.3.2.3 Inégalité de Hölder

Soient $1 \leq p, q \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ alors

$$\int_\Omega |uv| \, dx \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} \|v\|_{L^q(\Omega)} . \tag{1.27}$$

1.3.2.4 Inégalité de Hölder dans le cas général

Soient $1 \leq p_1, \ldots, p_n \leq \infty$ tels que $\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \cdots + \frac{1}{p_n} = 1$ et $u_k \in L^{p_k}(\Omega)$.

$$\int_\Omega |u_1 \ldots u_n| \, dx \leq \prod_{k=1}^{n} \|u_k\|_{L^{p_k}(\Omega)} . \tag{1.28}$$

1.3.2.5 Inégalité de Minkowski

Pour $p \geq 1$,

$$\|u + v\|_{L^p(\Omega)} \leq \|u\|_{L^p(\Omega)} + \|v\|_{L^p(\Omega)} . \tag{1.29}$$

1.3.2.6 Inégalité d'interpolation dans les espaces $\mathbf{L^p}$

Soient $1 \leq s \leq r \leq t \leq \infty$ tels que $\frac{1}{r} = \frac{\theta}{s} + \frac{(1-\theta)}{t}$ alors

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leq \|u\|^{\theta}_{L^s(\Omega)} \|u\|^{1-\theta}_{L^t(\Omega)} , \quad \forall u \in L^s(\Omega) \cap L^t(\Omega). \tag{1.30}$$

1.3.2.7 Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^d$ à frontière $\partial\Omega$ de classe C^1, alors

$$\int_\Omega \triangle u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} d\sigma \ ; \ \forall u \in H^2(\Omega), \tag{1.31}$$

$$\int_\Omega \nabla u.\nabla v dx = -\int_\Omega \triangle u v dx + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma \, ; \forall u \in H^2(\Omega) \text{ et } v \in H^1(\Omega), \tag{1.32}$$

$$\int_\Omega \triangle u v - \triangle v u dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v - \frac{\partial v}{\partial \nu} u d\sigma. \ \forall u \in H^2(\Omega)\, et v \in H^2(\Omega). \tag{1.33}$$

1.4 Espace des fonctions à valeurs vectorielles

Soit X un espace de Banach, on note par $C([0,T];X)$ l'espace des fonctions continues $u : [0,T] \longmapsto X$ muni de la norme

$$\|u\|_{C(0,T;X)} = \underset{0\leq t\leq T}{Max} \|u(t)\|_X .$$

$C([0,T];X)$ est un espace de Banach.

On définit $L^p(0,T;X)$ l'espace des fonctions $t \longrightarrow f(t)$ mesurables de $[0,T] \longrightarrow X$ (pour la mesure dt) de norme pour $1 \leq p < \infty$

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt\right)^{1/p} < \infty \ ,$$

si $p = \infty$

$$\|u(t)\|_{L^\infty(0,T;X)} = \underset{t\in[0,T]}{supess} \|u(t)\|_X .$$

Théorème 1.6. *Soit X un espace de Banach, on note par $C([a,b];X)$ l'espace des fonctions continues $f : [a,b] \longmapsto X$. Alors*

$$\left\| \int_a^b u(t)\, dt \right\|_X \leq \int_a^b \|u(t)\|_X \, dt. \tag{1.34}$$

Démonstration. Cf [26]. □

1.4.1 Semi-groupe

Définition 1.4. *Soit X un espace de Banach ; on dit que la famille d'opérateurs linéaires $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$ de générateur infinitésimal est un semi-groupe (fortement continu) si :*

1. $\forall t \geq 0,\ e^{tA} \in L(X)$,

2. $e^{0A} = Id_{\mathcal{L}(X)}$,

3. $\forall t, s \geq 0,\ e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}$,

4. $\forall x \in X,\ \lim\limits_{t\to 0} e^{tA}x = x$,

on ajoute que l'équation différentielle $x' = Ax + f(t),\ x(0) = x_0,$ *avec* $f \in L^1([0,T];X)$ *et* $x_0 \in X,$ *admet pour solution*

$$x(t) = e^{-tA}x_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A} f(s)\, ds,\ 0 \leq t \leq T. \tag{1.35}$$

Proposition 1.3. *Soit $\left(e^{tA}\right)_{t\geq 0}$le semi-groupe de chaleur dans Ω, et soit λ_1 désigne la première valeur propre non nulle de $A = -a\triangle + b$ $(a, b > 0)$ sur Ω sous conditions de Neumann homogène.*

Alors, pour $1 \leq q \leq p \leq \infty$, Alors il existe une constante $C_{\Omega,p,q}$(dépendant de Ω, p, q), pour tout $u \in L^q(\Omega)$,

$$\left\|e^{-tA}u\right\|_{L^p(\Omega)} \leq C_{\Omega,p,q}\left(1 + t^{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right) e^{-\lambda_1 t} \|u\|_{L^q(\Omega)},\ t > 0, \tag{1.36}$$

on a aussi pour $0 < \theta < \infty$, pour tout $u \in L^2(\Omega)$,

$$\left\|A^\theta e^{-tA}u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq C_{\Omega,\theta}\left(1 + t^{-\theta}\right) e^{-\frac{\lambda_1}{2}t} \|u\|_{L^2(\Omega)},\ t > 0. \tag{1.37}$$

Démonstration. On se réfère à [3], Proposition 12.5 page 252, pour $1 \leq q \leq p \leq \infty$,

$$\begin{aligned} \left\|e^{-tA}u\right\|_{L^p(\Omega)} &= \left\|e^{(a\triangle - b)t}u\right\|_{L^p(\Omega)} \\ &\leq \left\|e^{at\triangle}\right\|_{\mathcal{L}(L^q(\Omega),L^p(\Omega))} \|u\|_{L^q(\Omega)} \\ &\leq C_{\Omega,p,q}\left(1 + t^{\frac{d}{2}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)}\right) e^{-\lambda_1 t} \|u\|_{L^q(\Omega)},\ t > 0. \end{aligned}$$

On revient à [26], formule (2.128) page 102, avec la précédente, pour $0 < \theta < \infty$

$$\begin{aligned} &\left\|A^\theta e^{-tA}u\right\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \left\|A^\theta e^{-\frac{tA}{2}}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \left\|e^{-\frac{tA}{2}}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \|u\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & C_{\Omega,\theta}\left(1 + \left(\tfrac{t}{2}\right)^{-\theta}\right) e^{-\frac{\lambda_1}{2}t} \|u\|_{L^2(\Omega)},\ t > 0. \end{aligned}$$

□

1.4.2 Espace de Hölder pondéré

L'espace de Holder pondéré des fonctions réelles $F^{\delta,\sigma}((a,b];X)$ définie sur un espace normé X vérifie pour tout $F(t) \in F^{\delta,\sigma}((a,b];X)$, $0<\sigma<\delta\leq 1$, les trois conditions suivantes :

i) Pour $0<\delta<1$, le terme $t^{1-\delta}F(t)$ a une limite quand $t \to a$.

ii) Pour $0<\sigma<\delta\leq 1$, on a

$$\sup_{a\leq s<t\leq b} \frac{(s-a)^{1-\delta+\sigma}\left\|F(t))-F(s))\right\|}{(t-s)^{\sigma}} \leq \infty.$$

iii) Pour $t \to a$,

$$\sup_{a\leq s<t\leq b} \frac{(s-a)^{1-\delta+\sigma}\left\|F(t))-F(s))\right\|}{(t-s)^{\sigma}} \to 0.$$

$$\left\|F(t)\right\|_{\mathcal{F}^{\delta,\sigma}((a,b];X)} = \sup_{a\leq t\leq b} t^{1-\delta}\left\|F(t)\right\| + \sup_{a\leq s<t\leq b} \frac{(s-a)^{1-\delta+\sigma}\left\|F(t)-F(s))\right\|}{(t-s)^{\sigma}}. \tag{1.38}$$

1.5 Opérateur sectoriel

Définition 1.5. *Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|.\|$. Soit A un opérateur linéaire, fermé, à domaine dense dans X. On suppose que le spectre de A est contenu dans un domaine sectoriel ouvert de telle sorte que*

$$\sigma(A) \subset \sum\nolimits_{\omega} = \{\lambda \in \mathbb{C},\ \ |\arg\lambda| < \omega\},\ 0<\omega\leq\pi, \tag{1.39}$$

et on suppose que la résolvante $\rho(A)$vérifie pour λ n'appatenant pas $\sum_\omega$

$$\left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| \leq \frac{M}{|\lambda|}, \tag{1.40}$$

avec une constante $M\geq 1$.

Un opérateur A satisfaisant les propriétés précédentes est appelé opérateur sectoriel sur X.

Proposition 1.4. *On définit $A=-a\triangle + b$ $(a,b>0)$ sur $L^2(\Omega)$ avec condition de neumann $\partial_\nu u = 0$, alors A un opérateur sectoriel sur $L^2(\Omega)$, d'angle ω strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$, avec la constante $M = \dfrac{a+b}{\min\{a;b\}}$.*

Démonstration. On adopte les idées de A. Yagi [26] (Theorem 2.1 page 58, Theorem 2.4 page 61) pour montrer cettee proposition.

En effet, pour $\Re e\ (\lambda) \leq 0\ \left(\omega < \frac{\pi}{2} \right)$ et $u \in \mathcal{D}\left(A_{|L^2(\Omega)}\right) = H^2_N(\Omega)$, on a

$$\begin{aligned} \min\{a;b\} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} &\leq \Re e\ (Au,u) - \Re e\ (\lambda)\ \ |u|_{L^2(\Omega)} \\ &= \Re e\ ((A-\lambda)u,u) \\ &\leq |(\lambda - A)u|_{L^2(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{1.41}$$

D'autre part

$$\lambda |u|^2_{L^2(\Omega)} = (Au,u) - ((A-\lambda)u,u),$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned} |\lambda|\, |u|^2_{L^2(\Omega)} &\leq |(Au,u)| + |(\lambda - A)u|_{L^2(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \max\{a;b\} \|u\|^2_{H^1(\Omega)} + |(\lambda - A)u|_{L^2(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)}\,. \end{aligned} \tag{1.42}$$

On combine (1.41) et (1.42) , alors

$$|\lambda|\, |u|^2_{L^2(\Omega)} \leq \left(\tfrac{\max\{a;b\}}{\min\{a;b\}} + 1 \right) |(\lambda - A)u|_{L^2(\Omega)} |u|_{L^2(\Omega)}\,,$$

en posant $v = (\lambda - A)u$, on aura

$$|\lambda| \left|(\lambda - A)^{-1} v\right|_{L^2(\Omega)} \leq \tfrac{a+b}{\min\{a;b\}} |v|_{L^2(\Omega)}\,,$$

donc pour $\Re e\ (\lambda) \leq 0$

$$\left|(\lambda - A)^{-1}\right|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \leq \frac{a+b}{\min\{a;b\}\,|\lambda|}.$$

□

Proposition 1.5. *Soient A_i les opérateurs sectoriels dans les espaces de banach X_i avec des angles ω_i tels que $0 \leq \omega_i < \pi$, et des constantes M_i qui vérifient la relation (1.40) , $i = 1, \cdots, n$,*

on définit l'opérateur

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & A_n \end{pmatrix},$$

sur

$$\mathbb{X} = \left\{ \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{pmatrix},\ u_i \in X_i;\ i = 1, \cdots, n. \right\},$$

alors l'opérateur de la matrice A satisfait (1.39) et (1.40) pour tout ω telle que $\omega_A < \omega \leq \pi$ avec une constante

$$M = M_1 + M_2 + ... + M_n, \text{ où } \omega_A = \max\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

Par conséquent, A est un opérateur sectoriel de X avec un angle inférieur ou égal à ω_A.

Démonstration. soit $\omega_A < \omega \leq \pi$,si $\lambda \notin \sum_\omega$ alors $\lambda \in \rho(A)$, et la résolvante est écrite par

$$(\lambda - A)^{-1} = \begin{pmatrix} (\lambda - A_1)^{-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & (\lambda - A_2)^{-1} & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & (\lambda - A_n)^{-1} \end{pmatrix}$$

et on a l'estimation suivante

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X)} &\leq \sum_{i=1}^{n} \left\|(\lambda - A_i)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(X_i)} \\ &\leq \frac{M}{|\lambda|}, \end{aligned}$$

où

$$M = M_1 + M_2 + ... + M_n, \text{où } \omega_A = \max\{\omega_1, \omega_2, \cdots, \omega_n\}.$$

□

1.6 Interpolation des espaces de Banach

Si le corps des scalaires est celui des nombres complexes, alors on peut utiliser les propriétés des fonctions analytiques complexes pour définir un espace d'interpolation.

Définition 1.6. *Soient deux espaces de Banach X et Y. Notons H l'espace des fonctions f à valeurs dans $X+Y$, analytiques sur la bande ouverte $0 < Re(z) < 1$, continues et bornées sur la bande fermée $0 \leq Re(z) \leq 1$, telles que*

$$\forall y \in \mathbb{R},\ f(iy) \in X \quad et\ f(1 + iy) \in Y,$$

et que les deux applications correspondantes, de $\mathbb{R}$ dans X et Y, soient continues et nulles à l'infini.

On définit la norme

$$\|f\|_{\mathcal{H}} = \max\left\{\sup_{y\in\mathbb{R}} \| \ f(iy)\|_X \ \ ,\sup_{y\in\mathbb{R}} \|f(1+iy)\|_Y\right\},$$

et on définit le sous-espace vectoriel de $X+Y$ pour $0 \leq \theta \leq 1$,

$$[X,Y]_\theta = \{ \ f(\theta), f\in\mathcal{H}\},$$

muni de la norme

$$\|u\| = \inf_{f(\theta)=u} \|f\|\,.$$

1.6.1 Interpolation des espaces de Sobolev

Théorème 1.7. *Interpolation des espaces de Sobolev donnée par*

$$\left[H^{s_1}(\Omega), H^{s_2}(\Omega)\right]_\theta = H^{(1-\theta)s_1+\theta s_2}(\Omega)\,,\ 0\leq\theta\leq 1. \tag{1.43}$$

On définit

$$H_N^2(\Omega) = \left\{u\in H^2(\Omega)\,,\ \partial_\nu u \ = \ 0 \ sur \ \ \partial\Omega \ \right\},$$

et pour $0\leq\theta\leq 1 \left(\theta\neq\frac{3}{4}\right)$

$$\left[L^2(\Omega), H_N^2(\Omega)\right]_\theta = \begin{cases} H^{2\theta}(\Omega)\,,\ 0\leq\theta<\frac{3}{4}, \\ H_N^{2\theta}(\Omega)\,,\ \frac{3}{4}<\theta\leq 1. \end{cases} \tag{1.44}$$

Démonstration. Cf [26] Théorème 1.35, Théorème 16.7. □

Remarque 1.5. *Soient* $0<s_0<s_1<\infty$, *alors*

$$W^{s_1,p}(\Omega)\subset W^{s_0,p}(\Omega)\subset L^p(\Omega)\,, \tag{1.45}$$

Théorème 1.8. *Soit A un opérateur auto adjoint défini de X. Pour tout* $0<\theta<1$

$$\left[X,\mathcal{D}(A)\right]_\theta = \mathcal{D}\left(A^\theta\right). \tag{1.46}$$

Démonstration. Cf [26] Théorème 16.1. □

Chapitre 2

Rappels sur les systèmes paraboliques

L'objectif de ce chapitre est de rappeler l'essentiel des notions et résultats utilisés tout à long de ce travail à propos de l'existence et l'unicité de solutions des problèmes paraboliques semi-linéaires. Il s'agit des résultats donnés dans A. Yagi [23. Chapitre 4].

On terminera cette partie par un bref survey sur les systèmes paraboliques liés aux phénomènes d'haptotaxie et chemotaxie afin de situer notre travail par rapport aux travaux publiés précédemment.

2.1 Problème de cauchy

2.1.1 Existence locale

Soit X l'espace de Banach de norme $\|\cdot\|$, A est un opérateur sectoriel de X d'angle ω inférieur strictement à $\frac{\pi}{2}$. On considère l'équation parabolique linéaire suivante

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), \\ \quad U(0) = U_0. \end{cases} \tag{2.1}$$

On commence par une proposition qui nous aide à montrer la proposition principale suivante, qui est une reformulation de [23. Théorème 3.14].

Proposition 2.1. *On considère l'équation parabolique suivante*

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(t), \\ \quad U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.2}$$

Soit X l'espace de Banach de norme $\|\cdot\|$, A est un opérateur sectoriel de X d'angle ω inférieur strictement à $\frac{\pi}{2}$, $F(t) \in F^{\delta,\sigma}(]0,T]\,;X)$, alors il existe une unique solution

$$U \in C((0,T];\mathcal{D}(A)) \cap C([0,T];X) \cap C^1((0,T];X), \tag{2.3}$$

avec l'estimsation

$$\|U\,(t)\| + t\left\|\frac{dU}{dt}\,(t)\right\| + t\,\|AU\,(t)\| \leq C\left(\|U_0\| + \|U\,(t)\|_{F^{\delta,\sigma}}\right),\ \ 0 \leq t \leq T,$$

de plus, U est donné par la formule

$$U\,(t) = e^{-tA}U_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(s)ds,\ \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.4}$$

Démonstration. Soit l'operateur A_n $(n = 1, 2, ...)$ l'approximation de Yosida définie par [26, (2,80)] de A qui est le générateur de semi-groupe e^{-tA_n}, on considère la fonction

$$U_n\,(t) = e^{-tA_n}U_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A_n}F(s)ds,\ \ 0 \leq t \leq T. \tag{2.5}$$

et vérifie l'équation $\frac{dU_n}{dt} + A_nU_n = F(t)$, $0 \leq t \leq T$, donc pour l'arbitraire $0 < \varepsilon \leq T$

$$U_n\,(t) = U_n(\varepsilon) + \int_\varepsilon^t \left[F(s) - A_nU_n\right]ds,\ \ \varepsilon \leq t \leq T. \tag{2.6}$$

De (2.5) on a l'égalité pour $0 \leq t \leq T$:

$$A_nU_n\,(t) = A_ne^{-tA_n}U_0 + \int_0^t A_ne^{-(t-s)A_n}\left[F(s) - F(t)\right]ds + (1 - e^{-tA_n})F(t),$$

de [26, (2.133)], pour $0 \leq t \leq T$

$$\begin{aligned} \|A_nU_n\,(t)\| &\leq Ct^{-1}\,\|U_0\| + C\,\|F\|_{\mathcal{F}^{\delta,\sigma}} \int_0^t (t-s)^{\sigma-1}\,s^{\delta-\sigma-1}ds + Ct^{\delta-1}\,\|F\|_{\mathcal{F}^{\delta,\sigma}} \\ &\leq Ct^{-1}\,\|U_0\| + Ct^{\delta-1}\,\|F\|_{\mathcal{F}^{\delta,\sigma}}\,, \end{aligned}$$

C est indépendante de n, en utilisant [26, (2.133)] , et de même argument de la preuve du [26.lemme1.3, chap.1], on passe à la limite, pour $0 \leq t \leq T$:

$$AU\,(t) = Ae^{-tA}U_0 + \int_0^t Ae^{-(t-s)A}\left[F(s) - F(t)\right]ds + (1 - e^{-tA})F(t).$$

En utilisant la convergence dominé de Lebesgue pour (2.6) ,

$$U(t) = U(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{t} [F(s) - AU]\, ds,\ \varepsilon \leq t \leq T.$$

On peut conclure la différentiabilité de $U(t)$ sur $\varepsilon \leq t \leq T$, et comme ε est arbitraire donc on est le cas sur $0 < t \leq T$. Il est facile à partir de (2.5) de voir que U est continu même à $t = 0$ et satisfait à la condition initiale. Il est également facile de vérifier que U satisfait (2.4). Nous avons donc vérifié que $U(t)$ est une solution dans (2.3).

Pour montrer l'unicité de la solution en posant V une deuxieme solution de (2.2), pour $0 < \varepsilon < t \leq T$,

$$V(t) = e^{-(t-\varepsilon)A} V(\varepsilon) + \int_{\varepsilon}^{t} e^{-(t-\tau)A} F(\tau) d\tau.$$

En laissant $\varepsilon \to 0$, nous concluons que $V(t) = U(t)$ pour chaque $0 < t \leq T$. □

Théorème 2.1. *Soit X un espace de Banach muni de la norme $\|\cdot\|$, on considère l'équation d'évolution* (2.1) *avec A est un opérateur sectoriel de X satisfaisant* (1.39) , (1.40) *d'angle ω inférieur strictement à $\frac{\pi}{2}$.*

F fonction de $D(A^\eta)$ vers X, et satisfaisant pour $U, V \in D(A^\eta)$, $0 < \delta \leq \eta < 1$ la condition de Lipschitz de la forme

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\| \ &\leq \ \phi(\|A^\delta U\| + \|A^\delta V\|)[\|A^\eta(U - V)\| \\ &\quad +(\|A^\eta U\| + \|A^\eta V\|)\, \|A^\delta(U - V)\|], \end{aligned} \tag{2.7}$$

où ϕ est une fonction continue croissante. Alors pour $U_0 \in D(A^\delta)$, le problème (2.1) *admet une unique solution locale U vérifiant*

$$U \in C((0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A^\delta)) \cap C^1((0, T_{U_0}]; X). \tag{2.8}$$

De plus, elle satisfait pour tout $t \in]0, T_{U_0}]$ l'estimation

$$\|A^\delta U(t)\| \leq C_{U_0},$$

où $C_{U_0}, T_{U_0} > 0$ dépendent uniquement des normes $\|A^\delta U_0\|$.

Démonstration. Pour chaque $S \in (0, T]$, on considère l'espace de Banach suivant :

$$E(S) = \left\{ U \in C((0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, T_{U_0}]; \mathcal{D}(A^{\delta})); \sup_{0<t\leq S} t^{\eta-\delta} \|A^{\eta} U\| < \infty \right\},$$

$$\|U\|_{E(S)} = \sup_{0<t\leq S} t^{\eta-\delta} \|A^{\eta} U(t)\| + \sup_{0<t\leq S} \left\|A^{\delta} U(t)\right\|,$$

On considère le sous-ensemble $K(S)$ dans $E(S)$ de toutes les fonctions

$$t^{\eta-\delta} \|A^{\eta} U(t)\| \leq C_1, \quad 0 < t \leq S, \tag{2.9}$$

$$\left\|A^{\delta} U(t)\right\| \leq C_2, \quad 0 < t \leq S, \tag{2.10}$$

Etape 1.

On définie l'application $\Phi : K(S) \to E(S)$

$$V \to U = \Phi(V).$$

On vérifie que l'application Φ est dans $K(S)$ pour tout $U \in K(S)$, on a

$$\|F(U(t))\| \leq \psi(C_2) \left(C_1 t^{\delta-\eta} + 1\right), \quad 0 < t \leq S, \tag{2.11}$$

pour la puissance θ telle que $\delta \leq \theta < 1$, on a pour $0 \leq t \leq T$:

$$\left\|A^{\theta} \{\Phi U\}(t)\right\| \leq \left\|A^{\theta-\delta} e^{-tA}\right\| \left\|A^{\delta} U_0\right\| + \int_0^t \left\|A^{\theta} e^{-(t-s)A}\right\| \|F(U(s))\| \, ds,$$

de (2.9), (2.10) on voit que

$$\begin{aligned} & t^{\theta-\delta} \left\|A^{\theta} \{\Phi U\}(t)\right\| \\ \leq \; & A_{\theta-\delta} \left\|A^{\delta} U_0\right\| + A_{\theta} \psi(C_2) t^{\theta-\delta} \int_0^t (t-s)^{-\theta} \left(C_1 s^{\delta-\eta} + 1\right) ds \\ \leq \; & A_{\theta-\delta} \left\|A^{\delta} U_0\right\| + A_{\theta} \psi(C_2) \left[C_1 B(1-\theta, 1+\delta-\eta) t^{1-\eta} + B(1-\theta, 1) t^{1-\delta}\right]. \end{aligned} \tag{2.12}$$

$B(p, q)$ la fonction beta, avec A_{ξ} est donné par

$$A_{\xi} = \sup_{0<t\leq T} t^{\xi} \left\|A^{\xi} U\right\| \text{ for } 0 \leq \xi \leq 1,$$

si S est très petit, alors $\Phi(U)$ satisfait (2.9) et (2.10), on prend $\theta=\eta$ and $\theta=\delta$, on a

$$C_1 \;>\; A_{\eta-\delta}\left\|A^{\delta}U_0\right\|,$$

$$C_2 \;>\; A_0\left\|A^{\delta}U_0\right\|,$$

pour $0<s<t\leq S$, en utilisant les propriété de semi-groupe

$$\{\Phi U\}(t)=e^{-(t-s)A}e^{-tA}U_0+\int_s^t e^{-(s-\tau)A}F(U(\tau))d\tau+e^{-(t-s)A}\int_0^s e^{-(s-\tau)A}F(U(\tau))d\tau,$$

alors

$$\{\Phi U\}(t)-\{\Phi U\}(s)=\left[e^{-(t-s)A}-1\right]\{\Phi U\}(s)+\int_s^t e^{-(t-\tau)A}\left\|F(U(\tau))\right\|d\tau,$$

de (2.11) et (2.12) ($\theta=\eta+\sigma<1$), on obtient que

$$\begin{aligned}
&\left\|A^{\eta}\left[\{\Phi U\}(t)-\{\Phi U\}(s)\right]\right\|\\
&\leq \left\|\left[e^{-(t-s)A}-1\right]A^{-\sigma}\right\|\left\|A^{\eta+\sigma}\{\Phi U\}(s)\right\|+\int_s^t\left\|A^{\eta}e^{-(t-\tau)A}\right\|\left\|F(U(\tau))\right\|d\tau\\
&\leq C_{G,U0}A_{\eta}(t-s)^{\sigma}s^{\delta-\sigma-\eta}+A_{1-\sigma}\int_s^t(t-\tau)^{-\eta}(\tau^{\delta-1}+1)d\tau,
\end{aligned}$$

avec $\delta-1=(\eta+\sigma-1)+(\delta-\sigma-\eta)$, on a

$$\begin{aligned}
\int_s^t(t-\tau)^{-\eta}\tau^{\delta-1} &\leq \int_s^t(t-\tau)^{-\eta}(\tau-s)^{\eta+\sigma-1}s^{\delta-\sigma-\eta}d\tau\\
&= B(1-\eta,\eta+\sigma)(\tau-s)^{\sigma}s^{\delta-\sigma-\eta},
\end{aligned}$$

on obtient

$$\left\|A^{\eta}\left[\{\Phi U\}(t)-\{\Phi U\}(s)\right]\right\|\leq C_{G,U_0}(\tau-s)^{\sigma}s^{\delta-\sigma-\eta}, \tag{2.13}$$

en particulier on a $\Phi U\in C(]0,S];D(A^{\eta}))$, d'autre part

$$\left\|A^{\delta}\left[\{\Phi U\}(t)-\{\Phi U\}(s)\right]\right\|\leq C_{G,U_0}(t-s)^{\sigma}s^{-\sigma}+C_{G,U_0}\int_s^t(t-\tau)^{-\delta}\tau^{\delta-1}d\tau,$$

on a $\delta - 1 = (\delta + \sigma - 1) - \sigma$, alors

$$\begin{aligned} \int_s^t (t-\tau)^{-\eta}\tau^{\delta-1} &\le \int_s^t (t-\tau)^{-\delta}(\tau - s)^{\delta+\sigma-1}s^{-\sigma}d\tau \\ &= B(1-\delta, \delta+\sigma)(t-s)^{\sigma}s^{-\sigma}, \end{aligned}$$

donc,

$$\left\| \{\Phi U\}(s) - \{\Phi U\}(s) \right\| \le C_{G,U_0}(t-s)^{1+\sigma-\eta}s^{-\sigma},\ 0 < s < t \le S. \tag{2.14}$$

D'après le théorème $e^{-tA}U_0$ est continue pour $t = 0$ pour la norme de X. On ajoute, de (2.11), pour $t \to 0$,

$$\begin{aligned} \left\| A^{\delta} \int_0^t e^{-(t-s)A} F(U(\tau))d\tau \right\| &\le C\int_0^t (t-s)^{-\delta}(s^{\delta-\eta}+1)ds \\ &\le CA^{\delta}(t^{1-\eta} +^{1-\delta}) \to 0. \end{aligned}$$

On conclut que, $\Phi U \in C([0,S]\,; D\left(A^{\delta}\right))$.

l'application Φ est dans $K(S)$ pour tout $U \in K(S)$, pour lrs valeurs de $S > 0$ très petite.

Etape 2.

On verifie que Φ esi une application contractif de $E(S)$. Soit $U, V \in K(S)$. pour $\delta \le \theta < 1$, on peut écrire

$$A^{\theta}\left[\{\Phi U\}(t) - \{\Phi V\}(s)\right] \le \int_0^t A^{\theta} e^{-(t-s)A}\left[F(U(s)) - F(V(s))\right]ds,$$

de (2.9), (2.10), et (2.11) on a

$$\begin{aligned} & t^{\theta-\delta}\left\| A^{\theta}\left[\{\Phi U\}(t) - \{\Phi V\}(t)\right]\right\| \\ \le\ & A_{\theta}\varphi(2C_2)\,t^{\theta-\delta}\int_0^t (t-s)^{-\theta} \times \left\{ \left\|A^{\eta}\left[U(s) - V(s)\right]\right\| + (2C_1 s^{\delta-\eta}+1)\left\|A^{\delta}\left[U(s)-V(s)\right]\right\| \right\} ds \\ \le\ & CA_{\theta}(C_1+1)\varphi(2C_2)\,t^{\theta-\delta}\int_0^t (t-s)^{-\theta}(s^{\delta-\eta}+1)ds\,\|U-V\|_{E(S)}, \end{aligned}$$

on remplace dans cette estimation $\theta = \eta$ et $\theta = \delta$, on conclut que

$$\|\Phi U - \Phi V\|_{E(S)} \leq C(C_1 + 1)\varphi\left(2C_2\right) S^{1-\eta} \|U - V\|_{E(S)},$$

d'où le résultat, pour $S > 0$ est très petit.

Etape 3.

Soit $S > 0$ suffisamment petit de telle sorte que l'application Φ de $K(S)$ sur lui-même et est une contraction par rapport à la norme de $E(S)$. Par les arguments des étapes 1 et 2, $S = T_{U_0} > 0$ peut être déterminée par les deux normes $\left\|A^\delta U_0\right\|$ seulement. avec le théorème de point fixe pour les projections de contraction, le Proposition 2.1, il existe une fonction unique de $U \in K(T_{U_0})$ tel que $U = \Phi U$. A partir de maintenant, U signifie cette fonction. De toute évidence,

$$U\left(t\right) = e^{-tA}U_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(U\left(s\right))ds,\ 0 \leq t \leq T_{U0}. \tag{2.15}$$

on vérifie que

$$F(U) \in \mathcal{F}^{\beta,\sigma}((0, T_{U0}]; X),\ 0 < \sigma < \beta \leq 1 - \eta. \tag{2.16}$$

de (2.7), pour $t \to 0$,

$$t^{1-\delta} \left\|F(U\left(t\right))\right\| \leq C_{U0}(t^{1-\delta-\eta} + t^{1-\delta}) \to 0.$$

de (2.11), (2.13), et (2.14), il en résulte que

$$\begin{aligned}\|F(U\left(t\right)) - F(U\left(s\right))\|_{X(S)} &\leq \|F(\{\Phi U\}\left(t\right)) - F(\{\Phi U\}\left(s\right))\|_{X(S)} \\ &\leq C_{U0}(t-s)^{\sigma}s^{\delta-\sigma-\eta} + (s^{-\eta}+1)(t-s)^{1+\sigma-\eta}s^{-\sigma}.\end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\frac{s^{1-\delta+\sigma}\left\|F(U\left(t\right)) - F(U\left(s\right))\right\|}{(t-s)^{\sigma}} \leq C_{U0}s^{1-\eta} + (s^{1-\delta-\eta} + s^{1-\delta})(t-s)^{1-\eta},\ 0 < s < t \leq T_{U_0}.$$

Par conséquent, (2.16) est vérifié.nous savons maintenant que $F(U) \in F^{\delta,\sigma}((0, T_{U0}]; X)$. Compte tenu de (2.15), nous pouvons appliquer la proposition 2.1 à conclure que U appartient à l'Espace (2.8).

Etape 4.

On vérifie enfin l'unicité de solution. Soit $V(t)$ toute autre solution de (2.2) sur l'intervalle $[0, T_{U_0}]$ qui appartient à l'espace (2.9). Par définition,

$$t\left\|AV(t)\right\| + \left\|A^\delta V(t)\right\| \leq C_V,\ 0 < t \leq T_{U_0}.$$

on a l'estimation

$$t^{\eta-\delta}\left\|A^{\eta}V(t)\right\| \leq C_V,\ 0 < t \leq T_{U_0}.$$

avec la formule

$$V(t) = e^{-tA}V_0 + \int_0^t e^{-(t-s)A}F(V(s))ds,\ 0 \leq t \leq T_{U_0}.$$

avec (2.16),

$$V(t) - U(t) = \int_0^t e^{-(t-s)A}\left[F(V(s)) - F(U(s))\right]ds,\ 0 \leq t \leq T_{U_0}.$$

Nous pouvons alors répéter les mêmes arguments de l'étape 2, on déduit que

$$\|U - V\|_{X(S)} \leq C_{\tilde{U},U} S^{1-\eta}\|U - V\|_{X(S)},\ 0 < S \leq T_{U_0}.$$

Cela signifie que, si $S > 0$ est suffisamment petit, alors $U(t) = V(t)$ pour $0 \leq t \leq S$. Soit $\widetilde{S} = \sup\{S, U(t) = V(t) \text{ pour } 0 \leq t \leq S\}$, et supposons que $\widetilde{S} < T_{U_0}$. alors, on a $U(\widetilde{S}) = V(\widetilde{S})$.

Nous répétons la même procédure avec le temps initial $\widetilde{S}$ et la valeur initiale $U(\widetilde{S}) = V(\widetilde{S})$ pour obtenir $U(\widetilde{S} + t) = V(\widetilde{S} + t)$ pour $t > 0$ suffisamment petit, on conclut que $U(t) = V(t)$ pour tout $0 \leq t \leq T_{U_0}$. □

2.1.2 Existence globale

Ce paragraphe est une reformulation de du [23. Corollaire 4.1 page 185] .

Théorème 2.2. *Sous les hypothèses du théorème 2.1.1, nous supposons que toute solution locale U de (2.1) soit dans l'espace de fonctions*

$$U \in C((0, T_U]; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, T_U]; \mathcal{D}\left(A^{\delta}\right)) \cap C^1((0, T_U]; X),$$

et satisfait l'estimation

$$\left\|A^{\delta}U(t)\right\| \leq C_{U_0},\quad 0 < t \leq T_U, \tag{2.17}$$

avec une constante C_{U_0} indépendante de T_U, alors (2.1) possède une unique solution globale définie sur $[0, T]$ pour tout $T > 0$ donné.

Démonstration. Cf [23. Corollaire 4.1 page 185] . □

2.2 Les travaux précédemment publiés

Les problèmes PDE dans cette partie sont des système chimiotaxie-haptotaxie avec terme de prolifération $\mu u(1-u-w)$.

Cette partie est consacrée à l'existence globale des solutions des travaux [11], [15], [19], [22] et [23].

2.2.1 Le modèle d'haptotaxie avec terme de prolifération

Nous présentons dans cette partie les travaux de G. Litcan, C. Morales-Rodrigo [15] et A. Marciniak-Czochra, M. Ptashnyk [19] concernant le modèle d'haptotaxie, en prenant en considération le terme de prolifération avec le coefficient correspondant $\mu > 0$.

2.2.1.1 Travail de G. Litcan, C. Morales-Rodrigo [15]

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \nabla.(\chi(w)u\nabla w) + \mu u\left(1-u-w\right), \\ \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u g(v), \qquad\qquad t>0,\ x\in\ \Omega \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v, \\ \\ \begin{cases} \partial_n u \;=\; 0, \quad \partial_n v \;=\; 0, \quad \partial_n w_0 \;=\; 0 \qquad \text{in } \partial\Omega, \\ u\left(0,.\right) = \ u_0\ ,\ v\left(0,.\right) = \ v_0,\ w\left(0,.\right) = \ w_0 \ \ \text{on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.18}$$

Les constantes $D, \beta, \alpha, \mu > 0,\ \lambda, \gamma \geq 0$ sont positives.

$\chi \in C^1(\mathbb{R}),\ \chi, \chi'$ sont globalement Lipschitz, $\chi \geq 0,\ g \in C^1(\mathbb{R}),\ g$ est globalement Lipschitz, $g \geq 0$.

Soit l'opérateur $A = -\triangle + 1$ sur $L^p(\Omega)$, et on definit pour $0 \leq \theta \leq 1$ l'espace $X_p^\theta = D\left(A^\theta\right)$ muni de la norme $\|.\|_{X_p^\theta}$. Nous signalons que $X_p^1 = D(A)$ et $X_p^0 = L^p(\Omega)$.

2.2.1.1.1 Etude d'Existence locale Soit $\delta \in \left]\frac{1}{2} + \frac{3}{2p}, 1\right[,\ p \in \left]3, 6\right[$. Supposons que les données initiales satisfassent

$y_0 = (u_0, v_0, w_0) \in X_2^{\frac{1}{2}} \times W^{1,\infty}(\Omega) \times X_p^{\delta}$, alors il existe $T(\|y_0\|_Y)$ tel que le problème (2.18) possède une solution unique

$$u \in C(]0,T]\,; W^{2,p}(\Omega)) \cap C([0,T]\,; X_2^{\frac{1}{2}}) \cap C^1(]0,T]\,; X_2^{\frac{1}{2}}),$$
$$v \in C(]0,T]\,; W^{2,p}(\Omega)) \cap C([0,T]\,; X_p^{\delta}) \cap C^1(]0,T]\,; X_p^{\delta}),$$
$$w \in C([0,T]\,; W^{1,\infty}(\Omega)) \cap C^1(]0,T]\,; W^{1,\infty}(\Omega)).$$

2.2.1.1.2 Etude d'Existence Globale $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$. Supposons que les données initiales satisfassent $y_0 = (u_0, v_0, w_0) \in W^{1,q}(\Omega) \times W^{1,\infty}(\Omega) \times X_p^{\delta}$, $\delta \in \left]\frac{1}{2} + \frac{3}{2p}, 1\right[\left(p > 3, q \geq \frac{3p}{p+3}\right)$, pour $t \in]0,T[$, on a

$$\|u(t)\|_{W^{1,q}(\Omega)} \leq c\,(1+t)\,e^{ct}, \|v(t)\|_{X_p^{\delta}} \leq c.$$

Démonstration. Cf [15]. □

2.2.1.2 Travail de A. Marcniaak-Czochra et M. Ptashny [19]

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \nabla.(\chi(w)u\nabla w) + \mu u\,(1-u-w)\,, \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda uw, \qquad t>0,\ x \in\ \Omega, \\ \partial_t w = -\gamma wv, \\ \begin{cases} \partial_n u \ = \ 0, \quad \partial_n v \ = \ 0, \quad \partial_n w_0 \ = \ 0 \quad \text{ in } \partial\Omega, \\ u\,(0,.) = \ u_0\ ,\ v\,(0,.) = \ v_0,\ w\,(0,.) = \ w_0 \ \text{ on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.19}$$

Les constantes $D, \beta, \alpha, \mu > 0$, $\lambda, \gamma \geq 0$ sont positives.

$\chi \in C(\mathbb{R}_+)$, χ est localement Lipschitz, $\chi \geq 0$.

Définition 2.1. *Le triplet (u,v,w) est appelé une solution faible du modèle (2.19), si $u,v,w \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), u,v \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$, $u_t, v_t, w_t \in L^2(]0,T[\times\Omega)$, de plus*

$$\int_0^T \int_\Omega u_t \varphi_1 dxdt = \int_0^T \int_\Omega D\nabla u.\nabla\varphi_1 + \int_0^T \int_\Omega \chi(v)u\nabla v.\nabla\varphi_1$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \mu u\,(1-u-w)\,\varphi_1 dxdt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega v_t \varphi_2 dxdt = \int_0^T \int_\Omega \alpha\nabla v.\nabla\varphi_2 - \int_0^T \int_\Omega \beta v\varphi_2$$
$$+ \int_0^T \int_\Omega \lambda uv\varphi_2 dxdt,$$

$$\int_0^T \int_\Omega w_t \varphi_3 dxdt = -\int_0^T \int_\Omega \gamma wv\varphi_3 dxdt,$$

pour tout $\varphi_1 \in L^2(0,T;H^1(\Omega)), \varphi_2 \in L^2(0,T;\Omega),\ \varphi_3 \in L^\infty(]0,T[\times\Omega)$.

2.2.1.2.1 Etude d'Existence Locale $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2,3)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$. Supposons que les données initiales satisfassent $u_0, v_0, w_0 \in L^\infty(\Omega)$, $\nabla v_0, \nabla w_0 \in L^q(\Omega)\,(q \geq d)$, $\nabla u_0 \in L^2(\Omega)$, alors la solution faible du problème (2.19) est unique. De plus,

$$v \in L^\infty(0,T;W^{1,q}(\Omega)),\ w \in L^q(0,T;W^{1,q}(\Omega)).$$

2.2.1.2.2 Etude d'Existence Globale

Théorème 2.3. *Pour des conditions initiales positives et bornées et un état positif et la fonction continue* χ*, les solutions du problème* (2.19) *sont uniformément bornés.*

Démonstration. Cf [19].

□

2.2.2 Le modèle de haptotaxie-chemotaxie avec terme de prolifération

Nous passons maintenant dans cette partie aux travaux de X. Cao [11], Y. Tao [22], Y. Tao, M. Wang [23] et Y. Tao, M. Winkler [24], concernant le modèle de chimiotaxie-haptotaxie, en prenant en considération le terme de prolifération avec le coefficient correspondant $\mu > 0$.

2.2.2.1 Travail de X. Cao [11]

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \chi\nabla.(u\nabla v) - \rho\nabla.(u\nabla w) + \mu u\left(1-u-w\right), \\ \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u, \qquad\qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v, \\ \\ \quad \begin{cases} \partial_n u \ = \ 0, \quad \partial_n v \ = \ 0, \ \ \partial_n w_0 \ = \ 0 \qquad \text{in } \ \partial\Omega, \\ u\left(0,.\right) = \ u_0 \ , \ v\left(0,.\right) = \ v_0, \ w\left(0,.\right) = \ w_0 \ \ \text{on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.20}$$

Les constantes $D, \chi, \rho, \alpha, \mu > 0,\ \gamma, \lambda \geq 0$ sont des constantes positives données.

2.2.2.1.1 Etude d'Existence Globale Supposons que les données initiales satisfassent

$$\begin{cases} 0 \leq u_0,\ 0 \leq m_0,\ 0 < v_0, \\ \partial\Omega \in C^{2+\sigma},\ 0<\sigma<1, \\ u_0, m_0, v_0 \in C^{2+\sigma}\ \left(\overline{\Omega}\right). \end{cases} \tag{2.21}$$

$\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$, on suppose qu'il existe $\theta_0 > 0$ tel que $\theta_0 > \frac{\chi}{\mu}$, alors pour toute donnée toute donnée initiale (2.21), le problème (2.20) possède une solution classique unique qui est globale en temps et bornée dans $]0,\infty[\times\Omega$.

Démonstration. Cf [11]. □

2.2.2.2 Travail de Y. Tao [22]

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \chi\nabla.(u\nabla v) - \rho\nabla.(u\nabla w) + \mu u\left(1-u-w\right), \\ \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u, \qquad\qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v, \\ \\ \quad \begin{cases} \partial_n u \ = \ 0, \quad \partial_n v \ = \ 0, \ \ \partial_n w_0 \ = \ 0 \qquad \text{in } \ \partial\Omega, \\ u\left(0,.\right) = \ u_0 \ , \ v\left(0,.\right) = \ v_0, \ w\left(0,.\right) = \ w_0 \ \ \text{on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.22}$$

Les constantes $D, \chi, \rho, \alpha, \mu > 0,\ \gamma, \lambda \geq 0$ sont positives. $\Omega_T =]0, T[\, \times \Omega$.

Supposons que les données initiales satisfassent

$$\begin{cases} 0 \leq u_0,\ 0 \leq m_0,\ 0 \leq v_0, \\ \partial\Omega \in C^{2+\sigma},\ \sigma = \frac{1}{5}, \\ u_0, m_0 \in C^{2+\sigma}\ \left(\overline{\Omega}\right), v_0 \in C^3\ \left(\overline{\Omega}\right). \end{cases}$$

2.2.2.2.1 Etude d'Existence Locale $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$, il existe une solution unique $(u, v, w) \in C^{1+\frac{\sigma}{2}, 2+\sigma}\left(\Omega_T\right)$ de système (2.22), $T > 0$ qui dépend de $\|\left(u_0, v_0, w_0\right)\|_{C^{2+\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)}$.

2.2.2.2.2 Etude d'Existence Globale $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\mu > 0$. Alors, il existe une solution globale unique $(u, v, w) \in C^{1+\frac{\sigma}{2}, 2+\sigma}\left(\Omega_\infty\right)$ de système (2.22).

Démonstration. Cf [22]. □

2.2.2.3 Travail de Y. Tao et M. Wang [23]

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \chi\nabla.(u\nabla v) - \rho\nabla.(u\nabla w) + \mu u\left(1 - u - w\right), \\ \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u, \qquad\qquad t > 0,\ x \in\ \Omega, \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v, \\ \\ \quad \begin{cases} \partial_n u\ =\ 0, \quad \partial_n v\ =\ 0, \quad \partial_n w_0\ =\ 0 \qquad \text{in}\ \ \partial\Omega, \\ u\left(0,.\right) =\ u_0\ ,\ v\left(0,.\right) =\ v_0,\ w\left(0,.\right) =\ w_0\ \ \text{on}\ \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.23}$$

Les constantes $D, \chi, \rho, \alpha, \mu > 0,\ \gamma, \lambda \geq 0$ sont positives.

Supposons que les données initiales satisfassent

$$\begin{cases} 0 \leq u_0,\ 0 \leq m_0,\ 0 \leq w_0 \leq 1, \\ \quad \partial\Omega \in C^{2+\sigma},\ 0 < \sigma < 1, \\ \quad u_0, m_0, v_0 \in C^{2+\sigma}\ \left(\overline{\Omega}\right). \end{cases}$$

2.2.2.3.1 Etude d'Existence locale $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 1, 2, 3)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$, il existe une solution unique $(u, v, w) \in C^{1+\frac{\sigma}{2}, 2+\sigma}\left(\Omega_T\right)$ de système (2.24), $T > 0$ qui dépend de $\|\left(u_0, v_0, w_0\right)\|_{C^{2+\sigma}\left(\overline{\Omega}\right)}$.

2.2.2.3.2 Etude d'Existence Globale Supposons que $d = 1, 2, 3$, si $\frac{\chi}{\mu}$ est petite, il existe une solution globale unique $(u, v, w) \in C^{1+\frac{\sigma}{2}, 2+\sigma}\left(\Omega_\infty\right)$ de système (2.24).

Démonstration. Cf [23]. □

2.2.2.4 Travail de Y. Tao, M. Winkler [24]

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \chi \nabla.(u\nabla v) - \rho\nabla.(u\nabla w) + \mu u\left(1-u-w\right), \\ \\ \partial_t v = \triangle v - v + f(u), \qquad\qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v + \eta u\left(1-u-w\right), \\ \\ \quad \begin{cases} \partial_n u \ = \ 0, \quad \partial_n v \ = \ 0, \quad \partial_n w_0 \ = \ 0 \qquad \text{in } \ \partial\Omega, \\ u\left(0,.\right) = \ u_0\ ,\ v\left(0,.\right) = \ v_0,\ w\left(0,.\right) = \ w_0 \ \ \text{on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{2.24}$$

Les constantes $D, \chi, \rho, \mu, \gamma, \eta > 0$ sont positives.

Supposons que les données initiales satisfassent

$$\begin{cases} 0 \leq u_0,\ 0 \leq m_0,\ 0 \leq w_0, \\ \partial\Omega \in C^{2+\sigma},\ 0<\sigma<1, \\ u_0, m_0, v_0 \in C^{2+\sigma}\ \left(\overline{\Omega}\right). \end{cases}$$

où $f \in C^1\left([0, +\infty[\,, \mathbb{R}_+\right)$ est une fonction donnée satisfaisant pour $s \geq 0$

$$f(s) \leq K_f\left(s+1\right)^{\delta},\ f(0) \geq 0,$$

avec une certaine constante $0 < K_f, \delta$, et $\delta < \begin{cases} \frac{3}{2} \text{ pour } d=1 \\ \frac{d+6}{2(d+2)} \text{ pour } d \geq 2. \end{cases}$

2.2.2.4.1 Etude d'Existence locale $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d \geq 1)$ est un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$. Alors il existe une constante $T_{\max} > 0$ pour que le système (2.24) possède une solution unique $(u, v, w) \in C^{1,2}\left(\Omega_{T_{\max}}\right)$.

2.2.2.4.2 Etude d'Existence Globale Supposons que $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ est un domaine convexe borné avec une frontière régulière, si $\frac{\chi}{\mu}$ est petite, si $\rho\eta \max\left\{\|u_0\|_{L^1(\Omega)}, 1\right\} < \mu$. Alors le système admet une solution classique globale (u, v, w) et pour tout $t > 0$, il existe une certaine $C > 0$,

$$u\left(t\right) \leq C.$$

Démonstration. Cf [24]. □

Chapitre 3

Etude d'Existence Locale

Dans ce chapitre, nous traitons l'existence locale pour le modèle d'invasion.

L'outil principal est le Théorèmes 2.1. de A. Yagi [26].

3.1 Position de problème

On étudie le problème suivant introduit par [13], et contrairement au modèle précédent, il y a absence du terme de source logistique :

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \rho\nabla.(u\nabla w\ ) - \chi\nabla.(u\nabla v), \\ \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u, \qquad\qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v, \\ \\ \begin{cases} \partial_n u\ =\ 0, \quad \partial_n v\ =\ 0, \quad \partial_n w_0\ =\ 0 \qquad \text{in } \partial\Omega, \\ u\,(0,.) =\ u_0\ ,\ v\,(0,.) =\ v_0,\ w\,(0,.) =\ w_0\ \text{ on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{3.1}$$

Soit $\Omega \subset R^d$ $(d = 2, 3)$ un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et les données initiales u_0, v_0, w_0 sont supposées être positives et ∂_n désigne la dérivée par rapport à la normale externe de $\partial\Omega$. La fonction $u(t, x)$ est la densité de population des individus biologiques à la position $x \in \Omega$ et au temps $t \in [0, +\infty[$, $v(t, x)$ est la concentration de substance chimique produite par les individus tandis que

$w = w(t,x)$ est la concentration de la matrice extracellulaire (MEC). Les coefficients $D, \rho, \chi, \gamma, \lambda, \alpha, \beta$ sont des données positives.

Tout au long de ce document, δ désigne une constante donnée vérifiant $\frac{d}{2} < \delta < 2$ $(d = 2, 3)$.

3.2 Existence locale

On définit pour $s > 0$, $H^s(\Omega)$ l'espace fractionnaire de Sobolev dans Ω de classe C^3muni de la norme $\|.\|_{H^s(\Omega)}$, tel que pour $\frac{3}{2} < s \leq 3$

$$H_N^s(\Omega) = \{u \in H^s(\Omega),\ \partial_{\vec{n}} u \ = \ 0 \text{ sur } \ \partial\Omega\ \},$$

et pour $s < \frac{3}{2}$, $H_N^s(\Omega) = H^s(\Omega)$.

Théorème 3.1. *Soit δ un exposant donné satisfaisant $\frac{d}{2} < \delta < 2$ $(d = 2, 3)$ et on suppose que $(u_0, v_0, w_0) \in H_N^\delta(\Omega) \times H_N^{1+\delta}(\Omega) \times H_N^2(\Omega)$. Alors il existe $T_{U_0} > 0$ tel que le problème (3.1) admette une seule solution*

$$\begin{aligned}
&u \in C(]0, T_{U_0}]\,; H_N^2(\Omega)) \cap C([0, T_{U_0}]\,; H_N^\delta(\Omega)) \cap C^1(]0, T_{U_0}]\,; L^2(\Omega)),\\
&v \in C(]0, T_{U_0}]\,; H_N^3(\Omega)) \cap C([0, T_{U_0}]\,; H_N^{1+\delta}(\Omega)) \cap C^1(]0, T_{U_0}]\,; H^1(\Omega)),\\
&w \in C([0, T_{U_0}]\,; H_N^2(\Omega)) \cap C^1(]0, T_{U_0}]\,; H_N^2(\Omega)).
\end{aligned} \tag{3.2}$$

De plus, pour tout $t \in]0, T_{U_0}]$ la solution satisfait les estimations

$$\|u(t)\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v(t)\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + \|w(t)\|_{H^2(\Omega)} \leq C_{U_0}, \tag{3.3}$$

où $C_{U_0}, T_{U_0} > 0$ dépendent uniquement des normes $\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}$.

Démonstration. **$1^{\text{ère}}$étape : Propretés basique de l'opérateur A**

Dans cette partie, nous étudierons les propriétés des opérateurs A, où nous allons commencer par prouver que A est sectoriel et ensuite nous calculons le domaine $D(A)$ et le domaine fractionnaire $D(A^\theta)(0 < \theta < 1)$.

Dans tout le travail on adopte la notation suivante

$$\mathcal{K} = \left\{ U_0 = \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix} \ ;\ 0 \leq u_0 \in H_N^\delta(\Omega),\ 0 \leq v_0 \in H_N^{\delta+1}(\Omega),\ 0 < w_0 \in H_N^2(\Omega) \right\},$$

On réécrit notre problème sous la forme du problème de Cauchy semi-linéaire abstrait suivant

$$\begin{cases} \frac{dU}{dt} + AU = F(U), \\ U(0) = U_0, \end{cases}$$

où U definie sur

$$X = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} ; \ u \in L^2(\Omega), \ v \in H_N^2(\Omega), \ w \in H^1(\Omega) \right\},$$

et A l'opérateur défini comme suit

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -D\triangle + 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\alpha\triangle + \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{3.4}$$

Pour prouver que A est sectoriel dans X, nous nous référons à la Proposition 1.5. qui assure que les opérateurs A_1, A_2 sont sectoriels dans $L^2(\Omega), H^1(\Omega)$ avec les constantes $M_1 = \frac{1+D}{\min\{1;D\}}$, $M_2 = \frac{\alpha+\beta}{\min\{\alpha;\beta\}}$ respectivement. Nous pouvons le prouver pour A_3 par un calcul direct, avec un angle strictement inférieur à $\frac{\pi}{2}$.
De plus, comme A est un opérateur matriciel diagonal, nous avons

$$(\lambda - A)^{-1} = diag\left\{(\lambda - A_1)^{-1}, (\lambda - A_2)^{-1}, (\lambda - \gamma)^{-1}\right\}.$$

Maintenant, nous notons par $\sigma(A)$ le spectre de A et $\rho(A)$ sa complémentaire. Si $\lambda \notin \sigma(A) \subset \sum_\omega = \left\{\lambda \in \mathbb{C}, |\arg\lambda| < \omega_A < \frac{\pi}{2}\right\} (Re(\lambda) \leq 0)$ à partir de Proposition 1.6., nous avons

$$\begin{aligned} \left\|(\lambda - A)^{-1}\right\| &\leq \left\|(\lambda - A_1)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} + \left\|(\lambda - A_2)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H^1(\Omega))} + \frac{1}{|\lambda - \gamma|} \\ &\leq \frac{M_1 + M_2}{|\lambda|}. \end{aligned}$$

Nous considérons l'opérateur $A_1 = -D\triangle+1$ sur $L_2(\Omega)$ avec les conditions de Neumann homogènes sur $\partial\Omega$, alors $\mathcal{D}(A_1) = H_N^2(\Omega)$ et selon Théorème 1.7., on a

$$\mathcal{D}(A_1^\theta) = \begin{cases} H^{2\theta}(\Omega)\,, \ 0 \leq \theta < \frac{3}{4}, \\ H_N^{2\theta}(\Omega)\,, \ \frac{3}{4} < \theta \leq 1, \end{cases} \tag{3.5}$$

avec équivalence de norme

$$c_\Omega^{-1} \|u\|_{H^{2\theta}(\Omega)} \leq \left\|A_1^\theta u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|_{H^{2\theta}(\Omega)}\,, \quad u \in \mathcal{D}(A_1^\theta). \tag{3.6}$$

Nous considérons aussi l'opérateur $A_2 = -\alpha\triangle + \beta$ sur $H^1(\Omega)$ avec la condition de Neumann homogène sur $\partial\Omega$, alors $\mathcal{D}(A_2) = \{v \in H_N^2(\Omega)\,,\ \triangle v \in H^1(\Omega)\}$. Notez que, comme Ω est de classe C^3, ceci implique que$\mathcal{D}(A_2) = H_N^3(\Omega)$, et selon Théorème 1.8., on a

$$\mathcal{D}(A_2^\theta) = \left[H^1(\Omega)\,, H_N^3(\Omega)\right]_\theta \ \ ,\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

selon Théorème 1.7.,

$$\mathcal{D}(A_2^\theta) = \begin{cases} H^{2\theta+1}(\Omega)\,, \ 0 \leq \theta < \frac{1}{4}, \\ H_N^{2\theta+1}(\Omega)\,, \ \frac{1}{4} < \theta \leq 1, \end{cases} \tag{3.7}$$

avec équivalence des normes

$$c_\Omega^{-1} \|u\|_{H^{2\theta+1}(\Omega)} \leq \left\|A_2^\theta u\right\|_{H^1(\Omega)} \leq c_\Omega \|u\|_{H^{2\theta+1}(\Omega)}\,, \quad u \in \mathcal{D}(A_2^\theta), \tag{3.8}$$

$c_\Omega > 0$ étant déterminé par Ω. Nous prenons aussi l'opérateur $A_3 = \gamma$ in $H_N^2(\Omega)$ dans les conditions limites de Neumann sur $\partial\Omega$, comme il s'agit d'un opérateur auto-adjoint défini et positif sur $H_N^2(\Omega)$, selon Théorème 1.8., on a

$$\mathcal{D}(A_3^\theta) = \left[H_N^2(\Omega)\,, H_N^2(\Omega)\right]_\theta,\ 0 \leq \theta \leq 1,$$

grâce au Théorème 1.7., nous avons $[H_N^2(\Omega)\,, H_N^2(\Omega)]_\theta = H_N^2(\Omega)$, donc

$$\mathcal{D}(A_3^\theta) = H_N^2(\Omega) \ \ 0 \leq \theta \leq 1. \tag{3.9}$$

Compte tenu de la Proposition 1.8., l'opérateur A est sectoriel de X de domaine

$$\mathcal{D}(A) = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \ ;\ u \in H_N^2(\Omega)\,,\ v \in H_N^2(\Omega)\,,\ w \in H_N^3(\Omega) \right\},$$

De plus $A^\theta = diag\left\{A_1^\theta, A_2^\theta, A_3^\theta\right\}$ de (3.4), (3.5), (3.6), (3.7), (3.9), alors

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} ;\ u \in H^{2\theta}(\Omega),\ v \in H^{2\theta+1}(\Omega),\ w \in H_N^2(\Omega) \right\},\ 0 < \theta < \frac{1}{4},$$

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} ;\ u \in H^{2\theta}(\Omega),\ v \in H_N^{2\theta+1}(\Omega),\ w \in H_N^2(\Omega) \right\},\ \frac{1}{4} < \theta < \frac{3}{4},$$

$$\mathcal{D}(A^\theta) = \left\{ U = \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} ;\ u \in H_N^{2\theta}(\Omega),\ v \in H_N^{2\theta+1}(\Omega),\ w \in H_N^2(\Omega) \right\},\ \frac{3}{4} < \theta \leq 1.$$

2$^{\text{ème}}$étape : Construction de solution locale

Après l'étude de l'opérateur A, on doit passer à l'étude de deuxième membre qui est défini avec la fonction non-linéaire de $\mathcal{D}(A^{\frac{\delta}{2}})$ $\left(\frac{d}{2} < \delta < \theta \leq 2\right)$ sur X par

$$F(U) = \begin{pmatrix} -\rho\nabla.(u\nabla w) - \chi\nabla.(u\nabla v) + u \\ \lambda u \\ -\gamma(w-1)v \end{pmatrix}.$$

Soient $U, V \in \mathcal{D}(A^{\frac{\theta}{2}})$ $\left(\frac{d}{2} < \delta < \theta \leq 2\right)$, tels que $U = \begin{pmatrix} u_1 \\ v_1 \\ w_1 \end{pmatrix}$, $V = \begin{pmatrix} u_2 \\ v_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$, on a

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_X \leq\ & \rho \|\nabla.(u_1\nabla w_1 - u_2\nabla w_2)\|_{L^2(\Omega)} + \|u_1 - u_2\|_{L^2(\Omega)} \\ & \chi \|\nabla.(u_1\nabla v_1 - u_2\nabla v_2)\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u_1 - u_2\|_{H^1(\Omega)} \\ & +\gamma \|(w_1+1)v_1 - (w_2+1)v_2\|_{H^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.10}$$

de (1.9), on a

$$\begin{aligned} & \|\nabla.(u_1\nabla w_1 - u_2\nabla w_2)\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \|(u_1 - u_2)\nabla w_1 + u_2(\nabla w_1 - \nabla w_2)\|_{H^1(\Omega)} \\ \leq\ & \|w_1\|_{H^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H^\delta(\Omega)} + \|w_1 - w_2\|_{H^2(\Omega)} \|u_2\|_{H^\delta(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.11}$$

de même

$$\begin{aligned} & \|\nabla.\left(u_1\nabla v_1 \ - u_2\nabla v_2\ \right)\|_{L^2(\Omega)} \\ \leq \ & \|v_1\|_{H^2(\Omega)} \|u_1 - u_2\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_1 - v_2\|_{H^2(\Omega)} \|u_2\|_{H^\delta(\Omega)}\,, \end{aligned} \tag{3.12}$$

de (1.8) , on a

$$\begin{aligned} & \|(w_1+1)v_1 \ - (w_2+1)v_2\|_{H^2(\Omega)} \\ \leq \ & c_\Omega \|v_1 - v_2\|_{H^2(\Omega)} \|w_1 + 1\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + c_\Omega \|w_1 - w_2\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} \|v_2\|_{H^2(\Omega)}\,, \end{aligned} \tag{3.13}$$

d'après (1.5) , on a

$$\|u_1 \ - u_2\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \|u_1 \ - u_2\|_{H^1(\Omega)} \leq (1+\lambda) \|u_1 - u_2\|_{H^\delta(\Omega)}\,. \tag{3.14}$$

On substitue (3.11) , (3.12) , (3.13) , (3.14) dans (3.10) , alors il existe une constante positive c_Ω, pour tout $\frac{d}{2} < \delta < \theta \leq 2$,

$$\begin{aligned} \|F(U) - F(V)\|_X \leq c_\Omega & \left(\|u_2\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_1\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + \|w_1\|_{H^2(\Omega)} + \|w_2\|_{H^2(\Omega)} + 1\right) \\ \times & \left(\|u_1 - u_2\|_{H^\theta(\Omega)} + \|v_1 - v_2\|_{H^{\theta+1}(\Omega)} + \|w_1 - w_2\|_{H^2(\Omega)}\right), \end{aligned}$$

on peut écrire pour $\frac{d}{2} < \delta < \theta \leq 2$:

$$\|F(U) - F(V)\|_X \leq c_\Omega \left[\|U\|_{\mathcal{D}(A^{\frac{\delta}{2}})} + \|V\|_{\mathcal{D}(A^{\frac{\delta}{2}})} + 1\right] \|U - V\|_{\mathcal{D}(A^{\frac{\theta}{2}})}\,,$$

donc, on peut appliquer le Théorème 2.1. pour achever la prouve. □

3.3 Positivité des solutions locales

Dans toute la suite on supposera que Ω est un ouvert régulier et borné de $\mathbb{R}^d\,(d = 2, 3)$. Avant d'établir le théorème d'existence globale en temps, on commencera de prouver les résultats préliminaires suivants.

Proposition 3.1. *Pour $x \in \Omega, t \geq 0,$ si $u_0 \geq 0,$ alors*

$$u\,(t, x) \geq 0. \tag{3.15}$$

Démonstration. Soit $H(s)$ la fonction de troncature définie sur $\mathbb{R}$ par

$$H(s) = \begin{cases} \frac{1}{2}s^2 & \text{si } s < 0, \\ 0 & \text{si } s \geq 0. \end{cases}$$

On note $\psi(t) = \int_\Omega H(u(t,x))dx$, on écrit

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= (H'(u),\ u_t) \\ &= H'(u), D\triangle u - \rho\nabla.(u\nabla w) - \chi\nabla.(u\nabla v). \end{aligned} \tag{3.16}$$

En observant que $H'(s) = s$ si $s < 0$ et $H'(s) = 0$ si $s \geq 0$ et on $H'(s) \in H^1(\Omega)$ pour $s \in H^1(\Omega)$, on obtient

$$(H'(u),\ D\triangle u) = -D\int_\Omega \nabla(H'(u)).\nabla u dx = -D\|\nabla(H'(u))\|^2_{L^2(\Omega)}. \tag{3.17}$$

De plus, en supposant $\dfrac{\partial v_0}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$, on aura $\dfrac{\partial v}{\partial \nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ et par suite en utilisant l'observation précédente et grâce à l'inégalité de Hölder, donc

$$\begin{aligned} & (H'(u), -\nabla.(u\nabla w)) \\ = & \int_\Omega u\nabla(H'(u)).\nabla w dx \\ \leq & \|\nabla w\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(H'(u))\|_{L^2(\Omega)}\|H'(u)\|_{L^4(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.18}$$

de même

$$\begin{aligned} & (H'(u), -\nabla.(u\nabla v)) \\ \leq & \|\nabla v\|_{L^4(\Omega)}\|\nabla(H'(u))\|_{L^2(\Omega)}\|H'(u)\|_{L^4(\Omega)}, \end{aligned}$$

d'après le Théorème 3.1., on a

$$\|\nabla v\|_{L^4(\Omega)} + \|\nabla w\|_{L^4(\Omega)} \leq c_{U_0}, \tag{3.19}$$

on reprend (3.18) , (3.19) En utilisant l'inégalité de sobolev (1.11) pour $d = 2,\ \left(r = 4, p = 2, a = \frac{1}{2}, q = 2\right)$, avec celle de young, on trouve

$$\begin{aligned} c_{U_0}\|H'(u)\|^2_{L^4(\Omega)} &\leq c_{T,U_0}\|H'(u)\|_{H^1(\Omega)}\|H'(u)\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq \frac{D}{2}\|\nabla(H'(u))\|^2 + c_{U_0}\|H'(u)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

de même type, en utilisant l'inégalité de sobolev (1.10) pour $d = 3,\ \left(r = 4, p = 2, a = \frac{3}{4}, q = 2\right)$, on trouve

$$\begin{aligned} c_{U_0}\|H'(u)\|^2_{L^4(\Omega)} &\leq c_{U_0}\|H'(u)\|^{\frac{3}{4}}_{H^1(\Omega)}\|H'(u)\|^{\frac{1}{4}}_{L^2(\Omega)} \qquad (3.21) \\ &\leq \frac{D}{2}\|\nabla(H'(u))\|^2_{L^2(\Omega)} + c_{U_0}\|H'(u)\|^2_{L^2(\Omega)}, \end{aligned}$$

on substitue (3.17) , (3.18) , (3.19) , (3.20) , (3.21) dans (3.16) , on a

$$\psi'(t) \leq c_{U_0}\psi(t),$$

d'après l''inégalité de Gronwall on a $\psi(t) \leq \psi(0)\exp\left(tc_{U_0}\right)$. Comme $\psi(0) = 0$ alors $\psi(t) = 0$ d'où $u \geq 0$. $\square$

Proposition 3.2. *Pour* $x \in \Omega,\ t \geq 0,$ *si* $v_0, u_0 \geq 0,$ *alors*

$$v\left(t, x\right) \geq 0. \tag{3.22}$$

Démonstration. On pose $\psi(t) = \int\limits_{\Omega} H(v)dx$ tels que

$$vH'(v) \geq 0, H'(v) \leq 0, \tag{3.23}$$

en utilisant la troisième équation de système (3.1) , de (3.15) , (3.23)

$$\begin{aligned} \psi'(t) &= \int\limits_{\Omega} H'(v)v_t dx \\ &= \alpha\int\limits_{\Omega} H'(v)\triangle v + \lambda\int\limits_{\Omega} uH'(v) - \beta\int\limits_{\Omega} vH'(v)dx \\ &= -\alpha\int\limits_{\Omega} \left|\nabla H'(v)\right|^2 dx + \lambda\int\limits_{\Omega} uH'(v)dx - \beta\int\limits_{\Omega} vH'(v)dx, \end{aligned}$$

on a donc

$$\psi'(t) \leq 0,$$

d'après l'inégalité de Gronwall on a $\psi(t) \leq \psi(0)$. Comme $\psi(0) = 0$ alors $\psi(t) = 0$ d'où $v \geq 0$. $\square$

Chapitre 4

Etude d'existence globale pour le modèle d'haptotaxie

Ce chapitre est consacré à l'étude de l'existence globale de système haptotaxie sans terme source, nous montrons que la solution locale construite précédemment est en fait une solution globale. L'outil principal est le Théorème 2.1. donné dans chapitre 2, ce qui nous permet de montrer par absurde l'existence globale en temps de la solution qu'avec seulement des estimations de la norme $\left\|A^{\delta}U(t)\right\|$, pour $0 \leq t \leq T_U$, où A est l'opérateur associé à (3.4) et δ est un exposant fixé approprié.

4.1 Etude du modèle d'haptotaxie

Nous traitons dans ce chapitre le modèle introduit par Anderson et Chaplain [1] :

$$\left\{\begin{array}{ll} \partial_t u = D\triangle u - \rho\nabla.(u\nabla w), & \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u, & t > 0,\ x \in \Omega, \\ \partial_t w = -\gamma w v, & \\ \left\{\begin{array}{l} \partial_\nu u = 0, \quad \partial_\nu v = 0, \quad \partial_\nu w_0 = 0 \quad \text{in } \partial\Omega, \\ u(0,.) = u_0,\ v(0,.) = v_0,\ w(0,.) = w_0 \ \text{ on } \Omega. \end{array}\right. & \end{array}\right. \tag{4.1}$$

Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$ un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et les données initiales u_0, v_0, w_0 sont supposés être positifs. Les coefficients $D, \rho, \chi, \gamma, \lambda, \alpha, \beta$ sont données des constantes positives.

Dans toute la suite, δ désigne une constante donnée vérifiant $\frac{d}{2} < \delta < 2$ $(d = 2, 3)$.

4.2 Estimation a priori

Dans ce qui suit, nous supposons que Ω est un domaine régulier et borné de $\mathbb{R}^d(d = 2; 3)$, Nous prouverons l'existence globale dans l'espace (3.2) .

Selon le Théorème 2.1. on utilisera l'absurde pour voir qu'il suffit de montrer l'existece d'une fonction croissante continue $c(.)$ qui satisfait l'estimation $\|A^{\frac{\delta}{2}}U\| \leq \exp\left(c(\|A^{\frac{\delta}{2}}U_0\|)\,(1 + T_U)\right)$, $0 \leq t \leq T_U$. Pour cela, nous devons partager la preuve en trois étapes.

Proposition 4.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1, il existe une fonction croissante continue* $c(.)$ *vérifiant l'estimation suivante pour tout* $0 \leq t \leq T_U$:

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{\delta}{2}}U\| &= \|u\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + \|w\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq \exp\left(c(\|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{H^\delta(\Omega)})\,(1 + T_U)\right) \\ &\leq \exp\left(c(\|A^{\frac{\delta}{2}}U_0\|)\,(1 + T_U)\right). \end{aligned} \tag{4.2}$$

Démonstration. **1$^{\text{ère}}$étape :** En intégrant la première équation de (4.1) sur Ω en appliquant la formule de Green

$$\begin{aligned} &\int_\Omega \partial_t u dx \\ &= \int_\Omega \nabla.\left[D\nabla u - \rho u \nabla w\,\right] dx \\ &= \int_{\partial\Omega} \left(D\nabla u - \rho u \nabla w\,\right).\vec{\nu} d\sigma, \end{aligned}$$

on a $\nabla u.\vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$. De plus, en supposant $\nabla w_0.\vec{\nu} = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient $\nabla w.\vec{\nu} = 0$. Comme $u, w \geq 0$, donc :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)}. \tag{4.3}$$

Ensuite, nous pouvons facilement prouver pour tout $t \geq 0$:

$$w(t,x) = w_0(x) e^{-\int_0^t \gamma v(\tau,x) d\tau},$$

de plus, si $u_{0,} v_0 \geq 0$, on observe de (3.15) , (3.22) que $u_, v \geq 0$, alors

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{4.4}$$

La deuxième équation de (4.1) s'écrit $v_t = -A_2 v + \lambda u$ où $A_2 = -\alpha \triangle + \beta$, de (1.35) pour $0 \leq t \leq T_U$,

$$v(t) = e^{-tA_2} v_0 + \lambda \int_0^t e^{-(t-s)A_2} u \; ds,$$

par conséquent

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\| e^{-tA_2} v_0 \right\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \int_0^t \left\| e^{-(t-s)A_2} u \right\|_{L^2(\Omega)} ds,$$

les inégalités de semi-groupes (1.36) et (1.37), en utilisant la formule $\mu^{-z} \Gamma(z) = \int_0^{+\infty} s^{z-1} e^{-\mu s} ds$ $\left(Re(z) \in \mathbb{R}_+^* \right)$, nous avons pour tous $t \geq 0$:

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(\Omega)} &\leq c_\Omega \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + c_\Omega \lambda \int_0^t \left(1 + (t-s)^{-\frac{d}{4}} \right) e^{-\lambda_1 (t-s)} \|u_0\|_{L^1(\Omega)} ds \\ &\leq c_\Omega \|v_0\|_{L^2(\Omega)} + c_\Omega \lambda (\lambda_1^{-1} + \lambda_1^{-\frac{4-d}{4}} \Gamma(\tfrac{4-d}{4})) \|u_0\|_{L^1(\Omega)} . \end{aligned} \tag{4.5}$$

2èmeétape : On montre que la norme de U dans X est bornée, nous employons un changement de variable de la forme $u \to \frac{u}{\varphi}$, où

$$\varphi = e^{\frac{\rho}{D} w}. \tag{4.6}$$

La première équation de (4.1) s'écrit sous la forme

$$\varphi (\frac{u}{\varphi})_t = D \nabla . \left(\varphi \nabla (\frac{u}{\varphi}) \right) - u (\frac{\varphi_t}{\varphi}). \tag{4.7}$$

De plus, φ est satisfait la formule $\varphi_t = -\frac{\gamma\rho}{D} \varphi w v$, en multipliant l'équation (4.7) par $\frac{2u}{\varphi}$ et intégrant sur Ω, on obtient

$$\frac{d}{dt} \int_\Omega \varphi (\frac{u}{\varphi})^2 dx + 2D \int_\Omega \varphi \left| \nabla (\frac{u}{\varphi}) \right|^2 dx = \frac{\gamma\rho}{D} \int_\Omega (\frac{u}{\varphi})^2 \varphi w v dx, \tag{4.8}$$

ensuite, nous appliquons l'inégalité de Hölder pour (4.8)

$$\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(\frac{u}{\varphi})^2dx + 2D\int_\Omega \varphi\left|\nabla(\frac{u}{\varphi})\right|^2 dx \leq \tfrac{\gamma\rho}{D}\|\varphi w\|_{L^\infty(\Omega)}\|\frac{u}{\varphi}\|^2_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)},$$

compte tenu de (4.6),(4.4) , (4.5) , nous pouvons conclure que $\|\varphi w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}e^{\frac{\rho}{D}\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}}$. Par conséquent

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(\frac{u}{\varphi})^2dx + 2D\int_\Omega \varphi\left|\nabla(\frac{u}{\varphi})\right|^2 dx\\ \leq\ & (\|v_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)})\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}e^{\frac{\rho}{D}\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}}\|\frac{u}{\varphi}\|^2_{L^4(\Omega)},\end{aligned}$$

nous appliquons les inégalités (1.16) , (1.20) (1.15) ,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(\frac{u}{\varphi})^2dx + D\int_\Omega \varphi\left|\nabla(\frac{u}{\varphi})\right|^2 dx\\ \leq\ & \tfrac{D}{2}\|\nabla(\frac{u}{\varphi})\|^2_{L^2(\Omega)} + \|\frac{u}{\varphi}\|^2_{L^1(\Omega)}c_{\|w_0\|_{H^2(\Omega)},\|u_0\|_{L^1(\Omega)},\|v_0\|_{L^2(\Omega)}},\end{aligned}$$

comme $1 \leq \varphi$,

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_\Omega \varphi(\frac{u}{\varphi})^2dx + \tfrac{D}{2}\int_\Omega \varphi\left|\nabla(\frac{u}{\varphi})\right|^2 dx\\ \leq\ & c_{\|w_0\|_{H^2(\Omega)},\|u_0\|_{L^1(\Omega)},\|v_0\|_{L^2(\Omega)}}\int_\Omega \varphi(\frac{u}{\varphi})^2dx,\end{aligned}$$

on applique l'inégalité de Gronwall,

$$\int_\Omega \varphi(\frac{u}{\varphi})^2dx \leq e^{\int_0^t c_{\|w_0\|_{H^2(\Omega)},\|u_0\|_{L^1(\Omega)},\|v_0\|_{L^2(\Omega)}}ds}\int_\Omega \varphi(w_0)(\frac{u_0}{\varphi(w_0)})^2dx,$$

grâce à $1 \leq \varphi \leq e^{\frac{\rho}{D}\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}}$, pour $0 \leq t \leq T_U$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)}(t) \leq e^{c(\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}+\|u_0\|_{L^2(\Omega)}+\|v_0\|_{L^2(\Omega)})(1+T_U)}. \tag{4.9}$$

Il reste à prouver l'estimation dans l'espace X pour les deux autres composantes de la solution v, w de (4.1) . Multipliant la deuxième équation de (4.1) par $A_2 v$ et intégrant sur Ω, on prend en compte (4.9), pour $0 \leq t \leq T_U$

$$\begin{aligned}\int_0^t \|v\|^2_{H^2(\Omega)} &\leq c_\Omega\|v_0\|^2_{H^1(\Omega)} + c_\Omega\int_0^t \|u\|^2_{L^2(\Omega)}ds\\ &\leq c_\Omega\|v_0\|^2_{H^1(\Omega)} + c_\Omega T_U\sup_{0\leq t\leq T_U}\|u\|^2_{L^2(\Omega)}.\end{aligned} \tag{4.10}$$

Ensuite, on traite l'équation correspondante w, nous savons que pour $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ $(d = 2, 3)$, alors $\|w_0 e^{-\int_0^t \gamma v}\|^2_{H^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|w_0\|^2_{H^2(\Omega)} \|e^{-\int_0^t \gamma v}\|^2_{H^2(\Omega)}$. En utilisant les mêmes arguments que dans (1.4), pour $0 \leq t \leq T_U$

$$\|w\|^2_{H^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|w_0\|^2_{H^2(\Omega)} \left(1 + \int_0^t \|v\|_{H^2(\Omega)}\right)^2 \|e^{-\int_0^t \gamma v}\|^2_{L^\infty(\Omega)},$$

on fait appel à (4.9), (4.10), pour $0 \leq t \leq T_U$

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} \leq e^{c(\|v_0\|_{H^1(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)})(1+T_U)}. \tag{4.11}$$

3$^{\grave{e}me}$étape : La présente étape est consacrée à l'estimation de la solution dans l'espace $D(A^{\frac{\delta}{2}})$, en utilisant (4.1), (1.34), (1.36)[avec un exposant $\frac{d}{2} < \delta' < \delta$ avec une constante $c_\Omega > 0$, tel que

$$\begin{aligned}
&\left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \left\|e^{-tA_1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u_0\right\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} e^{-(t-s)A_1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \|\nabla.(u \nabla w)\|_{L^2(\Omega)} ds \\
&\leq c_\Omega \|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \int_0^t c_\Omega (1 + (t-s)^{-\frac{\delta}{2}}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} \|u\|_{H^{\delta'}(\Omega)} \|w\|_{H^2(\Omega)} ds,
\end{aligned} \tag{4.12}$$

par les mêmes arguments que dans [26. 2.119, page 98], de (3.6), on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{\delta'}(\Omega)} &\leq c_\Omega \left\|A_1^{\frac{\delta'}{2}} u\right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{2\delta^2 c_\Omega}{\delta'(\delta-\delta')} \sin\left(\frac{\pi\delta'}{\delta}\right) \|u\|^{1-\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)} . \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|^{\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)} \\
&\leq c_{\Omega,\delta,\delta'} \|u\|^{1-\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)} . \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|^{\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

de (4.9), (4.11) en appliquant l'inégalité de Young, pour tout $0 < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
&\|w\|_{H^2(\Omega)} \|u\|_{H^{\delta'}(\Omega)} \\
\leq\ & e^{c(\|v_0\|_{H^1(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)})(1+T_U)} \|u\|^{1-\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)} . \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|^{\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & e^{c(\|v_0\|_{H^1(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)})(1+T_U)} \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|^{\frac{\delta'}{\delta}}_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & e^{c_\varepsilon(\|v_0\|_{H^1(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)} + \|u_0\|_{L^2(\Omega)})(1+T_U)} + \varepsilon \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{4.13}$$

par conséquent, en regroupant (4.11), (4.12) et (4.13), on a

$$\sup_{0\leq t\leq T_U}\left\|A_1^{\frac{\delta}{2}}u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \left\|u_0\right\|_{H^\delta(\Omega)} + c_{\Omega,\varepsilon}\left(1+T_U\right)^{\frac{3\delta-\delta'}{\delta-\delta'}}\int_0^{+\infty}(1+(t-s)^{-\frac{\delta}{2}})e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)}ds$$
$$+\frac{\varepsilon c_\Omega\int_0^{+\infty}(1+(t-s)^{-\frac{\delta}{2}})e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)}ds}{2}\sup_{0\leq t\leq T_U}\left\|A_1^{\frac{\delta}{2}}u\right\|_{L^2(\Omega)},$$

soit $\varepsilon^{-1} = \int_0^{+\infty} s^{-\frac{\delta}{2}}e^{-\frac{\lambda_1 s}{2}}ds = (\frac{\lambda_1}{2})^{1-\frac{\delta}{2}}\Gamma\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$, il s'ensuit que

$$\|u\|_{H^\delta(\Omega)} \leq e^{c(\|v_0\|_{H^1(\Omega)}+\|w_0\|_{H^2(\Omega)}+\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)})(1+T_U)},\ 0\leq t\leq T_U. \tag{4.14}$$

Par une technique similaire, grâce à (4.14), pour tout $0\leq t\leq T_U$

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}\\
&\leq \|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} + \lambda c_\Omega\int_0^t\left\|A_2^{\frac{1}{2}}e^{-(t-s)A_2}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))}\|u\|_{H^\delta(\Omega)}ds\\
&\leq \|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} + (\sup_{0\leq t\leq T_U}\|u\|_{H^\delta(\Omega)})\lambda c_\Omega\int_0^t(1+(t-s)^{-\frac{1}{2}})e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)}ds\\
&\leq e^{c(\|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}+\|w_0\|_{H^2(\Omega)}+\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)})(1+T_U)}.
\end{aligned}\tag{4.15}$$

Enfin nous utilisons (4.11), (4.14), (4.15), pour $0\leq t\leq T_U$,

$$\begin{aligned}
&\|u\|_{H^\delta(\Omega)}+\|v\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}+\|w\|_{H^2(\Omega)}\\
\leq\ &\exp\left(c(\|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)}+\|w_0\|_{H^2(\Omega)}+\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)})\left(1+T_U\right)\right).
\end{aligned}$$

□

4.3 Existence globale de la solution

Nous prouverons maintenant le résultat suivant.

Théorème 4.6. Pour tout $U_0=(u_0,v_0,w_0)\in\mathcal{K}$, il existe une solution globale unique de (4.1) dans l'espace de fonction :

$$u\in C(]0,+\infty[\,;H_N^2(\Omega))\cap C([0,+\infty[\,;H_N^\delta(\Omega))\cap C^1\,]0,+\infty[\,;L^2(\Omega)),$$
$$v\in C(]0,+\infty[\,;H_N^3(\Omega))\cap C([0,+\infty[\,;H_N^{1+\delta}(\Omega))\cap C^1(]0,+\infty[\,;H^1(\Omega)),$$
$$w\in C([0,+\infty[\,;H_N^2(\Omega))\cap C^1(]0,+\infty[\,;H_N^2(\Omega)).$$

Démonstration. En utilisant les estimations a priori (4.2), nous allons construire une solution globale à (4.1).

Pour $U_0 \in \mathcal{K}$, nous savons qu'il existe une unique solution locale sur l'intervalle $[0, T_{U_0}]$.

Par absurde, Supposons que $[t_1, T_V]$ est l'intervalle maximal pour l'existence de la solution locale V du problème (4.1) avec la valeur initiale $U(t_1) = U_1 \in \mathcal{K}$

(avec $T_V - \tau_1 = t_1 < T_{U_0}$ où $0 < \tau_1 < T_V$ est arbitraire). D'autre part le Théorème 3.2. nous permet de construire nouvelle solution à l'intervalle $[t_1, t_1 + \tau_2]$ (pour une valeur $\tau_2 > 0$) qui ne depend que de borne superieur de$\left\| A^{\frac{\delta}{2}} V(t) \right\|$. L'estimation (4.2) assure pour toute solution locale V l'estimation $\left\| A^{\frac{\delta}{2}} V(t) \right\| \leq \exp\left(c(\|A^{\frac{\delta}{2}} U_1\|)\,(1 + T_V)\right)$, $t_1 \leq t \leq T_V$, qui nous permet de dire que τ_2 dépend de $\exp\left(c(\|A^{\frac{\delta}{2}} U_1\|)\,(1 + T_V)\right)$ (de (3.3) , $\|A^{\frac{\delta}{2}} U_1\| \leq C_{\|A^{\frac{\delta}{2}} U_0\|}$ donc τ_2 est indépendant de τ_1). Si on prend $\tau_1 < \tau_2$, alors nous obtenons $t_1 + \tau_2 = T_V - \tau_1 + \tau_2 > T_V$, ce qui contredit l'hypothèse d'intervalle maximal.

Cet argument est significatif pour tout temps fini $T_V > 0$. Alors, nous concluons l'existence globale de la solution. Pour toute valeur initiale $U_0 \in \mathcal{K}$, il existe une solution globale unique pour (4.1) avec $U(t) \in \mathcal{K}, 0 \leq t < \infty$, dans l'espace :

$$U \in C(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{\frac{\delta}{2}})) \cap C^1((]0, +\infty[; X).$$

□

Chapitre 5

Etude de l'existence globale pour le modèle d'haptotaxie-chemotaxie

Dans ce présent chapitre, nous montrons que la solution locale précédemment construite pour le système chimiotaxie-haptotaxie sans terme source est en fait une solution globale.

On a déja vu au chapitre 2 que ce type de modèle est traité au [11], [22] et [23] en présence du terme source qui facilite l'étude d'existence globale sous l'hypothèse $\frac{\chi}{\mu}$ petite.

Par contre dans notre travail, on prend le coefficient du terme de source logistique $\mu = 0$, ce qui nous oblige à mettre l'hypothèse $\|u_0\|_{L^1(\Omega)}$ suffisamment petite pour établir une estimation a priori en vue d'obtenir une solution globale.

5.1 Etude d'un modèle haptotaxie-chemotaxie

Nous traitons maintenant le modèle introduit par [13], décrivant à la fois le phénomène d'invasion et de chimiotaxie :

$$\begin{cases} \partial_t u = D\triangle u - \rho\nabla.(u\nabla w) - \chi\nabla.(u\nabla v), \\ \\ \partial_t v = \alpha\triangle v - \beta v + \lambda u, \qquad\qquad t>0,\ x\in\ \Omega, \\ \\ \partial_t w = -\gamma w v, \\ \\ \begin{cases} \partial_n u = 0, \quad \partial_n v = 0, \quad \partial_n w_0 = 0 \quad \text{in } \partial\Omega, \\ u(0,.) = u_0\ ,\ v(0,.) = v_0,\ w(0,.) = w_0 \ \text{ on } \Omega. \end{cases} \end{cases} \tag{5.1}$$

Nous supposerons que $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un domaine borné de frontière régulière $\partial\Omega$ et les données initiales u_0, v_0, w_0 sont supposées être positives. Les coefficients $D, \rho, \chi, \gamma, \lambda, \alpha, \beta$ sont des constantes positives données.

5.2 Estimation a priori

Nous prouverons l'existence globale. Compte tenu du Théorème 2.1. on utilisera l'absurde pour voir qu'il suffit de montrer l'existece d'une fonction croissante continue $F(.)$ qui satisfait l'estimation $\|A^{\frac{\delta}{2}}U\| \leq F(t + \|A^{\frac{\delta}{2}}U_0\|)$, $0 \leq t \leq T_U$. Pour prouver cette dernière, nous devons partager la preuve en quatre étapes.

Proposition 5.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.2., et en supposant que la masse initiale vérifie pour une certaine constante positive $c_\Omega > 0$ l'inégalité*

$$\|u_0\|_{L^1(\Omega)} \leq \frac{D}{(\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}+1)c_\Omega},$$

alors il existe une fonction croissante continue F, telle que pour tout $0 \leq t \leq T_U$

$$\begin{aligned} \|A^{\frac{\delta}{2}}U\| &= \|u\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + \|w\|_{H^2(\Omega)} \\ &\leq F(T_U + \|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^{\delta+1}(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}) \\ &\leq F(T_U + \|A^{\frac{\delta}{2}}U_0\|). \end{aligned} \tag{5.2}$$

Remarque 5.1. *La constante c_Ω de cette proposition précédente est obtenue par l'inégalité de Sobolev (1.11) et la régularité maximale de Sobolev (Cf [18. Théorème 9.1, chapitre IV]).*

Démonstration. **1$^{\text{ère}}$étape :**

En intégrant la première équation de (5.1) sur Ω en appliquant la formule de Green

$$\begin{aligned}&\int_\Omega \partial_t u dx\\ =& \int_\Omega \nabla.\left[D\nabla u - \rho u \nabla w \ - \chi u \nabla v\right] dx\\ =& \int_{\partial\Omega} \left(D\nabla u - \rho u \nabla w \ - \chi u \nabla v\right).\vec{n} d\sigma,\end{aligned}$$

on a $\nabla u.\vec{n} = \nabla v.\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$. De plus, en supposant $\nabla w_0.\vec{n} = 0$ sur $\partial\Omega$ on obtient $\nabla w.\vec{n} = 0$. Comme $u, w \geq 0$, donc :

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \|u_0\|_{L^1(\Omega)}. \tag{5.3}$$

Ensuite, nous pouvons facilement prouver l'égalité suivante pour tout $t \geq 0$:

$$w(t,x) = w_0(x)e^{-\int_0^t \gamma v(\tau,x)d\tau}, \tag{5.4}$$

de plus, si $u_{0,}v_0 \geq 0$, on observe de (3.15) , (3.22) que $u_, v \geq 0$, alors

$$\|w\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}. \tag{5.5}$$

2$^{\text{ème}}$étape :

On montre dans cette étape l'existence globale pour l'espaces $C([0,\infty[\,; X)$. En multipliant la première équation de (5.1) par u et on intégre sur Ω, on a

$$\frac{d}{2dt}\|u\|^2 + D\|\nabla u\|^2 = -\frac{\rho}{2}\int_\Omega u^2 \triangle w dx - \frac{\chi}{2}\int_\Omega u^2 \triangle v dx, \tag{5.6}$$

de (5.4) , on a

$$\begin{aligned}\triangle w &= (\triangle w_0 - 2\gamma \nabla w_0 \int_0^t \nabla v(\tau,x)d\tau - \gamma w_0 \int_0^t \triangle v(\tau,x)d\tau\\ &\quad + w_0(\gamma \int_0^t \nabla v(\tau,x)d\tau)^2)e^{-\gamma\int_0^t v(\tau,x)d\tau},\end{aligned}$$

avec la deuxième équation de (5.1), nous avons

$$\begin{aligned}\triangle w &= (\triangle w_0 - 2\gamma \nabla w_0 \int_0^t \nabla v(\tau,x)d\tau - \tfrac{\gamma}{\alpha} w_0 (v - v_0) \\ &\quad + \tfrac{\gamma}{\alpha} w_0 \int_0^t (\lambda u - \beta v) d\tau + w_0 (\gamma \int_0^t \nabla v(\tau,x)d\tau)^2) e^{-\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau},\end{aligned}$$

grâce à $\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau e^{-\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau} \leq e$, en abandonnant certains termes négatifs, avec la deuxième équation de (5.1), nous obtenons que

$$\triangle w \geq \left(\triangle w_0 - \tfrac{\gamma}{\alpha} w_0 v\right) e^{-\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau} + 2\gamma \nabla w_0 \nabla e^{-\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau} - \tfrac{\beta e^{-1}}{\alpha} w_0.$$

on revient à (5.6), on a

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{2dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + D\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \tfrac{\rho}{2}\int_\Omega u^2((-\triangle w_0 + \tfrac{\gamma}{\delta} w_0 v) e^{-\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau} + 2\gamma \nabla w_0 \nabla e^{-\gamma \int_0^t v(\tau,x)d\tau})dx \\ & + \tfrac{\beta\rho e^{-1}}{2\alpha}\int_\Omega w_0 u^2 dx - \tfrac{\chi}{2}\int_\Omega u^2 \triangle v dx \\ \leq\ & \tfrac{\rho}{2}\int_\Omega u^2(|\triangle w_0| + \tfrac{\gamma}{\alpha} w_0 v)dx + \gamma\rho \int_\Omega u^2 |\triangle w_0| dx \\ & + 2\rho\gamma \int_\Omega u |\nabla u . \nabla w_0| dx + \tfrac{\beta\rho e^{-1}}{2\alpha}\int_\Omega w_0 u^2 dx - \tfrac{\chi}{2}\int_\Omega u^2 \triangle v dx,\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}&\tfrac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + 2D\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \lambda(2\gamma+1)\int_\Omega u^2(|\triangle w_0| + \left(\tfrac{\beta\lambda e^{-1}}{2\alpha} + \tfrac{\gamma}{\alpha} v\right) w_0)dx \\ & + 4\lambda\gamma \int_\Omega u |\nabla u . \nabla w_0| dx + \chi \int_\Omega u^2 \triangle v dx. \qquad (5.7)\end{aligned}$$

On applique l'inégalité de Hölder pour (5.7)

$$\begin{aligned}&\int_\Omega u^2(|\triangle w_0| + \left(\tfrac{\beta\rho e^{-1}}{2\alpha} + \tfrac{\gamma}{\alpha} v\right) w_0)dx \\ \leq\ & \|u\|^2_{L^4(\Omega)}(\|\triangle w_0\|_{L^2(\Omega)} + \|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\tfrac{\beta\rho e^{-1}}{2\alpha} + \tfrac{\gamma}{\alpha}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right)), \qquad (5.8)\end{aligned}$$

d'après les inégalités de Hölder avec cauchy, on a

$$\begin{aligned} 4\rho\gamma \int_\Omega u\,|\nabla u.\nabla w_0|\,dx &\leq D\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\rho\gamma}{D}\|u\nabla w_0\|^2_{L^2(\Omega)} \\ &\leq D\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\rho\gamma}{D}\|\nabla w_0\|^2_{L^4(\Omega)}\|u\|^2_{L^4(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.9}$$

en utilisant les mêmes arguments que (5.9) et comme $A_2 = -\alpha\triangle + \beta$, on a

$$\begin{aligned} \chi \int_\Omega u^2 \triangle v dx &= -\tfrac{\chi}{\alpha}\int_\Omega u^2 A_2 v dx + \tfrac{\chi\beta}{\alpha}\int_\Omega u^2 v dx \\ &\leq \tfrac{\chi}{\alpha}\|u\|^2_{L^3(\Omega)}\|A_2 v\|_{L^3(\Omega)} + \tfrac{\chi\beta}{\alpha}\|u\|^2_{L^4(\Omega)}\|v\|_{L^2(\Omega)}, \end{aligned} \tag{5.10}$$

nous substituons les inégalités (5.8) , (5.9) , (5.10) dans (5.7), on a

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + D\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} \\ \leq\ & \left(\epsilon\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} + c_\epsilon\|u_0\|^2_{L^1(\Omega)}\right)(\|\triangle w_0\|_{L^2(\Omega)} + \tfrac{\rho\gamma}{D}\|\nabla w_0\|^2_{L^4(\Omega)} + \tfrac{\chi\beta}{\alpha}\|v\|_{L^2(\Omega)} \\ &+\|w_0\|_{L^\infty(\Omega)}\left(\tfrac{\rho\beta e^{-1}}{2\alpha} + \tfrac{\gamma}{\alpha}\|v\|_{L^2(\Omega)}\right)) + \left(\tfrac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}}\|u\|^3_{L^3(\Omega)} + \tfrac{1}{2}\|A_2 v\|^3_{L^3(\Omega)}. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Une application des résultats standards sur la régularité maximale de Sobolev pour la deuxième équation de (5.1), fournit $c_\Omega > 0$ (Cf [18. Théorème 9.1, chapitre IV]), nous obtenons

$$\|A_2^{\frac{1}{2}} v\|^3_{L^3(\Omega)} + \int_0^t \|A_2 v\|^3_{L^3(\Omega)} ds \leq c_\Omega\left(\int_0^t \|u\|^3_{L^3(\Omega)} ds + \|A_2 v_0\|^3_{L^3(\Omega)}\right), \tag{5.12}$$

on utilise (1.14) , (4.5) , en prenant $\epsilon = \frac{D}{2}$, en intègrant l'inégalité (5.11) sur $[0, t]$,

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L^2(\Omega)} + \tfrac{D}{2}\int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ \leq\ & (\left(\tfrac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} + 1)c_\Omega \int_0^t \|u_0\|_{L^1(\Omega)}\|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ &+ \int_0^t c(\|u_0\|^3_{L^1(\Omega)} + \|w_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|A_2 v_0\|^3_{L^3(\Omega)})ds. \end{aligned}$$

En supposant que la donnée initiale vérifie $\frac{D}{2} - (\left(\frac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} + 1)c_\Omega\|u_0\|_{L^1(\Omega)} \geq 0$, pour $0 \leq t \leq T_U$,

$$\begin{aligned} &\|u\|^2_{L^2(\Omega)}(t) + \left(\frac{D}{2} - (\left(\tfrac{\chi}{\alpha}\right)^{\frac{3}{2}} + 1)c_\Omega\|u_0\|_{L^1(\Omega)}\right)\int_0^t \|\nabla u\|^2_{L^2(\Omega)} ds \\ \leq\ & (T_U + 1)c(\|u_0\|^3_{L^1(\Omega)} + \|w_0\|^2_{H^2(\Omega)} + \|A_2 v_0\|^3_{L^3(\Omega)}). \end{aligned} \tag{5.13}$$

3$^{\text{ème}}$étape :

On commence par montrer que la norme $\|\nabla v\|_{L^3(\Omega)}$ est bornée. En intégrant la norme $\|u\|_{L^3(\Omega)}^3$ sur $[0,t]$, et de (1.11), (5.13), on a

$$\begin{aligned}\int_0^t \|u\|_{L^3(\Omega)}^3 ds &\leq c_\Omega \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \int_0^t \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + c_\Omega \|u_0\|_{L^1(\Omega)} \sup_{0\leq s\leq T_U} \|u\|_{L^2(\Omega)}^2(s) \\ &\leq (T_U+1)c(\|u_0\|_{L^1(\Omega)}^3 + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|A_2 v_0\|_{L^3(\Omega)}^3),\end{aligned}$$

on remplace dans (5.12), et de (3.8), pour $0 \leq t \leq T_U$

$$\|\nabla v\|_{L^3(\Omega)} \leq (T_U+1)c(\|u_0\|_{L^1(\Omega)}^3 + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}^2 + \|A_2 v_0\|_{L^3(\Omega)}^3). \tag{5.14}$$

Maintenant de (5.1), (1.35), pour $0 \leq t \leq T_U$,

$$A_1^{\frac{1}{8}} u(t) = A_1^{\frac{1}{8}} e^{-tA_1} u_0 - \int_0^t A_1^{\frac{1}{8}} e^{-(t-s)A_1} \left[\rho \nabla.(u\nabla w) + \chi \nabla.(u\nabla v)\right] ds,$$

de (1.36), (1.37), avec le paramètre $\frac{8}{7} < \xi < 2$, on a

$$\begin{aligned}&\left\|A_1^{\frac{1}{8}} u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|e^{-tA_1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \left\|A_1^{\frac{1}{8}} u_0\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &+ \int_0^t \left\|A_1^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A_1}\right\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\Omega), L^\xi(\Omega)\right)} \left(\rho \|u\nabla w\|_{L^\xi(\Omega)} + \chi \|u\nabla v\|_{L^\xi(\Omega)}\right) ds,\end{aligned}$$

en appliquant l'inégalité de Hölder $\left(\xi' = \frac{3\xi}{3-\xi}, 3\right)$,

$$\begin{aligned}&\left\|A_1^{\frac{1}{8}} u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|e^{-tA_1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \left\|A_1^{\frac{1}{8}} u_0\right\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\|A_1^{\frac{5}{8}} e^{-(t-s)A_1}\right\|_{\mathcal{L}\left(L^2(\Omega), L^\xi(\Omega)\right)} \\ &\times \left(\rho \|u\|_{L^{\xi'}(\Omega)} \|\nabla w\|_{L^3(\Omega)} + \chi \|u\|_{L^{\xi'}(\Omega)} \|\nabla v\|_{L^3(\Omega)}\right) ds,\end{aligned}$$

on choisit $\frac{24}{13} < \xi' \leq \frac{5}{2}$, d'après (1.5), on peut écrire $H^{\frac{1}{5}}(\Omega) \subset L^{\xi'}(\Omega), H^1(\Omega) \subset L^3(\Omega)$, on aboutit à l'estimation

$$\begin{aligned}\left\|A_1^{\frac{1}{8}} u\right\|_{L^2(\Omega)} &\leq \|u_0\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)} + \int_0^t c_\Omega (1+(t-s)^{-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} \|u\|_{H^{\frac{1}{5}}(\Omega)} \\ &\qquad \left(\|\nabla w\|_{H^1(\Omega)} + \|\nabla v\|_{L^3(\Omega)} + 1\right) ds.\end{aligned}$$

Et par conséquent, en utilisant (4.10) , (4.11) , en tenant compte (5.13) , (5.14) , pour tout $0 \leq t \leq T_U$

$$\|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)} + \int_0^t c_\Omega(1+(t-s)^{-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)})e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} \|u\|_{H^{\frac{1}{5}}(\Omega)}$$
$$c\left(\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}\right)\left(1+T_U^2\right) ds, \tag{5.15}$$

par les mêmes arguments que dans [26. 2.119, page 98], de (3.6) , on a

$$\begin{aligned}\left(1+T_U^2\right)\|u\|_{H^{\frac{1}{5}}(\Omega)} &\leq c_\Omega\left(1+T_U^2\right)\left\|A_1^{\frac{1}{10}}u\right\|_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 25c_\Omega \sin\left(\tfrac{\pi 4}{5}\right)\left(1+T_U^2\right)\|u\|^{\frac{1}{5}}_{L^2(\Omega)} \cdot \left\|A_1^{\frac{1}{8}}u\right\|^{\frac{4}{5}}_{L^2(\Omega)} \\ &\leq 25c_\Omega \sin\left(\tfrac{\pi 4}{5}\right)\left(1+T_U^2\right)\left(1+T_U^2\right)^{\frac{1}{5}} \cdot \left\|A_1^{\frac{1}{8}}u\right\|^{\frac{4}{5}}_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

de (5.13) en appliquant l'inégalité de Young, pour tout $0 < \varepsilon$, (5.15) devient

$$\begin{aligned}&\sup_{0\leq t\leq T_U}\left\|A_1^{\frac{1}{8}}u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} \\ &+c_{\Omega,\varepsilon}\left(1+T_U^2\right)^6\int_0^{+\infty}(1+(t-s)^{-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)})e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)}ds \\ &+\frac{\varepsilon c_\Omega\int_0^{+\infty}(1+(t-s)^{-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)})e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)}ds}{2}\sup_{0\leq t\leq T_U}\left\|A_1^{\frac{1}{8}}u\right\|_{L^2(\Omega)},\end{aligned}$$

soit $\varepsilon^{-1} = c_\Omega(\frac{\lambda_1}{2})^{1-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)}\Gamma\left(1-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)\right) = c_\Omega\int_0^{+\infty}s^{-\frac{5}{8}-\frac{1}{2\xi}(2-\xi)}e^{-\frac{\lambda_1 s}{2}}ds$, il s'ensuit que

$$\sup_{0\leq t\leq T_U}\|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)} \leq \left(1+T_U^2\right)^6 c\left(\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}\right). \tag{5.16}$$

La deuxième équation de (4.1) s'écrit $v_t = -A_2v + \lambda u$ où $A_2 = -\alpha\triangle + \beta$, de (1.35) pour $0 \leq t \leq T_U$,

$$A_2v(t) = A_2e^{-tA_2}v_0 + \int_0^t A_2e^{-(t-s)A_2}[\lambda u]\,ds,\ 0 \leq t \leq T_U,$$

de même manière, avec (1.25) , (1.37) ,

$$
\begin{aligned}
&\|A_2 v\|_{L^2(\Omega)} \\
\leq\ & \left\|e^{-tA_2}\right\| \|A_2 v_0\|_{L^2(\Omega)} + \lambda \int_0^t \left\|A_2^{\frac{3}{8}} e^{-(t-s)A_2}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)} ds \\
\leq\ & c_\Omega \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + (\sup_{0\leq t\leq T_U} \|u\|_{H^{\frac{1}{4}}(\Omega)}) \int_0^t c_\Omega (1+(t-s)^{-\frac{3}{8}}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} ds,
\end{aligned}
$$

d'où d'après (5.16) , pour $0 \leq t \leq T_U$:

$$
\|v\|_{H^2(\Omega)} + \|w\|_{H^2(\Omega)} \leq \left(1+T_U^2\right)^6 c \left(\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}\right). \tag{5.17}
$$

4ème étape :

On répète les procédures des étapes $2, 3$.

De (5.1) , (1.25) et (1.37) , alors il existe une constantes c_Ω(dépendante de Ω), on a

$$
\begin{aligned}
&\left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq \left\|e^{-tA_1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u_0\right\|_{L^2(\Omega)} + \int_0^t \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} e^{-(t-s)A_1}\right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \\
&\times \Big(\|u\|_{H^\delta(\Omega)} \|w\|_{H^2(\Omega)} + \|u\|_{H^\delta(\Omega)} \|v\|_{H^2(\Omega)}\Big) ds,
\end{aligned}
$$

grâce à l'injection continue (1.5) avec $\left(s = \frac{1}{4}, p = 2, d = 2, q = \xi'\right)$, $H^{\frac{1}{4}}(\Omega) \subset L^{\xi'}(\Omega)$,

$$
\begin{aligned}
\left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u\right\|_{L^2(\Omega)} \leq\ & c_\Omega \left\|A_1^{\frac{\delta}{2}} u_0\right\|_{L^2(\Omega)} + c_\Omega \int_0^t (1+(t-s)^{-\frac{\delta}{2}}) e^{-\frac{\lambda_1 (t-s)}{2}} \|u\|_{H^\delta(\Omega)} \\
&\times \Big(\|w\|_{H^2(\Omega)} + \|v\|_{H^2(\Omega)}\Big) ds,
\end{aligned}
$$

nous substituons (4.11) , (5.17), pour $0 \leq t \leq T_U$

$$
\begin{aligned}
&\|u\|_{H^\delta(\Omega)} \leq \|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \int_0^t (1+(t-s)^{-\frac{\delta}{2}}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} \|u\|_{H^\delta(\Omega)} \\
&c \left(\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}\right) \left(1+T_U^2\right)^6 ds,
\end{aligned} \tag{5.18}
$$

par les mêmes arguments que dans [26. 2.119, page 98], de (3.6) , on a

$$\begin{aligned}
\|u\|_{H^{\delta'}(\Omega)} &\leq c_\Omega \left\| A_1^{\frac{\delta'}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)} \\
&\leq \frac{2\delta^2 c_\Omega}{\delta'(\delta-\delta')} \sin\left(\frac{\pi\delta'}{\delta}\right) \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{\delta'}{\delta}} \cdot \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{\delta'}{\delta}} \\
&\leq c_{\Omega,\delta,\delta'} \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{\delta'}{\delta}} \cdot \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{\delta'}{\delta}},
\end{aligned}$$

de (5.13) en appliquant l'inégalité de Young, pour tout $0 < \varepsilon$

$$\begin{aligned}
\left(1+T_U^2\right)^6 \|u\|_{H^{\delta'}(\Omega)} &\leq c_\Omega \left(1+T_U^2\right)^6 \|u\|_{L^2(\Omega)}^{1-\frac{\delta'}{\delta}} \cdot \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{\delta'}{\delta}} \\
&\leq c_\Omega \left(1+T_U^2\right)^6 (1+T_U)^{1-\frac{\delta'}{\delta}} \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)}^{\frac{\delta'}{\delta}} \\
&\leq c_{\Omega,\varepsilon} \left(1+T_U^2\right)^{\frac{7\delta-\delta'}{\delta-\delta'}} + \varepsilon \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned} \tag{5.19}$$

par conséquent, en regroupant (5.18) et (5.19) ,

$$\begin{aligned}
&\sup_{0\leq t\leq T_U} \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)} \leq c_\Omega \|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} \\
&+ c_{\Omega,\varepsilon} \left(1+T_U^2\right)^{\frac{7\delta-\delta'}{\delta-\delta'}} \int_0^{+\infty} (1+(t-s)^{-\frac{\delta}{2}}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} ds \\
&+ \frac{\varepsilon c_\Omega \int_0^{+\infty} (1+(t-s)^{-\frac{\delta}{2}}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} ds}{2} \sup_{0\leq t\leq T_U} \left\| A_1^{\frac{\delta}{2}} u \right\|_{L^2(\Omega)},
\end{aligned}$$

soit $\varepsilon^{-1} = c_\Omega \int_0^{+\infty} s^{-\frac{\delta}{2}} e^{-\frac{\lambda_1 s}{2}} ds = c_\Omega (\frac{\lambda_1}{2})^{1-\frac{\delta}{2}} \Gamma\left(1-\frac{\delta}{2}\right)$, il s'ensuit que pour tout $0 \leq t \leq T_U$

$$\|u\|_{H^\delta(\Omega)} \leq \left(1+T_U^2\right)^{\frac{7\delta-\delta'}{\delta-\delta'}} c \left(\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^2(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)}\right). \tag{5.20}$$

De (5.1) , (1.35) , on a

$$A_2^{\frac{\delta}{2}} v(t) = A_2^{\frac{\delta}{2}} e^{-tA_2} v_0 + \int_0^t A_2^{\frac{\delta}{2}} e^{-(t-s)A_2} [\alpha u] ds, \ 0 \leq t \leq T_U,$$

de même manière, avec (1.25), (1.37),

$$\begin{aligned}
&\|v\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \\
&\leq \|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} + \lambda c_\Omega \int_0^t \left\| A_2^{\frac{1}{2}} e^{-(t-s)A_2} \right\|_{\mathcal{L}(L^2(\Omega))} \|u\|_{H^\delta(\Omega)}\, ds \\
&\leq \|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} + (\sup_{0\leq t\leq T_U} \|u\|_{H^\delta(\Omega)}) \lambda c_\Omega \int_0^t (1+(t-s)^{-\frac{1}{2}}) e^{-\frac{\lambda_1}{2}(t-s)} ds,
\end{aligned}$$

d'après (5.20), on a pour $0 \leq t \leq T_U$:

$$\|v\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} \leq \left(1+T_U^2\right)^{\frac{7\delta-\delta'}{\delta-\delta'}} c \left(\|u_0\|_{H^\delta(\Omega)} + \|v_0\|_{H^{1+\delta}(\Omega)} + \|w_0\|_{H^2(\Omega)} \right). \tag{5.21}$$

Finalement, nous utilisons (4.11), (5.20) et (5.21); alors pour $0 \leq t \leq T_U$, il existe une fonction croissante continue F satisfait l'estimation (5.2). □

5.3 Existence globale de la solution

Nous pouvons maintenant montrer le résultat suivant.

Théorème 4.6. Pour tout $U_0 = (u_0, v_0, w_0) \in \mathcal{K}$, il existe une solution globale unique de (5.1) dans l'espace de fonction :

$$\begin{aligned}
u &\in C(]0,+\infty[\,; H_N^2(\Omega)) \cap C([0,+\infty[\,; H_N^\delta(\Omega)) \cap C^1\,]0,+\infty[\,; L^2(\Omega)), \\
v &\in C(]0,+\infty[\,; H_N^3(\Omega)) \cap C([0,+\infty[\,; H_N^{1+\delta}(\Omega)) \cap C^1(]0,+\infty[\,; H^1(\Omega)), \\
w &\in C([0,+\infty[\,; H_N^2(\Omega)) \cap C^1(]0,+\infty[\,; H_N^2(\Omega)).
\end{aligned}$$

Démonstration. En utilisant les estimations a priori (5.2), nous allons construire une solution globale à (5.1).

Pour $U_0 \in \mathcal{K}$, nous savons qu'il existe une unique une solution locale sur un intervalle $[0, T_{U_0}]$.

Par absurde, Supposons que $[t_1, T_V]$ est l'intervalle maximal pour l'existence de la solution locale V du problème (5.1) avec la valeur initiale $U(t_1) = U_1 \in \mathcal{K}$

(avec $T_V - \tau_1 = t_1 < T_{U_0}$ où $0 < \tau_1 < T_V$ est arbitraire). D'autre part le Théorème 3.2. nous permet de construire nouvelle solution à l'intervalle $[t_1, t_1 + \tau_2]$ (pour une valeur $\tau_2 > 0$) qui ne depend que de borne superieur de $\left\| A^{\frac{\delta}{2}} V(t) \right\|$. L'estimation (5.2) assure pour toute solution locale V la formule$\left\| A^{\frac{\delta}{2}} V(t) \right\| \leq F(\|A^{\frac{\delta}{2}} U_1\| + T_V)$), $t_1 \leq t \leq T_V$, qui nous permet de dire que τ_2 dépend de $F(\|A^{\frac{\delta}{2}} U_1\| + T_V))$ (de (3.3), $\|A^{\frac{\delta}{2}} U_1\| \leq C_{U_0}$ donc τ_2 est indépendant de τ_1). Si on prend $\tau_1 < \tau_2$, alors nous obtenons $t_1 + \tau_2 = T_V - \tau_1 + \tau_2 > T_V$, ce qui contredit l'hypothèse d'intervalle maximal.

Cet argument est significatif pour tout temps fini $T_V > 0$. Alors, nous concluons l'existence globale de la solution. Pour toute valeur initiale $U_0 \in \mathcal{K}$, il existe une solution globale unique pour (5.1) avec $U(t) \in \mathcal{K}, 0 \leq t < \infty$, dans l'espace :

$$U \in C(]0, +\infty[; \mathcal{D}(A)) \cap C([0, +\infty[; \mathcal{D}(A^{\frac{\delta}{2}})) \cap C^1((]0, +\infty[; X).$$

$\square$

Bibliographie

[1] A.R.A. Anderson, M.A.J. Chaplain, E. L. NEW MAN, R. J. C. STEELEB and A. M. THOMPSON, Mathematical Modelling of Tumour Invasion and Metastasis, Journal of Theof-etical Medcene. Vol 2 (1999), pp. 129-151.

[2] M. AUBERT, Modélisation de la migration de cellules tumorales, 2008.

[3] H. AMANN, Dual semigroups and second order linear elliptic boundary value problems. Israel J. Math. 45 (1983), 225-254.

[4] H. AMANN, Existence and regularity for semilinear parabolic evolution equations. Annali Scuola Norm. Sup. Pisa. (4) 11 (1984), 593-676.

[5] H. AMANN, Global existence for semilinear parabolic systems. J. reine angew. Math. 360 (1985), 47-83.

[6] H. AMANN, Quasilinear evolution equations and parabolic systems. Trans. Amer. Math. See. in press.

[7] A. Kubo, Mathematical analysis of some models of tumour growth, advances in biomedical research, (2004) 446–451.

[8] A. Kubo, T. Suzuki, A mathematical models of tumour angiogenesis, Biol. Biomed. 204 (2007) 48–55.

[9] A. Kubo, T. Suzuki, Asymptotic behavior of the solution to a parabolic ODE system modeling tumour growth, Differential Integral Equations,17 (2004) 721–736.

[10] H . BREZIS, Analyse fonctionelle . Theorie et applications. (1983) Paris.

[11] X. Cao. Boundedness in a three-dimensional chemotaxis–haptotaxis model, Z. Angew. Math. Phys. (2016) 67-11.

[12] M. Chaplin & al, Mathematical modeling of dynamic adaptive of tumour angiogenesis, Journal of Theoretical Biology 241 (2006) 564–589.

[13] M.A.J Chaplain and G. Lolas, Mathematical modelling of cancer invasion of tissue : Dynamic heterogeneity. NETW HETEROG MEDIA. Volume 1, Number 3, September. (2006) 399–439.

[14] J. Ignacio Tello and M. Winkler, A Chemotaxis System with Logistic Source, Communications in Partial Differential Equations, 32, 849-877, (2007).

[15] M. Delgado. C. Morales-Rodrigo, On a parabolic elliptic chemotactic model with coupled boundary condition, 2010. Nonlinear Analysis Real World Applications 11(5) :3884-3902.

[16] L.C Evans, Partial Differential Equations, Graduate studies in mathematics, American Mathematcal Society,Volume 19, (1998).

[17] J .L . Lions, Magenes, Problémes aux limites non homogénes etapplication, (1968), Paris.

[18] O. Laydzhenskaya & al, Linear and quasi-linear Equations Of Parabolic Type, American Mathematical Society, 1968.

[19] A. Marciniak-Czochra, M. Ptashnik. Boundenness of solutions of a haptotaxis model, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences Vol. 20, No. 3 (2010) 449-476.

[20] M. Medved,A new approach to an analysis of Henry type integral inequalities and their Bihari type versions, Journal of Mathematical Analysis and Applications 214 (1997) 349–366 .

[21] G. Tcanu, C. Morales-Rodrigo. Aqymptotic behavior of global solutions to a model of cell invasion, Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, Vol. 20, No. 9 (2010) 1721-1758.

[22] Y. Tao. Global existence of classical solutions to a combined chemotaxis–haptotaxis model with logistic source, J. Math. Anal. Appl. 354 (2009) 60–69.

[23] Y. Tao, M. Wang. Global solution for a chemotactic–haptotactic model of cancer invasion, Nonlinearity21(2008) 2221–2238.

[24] Y. Tao, M. Winkler. A chemotaxis-haptotaxis system with haptoattractant remodeling : Boundedness enforced by mild saturation of signal production, Communications on Pure & Applied Analysis, 2019, 18 (4) : 2047-2067.

[25] H. Tsamda and N. Aissa, Global Existence And Uniqueness Of A Parabolic Haptotaxis Model, Applied Mathematics E-Notes, 18(2018), 284-294.

[26] A. Yagi, Abstract Parabolic Evolution equations,Springer Monographs in Mathematics, 2000.

[27] M. Winkler. Aggregation vs. global diffusive behavior in the higher-dimensional Keller-Segel model, Fakultät für Mathematik, Universität Duisburg-Essen, 45117 Essen, Germany.