

N° d'ordre : 31/2013–M/MT

**République Algérienne Démocratique et Populaire**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene**

**Faculté de Mathématique**



## **MEMOIRE**

**Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER**

**EN: MATHEMATIQUE**

**Spécialité : Système Dynamiques et Géométrie**

**Par : BENSAASAA KAMEL**

### **Thème**

**Problème axisymétrique d'une inclusion rigide  
dans une plaque élastique épaisse et fissurée**

Soutenu publiquement le 03/10/2013 devant le jury composé de :

R. Bebbouchi	Professeur,	à l'USTHB	Président
B. Kebli	Professeur,	à l'ENP	Directeur de mémoire
A. Kessi	Professeur,	à l'USTHB	Examineur
T. Benzekri	Maitre de conférences A,	à l'USTHB	Examinatrice

# Dédicace

Je dédie ce fruit de ce travail à ma chère mère, et  
à l'âme de mon père et mon frère Ilyas et à toute ma  
famille notamment mon épouse et mes  
chers enfants Safaa, Abderraouf, Rihab, au  
professeur B. Kebli et mon frère A. Boudina.

# Remerciements

Je tiens au premier lieu à témoigner ma reconnaissance à DIEU tout puissant de m'avoir donné le courage et la force de mener à terme ce projet, qui m'a ouvert les portes du savoir.

Après je tiens à exprimer ma profonde gratitude et sincères remerciements à mon directeur de ma thèse Mr : *S. Kebli* professeur à l'ENP pour l'honneur qu'il me fait en assurant la direction et le suivi scientifique et technique pour sa grande contribution à l'aboutissement à ce présent mémoire. C'est grand honneur d'avoir travaillé à son côté, ses qualités scientifiques et abnégations dans la recherche sont un véritable exemple pour moi.

Je vous remercie pour votre précieuse présence assistance, votre disponibilité et l'intérêt que vous avez manifesté pour ce modeste travail.

Je tiens à remercier *Mr. A. Boudina* maitre assistant au centre universitaire Elkhemis pour son aide dans la réalisation des résultats de la partie numérique.

Je tiens à remercier *Mr. R. Bebbouchi*. Professeur à l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury de soutenance. J'exprime aussi mes sincères remerciements à *Mr. A. Kessi* Professeur à l'USTHB et *M<sup>me</sup>. T. Benzakri* Professeur à l'USTHB pour avoir bien voulu accepter d'examiner ce travail.

Je passe aussi mes grands remerciements à tous mes enseignants de l'année préparatoire.

En fin je passe une dédicace spéciale à tous mes frères, à tous mes chers camarades, à mes amis intimes et mes collègues d'étude.

# Table des matières

Résumé .....	01
Introduction générale .....	02

## Chapitre 1. Rappels Mathématiques

<b>1.1 Fonctions de Bessel</b> .....	05
Introduction .....	05
1.1.1 L'équation différentielle de Bessel .....	05
1.1.2 Résolution de l'équation de Bessel.....	05
1.1.3 Définition .....	07
1.1.4 Relation entre $J_n$ et $J_{-n}$ .....	07
1.1.5 Formules de récurrences pour les fonctions de Bessel de première espèce.....	07
1.1.6 Fonction de Bessel d'indice demi entier.....	10
1.1.7 Fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier.....	11
1.1.8 Représentation intégrale de $J_n$ .....	13
1.1.9 Fonction de Bessel de deuxième espèce .....	14
1.1.10 formule d'addition.....	15
1.1.11 Développements asymptotiques des fonctions de Bessel.....	15
<b>1.2 Transformation de Hankel</b> .....	16
1.2.1 Définition .....	16
1.2.2 Propriété de la transformation de Hankel.....	16
1.2.3 Exemple .....	17
<b>1.3 Equations intégrales</b> .....	18
<b>1.3.1 Equation de Volterra</b> .....	18
1.3.1.1 Notions fondamentales.....	18
1.3.1.2 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra .....	18
1.3.1.3 Méthode des approximations successives .....	20
<b>1.3.2 Equation de Fredholm</b> .....	21

1.3.3.1 définition.....	22
-------------------------	----

## **Chapitre 2. Rappels Elasticité linéaire, Mécanique de la rupture**

<b>2. 1 Rappel d'élasticité linéaire.....</b>	<b>23</b>
Introduction.....	23
2. 1. 1 Contrainte.....	23
2. 1. 1. 1 Définition.....	23
2. 1. 2 Tenseur des contraintes.....	24
2. 1. 3 Déformation.....	25
2. 1. 3. 1 Etat local de déformation.....	25
2. 2. 3. 2 Les petites déformations.....	26
2.1.4 Equation d'équilibre.....	28
2.1.5. Les modules élastiques.....	29
2.1.5.1 Le module d'élasticité.....	29
2.1.5.2 Coefficient de Poisson.....	31
2.1.5.3 Module d'élasticité de cisaillement.....	32
<b>2.1.6 Les équations de l'élasticité.....</b>	<b>33</b>
2.1.6.1 La loi de Hooke.....	33
2.1.6.1.1 Relation de Young.....	33
2.1.6.1.2 Relation de Lamé.....	34
2.1.6.1.3 Relations entre les modules.....	34
2.1.6.2 L'équation de Lamé.....	34
<b>2. 1.7 Techniques de résolution.....</b>	<b>34</b>
2.1.7.1 Techniques de résolutions analytiques.....	35
2.1.7.1.1 Approche en déplacement.....	35
2.1.7.1.2 Approche en contrainte.....	35
2.1.7.2 Techniques de résolution numériques.....	36
<b>2. 2 Mécanique de la rupture.....</b>	<b>37</b>
2.2.1 Facteur d'intensité de contrainte.....	38

2.2.2 Condition d'amorçage.....	39
---------------------------------	----

## **Chapitre 3. Problème axisymétrique d'une inclusion rigide**

### **Dans une plaque élastique épaisse et fissurée**

Introduction.....	40
<b>3.1</b> Description du problème.....	40
<b>3.2</b> Conditions aux limites du problème.....	41
<b>3.3</b> Système d'équilibre du problème.....	41
<b>3.4</b> Résolution du problème.....	42
<b>3.5</b> Détermination du facteur d'intensité et facteur singulier de contrainte.....	49
<b>3.6</b> Résolution numériques et discussion .....	50
<b>Conclusion</b> .....	56
<b>Conclusion générale</b> .....	57
<b>Perspectives</b> .....	58
<b>Références bibliographiques</b> .....	59

## **Résumé :**

On étudie la déformation du milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure d'un disque rigide. Les deux frontières sont délimitées par des supports rigides dont le contact est lisse.

En utilisant la méthode de transformation intégrale de Hankel, on réduit les trois conditions mixtes aux systèmes des équations intégrales triples. Moyennant la formule de Gegenbauer et la somme intégrale représentée par la fonction de Bessel, on obtient des systèmes d'équations algébriques linéaires infinis pour déterminer la fonction inconnue.

L'expression analytique du déplacement, de la contrainte et du facteur d'intensité de contrainte sont discutés, représentés et illustrés graphiquement.

**Mots-Clés :** Plaque élastique, Disque rigide, Fissure circulaire, Equations intégrales triples, Facteur d'intensité de contrainte.

## **Abstract:**

We study the axisymmetric deformation of an elastic layer due to the indentation of a penny-shaped crack by a disc-shaped rigid inclusion in its middle plane. The two surfaces of the thick layer are supposed to be smoothly clamped. Using the Hankel integral transforms method, we reduce the three-part mixed boundary value problem to a system of triple integral equations. With the help of the Gegenbauer formula and some integral representations of the Bessel function, we get an infinite system of algebraic equations for determining the unknown function. The expression of the stress intensity factors is given analytically. Some quantities of physical interest are shown graphically followed by a discussion of the effect of the radii of the inclusion and the crack as well as the thickness medium on the layer deformation.

**Key Words:** Elastic layer, Disc rigid inclusion, Penny-shaped crack, Triple integral equations, Stress intensity factor.

## Introduction générale :

Ces dernières années, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude des fissures dans des solides. Elle se développe activement grâce à la mécanique des milieux continus. L'analyse du champ de contraintes et de déplacements d'une fissure d'un solide élastique est un problème classique de l'élasticité tridimensionnelle. C'est également un problème d'intérêt fondamental pour l'étude de la propagation des fissures dans les matériaux.

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique admet une symétrie de révolution autour de l'axe vertical et si le chargement et les conditions limites du problème étudié le sont aussi. Dans ce cas, la solution à obtenir est axisymétrique, c'est-à-dire indépendante de l'angle polaire.

Le problème de détermination du champ de contrainte autour d'une fissure dans un milieu élastique infini a été discuté pour la première fois par Sennott [26] qui a donné la solution analytique des problèmes axisymétriques par la méthode de transformation intégrale de Hankel. Une grande partie des études postérieures des problèmes concernés par les fissures circulaires ont été basés sur le travail de Sennott et la méthode de Lebedev et Ufliand [15], ont étudié le problème de déformation axisymétrique d'une couche élastique ayant une fissure circulaire dans le cas d'un encastrement lisse des frontières. Les contraintes et les déplacements sont exprimés à l'aide des fonctions harmoniques de Neuber-papkovitch.

Le problème est alors ramené à la résolution d'une équation intégrale de Fredholm ayant un noyau continue et symétrique. Tsai et Fu [9] ont donné un schéma numérique, basé sur la méthode de Kobayashi-Tranter qui utilise le développement de Bessel-Fourier de fonction inconnue, pour résoudre les équations intégrales duales d'un problème mixte des conditions aux limites.

Dans notre travail, on considère un problème de déformation du milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure d'un disque rigide. Les deux frontières sont délimitées par des supports rigides dont le contact est lisse.

Le cas où les deux frontières sont libres de charges présentées par Makoto Sakamoto [20] propose des méthodes différentes de solutions pour résoudre les problèmes des fissures. Il a utilisé quelque relation d'intégrales et les formules de Gegenbauer, transformation intégrale de Hankel. Par développement la fonction inconnue de série de Fourier cosinus, il réduit le système d'équations intégrales triple à un système d'équations algébriques infini.

Le plan de ce mémoire s'articule autour de trois chapitres : dans le premier chapitre on expose un ensemble de rappels mathématiques utilisés dans notre étude du problème, les fonctions de Bessel ainsi que leurs propriétés, transformation de Hankel, et les équations intégrales.



Dans le deuxième chapitre : On donne quelques rappels sur l'élasticité linéaire, et des notions fondamentales sur la mécanique de la rupture.

Le troisième chapitre représentant le noyau du mémoire, on étudie la déformation du milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure d'un disque rigide.

Finalement, on termine ce mémoire par une conclusion générale qui illustre les principaux résultats obtenus à travers cette étude, et une perspective sur les méthodes de résolutions développées dans le sujet proposé.

## Etude bibliographique

**Makoto Sakamoto 2003 [21]** : Le problème de déformation élastique dans le cas axisymétrique d'une couche élastique et épaisse ayant une fissure centrale circulaire a été étudié. Deux cas ont été envisagés, le premier cas correspond à une surface libre de charges alors que le second considère le cas d'un encastrement lisse. En tenant compte des conditions mixtes, le problème a été formulé sous forme d'un système d'équations intégrales duales. Contrairement à l'approche classique, ces dernières équations sont directement réduites, à l'aide de la formule de Gegenbauer, à un système d'équations algébriques linéaires et infini. Le facteur d'intensité de contrainte a été évalué et donné explicitement en fonction des coefficients du système. Des résultats numériques ont été obtenus, sont donnés aussi les conclusions sur l'effet de l'épaisseur de la couche élastique et des conditions aux limites sur les déplacements et les contraintes calculées.

**A. P. S. Selvadurai 1984 [23]** : Il examine le problème du marquage symétrique d'une fissure en angle noyée par une inclusion mince et lisse, en forme de disque circulaire rigide. L'analyse du problème conduit à un système d'équations intégrales triples. Il utilise le développement de Bessel-Fourier de fonction inconnue que l'on résout par approximations. On obtient une expression du facteur d'intensité de contrainte aux frontières de la fissure sous la forme d'une série comportant le rapport du rayon de l'inclusion rigide circulaire au rayon de la fissure.

**M. Sakamoto, T. Hara, T. Shibuya and T. Koizumi.1990 [20]**: Etudié la déformation du milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure d'un disque rigide. Les deux frontières sont libres de charges. Il Propose des méthodes différentes de solutions pour résoudre les problèmes des fissures. Utilise quelque relations d'intégrales et les formules de Gegenbauer. Par développement de

la fonction inconnue en série de Fourier cosinus, il réduit le système d'équations intégrales triples à un système d'équations algébriques infini.

**T. Shibuya, T. Koizumi and I. nakahara.1974 [24]:** Traite un problème de contact élastique pour un demi plan entaillé par un poinçon rigide annulaire plat. Ce qui représente un mixte de valeurs aux limites à trois parties. Si la distribution de la pression sur la région de contact est supposée connue, le problème de contact sera ramené à la résolution d'un système infini d'équations simultanées. Des résultats numériques sont également donnés en illustration des distributions des déplacements et des contraintes dans le demi-espace.

# Chapitre 1. Rappels Mathématiques

## 1. 1. Fonction de Bessel

### Introduction :

Les fonctions de Bessel sont les solutions de l'équation différentielle de Bessel, que l'on rencontre souvent en physique, notamment dans les problèmes d'ondes stationnaires, et dans la résolution de l'équation de Schrödinger, en mécanique quantique pour la diffusion par un centre de forces.

### 1. 1. 1. L'équation différentielle de Bessel :

L'équation de Bessel  $E_\nu$  est l'équation linéaire homogène du second ordre :

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - \nu^2)y = 0, \quad \nu \in \mathbb{R} \quad (1.1.1)$$

Les solutions de cette équation sont appelées fonctions de Bessel d'ordre  $\nu$ .

### 1. 1. 2. Résolution de l'équation de Bessel :

On Cherche une solution de (1.1.1) sous la forme :

$$y(x) = x^\alpha \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k \quad a_0 \neq 0 \quad (1.1.2)$$

On suppose que  $\nu \geq 0$  puisque les équations  $E_\nu$  et  $E_{-\nu}$  sont identiques.

En portant cette expression dans (1.1.1) on aura :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[ (k+\alpha)(k+\alpha-1)x^{k+\alpha} + (k+\alpha)x^{k+\alpha} + x^{k+\alpha+2} - \nu^2 x^{k+\alpha} \right] = 0.$$

On remarque aussi que :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+\alpha+2} = \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+\alpha} \text{ ce qui donne :}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left( (k+\alpha)^2 - \nu^2 \right) a_k x^{k+\alpha} + \sum_{k=2}^{\infty} a_{k-2} x^{k+\alpha} = 0.$$

Par identification des coefficients de  $x^{k+\alpha}$  on trouve :

$$(\alpha^2 - \nu^2) a_0 = 0 \quad (k=0), \quad (1.1.3)$$

$$((1+\alpha)^2 - \nu^2) a_1 = 0 \quad (k=1) \quad (1.1.4)$$

et

$$((k+\alpha)^2 - \nu^2) a_k + a_{k-2} = 0 \quad (k \geq 2), \quad (1.1.5)$$

comme  $a_0 \neq 0$ , on a de l'équation (1.1.3)  $\alpha = \pm \nu$ .

On suppose que  $\alpha = \nu$  d'après (1.1.4) on a  $(2\nu + 1) a_1 = 0$  donc  $a_1 = 0$  puisque  $\nu$  est arbitraire ainsi (1.1.5) donne.

$$a_k = \frac{a_{k-2}}{k(k + 2\nu)} \quad (1.1.6)$$

implique  $a_{2k+1} = 0$ .

Les coefficients  $a_{2k}$  s'obtiennent de (1.1.6) comme suit :

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2 + 2\nu)} \quad ; \quad a_4 = \frac{-a_2}{4(4 + 2\nu)} = \frac{a_0}{2 \cdot 4(2 + 2\nu)(4 + 2\nu)}$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(6 + 2\nu)} = \frac{-a_0}{2 \cdot 4 \cdot 6(2 + 2\nu)(4 + 2\nu)(6 + 2\nu)}$$

et d'une manière générale :

$$a_{2k} = \frac{(-1)^k a_0}{2 \cdot 4 \dots 2k(2 + 2\nu)(4 + 2\nu) \dots (2k + 2\nu)} = \frac{(-1)^k a_0}{2^{2k} k!(1 + \nu)(2 + \nu) \dots (k + \nu)}$$

Afin d'obtenir une solution compacte on pose  $a_0 = \frac{1}{2^\nu \Gamma(1 + \nu)}$  ainsi la solution particulière

correspondante est

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu}$$

où  $\Gamma(k + \nu + 1)$  est la fonction gamma définie comme suit :

$$\Gamma(t) = \int_0^{\infty} x^{t-1} e^{-x} dx \quad x \in \mathbb{R} \quad t > 0,$$

cette fonction possède des propriétés :

$$\Gamma(t) = (t - 1)\Gamma(t - 1)$$

$$\Gamma(1) = 1$$

$$\Gamma(n) = (n-1)! \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}, \quad \lim_{t \rightarrow 0} \Gamma(t) = \pm\infty$$

### 1. 1. 3. Définition :

On appelle fonction de Bessel de premier espèce d'ordre  $\nu$  la fonction  $J_\nu$  définie par :

$$J_\nu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \nu + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \nu} \quad \forall \nu \in \mathbb{R} \quad (1.1.7)$$

**Remarque :**

- 1/ On retrouve la même expression si on remplaçant  $\nu$  par  $-\nu$  ( $\nu \notin \mathbb{N}$ ).
- 2/ L'expression (1.1.7) vérifie aussi l'équation de Bessel si  $\nu = -n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ).

**1. 1. 4. Relation entre  $J_n$  et  $J_{-n}$  ( $n \in \mathbb{N}$ )**

$$J_{-n}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k-n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n}$$

En posant  $k - n = m$  on a

$$J_{-n}(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+m}}{(n+m)! \Gamma(m+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n} = (-1)^n \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m! \Gamma(m+n+1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+n}$$

$$J_{-n}(x) = (-1)^n J_n(x)$$

**1. 1. 5. Formule de récurrence pour les fonctions de Bessel de première espèce**

**Théorème :**

La fonction de Bessel de première espèce  $J_\nu$  vérifie les formules de récurrence suivante :

$$\frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)] = x^{\nu+1} J_\nu(x) \tag{1.1.8}$$

$$\frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_\nu(x)] = -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x) \tag{1.1.9}$$

$$\frac{d}{dx} [J_{\nu+1}(x)] + \frac{\nu+1}{x} J_{\nu+1}(x) - J_\nu(x) = 0 \tag{1.1.10}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(x)] - \frac{\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu+1}(x) = 0 \tag{1.1.11}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(x)] + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) = 0 \tag{1.1.12}$$

$$\frac{d}{dx} [J_\nu(x)] = \frac{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)}{2} \tag{1.1.13}$$

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0 \tag{1.1.14}$$

**Démonstration :**

$$\begin{aligned}
 1) \quad \frac{d}{dx} [x^{\nu+1} J_{\nu+1}(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ x^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k+\nu+1} \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+\nu+1} \right] \\
 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k 2(k+\nu+1) x^{2k+2\nu+1}}{2^{2k+\nu+1} k! \Gamma(k+\nu+2)} \\
 &= x^{\nu+1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)} \\
 &= x^{\nu+1} J_{\nu}(x)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2) \quad \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] &= \frac{d}{dx} \left[ x^{-\nu} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k+\nu} \Gamma(k+\nu+1)} x^{2k+\nu} \right] \\
 &= \frac{d}{dx} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+2)} \right] \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k 2k x^{2k-1}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+\nu+1)}
 \end{aligned}$$

On pose  $k = p+1$  ( $p = 0, 1, 2, \dots$ ) on obtient :

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dx} [x^{-\nu} J_{\nu}(x)] &= \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^{p+1} 2(p+1) x^{2p+1}}{2^{2p+\nu+2} (p+1)! \Gamma(p+\nu+2)} \\
 &= -x^{-\nu} \sum_{p=0}^{\infty} \frac{(-1)^p x^{2p+\nu+1}}{2^{2p+\nu+1} (p)! \Gamma(p+\nu+2)} \\
 &= -x^{-\nu} J_{\nu+1}(x).
 \end{aligned}$$

Les relations (1.1.8) et (1.1.9) peuvent s'écrire.

$$x^{\nu+1} J'_{\nu+1}(x) + (\nu+1)x^{\nu} J_{\nu+1}(x) = x^{\nu+1} J_{\nu}(x)$$

$$x^{-\nu} J'_{\nu}(x) - \nu x^{-\nu-1} J_{\nu}(x) = -x^{\nu} J_{\nu+1}(x).$$

On divise la première relation sur  $x^{\nu+1}$  on obtient :

$$J'_{\nu+1}(x) + \frac{\nu+1}{x} J_{\nu+1}(x) - J_{\nu}(x) = 0,$$

et on multiplie la deuxième par  $x^{\nu}$  on obtient :

$$J'_{\nu+1}(x) - \frac{\nu}{x} J_{\nu+1}(x) + J_{\nu+1}(x) = 0$$

On remplace dans (1.1.10)  $\nu$  par  $\nu-1$  on obtient :

$$J'_\nu(x) + \frac{\nu}{x} J_\nu(x) - J_{\nu-1}(x) = 0.$$

Par addition, les relations (1.1.12) et (1.1.9) on trouve :

$$J'_\nu(x) = \frac{J_{\nu-1}(x) - J_{\nu+1}(x)}{2}$$

Par différence, les relations (1.1.12) et (1.1.9) conduisent à la formule :

$$J_{\nu+1}(x) - \frac{2\nu}{x} J_\nu(x) + J_{\nu-1}(x) = 0.$$

En particulier faisant  $\nu=0$  on a

$$J'_0(x) = \frac{J_{-1}(x) - J_1(x)}{2}.$$

Et comme  $J_{-1}(x) = -J_1(x)$ , on obtient  $J'_0(x) = -J_1(x)$

### 1.1. 6. Fonction de Bessel d'indice demi-entier :

On pose  $\nu = p \pm \frac{1}{2}$  où  $p$  est un entier, les fonctions de Bessel dont l'indice est de cette forme

se relient aux fonctions trigonométriques.

D'après la définition (1.1.3) on a :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k + \frac{1}{2}} = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! 2^{2k} \Gamma(k + \frac{1}{2} + 1)} (x)^{2k}.$$

On remarque que :

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{1}{2} + k + 1\right) &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} + k\right) \\ &= \left(\frac{1}{2} + k\right) \left(\frac{1}{2} + k - 1\right) \dots \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \\ &= \frac{2k+1}{2} \cdot \frac{2k-1}{2} \dots \frac{1}{2} \sqrt{\pi} \\ &= \frac{(2k+1)! \sqrt{\pi}}{2^{2k+1} k!}. \end{aligned}$$

Il vient :

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2(-1)^k}{(2k+1)! \sqrt{\pi}} (x)^{2k} = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)! \sqrt{\pi}} (x)^{2k+1}$$

$$J_{\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \sin x.$$

Envisageant maintenant la fonction :  $J_{-\frac{1}{2}}(x)$

Compte tenu de (1.1.8), on peut écrire :

$$x^{\frac{1}{2}} J_{-\frac{1}{2}}(x) = \frac{d}{dx} \left[ x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \right] = \frac{d}{dx} \left[ \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sin x \right] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos x$$

$$J_{-\frac{1}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \cos x.$$

On conclue maintenant  $J_{\frac{3}{2}}(x)$  .

En utilisant la formule (1.1.9) on a

$$x^{\frac{1}{2}} J_{\frac{3}{2}}(x) = -\frac{d}{dx} \left[ x^{-\frac{1}{2}} J_{\frac{1}{2}}(x) \right] = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{d}{dx} \left( \frac{\sin x}{x} \right),$$

d'où

$$J_{\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( \frac{\sin x}{x} - \cos x \right).$$

De la même manière, en ayant recours à (1.1.8) on peut écrire

$$J_{-\frac{3}{2}}(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi x}} \left( -\sin x - \frac{\cos x}{x} \right)$$

De proche en proche, en utilisant alternativement les formules (1.1.8) et (1.1.9), on calcule

$$J_{\frac{5}{2}}(x) \quad , \quad J_{-\frac{5}{2}}(x) \quad , \quad \dots$$

### 1. 1. 7. Fonction génératrice des fonctions de Bessel d'indice entier :

Envisageant la fonction

$$e^{\frac{x}{2}(t-\frac{1}{t})} = e^{\frac{xt}{2}} e^{-\frac{x}{2t}}$$

et en la développant suivant les puissances de t, elle se présente comme le produit des deux séries absolument convergentes

$$e^{\frac{xt}{2}} = 1 + \frac{tx}{2} + \frac{1}{2!} \frac{t^2 x^2}{2^2} + \dots$$

$$e^{-\frac{x}{2t}} = 1 - \frac{x}{2t} + \frac{1}{2!} \frac{1}{2^2} \frac{x^2}{t^2} + \dots$$

et le coefficient de  $t^n$  dans leur produit s'écrit

$$\frac{1}{n!} \left(\frac{x}{2}\right)^n - \frac{1}{(n+1)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+1} + \frac{1}{(n+2)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{n+2} - \frac{1}{2!} \left(\frac{x}{2}\right)^2 \dots$$



$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[ \frac{1}{n!} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(n+1)} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{2!\Gamma(n+2)} - \dots \right] \\
&= \left(\frac{x}{2}\right)^n \left[ \frac{1}{\Gamma(n+1)} - \left(\frac{x}{2}\right)^2 \frac{1}{\Gamma(n+2)} + \left(\frac{x}{2}\right)^4 \frac{1}{2!\Gamma(n+3)} - \dots \right] = J_n(x).
\end{aligned}$$

Dans ces conditions, il apparaît que l'on a :

$$e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x)t^n \quad (n \text{ entier}), \quad (1.1.15)$$

la série qui figure au membre de droite étant absolument convergente.

La fonction  $e^{\frac{x}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)}$  est la *fonction génératrice* des fonctions de Bessel d'indice entier.

On note que si dans (1.1.15) on change  $t$  par  $-\frac{1}{t}$  on obtient :

$$\begin{aligned}
e^{\frac{x}{2}\left(-\frac{1}{t}+t\right)} &= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x)\left(-\frac{1}{t}\right)^n \\
&= \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} (-1)^n J_n(x)t^{-n}
\end{aligned}$$

En comparant les deux développements précédents, il vient :

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x).$$

On pose dans (1.1.15),  $t = e^{i\theta}$ , d'où  $t - \frac{1}{t} = 2i \sin \theta$ , on obtient :

$$e^{ix \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{n=+\infty} J_n(x)e^{-in\theta},$$

relation qui constitue le développement en série de Fourier de  $e^{ix \sin \theta}$ .

On regroupe dans la série les termes en  $J_n(x)$  et  $J_{-n}(x)$ , compte tenu de la relation

$$J_n(x) = (-1)^n J_{-n}(x),$$

on obtient

$$\begin{aligned}
e^{ix \sin \theta} &= J_0(x) + J_1(x)[e^{i\theta} - e^{-i\theta}] + \dots + J_n(x)[e^{in\theta} - (-1)^n e^{-in\theta}] \\
&= J_0(x) + 2[J_2(x) \cos 2\theta + \dots + J_{2p}(x) \cos 2p\theta + \dots] \\
&\quad + 2i[J_1(x) \sin \theta + \dots + J_{2p+1}(x) \sin(2p+1)\theta + \dots].
\end{aligned}$$

En identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on trouve les développements de Fourier

$$\cos(x \sin \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \cos 2p\theta \quad (1.1.16)$$

$$\sin(x \cos \theta) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} J_{2p+1}(x) \sin(2p+1)\theta \quad (1.1.17)$$

on remplace  $\theta$  par  $\frac{\pi}{2} - \theta$ , on obtient :

$$\cos(x \cos \theta) = J_0(x) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} (-1)^p J_{2p}(x) \cos 2p\theta \quad (1.1.18)$$

$$\sin(x \sin \theta) = 2 \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p J_{2p+1}(x) \sin(2p+1)\theta \quad (1.1.19)$$

### 1. 1. 8. Représentation intégrale de $J_n$

On considère la relation (1.1.16). On multiplie ses deux membres par  $\cos(n\theta)$  et on intègre de 0 à  $\pi$ , cette opération étant légitime en raison de la continuité de  $\cos(x \sin \theta)$ .

On obtient :

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos(x \sin \theta) d\theta = \int_0^{\pi} \cos(n\theta) J_0(x) d\theta + 2 \sum_{p=1}^{\infty} J_{2p}(x) \int_0^{\pi} \cos(n\theta) \cos(2p\theta) d\theta$$

Toutes les intégrales qui figurent au membre de droite sont nulles, sauf celle qui correspond à  $2p = n$  si  $n$  est positif et pair.

Ainsi, pour  $n$  pair

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos(x \sin \theta) d\theta = 2J_n(x) \int_0^{\pi} \cos^2(n\theta) d\theta = \pi J_n(x).$$

On note que pour  $n$  impair

$$\int_0^{\pi} \cos n\theta \cos(x \sin \theta) d\theta = 0.$$

En définitif, pour  $n$  positif pair

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos(x \sin \theta) d\theta$$

En travaillant sur la relation (1.1.19), il vient, après multiplication par  $\sin(n\theta)$  et intégration de 0 à  $\pi$ , si  $n$  est positif impair

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta = \pi J_n(x),$$

et si n pair :

$$\int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta = 0 .$$

Finalement pour n positif impair :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin(n\theta) \sin(x \sin \theta) d\theta .$$

En combinant les résultats précédents, il vient n étant un entier positif quelconque ou nul

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} [\cos(n\theta) \cos(x \sin \theta) + \sin(n\theta) \sin(x \sin \theta)] d\theta$$

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos(n\theta - x \sin \theta) d\theta$$

On note que cette écriture résulte pour tout entier n,

$$| J_n(x) | \leq 1,$$

et que, comme le montre un calcul simple,

$$J_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(n\theta - x \sin \theta)} d\theta .$$

### 1. 1. 9. Fonction de Bessel de deuxième espèce :

On considère la fonction

$$Y_\nu(x) = \frac{\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)}{\sin(\nu\pi)} .$$

Si  $\nu$  n'est pas un nombre entier cette fonction est une solution particulière de l'équation de Bessel.

Si l'on fait tendre  $\nu$  vers un nombre entier n, cette fonction est indéterminée, la règle de l'Hôpital permet de lever cette indétermination et conduit à :

$$\begin{aligned} Y_\nu(x) &= \frac{\frac{\partial}{\partial \nu} [\cos(\nu\pi) J_\nu(x) - J_{-\nu}(x)] \Big|_{\nu=n}}{\frac{\partial}{\partial \nu} [\sin(\nu\pi)] \Big|_{\nu=n}} \\ &= \frac{-\pi \sin(n\pi) J_n(x) + \cos(n\pi) \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n} - \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \Big|_{\nu=n}}{\pi \cos(n\pi)} , \end{aligned}$$

soit

$$Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

**a/ Définition :**

La fonction de Bessel de deuxième espèce  $Y_n$  est donnée par :

$$Y_n(x) = \lim_{\nu \rightarrow n} Y_\nu(x) = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\partial J_\nu(x)}{\partial \nu} - (-1)^n \frac{\partial J_{-\nu}(x)}{\partial \nu} \right]_{\nu=n}$$

**b/ Quelques propriétés de  $Y_n$  :**

1)  $Y_{-n}(x) = (-1)^n Y_n(x)$

2) Les formules de récurrence du théorème (1.1.5) sont aussi valables pour  $Y_n$

3)  $Y_n$  donnée par

$$Y_n(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_n(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(n-k-1)}{k!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k-n} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k+n} [\psi(k+1) + \psi(k+n+1)] \right\}$$

où  $\psi(x) = \frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)}$        $\psi(n+1) = -\gamma + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}$

$$\gamma = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[ \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} - \ln(n) \right] = 0.57781566$$

$\psi(1) = -\gamma$  constante d'Euler.

En particulier

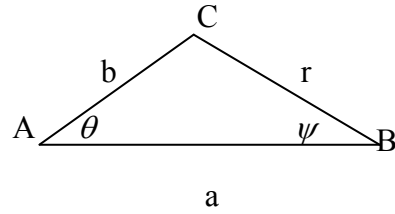
$$Y_0(x) = \frac{1}{\pi} \left\{ 2J_0(x) \ln \frac{x}{2} - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(k!)^2} \left(\frac{x}{2}\right)^{2k} \psi(k+1) \right\},$$

les fonctions  $J_n$  et  $Y_n$  sont linéairement indépendantes

### 1. 1. 10. Formule d'addition

Soit un triangle quelconque ABC telle que,  $AB = a$ ,  $AC = b$  et  $BC = r$

et les angles  $\theta$ ,  $\psi$  sont indiqués sur le triangle ABC de la figure ci- contre :



$$r = \sqrt{a^2 + b^2 - 2ab \cos \theta}$$

$$\sin \psi = \frac{b}{r} \sin \theta$$

$$J_0(\lambda r) = \sum_{m=-\infty}^{m=+\infty} J_m(\lambda a) J_m(\lambda b) e^{im\theta}$$

$$J_0(\lambda r) = J_0(\lambda a) J_0(\lambda b) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda a) J_m(\lambda b) \cos(m\theta)$$

### 1.1.11. Développements asymptotiques des fonctions de Bessel :

Les expressions asymptotiques de ces fonctions, pour les grandes valeurs de x sont :

$$J_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ U_n(x) \cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) - V_n(x) \sin\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (1.1.20)$$

et

$$Y_n(x) \approx \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ U_n(x) \sin\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) + V_n(x) \cos\left(x - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \right], \quad (1.1.21)$$

où

$$U_n \approx 1 - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)}{2!2^6 x^2} + \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)(4n^2 - 49)}{4!2^{12} x^4} - \dots$$

et

$$V_n \approx \frac{(4n^2 - 1)}{1!2^3 x} - \frac{(4n^2 - 1)(4n^2 - 9)(4n^2 - 25)}{3!2^9 x^3} + \dots$$

## 1. 2. Transformation de Hankel

### 1. 2. 1. Définition :

On appelle transformation de Hankel d'ordre  $n$  de  $f(r)$  la fonction  $F_n(\rho)$  donnée par :

$$F_n(\rho) = \int_0^{\infty} r f(r) J_n(r\rho) dr \quad (1. 2.1)$$

Et notée par  $H_n[f(r)] = F_n(\rho)$

La transformation inverse correspondante est :

$$H_n^{-1}[F_n(\rho)] = f(r) = \int_0^{\infty} \rho F_n(\rho) J_n(r\rho) d\rho \quad (1. 2.2)$$

### Exemples :

$$1) H_0[r^{-1} \exp(-ar)] = \frac{1}{\sqrt{\rho^2 + a^2}}$$

$$2) H_0[H(a-r)] = \frac{a}{\rho} J_1(a\rho) \quad \text{où } H \text{ est la fonction de Heaviside}$$

$$3) H_n[r^n H(a-r)] = \frac{\rho^n}{(2a)^{n+1}} \exp\left(-\frac{\rho^2}{4a}\right)$$

### 1. 2. 2. Propriété de la transformation de Hankel

#### Théorème 1 :

si  $H_n[f(r)] = F_n(\rho)$  alors :

$$H_n[f(ar)] = \frac{1}{a^2} F_n\left(\frac{\rho}{a}\right) \quad (1. 2.3)$$

#### Théorème 2 : (relation de Parseval)

si  $H_n[f(r)] = F_n(\rho)$  et  $H_n[g(r)] = G_n(\rho)$  alors :

$$\int_0^{\infty} r f(r) g(r) dr = \int_0^{\infty} \rho F_n(\rho) G_n(\rho) d\rho \quad (1. 2.4)$$

**Théorème 3 : (Dérivé)**

si  $H_n[f(r)] = F_n(\rho)$  alors

$$H_n[f'(r)] = \frac{\rho}{2n} [(n-1)F_{n+1}(\rho) - (n+1)F_{n-1}(\rho)] \quad (1. 2.5)$$

**Théorème 4 :**

Si  $H_n[f(r)] = F_n(\rho)$  alors

$$H_n \left[ f''(r) + \frac{f'(r)}{r} - \frac{n^2}{r^2} f(r) \right] = -\rho^2 F_n(\rho) \quad (1. 2.6)$$

Les démonstrations des théorèmes 1, 2, 3 et 4 sont développées dans la référence [5]

**1. 2. 3. Exemple :**

Déterminer la solution du problème de condition thermique (cas axisymétrique) pour un demi-espace  $z \geq 0$  si la température de la surface plane  $z = 0$  est  $f(z)$

Le modèle mathématique

$$\begin{cases} \Delta u(r, z) = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \\ u(r, z)_{z=0} = f(r) \end{cases}$$

La transformation appropriée est de Hankel d'ordre 0

$$H_0[u(r, z)] = U(\rho, z) \quad \text{et} \quad H_0[\Delta u(r, z)] = U'' - \rho^2 U \quad \dots\dots\dots (1)$$

$$U|_{z=0} = F, \quad F = \int_0^\infty r f(r) J_0(r\rho) dr \quad \dots\dots\dots (2)$$

La solution est  $U = Ae^{-z\rho} + Be^{z\rho} = Ae^{-z\rho}$

D'après (2)  $A = F$  C'est -a - dire  $U = Fe^{-z\rho}$

Le modèle mathématique finalement :

$$u(r, z) = \int_0^\infty \rho F(\rho) e^{-z\rho} J_0(r\rho) d\rho$$

### 1.3. Equations intégrales

#### 1.3.1 Equation intégrale de Volterra

##### 1.3.1.1 Notions fondamentales :

Une équation, a une inconnue  $\varphi(x)$ , de la forme

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt, \quad (1.3.1)$$

où  $f(x)$ ,  $K(x,t)$  sont des fonctions connues et  $\lambda$  un paramètre numérique, et  $\varphi(x)$  est appelée équation intégrale linéaire de Volterra de seconde espèce. La fonction  $K(x,t)$  est le noyau de l'équation de Volterra.

Si  $f = 0$ , l'équation (1.3.1) s'écrit

$$\varphi(x) = \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt \quad (1.3.2)$$

et s'appelle équation homogène de Volterra de seconde espèce.

Une équation, a un inconnu  $\varphi(x)$ , de la forme  $\int_0^x K(x,t)\varphi(t)dt = f(x)$  (1.3.3)

est appelée équation intégrale de Volterra de première espèce.

##### 1.3.1.2 Liaison entre les équations différentielles linéaires et les équations intégrales de Volterra

La résolution de l'équation différentielle linéaire :

$$\frac{d^n y}{dx^n} + a_1(x) \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \dots + a_n(x)y = F(x) \quad (1.3.4)$$

à coefficients continus  $a_i(x)$  ( $i = 1, 2, 3, \dots, n$ ) avec les conditions initiales

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1, \dots, y^{(n-1)}(0) = c_{n-1},$$

peut être ramenée à la résolution d'une équation de Volterra de seconde espèce.

On illustre notre affirmation sur l'exemple de l'équation différentielle du second ordre.

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + a_1(x) \frac{dy}{dx} + a_2(x)y = F(x), \quad (1.3.5)$$

$$y(0) = c_0, y'(0) = c_1. \quad (1.3.6)$$

On pose  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$ . (1.3.7)



D'où, vu les conditions initiales (1. 3. 6), on obtient successivement :

$$\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + c_1, \quad y = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + c_1(x) + c_0 \quad (1. 3. 8)$$

On a utilisé la formule :

$$\underbrace{\int_{x_0}^x dx \int_{x_0}^x dx \dots \int_{x_0}^x f(x) dx}_n = \frac{1}{(n-1)!} \int_{x_0}^x (x-z)^{n-1} f(z) dz .$$

Compte tenu de (1. 3. 7) et (1. 3. 8) on met l'équation différentielle (1. 3. 5) sous la forme

$$\varphi(x) + \int_0^x a_1(x)\varphi(t) dt + c_1 a_1(x) + \int_0^x a_2(x)(x-t)\varphi(t) + c_1 x a_2(x) + c_0 a_2(x) = F(x)$$

où

$$\varphi(x) + \int_0^x [a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \varphi(t) dt = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x) . \quad (1. 3. 9)$$

On pose

$$K(x, t) = -[a_1(x) + a_2(x)(x-t)] \quad (1. 3. 10)$$

$$f(x) = F(x) - c_1 a_1(x) - c_1 x a_2(x) - c_0 a_2(x) \quad (1. 3. 11)$$

On ramène l'équation (1. 3. 9) à la forme suivante :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t)\varphi(t) dt \quad (1. 3. 12)$$

i.e. on obtient une équation intégrale de Volterra de seconde espèce.

L'unicité de la solution de (1. 3. 12) résulte de l'existence et de l'unicité de la solution du problème de Cauchy (1. 3. 5) et (1. 3. 6) pour l'équation différentielle linéaire à coefficients continus dans un voisinage du point  $x = 0$ .

Inversement, en résolvant l'équation (1. 3. 12) avec  $K$  et  $f$  définis par les formules (1. 3. 10) et (1. 3. 11), puis portant  $\varphi(x)$  obtenue dans la dernière équation (1.3.8), on obtient la solution de (1. 3. 5) vérifiant les conditions initiales (1. 3. 6).

**Exemple :** Former l'équation intégrale correspondante à l'équation différentielle :

$$y'' + x y' + y = 0$$

et aux conditions initiales  $y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$

**Solution :** On pose  $\frac{d^2 y}{dx^2} = \varphi(x)$ . (1. 3. 13)

Alors  $\frac{dy}{dx} = \int_0^x \varphi(t) dt + y'(0) = \int_0^x \varphi(t) dt$ ,  $y = \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + 1$ . (1. 3. 14)

On porte (1. 3. 13) et (1. 3. 14) dans l'équation différentielle donnée, il vient :

$$\varphi(x) + \int_0^x x\varphi(t) dt + \int_0^x (x-t)\varphi(t) dt + 1 = 0$$

où

$$\varphi(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)\varphi(t) dt.$$

### 1. 3. 1.3. Méthode des approximations successives :

Soit l'équation intégrale de Volterra de seconde espèce :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi(t) dt.$$

On suppose que  $f(x)$  est continue dans  $[0, a]$  et que le noyau  $K(x,t)$  est aussi continu pour  $0 \leq x \leq a$ ,  $0 \leq t \leq x$

On cherche la solution sous la forme d'une série :

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \lambda\varphi_1(x) + \lambda^2\varphi_2(x) + \dots$$

Pour les fonctions  $\varphi_n(x)$  on obtient les formules

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t)\varphi_{n-1}(x) dt$$

où  $\varphi_0(x) = f(x)$

Sous les hypothèses faites sur  $f(x)$  et  $K(x,t)$ , la suite  $\{\varphi_n(x)\}$  converge pour  $n \rightarrow \infty$  vers la solution  $\varphi(x)$  de l'équation intégrale (1. 3. 1).

**Exemple :** Résoudre l'équation intégrale

$$y(x) = 1 - \int_0^x (x-t)y(t) dt$$

par la méthode des approximations successives en posant  $y_0(x) = 1$ .

**Solution :** Du moment que  $y_0(x) = 1$ , on a :

$$y_1(x) = 1 - \int_0^x (x-t) dt = 1 - \frac{x^2}{2}$$

$$y_2(x) = 1 - \int_0^x (x-t)\left(1 - \frac{t^2}{2}\right) dt = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!}$$

.....

$$y_n(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4!} - \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$y_n(x) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} y(x) = \cos x$$

### 1.3.2. Equation intégrale de Fredholm

#### 1.3.2.1 Notions fondamentales :

On appelle équation intégrale de Fredholm de seconde espèce l'équation donnée par :

$$\varphi(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi(t) dt, \quad (1.3.22)$$

où  $\varphi(x)$  est une fonction inconnue  $f(x)$  et  $K(x,t)$  sont des fonctions données,  $K(x,t)$  est appelé le noyau de l'équation intégrale et  $\lambda$  paramètre réel.

Si  $f = 0$  l'équation (1.3.22) est dite équation intégrale de Fredholm de première espèce.

#### 1.3.2.2 Méthode d'approximation successive :

On cherche la solution approximative comme suit :

$$\varphi_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t)\varphi_{n-1}(x) dt \quad \text{où } \varphi_0(x) = f(x)$$

#### Remarque :

La suite itérative  $\varphi_n(x)$  converge vers  $\varphi(x)$  si  $|\lambda| \leq M$

$$\text{où } M = \frac{1}{\|K\|_2} \quad \text{et} \quad \|K\|_2 = \left[ \int_a^b dx \int_a^b (K(x,t))^2 dt \right]^{\frac{1}{2}}$$

### 1. 3. 3. Equations intégrales multiples

#### 1. 3. 3.1. Définition :

On appelle équation intégrale multiple d'ordre  $n$  l'équation

$$A(x) + \int_a^b K_m(x, t) A(t) dt = f(x) \quad x \in I_m$$

où  $m = 1, 2, \dots, n$  et  $I_m$  forment une partition de  $[a, b]$ .

Les équations duales, triples, correspondantes à  $n = 2, 3$ , respectivement.

#### 1. 3. 3. 2. Remarque :

Ces équations interviennent dans la résolution des problèmes aux conditions mixtes.

## Chapitre 2. Rappels Elasticité linéaire, Mécanique de la rupture

### 2. 1. Rappel d'élasticité linéaire :

#### Introduction :

Un corps ne pouvant résister à la sollicitation appliquée qu'en se déformant, l'analyse de la rigidité des structures en terme de force et d'allongement ne permet pas de distinguer la contribution de la géométrie de celle intrinsèque du matériau.

Pour ce faire, il faut définir en tout point de la structure un état mécanique local indépendant de sa géométrie. La caractérisation de cet état local en termes de contrainte et de déformation. La relation entre ces grandeurs et leurs dérivées temporelles définissant la loi de comportement macroscopique. L'étude du comportement mécanique des matériaux a pour but de connaître leur réponse à une sollicitation donnée. Les variables mises en jeu dans ce domaine sont:

- a) le tenseur des contraintes.
- b) le tenseur des déformations.

#### 2. 1. 1. Contraintes :

##### 2. 1. 1. 1. Définition :

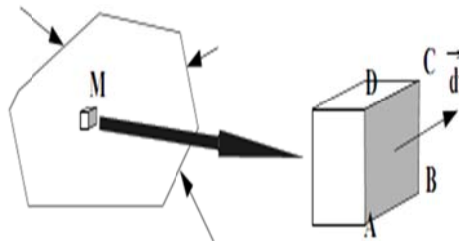


Figure 2.1.1. Représentation de vecteur contrainte.

On considère une pièce soumise à un chargement quelconque figure 2.1.1. on considère la face ABCD de surface  $dS$ . Sur cette face il s'exerce un effort  $\vec{df}$ . Le vecteur contrainte  $\vec{C}$  qui s'exerce en M sur la facette ABCD est défini de la façon suivante :

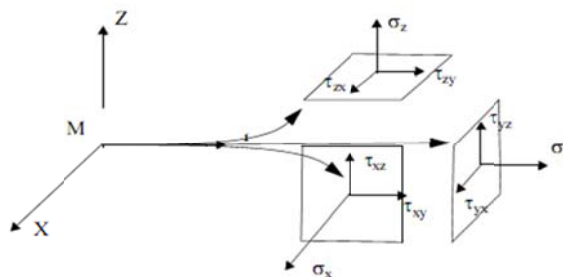
$$\vec{C} = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\vec{df}}{ds} \quad (2.1.1)$$

## 2. 1. 2. Tenseur des contraintes :

Il est important de pouvoir disposer d'un outil pour caractériser complètement l'état des contraintes existantes en un point donné. Cet outil est le tenseur des contraintes.

On considère une pièce soumise à un chargement complexe et on isole un petit polyèdre comportant  $n$  facettes. Si les contraintes sont connues sur  $(n-1)$  facettes, en écrivant l'équilibre de cet élément, il est facile de déterminer la contrainte existante sur la facette numéro  $n$ . Le polyèdre comportant le moins de facettes est le tétraèdre ( $n = 4$ ).

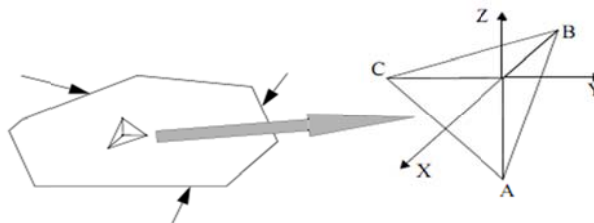
Pour pouvoir déterminer, en un point, la contrainte sur une facette quelconque il suffit donc de connaître les contraintes, en ce point, sur 3 facettes. Pour faciliter les calculs on considère les trois facettes ayant pour normales  $x, y, z$ . Sur ces facettes les composantes des contraintes ont les valeurs indiquées sur la figure 2.1.2.



**Figure 2.1.2. Représentation des composantes du tenseur des contraintes.**

Pour calculer la contrainte  $\vec{c}(c_x, c_x, c_x)$  relative à la facette ABC qui a pour normale  $\vec{n}(n_x, n_x, n_x)$  il suffit:

- i) d'isoler le tétraèdre représenté sur la figure 2.1.3.
- ii) d'écrire l'équilibre.



**Figure 2.1.3. Equilibre d'un tétraèdre.**

On obtient:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_x \\ C_y \\ C_z \end{bmatrix} \quad (2.1.2)$$

A partir de l'équation (1.1.2) on définit le tenseur des contraintes  $[\Sigma]$  :

$$[\Sigma] = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{bmatrix} \quad (2.1.3)$$

### 2. 1. 3. Déformation

Sous l'action d'un chargement, tous les corps subissent un changement de forme, de position et d'orientation entre un état initial avant l'application de la charge et un état final consécutif à son application. Les déformations caractérisent le changement de forme local en tout point du matériau, indépendamment de sa nature et de ses caractéristiques de résistance.

#### 2. 1. 3. 1. État local de déformation :

La transformation géométrique qui décrit le passage d'un petit élément de matière de l'état initial à l'état final se décompose en translation, rotation et déformation, cette dernière étant seule responsable du changement de forme du petit élément. Translation et rotation sont des mouvements de corps rigides qui traduisent les changements de position et d'orientation. Du point de vue de l'état final, rotation et déformation ne sont pas commutatives.

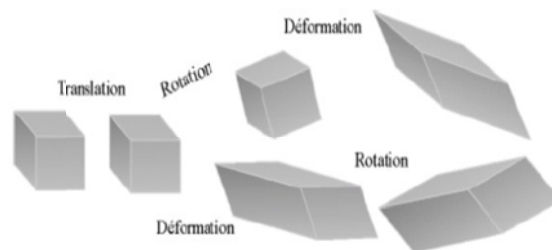


Figure 2.1.4. Transformation géométrique de passage entre l'état initial et l'état final.

### 2. 1. 3. 2. Les petites déformations :

La plupart des structures étant constituées de matériaux cristallins peu déformables travaillant en régime élastique, l'approximation des petites déformations est largement suffisante. Elle offre de plus l'avantage du principe de superposition.

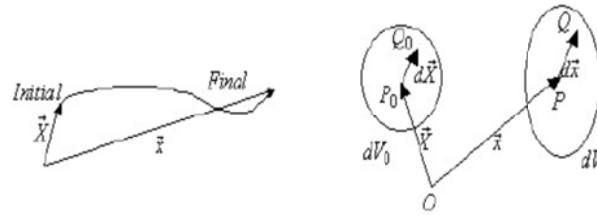


Figure 2.1.5. Trajectoire d'une particule et affinité tangente.

On considère pour simplifier une structure plane qui se déforme dans son plan et on représente sur la structure initiale deux segments perpendiculaires AB et AC ayant pour longueurs respectives dx et dy.

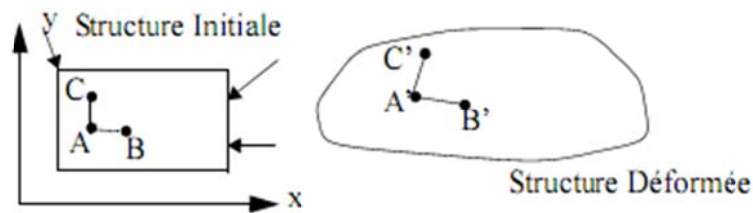


Figure 2.1.6. Déformation de deux vecteurs perpendiculaires.

Sous l'action d'efforts extérieurs cette structure se déforme et les points A, B, C deviennent les points A', B' et C'. Pour caractériser la déformation de la structure au point A, il suffit de connaître l'allongement des segments AB, AC et la variation de l'angle droit  $\hat{BAC}$ .

Si le point A a pour déplacement  $\overline{DA}(u, v, w)$ , le point B a pour déplacement:

$$\overline{DB} \left[ u + \frac{\partial u}{\partial x} dx \quad v + \frac{\partial v}{\partial x} dx \quad w + \frac{\partial w}{\partial x} dx \right] \quad (2.1.4)$$

et le point C :

$$\overline{DC} \left[ u + \frac{\partial u}{\partial y} dy \quad v + \frac{\partial v}{\partial y} dy \quad w + \frac{\partial w}{\partial y} dy \right] \quad (2.1.5)$$



On ramène le point A' au point A ce qui revient à éliminer la translation.

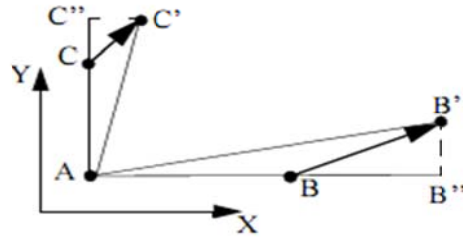


Figure 2.1.7. Déformation de AB et AC.

L'allongement relatif d'un vecteur initialement orienté dans la direction x est appelé  $\varepsilon_x$ .

Il vaut par définition:

$$\varepsilon_x = \frac{AB'}{AB} \quad (2.1.6)$$

En petites déformations on fait l'hypothèse suivante:

$$\varepsilon_x \approx \frac{AB''}{AB} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (2.1.7)$$

De la même façon on fait l'hypothèse que:

$$\varepsilon_y \approx \frac{AC''}{AC} = \frac{\partial v}{\partial y} \quad (2.1.8)$$

La variation de l'angle droit est définie par  $2\varepsilon_{xy}$  :

$$2\varepsilon_{xy} = \frac{\pi}{2} - \widehat{B'AC'} \approx \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (2.1.9)$$

On peut alors définir la matrice  $E'$  (2.1.10) et démontrer assez simplement que c'est un tenseur.  $E'$  est appelé le tenseur des déformations :

$$[E'] = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{zx} \\ \varepsilon_{xy} & \varepsilon_y & \varepsilon_{zy} \\ \varepsilon_{xz} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.1.10)$$

Avec

$$\left[ \begin{array}{l|l} \varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} & \varepsilon_{xy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} & \varepsilon_{xz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} & \varepsilon_{yz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{array} \right] \quad (2.1.11)$$

#### 2. 1. 4. Equation d'équilibre :

##### a) Coordonnées cylindriques :

Pour déterminer les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques, on considère un élément infinitésimal autour du voisinage du point M de volume  $rd\theta dr dz$  comme indiqué sur la figure (2.1.8). On suppose qu'il n'est soumis à aucune force de volume.

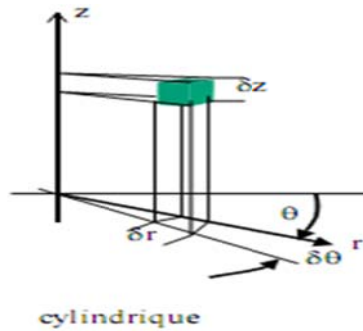


Figure 2.1.8. Isolement d'un élément de volume en coordonnées cylindriques.

Les équations d'équilibre en coordonnées cylindriques s'écrivent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \sigma_{rr}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\sigma_{r\theta}}{r} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + \frac{\sigma_{rz}}{r} = 0 \end{array} \right. \quad (2.1.12)$$

**b) Coordonnées cartésiennes :**

Les équations d'équilibre dans l'élément de volume en coordonnées cartésiennes, en négligeant les forces du volume s'écrivent :

$$\begin{cases} \frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = 0 \end{cases} \quad (2.1.13)$$

Les équations (2.1.13) s'écrivent sous forme indicielle comme suit :

$$\sigma_{ij,j} = 0 \quad (2.1.14)$$

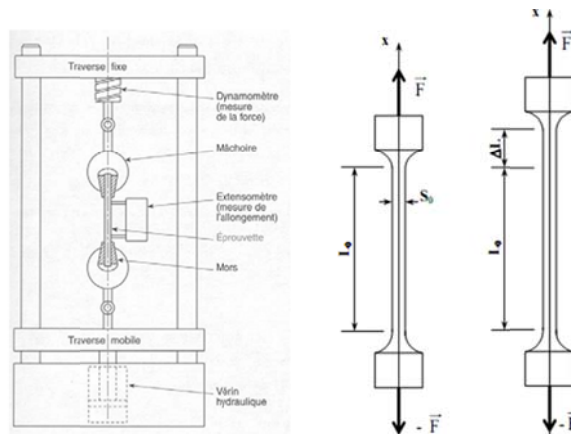
Lorsque l'on considérera les forces de volume on écrira :

$$\sigma_{ij,j} + f_i = 0 \quad (2.1.15)$$

**2. 1.5. Les modules élastiques :**

**2. 1.5.1. Le module d'élasticité E :**

On considère une barre d'acier doux de longueur initiale  $L_0$  et dont la section initiale  $S_0$  est constante sur la longueur  $L_0$ . On soumet cette barre à une sollicitation de traction en lui appliquant à chaque extrémité un effort  $F$ :



**Figure 2.1.9. Représentation simplifiée d'une machine d'essai de traction.**

On peut enregistrer à l'aide de comparateurs l'allongement  $\Delta L$  de l'éprouvette en fonction de l'intensité de l'effort  $F$ .  $\Delta L$  est appelé l'allongement absolu. Pour pouvoir comparer les caractéristiques mécaniques des matériaux, celles-ci doivent être établies indépendamment des sections  $S_0$  et longueurs  $L_0$  des éprouvettes.

Ainsi, on reporte sur un graphique :

- en abscisse : l'allongement relatif

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.1.16)$$

$\varepsilon$  est sans unité puisque c'est le rapport de deux longueurs, en ordonnée : la contrainte  $\sigma$  est l'effort par unité de surface en  $\text{N/mm}^2$ , ou **MPa**.

$$\sigma = \frac{F}{S_0} \quad (2.1.17)$$

On obtient alors la « courbe contrainte - déformation » du matériau de l'essai qui a l'allure suivante :

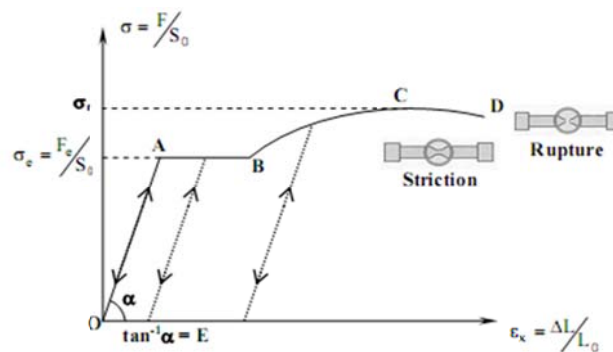


Figure 2.1.10. Courbe contrainte – déformation.

Analyse de la courbe contrainte - déformation - Loi de Hooke.

Partie OA : la déformation est proportionnelle à l'effort exercé (ou que l'allongement relatif est proportionnel à la contrainte). Dans cette zone, si on décharge l'éprouvette, elle revient à sa longueur initiale. On dit que le matériau a dans cette phase un comportement élastique linéaire.

Ceci se traduit par la loi de Hooke :

$$\frac{F}{S} = E \times \frac{\Delta L}{L} \quad (2.1.18)$$

où  $\sigma = E \times \varepsilon \quad (2.1.19)$

E est le module d'Young, ou module d'élasticité longitudinal ( $E_x$ ) du matériau et caractérise la rigidité du matériau est s'exprime en **MPa**.

Le point A marque la fin de la zone élastique de la courbe. La contrainte correspondante est appelée la limite élasticité.

$$\sigma_e = \frac{F_e}{S} \quad (2.1.20)$$

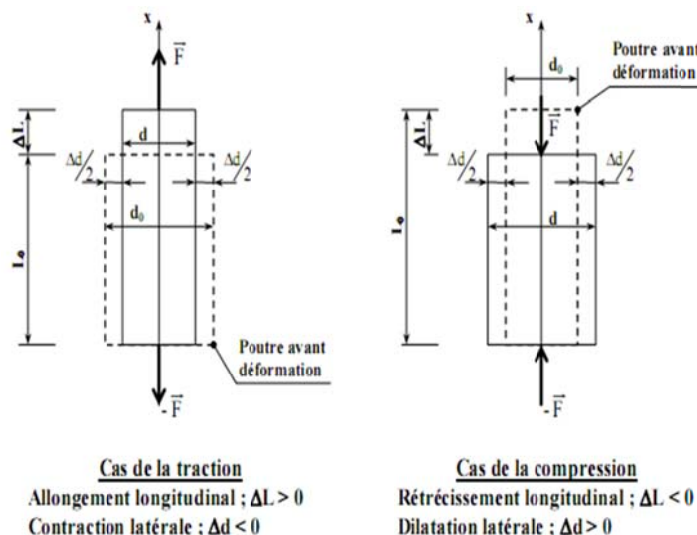
1) Partie AD : au-delà du point A, on rentre dans le domaine des grandes déformations, le domaine plastique, où les allongements ne sont plus proportionnels aux efforts. A ce stade, si on décharge l'éprouvette, celle-ci ne retrouve pas sa longueur initiale, on constate un allongement résiduel, c'est-à-dire une déformation permanente.

2) Entre A et B : l'éprouvette s'allonge alors que l'intensité de la charge ne varie pratiquement pas, cette partie de la courbe est appelée « palier plastique ».

3) Au-delà de B : on observe un allongement important pour une faible augmentation de la contrainte. La courbe se relève jusqu'à un maximum C qui correspond à la limite de rupture  $\sigma_r$ . A ce stade, on observe une diminution de la section de la barre dans la zone où va se produire la rupture, c'est le phénomène de striction. Puis la rupture intervient (point D).

### 2.1.5.2. Coefficient de Poisson « $\nu$ » :

Lors d'un essai de traction ou de compression sur une poutre, celle-ci subit une déformation longitudinale  $\varepsilon_x$ , respectivement un allongement ou un raccourcissement, mais aussi une déformation latérale  $\varepsilon_{\perp}$  perpendiculairement à la direction de l'effort, respectivement une contraction ou une dilatation.



**Figure 2.1.11. Essai de traction ou de compression.**

Déformations longitudinales :

$$\varepsilon_x = \frac{\Delta L}{L_0} \quad (2.1.21)$$

et transversales :

$$\varepsilon_{\perp} = \frac{\Delta d}{d_0} \quad (2.1.22)$$

Le coefficient de Poisson  $\nu$  est le rapport de ces deux déformations :

$$\nu = -\frac{\varepsilon_{\perp}}{\varepsilon_x} \quad (2.1.23)$$

$\nu$  est compris entre 0.1 et 0.5 (0.3 pour les métaux et 0.15 pour les bétons).

### 2. I.5.3. Module d'élasticité de cisaillement «G » :

Pour des matériaux ayant un comportement linéaire il existe par définition une *relation* linéaire entre le tenseur des contraintes et le tenseur des déformations.

Pour un matériau isotrope on peut montrer qu'il suffit de deux coefficients pour caractériser cette loi qui s'écrit :

$$\begin{array}{l} \varepsilon_x = \frac{1}{E} (\sigma_x - \nu (\sigma_y + \sigma_z)) \\ \varepsilon_y = \frac{1}{E} (\sigma_y - \nu (\sigma_x + \sigma_z)) \\ \varepsilon_z = \frac{1}{E} (\sigma_z - \nu (\sigma_x + \sigma_y)) \\ \varepsilon_{xy} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xy} \\ \varepsilon_{xz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{xz} \\ \varepsilon_{yz} = \frac{1+\nu}{E} \tau_{yz} \end{array} \quad (2.1.24)$$

$E$  est appelée le module de Young ou module d'élasticité et  $\nu$  le coefficient de Poisson.

La relation entre les contraintes de cisaillement et la distorsion angulaire est souvent écrite en utilisant le module de cisaillement  $G$  défini de la façon suivante:

$$\tau_{xy} = 2G\varepsilon_{xy} \quad (2.1.25)$$

avec

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad (2.1.26)$$

## 2. 1.6. Les équations d'élasticité :

### 2. 1.6.1. La loi de Hooke :

#### 2.1.6.1.1 Relation de Young :

A partir de la définition de  $E'$  et de  $\nu$ , la relation contrainte déformation s'écrit:

$$\underline{\sigma} = \begin{vmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} \Rightarrow \underline{\varepsilon} = \begin{vmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{vmatrix} = \frac{\sigma_1}{E} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\nu & 0 \\ 0 & 0 & -\nu \end{vmatrix} \quad (2.1.27)$$

Elle s'écrit dans un repère quelconque sous la forme de *l'équation de Young*:

$$E'\varepsilon_{ij} = -\nu\sigma_{kk}\delta_{ij} + (1+\nu)\sigma_{ij} \quad (2.1.28)$$

#### 2.1.6.1.2 Relation de Lamé :

S'écrit:

$$\sigma_{ij} = \lambda\varepsilon_{kk}\delta_{ij} + 2G\varepsilon_{ij} \quad (2.1.29)$$

#### 2.1.6.1.3 Relations entre les modules

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} \quad \text{premier coefficient de Lamé=Module de Coulomb} \quad (2.1.30)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \quad \text{deuxième coefficient de Lamé} \quad (2.1.31)$$

$$E = \frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G} \quad \text{module d'Young ou module d'élasticité} \quad (2.1.32)$$

$$K = \frac{E}{3(1-2\nu)} = \lambda + \frac{2}{3}G \quad \text{module de rigidité à la dilatation uniforme} \quad (2.1.33)$$

$$\nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + G)} \quad \text{coefficient de Poisson} \quad (2.1.34)$$

### 2.1.6.2. L'équation de Lamé :

L'équation de Lamé d'élasticité linéaire isotrope en termes de champ de déplacement et  $\rho'$  est une masse volumique:

$$\begin{aligned} (\lambda + G) \text{Grad}(\text{Div}\vec{u}) + G\Delta\vec{u} + \rho' \vec{X} &= \rho' \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \\ (\lambda + G) \text{Rot}(\text{Rot}\vec{u}) + (\lambda + 2G)\Delta\vec{u} + \rho' \vec{X} &= \rho' \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \\ \frac{1}{1-2\nu} \text{Grad}(\text{Div}\vec{u}) + \Delta\vec{u} + \frac{\rho'}{G} \vec{X} &= \frac{\rho'}{G} \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} \end{aligned} \quad (2.1.35)$$

### 2. 1.7. Techniques de résolution :

#### 1) Choix du système de coordonnées

On peut résoudre les problèmes d'élasticité dans n'importe quel système de coordonnées. Mais les conditions aux limites peuvent avoir une forme plus ou moins compliquée suivant ce choix. On est généralement guidé par la forme du corps élastique étudié. On choisit de préférence un système de coordonnées qui facilite l'écriture des conditions aux limites. Pour les problèmes axisymétriques, on choisit toujours un système de coordonnées dont l'une des coordonnées est l'angle  $\theta$  autour de l'axe d'axisymétrie.

#### 2) Choix de la formulation

Dans certains problèmes, on peut faire des hypothèses à priori sur la solution recherchée. Selon que ces hypothèses portent sur les contraintes ou sur les déformations, on choisit la formulation correspondante.

### 2. 1.7.1. Techniques de résolution analytique :

#### 2. 1.7.1.1 Approche en déplacement :

Le processus de résolution avec l'approche en déplacement est :

- ❖ postuler la forme du champ de déplacement ;
- ❖ vérifier les conditions limites en déplacements ;
- ❖ vérifier les équations dites de Lamé-Navier ;
- ❖ calculer les déformations, puis les contraintes ;
- ❖ vérifier les conditions limites en contrainte ;

Cette approche en déplacement est utilisée pour résoudre le problème du cylindre sous pression.



### 2. 1.7.1.2 Approche en contrainte

Le processus de résolution avec l'approche en contrainte est:

- ❖ postuler un champ de contrainte ;
- ❖ vérifier les conditions aux d'équilibre en volume ;
- ❖ vérifier les conditions aux limites en contrainte ;
- ❖ vérifier les équations dites de Beltrami-Michell ;
- ❖ calculer les déformations, puis les déplacements à partir des contraintes ;
- ❖ vérifier les conditions aux limites en déplacement ;

### 2. 1.7.2. Techniques de résolution numériques

Les techniques analytiques sont vite dépassées lorsque le problème devient un peu complexe, il faut alors recourir à des approches numériques. On distingue trois grandes familles d'approches numériques pour la mécanique des milieux continus :

- les éléments finis ;
- les différences finies ;
- les éléments de frontière ;

La première approche a le mérite d'être applicable quelle que soit la géométrie du milieu. Elle est donc utilisée pour tous les problèmes de mécanique faisant intervenir des géométries complexes (crash voiture, écoulement sanguin, étude vibratoire de fusée, design de puce électronique contre l'échauffement excessif, ...). Les codes industriels les plus connus sont : Samcef (le seul européen), Abaqus, Nastran et Ansys.

La méthode des différences finies nécessite des domaines de formes simples. Elle est particulièrement utilisée en météorologie (l'atmosphère a une forme simple) et pour l'étude d'écoulement.

Enfin, la méthode des éléments frontières permet la prise en compte simple d'un milieu infini ou semi-infini (mais ce milieu doit être linéaire).

## 2. 2. Mécanique de la rupture

### Introduction :

La mécanique de la rupture a pour objet l'étude des fissures macroscopiques, la détermination des champs de contraintes et de déformations correspondants et l'établissement des données expérimentales permettant de déterminer la cinétique de propagation des défauts et leur taille critique au delà de laquelle, pour une sollicitation donnée.

Les mécanismes de rupture locale sont la rupture fragile et la rupture ductile. La rupture est caractérisée (au moins localement) par la séparation irréversible (généralement les liaisons chimiques rompues ne se rétablissent pas par suite de la présence inévitable de polluant) d'un milieu continu de part et d'autre d'une surface génératrice  $S$ .

La coupure ainsi créée est appelée fissure 2.2.1.

C'est une surface de discontinuité pour le champ de déplacement. Le saut  $\left[ \vec{u} \right] = \vec{u}^+ - \vec{u}^-$  est le déplacement d'ouverture de la fissure.

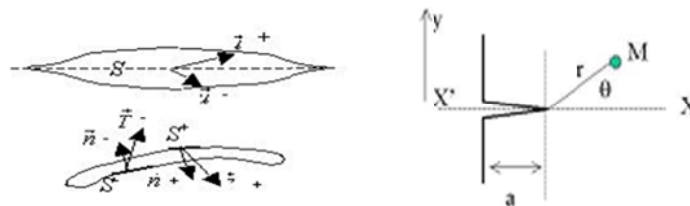
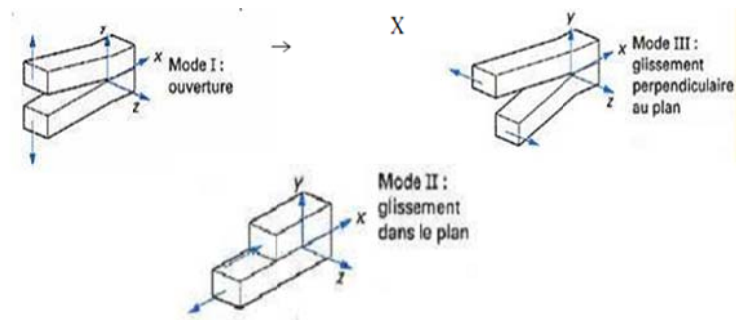


Figure 2.2.1. Fissure.

On distingue trois modes de rupture :

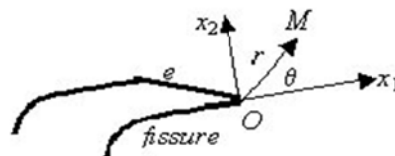
- **Mode I** : mode d'ouverture de la fissure, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont perpendiculaires à la direction de propagation.
- **Mode II** : mode de cisaillement dans le plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles à la direction de propagation.
- **Mode III** : mode de cisaillement hors du plan, où les déplacements aux lèvres de la fissure sont parallèles au fond de la fissure, cf. figure 2. 2.2.



**Figure 2.2.2. Modes de fissuration.**

Lors du chargement d'une pièce fissurée, on distingue deux phases:

- La phase d'ouverture pendant laquelle, la fissure immobile s'ouvre, les lèvres s'écartant sans changement géométrique de la surface S. Cette phase se poursuit jusqu'à un chargement critique autorisant la fissure à se propager en s'agrandissant. A ce chargement critique correspond la condition d'amorçage.
- La phase de propagation au delà du chargement critique d'amorçage, la fissure s'agrandit (avance) soit dans le plan tangent à S soit dans d'autres directions (branchements), c'est la phase de propagation qui pourra être contrôlée (propagation dite stable) ou non (propagation dite instable conduisant à la rupture brutale ou catastrophique).



**Figure 2.2.3. Ouverture et propagation d'une fissure.**

### 2. 2.1. Facteur d'intensité de contrainte

On les appelle facteurs d'intensité de contrainte  $K_I$ ,  $K_{II}$  et  $K_{III}$  respectivement en mode I, mode II et mode III. L'intensité de la singularité du champ des contraintes à la pointe de la fissure est proportionnelle à la discontinuité du déplacement des lèvres de la fissure.

On les appelle aussi les facteurs de discontinuité des déplacements, caractérisent à la fois la géométrie du détail et de la fissure, et la nature des sollicitations, évaluation du facteur d'intensité de contrainte  $K$  en fonction du rayon du noyau  $r$ .  $K$  est le produit d'une contrainte par la racine carrée d'une longueur  $[K] = [\sigma] [L]^{1/2}$  et se mesure en  $\text{MPa.m}^{1/2}$  ou  $\text{Nm}^{-3/2}$ .

Si l'on connaît leurs valeurs, ils permettent de déterminer complètement les champs de contrainte au déplacement dans la structure fissurée, considérée comme élastique inversement, si l'on connaît les expressions des composantes non nulles des contraintes et des déplacements.

En mode I, L'expression générale de  $K_I$  est de la forme  $K_I = \gamma \sigma \sqrt{\pi a}$ .

### Quelques valeurs de $K_I$

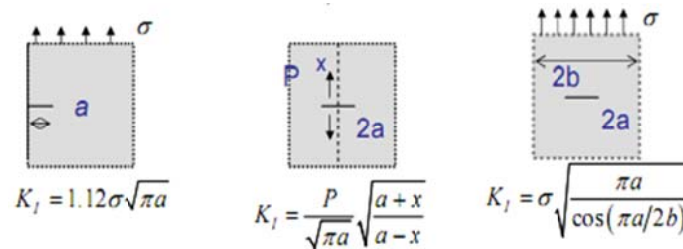


Figure 2.2.4. Fissure circulaire de rayon a.

### 2. 2.2. Condition d'amorçage

La fissure progresse si l'énergie nécessaire pour faire avancer la fissure [pour rompre les liaisons atomiques, pour créer de la surface libre (tension superficielle)] est inférieure à l'énergie élastique de relaxation (l'avancement de la fissure libère de la matière qui se détend). Cela correspond en fait à un facteur d'intensité de contrainte critique  $K_c$  appelé ténacité dont l'unité de mesure est  $\text{MPa} \cdot \text{m}^{1/2}$ .

Le critère de rupture, condition d'amorçage de la propagation de la fissure en mode d'ouverture s'écrit alors sous la forme simple:  $K = K_c$ .

# Chapitre 3. Problème axisymétrique d'une inclusion rigide dans une plaque élastique épaisse et fissurée

## Introduction :

On dit qu'un problème est axisymétrique si la forme du corps élastique admet un symétrique autour de l'axe vertical et si le chargement et les conditions aux limites sont aussi de symétrie.

Dans ce cas, la solution est axisymétrique. Si l'on utilise un système de coordonnées cylindriques ou sphériques autour de l'axe de symétrie axiale, les dérivées des fonctions suivant l'angle polaire  $\theta$  sont nulles. On est donc ramené à un problème à deux variables  $(r, z)$ . Pour résoudre ce type de problème, on peut utiliser la formulation en contraintes ou la formulation au déplacement.

L'approche des déplacements a été utilisée dans la résolution du problème proposé puisque on a transformé le problème à celui de recherche des déplacements.

## 3.1. Description du problème :

Soit une plaque élastique d'épaisseur  $2h$  comportant une fissure circulaire de rayon  $b$ , dans le plan  $z = 0$ . On étudie la déformation du milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure d'un disque rigide de rayon  $a$  subissant une dilatation axiale est égale à  $\epsilon$ .

Les deux frontières du domaine  $z = \pm h$  sont délimitées par des supports rigides dont le contact est lisse, c'est-à-dire la contrainte tangentielle ainsi que le déplacement axiale sont égaux à zéro, (Figure 3.1).

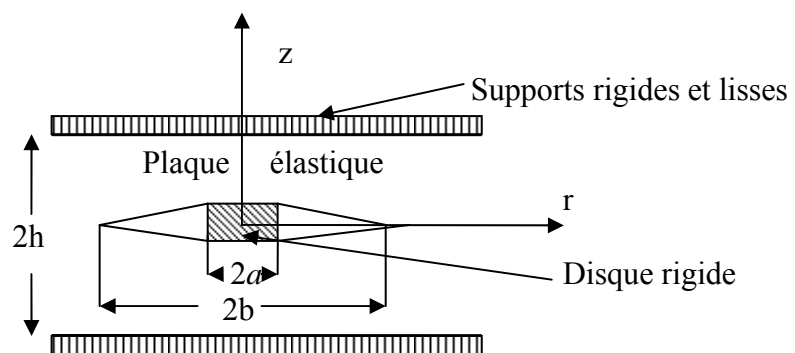


Figure 3.1. Plaque élastique comportant une fissure circulaire contenant un disque rigide.

On étudie l'état de déformation de ce milieu, ce qui se ramène au calcul des déplacements, des contraintes dans la plaque ainsi que les coefficients d'intensité de contrainte au bord de la fissure et le coefficient de singularité le long de l'inclusion rigide.

### 3.2. Conditions aux limites du problème :

Le problème présente une symétrie par rapport au plan médian, on peut donc limiter notre étude à la demi-plaque supérieure.

Les conditions aux limites élastiques du problème de déformation de la plaque supérieure peuvent être décrites par les équations suivantes :

$$(u_z)_{z=0} = \varepsilon, \quad 0 \leq r \leq a \quad (3.1)$$

$$(\sigma_z)_{z=0} = 0, \quad a < r < b \quad (3.2)$$

$$(u_z)_{z=0} = 0, \quad b < r < +\infty \quad (3.3)$$

$$(u_z)_{z=h} = 0, \quad 0 \leq r \leq +\infty \quad (3.4)$$

$$(\tau_{zr})_{z=0} = (\tau_{zr})_{z=h} = 0, \quad 0 \leq r \leq +\infty \quad (3.5)$$

### 3.3. Système d'équilibre du problème :

Dans cette étude, on utilise le système des coordonnées cylindriques  $(r,z)$ . Les composantes du vecteur de déplacement suivant les axes  $r$  et  $z$  sont  $u_r$  et  $u_z$ , alors celles des contraintes sont données par  $\tau_{rz}$ ,  $\sigma_z$  et  $\sigma_r$ .

Le système d'équilibre en déplacement dans un milieu élastique sans torsion est

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \left( \frac{\partial^2 u_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial r} - \frac{u_r}{r^2} \right) + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} + \frac{1}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r \partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (3.6)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{2(1-\nu)}{1-2\nu} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} + \frac{1}{1-2\nu} \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) = 0 \end{array} \right. \quad (3.7)$$

La résolution du système d'équilibre s'obtient à l'aide de deux fonctions harmoniques

$$2Gu_r = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} - 2(1-\nu) \frac{\partial K}{\partial r} \quad (3.8)$$

$$2Gu_z = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1-\nu) \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rK) \quad (3.9)$$

où

F et K sont des fonctions auxiliaires,

G : module de cisaillement et

$\nu$  : Coefficient de poisson

En portant ces expressions dans le système d'équilibre, on obtient :

$$\left(\Delta - \frac{1}{r^2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial K}{\partial z}\right) = 0 \quad (3.10)$$

$$\Delta \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{z} \frac{\partial}{\partial z} (rK) \right] = 0 \quad (3.11)$$

où

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

On choisie les fonctions F et K tel que

$$\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{\partial K}{\partial z} = 0 \quad (3.12)$$

On pose

$$2\psi = \frac{\partial F}{\partial z} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (rK) \quad (3.13)$$

Cette fonction est alors harmonique en tenant compte de (3.13) et (3.12) on trouve

$$\begin{aligned} 2 \frac{\partial \psi}{\partial z} &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial z} (rK) \\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial F}{\partial z} \right) = \Delta F \end{aligned} \quad (3.14)$$

La solution générale de l'équation (3.14) est donnée par :

$$F = z\psi + \varphi \quad (3.15)$$

où  $\varphi$  est harmonique, puisque

$$\Delta(z\psi) = z\Delta\psi + \psi\Delta z + 2\text{grad } z \text{ grad } \psi \quad \left( \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \right) = 2 \frac{\partial \psi}{\partial z}$$

Par suite, on aura

$$2Gu_r = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial r} - 2(1-\nu) \frac{\partial K}{\partial r} = \frac{\partial F}{\partial r} \quad (3.16)$$

$$2Gu_z = -(1-2\nu) \frac{\partial F}{\partial z} + 2(1-\nu) \left[ \frac{\partial F}{\partial z} - 2\psi \right] \quad (3.17)$$

Finalement la relation (3.15) permet d'exprimer les déplacements a l'aide de deux fonctions harmoniques  $\varphi_0$  et  $\varphi_3$ .

$$2Gu_r = \frac{\partial \varphi_0}{\partial r} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \quad (3.18)$$

$$2Gu_z = \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu)\varphi_3. \quad (3.19)$$

La loi de Hooke, donne les relations entre les contraintes et les déplacements comme suit:

$$\sigma_r = \frac{2G}{2\nu - 1} \left[ (\nu - 1) \frac{\partial u_r}{\partial r} - \nu \left( \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \right] \quad (3.20)$$

$$\sigma_z = \frac{2G}{2\nu - 1} \left[ (\nu - 1) \frac{\partial u_z}{\partial z} - \nu \left( \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_r}{r} \right) \right] \quad (3.21)$$

$$\tau_{rz} = G \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \quad (3.22)$$

En substituant les relations (3.20), (3.21) et (3.22) dans les équations (3.18) et (3.19) on retrouve les contraintes comme suit:

$$\sigma_r = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} - 2(1 - \nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \quad (3.23)$$

$$\sigma_z = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z^2} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r^2} - 2\nu \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} \quad (3.24)$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial r \partial z} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial r \partial z} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \quad (3.25)$$

### 3.4. Résolution du problème :

L'équation harmonique satisfaite par  $\varphi_0$  et  $\varphi_3$  est :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \quad (3.26)$$

Pour résoudre cette équation on utilise la transformation de Hankel (1.2.1).

$$H_n \{f(t)\} = \int_0^\infty r J_n(\lambda r) f(r) dr$$

avec  $J_n(\lambda r)$  la fonction de Bessel d'ordre  $n$



$$\int_0^{\infty} r \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} J_0(\lambda r) dr = \frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} r \varphi(r, z) J_0(\lambda r) dr$$

$$= \frac{\partial^2}{\partial z^2} \phi(\lambda, z) = \phi''(\lambda, z)$$

$$\int_0^{\infty} \left( \frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right) r J_0(\lambda r) dr = -\lambda^2 \phi(\lambda, z)$$

Donc on peut écrire l'équation (3.26) sous la forme :

$$\phi''(\lambda, z) - \lambda^2 \phi(\lambda, z) = 0$$

La solution de cette équation est donc

$$\phi(\lambda, z) = A(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + B(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z)$$

La transformation inverse de Hankel de  $\phi$  est :

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} \lambda \phi(z) J_0(\lambda r) d\lambda$$

$$\varphi(r, z) = \int_0^{\infty} [\lambda A(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + \lambda B(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda$$

Donc les fonctions harmoniques  $\varphi_0$ ,  $\varphi_3$  données comme suit :

$$\varphi_0(r, z) = \int_0^{\infty} [A(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + B(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.27)$$

$$\varphi_3(r, z) = \int_0^{\infty} [C(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z) + D(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z)] J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.28)$$

Dans les équations (3.27) et (3.28) on a quatre fonctions inconnues  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  et  $D(\lambda)$ .

On détermine  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$ ,  $C(\lambda)$  en fonction de  $D(\lambda)$  puis  $\varphi_0$ ,  $\varphi_3$ .

D'après les conditions aux limites (3.4) on a

$$u_z|_{z=h} = 0 \Rightarrow \left. \frac{\partial \varphi_0}{\partial z} + z \frac{\partial \varphi_3}{\partial z} - (3 - 4\nu) \varphi_3 \right|_{z=h} = 0$$

ce qui donne :

$$\int_0^{\infty} \left\{ \lambda [A(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z) + B(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + z(C(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z) + D(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z))] \right. \\ \left. - (3 - 4\nu) [C(\lambda) \operatorname{sh}(\lambda z) + D(\lambda) \operatorname{ch}(\lambda z)] \right\} J_0(\lambda r) d\lambda \Big|_{z=h} = 0$$

donc

$$\begin{aligned} \lambda A(\lambda)sh(\lambda h) + \lambda B(\lambda)ch(\lambda h) + [\lambda hch(\lambda h) - (3 - 4\nu)sh(\lambda h)]C(\lambda) \\ + [\lambda hsh(\lambda h) - (3 - 4\nu)ch(\lambda h)]D(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (3.29)$$

et d'après les conditions aux limites (3.5) on a

$$\tau_{zr}|_{z=h} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial r} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z \partial r} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \Big|_{z=h} = 0$$

donc

$$\int_0^\infty \left\{ -\lambda^2 [A(\lambda)sh(\lambda z) + B(\lambda)ch(\lambda z) + z(C(\lambda)ch(\lambda z) + D(\lambda)sh(\lambda z))] \right. \\ \left. + (1 - 2\nu)[C(\lambda)sh(\lambda z) + D(\lambda)ch(\lambda z)] \right\} J_1(\lambda r) d\lambda \Big|_{z=h} = 0$$

après la simplification, on obtient :

$$\begin{aligned} \lambda A(\lambda)sh(\lambda h) + \lambda B(\lambda)ch(\lambda h) + [\lambda hch(\lambda h) - (1 - 2\nu)sh(\lambda h)]C(\lambda) \\ + [\lambda hsh(\lambda h) - (1 - 2\nu)C(\lambda h)]D(\lambda) = 0 \end{aligned} \quad (3.30)$$

$$\text{et pour } \tau_{zr}|_{z=0} = 0$$

on a

$$\frac{\partial^2 \varphi_0}{\partial z \partial r} + z \frac{\partial^2 \varphi_3}{\partial z \partial r} - (1 - 2\nu) \frac{\partial \varphi_3}{\partial r} \Big|_{z=0} = 0$$

ce qui donne

$$\int_0^\infty \left\{ -\lambda^2 [A(\lambda)sh(\lambda z) + B(\lambda)ch(\lambda z) + z(C(\lambda)ch(\lambda z) + D(\lambda)sh(\lambda z))] \right. \\ \left. + (1 - 2\nu)[C(\lambda)sh(\lambda z) + D(\lambda)ch(\lambda z)] \right\} J_1(\lambda r) d\lambda \Big|_{z=0} = 0$$

après la simplification, on trouve

$$-\lambda^2 B(\lambda) + \lambda(1 - 2\nu)D(\lambda) = 0$$

$$\lambda B(\lambda) = (1 - 2\nu)D(\lambda) . \quad (3.31)$$

D'après les formules (3.29), (3.30) et (3.31) on obtient :

$$C(\lambda) = \frac{-ch(\lambda h)}{sh(\lambda h)} D(\lambda) . \quad (3.32)$$

Les formules (3.30), (3.31) et (3.32) donnent

$$\lambda A(\lambda) = \frac{1}{sh^2(\lambda h)} [\lambda h - (1 - 2\nu)ch(\lambda h).sh(\lambda h)] D(\lambda) . \quad (3.33)$$

En remplaçant  $A(\lambda)$ ,  $B(\lambda)$  et  $C(\lambda)$  dans les équations (3.27) et (3.28) on trouve :

$$\varphi_0(r, z) = \int_0^\infty \left[ ch(\lambda z) \left( \frac{2\lambda h - (1 - 2\nu)sh(2\lambda h)}{2\lambda sh^2(\lambda h)} \right) + \frac{1 - 2\nu}{\lambda} sh(\lambda z) \right] D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \quad (3.34)$$

$$\varphi_3(r, z) = \int_0^{\infty} \left[ \frac{-ch(\lambda h)}{sh(\lambda h)} sh(\lambda z) + ch(\lambda z) \right] D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda . \quad (3.35)$$

Maintenant par substitution de  $\varphi_0(r, z)$  et  $\varphi_3(r, z)$

dans les equations (3.18) et (3.23) on obtient les équations intégrales suivantes

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{G\varepsilon}{1-\nu} \quad 0 \leq r \leq a \quad (3.36)$$

$$\int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad a < r < b \quad (3.37)$$

$$\int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r \geq b \quad (3.38)$$

$$\text{où } f(\lambda) = \frac{2\lambda h + sh(2\lambda h)}{2sh^2(\lambda h)} \quad (3.39)$$

D'après les équations (3.36), (3.37) et (3.38) et les conditions limites (3.1), (3.3) et (3.2) on a

$$(u_z)_{z=0} = \gamma \int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = \varepsilon \quad 0 \leq r \leq a \quad (3.40)$$

$$(\sigma_z)_{z=0} = \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad a < r < b \quad (3.41)$$

$$(u_z)_{z=0} = \int_0^{\infty} D(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0 \quad r \geq b \quad (3.42)$$

$$\text{où } \gamma = \frac{1-\nu}{G}$$

Pour résoudre les équations intégrales on utilise la méthode suivante.

1/ on vérifie les deux équations (3.40) et (3.42),

on prend

$$2c = b - a \quad (3.43)$$

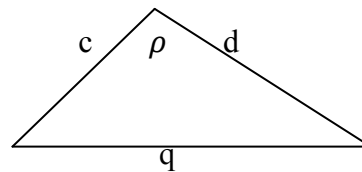
$$2d = b + a \quad (3.44)$$

$$q^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\rho) \quad (3.45)$$

$$D(\lambda) = \int_0^{\pi} F(\rho) J_1(\lambda q) d\rho \quad (3.46)$$

où  $c$ ,  $d$ ,  $q$ , et  $\rho$  sont indiqués sur le triangle de la figure ci-contre

et  $F$  est une fonction auxiliaire inconnue et  $0 \leq \rho \leq \pi$



sachant que :

$$\int_0^{\infty} J_1(\lambda q) J_0(\lambda r) d\lambda = \frac{H(q-r)}{q} \quad (3.47)$$

où  $H(q-r)$  la fonction de Heaviside,  $H(x) = \begin{cases} 1, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$

en substituant l'expression (3.46) dans l'équation (3.40), on obtient

$$(u_z)_{z=0} = \gamma \int_0^{\infty} J_0(\lambda r) d\lambda \int_0^{\pi} F(\rho) J_1(\lambda q) d\rho$$

$$(u_z)_{z=0} = \gamma \int_0^{\pi} F(\rho) \frac{H(q-r)}{q} d\rho. \quad (3.48)$$

Or,  $H(q-r) = \begin{cases} 1, & q \geq r \\ 0, & q < r \end{cases}$

et comme,  $d-c \leq q \leq d+c$

donc  $a \leq q \leq b$

ce qui implique,  $H(q-r) = \begin{cases} 1, & r \leq a \leq q \\ 0, & q < b < r \end{cases}$

par suite (3.48) donne

$$(u_z)_{z=0} = \frac{\gamma}{q} \int_0^{\pi} F(\rho) d\rho \quad r \leq a \leq q \quad (3.49)$$

$$(u_z)_{z=0} = 0 \quad q < b < r \quad (3.50)$$

donc :

$$(u_z)_{z=0} = \begin{cases} w, & r \leq a \\ 0, & r > b \end{cases}, \quad \text{quelque soit la fonction } F, \quad (3.51)$$

où  $w$  est constante.

2/ En déterminant  $F$  afin que la constante  $w$  soit égale à  $\varepsilon$ .

$$\text{Soit } \frac{\pi}{q} F(\rho) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \cos(n\rho) \quad (3.52)$$

où  $\alpha_n$  coefficient inconnu.

En remplaçant (3.52) dans (3.49) on aura

$$(u_z)_{z=0} = \frac{\gamma}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\pi} \cos(n\rho) d\rho = \gamma \alpha_0 = w \implies \alpha_0 = \frac{w}{\gamma}$$

$\alpha_n$  quelconque si  $n \geq 1$ , ainsi les équations (3.40) et (3.42) sont satisfaites.

$$\text{Or l'équation (3.40) donne } w = \varepsilon \implies \alpha_0 = \frac{\varepsilon}{\gamma}. \quad (3.53)$$

3/ En calculant  $\alpha_n$ ,  $n \geq 1$  à partir de l'équation (3.41), en utilisant la formule de Gegenbaure

$$\begin{aligned} J_0(\lambda q) &= J_0(\lambda d)J_0(\lambda c) + 2 \sum_{m=1}^{\infty} J_m(\lambda c)J_m(\lambda d) \cos(m\rho) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) J_m(\lambda c)J_m(\lambda d) \cos(m\rho), \end{aligned}$$

sachant que  $\frac{\partial}{\partial \lambda} J_0(\lambda q) = -qJ_1(\lambda q)$

on trouve :

$$qJ_1(\lambda q) = - \sum_{m=1}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \frac{\partial}{\partial \lambda} [J_m(\lambda c)J_m(\lambda d)] \cos(m\rho) \quad (3.54)$$

ce qui donne de (3.46) et (3.52)

$$\begin{aligned} D(\lambda) &= \int_0^{\pi} F(\rho)J_1(\lambda q)d\rho = \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\pi} qJ_1(\lambda q) \cos(n\rho)d\rho \\ &= - \frac{1}{\pi} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \frac{\partial}{\partial \lambda} J_m(\lambda d)J_m(\lambda c) \int_0^{\pi} \cos(m\rho) \cos(n\rho)d\rho \right\} \end{aligned} \quad (3.56)$$

$$\text{or, } \int_0^{\pi} \cos(m\rho) \cos(n\rho)d\rho = \begin{cases} \pi & m = n = 0 \\ \frac{\pi}{2} & m = n, n \neq 0 \\ 0 & m \neq n \end{cases}$$

$$\text{car } \int_0^{\pi} \cos^2(n\rho)d\rho = \frac{1}{2} \int_0^{\pi} (1 + \cos(2n\rho))d\rho = \frac{\pi}{2}.$$

$$\text{Ainsi, } D(\lambda) = - \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n M_n(\lambda) \quad (3.57)$$

$$\text{où } M_n(\lambda) = \frac{\partial}{\partial \lambda} [J_n(\lambda c)J_n(\lambda d)] \quad (3.58)$$

par suite l'équation (3.41) donne :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) M_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda = 0, \quad \mathbf{a < r < b} \quad (3.59)$$

comme  $\frac{\partial}{\partial r} [rJ_1(\lambda r)] = \lambda rJ_0(\lambda r)$ , la dernière équation s'écrit sous la forme :

$$\frac{\partial}{\partial r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) rJ_1(\lambda r) d\lambda = 0 \quad (3.60)$$

ce qui implique :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) r J_1(\lambda r) d\lambda = -\Omega \quad \mathbf{a} < r < b, \quad (3.61)$$

où  $\Omega$  constante quelconque.

On prend

$$r^2 = c^2 + d^2 - 2cd \cos(\theta), \quad \mathbf{0} \leq \theta \leq \pi$$

par la formule de Gegenbaure (3.54) on a

$$r J_1(\lambda r) = -\sum_{m=1}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) \frac{\partial}{\partial \lambda} [J_m(\lambda c) J_m(\lambda d)] \cos(m\theta) \quad (3.62)$$

donc d'après les formules (3.61) et (3.62) on trouve :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} (2 - \delta_{0m}) M_m(\lambda) \cos(m\theta) \right\} d\lambda = \Omega, \quad (3.63)$$

le système trigonométrique est linéairement indépendant,  
ce qui implique

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) M_m(\lambda) d\lambda = \Omega \delta_{0m},$$

donc :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} f(\lambda) M_n(\lambda) M_m(\lambda) d\lambda = \delta_{0m} \quad (3.64)$$

$$\text{où } a_n = \frac{\alpha_n}{\Omega} \Rightarrow \alpha_n = \Omega a_n .$$

$$\text{par suite, } D(\lambda) = -\Omega \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n(\lambda) \quad (3.65)$$

$$\text{or, } \alpha_0 = \frac{\varepsilon}{\gamma} \Rightarrow \alpha_0 = \Omega a_0 = \frac{\varepsilon}{\gamma}$$

$$\text{donc } \Omega = \frac{\varepsilon}{a_0 \gamma}$$

### 3.5. Détermination du facteur d'intensité et facteur de singularité de

#### contrainte :

La contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=0}$  sur la surface  $a < r < b$  de la fissure peut être exprimée comme suit.

En substituant l'expression (3.65) dans l'équation (3.41), on obtient :

$$(\sigma_z)_{z=0} = -\Omega \int_0^{\infty} \lambda f(\lambda) \sum_{n=0}^{\infty} a_n M_n J_0(\lambda r) d\lambda$$

ce qui implique

$$\frac{-1}{\Omega} (\sigma_z)_{z=0} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_0^{\infty} f(\lambda) \lambda M_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda .$$

D'après (3.39) on a :

$$\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} f(\lambda) = 1 \quad (3.66)$$

et par la formule asymptotique de la fonction de Bessel (1.1.20) on trouve :

$$J_n(\lambda d) \approx \left(\frac{2}{\pi \lambda d}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos\left(\lambda d - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) - \frac{(4n^2 - 1)}{8 \lambda d} \sin\left(\lambda d - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.67)$$

$$J_n(\lambda c) \approx \left(\frac{2}{\pi \lambda c}\right)^{\frac{1}{2}} \left[ \cos\left(\lambda c - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) - \frac{(4n^2 - 1)}{8 \lambda c} \sin\left(\lambda c - \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{\pi}{2}\right) \right] \quad (3.68)$$

en substituant les formules (3.67) et (3.68) dans l'équation (3.58) on obtient :

$$\lambda M_n(\lambda) \approx \beta \left[ a \sin(\lambda a) - (-1)^n b \cos(\lambda b) \right] \quad (3.69)$$

$$\text{où} \quad \beta = \frac{1}{\pi \sqrt{cd}}$$

Donc :

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Omega} (\sigma_z)_{z=0} &= \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} (f(\lambda) - 1) \lambda M_n(\lambda) J_0(\lambda r) d\lambda \\ &+ \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left[ \lambda M_n(\lambda) + \beta (a \sin(\lambda a) - (-1)^n b \cos(\lambda b)) \right] J_0(\lambda r) d\lambda \\ &- \frac{H(a-r)}{\sqrt{(a^2 - r^2)}} a \beta \sum_{n=0}^{\infty} a_n + \frac{H(r-b)}{\sqrt{(r^2 - b^2)}} b \beta \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n \end{aligned} \quad (3.70)$$

Le facteur d'intensité et le facteur de singularité de contrainte du problème fissuré sont définis par

$$K_I = -\frac{\gamma}{\varepsilon} (\sigma_z)_{z=0} \lim_{r \rightarrow b^+} \sqrt{2\pi b(r-b)} \quad (3.71)$$

$$S = \frac{\gamma}{\varepsilon} (\sigma_z)_{z=0} \lim_{r \rightarrow a^-} \sqrt{2\pi b(a-r)} \quad (3.72)$$

En substituant la formule (3.70) dans les équations (3.71) et (3.72) on obtient :

$$K_I = \eta b \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n$$

$$S = \eta \sqrt{ab} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad \text{où} \quad \eta = \frac{\beta\sqrt{\pi}}{a_0}$$

### 3.6. Résultats numériques et discussion

D'après (3.66) et (3.69) on trouve

$$|f(\lambda)M_n(\lambda)M_m(\lambda)| \leq \frac{T}{\lambda^2}$$

où T est constante

ce qui implique la convergence de l'intégrale  $\int_0^{\infty} f(\lambda)M_n(\lambda)M_m(\lambda)d\lambda$ .

On calcule les coefficients  $a_n$  d'après le système algébrique (3.64).

$$\text{On a } \lambda h = \lambda \frac{h}{b} \frac{b}{a} a \quad \text{on pose } \chi = \frac{h}{b}, \quad \zeta = \frac{a}{b} \quad \text{et } \lambda = \frac{\mu}{a},$$

on fait un changement de variable  $\lambda$  par  $\mu$  où  $\lambda = \frac{\mu}{a}$

d'après (3.39) et (3.58) on trouve

$$f(\mu) = \frac{2 \frac{\chi}{\zeta} \mu + sh \left( 2 \frac{\chi}{\zeta} \mu \right)}{2 sh^2 \left( \frac{\chi}{\zeta} \mu \right)}$$

$$M_n(\mu) = \frac{\partial}{\partial \lambda} \left\{ J_n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\zeta} - 1 \right) \mu \right] J_n \left[ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{\zeta} + 1 \right) \mu \right] \right\}$$



Soit  $A_{nm} = A_{nm}^1 + A_{nm}^2$  où  $A_{nm} = \int_0^{\infty} f(\mu)M_n(\mu)M_m(\mu)d\mu = \int_0^{\infty} f(\lambda)M_n(\lambda)M_m(\lambda)d\lambda$  et

$$A_{nm}^1 = \int_0^{\lambda_0} f(\lambda)M_n(\lambda)M_m(\lambda)d\lambda \quad \text{et} \quad A_{nm}^2 = \int_{\lambda_0}^{\infty} f(\lambda)M_n(\lambda)M_m(\lambda)d\lambda$$

on calcule  $A_{nm}^1$  par la méthode de Simpson.

$$A_{nm}^1 = \frac{\lambda_0}{6p} g(\lambda_0) + \frac{\lambda_0}{3p} \sum_{k=1}^{p-1} g\left(\frac{k\lambda_0}{p}\right) + \frac{2\lambda_0}{3p} \sum_{k=0}^{p-1} g\left(\frac{(2k+1)\lambda_0}{2p}\right)$$

$$\text{où } g(\lambda) = f(\lambda)M_n(\lambda)M_m(\lambda) .$$

Et pour  $A_{nm}^2$  on prend l'approximation de  $f$ ,  $M_n$  et  $M_m$  au voisinage de  $+\infty$ .

D'après les formules (3.69), (3.66) on trouve,

$$g(\lambda) \approx \frac{4}{\pi^2 \lambda^2 (1-\zeta^2)^2} \left\{ (-1)^{n+m} \cos^2\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right) - [(-1)^{n-1} + (-1)^{m-1}] \zeta \cos\left(\frac{\lambda}{\zeta}\right) \sin(\lambda) + \zeta^2 \sin^2(\zeta) \right\} = M_{nm}^*$$

et

$$A_{nm}^2 = \int_{\lambda_0}^{\infty} M_{nm}^*(\lambda) d\lambda ,$$

après simplification, on obtient,

$$A_{nm}^2 = \frac{4(-1)^{n+m}}{\pi^2} \frac{1}{\zeta(1-\zeta^2)} \left[ \frac{\zeta}{\lambda_0} \cos^2\left(\frac{\lambda_0}{\zeta}\right) + Si\left(2\frac{\lambda_0}{\zeta}\right) \right] \\ - \frac{4((-1)^n + (-1)^m)}{\pi^2} \frac{1}{1-\zeta^2} \left[ \frac{\zeta}{2\lambda_0} \sin\left(\frac{\lambda_0}{\zeta}(1-\zeta)\right) - \frac{\zeta}{2\lambda_0} \sin\left(\frac{\lambda_0}{\zeta}(1+\zeta)\right) - \frac{1}{2}(1-\zeta)Ci\left(\frac{\lambda_0}{\zeta}(1-\zeta)\right) + \frac{1}{2}(1+\zeta)Ci\left(\frac{\lambda_0}{\zeta}(1+\zeta)\right) \right] \\ + \frac{4}{\pi^2} \frac{\zeta}{1-\zeta} \left[ \frac{1}{\lambda_0} \sin^2 \lambda_0 - Si(2\lambda_0) \right]$$

$$\text{où } Si(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt \quad \text{et} \quad Ci(x) = -\int_x^{\infty} \frac{\cos(t)}{t} dt$$

On peut écrire le système (3.64) sous la forme :

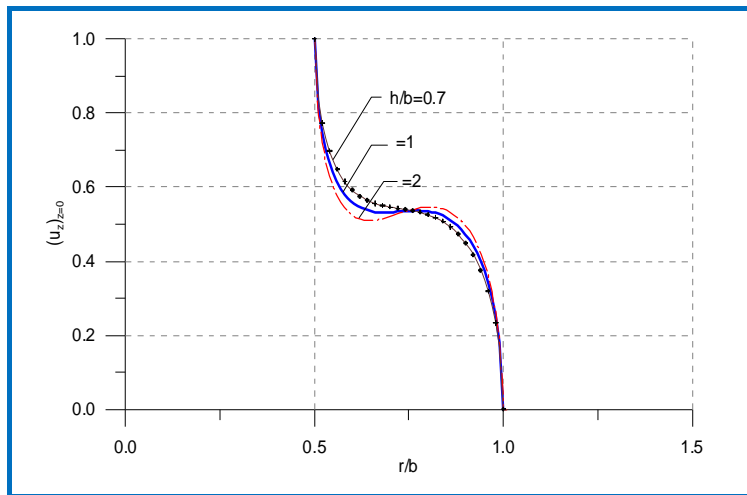
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n A_{nm} = \delta_{0m}$$

Pour  $\lambda_0 = 1000$  ,  $p = 5000$  ,  $\chi = \frac{h}{b} = 1$

Les coefficients  $a_n$  sont :

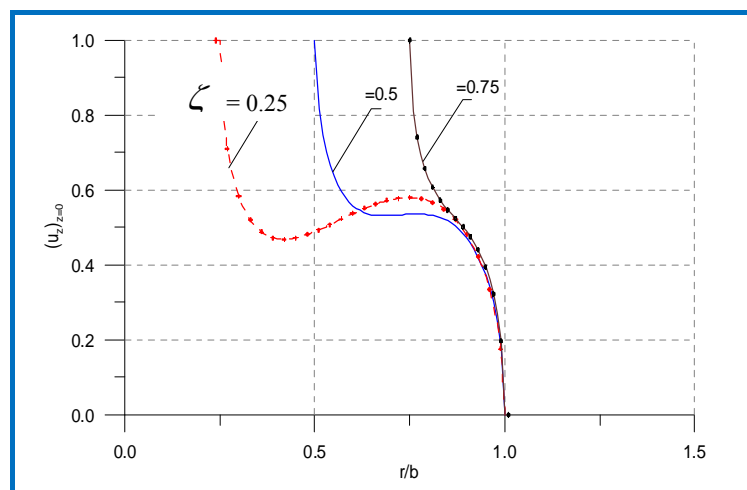
n	$\zeta = 0.25$	$\zeta = 0.5$	$\zeta = 0.75$
1	5.132018958	2.058702146	1.075444722
2	7.626507864	2.146074042	0.6101111339
3	4.622073954	0.7418747626	0.09357667740
4	2.750055280	0.2430552336	0.01308095828
5	1.642690164	0.08005793862	0.001843009281
6	0.9836023620	0.02653208386	0.0002445325983
7	0.5895529828	0.008802667771	-0.00002453906052
8	0.3534897272	0.002927483813	-0.00004420669220
9	0.2119975619	0.0009078729723	
10	0.1271681102	0.0003024434586	
11	0.07621727066	-0.0001072176816	
12	0.04578601351	-0.00002622618830	
13	0.02726773172		
14	0.01652835903		
15	0.009464543598		
16	0.006031414475		
17	0.002738810656		
18	0.002292878100		
19	-0.0001821584077		

**Table 3.1.** Coefficients  $a_n$



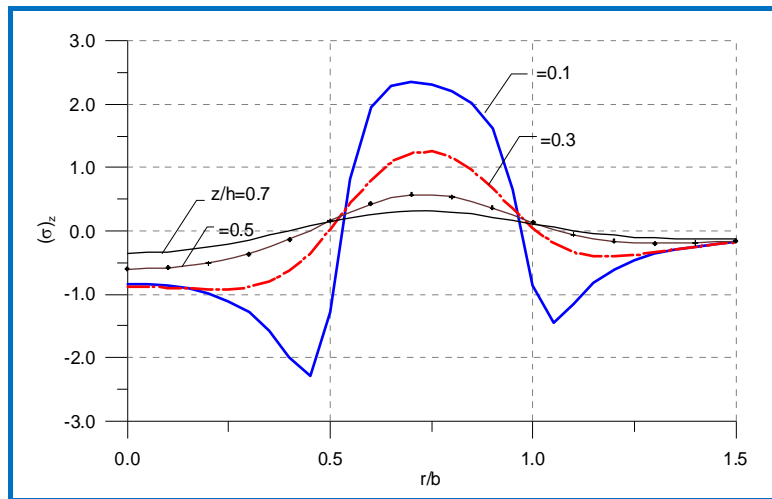
**Fig3.2. Distribution de déplacement normal  $(u_z)_{z=0}$ , ( $\zeta = 0.5$ ).**

La figure (3.2) montre la distribution radiale du déplacement normale pour ( $\zeta = 0.5$ ) avec la variation de  $h/b$ . Pour toutes les valeurs de  $h/b$  la pente de  $(u_z)_{z=0}$  tend vers l'infini.



**Fig 3.3- Distribution de déplacement normal  $(u_z)_{z=0}$ , ( $h/b=1$ ).**

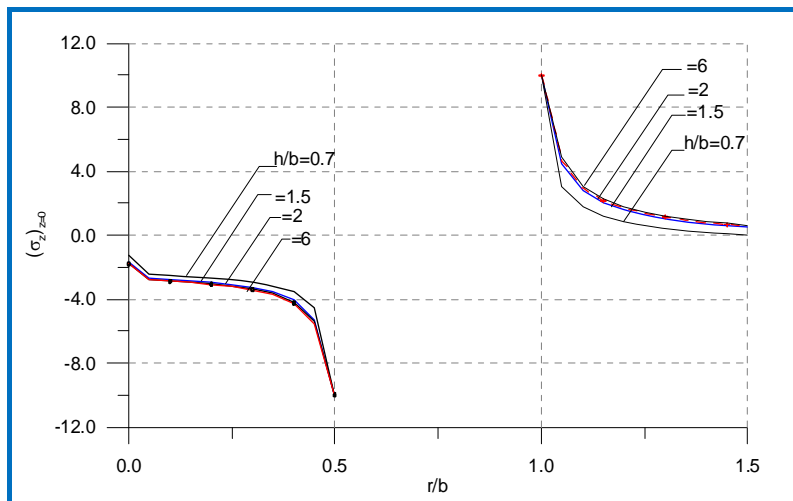
La figure (3.3) montre la distribution radiale du déplacement normale pour ( $h/b=1$ ) avec la variation de  $\zeta$ .  $(u_z)_{z=0}$  est devient nulle au bord de la fissure et devient large aux bord de l'inclusion.



**Fig 3.4- Distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z)$ , ( $\zeta = 0.5$ )**

La figure (3.4) montre la distribution radiale de la contrainte normale pour ( $\zeta = 0.5$ ) avec la variation de  $r/b$ .

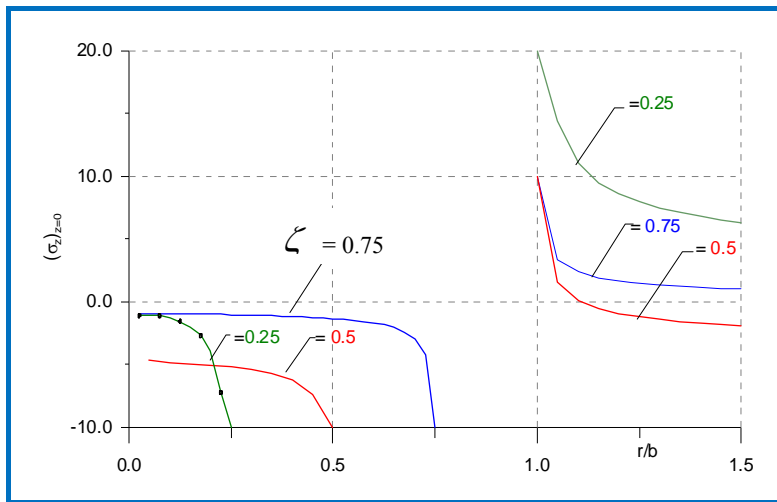
On remarque que la contrainte ( $\sigma_z$ ) devient nulle pour  $r/b < 0.2$  et  $r/b > 1.5$ , et pour  $0.2 \leq r/b \leq 1.5$  la contrainte normale est inversement proportionnelle au rapport  $z/h$ .



**Fig 3.5- Distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=0}$ , ( $\zeta = 0.5$ )**

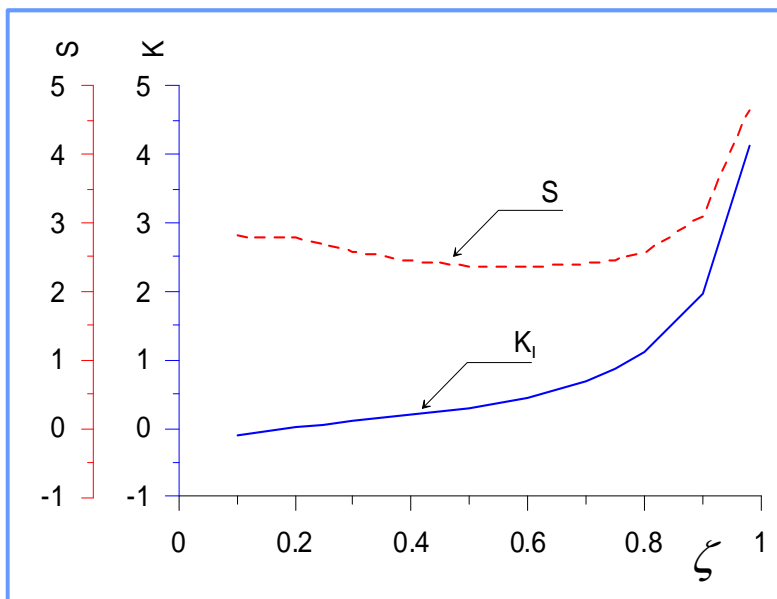
La figure (3.5) montre la distribution radiale de la contrainte normale pour ( $\zeta = 0.5$ ) avec la variation de  $r/b$ .

Pour les valeurs de  $h/b$ , la contrainte normale devient nulle pour  $r > b$  et  $r < b/2$ .



**Fig 3.6- Distribution radiale de la contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=0}$  ( $h/b=1$ )**

La figure (3.6) montre la distribution radiale de la contrainte normale pour ( $h/b = 1$ ) avec la variation de  $r/b$ . la pente de  $(\sigma_z)_{z=0}$  est approchée à l'infinie comme  $r \rightarrow a^+$  et  $r \rightarrow b^-$ .

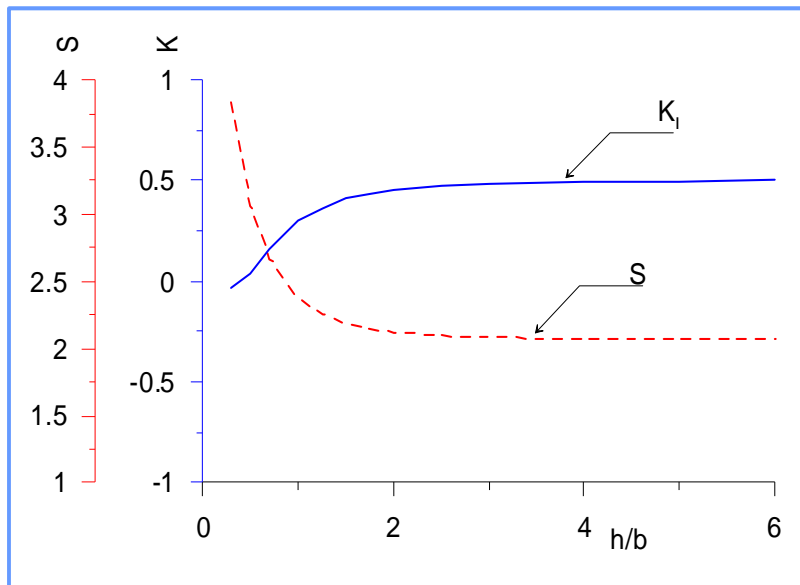


**Fig 3.7- variation de S et  $K_I$  ( $h/b = 1$ )**

La figure (3.7) montre la distribution de S et  $K_I$  avec la variation de  $\zeta$

Quand  $\zeta$  augmente on a la décroissance puis la croissance du facteur S.

Quand  $\zeta$  augmente le facteur  $K_I$  augmente aussi



**Fig 3.8- variation de S et K<sub>I</sub> ( $\zeta = 0.5$ )**

La figure (3.8) montre la distribution de S et K<sub>I</sub> avec la variation de h/b.

Si h/b augmente le facteur d'intensité K<sub>I</sub> aussi puis se stabilise. Et le facteur singulier S diminue puis se stabilise.

### 3.7. Conclusion:

Dans ce chapitre, on a présenté une étude correspondante à la déformation d'un milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure d'un disque rigide.

La résolution de l'équation d'équilibre du problème est donnée par la méthode de la transformation de Hankel et son inverse.

Etant donné le problème aux valeurs limites et mixtes, sa solution, en tenant compte des conditions limites, est définie en trois intervalles ( $0 \leq r \leq a$ ), ( $a < r < b$ ) et ( $r \geq b$ ) à l'aide de trois équations intégrales appelées équations intégrales triples.

En utilisant des développements en séries de cosinus, les solutions des équations intégrales triples correspondantes s'obtiennent par la résolution d'un système algébrique infini.

Les champs de contraintes et de déplacement et le facteur d'intensité sont déterminés analytiquement.

## Conclusion générale:

On a étudié le problème de déformation du milieu élastique dans le cas de l'inclusion de la fissure dans un disque rigide. Les deux frontières sont délimitées par des plaques rigides dont le contact est lisse. La résolution basée sur une procédure analytique sur l'utilisation de la méthode de la transformation intégrale de Hankel a été développée et utilisée quelle que soit l'épaisseur de la couche.

La présence d'une fissure dans une plaque produit une concentration de contrainte localisée au bord de la fissure.

La solution analytique a été obtenue par la résolution d'un système algébrique infini.

La convergence du système infini est réalisée à partir des 19 premiers termes de la série.

Le déplacement normal  $(u_z)_{z=0}$  pour  $\zeta = 0.5$  fixé et  $h/b$  variable est décroissant et devient infini pour  $a < r < b$ .

Alors que pour  $h/b = 1$  avec la variation de  $a$  le déplacement  $(u_z)_{z=0}$  devient nul aux bords de la fissure et suffisamment grand aux bords de l'inclusion.

La contrainte normale  $(\sigma_z)$  pour  $\zeta = 0.5$  en variant  $r/b$  devient nulle dans les cas  $r/b < 0.2$  et  $r/b > 1.5$ . Pour les valeurs  $0.2 < r/b < 1.5$   $(\sigma_z)$  est inversement proportionnelle au rapport  $z/h$ .

Alors que  $(\sigma_z)$  est nulle pour  $r > b$  et  $r < b/2$  dans le cas  $\zeta = 0.5$  en variant  $h/b$ .

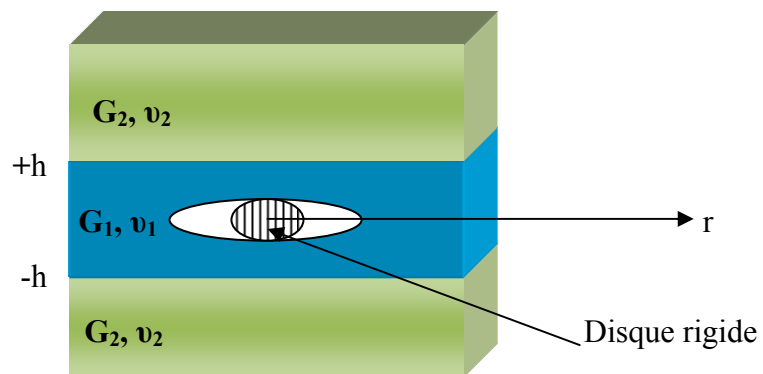
La contrainte normale  $(\sigma_z)_{z=0}$  si  $h/b = 1$  tend vers l'infinie lorsque  $r \rightarrow a^+$  et  $r \rightarrow b^-$ .

Si  $h/b = 1$  le facteur d'intensité de contrainte est croissant alors que le facteur de singularité n'est pas monotone.

En variant  $h/b$ , si  $h/b$  augmente le facteur d'intensité  $K_I$  augmente aussi puis se stabilise à une valeur constante. Alors que le facteur de singularité  $S$  diminue puis se stabilise à une valeur constante.

## Perspectives :

- La méthode analytique développée dans ce mémoire peut être appliquée pour la résolution d'une classe intéressante des problèmes de recherche.
- On envisage d'étudier des problèmes de déformation d'une plaque encastree dans deux milieux infinis ayant les mêmes modules de Cisaillement et coefficient de poisson dans le cas d'une adhesion parfaite.
- Le problème se ramène à un système de trois équations triples.





## Références Bibliographiques

- [1] E. Belorizky. Outils mathématiques à l'usage des scientifiques et ingénieurs. pp.245-254, 2007.
- [2] H. D. BUI. Introduction aux problèmes inverses en mécanique des matériaux, Eyrolles, Paris, pp. 229, 1993.
- [3] J. C. Charmet. Elasticité, plasticité, rupture, Laboratoire d'Hydrodynamique et Mécanique Physique, ESPCI, [http://www.espci.fr / enseignement / download](http://www.espci.fr/enseignement/download).
- [4] A. Curnier. Mécanique des solides et déformables cinématiques, dynamiques, énergétiques, Presses Polytechniques et universités Romandes, Lausanne, pp. 649, 2005.
- [5] L. Debnath, D. Bhatta . Integral transformations and their applications, pp. 315-322, 2007.
- [6] R. Fortunier. Comportement mécanique des matériaux, Ecole Nationale Supérieure des Mines, Saint-Etienne cedex 2. [http://www.emse.fr/~fortunier / cours](http://www.emse.fr/~fortunier/cours).
- [7] D. François, A. Pineau, A. Zaoui. Elasticité et plasticité, Hermès, Paris, pp. 505, 1992.
- [8] D. François, A. Pineau, A. Zaoui. Viscoplasticité, endommagement, mécanique de la rupture, mécanique du contact, Hermès, Paris, pp. 489, 1991.
- [9] L. S. Fu et T. P. Tsai. A numerical scheme for mixed boundary value problem in elasticity computers and structures, Vol. 8, No 1, pp.41-49, 1976.
- [10] T. Hara, M. Sakamoto, T. Shibuya and T. Koizumi. Indentation of a penny-shaped crack by a disc- shaped rigid inclusion in an infinite elastic solid, Transactions of the Japan society of Mechanical Engineering, Vol. 55, No. 513, pp. 1215-1218, 1989.
- [11] T. Koizumi, T. Shibuya, I.nakahara and S.tanaka. A crack problem on a slab with an annular crack subjected to pressure, JSME, Vol. 20, No. 139, pp. 17-22, 1977.
- [12] M. Krasnov, A. Kissélev, G. Makarenko. Équations intégrales. pp.13-19, 1977.
- [13] J. Lemaitre, J. L. Chaboche. Mécanique des matériaux solides, Dunod, BORDAS, Paris, pp. 541, 1988.
- [14] J. Lemaitre, P. A. Boucard, F. Hild. Résistance mécanique des solides, Dunod, 2002. [http:// www.eyrolles.com >Science >Physique >Mécanique](http://www.eyrolles.com>Science>Physique>Mécanique).
- [15] N. N. Lebedev, and Ia. S Ufliand. Axisymmetric contact problem for an elastic layer, J. Appl. Math. And Mech. Vol. 22 No. 3, pp. 422-450, 1958.

- [16] E. N. Mastrojannis, T. Mura and I. K. Keer. An axisymmetric Neumann potential problem for the circular annulus, *Computers and Structures* Vol. 18, No.2, pp. 365-368, 1983.
- [17] J. P. Mercier, G. Zambelli, W. Kurz. *Introduction à la science des matériaux*, Presses Polytechniques et universitaires, ROMANDES, pp. 500, 2002.
- [18] N. Moes. *Mécanique des milieux continus*, Ecole centrale de Nantes.  
[http://www.chireux.fr/mp/cours/mécanique\\_milieux\\_continus.pdf](http://www.chireux.fr/mp/cours/mécanique_milieux_continus.pdf).
- [19] N. Recho. *Rupture par fissuration des structures*, Hermès, Paris, pp. 349, 1995.
- [20] M. Sakamoto, T. Hara, T. Shibuya and T. Koizumi. Indentation of a penny-shaped crack by a disc-shaped rigid inclusion in an elastic layer, *JSME Int. Ser. I*, Vol. 33, No.4, pp. 425-430, 1990.
- [21] M. Sakamoto. An elastic layer with a penny-shaped crack subjected to internal Pressure, *JSME, Series A*, Vol. 46, No. I, pp. 10-14, 2003.
- [22] A. P.S. Selvadurai and B.M. Singh. On the expansion of a penny-shaped crack by a rigid circular disc inclusion, *Int. J. Fract.* 25, pp. 69-77, 1984.
- [23] A. P.S. Selvadurai. On an integral equation governing an internally indented penny - shaped crack, *Mechanics Research Communications*, Vol. 12(6), pp. 347-351, 1985.
- [24] T. Shibuya, T. Koizumi and I. nakahara. An elastic contact problem for half-space indented by a flat annular rigid stamp, *Int. J. Engng. Sci*, Vol, 12, pp. 759-771, 1974.
- [25] T. Shibuya, I.nakahara, T. Koizumi. The axisymmetric distribution of in an infinite elastic solid containing a flat annular crack under internal pressure, *ZAMM*, 55, pp. 395-402, 1975.
- [26] I. N. Sneddon. The distribution of stress in the neighborhood of a crack in an elastic solid, *proc. Roy Soc. A*. pp. 187-229, 1946.
- [27] Z. Soumahoro. *Etude du couplage thermomécanique dans la propagation dynamique de fissure*, Thèse de doctorat de l'Ecole Polytechnique, pp. 124, 2005.
- [28] B. Spain, M. G. Smith. *Functions of mathematical physics*. pp.149-169 pp. 347-351, 1970.
- [29] S. Timoshenko. *Résistance des matériaux*, Dunod, Paris, pp. 417, 1972.

- [30] J. Vrbik, B. M. Singh, J. Rokne, and R.S. Dhaliwal. On the expansion of a penny-shaped crack by a rigid circular disc inclusion, *Zamm.Z.Angew.Mech.*84, No. 8, pp. 538-550, 2004.
- [31] C. Wielgosz. *Resistance des matériaux*, Ellipses, édition Marketing S A., Paris, pp. 312, 1999.
- [32] J. Zarzycki. *Propriétés mécaniques des verres*, Université de Montpellier 2, Laboratoire des verres du C.N.R.S., France. *Revue de physique appliquée*, pp.790-796, 1977.