N° d'ordre : 03/2008-M/PH

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie "Houari Boumedienne"
Faculté de Physique

MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

EN: PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique de la Matière et des Hautes Energies

Par

SLIMATNI SAMI

SUJET

Application du Théorème de Noether à la Construction de la Théorie des Champs pour les Particules Etendues à Symétrie Interne Spinorielle

Soutenu publiquement, le 19/11/2008, devant le jury composé de :

Mr.	**M. Hachmane**	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	**A. Smida**	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de Thèse.
Mr.	**M. Moulay**	Directeur de Recherche	C.R.N.A.	Examinateur.
Mr	**M. Djebli**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mme.	**A. Hamici**	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examinatrice.

Remerciements

Le présent travail a été réalisé au sein du Laboratoire de Physique Théorique de l'Université des Sciences et de la Technologie HOUARI BOUMEDIENE.

Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur ***A. SMIDA*** *mon Directeur de thèse, Professeur à l'U.S.T.H.B, pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé. Je lui suis également reconnaissant pour la confiance qu'il ma accordée et sa patience. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur ***M. HACHEMANE,*** *Professeur à l'U.S.T.H.B pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

Je remercie vivement Messieurs ***M. MOULAY*** *Directeur de Recherches à C.R.N.A et* ***M. DJEBLI*** *Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, qui ont bien voulu faire partie du jury.*

A Madame ***HAMICI AMEL HIBA*** *Maître de Conférences à l'U.S.T.H.B, j'adresse mes plus vifs remerciements pour sa disponibilité alliée à sa gentillesse naturelle, pour ses conseils qui ont été des éléments décisifs dans l'aboutissement de ce Mémoire, et pour avoir accepté de juger mon travail.*

Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier ***BECHICHE SAID*** *pour leur soutient tout au long de mes études.*

Enfin, je ne pourrai jamais assez remercier ma belle famille et mon épouse pour avoir été toujours à mes cotés pour m'encourager.

Table des matières

Introduction

Au début du siècle dernier, la physique a connu deux grands changements conceptuels. Avec la découverte de la relativité et la mécanique quantique, les notions de matière, de causalité, de temps et d'espace ont été bouleversées. Les effets de ces bouleversements sont variés et touchent aussi bien notre conception du monde que la relation entre cette conception et sa formulation mathématique. La découverte des symétries et leur exploitation ont largement contribuées au développement de la physique. La théorie quantique des champs a été couronnée de succès dans la description de trois des quatre interactions: l'électromagnétique de symétrie $U(1)$, la faible de symétrie $SU(2)$ et l'interaction forte de symétrie $SU(3)$. Le succès du modèle standard a donné l'espoir aux physiciens des particules d'unifier dans une même théorie de jauge ces trois interactions par un champ de jauge de symétrie $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$. Ce modèle est une des avancées les plus importantes dans la connaissance de la structure de la matière. D'autre part la théorie des champs locaux souffre d'inconsistances internes[1, 2], par exemple, il est impossible de définir un opérateur de position covariant et une densité de courant définie positive en mécanique quantique relativiste[1, 3]. Ainsi, la théorie quantique des champs possède des divergences dans la matrice S qui ne sont levées qu'aux prix d'une renormalisation vivement critiquée par les fondateurs de la mécanique quantique et la théorie des champs[1, 4]. Plus encore, la gravitation est non renormalisable. Ceci a conduit certains physiciens à lier ces inconsistances à la notion de la ponctualité des particules. De Broglie, en 1927 a imaginé la ponctualité comme une singularité de la fonction d'onde physique représentant un objet étendue[5, 6], le mouvement de cette singularité étant déterminé par les lois d'une certaine dynamique de guidage. Il trouva après, qu'il n'était pas nécessaire qu'il y ait une singularité, il suffisait que l'onde physique soit répartie dans tout l'espace avec une faible amplitude sauf dans une petite région de forte concentration d'énergie, (la particule étendue), où cette amplitude devient très grande. Par la suite Destouches a proposé une généralisation de cette idée dans sa théorie quantique fonctionnelle[7] en se basant sur la constatation qu'une particule est un système physique influençable dans ses propres caractéristiques. Alors au lieu d'une représentation ponctuelle de la particule, il opte pour une représentation fonctionnelle au moyen d'une fonction u, appartenant à un espace séparable, décrivant ces caractéristiques propres. Cependant, le caractère ponctuel de la particule reste un aspect partiel de la réalité physique et est représenté géométriquement par un point M qui est une certaine fonctionnelle de u. La notion de l'extension de la particule est présentée aussi par une théorie proposée par Edouard Prugovečki[3]. Elle stipule que lors de la mesure de la position et de l'impulsion de la particule, des fluctuations apparaissent et donne une distribution autour d'une position moyenne d'une largeur de l'ordre de la longueur de Planck $l_0 \simeq 10^{-33}cm$, due à l'imprécision des appareils de mesure. Selon cette théorie, la fonction de distribution est liée à une fonction d'onde propre de la particule. D'un point de vue opérationnel la particule devient étendue stochastiquement, et la largeur des fluctuations définit un ordre de grandeur de cette extension stochastique. Les fluctuations de la position de la particule élémentaire, dans son référentiel de repos, ont été décrites par une distribution $|\eta(x)|^2$ identifiée à une fonction d'onde propre qui rend compte de son extension.

Dans le présent travail, nous considérons des particules étendues dont les modes externe et interne évoluent tous les deux dans des espaces-temps plans de Minkowski indépendants l'un de l'autre. Dans le but de construire une théorie des champs de ces particules étendues, il a fallut reprendre la démonstration du théorème de Noether dans le cas général en introduisant les objets physiques d'abord (champs, onde physique, Lagrangien...etc.), puis les entités mathématiques correspondantes (variation des champs, variation du Lagrangien...etc.). Nous avons obtenu les invariants dynamiques que nous avons exprimés en fonctions des générateurs des groupes pour chaque type de transformation. Nous avons également repris les résultats pour une symétrie interne spinorielle.

Nous commençons par un premier chapitre qui traite la théorie classique des champs pour les particules ponctuelles, nous déduisons les équations du mouvement d'Euler-Lagrange et les courants conservés associés aux différentes symétries pour chaque type de champs. Le deuxième chapitre est consacré à la présentation de la théorie de la double solution de de Broglie et la théorie quantique fonctionnelle de Destouches. Dans le troisième chapitre, nous appliquons le théorème de Noether pour notre modèle de la particule étendue dans le cas où les espaces externe et interne sont indépendants l'un de l'autre. Nous terminons notre travail par une conclusion où nous citons les principaux résultats, les questions laissées ouvertes et les approches jugées adéquates pour les aborder.

CHAPITRE 1

La Théorie Classique des Champs

Résumé

En considrant le champ comme un système mécanique possédant un nombre infiniment grand de degrés de liberté, on peut construire une théorie des champs en utilisant l'analogie avec la mécanique classique du point. Dans ce chapitre on se propose d'exposer brièvement la théorie classique des champs en adoptant le formalisme Lagrangien et en remplaçant les coordonnées généralisées (q) par un champ puis l'indice discret (i) par un indice à variation continue (x) qui joue le rôle des coordonnées des points de l'espace-temps de Minkowski. On obtient les équations du champ et les invariants dynamiques directement à partir de la fonction de Lagrange, en se basant sur la notion de symétrie et en utilisant le principe variationnel.

1.1 Formalisme Lagrangien

La formulation Lagrangienne de la dynamique d'un système s'obtient en appliquant le principe variationnel à une fonctionnelle, *l'action*, $A = \int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i)dt$. En généralisant les expressions obtenues pour plusieurs degrés de liberté à une infinité de degrés de liberté, la fonction de Lagrange devient une fonctionnelle du champ ϕ_i (ici i est la composante du champ) et de ses dérivées premières. En théorie classique des champs, on cherche à écrire le Lagrangien comme une intégrale d'espace d'une densité Lagrangienne $\mathcal{L}$, dépendant des champs ϕ_i et de leurs dérivées premières. L'action possède donc la forme générale suivante:

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(t)dt = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \mathcal{L}(\phi_i(\mathbf{x},t), \partial_t\phi_i(\mathbf{x},t))\mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.1.1}$$

où V est le volume de l'espace d'intégration, $\mathbf{x}$ est le vecteur position. Dans l'approche relativiste, l'action doit être invariante de Lorentz. Comme la mesure d'intégration sur le quadrivolume d'espace-temps $dx = cdt\mathbf{d}^3\mathbf{x}$ est invariante de Lorentz, on va s'efforcer de construire une densité Lagrangienne $\mathcal{L}$ elle même invariante de Lorentz. (Par abus de langage cette densité sera appelée Lagrangien). Ce dernier contient toutes les informations sur l'état physique du système et les observables qui lui sont attachées[8].

Pour une théorie locale, le Lagrangien $\mathcal{L}(x)$ est une fonction réelle des seuls champs $\phi_i(x)$ et de leurs dérivées premières $\partial_\mu\phi_i(x)$, nous pouvons écrire l'action sous la forme suivante:

$$A = \int_\Omega \mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x))dx \qquad \mu = 0,1,2,3 \tag{1.1.2}$$

où $\partial_\mu = \partial/\partial x^\mu$. On notera simplement x le quadrivecteur position, (voir x^μ), pour le couple $(t, \mathbf{x})$. Le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} = diag\,[1,-1,-1,-1]$ permet le passage des indices contravariants aux indices covariants et Ω est le quadrivolume d'intégration. Nous utilisons le système d'unité dans lequel la vitesse de la lumière est $c = 1$ et $\hbar = 1$. Le principe de moindre action consiste à imposer à l'action d'être stationnaire pour des variations locales des champs qui sont nulles sur la surface $\Gamma(\Omega)$ qui englobe le quadrivolume Ω. La variation de l'action prend la forme suivante:

$$\begin{aligned} \delta A &= \int_\Omega \delta\mathcal{L}(\phi_i(x), \partial_\mu\phi_i(x))dx = 0 \\ &= \int_\Omega \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\delta\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\delta(\partial_\mu\phi_i)\right] dx = 0 \qquad \mu = 0,1,2,3 \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Or;

$$\delta\phi_i(x) = \phi_i\prime(x) - \phi_i(x), \qquad \delta\phi_i(x)\,\big|_{\Gamma(\Omega)} = 0 \tag{1.1.4}$$

où $\phi_i\prime(x)$ est le champ après une transformation.

La variation locale commute avec l'opérateur de dérivation alors:

$$\partial_\mu\delta\phi_i(x) = \partial_\mu\phi_i\prime(x) - \partial_\mu\phi_i(x) = \delta(\partial_\mu\phi_i(x)) \tag{1.1.5}$$

Une intégration par partie de (1.1.3) donne:

$$\delta A = \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)}\right)\right] \delta\phi_i(x) + \int_{\Omega} dx\ \partial_\mu \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)} \delta\phi_i(x)\right] = 0 \qquad (1.1.6)$$

Le deuxième terme de cette dernière équation, sera ramené à une intégrale de surface qui porte sur toute la surface $\Gamma(\Omega)$ en utilisant le théorème de divergence de Gauss à quatre dimensions. Sachant que $\delta\phi_i(x)\big|_{\Gamma(\Omega)} = 0$ l'intégrale de surface sera nulle.

On obtient donc:

$$\delta A = \int_{\Omega} dx \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)}\right)\right] \delta\phi_i(x) = 0 \qquad (1.1.7)$$

Par conséquent, pour une variation arbitraire des fonctions de champ $\delta\phi_i(x)$, l'intégrant doit être égale à zéro, d'où les équations d'Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_i} - \partial_\mu \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)}\right) = 0 \qquad (1.1.8)$$

Voici quelques exemples sur divers types de champs:

1. **Le champ scalaire réel**

   Soit $\mathcal{L}$, le Lagrangien d'un champ scalaire $\phi(x)$ d'une particule ponctuelle de masse m, sans charge et sans spin:

   $$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - m^2 \phi^2\right) \ , \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.1.9)$$

   En injectant ce Lagrangien dans l'équation du mouvement (1.1.8), on aboutit à l'équation standard de Klein-Gordon[9] donnée par:

   $$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right)\phi(x) = 0 \quad , \ \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.1.10)$$

2. **Le champ vectoriel réel**

   Pour un champ vectoriel $U_i(x)$ d'une particule ponctuelle de masse m, sans charge et de spin unité, $\mathcal{L}$ est donné par:

   $$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\left(\partial_\mu U^i \partial^\mu U_i - m^2 U_k(x) U^k(x)\right) \ , \qquad \mu, k = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.1.11)$$

   l'équation de Klein-Gordon correspondante est:

   $$\left(\partial_\mu \partial^\mu + m^2\right) U^i(x) = 0 \qquad \mu = 0, 1, 2, 3 \qquad (1.1.12)$$

3. **Le champ spinoriel**

Le Lagrangien d'un champ spinoriel est donné comme:

$$\mathcal{L} = \frac{i}{2}\left(\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi(x) - \partial_{\mu}\bar{\psi}(x)\gamma^{\mu}\psi(x)\right) - m\bar{\psi}(x)\psi(x) \ , \qquad \mu = 0,1,2,3 \quad (1.1.13)$$

où $\psi(x)$ est le spineur de Dirac

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi^1(x) \\ \psi^2(x) \\ \psi^3(x) \\ \psi^4(x) \end{pmatrix} \quad (1.1.14)$$

et $\bar{\psi}(x)$ est le spineur conjugué de Dirac $\bar{\psi}(x) = \psi^{+}(x)\gamma^0$

où:

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \gamma^{\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & \sigma_{\alpha} \\ -\sigma_{\alpha} & 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = 1,2,3 \quad (1.1.15)$$

sont les matrices de Dirac. Les matrices 0, I, σ_{α} sont respectivement la matrice 2×2 nulle, identité et les matrices de Pauli, telles que:

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \sigma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (1.1.16)$$

Les matrices de Dirac satisfont aux propriétés suivantes:

$$[\gamma^{\mu}, \gamma^{\nu}]_{+} = \gamma^{\mu}\gamma^{\nu} + \gamma^{\nu}\gamma^{\mu} = 2\eta^{\mu\nu} \quad (1.1.17)$$

$$\gamma^{0+} = \gamma^0 \quad (1.1.18)$$

$$\gamma^{+i} = -\gamma^i \quad (1.1.19)$$

$$\left(\gamma^i\right)^2 = -\mathbb{I} \quad (1.1.20)$$

$$\left(\gamma^0\right)^2 = \mathbb{I} \quad (1.1.21)$$

Les équations du mouvement résultantes s'appellent les équations de Dirac. Elle sont données par:

$$\begin{cases} \bar{\psi}(x)\left(i\overleftarrow{\partial}_{\mu}\gamma^{\mu} + m\right) = 0 \quad , \quad \mu = 0,1,2,3 \\ \left(i\gamma^{\mu}\partial_{\mu} - m\right)\psi(x) = 0 \quad , \quad \mu = 0,1,2,3 \end{cases} \quad (1.1.22)$$

1.2 Le Théorème de Noether et les invariants dynamiques

En formalisme Lagrangien, le théorème de Noether relie l'existence de symétries continues[(1)] aux invariants dynamiques (énergie, impulsion, charge,...).

Théorème 1.2.1 *À toute transformation continue des coordonnées, annulant la variation de l'action et pour laquelle la loi de transformation des fonctions de champs est également donnée, correspond un certain invariant, c'est à dire une combinaison des fonctions de champs et de leurs dérivées qui se conserve*[10].

Démontrons maintenant le théorème de Noether qui s'applique, dans le cadre de la théorie des champs. Soit une transformation du système, c'est à dire un élément d'un certain groupe de Lie G[(2)], définie par n paramètres réels ω^n. Sous l'action de cette transformation, tant les coordonnées que les champs sont modifiés:

$$\left\{\begin{array}{c} x^\mu \longrightarrow x'^\mu = x^\mu + \delta x^\mu \\ \phi_i(x) \longrightarrow \phi_i'(x') = \phi_i(x) + \delta\phi_i(x) \end{array}\right. \tag{1.2.1}$$

où les variations des coordonnées et des champs ont la forme

$$\left\{\begin{array}{l} \delta x^\mu = X_n^\mu \delta\omega^n \\ \delta\phi_i = \Psi_{in}\delta\omega^n \end{array}\right. \tag{1.2.2}$$

Dans (1.2.2) les grandeurs X_n^μ, et Ψ_{in} sont les matrices de la transformation et $\delta\phi_i$ est la variation de la fonction de champ dûe aussi bien au changement de sa forme[(3)] qu'au changement de son argument[(4)][10]. Notons que dans la formulation Lagrangienne exposée dans le paragraphe précédant, il n'a pas été tenu compte de la variation du domaine d'intégration due à la variation du système de coordonnées. Ainsi la variation de la forme

(1) voir Annex A.
(2) voir la définition Annexe A.
(3) la différence de deux fonctions en un même point.
(4) une variation conditionnée par le changement des coordonnées.

de la fonction ϕ_i est égale à

$$\begin{aligned} \bar{\delta}\phi_i &= \phi_i'(x) - \phi_i(x) = \delta\phi_i - \partial_\mu\phi_i(x)\delta x^\mu \qquad (1.2.3) \\ &= \left(\Psi_{in} - X_n^\mu \partial_\mu \phi_i(x)\right)\delta\omega^n \qquad (1.2.4) \end{aligned}$$

L'invariance de l'action A se traduit par cette expression:

$$\delta A = \delta \int_\Omega \mathcal{L} dx = \int_\Omega (\delta\mathcal{L}) dx + \int_\Omega \mathcal{L}\delta(dx) = 0 \qquad (1.2.5)$$

Afin de calculer la variation du domaine d'intégration $\delta(dx)$, exprimons $dx\prime$ en fonction de dx. Cela équivaut à écrire:

$$dx\prime = |\mathbf{J}|\, dx \qquad (1.2.6)$$

Les éléments de la matrice Jacobienne sont donnés par:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x\prime^\nu}{\partial x^\mu} &= \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(x^\nu + \delta x^\nu\right) \\ &= \delta_\mu^\nu + \partial_\mu\left[\delta x^\nu\right] \qquad (1.2.7) \end{aligned}$$

Le déterminant de cette dernière équation peut être calculé au premier ordre par la formule:

$$\det(I + M) \simeq I + Tr(M) \qquad (1.2.8)$$

où l'on a noté par I la matrice identité et M est une matrice infinitésimale. On obtient donc:

$$\left|\frac{\partial x\prime^\nu}{\partial x^\mu}\right| = 1 + \partial_\mu\left[\delta x^\mu\right] \qquad (1.2.9)$$

L'équation (1.2.6) devient:

$$dx\prime = \left(1 + \partial_\mu\left[\delta x^\mu\right]\right) dx \qquad (1.2.10)$$

Avec cette dernière équation on trouve

$$\begin{aligned} \delta(dx) &= dx\prime - dx \\ &= \partial_\mu\left[\delta x^\mu\right] dx \qquad (1.2.11) \end{aligned}$$

A l'aide de ces outils, nous pouvons maintenant démontrer le théorème de Noether, dont le contenu est simple et extrêmement puissant. La variation totale du Lagrangien $\mathcal{L}$ est formellement:

$$
\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} &= \bar{\delta}\mathcal{L} + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\bar{\delta}\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\bar{\delta}\left(\partial_\mu\phi_i\right) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu \\
&= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i}\bar{\delta}\phi_i + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\partial_\mu\left(\bar{\delta}\phi_i\right) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu
\end{aligned} \tag{1.2.12}
$$

qui devient

$$
\delta\mathcal{L} = \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\right)\right]\bar{\delta}\phi_i + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\bar{\delta}\phi_i\right) + \partial_\mu\mathcal{L}\delta x^\mu
$$

En tenant compte des équations (1.2.11) et (1.2.3) la variation de l'action prend la forme suivante

$$
\delta A = \int\left[\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\left(\delta\phi_i - \partial_\nu\phi_i\delta x^\nu\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\left(\delta\phi_i - \partial_\nu\phi_i\delta x^\nu\right) + \mathcal{L}\delta x^\mu\right)\right]dx = 0 \tag{1.2.13}
$$

où

$$
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_i} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\right) \tag{1.2.14}
$$

représente les équations du mouvement d'Euler-Lagrange. La variation de l'action étant nulle, on obtient la condition de stationnarité en égalant à zéro les dérivées fonctionnelles de l'action par rapport aux paramètre $\delta\omega^n$[10, 11].

$$
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\left(\Psi_{in} - X_n^\nu\partial_\nu\phi_i\right) = -\partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\left(\Psi_{in} - X_n^\nu\partial_\nu\phi_i\right) + X_n^\mu\mathcal{L}\right) \tag{1.2.15}
$$

ou bien

$$
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i}\left(\Psi_{in} - X_n^\nu\partial_\nu\phi_i\right) = -\partial_\mu\Theta_n^\mu \tag{1.2.16}
$$

avec

$$
\Theta_n^\mu = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\phi_i\right)}\left(\Psi_{in} - X_n^\nu\partial_\nu\phi_i\right) + X_n^\mu\mathcal{L} \tag{1.2.17}
$$

représente le courant de Noether associé. Si ϕ_i est une solution de l'équation d'Euler-Lagrange généralisée de la forme

$$
\frac{\delta\mathcal{L}}{\delta\phi_i} = \chi^i \tag{1.2.18}
$$

où l'on dénote par χ^i des nouvelles fonctions (par exemple, des sources non incluses dans le Lagrangien), alors de (1.2.16) on obtient les lois de conservations non homogènes généralisées[11]

$$
\partial_\mu\Theta_n^\mu + \chi^i\left(\Psi_{in} - X_n^\nu\partial_\nu\phi_i\right) = 0 \tag{1.2.19}
$$

La condition

$$\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \phi_i} = 0 \tag{1.2.20}$$

implique que

$$\partial_\mu \Theta_n^\mu = 0 \tag{1.2.21}$$

Pour ce dernier cas, la quantité Θ_n^μ n'est pas déterminée d'une manière unique. En rajoutant une expression de la forme

$$\partial_m f_n^{m\mu} \tag{1.2.22}$$

à condition que

$$f_n^{m\mu} = -f_n^{\mu m} \tag{1.2.23}$$

On peut rendre Θ_n^μ symétrique. Cela n'influe pas la valeur des intégrales qui se conservent. Dans ce sens les lois de conservations sont une conséquence des équations du champ. Par la suite on s'intéresse à l'équation (1.2.21) pour déduire les lois de conservation. Passons maintenant aux exemples concrets de grandeurs Θ_n^μ et aux lois de conservation qui leurs sont liées. Il est clair que sous les transformations de translations[1]

$$x\prime^\mu = x^\mu + a^\mu \tag{1.2.24}$$

les fonctions $\phi_i(x)$ sont invariantes:

$$\phi\prime_i(x\prime) = \phi_i(x) \tag{1.2.25}$$

Pour une translation infinitésimale $\delta\omega^n = \delta a^n$ l'équation (1.2.2) donne

$$\begin{aligned} X_n^\mu &= \delta_n^\mu & (1.2.26)\\ \Psi_{in} &= 0 & (1.2.27)\end{aligned}$$

D'après l'équation (1.2.21), le courant conservé est le *tenseur energie-impulsion*

$$\begin{aligned} \Theta_\nu^\mu &= T_\nu^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)} \partial_\nu \phi_i(x) - \delta_\nu^\mu \mathcal{L} & (1.2.28)\\ T^{\mu\nu} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \phi_i\right)} \partial^\nu \phi_i(x) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} & (1.2.29)\end{aligned}$$

[1] voir Groupe des translation dans l'annexe A

Puisque $\nu = 0, 1, 2, 3$ cela donne quatre quantités conservées qui sont les charges associées aux courants $T^{\mu\nu}$. En notation quadridimensionnelle on a

$$\mathscr{P}^{\nu} = (E, \mathbf{P}) = \int_V T^{0\nu} \mathbf{d}^3\mathbf{x} = cst \tag{1.2.30}$$

Ces charges sont indépendantes du temps si le volume spatial V est choisi de façon telle que le tenseur énergie-impulsion s'annule à son bord. Le quadrivecteur $\mathscr{P}^{\nu}$ si $\nu = \alpha = 1, 2, 3$ donne l'impulsion totale du système de champs contenus dans le volume V. Sa composante temporelle $\mathscr{P}^0$ est l'énergie totale du système et T^{00} est la densité d'énergie des champs. En générale le tenseur énergie-impulsion est non symétrique $T^{\mu\nu} \neq T^{\nu\mu}$, il est possible cependant de passer au tenseur énergie-impulsion symétrique $T'^{\mu\nu} = T'^{\nu\mu}$ en ajoutant un terme convenable $\partial_p G^{p\mu\nu}$ à divergence nulle ($\partial_\mu \partial_p G^{p\mu\nu} = 0$), avec $G^{p\mu\nu} = -G^{\mu p\nu}$.

$$T'^{\mu\nu} = T^{\mu\nu} + \partial_p G^{p\mu\nu} \tag{1.2.31}$$

Cette condition assure que la loi de conservation reste invariante[11]

$$\begin{aligned} \partial_\mu T'^{\mu\nu} &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \partial_\mu \partial_p G^{p\mu\nu} \\ &= \partial_\mu T^{\mu\nu} + \frac{1}{2} \partial_\mu \partial_p \left(G^{p\mu\nu} + G^{\mu p\nu} \right) = \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \end{aligned} \tag{1.2.32}$$

L'énergie totale et l'impulsion aussi ne sont pas affectées par la transformation(1.2.31)

$$\mathscr{P}'^{\nu} = \int T'^{0\nu} \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \int \left(T^{0\nu} + \partial_0 G^{00\nu} + \partial_k G^{0k\nu} \right) \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \int T^{0\nu} \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \mathscr{P}^{\nu} \tag{1.2.33}$$

Ici $G^{00\nu}$ s'annule à cause de l'antisymétrie par rapport au deux indices p et μ et nous avons supposé que $G^{0k\nu}$ décroît plus rapidement à grandes distances pour s'assurer que l'intégrale de surface dans le théorème de Gauss peut être négligée. Sous l'action d'une transformation de Lorentz

$$x^\mu \longrightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.2.34}$$

Les champs ϕ_i seront une représentation non triviale du groupe de Lorentz, et se transformeront selon

$$\phi_i(x) \longrightarrow \phi'_i(x') = [S(\Lambda)]_i{}^j \phi_j(x) \tag{1.2.35}$$

où la matrice $S(\Lambda)$ réalise une représentation de dimension finie du groupe de Lorentz qui vérifie $S(\Lambda_1)S(\Lambda_2) = S(\Lambda_1\Lambda_2)$. Par exemple, un champ vectoriel se transforme selon

$\phi\prime_i(\Lambda x) = \Lambda_i{}^j \phi_j(x)$. La version infinitésimale de cette transformation est obtenue en considérant une transformation infinitésimale de Lorentz

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\Lambda)^\mu{}_\nu \tag{1.2.36}$$

où $(\delta\Lambda)^\mu{}_\nu = -(\delta\Lambda)_\nu{}^\mu$ est antisymétrique. Injectons cette dernière équation dans (1.2.34) on trouve

$$\delta x^\mu = (\delta\Lambda)^\mu{}_\nu x^\nu \tag{1.2.37}$$

D'autre part

$$\delta x^\mu = X^\mu_n \delta\omega^n = \sum_{p\prec q} X^\mu_{(p,q)} \delta\omega^{(p,q)} \tag{1.2.38}$$

Par comparaison, on obtient

$$\begin{aligned}
\sum_{p\prec q} X^\mu_{(p,q)} \delta\omega^{(p,q)} &= (\delta\Lambda)^\mu{}_\nu x^\nu \\
&= \sum_{l,\nu} (\delta\Lambda)_{l\nu} \eta^{\mu l} x^\nu \\
&= \sum_{l\prec\nu} (\delta\Lambda)_{l\nu} \eta^{\mu l} x^\nu + \sum_{\nu\prec l} (\delta\Lambda)_{l\nu} \eta^{\mu l} x^\nu \\
&= \sum_{l\prec\nu} (\delta\Lambda)_{l\nu} \eta^{\mu l} x^\nu - \sum_{\nu\prec l} (\delta\Lambda)_{\nu l} \eta^{\mu l} x^\nu \\
&= \sum_{l\prec q} (\delta\Lambda)_{lq} \eta^{\mu l} x^q - \sum_{p\prec l} (\delta\Lambda)_{pl} \eta^{\mu l} x^p \\
&= \sum_{p\prec q} (\delta\Lambda)_{pq} \eta^{\mu p} x^q - \sum_{p\prec q} (\delta\Lambda)_{pq} \eta^{\mu q} x^p \\
&= \sum_{p\prec q} (\eta^{\mu p} x^q - \eta^{\mu q} x^p) (\delta\Lambda)_{pq} \\
&= \sum_{p\prec q} \left(\delta^\mu_p x_q - \delta^\mu_q x_p\right) (\delta\Lambda)^{pq}
\end{aligned} \tag{1.2.39}$$

Posons :

$$\delta\omega^{(p,q)} = (\delta\Lambda)^{pq} \quad , \quad p \prec q \tag{1.2.40}$$

On trouve

$$X^\mu_{(p,q)} = \left(\delta^\mu_p x_q - \delta^\mu_q x_p\right) \qquad , \ p \prec q \tag{1.2.41}$$

De même

$$[S(\Lambda^\mu{}_\nu = \delta^\mu_\nu + (\delta\Lambda)^\mu{}_\nu)]_i{}^j = \delta^j_i + [\Sigma_{pq}]_i{}^j (\delta\Lambda)^{pq} \tag{1.2.42}$$

où $[\Sigma_{pq}]_i^{\ j}$ forme une représentation de l'algèbre de Lie du groupe de Lorentz. Ce sont les éléments de la représentation matricielle du générateur correspondant. Ils décrivent le mélange de diverses composantes d'un champ (spineur, vecteur,...). Ainsi

$$\Psi_{ipq} = [\Sigma_{pq}]_i^{\ j} \phi_j \tag{1.2.43}$$

Les six courants conservés dans ce cas, forment les composantes d'un tenseur antisymétrique le *tenseur moment cinétique*

$$\mathcal{M}^{\mu}_{pq} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} (\partial_p \phi_i x_q - \partial_q \phi_i x_p) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} [\Sigma_{pq}]_i^{\ j} \phi_j - \mathcal{L}\left(\delta^\mu_p x_q - \delta^\mu_q x_p\right) \tag{1.2.44}$$

Ce dernier peut être exprimé en terme du tenseur énergie-impulsion comme

$$\mathcal{M}^{\mu}_{pq} = T^{\mu}_{p} x_q - T^{\mu}_{q} x_p - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} [\Sigma_{pq}]_i^{\ j} \phi_j \tag{1.2.45}$$

La formule (1.2.45) fait apparaître clairement le lien existant entre les propriétés de symétrie du tenseur d'énergie-impulsion T^{μ}_{ν} et la structure du tenseur de moment $\mathcal{M}_{pq}$. Dans le cas d'un champ scalaire ϕ, le second terme dans (1.2.45) est absent et la relation entre $\mathcal{M}$ et T prend une forme semblable à celle qui existe dans la mécanique du point[10]. On peut donc identifier le terme

$$L^{\mu}_{pq} = T^{\mu}_{p} x_q - T^{\mu}_{q} x_p \tag{1.2.46}$$

avec le moment *orbital* du champ. Dans le cas d'un champ (vectoriel, spinoriel) à plusieurs composantes, le seconde terme de l'expression (1.2.45)

$$S^{\mu}_{pq} = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi_i)} [\Sigma_{pq}]_i^j \phi_j \tag{1.2.47}$$

caractérise les propriétés de *polarisation* du champ. Dans le cadre de la théorie quantique, il correspond au moment de *spin* des particules décrites par le champ quantique[10]. Pour le champ scalaire réel, et en substituant le Lagrangien (1.1.9) dans (1.2.29), on obtient le tenseur d'énergie-impulsion dans le cas du groupe des translations[10]

$$T^{\mu\nu} = \partial^\mu \phi(x) \partial^\nu \phi(x) - \eta^{\mu\nu} \mathcal{L} \tag{1.2.48}$$

On trouve alors les quatre charges conservées par une simple intégration (1.2.30) où la composante temporelle ($\mu, \nu = 0$) correspond à l'énergie totale du champ scalaire:

$$E = \int_V T^{00} \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \int_V \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_0 \phi(x)\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\nabla \phi(x)\right)^2 + \frac{1}{2} m^2 \phi^2(x) \right\} \mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.49}$$

Les autres composantes ($\mu = 0, \nu = \alpha = 1, 2, 3$), correspond à l'impulsion totale:

$$\mathbf{P}^\alpha = \int_V T^{0\alpha} \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \int_V \left\{ \partial^0 \phi(x) \partial^\alpha \phi(x) \right\} \mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.50}$$

En abaissant l'indice α,

$$\mathbf{P}_\alpha = -\int_V \left\{ \partial_0 \phi(x) \partial_\alpha \phi(x) \right\} \mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.51}$$

De (1.2.45) dans le cas du groupe de Lorentz, on déduit pour le tenseur du moment cinétique l'expression

$$\mathcal{M}^\mu_{pq} = \partial^\mu \phi \left[x_q \partial_p \phi - x_p \partial_q \phi \right] - \mathcal{L} \left[x_q \delta^\mu_p - x_p \delta^\mu_q \right] \tag{1.2.52}$$

Choisissons une rotation dans le plan $(1, 2)$ (autour de l'axe 3), le courant de Noether associé $\mathcal{M}^\mu_{12}$ s'exprime comme

$$\mathcal{M}^\mu_{12} = \partial^\mu \phi \left[x_2 \partial_1 \phi - x_1 \partial_2 \phi \right] - \mathcal{L} \left[x_2 \delta^\mu_1 - x_1 \delta^\mu_2 \right] \tag{1.2.53}$$

La charge conservée est la troisième composante du moment cinétique

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{12} &= \int_V \mathcal{M}^0_{12} \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \int_V \partial^0 \phi \left[x_2 \partial_1 \phi - x_1 \partial_2 \phi \right] \mathbf{d}^3\mathbf{x} && (1.2.54) \\ &= \int_V \left\{ -P_1 x_2 + P_2 x_1 \right\} \mathbf{d}^3\mathbf{x} && (1.2.55) \end{aligned}$$

où P est la densité de quantité de mouvement, voir l'équation (1.2.51), on retrouve alors l'expression bien connue

$$\mathcal{M}_{12} = \int_V \mathbf{d}^3\mathbf{x} \left\{ \mathbf{x} \curlywedge P \right\}_3 \tag{1.2.56}$$

Concernant les boosts (les rotations dans les plans $(0, \alpha)$), l'invariance sous ces transformations conduit à trois courants engendrés par les trois derniers paramètres du groupe de Poincaré. Bien qu'on puisse formellement les écrire, on ne connait pas leur signification physique. Le moment de spin du champ scalaire est nul parce que celui-ci n'a qu'une composante, le moment cinétique total se réduit alors au moment orbital. Etant donné que le champ scalaire est réel, le quadrivecteur courant est aussi nul. Sous l'effet des translations d'espace-temps (1.2.24), le champ spinoriel reste invariant:

$$\psi\prime(x\prime) = \psi(x) \tag{1.2.57}$$

Alors de la manière habituelle, on obtient le tenseur d'énergie-impulsion[9]

$$T^{\mu}{}_{\nu} = \frac{i}{2}\left[\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\nu}\psi - \partial_{\nu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi\right] - \delta^{\mu}_{\nu}\left[\frac{i}{2}\left(\bar{\psi}\gamma^{\beta}\partial_{\beta}\psi - \partial_{\beta}\bar{\psi}\gamma^{\beta}\psi\right) - m\bar{\psi}\psi\right], \quad \mu,\nu,\beta = 0,..,3 \tag{1.2.58}$$

Pour trouver l'énergie et la quantité de mouvement, il suffit de traiter la ligne $\mu = 0$. La densité de quantité de mouvement est alors

$$T^{0}{}_{\alpha} = \frac{i}{2}\left[\psi^{+}\partial_{\alpha}\psi - \partial_{\alpha}\psi^{+}\psi\right], \ \alpha = 1,2,3 \tag{1.2.59}$$

Ainsi

$$\mathbf{P}_{\alpha} = -\frac{i}{2}\int\left(\psi^{+}\partial_{\alpha}\psi - \partial_{\alpha}\psi^{+}\psi\right)\mathbf{d}^{3}\mathbf{x}, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{1.2.60}$$

De même la densité d'énergie

$$T^{0}{}_{0} = \frac{i}{2}\left(\partial_{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi\right) + m\bar{\psi}\psi, \qquad \alpha = 1,2,3 \tag{1.2.61}$$

et donc

$$E = \int\left\{\frac{i}{2}\left(\partial_{\alpha}\bar{\psi}\gamma^{\alpha}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\alpha}\partial_{\alpha}\psi\right) + m\bar{\psi}\psi\right\}\mathbf{d}^{3}\mathbf{x} \tag{1.2.62}$$

Il s'avère qu'on peut donner une expression plus simple de l'énergie, en utilisant les équations du mouvement. En effet:

$$\begin{aligned}
E &= \int\left\{\frac{i}{2}\left(\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi - \bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi\right) + m\bar{\psi}\psi - \frac{i}{2}\left(\partial_{0}\bar{\psi}\gamma^{0}\psi - \bar{\psi}\gamma^{0}\partial_{0}\psi\right)\right\}\mathbf{d}^{3}\mathbf{x} \\
&= \int\left\{\frac{1}{2}\left[\left(i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi\right) + \left(-i\bar{\psi}\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m\bar{\psi}\psi\right)\right] - \frac{i}{2}\left(\partial_{0}\bar{\psi}\gamma^{0}\psi - \bar{\psi}\gamma^{0}\partial_{0}\psi\right)\right\}\mathbf{d}^{3}\mathbf{x} \\
&= \int\left\{\frac{1}{2}\left[\underbrace{\left(i\partial_{\mu}\bar{\psi}\gamma^{\mu} + m\bar{\psi}\right)}_{=0}\psi + \bar{\psi}\underbrace{\left(-i\gamma^{\mu}\partial_{\mu}\psi + m\psi\right)}_{=0}\right] - \frac{i}{2}\left(\partial_{0}\bar{\psi}\gamma^{0}\psi - \bar{\psi}\gamma^{0}\partial_{0}\psi\right)\right\}\mathbf{d}^{3}\mathbf{x}
\end{aligned}$$

d'où l'expression suivante

$$E = \int\frac{i}{2}\left(\partial_{0}\psi^{+}\psi - \psi^{+}\partial_{0}\psi\right)\mathbf{d}^{3}\mathbf{x} \tag{1.2.63}$$

Sous l'effet des rotations d'angle θ, par exemple autour de l'axe 3, la transformation de la fonction d'onde spinorielle est donnée par

$$\psi'(x') = S(\Lambda)\,\psi(x) \tag{1.2.64}$$

où $S(\Lambda)$ est la représentation spinorielle du groupe de Lorentz, ou encore sous une forme infinitésimale par

$$\psi'(x') = \left(1 - i\frac{d\theta}{2}\Sigma_3\right)\psi(x) \tag{1.2.65}$$

où $\Sigma_3 = \begin{pmatrix} \sigma_3 & 0 \\ 0 & \sigma_3 \end{pmatrix}$ est le générateur associé à la rotation autour de l'axe 3. Ceci définit les matrices de la transformation $\Psi_{(3)}$ qu'on va utiliser pour calculer le tenseur moment cinétique

$$\Psi_{(3)\psi} = -\frac{i}{2}\Sigma_3\psi \tag{1.2.66}$$

$$\Psi_{(3)\bar{\psi}} = \frac{i}{2}\bar{\psi}\Sigma_3 \tag{1.2.67}$$

D'où

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_3^\mu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\Sigma_3\psi + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\bar{\psi}\Sigma_3 + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\psi)}\partial_\nu\psi X_3^\nu + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu\bar{\psi})}\partial_\nu\bar{\psi}X_3^\nu - X_3^\mu\mathcal{L} \\
&= \frac{1}{4}\bar{\psi}\gamma^\mu\Sigma_3\psi + \frac{1}{4}\bar{\psi}\Sigma_3\gamma^{+\mu}\psi + \frac{i}{2}\bar{\psi}\gamma^\mu\partial_\nu\psi X_3^\nu - \frac{i}{2}\partial_\nu\bar{\psi}X_3^\nu\gamma^{+\mu}\psi - X_3^\mu\mathcal{L}
\end{aligned} \tag{1.2.68}$$

En tenant compte de l'équation (1.2.41) on obtient donc la densité du moment cinétique (par rapport au rotation autour de l'axe 3):

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_3^0 &= \frac{1}{2}\psi^+\Sigma_3\psi + \left[\frac{i}{2}\left(\psi^+\partial_1\psi - \partial_1\psi^+\psi\right)x^2 - \frac{i}{2}\left(\psi^+\partial_2\psi - \partial_2\psi^+\psi\right)x^1\right] \\
&= \psi^+\frac{\Sigma_3}{2}\psi - [\mathbf{P}\wedge\mathbf{x}]_3
\end{aligned} \tag{1.2.69}$$

Pour obtenir une expression plus générale, on introduit les matrices $\Sigma_\mu = \begin{pmatrix} \sigma_\mu & 0 \\ 0 & \sigma_\mu \end{pmatrix}$, et on peut montrer que

$$\mathbf{M} = \int\left\{\psi^+\frac{\mathbf{\Sigma}}{2}\psi + [\mathbf{x}\wedge\mathbf{P}]\right\}\mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.70}$$

On identifie immédiatement la partie orbitale $\mathbf{L}$, qui provient de la transformation des coordonnées, alors que les transformations de champ produisent le moment cinétique intrinsèque $\mathbf{S}$:

$$\mathbf{M} = \mathbf{L} + \mathbf{S} \tag{1.2.71}$$

où

$$\mathbf{L} = \int (\mathbf{x} \wedge \mathbf{P})\, \mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.72}$$

et

$$\mathbf{S} = \int \psi^+ \frac{\mathbf{\Sigma}}{2} \psi \mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.73}$$

Enfin, le Lagrangien du champ spinoriel présente aussi la symétrie de jauge de paramètre α suivante

$$\begin{cases} x^\mu \to x'^\mu = x^\mu \\ \psi(x) \to \psi'(x') = e^{i\alpha}\psi(x) \end{cases} \tag{1.2.74}$$

Le quadrivecteur de courant est facilement calculé[10]

$$j^\mu = \bar{\psi}\gamma^\mu\psi \tag{1.2.75}$$

On définit finalement la charge électrique

$$Q = \int j^0 \mathbf{d}^3\mathbf{x} = \int \psi^+ \psi \mathbf{d}^3\mathbf{x} \tag{1.2.76}$$

1.3 Conclusion

Les équations du mouvement ont été obtenues en partant du Lagrangien du système à l'aide du principe variationnel. A l'aide du théorème de Noether on a déterminé les invariants dynamiques (type énergie-impulsion, moment cinétique...), comme des invariants correspondant aux différentes transformations du système de coordonnées et des fonctions du champ. Le théorème de Noether fournit une méthode générale et puissante pour discuter les symétries de l'action et du Lagrangien et relier directement ces symétries aux lois de conservation. Il stipule que si le Lagrangien d'un système est invariant par rapport à une certaine transformation continue, alors il existe une quantité conservée associée à cette transformation.

CHAPITRE 2

Le modèle de la particule étendue

Résumé

Nous nous proposons de présenter deux théories qui rejettent la notion de la ponctualité des particules. La première de ces deux théories considère le corpuscule comme étant un point de haute concentration localisé au sein d'un champ ondulatoire (une singularité), le mouvement de cette singularité étant déterminé par les lois d'une certaine dynamique de guidage, tandis que la deuxième théorie généralise la première et nous permetta de donner une représentation fonctionnelle de la particule non ponctuelle décrivant ses caractéristiques propres.

2.1 Introduction

L'intérêt que nous portons à l'extension des particules émane du fait que la mécanique quantique relativiste et la théorie des champs locaux soufrent d'inconsistances internes[1, 2], par exemple, il est impossible de définir un opérateur de position covariant et une densité de courant définie positive en mécanique quantique relativiste[1, 3]. La théorie quantique des champs possède des divergences dans la matrice S qui ne sont levées qu'aux prix d'une renormalisation vivement critiquée par les fondateurs de la mécanique quantique et de la théorie des champs[1, 4]. En réalité l'origine des difficultés de la théorie des champs est attribuée à son caractère locale, autrement dit, à la ponctualité des particules. Dans ce qui suit, nous présentons deux théories qui rejettent la ponctualité des particules.

2.2 La théorie de la double solution

La première partie de ce chapitre, trouve son origine dans la tentative développée par Louis de Broglie en vue de réaliser la synthèse des notions d'onde et de corpuscule, notions que l'interprétation usuelle de la mécanique ondulatoire ne fait que juxtaposer par l'intermédiaire de la complémentarité[12]. En 1927, Louis de Broglie, dans son mémoire sur La théorie de la double solution, a proposé de représenter les corpuscules par une onde possédant une singularité représentant le corpuscule au sens stricte. Ainsi le corpuscule est considéré comme un point de haute concentration localisé au sein d'un champ ondulatoire (une singularité), le mouvement de cette singularité étant déterminé par les lois d'une certaine dynamique de guidage. Selon cette théorie, une particule libre est décrite par l'équation[13, 14]:

$$\Delta\psi - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = \frac{4\pi^2 m^2 c^2}{\hbar^2}\psi \tag{2.2.1}$$

qui, à l'inverse de l'équation de Schrödinger, jouit de l'invariance relativiste. Comme solution de cette équation, de Broglie a pris une onde plane sinusoïdale se propageant le long de l'axe z, avec une amplitude dépendante de x, y, z et t, et une vitesse V_z

$$\psi(x,y,z,t) = u(x,y,z,t)\cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{V_z}{c} + \varphi_0\right)\right] \tag{2.2.2}$$

Par conséquent:

$$\Delta u = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \tag{2.2.3}$$

La solution de cette équation a été choisie de sorte qu'elle ait une singularité qui se déplace le long de l'axe z avec une vitesse V:

$$u(x,y,z,t) = c/\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{z - Vt}{1-\beta}\right)^2} \quad , \ \beta = \frac{V}{c} \tag{2.2.4}$$

d'où

$$\psi(x,y,z,t) = c\cos\left[2\pi\nu\left(t - \frac{V_z}{c} + \varphi_0\right)\right]/\sqrt{x^2 + y^2 + \left(\frac{z - Vt}{1-\beta}\right)^2} \tag{2.2.5}$$

La singularité de cette solution est au point $x = 0$, $y = 0$ et $z = Vt$. D'après de Broglie, cette singularité représente la particule à laquelle est liée l'onde $\psi(x, y, z, t)$. De Broglie pensait lier cette interprétation avec l'interprétation habituelle, à savoir, le sens statistique de la fonction d'onde. Il n'a pu mener à terme la théorie de la double solution et a rencontré de grandes difficultés mathématiques puis a refusé pendant longtemps de s'occuper de l'élaboration de cette théorie. Il y revient plus tard, en 1956, et s'efforce de synthétiser toutes les idées qui peuvent, de près ou de loin, apporter une contribution dans la solution de ce problème. Il avait alors associé à la particule une onde physique avec une singularité mathématique représentant la particule, une loi de guidage fait que cette singularité se déplace en phase avec l'onde qui lui est associé. Puis il trouva qu'il n'était pas nécessaire qu'il y ait une singularité, il suffisait que l'onde physique soit répartie dans tout l'espace avec une faible amplitude sauf dans une petite région de forte concentration d'énergie, la particule (étendue), où cette amplitude devient très grande.

2.3 La théorie fonctionnelle

En physique théorique, on admet que l'univers forme un tout solidaire, mais en pratique, et dans certains cas, on peut dans l'univers, distinguer avec une bonne approximation des parties qu'on étudiera d'une façon indépendante pendant un certain intervalle de temps; de telle parties sont appelées "Systèmes physiques"[15]. La notion de système physique joue un rôle essentiel en physique. Les difficultés actuelles de la physique théorique, résident dans cette même notion. Si on peut représenter un corpuscule du point de vue géométrique par un point en tant qu'élément insécable, du point de vue physique cette représentation peut se montrer insuffisante. On doit chercher une théorie meilleur que la théorie quantique actuelle pour représenter le corpuscule.

Destouches s'est livré à une analyse de la notion de système physique. Il remarqua que la distinction entre celui-ci et le reste de l'univers ne constitue qu'une approximation. Lorsque c'est un corpuscule qu'on considère comme un système physique, on pourra dans une première approximation, le considérer indépendant du reste de l'univers. Dans une deuxième approximation, on atténue la coupure entre le système et l'univers en tenant compte de l'effet du reste de l'univers au moyen d'une action globale décrite par un champ, en négligeant la réaction du système sur le reste de l'univers. Dans la troisième approximation, la réaction du système sur le champ est considérée mais la situation réelle n'est pas sésie complètement, car ce procédé ne tient pas compte des actions individuelles de tous les éléments de l'univers[15]. On peut améliorer cette approximation en considérant que le reste de l'univers exerce une influence sur les caractéristiques propres du système. Pour cette raison la représentation ponctuelle d'un corpuscule s'avère insuffisante, il faut donc penser à une autre représentation. Pour tenir compte de l'influence de l'exterieur sur les caractéristiques propres d'un corpuscule, une infinité d'éléments est nécessaire pour le déterminé. Une fonction appartenant à un espace de fonctions est une caractérisation équivalente. Alors dans une quatrième approximation, le corpuscule sera représenté par une fonction:

$$\phi \in (\Re_\phi) \tag{2.3.1}$$

Mais d'après le principe de limitation, les fonctions acceptables dans une théorie physique doivent être caractérisées par un ensemble fini et déterminé de fonction ϕ^α. L'aspect géométrique (le point M représentant le corpuscule) se traduit par une fonctionnelle F de ϕ soit:

$$M = F[\phi] \tag{2.3.2}$$

qui représente la totalité des caractères physiques du corpuscule. Le corpuscule, un système influençable dans ses propres caractéristiques, ne peut être représenté par un point localisé, ni par une figure géométrique invariable (car on se trouverait dans des conditions semblables à celles de la représentation ponctuelle), mais seulement par une fonction et que cette influence se traduit par une modification de la forme de cette fonction. La théorie fonctionnelle se base alors sur deux postulats:

Postulat 1:

Un corpuscule est représenté, du point de vue physique par une fonction ϕ à valeur complexe appartenant à un certain espace fonctionnel séparable $(\Re_\phi)$

Postulat 2:

Un corpuscule est représenté, du point de vue géométrique, par un point M de l'espace physique qui est une fonctionnelle de ϕ

$$M = F\left[\phi(P,T)\right] \tag{2.3.3}$$

Les variables spatio-temporelles (P,T) n'ont aucun sens physique, elles sont introduites par un principe de rattachement spatial[(1)]. La fonction ϕ qui est la seule représentation physique complète du corpuscule, doit suivre ce principe. En théorie fonctionnelle, le rôle joué par M et repris par la fonction ϕ et celui de la fonction $\psi(M,t)$ de la mécanique quantique usuelle est repris par une onde fonctionnelle $X\left[\phi,t\right]$. Lorsqu'on adopte pour le corpuscule une représentation fonctionnelle, la fonctionnelle $X\left[\phi,t\right]$ dite onde fonctionnelle sera l'onde au moyen de laquelle on calcule les prévisions. C'est une onde qui se propage dans l'espace fonctionnel $(\Re_\phi)$ dont les points sont les fonctions ϕ.

2.4 Conclusion

La mécanique quantique, dans sa forme conventionnelle, considère les particules élémentaires comme des masses ponctuelles obéissant aux principes de cette mécanique. De Broglie a imaginé une onde associée à chaque particule de manière intrinsèque (La dualité onde-corpuscule), puis il réactualisa cette idée, en lui donnant l'aspect d'une nouvelle version qu'il intitula " Théorie de la double solution". Cette théorie consiste comme son nom le suggère, à identifier deux solutions couplées de l'équation d'onde: l'une est l'onde ψ de la mécanique quantique, et l'autre, appelée onde u, comporte une singularité mathématique censée représenter la particule. En critiquant la notion de système physique et la distinction du système au sein de l'univers, Destouches, l'un des étudiants de de Broglie est conduit à représenter un corpuscule par une certaine fonction ϕ appelée onde physique, ceci est le point de départ de la théorie fonctionnelle des corpuscules. La représentation fonctionnelle des particules ne suprime pas la représentation géométrique ponctuelle mais la généralise pour pouvoir prendre en compte l'influence des caractéristiques propres de

[(1)]Le principe de rattachement spatial affirme qu'un élément mathématique d'une théorie physique qui possède une signification physique se ratache de quelque manière au temps et à l'espace[15].

la particule. Destouches pensait que l'idée d'onde physique pourrait être l'idée clef permettant de lever certaines des difficultés auxquelles se heurtent les théories quantiques relativistes et espérait fournir le point de départ de cette "théorie générale des champs" que les physiciens théoriciens recherchent et qui unifierait ces théories[15].

CHAPITRE 3

Théorème de Noether pour le modèle fonctionnel

Résumé

Le remplacement de la conception ponctuelle par une conception fonctionnelle necéssite le remplacement de la fonction d'onde de la théorie des champs conventionnelle par une onde fonctionnelle. On peut traiter la fonction d'onde physique en lui associant un modèle réaliste, mais dans notre travail nous préférons prendre un point de vue individuel, nous remplaçons le terme (réaliste), par le terme plus général (physique), et nous construisons la théorie des champs pour les particules étendues moyennant l'application du théorème de Noether. Nous obtienderons quelques résultats qui pourraient, à notre avis, servir de base de la théorie des champs pour les particules étendues.

Dans notre modèle de la particule étendue, la fonction d'onde est une fonctionnelle de deux type de fonctions. Une fonction dépendant de l'espace externe $\eta^a(x)$, (où l'indice a représente le nombre de composantes de cette fonction) liée au processus de mesure, et une fonction qui dépend de l'espace interne $\phi^\alpha(\xi)$, (α représente le nombre de composantes de ce champ interne) représentant une fonction d'onde physique. Pour construire les propriétés internes des particules étendues, on introduit les même notions que celles appliquées pour l'exploration des propriétés spatio-temporelles des particules: fonction d'onde, transformation, invariance. Dans un premier temps, nous présentons les notations utilisées dans ce chapitre en supposant en première approximation que l'espace externe caractérisé par les coordonnées $x = (x^\mu)$ est indépendant de l'espace interne caractérisé par les coordonnées $\xi = (\xi^k)$. La fonction d'onde de la particule étendue s'écrit

$$U_i = U_i(\eta^a(x), \partial_\mu \eta^a(x), \phi^\alpha(\xi), \partial_k \phi^\alpha(\xi)) \tag{3.0.1}$$

3.1 Principe Variationnel

3.1.1 Variation des variables

Pour les variables externes, l'acroissement est donné par:

$$\delta x^\mu = x'^\mu - x^\mu \tag{3.1.1}$$

La transformation de la dérivée par rapport aux coordonnées externes est

$$\partial'_\mu = \left(\frac{\partial x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\partial_\nu = \partial_\mu - \left(\frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x'^\mu}\right)\partial_\nu = \partial_\mu - \left(\frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu}\right)\partial_\nu \tag{3.1.2}$$

La $2^{ème}$ égalité est due au fait que la différence

$$\frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x'^\mu} - \frac{\partial \delta x^\nu}{\partial x^\mu} \tag{3.1.3}$$

est un terme de second ordre, tandis que pour les variables internes, l'acroissement est donné par

$$\delta \xi^k = \xi'^k - \xi^k \tag{3.1.4}$$

et la transformation de la dérivée par rapport aux coordonnées internes est

$$\partial'_k = \partial_k - \left(\frac{\partial \delta \xi^l}{\partial \xi^k}\right)\partial_l \tag{3.1.5}$$

3.1.2 Variation des champs

La variation de la fonction $\eta^a(x)$ est donnée par

$$\delta\eta^a(x) = \eta'^a(x') - \eta^a(x) \tag{3.1.6}$$

$$= \bar{\delta}\eta^a(x) + \partial_\mu \eta^a(x)\delta x^\mu \tag{3.1.7}$$

La variation de la dérivée $\partial_\mu \eta^a(x)$ est

$$\delta\left(\partial_\mu \eta^a(x)\right) = \partial'_\mu \eta'^a(x') - \partial_\mu \eta^a(x) \tag{3.1.8}$$

$$= \bar{\delta}\left(\partial_\mu \eta^a(x)\right) + \partial_\lambda\left(\partial_\mu \eta^a(x)\right)\delta x^\lambda \tag{3.1.9}$$

où

$$\bar{\delta}\left(\partial_\mu \eta^a(x)\right) = \partial_\mu \eta'^a(x) - \partial_\mu \eta^a(x) = \partial_\mu\left(\bar{\delta}\eta^a(x)\right) \tag{3.1.10}$$

est la variation de forme. La variation de la fonction d'onde physique $\phi^\alpha(\xi)$

$$\delta\phi^\alpha(\xi) = \phi'^\alpha(\xi') - \phi^\alpha(\xi) \tag{3.1.11}$$

$$= \bar{\delta}\phi^\alpha(\xi) + \partial_k\phi^\alpha(\xi)\delta\xi^k \tag{3.1.12}$$

On définit notamment la variation de la dérivée par rapport à la variable interne

$$\delta\left(\partial_k \phi^\alpha(\xi)\right) = \partial'_k \phi'^\alpha(\xi') - \partial_k \phi^\alpha(\xi) \tag{3.1.13}$$

$$= \bar{\delta}\left(\partial_k \phi^\alpha(\xi)\right) + \partial_l\left(\partial_k \phi^\alpha(\xi)\right)\delta\xi^l \tag{3.1.14}$$

où la variation de forme est

$$\bar{\delta}\left(\partial_k \phi^\alpha(\xi)\right) = \partial_k \phi'^\alpha(\xi) - \partial_k \phi^\alpha(\xi) = \partial_k\left(\bar{\delta}\phi^\alpha(\xi)\right) \tag{3.1.15}$$

On définit la dérivée par rapport à la fonction externe par

$$\partial_a = \frac{\partial}{\partial \eta^a(x)} \tag{3.1.16}$$

On définit également sa transformée par

$$\partial'_a = \frac{\partial}{\partial \eta'^a(x')} = \left(\frac{\partial \eta^b(x)}{\partial \eta'^a(x')}\right)\partial_b = \partial_a - \left(\frac{\partial \delta\eta^b(x)}{\partial \eta'^a(x')}\right)\partial_b \tag{3.1.17}$$

d'où

$$\partial'_a = \partial_a - \left(\frac{\partial \delta\eta^b(x)}{\partial \eta^a(x)}\right)\partial_b \tag{3.1.18}$$

Ainsi que la la dérivée par rapport à la dérivée de la fonction externe est définit par

$$\partial^{\mu]}_{[a,} = \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a(x)\right)} \tag{3.1.19}$$

sa transformée est définit aussi par

$$\partial'^{\mu]}_{[a,} = \frac{\partial}{\partial\left(\partial_\mu \eta'^a\left(x'\right)\right)} = \left(\frac{\partial\left(\partial_\nu \eta^b\left(x\right)\right)}{\partial\left(\partial_\mu \eta'^a\left(x'\right)\right)}\right)\partial^{\nu]}_{[b,} = \partial^{\mu]}_{[a,} - \left(\frac{\partial\delta\left(\partial_\nu \eta^b\left(x\right)\right)}{\partial\left(\partial_\mu \eta'^a\left(x'\right)\right)}\right)\partial^{\nu]}_{[b,} \tag{3.1.20}$$

d'où

$$\partial'^{\mu]}_{[a,} = \partial^{\mu]}_{[a,} - \left(\frac{\partial\delta\left(\partial_\nu \eta^b\left(x\right)\right)}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a\left(x\right)\right)}\right)\partial^{\nu]}_{[b,} \tag{3.1.21}$$

De même on définit les transformations pour les fonctions internes et leurs dérivées

$$\partial'_\alpha = \frac{\partial}{\partial\phi'^\alpha\left(\xi'\right)} = \left(\frac{\partial\phi^\beta\left(\xi\right)}{\partial\phi'^\alpha\left(\xi'\right)}\right)\partial_\beta = \partial_\alpha - \left(\frac{\partial\delta\phi^\beta\left(\xi\right)}{\partial\phi'^\alpha\left(\xi'\right)}\right)\partial_\beta \tag{3.1.22}$$

d'où

$$\partial'_\alpha = \partial_\alpha - \left(\frac{\partial\delta\phi^\beta\left(\xi\right)}{\partial\phi^\alpha\left(\xi\right)}\right)\partial_\beta \tag{3.1.23}$$

et la transformée de la dérivée par rapport à la dérivée de la fonction d'onde interne

$$\partial'^{k]}_{[\alpha,} = \frac{\partial}{\partial\left(\partial_k \phi'^\alpha\left(\xi'\right)\right)} = \left(\frac{\partial\left(\partial_l \phi^\beta\left(\xi\right)\right)}{\partial\left(\partial_k \phi'^\alpha\left(\xi'\right)\right)}\right)\partial^{l]}_{[\beta,} = \partial^{k]}_{[\alpha,} - \left(\frac{\partial\delta\left(\partial_l \phi^\beta\left(\xi\right)\right)}{\partial\left(\partial_k \phi'^\alpha\left(\xi'\right)\right)}\right)\partial^{l]}_{[\beta,} \tag{3.1.24}$$

d'où

$$\partial'^{k]}_{[\alpha,} = \partial^{k]}_{[\alpha,} - \left(\frac{\partial\delta\left(\partial_l \phi^\beta\left(\xi\right)\right)}{\partial\left(\partial_k \phi^\alpha\left(\xi\right)\right)}\right)\partial^{l]}_{[\beta,} \tag{3.1.25}$$

Nous avons également besoin des variations des fonctionnelles

$$\begin{aligned}\triangle U_i &= U'_i\left(\eta'^a\left(x'\right), \partial'_\mu \eta'^a\left(x'\right), \phi'^\alpha\left(\xi'\right), \partial'_k \phi'^\alpha\left(\xi'\right)\right) - U_i\left(\eta^a\left(x\right), \partial_\mu \eta^a\left(x\right), \phi^\alpha\left(\xi\right), \partial_k \phi^\alpha\left(\xi\right)\right) \\ &= \bar{\triangle} U_i + \bar{\delta} U_i + \partial_\mu U_i \delta x^\mu + \partial_k U_i \delta \xi^k \end{aligned} \tag{3.1.26}$$

où

$$\bar{\triangle} U_i = U'_i\left(\eta^a, \partial_\mu \eta^a, \phi^\alpha, \partial_k \phi^\alpha\right) - U_i\left(\eta^a, \partial_\mu \eta^a, \phi^\alpha, \partial_k \phi^\alpha\right) \tag{3.1.27}$$

$$\bar{\delta} U_i = \frac{\partial U_i}{\partial \eta^a}\bar{\delta}\eta^a + \frac{\partial U_i}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a\right)}\bar{\delta}\left(\partial_\mu \eta^a\right) + \frac{\partial U_i}{\partial \phi^\alpha}\bar{\delta}\phi^\alpha + \frac{\partial U_i}{\partial\left(\partial_k \phi^\alpha\right)}\bar{\delta}\left(\partial_k \phi^\alpha\right) \tag{3.1.28}$$

sont respectivement, la variation conditionnée par le changement de forme pour les même valeurs des arguments, et la variation conditionnée par le changement de forme des arguments. Les variations des dérivées fonctionnelles sont alors

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial_a U_i\right) &= \partial'_a U'_i - \partial_a U_i = \left[\partial_a - \left(\frac{\partial\delta\eta^b\left(x\right)}{\partial\eta^a\left(x\right)}\right)\partial_b\right]\left(U_i + \triangle U_i\right) - \partial_a U_i \\ &= \partial_a\left(\triangle U_i\right) - \left(\frac{\partial\delta\eta^b}{\partial\eta^a}\right)\partial_b U_i \end{aligned} \tag{3.1.29}$$

d'où

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial_a U_i\right) &= \partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_a\left[\frac{\partial U_i}{\partial\eta^b}\delta\eta^b+\frac{\partial U_i}{\partial\left(\partial_\nu\eta^b\right)}\delta\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\frac{\partial U_i}{\partial\phi^\beta}\delta\phi^\beta+\frac{\partial U_i}{\partial\left(\partial_l\phi^\beta\right)}\delta\left(\partial_l\phi^\beta\right)\right]\\ &\quad-\left(\frac{\partial\delta\eta^b}{\partial\eta^a}\right)\partial_b U_i \qquad (3.1.30)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial_a U_i\right) &= \partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_a\left(\partial_b U_i\right)\delta\eta^b+\partial_a\left(\partial^{\nu]}_{[b,}U_i\right)\delta\left(\partial_\nu\eta^b\right)\\ &\quad+\partial_a\left(\partial_\beta U_i\right)\delta\phi^\beta+\partial_a\left(\partial^{l]}_{[\beta,}U_i\right)\delta\left(\partial_l\phi^\beta\right)\\ &= \partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_a\left(\partial_b U_i\right)\bar{\delta}\eta^b+\partial_a\left(\partial^{\nu]}_{[b,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\partial_a\left(\partial_\beta U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta\\ &\quad+\partial_a\left(\partial^{l]}_{[\beta,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\partial_\nu\left(\partial_a U_i\right)\delta x^\nu+\partial_l\left(\partial_a U_i\right)\delta\xi^l \qquad (3.1.31)\end{aligned}$$

Parce que les quantités $\eta^a, \partial_\mu\eta^a, \phi^\alpha, \partial_k\phi^\alpha$ sont indépendantes il vient

$$\partial_a\left[\delta\left(\partial_\nu\eta^b\right)\right] = \partial_a\left(\delta\phi^\alpha\right)=\partial_a\left[\delta\left(\partial_l\phi^\beta\right)\right]=0 \qquad (3.1.32)$$

$$\partial_\alpha\left[\delta\left(\partial_\nu\eta^b\right)\right] = \partial_\alpha\left[\delta\left(\partial_l\phi^\beta\right)\right]=\partial_\alpha\left(\delta\eta^b\right)=0 \qquad (3.1.33)$$

$$\partial^{\mu]}_{[a,}\left(\delta\phi^\beta\right)=\partial^{\mu]}_{[a,}\left[\delta\left(\partial_l\phi^\beta\right)\right]=\partial^{\mu]}_{[a,}\left(\delta\eta^b\right)=0 \qquad (3.1.34)$$

et

$$\partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\delta\phi^\beta\right)=\partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\delta\eta^b\right)=\partial^{k]}_{[\alpha,}\delta\left(\partial_\nu\eta^b\right)=0 \qquad (3.1.35)$$

et comme

$$\partial_a\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right) = \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\partial_a U_i\right) \qquad (3.1.36)$$

$$\partial_a\left(\partial_\alpha U_i\right) = \partial_\alpha\left(\partial_a U_i\right) \qquad (3.1.37)$$

$$\partial_a\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right) = \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\partial_a U_i\right) \qquad (3.1.38)$$

on trouve

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial_a U_i\right) &= \partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_b\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\eta^b+\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\partial_\beta\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta\\ &\quad+\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\partial_\nu\left(\partial_a U_i\right)\delta x^\nu+\partial_l\left(\partial_a U_i\right)\delta\xi^l \qquad (3.1.39)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right) &= \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_b\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\eta^b+\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\partial_\alpha\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta\\ &\quad+\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\partial_\nu\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\delta x^\nu+\partial_l\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\delta\xi^l \qquad (3.1.40)\end{aligned}$$

Ainsi que

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial_\alpha U_i\right) &= \partial_\alpha\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_b\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\eta^b+\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\partial_\beta\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\ &\quad +\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\partial_\nu\left(\partial_\alpha U_i\right)\delta x^\nu+\partial_l\left(\partial_\alpha U_i\right)\delta\xi^l \qquad (3.1.41)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\triangle\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right) &= \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\partial_b\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\eta^b+\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\partial_\beta\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\ &\quad +\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\partial_\nu\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\delta x^\nu+\partial_l\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\delta\xi^l \qquad (3.1.42)\end{aligned}$$

3.2 Démonstration du Théorème de Noether

Après avoir défini toutes les quantités nécessaires à l'application du principe variationnel à un Lagrangien décrivant une particule étendue, commençons à démontrer le théorème de Noether pour une telle théorie. Etant donné la densité Lagrangienne:

$$\mathcal{L}=\mathcal{L}\left(U_i,\partial_a U_i,\partial^{\mu]}_{[a,}U_i,\partial_\alpha U_i,\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right) \qquad (3.2.1)$$

La variation du domaine d'intégration est

$$\begin{aligned}\delta\left(dxd\xi\right) &= \delta\left(dx\right)d\xi+\delta\left(d\xi\right)dx \\ &= \partial_\mu\left(\delta x^\mu\right)dxd\xi+\partial_k\left(\delta\xi^k\right)d\xi dx \\ &= \left[\partial_\mu\left(\delta x^\mu\right)+\partial_k\left(\delta\xi^k\right)\right]dxd\xi \qquad (3.2.2)\end{aligned}$$

La variation de l'action est donnée par :

$$\delta A=\int_\Omega\int_{\Omega'}\left(\delta\mathcal{L}\right)dxd\xi+\int_\Omega\int_{\Omega'}\mathcal{L}\delta\left(dxd\xi\right)=\int_\Omega\int_{\Omega'}\left[\delta\mathcal{L}+\mathcal{L}\partial_\mu\left(\delta x^\mu\right)+\mathcal{L}\partial_k\left(\delta\xi^k\right)\right]dxd\xi \qquad (3.2.3)$$

où Ω, Ω' sont les domaines d'integration quadridimensionnels. Celle du Lagrangien est:

$$\begin{aligned}\delta\mathcal{L} &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\triangle U_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\triangle\left(\partial_a U_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\triangle\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right) \\ &\quad +\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\triangle\left(\partial_\alpha U_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\triangle\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right) \qquad (3.2.4)\end{aligned}$$

En remplaçant les variations (3.1.26), (3.1.39), (3.1.40), (3.1.41), (3.1.42) dans cette dernière équation on trouve

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} \;=\; & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\Big[\bar{\triangle}U_i + \partial_b U_i\bar{\delta}\eta^b + \partial^{\nu]}_{[b,}U_i\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) + \partial_\beta U_i\bar{\delta}\phi^\beta \\
& + \partial^{l]}_{[\beta,}U_i\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) + \partial_\nu U_i\delta x^\nu + \partial_l U_i\delta\xi^l\Big] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\Big[\partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right) \\
& + \partial_b\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\eta^b + \partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) + \partial_\beta\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\
& \partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) + \partial_\nu\left(\partial_a U_i\right)\delta x^\nu + \partial_l\left(\partial_a U_i\right)\delta\xi^l\Big] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\Big[\partial^{\mu]}_{[a,}\left(\bar{\triangle}U_i\right) \\
& + \partial_b\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\eta^b + \partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) + \partial_\beta\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\
& + \partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) + \partial_\nu\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\delta x^\nu + \partial_l\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\delta\xi^l\Big] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\Big[\partial_\alpha\left(\bar{\triangle}U_i\right) \\
& + \partial_b\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\eta^b + \partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) + \partial_\beta\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\
& + \partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) + \partial_\nu\left(\partial_\alpha U_i\right)\delta x^\nu + \partial_l\left(\partial_\alpha U_i\right)\delta\xi^l\Big] + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\Big[\partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\bar{\triangle}U_i\right) \\
& + \partial_b\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\eta^b + \partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) + \partial_\beta\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\
& + \partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) + \partial_\nu\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\delta x^\nu + \partial_l\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\delta\xi^l\Big]
\end{aligned} \tag{3.2.5}$$

On rassemble les termes qui corespond à la même variation de forme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^b}\bar{\delta}\eta^b \;=\; & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\partial_b U_i\bar{\delta}\eta^b + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial_b\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\eta^b + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial_b\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\eta^b \\
& + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial_b\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\eta^b + \frac{\partial U_i}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial_b\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\eta^b
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\beta}\bar{\delta}\phi^\beta \;=\; & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\partial_\beta U_i\bar{\delta}\phi^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial_\beta\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial_\beta\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta \\
& + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial_\beta\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial_\beta\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\phi^\beta
\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\nu\eta^b\right)}\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\partial^{\nu]}_{[b,}U_i\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right)\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial^{\nu]}_{[b,}\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_\nu\eta^b\right) \qquad (3.2.8)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_l\phi^\beta\right)}\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\partial^{l]}_{[\beta,}U_i\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial_a U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial_\alpha U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right)\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial^{l]}_{[\beta,}\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\bar{\delta}\left(\partial_l\phi^\beta\right) \qquad (3.2.9)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\partial_\nu U_i\delta x^\nu+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial_\nu\left(\partial_a U_i\right)\delta x^\nu+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial_\nu\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\delta x^\nu\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial_\nu\left(\partial_\alpha U_i\right)\delta x^\nu+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial_\nu\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\delta x^\nu \qquad (3.2.10)
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\xi^l}\delta\xi^l &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\partial_l U_i\delta\xi^l+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial_l\left(\partial_a U_i\right)\delta\xi^l+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial_l\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)\delta\xi^l\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial_l\left(\partial_\alpha U_i\right)\delta\xi^l+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial_l\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\delta\xi^l \qquad (3.2.11)
\end{aligned}$$

On trouve alors

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L}+\mathcal{L}\left[\partial_\mu\left(\delta x^\mu\right)+\partial_k\left(\delta\xi^k\right)\right] &= \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i}\bar{\triangle}U_i+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial^{\mu]}_{[a,}\left(\bar{\triangle}U_i\right)\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial_\alpha\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\bar{\triangle}U_i\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^a}\bar{\delta}\eta^a\\
&+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\eta^a\right)}\partial_\mu\left(\bar{\delta}\eta^a\right)+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha}\bar{\delta}\phi^\alpha+\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\phi^\alpha\right)}\partial_k\left(\bar{\delta}\phi^\alpha\right)\\
&+\partial_\mu\left(\mathcal{L}\delta x^\mu\right)+\partial_k\left(\mathcal{L}\delta\xi^k\right) \qquad (3.2.12)
\end{aligned}$$

Utilisons maintenant les relations suivantes

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\partial_a\left(\bar{\triangle}U_i\right) = \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) - \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\right)\bar{\triangle}U_i \tag{3.2.13}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\partial^{\mu]}_{[a,}\left(\bar{\triangle}U_i\right) = \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) - \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\right)\bar{\triangle}U_i \tag{3.2.14}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\partial_\alpha\left(\bar{\triangle}U_i\right) = \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) - \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\right)\bar{\triangle}U_i \tag{3.2.15}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\bar{\triangle}U_i\right) = \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) - \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\right)\bar{\triangle}U_i \tag{3.2.16}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a\right)}\partial_\mu\left(\bar{\delta}\eta^a\right) = \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a\right)}\bar{\delta}\eta^a\right) - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a\right)}\right)\bar{\delta}\eta^a \tag{3.2.17}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k \phi^\alpha\right)}\partial_k\left(\bar{\delta}\phi^\alpha\right) = \partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k \phi^\alpha\right)}\bar{\delta}\phi^\alpha\right) - \partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k \phi^\alpha\right)}\right)\bar{\delta}\phi^\alpha \tag{3.2.18}$$

On aboutit à

$$\begin{aligned}
\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\left[\partial_\mu\left(\delta x^\mu\right) + \partial_k\left(\delta\xi^k\right)\right] = & \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial U_i} - \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\right) - \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\right) - \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\right)\right. \\
& \left. - \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\right)\right]\bar{\triangle}U_i + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\eta^a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\eta^a\right)}\right)\right]\bar{\delta}\eta^a \\
& + \left[\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi^\alpha} - \partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\phi^\alpha\right)}\right)\right]\bar{\delta}\phi^\alpha + \partial_a\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) \\
& + \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) + \partial_\alpha\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) \\
& + \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\bar{\triangle}U_i\right) + \partial_\mu\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu\eta^a\right)}\bar{\delta}\eta^a + \mathcal{L}\delta x^\mu\right) \\
& + \partial_k\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\phi^\alpha\right)}\bar{\delta}\phi^\alpha + \mathcal{L}\delta\xi^k\right)
\end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Utilisons des expressions plus parlantes en définissant les termes d'Euler-Lagrange $E_i\left(U\right)$, $E_a\left(\eta\right)$ et $E_\alpha\left(\phi\right)$ de la fonctionnelle U_i et des champs η^a et ϕ^α respectivement, les courants $\theta^\mu_A\left(\eta\right)$ et $\theta^k_\triangle\left(\phi\right)$ des champs η^a, ϕ^α et les quantités $\Theta^a_A(U)$, $\left[\Theta_A\right]^{[a,}_{\mu]}\left(U\right)$, $\Theta^\alpha_\triangle(U)$, $\left[\Theta_\triangle\right]^{[\alpha,}_{k]}\left(U\right)$

par

$$
\begin{aligned}
E^{i}(U) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial U_i} - \partial_a\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a U_i)}\right) - \partial^{\mu]}_{[a,}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\right) \\
&\quad -\partial_\alpha\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha U_i)}\right) - \partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\right) && (3.2.20)\\
E_a(\eta) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta^a} - \partial_\mu\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^a)}\right) && (3.2.21)\\
E_\alpha(\phi) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^\alpha} - \partial_k\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi^\alpha)}\right) && (3.2.22)\\
\theta^{\mu}_{A}(\eta)\,\delta\omega^{A} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta^a)}\bar{\delta}\eta^a + \mathcal{L}\delta x^\mu && (3.2.23)\\
\theta^{k}_{\triangle}(\phi)\,\delta\omega^{\triangle} &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi^\alpha)}\bar{\delta}\phi^\alpha + \mathcal{L}\delta \xi^k && (3.2.24)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_a U_i)}\bar{\triangle}U_i &= \Theta^{a}_{A}(U)\delta\omega^{A} + \Theta^{a}_{\triangle}(U)\delta\omega^{\triangle} && (3.2.25)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_i\right)}\bar{\triangle}U_i &= \left[\Theta_A\right]^{[a,}_{\mu]}(U)\delta\omega^{A} + \left[\Theta_\triangle\right]^{[a,}_{\mu]}(U)\delta\omega^{\triangle} && (3.2.26)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\alpha U_i)}\bar{\triangle}U_i &= \Theta^{\alpha}_{A}(U)\delta\omega^{A} + \Theta^{\alpha}_{\triangle}(U)\delta\omega^{\triangle} && (3.2.27)\\
\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\bar{\triangle}U_i &= \left[\Theta_A\right]^{[\alpha,}_{k]}(U)\delta\omega^{A} + \left[\Theta_\triangle\right]^{[\alpha,}_{k]}(U)\delta\omega^{\triangle} && (3.2.28)
\end{aligned}
$$

où les indices A et Δ représentent respectivement le nombre de paramètres des transformations externe et interne. Comme l'invariance de l'action implique que

$$\delta\mathcal{L} + \mathcal{L}\left[\partial_\mu(\delta x^\mu) + \partial_k\left(\delta\xi^k\right)\right] = 0 \tag{3.2.29}$$

nous aurons finalement

$$
\begin{aligned}
0 \;=\;& E^{i}(U)\,\bar{\triangle}U_i + E_a(\eta)\,\bar{\delta}\eta^a + E_\alpha(\phi)\,\bar{\delta}\phi^\alpha + \partial_a\left(\Theta^{a}_{A}(U)\delta\omega^{A} + \Theta^{a}_{\triangle}(U)\delta\omega^{\triangle}\right)\\
&+\partial^{\mu]}_{[a,}\left(\left[\Theta_A\right]^{[a,}_{\mu]}(U)\delta\omega^{A} + \left[\Theta_\triangle\right]^{[a,}_{\mu]}(U)\delta\omega^{\triangle}\right) + \partial_\alpha\left(\Theta^{\alpha}_{A}(U)\delta\omega^{A} + \Theta^{\alpha}_{\triangle}(U)\delta\omega^{\triangle}\right)\\
&+\partial^{k]}_{[\alpha,}\left(\left[\Theta_A\right]^{[\alpha,}_{k]}(U)\delta\omega^{A} + \left[\Theta_\triangle\right]^{[\alpha,}_{k]}(U)\delta\omega^{\triangle}\right)\\
&+\partial_\mu\left(\theta^{\mu}_{A}(\eta)\,\delta\omega^{A}\right) + \partial_k\left(\theta^{k}_{\triangle}(\phi)\,\delta\omega^{\triangle}\right)
\end{aligned}
\tag{3.2.30}
$$

En posant

$$\bar{\delta}\eta^a = \bar{F}^a_A \delta\omega^A \tag{3.2.31}$$

$$\bar{\delta}\phi^\alpha = \bar{H}^\alpha_\triangle \delta\omega^\triangle \tag{3.2.32}$$

$$\bar{\triangle}U_i = \bar{\Psi}_{Ai}\delta\omega^A + \bar{\Psi}_{\triangle i}\delta\omega^\triangle \tag{3.2.33}$$

où $\bar{F}^a_A$, $\bar{H}^\alpha_\triangle$ et $\bar{\Psi}_{Ai}$, $\bar{\Psi}_{\triangle i}$ sont les matrices de transformation liées à la variation de forme respectivement des champs η^a, ϕ^α et U_i. En tenant compte de l'indépendance des $\delta\omega^A$, $\delta\omega^\triangle$ entre eux, de l'indépendance par rapport η^a et ϕ^α et en fin de l'indépendance entre x et ξ, cette équation devient

$$\begin{aligned} 0 = & \Big[E^i(U)\,\bar{\Psi}_{Ai} + \partial_a\left[\Theta^a_A(U)\right] + \partial^{\mu]}_{[a,}\Big[[\Theta_A]^{[a,}_{\mu]}(U)\Big] + \partial_\alpha\left[\Theta^\alpha_A(U)\right] \\ & + \partial^{k]}_{[\alpha,}\Big[[\Theta_A]^{[\alpha,}_{k]}(U)\Big] + E_a(\eta)\,\bar{F}^a_A + \partial_\mu\left[\theta^\mu_A(\eta)\right]\Big]\delta\omega^A + \big[E^i(U)\,\bar{\Psi}_{\triangle i} \\ & + \partial_\alpha\left[\Theta^\alpha_\triangle(U)\right] + \partial^{k]}_{[\alpha,}\Big[[\Theta_\triangle]^{[\alpha,}_{k]}(U)\Big] + \partial_a\left[\Theta^a_\triangle(U)\right] \\ & + \partial^{\mu]}_{[a,}\Big[[\Theta_\triangle]^{[a,}_{\mu]}(U)\Big] + E_\alpha(\phi)\,\bar{H}^\alpha_\triangle + \partial_k\left[\theta^k_\triangle(\phi)\right]\Big]\delta\omega^\triangle \end{aligned} \tag{3.2.34}$$

On déduit que

$$\begin{aligned} 0 = & E^i(U)\,\bar{\Psi}_{Ai} + \partial_a\left[\Theta^a_A(U)\right] + \partial^{\mu]}_{[a,}\Big[[\Theta_A]^{[a,}_{\mu]}(U)\Big] \\ & + \partial_\alpha\left[\Theta^\alpha_A(U)\right] + \partial^{k]}_{[\alpha,}\Big[[\Theta_A]^{[\alpha,}_{k]}(U)\Big] + E_a(\eta)\,\bar{F}^a_A + \partial_\mu\left[\theta^\mu_A(\eta)\right] \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

$$\begin{aligned} 0 = & E^i(U)\,\bar{\Psi}_{\triangle i} + \partial_a\left[\Theta^a_\triangle(U)\right] + \partial^{\mu]}_{[a,}\Big[[\Theta_\triangle]^{[a,}_{\mu]}(U)\Big] \\ & + \partial_\alpha\left[\Theta^\alpha_\triangle(U)\right] + \partial^{k]}_{[\alpha,}\Big[[\Theta_\triangle]^{[\alpha,}_{k]}(U)\Big] + E_\alpha(\phi)\,\bar{H}^\alpha_\triangle + \partial_k\left[\theta^k_\triangle(\phi)\right] \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

Les deux derniers termes de chacune de ces deux dernières équations correspondent respectivement aux équations d'Euler-Lagrange et la divergence du courant des champs η^a et ϕ^α. Si les champs externe $\eta^a(x)$ et interne $\phi^\alpha(\xi)$ vérifient les équations Euler-Lagrange, leurs courants sont conservés,

$$E_a(\eta) = 0; \qquad \partial_\mu\left[\theta^\mu_A(\eta)\right] = 0 \tag{3.2.37}$$

$$E_\alpha(\phi) = 0; \qquad \partial_k\left[\theta^k_\triangle(\phi)\right] = 0 \tag{3.2.38}$$

Les équations (3.2.35) et (3.2.36) deviennent

$$\begin{aligned} 0 &= E^i(U)\,\bar{\Psi}_{Ai} + \partial_a\left[\Theta^a_A(U)\right] + \partial^{\mu]}_{[a,}\left[[\Theta_A]^{[a,}_{\mu]}(U)\right] \\ &\quad + \partial_\alpha\left[\Theta^\alpha_A(U)\right] + \partial^{k]}_{[\alpha,}\left[[\Theta_A]^{[\alpha,}_{k]}(U)\right] \qquad (3.2.39)\\ 0 &= E^i(U)\,\bar{\Psi}_{\triangle i} + \partial_a\left[\Theta^a_\triangle(U)\right] + \partial^{\mu]}_{[a,}\left[[\Theta_\triangle]^{[a,}_{\mu]}(U)\right] \\ &\quad + \partial_\alpha\left[\Theta^\alpha_\triangle(U)\right] + \partial^{k]}_{[\alpha,}\left[[\Theta_\triangle]^{[\alpha,}_{k]}(U)\right] \qquad (3.2.40)\end{aligned}$$

3.2.1 Expression des courants en fonction des matrices de transformation X, $\tilde{X}$, F, H et Ψ

Les quantités X, $\tilde{X}$, F, H et Ψ représentent respectivement les matrices de transformation coordonnées externes, coordonnées internes, des champs η^a, ϕ^α et U_i. Les variations des quatres premières quantités sont:

$$\delta x^\mu = X^\mu_A \delta\omega^A \qquad (3.2.41)$$

$$\delta \xi^k = \tilde{X}^k_\triangle \delta\omega^\triangle \qquad (3.2.42)$$

$$\delta \eta^a = F^a_A \delta\omega^A \qquad (3.2.43)$$

$$\delta \phi^\alpha = H^\alpha_\triangle \delta\omega^\triangle \qquad (3.2.44)$$

$$\bar{\delta}\phi^\alpha = \left(\delta\phi^\alpha - \delta\xi^k \partial_k\phi^\alpha\right) = \left(H^\alpha_\triangle - \tilde{X}^k_\triangle \partial_k\phi^\alpha\right)\delta\omega^\triangle \qquad (3.2.45)$$

$$\bar{\delta}\eta^a = \left(\delta\eta^a - \delta x^\mu \partial_\mu\eta^a\right) = \left(F^a_A - X^\mu_A \partial_\mu\eta^a\right)\delta\omega^A \qquad (3.2.46)$$

$$\bar{\delta}\left(\partial_\mu\eta^a\right) = \partial_\mu\left(\bar{\delta}\eta^a\right) = \left[\partial_\mu F^a_A - \left(\partial_\mu X^\nu_A\right)\partial_\nu\eta^a - X^\nu_A\partial_\mu\left(\partial_\nu\eta^a\right)\right]\delta\omega^A \qquad (3.2.47)$$

$$\bar{\delta}\left(\partial_k\phi^\alpha\right) = \partial_k\left(\bar{\delta}\phi^\alpha\right) = \left[\partial_k H^\alpha_\triangle - \left(\partial_k\tilde{X}^l_\triangle\right)\partial_l\phi^\alpha - \tilde{X}^l_\triangle\partial_k\left(\partial_l\phi^\alpha\right)\right]\delta\omega^\triangle \qquad (3.2.48)$$

$$\begin{aligned}\delta\left(\partial_\mu\eta^a\right) &= \bar{\delta}\left(\partial_\mu\eta^a\right) + \delta x^\nu\partial_\nu\left(\partial_\mu\eta^a\right) \\ &= \left[\partial_\mu F^a_A - \left(\partial_\mu X^\nu_A\right)\partial_\nu\eta^a\right]\delta\omega^A \qquad (3.2.49)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\delta\left(\partial_k\phi^\alpha\right) &= \bar{\delta}\left(\partial_k\phi^\alpha\right) + \delta\xi^l\partial_l\left(\partial_k\phi^\alpha\right) \\ &= \left[\partial_k H^\alpha_\triangle - \left(\partial_k\tilde{X}^l_\triangle\right)\partial_l\phi^\alpha\right]\delta\omega^\triangle \qquad (3.2.50)\end{aligned}$$

En ce qui concerne la fonctionnelle U_i, sa variation totale et de forme est:

$$\triangle U_i = \delta\omega^A \Psi_{Ai} + \delta\omega^{\triangle}\Psi_{\triangle i} \tag{3.2.51}$$

$$\begin{aligned}\bar{\triangle} U_i &= \triangle U_i - \partial_a U_i \delta\eta^a - \left(\partial^{\mu]}_{[a,} U_i\right)\delta\left(\partial_\mu \eta^a\right) - \partial_\alpha U_i \delta\phi^\alpha - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,} U_i\right)\delta\left(\partial_k \phi^\alpha\right) \\ &= \delta\omega^A\left\{\Psi_{Ai} - \left(\partial_a U_i\right) F^a_A - \left(\partial^{\mu]}_{[a,} U_i\right)\left[\partial_\mu F^a_A - \left(\partial_\mu X^\nu_A\right)\partial_\nu \eta^a\right]\right\} \\ &\quad + \delta\omega^{\triangle}\left\{\Psi_{\triangle i} - \left(\partial_\alpha U_i\right) H^\alpha_\Delta - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,} U_i\right)\left[\partial_k H^\alpha_\Delta - \left(\partial_k \tilde{X}^l_\Delta\right)\partial_l \phi^\alpha\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.2.52}$$

En utilisant les équations (3.2.31), (3.2.32) et (3.2.33) on trouve:

$$\bar{F}^a_A = F^a_A - X^\mu_A \partial_\mu \eta^a \tag{3.2.53}$$

$$\bar{H}^\alpha_\triangle = H^\alpha_\triangle - \tilde{X}^k_\triangle \partial_k \phi^\alpha \tag{3.2.54}$$

$$\bar{\Psi}_{Ai} = \left\{\Psi_{Ai} - \left(\partial_a U_i\right) F^a_A - \left(\partial^{\mu]}_{[a,} U_i\right)\left[\partial_\mu F^a_A - \left(\partial_\mu X^\nu_A\right)\partial_\nu \eta^a\right]\right\} \tag{3.2.55}$$

$$\bar{\Psi}_{\triangle i} = \left\{\Psi_{\triangle i} - \left(\partial_\alpha U_i\right) H^\alpha_\triangle - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,} U_i\right)\left[\partial_k H^\alpha_\triangle - \left(\partial_k \tilde{X}^l_\Delta\right)\partial_l \phi^\alpha\right]\right\} \tag{3.2.56}$$

On peut donc calculer les courants externe et interne liés aux champs η et ϕ

$$\theta^\mu_A(\eta) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\mu \eta^a\right)}\left(F^a_A - X^\mu_A \partial_\mu \eta^a\right) + \mathcal{L} X^\mu_A \tag{3.2.57}$$

$$\theta^k_\triangle(\phi) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k \phi^\alpha\right)}\left(H^\alpha_\triangle - \tilde{X}^k_\triangle \partial_k \phi^\alpha\right) + \mathcal{L}\tilde{X}^k_\triangle \tag{3.2.58}$$

Anisi que les composantes du courant lié à la fonctionnelle U_i

$$\Theta^a_A(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\bar{\Psi}_{Ai} \tag{3.2.59}$$

$$\Theta^a_\triangle(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_a U_i\right)}\bar{\Psi}_{i\triangle} \tag{3.2.60}$$

$$\left[\Theta_A\right]^{[a,}_{\mu]}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,} U_i\right)}\bar{\Psi}_{Ai} \tag{3.2.61}$$

$$\left[\Theta_\triangle\right]^{[a,}_{\mu]}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,} U_i\right)}\bar{\Psi}_{\triangle i} \tag{3.2.62}$$

$$\Theta^\alpha_A(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\bar{\Psi}_{Ai} \tag{3.2.63}$$

$$\Theta^\alpha_\triangle(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U_i\right)}\bar{\Psi}_{\triangle i} \tag{3.2.64}$$

$$[\Theta_A]^{[\alpha,}_{k]}(U) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\bar{\Psi}_{Ai} \tag{3.2.65}$$

$$[\Theta_\triangle]^{[\alpha,}_{k]}(U) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\bar{\Psi}_{\triangle i} \tag{3.2.66}$$

3.2.2 Expression des courants en fonction des générateurs I_A, $\tilde{I}_\Delta$, J_A, $\tilde{J}_\Delta$, K_A , $\tilde{K}_\Delta$

Les quantités $I_A, \tilde{I}_\Delta, J_A, \tilde{J}_\Delta, K_A, \tilde{K}_\Delta$ représentent respectivement les générateurs de la représentation vectorielle de Lorentz externe et interne, ainsi que les générateurs de transformation des champs η^a, ϕ^α et U_i. En réecrivant les expressions précédentes en fonction des générateurs, elles deviennent:

$$X^\mu_A = [I_A]^\mu{}_\nu x^\nu \tag{3.2.67}$$

$$\tilde{X}^k_\triangle = \left[\tilde{I}_\triangle\right]^k{}_l \xi^l \tag{3.2.68}$$

$$F^a_A = [J_A]^a{}_b \eta^b \tag{3.2.69}$$

$$H^\alpha_\triangle = \left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \phi^\beta \tag{3.2.70}$$

$$\Psi_{iA} = [K_A]_i{}^j U_j \tag{3.2.71}$$

$$\Psi_{i\triangle} = \left[\tilde{K}_\triangle\right]_i{}^j U_j \tag{3.2.72}$$

Ainsi que

$$\bar{F}^a_A = [J_A]^a{}_b \eta^b - [I_A]^\mu{}_\nu x^\nu \partial_\mu \eta^a \tag{3.2.73}$$

$$\bar{H}^\alpha_\triangle = \left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \phi^\beta - \left[\tilde{I}_\triangle\right]^k{}_l \xi^l \partial_k \phi^\alpha \tag{3.2.74}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{Ai} &= [K_A]_i{}^j U_j - [J_A]^a{}_b \eta^b \partial_a U_i \\ &\quad - \left([J_A]^a{}_b \partial_\mu \eta^b - \partial_\nu \eta^a [I_A]^\nu{}_\mu\right) \partial^{\mu]}_{[a,} U_i\end{aligned} \tag{3.2.75}$$

$$\begin{aligned}\bar{\Psi}_{\triangle i} &= \left[\tilde{K}_\triangle\right]_i{}^j U_j - \left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \phi^\beta \partial_\alpha U_i \\ &\quad - \left(\left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \partial_k \phi^\beta - \left[\tilde{I}_\triangle\right]^l{}_k \partial_l \phi^\alpha\right) \partial^{k]}_{[\alpha,} U_i\end{aligned} \tag{3.2.76}$$

Les variations du quadrivecteur externe, du quadrivecteur interne, des champs η^a, ϕ^α et U_i s'expriment alors comme:

$$\delta x^\mu = [I_A]^\mu{}_\nu \, x^\nu \delta\omega^A \tag{3.2.77}$$
$$\delta\xi^k = \left[\tilde{I}_\triangle\right]^k{}_l \xi^l \delta\omega^\triangle \tag{3.2.78}$$

$$\delta\eta^a = [J_A]^a{}_b \, \eta^b \delta\omega^A \tag{3.2.79}$$
$$\delta\phi^\alpha = \left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \phi^\beta \delta\omega^\triangle \tag{3.2.80}$$

$$\bar{\delta}\phi^\alpha = \left(\left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \phi^\beta - \left[\tilde{I}_\triangle\right]^k{}_l \xi^l \partial_k \phi^\alpha\right) \delta\omega^\triangle \tag{3.2.81}$$
$$\bar{\delta}\eta^a = \left([J_A]^a{}_b \, \eta^b - [I_A]^\mu{}_\nu \, x^\nu \partial_\mu \eta^a\right) \delta\omega^A \tag{3.2.82}$$

$$\delta\left(\partial_\mu \eta^a\right) = \left[[J_A]^a{}_b \, \partial_\mu \eta^b - \partial_\nu \eta^a \, [I_A]^\nu{}_\mu\right] \delta\omega^A \tag{3.2.83}$$
$$\bar{\delta}\left(\partial_\mu \eta^a\right) = \left[[J_A]^a{}_b \, \partial_\mu \eta^b - \partial_\nu \eta^a \, [I_A]^\nu{}_\mu - [I_A]^\nu{}_\lambda \, x^\lambda \partial_\mu \left(\partial_\nu \eta^a\right)\right] \delta\omega^A \tag{3.2.84}$$

$$\delta\left(\partial_k \phi^\alpha\right) = \left[\left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \partial_k \phi^\beta - \left[\tilde{I}_\triangle\right]^l{}_k \partial_l \phi^\alpha\right] \delta\omega^\triangle \tag{3.2.85}$$
$$\bar{\delta}\left(\partial_k \phi^\alpha\right) = \left[\left[\tilde{J}_\triangle\right]^\alpha{}_\beta \partial_k \phi^\beta - \left[\tilde{I}_\triangle\right]^l{}_k \partial_l \phi^\alpha - \left[\tilde{I}_\triangle\right]^l{}_p \xi^p \partial_k \left(\partial_l \phi^\alpha\right)\right] \delta\omega^\triangle \tag{3.2.86}$$

De même les variations de la fonctionnelle exprimées en fonction des générateurs sont

$$\triangle U_i = [K_A]_i{}^j \, U_j \delta\omega^A + \left[\tilde{K}_\triangle\right]_i{}^j U_j \delta\omega^\triangle \tag{3.2.87}$$
$$\begin{aligned} \bar{\Delta} U_i = {} & \left[[K_A]_i{}^j \, U_j - [J_A]^a{}_b \, \eta^b \partial_a U_i - \left([J_A]^a{}_b \, \partial_\mu \eta^b - [I_A]_\mu{}^\lambda \, \partial_\lambda \eta^a\right) \partial^{\mu]}_{[a,} U_i\right] \delta\omega^A \\ & + \left[\left[\tilde{K}_\triangle\right]_i{}^j U_j - \left[\tilde{J}_\Delta\right]^\alpha{}_\beta \phi^\beta \partial_\alpha U_i \right. \\ & \left. - \left(\left[\tilde{J}_\Delta\right]^\alpha{}_\beta \partial_k \phi^\beta - \left[\tilde{I}_\Delta\right]_k{}^l \partial_l \phi^\alpha\right) \partial^{k]}_{[\alpha,} U_i\right] \delta\omega^\Delta \end{aligned} \tag{3.2.88}$$

3.3 Décomposition en parties externe et interne

Comme les matrices de transformation se décomposent en des matrices de transformation purement externes (X^μ_A, F^a_A) du quadrivecteur externe x^μ et de la fonction $\eta^a(x)$ uniquement, et des matrices des transformations purement internes ($\tilde{X}^k_\Delta$, H^α_Δ) du quadrivecteur interne ξ^{μ} et de la fonction d'onde interne $\phi^{\alpha}(\xi)$ uniquement, les courants des champs η^{a} et ϕ^{α} donnés par les équations (3.2.57) et (3.2.58) sont respectivement purement externe et purement interne. Par contre, les quantités $\Theta^{a}(U)$, $\Theta^{[a,}_{\mu]}(U)$, $\Theta^{\alpha}(U)$ et $\Theta^{[\alpha,}_{k]}(U)$ contiennent des termes purement externes, purement internes et mixtes

Externe	$\Theta^{a}_{A}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{a}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{Ai}$	$[\Theta_{A}]^{[a,}_{\mu]}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{Ai}$
Interne	$\Theta^{\alpha}_{\triangle}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{\triangle i}$	$[\Theta_{\triangle}]^{[\alpha,}_{k]}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{\triangle i}$
Mixte externe	$\Theta^{\alpha}_{A}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{Ai}$	$[\Theta_{A}]^{[\alpha,}_{k]}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{Ai}$
Mixte interne	$\Theta^{a}_{\triangle}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{a}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{i\triangle}$	$[\Theta_{\triangle}]^{[a,}_{\mu]}(U)=\dfrac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[a,}U_{i}\right)}\bar{\Psi}_{\triangle i}$

Dans le cas de la symétrie interne spinorielle, les générateurs sont ceux de la représentation spinorielle du groupe de Poincaré interne. De tel générateurs s'expriment en fait par des matrices de Dirac internes[10]

$$\left[\tilde{J}_{pq}\right]^{\alpha}_{\ \ \beta}=\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_{p}\gamma_{q}-\gamma_{q}\gamma_{p}}{2i}\right)^{\alpha}_{\ \ \beta},\qquad p\prec q \tag{3.3.1}$$

Tandis que pour l'externe selon que nous ayons à faire à un mode externe scalaire, vectoriel ou spinoriel, le générateur externe sera celui de la représentation associée à l'une des symétries citées. Dans ce présent travail nous choisissons une symétrie externe scalaire, les équations précédentes dans le cas des translations prennent alors la forme suivante

$$X^{\mu}_{A}=\delta^{\mu}_{A} \tag{3.3.2}$$

$$\tilde{X}^{k}_{\Delta}=\delta^{k}_{\triangle} \tag{3.3.3}$$

$$F_{A}=0 \tag{3.3.4}$$

$$H^{\alpha}_{\triangle}=0 \tag{3.3.5}$$

$$\bar{\delta}\phi^{\alpha}=\left(-\partial_{\Delta}\phi^{\alpha}\right)\delta\omega^{\triangle} \tag{3.3.6}$$

$$\bar{\delta}\eta=\left(-\partial_{A}\eta\right)\delta\omega^{A} \tag{3.3.7}$$

$$\bar{\delta}\left(\partial_\mu \eta\right) = \left[-\partial_\mu\left(\partial_A \eta\right)\right]\delta\omega^A \tag{3.3.8}$$

$$\bar{\delta}\left(\partial_k \phi^\alpha\right) = \left[-\partial_k\left(\partial_\Delta \phi^\alpha\right)\right]\delta\omega^\triangle \tag{3.3.9}$$

Dans le cas des rotations dans les plans externes (ρ, σ) et internes (p, q) on a avec $\rho \prec \sigma$ et $p \prec q$, les expressions des matrices des transformations sont

$$X^\mu_{(\rho,\sigma)} = \delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho \tag{3.3.10}$$

$$\tilde{X}^k_{(p,q)} = \delta^k_p \xi_q - \delta^k_q \xi_p \tag{3.3.11}$$

$$F_{(\rho,\sigma)} = 0 \tag{3.3.12}$$

$$H^\alpha_{(p,q)} = \frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^\alpha_{\ \ \beta}\phi^\beta \tag{3.3.13}$$

$$\bar{\delta}\phi^\alpha = \left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^\alpha_{\ \ \beta}\phi^\beta - \left(\delta^k_p\xi_q - \delta^k_q\xi_p\right)\partial_k\phi^\alpha\right]\delta\omega^{pq} \tag{3.3.14}$$

$$\bar{\delta}\eta = \left[-\left(\delta^\mu_\rho x_\sigma - \delta^\mu_\sigma x_\rho\right)\partial_\mu\eta\right]\delta\omega^{\rho\sigma} \tag{3.3.15}$$

$$\bar{\delta}\left(\partial_\mu\eta\right) = \left[-\left(\delta^\nu_\rho x_\sigma - \delta^\nu_\sigma x_\rho\right)\partial_\mu\left(\partial_\nu\eta\right) - \left[(\partial_\rho\eta)g_{\sigma\mu} - (\partial_\sigma\eta)g_{\rho\mu}\right]\right]\delta\omega^{\rho\sigma} \tag{3.3.16}$$

$g_{\mu\nu}$ est le tenseur métrique de Minkowski.

$$\begin{aligned}\bar{\delta}\left(\partial_k\phi^\alpha\right) = & \left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^\alpha_{\ \ \beta}\partial_k\phi^\beta - \left(\delta^l_p\xi_q - \delta^l_q\xi_p\right)\partial_k\left(\partial_l\phi^\alpha\right)\right. \\ & \left.-\left[(\partial_p\phi^\alpha)g_{qk} - (\partial_q\phi^\alpha)g_{pk}\right]\right]\delta\omega^{pq}\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

$$\delta\left(\partial_\mu\eta\right) = -\left[(\partial_\rho\eta)g_{\sigma\mu} - (\partial_\sigma\eta)g_{\rho\mu}\right]\delta\omega^{\rho\sigma} \tag{3.3.18}$$

$$\delta\left(\partial_k\phi^\alpha\right) = \left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^\alpha_{\ \ \beta}\partial_k\phi^\beta - \left[(\partial_p\phi^\alpha)g_{qk} - (\partial_q\phi^\alpha)g_{pk}\right]\right]\delta\omega^{pq} \tag{3.3.19}$$

Les matrices des transformations $\bar{\Psi}_{Ai}$ et $\bar{\Psi}_{\triangle i}$ sont respectivement nulles dans le cas des translations

$$\bar{\Psi}_{Ai} = 0 \tag{3.3.20}$$

$$\bar{\Psi}_{\triangle i} = 0 \tag{3.3.21}$$

Les quantités conservées correspondent respectivement dans le cas des translations, aux tenseurs énergie-impulsion externe et interne.

$$\theta^{\mu}_{A}(\eta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}(-\partial_A \eta) + \mathcal{L}\delta^{\mu}_{A} \tag{3.3.22}$$

$$\theta^{k}_{\triangle}(\phi) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_k \phi^\alpha)}(-\partial_\Delta \phi^\alpha) + \mathcal{L}\delta^{k}_{\triangle} \tag{3.3.23}$$

Tandis que toutes les quantités suivantes sont nulles

$$\Theta^{\eta}_{A}(U) = 0 \tag{3.3.24}$$

$$\Theta^{\eta}_{\triangle}(U) = 0 \tag{3.3.25}$$

$$[\Theta_A]^{[\eta,}_{\mu]}(U) = 0 \tag{3.3.26}$$

$$[\Theta_\triangle]^{[\eta,}_{\mu]}(U) = 0 \tag{3.3.27}$$

$$\Theta^{\alpha}_{A}(U) = 0 \tag{3.3.28}$$

$$\Theta^{\alpha}_{\triangle}(U) = 0 \tag{3.3.29}$$

$$[\Theta_A]^{[\alpha,}_{k]}(U) = 0 \tag{3.3.30}$$

$$[\Theta_\triangle]^{[\alpha,}_{k]}(U) = 0 \tag{3.3.31}$$

Dans le cas des transformations de Lorentz on a

$$\bar{\Psi}_{i\rho\sigma} = \left[[K_{\rho\sigma}]_i{}^{j} U_j - [(\partial_\rho \eta) g_{\sigma\mu} - (\partial_\sigma \eta) g_{\rho\mu}] \partial^{\mu]}_{[\eta,} U_i\right] \tag{3.3.32}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Psi}_{ipq} &= \left[\tilde{K}_{pq}\right]_i{}^{j} U_j - (\partial_\alpha U_i)\left[\tilde{J}_{pq}\right]^{\alpha}{}_{\beta}\phi^\beta \\ &\quad - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,} U_i\right)\left[\left[\tilde{J}_{pq}\right]^{\alpha}{}_{\beta}\partial_k \phi^\beta - [(\partial_p \phi^\alpha) g_{qk} - (\partial_q \phi^\alpha) g_{pk}]\right] \end{aligned} \tag{3.3.33}$$

où $\partial^{\mu]}_{[\eta,} = \dfrac{\partial}{\partial(\partial_\mu \eta)}$. Pour le champ externe $\eta(x)$, la quantité conservée est alors le tenseur moment orbital

$$\mathcal{M}^{\mu}_{\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \eta)}(\partial_\rho \eta x_\sigma - \partial_\sigma \eta x_\rho) - \mathcal{L}\left(\delta^{\mu}_{\rho} x_\sigma - \delta^{\mu}_{\sigma} x_\rho\right) \tag{3.3.34}$$

$$\mathcal{M}^{\mu}_{\rho\sigma} = T^{\mu}_{\rho} x_{\sigma} - T^{\mu}_{\sigma} x_{\rho} \tag{3.3.35}$$

et pour le champ interne la quantité conservée correspond au tenseur moment cinétique interne

$$\tilde{\mathcal{M}}^{k}_{pq} = T^{k}_{p}\xi_{q} - T^{k}_{q}\xi_{p} - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_k\phi^{\alpha}\right)}\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\phi^{\beta} \tag{3.3.36}$$

tandis que pour les composantes du courant lié à la fonctionnelle U_i on a:

$$\Theta^{\eta}_{\rho\sigma}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\eta}U_i\right)}\left[\left[K_{\rho\sigma}\right]_i^{\ j}U_j - \left[(\partial_{\rho}\eta)g_{\sigma\mu} - (\partial_{\sigma}\eta)g_{\rho\mu}\right]\partial^{\mu]}_{[\eta,}U_i\right] \tag{3.3.37}$$

$$\begin{aligned}\Theta^{\eta}_{pq}(U) \;=\; & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\eta}U_i\right)}\left\{\left[\tilde{K}_{pq}\right]_i^{\ j}U_j - \left(\partial_{\alpha}U_i\right)\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\phi^{\beta}\right.\\ & - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\partial_k\phi^{\beta}\right.\\ & \left.\left. -\left[(\partial_p\phi^{\alpha})g_{qk} - (\partial_q\phi^{\alpha})g_{pk}\right]\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.3.38}$$

$$\left[\Theta_{\rho\sigma}\right]^{[\eta,}_{\ \mu]}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[\eta,}U_i\right)}\left[\left[K_{\rho\sigma}\right]_i^{\ j}U_j - \left[(\partial_{\rho}\eta)g_{\sigma\mu} - (\partial_{\sigma}\eta)g_{\rho\mu}\right]\partial^{\mu]}_{[\eta,}U_i\right] \tag{3.3.39}$$

$$\begin{aligned}\left[\Theta_{pq}\right]^{[\eta,}_{\ \mu]}(U) \;=\; & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[\eta,}U_i\right)}\left\{\left[\tilde{K}_{pq}\right]_i^{\ j}U_j - \left(\partial_{\alpha}U_i\right)\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\phi^{\beta}\right.\\ & - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\partial_k\phi^{\beta}\right.\\ & \left.\left. -\left[(\partial_p\phi^{\alpha})g_{qk} - (\partial_q\phi^{\alpha})g_{pk}\right]\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.3.40}$$

$$\Theta^{\alpha}_{\rho\sigma}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}U_i\right)}\left[\left[K_{\rho\sigma}\right]_i^{\ j}U_j - \left[(\partial_{\rho}\eta)g_{\sigma\mu} - (\partial_{\sigma}\eta)g_{\rho\mu}\right]\partial^{\mu]}_{[\eta,}U_i\right] \tag{3.3.41}$$

$$\begin{aligned}\Theta^{\alpha}_{pq}(U) \;=\; & \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_{\alpha}U_i\right)}\left\{\left[\tilde{K}_{pq}\right]_i^{\ j}U_j - \left(\partial_{\alpha}U_i\right)\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\phi^{\beta}\right.\\ & - \left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}_{\quad\beta}\partial_k\phi^{\beta}\right.\\ & \left.\left. -\left[(\partial_p\phi^{\alpha})g_{qk} - (\partial_q\phi^{\alpha})g_{pk}\right]\right]\right\}\end{aligned} \tag{3.3.42}$$

$$\left[\Theta_{\rho\sigma}\right]^{[\alpha,}_{\ k]}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\left[\left[K_{\rho\sigma}\right]_i^{\ j}U_j - \left[(\partial_{\rho}\eta)g_{\sigma\mu} - (\partial_{\sigma}\eta)g_{\rho\mu}\right]\partial^{\mu]}_{[\eta,}U_i\right] \tag{3.3.43}$$

$$\begin{aligned}
[\Theta_{pq}]^{[\alpha,}_{k]}(U) &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)}\left\{\left[\tilde{K}_{pq}\right]_i{}^{j}U_j - (\partial_\alpha U_i)\,\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\phi^\beta\right. \\
&\quad -\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\partial_k\phi^\beta\right. \\
&\quad -[(\partial_p\phi^\alpha)g_{qk}-(\partial_q\phi^\alpha)g_{pk}]]\}
\end{aligned} \tag{3.3.44}$$

Si nous définissons

$$\begin{aligned}
R_{ipq} &= -\left\{(\partial_\alpha U_i)\,\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\phi^\beta\right. \\
&\quad \left.+\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\partial_k\phi^\beta\right\} \\
&= -\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\left[(\partial_\alpha U_i)\,\phi^\beta+\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\partial_k\phi^\beta\right] \\
&= -\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\Omega_i^{\beta}{}_{\alpha}
\end{aligned} \tag{3.3.45}$$

où

$$\Omega_i^{\beta}{}_{\alpha} = (\partial_\alpha U_i)\,\phi^\beta+\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U_i\right)\partial_k\phi^\beta \tag{3.3.46}$$

représente un couplage entre les dérivées internes du champ de la particule étendue et sa fonction d'onde propre interne et la dérivée de cette dernière. Si on considère que le champ U de particules étendues est scalaire, les relations précédentes se simplifient et deviennent:

$$\Theta^{\eta}_{\rho\sigma}(U) = -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\eta U\right)}[(\partial_\rho\eta)\partial_{[\eta,\sigma]}U-(\partial_\sigma\eta)\partial_{[\eta,\rho]}U] \tag{3.3.47}$$

où $\partial_{[\eta,\mu]} = \dfrac{\partial}{\partial\left(\partial^\mu\eta\right)}$

$$\begin{aligned}
\Theta^{\eta}_{pq}(U) &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\eta U\right)}\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\Omega^{\beta}{}_{\alpha}\right. \\
&\quad +\left[\left(\partial_{[\alpha,q]}U\right)\partial_p\phi^\alpha-\left(\partial_{[\alpha,p]}U\right)\partial_q\phi^\alpha\right]]
\end{aligned} \tag{3.3.48}$$

$$[\Theta_{\rho\sigma}]^{[\eta,}_{\mu]}(U) = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[\eta,}U\right)}[(\partial_\rho\eta)\partial_{[\eta,\sigma]}U-(\partial_\sigma\eta)\partial_{[\eta,\rho]}U] \tag{3.3.49}$$

$$\begin{aligned}
[\Theta_{pq}]^{[\eta,}_{\mu]}(U) &= -\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{\mu]}_{[\eta,}U\right)}\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q-\gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\Omega^{\beta}{}_{\alpha}\right. \\
&\quad +\left[\left(\partial_{[\alpha,q]}U\right)\partial_p\phi^\alpha-\left(\partial_{[\alpha,p]}U\right)\partial_q\phi^\alpha\right]]
\end{aligned} \tag{3.3.50}$$

$$\Theta^{\alpha}_{\rho\sigma}(U) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U\right)}[(\partial_\rho \eta)\partial_{[\eta,\sigma]}U - (\partial_\sigma \eta)\partial_{[\eta,\rho]}U] \tag{3.3.51}$$

$$\begin{aligned}\Theta^{\alpha}_{pq}(U) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial_\alpha U\right)}\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\Omega^{\beta}{}_{\alpha}\right.\\ &\quad \left. + \left[\left(\partial_{[\alpha,q]}U\right)\partial_p\phi^{\alpha} - \left(\partial_{[\alpha,p]}U\right)\partial_q\phi^{\alpha}\right]\right]\end{aligned} \tag{3.3.52}$$

$$[\Theta_{\rho\sigma}]^{[\alpha,}_{\ k]}(U) = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U\right)}[(\partial_\rho \eta)\partial_{[\eta,\sigma]}U - (\partial_\sigma \eta)\partial_{[\eta,\rho]}U] \tag{3.3.53}$$

$$\begin{aligned}[\Theta_{pq}]^{[\alpha,}_{\ k]}(U) &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial\left(\partial^{k]}_{[\alpha,}U\right)}\left[\frac{i}{2}\left(\frac{\gamma_p\gamma_q - \gamma_q\gamma_p}{2i}\right)^{\alpha}{}_{\beta}\Omega^{\beta}{}_{\alpha}\right.\\ &\quad \left. + \left[\left(\partial_{[\alpha,q]}U\right)\partial_p\phi^{\alpha} - \left(\partial_{[\alpha,p]}U\right)\partial_q\phi^{\alpha}\right]\right]\end{aligned} \tag{3.3.54}$$

3.4 Conclusion

Le but du présent chapitre est d'appliquer le théorème de Noether au champ associé à la particule étendue. Pour ce faire, nous avons dû revoir le principe variationnel afin de l'appliquer aux fonctionnelles dépendant d'un mode externe et d'un mode interne. Nous avons alors obtenu, dans le cas où les deux espaces-temps sont supposés indépendants; l'équivalent des équations d'Euler-Lagrange pour chacun des champs, U_i, η et ϕ, ainsi que les courants conservés associés. Nous avons repris nos résultats, en considérant une symétrie scalaire pour le mode externe, symétrie spinorielle pour le mode interne et en fin pour l'onde U une symétrie scalaire.

Conclusion

Dans le présent travail nous avons abordé la théorie classique des champs dans un modèle de la particule étendue qui a été précédement conçu au sein de notre laboratoire en combinant les idées de la théorie quantique fonctionnelle de J.L. Destouches et l'idée de l'extension stochastique. Pour la première, l'extension de la particule est intrinsèque, pour la seconde elle est due à l'imprécision des appareils de mesure. Afin d'adopter un point de vue plus réaliste, nous avons doté la particule d'une extension intrinsèque et stochastique. La fonction d'onde U_i de la particule étendue est ainsi une fonctionnelle de deux modes, l'un externe lié à l'extension stochastique, et l'autre interne décrivant les caractéristiques propres de la particule. La dynamique des deux modes externe et interne est liée respectivement aux fonctions $(\eta^a(x), \partial_\mu \eta^a)$ et $(\phi^\alpha(\xi), \partial_k \phi^\alpha)$ en supposant l'indépendence des espaces d'évolution de chaque mode. Pour cela nous avons consacré le premier chapitre à l'étude de la théorie classique des champs pour les particules ponctuelles. Nous avons rappelé les équations du mouvement d'Euler-Lagrange et les courants conservés associés aux différentes symétries pour chaque type de champs. Dans le second chapitre nous avons présenté la théorie de la double solution et la théorie quantique fonctionnelle. Afin de formuler une théorie des champs décrivant ces particules étendues, nous avons repris dans le troisième chapitre, la démonstration du théorème de Noether en supposant que le Lagrangien de notre système de particules étendues dépend du champ décrivant ces particules et de ses dérivées respectives. Nous avons obtenu les invariants dynamiques de notre système dans le cas d'une symétrie interne spinorielle. Le courant de Noether total est alors une somme de courants purement externe, purement interne et des combinaisons mixtes externes et mixtes internes. Nous avons repris les résultas précédents en supposant que les champs $\eta(x)$ et U possèdent une symétrie scalaire, dans le cas particulier des translations et des rotations de Lorentz. Cela nous a permis de déduire les courants conservés qui sont identifiés respectivement au tenseurs Energie-Impulsion externe et interne, au tenseur moment orbital externe, au tenseur moment cinétique total interne, et à un tenseur moment cinétique fonctionnel qui possède des composantes externes, des composantes internes et des composantes mixtes liées au couplage $\Omega^{\beta}{}_{\alpha}$. Remarquons que le tenseur énergie-impulsion de la fonctionnelle est nul ce qui nécessite une étude plus approfondie. Aussi, l'interprétation de la relation entre les composantes des tenseurs moment cinétique (orbital externe, total interne et fonctionnel) et la composante spinorielle interne reste une question ouverte à laquelle nous tenterons de répondre dans une prochaine étape de notre travail. Comme perspectives nous pouvons également reprendre notre étude dans le cas où les espaces externe et interne ne sont plus indépendants, ce qui nécessite l'introduction de modèles géométriques et l'étude de l'influence de la matière sur la géométrie.

ANNEXE A

Symétries Continues

.1 Généralités et définitions sur la théorie des groupes

Cette section se veut un survol rapide des concepts les plus simples de la théorie des groupes telle qu'utilisée en physique théorique. Elle est consacrée à l'un des concepts les plus importants en physique, et à fortiori en théorie des champs: les symétries. En géométrie, le terme symétrie prend un sens plus général qui peut se définir comme suit: c'est une transformation qui ne change ni la forme, ni les dimensions d'une figure. En physique, la définition d'une symétrie est semblable à sa consoeur géométrique mais s'applique aux lois de la nature et non plus aux figures géométriques. Ainsi une symétrie en physique est une transformation des variables du système - qui peuvent être des variables géométriques ou plus abstraites - qui ne change pas la formulation des lois physiques. Les symétries en physique théorique, jouent un rôle extrêmement important, non seulement facilitent-elles beaucoup la solution de nombreux problèmes, mais elles sont aussi à la base des théories des interactions fondamentales. Ces dernières, en physique des particules, obéissent à des lois de conservations qui sont associées aux symétries du Lagrangien. Les opérations de symétrie sont telles que la succession de deux opérations de symétrie, est encore une opération de symétrie. Cette propriété est à la base d'une structure mathématique appelée *groupe*. La théorie des groupes permettra, via la connaissance des éléments de symétrie, de dire un tas de choses sur les propriétés d'un système, c'est une théorie universelle qui ne dépend pas du système. Il semble bien que la théorie des groupes soit la méthode la plus générale et, au fond la plus simple de définir dans les cas les plus compliqués toutes les grandeurs physiques.

Un groupe est un ensemble d'éléments sur lequel une loi de composition interne (c'est-à-dire un produit) a été définie, et qui satisfait aux conditions suivantes[16]:

- Si g_1 et g_2 appartiennent au groupe G, alors le produit g_1g_2 appartient aussi à G.
- Il existe un élément neutre (ou identité), noté e, tel que $eg = ge = g$ pour tout élément g de G.
- Chaque élément g de G possède un inverse g^{-1} tel que $g^{-1}g = gg^{-1} = e$.
- Le produit est associatif: $(g_1g_2)g_3 = g_1(g_2g_3)$.

Un groupe est dit abélien ou commutatif si le produit est commutatif: $g_1g_2 = g_2g_1$. Dans le cas contraire, on le dit non-commutatif. Un groupe est dit fini (resp.infini) s'il contient un nombre fini (resp.infini) d'éléments. Un groupe est discret si ses éléments forment une suite discrète, en correspondance avec les entiers, mais pas nécessairement finie. Il est continu dans le cas contraire. Un groupe continu est un groupe de Lie s'il possède en même temps la structure d'une variété différentiable, c'est-à-dire, si on peut localement le mettre en correspondance avec R^d pour le paramétriser; d est alors la dimension du groupe de Lie. Un sous-groupe est un groupe qui est sous-ensemble d'un autre groupe, avec la même règle de multiplication. Toute transformation continue finie d'un groupe G peut se mettre sous la forme

$$g(\omega) = \exp\left[-i\omega^n I_n\right] \qquad n = 1, .., r \tag{0.1.1}$$

où ω^n et I_n (n est le nombre de paramètres) désignent respectivement les paramètres de la transformation et les générateurs du groupe. On a pour une transformation infinitésimale $\delta\omega$:

$$g(\delta\omega) = I - i\delta\omega^n I_n \tag{0.1.2}$$

L'action d'un élément $g(\omega)$ de groupe G sur un vecteur $x = (x^1, ..., x^N)$ dans un espace N-dimensionnel peut s'écrire comme:

$$x' = g(\omega)\, x = f(x, \omega) \tag{0.1.3}$$

avec $f(x,\omega)$ est une fonction vectorielle déterminée. Le générateur d'un groupe continu est déterminé par un élément de groupe au voisinage de l'identité. Considérons la transformation suivante:

$$x \longrightarrow x' = f(x,\omega) \tag{0.1.4}$$

Par développement en série de Taylor de la fonction $f(x,\omega)$ pour des valeurs petites de ω on trouve:

$$f(x,\omega) = f(x,0) + \omega\nabla_\omega f(x,\omega)\,|_{\omega=0} + o(\omega^2) \tag{0.1.5}$$

avec ∇_ω est l'opérateur gradient dans l'espace des paramètres r-dimensionnel et $x = f(x,0)$. Soit:

$$x' = x + dx \tag{0.1.6}$$

On obtient pour des valeurs petites de ω

$$dx = d\omega\nabla_\omega f(x,\omega)\,|_{\omega=0} = d\omega^n \left[\frac{\partial f(x,\omega)}{\partial\omega^n}\right]_{\omega=0} \tag{0.1.7}$$

En terme de composantes, on peut écrire:

$$dx^\mu = d\omega^n X_n^\mu \tag{0.1.8}$$

avec la définition:

$$X_n^\mu = \left[\frac{\partial f^\mu(x,\omega)}{\partial\omega^n}\right]_{\omega=0} \tag{0.1.9}$$

Considérons le changement d'une fonction scalaire arbitraire $F(x)$. Si une transformation infinitésimale est appliquée sur son argument x, la différentielle totale de $F(x)$ donne:

$$dF(x) = \partial_\mu F(x)dx^\mu = \partial_\mu F(x)X_n^\mu d\omega^n \tag{0.1.10}$$

Cette dernière équation s'écrit aussi comme:

$$dF(x) = I_n F(x)d\omega^n \tag{0.1.11}$$

avec la définition

$$I_n = X_n^\mu\partial_\mu \tag{0.1.12}$$

Les quantités I_n s'appellent les *générateurs* du groupe G, elles forment la base d'une *algèbre de commutateurs fermée* appelée *algèbre de Lie*, ayant les propriétés suivantes:

1. **Définition:**

   Un commutateur est défini par:

   $$[I_n, I_m] = I_n I_m - I_m I_n = C^l_{nm} I_l \qquad (0.1.13)$$

   où les C^l_{nm} sont les constantes de structure du groupe G.

2. **Antisymétrie:**

   Elle se traduit par:

   $$[I_n, I_m] = -[I_m, I_n] \qquad (0.1.14)$$

3. **Linéarité:**

   Cette propriété s'exprime par:

   $$[I_n, \alpha I_m + \beta I_l] = \alpha [I_n, I_m] + \beta [I_n, I_l] \qquad (0.1.15)$$

   pour des nombres α, β réels où complexes.

4. **L'identité de Jacobi:**

   Elle est donnée par:

   $$[[I_n, I_m], I_l] = [[I_l, I_n], I_m] = [[I_m, I_l], I_n] \qquad (0.1.16)$$

   Par conséquence directe des propriétés (0.1.14) et (0.1.16), les constantes de structures doivent elles-même être antisymétriques:

   $$C^l_{nm} = -C^l_{mn} \qquad (0.1.17)$$

   et doivent vérifier l'identité de Jacobi:

   $$C^k_{ij} C^l_{km} + C^k_{mi} C^l_{kj} + C^k_{jm} C^l_{ki} = 0 \qquad (0.1.18)$$

   Si le groupe G est un groupe abélien, les constantes de structure sont nulles.

.2 Le groupe de Poincaré et le groupe de Lorentz

L'invariance de Poincaré (ou de Lorentz) est l'un des principes les plus solidement ancrés dans les théories physiques. Elle reflète le principe de la relativité restreinte, associé à l'invariance de la vitesse de la lumière dans tous les référentiels en translation uniforme l'un par rapport à l'autre, ainsi parmi l'ensemble des groupe de symétries possibles, le groupe de Poincaré est le plus important. Les symétries, en particulier celle de Poincaré, sont le principe premier lors de la construction des Lagrangiens en théorie des champs.

Définition .2.1 *Le groupe de Poincaré $\mathscr{P}$ est l'ensemble des transformations des coordonnées de l'espace-temps plan de Minkowski (de métrique $\eta_{\mu\nu}$) qui laisse invariant l'élément d'intervalle entre deux points voisins de cet espace défini par*

$$ds^2 = \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^{\nu(1)} \tag{0.2.1}$$

Ces transformations sont la combinaison des rotations de Lorentz (groupe orthochrone de Lorentz $\mathbf{SO(1,3)}$) et les translations spatio-temporelles (groupe des translations $T^{\mathbf{4}}$), le groupe de Poincaré est représenté par un produit semi-direct $\mathscr{P}$=$T^{\mathbf{4}} \oslash \mathbf{SO(1,3)}$.

On dénotera les éléments de ce groupe par le couple $(a, \mathbf{\Lambda})$, où $\mathbf{\Lambda}$ est une matrice qui représente une rotation de Lorentz ($\mathbf{\Lambda} \in \mathbf{SO(1,3)}$) et a est un quadrivecteur colonne. Une transformation de Poincaré est une application définie par

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu + a^\mu \tag{0.2.2}$$

où

$$\eta_{\alpha\beta} = \Lambda^\mu{}_\alpha \Lambda^\nu{}_\beta \eta_{\mu\nu} \tag{0.2.3}$$

La transformation (0.2.2) peut être s'écrite sous une forme matricielle 5×5 comme

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x\prime \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a & \mathbf{\Lambda} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \tag{0.2.4}$$

(1) la convention de sommation d'Einstein:
$\eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = \sum\limits_{\mu,\nu=0}^{3} \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$

$\mathbf{0}$ est le quadrivecteur ligne nul. La matrice

$$\mathbf{B}\,(a,\boldsymbol{\Lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a & \boldsymbol{\Lambda} \end{pmatrix} \tag{0.2.5}$$

obéie à la loi de multiplication

$$\mathbf{B}_1\mathbf{B}_2 = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a_1 & \boldsymbol{\Lambda}_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a_2 & \boldsymbol{\Lambda}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a_1 + \boldsymbol{\Lambda}_1 a_2 & \boldsymbol{\Lambda}_1\boldsymbol{\Lambda}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{B}_{12} \tag{0.2.6}$$

L'inverse de la matrice $\mathbf{B}$ est donnée par

$$\mathbf{B}^{-1}\,(a,\boldsymbol{\Lambda}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ -\boldsymbol{\Lambda}^{-1}a & \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} \tag{0.2.7}$$

En terme des éléments du groupe de Poincaré, la loi de multiplication est donnée par

$$(a_2,\boldsymbol{\Lambda}_2) \circ (a_1,\boldsymbol{\Lambda}_1) = \begin{pmatrix} a_2 + \boldsymbol{\Lambda}_2 a_1 & ,\boldsymbol{\Lambda}_2\boldsymbol{\Lambda}_1 \end{pmatrix} \tag{0.2.8}$$

L'élément inverse de $(a,\boldsymbol{\Lambda})$ s'écrit d'après la loi du groupe comme

$$(a,\boldsymbol{\Lambda})^{-1} = \begin{pmatrix} -\boldsymbol{\Lambda}^{-1}a & ,\boldsymbol{\Lambda}^{-1} \end{pmatrix} \tag{0.2.9}$$

En utilisant l'équation (0.2.3) on montre que la matrice Λ n'a que 6 composantes indépendantes. En effet la caractérisation des $\boldsymbol{\Lambda}$ se réécrit matriciellement

$$\boldsymbol{\Lambda}^t\ \eta\ \boldsymbol{\Lambda} = \ \eta \quad , \quad \boldsymbol{\Lambda} \in \mathbf{L} = \mathbf{O(1,3)} \tag{0.2.10}$$

A cela, il faut ajouter les 4 composantes de a^μ. Le groupe de Poincaré est donc un groupe à 10 paramètres. Le groupe de Lorentz $\mathbf{L} = \mathbf{O(1,3)}$ est le sous-groupe du groupe de Poincaré pour la valeur particulière $a^\mu = 0$, (sans les translations dans l'espace-temps). C'est donc un groupe à seulement 6 paramètres. D'après la condition énoncée dans (0.2.3), on voit immédiatement que $\boldsymbol{\Lambda}$ satisfait aux deux contraintes suivantes:

$$(\det \boldsymbol{\Lambda})^2 = 1 \tag{0.2.11}$$

$$(\Lambda^0{}_0)^2 = 1 + \sum_{k=1}^{3} (\Lambda^k{}_0)^2 \tag{0.2.12}$$

En conséquence, le groupe de Lorentz contient quatre ensembles, notées $\mathbf{L}_{+\uparrow}$, $\mathbf{L}_{+\uparrow}$, $\mathbf{L}_{-\uparrow}$, $\mathbf{L}_{-\downarrow}$, selon que $\det \boldsymbol{\Lambda} = \pm 1$ et $\Lambda^0{}_0 \geq 1$ ou $\Lambda^0{}_0 \leq -1$. On a donc le tableau suivant

$\mathbf{L}_{+\uparrow}$	$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ et $\det \mathbf{\Lambda} = +1$
$\mathbf{L}_{+\downarrow}$	$\Lambda^0{}_0 \geq 1$ et $\det \mathbf{\Lambda} = -1$
$\mathbf{L}_{-\uparrow}$	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$ et $\det \mathbf{\Lambda} = +1$
$\mathbf{L}_{-\downarrow}$	$\Lambda^0{}_0 \leq -1$ et $\det \mathbf{\Lambda} = -1$

Seul le premier de ces ensembles forme un groupe (il est le seul qui contient l'identité), on l'appelle le groupe propre orthochrone de Lorentz. On peut à nouveau distinguer ici deux sous-groupes importants:

1. Celui des rotations pures, de la forme

$$\mathbf{\Lambda} = \left(\begin{array}{c|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & & & \\ 0 & & \mathcal{O} & \\ 0 & & & \end{array}\right) \quad \text{avec } \mathcal{O}^T\mathcal{O} = \mathcal{I} \tag{0.2.13}$$

   Où $\mathcal{O}$ est une matrice 3×3 de $\mathbf{SO(3)}$ qui représente une rotation tridimensionnelle dans l'espace euclidien E_3. Ces transformations n'affectent que les coordonnées spatiales.

2. Celui des boosts purs le long d'un axe fixé. Par exemple, le long de x :

$$\mathbf{\Lambda} = \begin{pmatrix} \gamma & -\gamma\beta & 0 & 0 \\ -\gamma\beta & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} \tag{0.2.14}$$

   Ce sont les transformations qui représentent un changement de référentiel entre deux systèmes en translation uniforme l'un par rapport à l'autre. On notera ici que l'ensemble des boosts purs le long d'axes arbitraires (il n'y a pas d'axe fixé a priori) ne forme pas un groupe, puisqu'en général, le produit de deux boosts est la combinaison d'un boost et d'une rotation, donc ces transformations mélangent les coordonnées spatiales et temporelle. Finalement, on note que les autres ensembles du groupe de Lorentz ne sont pas reliés de manière continue à l'identité. L'ensemble

$\mathbf{L}_{-\uparrow}$ contient $\mathcal{P}$ (l'inversion spatial), l'ensemble $\mathbf{L}_{+\downarrow}$ contient l'inversion temporelle $\mathcal{T}$ alors que la combinaison des deux $\mathcal{PT}$ appartient à $\mathbf{L}_{-\downarrow}$. Ce sont les symétries discrètes qui n'entrent pas dans le cadre de ce mémoire. On remarquera finalement que l'ensemble du groupe de Lorentz peut s'écrire:

$$L = \mathbf{L}_{+\uparrow} \cup \mathbf{L}_{+\downarrow} \cup \mathbf{L}_{-\uparrow} \cup \mathbf{L}_{-\downarrow} \tag{0.2.15}$$

Intéressons nous dans ce qui suit qu'au groupe propre orthochrone de Lorentz $\mathbf{L}_{+\uparrow} = \mathbf{SO(1,3)}$ qui est en fait le seul parmi les quatre sous-ensembles, à avoir une structure de groupe. D'après (0.1.1), une transformation fini de Lorentz peut s'écrire comme

$$\mathbf{\Lambda}(\omega) = \exp\left[-\frac{i}{2}\omega^{mn}M_{mn}\right] \tag{0.2.16}$$

$\omega^{mn} = -\omega^{nm}$ est le paramètre antisymétrique de rotation dans le plan (m, n). De ce fait les générateurs du groupe de Lorentz sont également antisymétriques

$$M_{mn} = -M_{nm} \tag{0.2.17}$$

Pour une transformation infinitésimal $\delta\omega$

$$\mathbf{\Lambda}(\delta\omega) = \mathbb{I} - \frac{i}{2}\delta\omega^{mn}M_{mn} \Longrightarrow \Lambda^{\mu}{}_{\nu} = \delta^{\mu}_{\nu} - \frac{i}{2}\delta\omega^{mn}\left[M_{mn}\right]^{\mu}{}_{\nu} \tag{0.2.18}$$

L'algèbre de Lie du groupe $\mathbf{SO(1,3)}$ peut évidemment s'écrire comme[17]

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}) \tag{0.2.19}$$

Les translations forment un sous-groupe invariant abélien du groupe de Poincaré, on les obtient en utilisant la forme matricielle (0.2.5), avec $\Lambda = \mathbb{I}$ ($\mathbb{I}$ est la matrice identité 4×4).

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0} \\ a & \mathbb{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \end{pmatrix} \tag{0.2.20}$$

On sait qu'en théorie quantique, les grandeurs physiques s'offrent à nous comme des opérateurs qui satisfont à certaines relations de commutation. Il est commode de représenter ces opérateurs comme des matrices qui appartiennent généralement à certain groupes. Les générateurs du groupe des translations peuvent être alors représentés par des matrices colonne[18]

$$P^0 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^1 = \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \quad P^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix} \tag{0.2.21}$$

ou sous forme d'opérateurs différentiels

$$P_\nu = i\frac{\partial}{\partial x^\nu} \tag{0.2.22}$$

Comme le groupe des translations est un groupe de Lie abélien, son algèbre de Lie est donnée par la relation de commutation

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{0.2.23}$$

L'algèbre de Lie du groupe de Poincaré est formée par les relations de commutations de chaque sous-groupe et les relations de commutations du mélange

$$[M_{\mu\nu}, M_{\rho\sigma}] = -i(\eta_{\mu\rho}M_{\nu\sigma} - \eta_{\mu\sigma}M_{\nu\rho} + \eta_{\nu\sigma}M_{\mu\rho} - \eta_{\nu\rho}M_{\mu\sigma}) \tag{0.2.24}$$

$$[P_\mu, M_{\rho\sigma}] = i\left(\eta_{\mu\rho}P_\sigma - \eta_{\mu\sigma}P_\rho\right) \tag{0.2.25}$$

$$[P_\mu, P_\nu] = 0 \tag{0.2.26}$$

Bibliographie

[1] M. Hachemane, *L'interaction Dans la Conception Géométro-Differentielle de la Particule Etendue (Thèse de Doctorat, USTHB, Alger, 2000).*

[2] E. Lifchitz et L. P. Pitayevski, *Théorie Quantique Relativiste (Mir, Moscou, 1973).*

[3] E. Prugovečki *Stochastic Quantum Mechanics (2nd Edition, Academic Press, New york, 1984).*

[4] E. Prugovečki, *Quantum Geometry (Kluwer, Dordrecht, 1992).*

[5] Hamici Bendimerad Amel Hiba, *L'Interaction dans la Conception Géométro-Différentielle de la Particule Etendue, Espace-Temps Plan de Minkowski (Thèse de Doctorat, USTHB, Alger, 2007).*

[6] L. de Broglie, *La Réinterprétation de la Mécanique Ondulatoire (Gauthier- Villars, Paris, 1971).*

[7] J. L. Destouches, *La Quantification en Théorie Fonctionnelle des Corpuscules (Gauthier- Villars, Paris, 1956).*

[8] N. Nelipa, *Particules Elémentaires (Mir, Moscou, 1981).*

[9] M. Kaku, *Quantum Field Theory, (Oxford University Press, USA, 1994).*

[10] N. N. Bogoliubov and D.V. Shirkov, *Introduction to the Theory of Quantized Fields (Wiley, 3d ed., 1980).*

[11] N. P. Konopleva and V. N. Popov, *Gauge Fields, (Harwood Academic Publishers, Chur-London-New York, 1981).*

[12] André Rot, *sur les équations de base de la mécanique ondulatoire non relativiste,* (*Gauthier- Villars, Paris, 1960)*

[13] Hachemane. M, *Conception Géométro-Differentielle de la Particule Etendue et sa Quantification par la Méthode des Représentations Induites-Symétrie de de Sitter (Thèse de Magistère, USTHB, Alger, 1994).*

[14] B. I. Spaski *Histoire de la Physique, (vol 2, Vishaïa Shkola, Moscou, 1977).*

[15] J. L. Destouches, *Corpuscules et Champs en Théorie Fonctionnelle, (Gauthier-Villars, Paris 1958).*

[16] Davide Senechal, *Mécanique Quantique, (Note de Cours, Université de Sherbroke 2000).*

[17] Wu-Ki Tung, *Group Theory in Physics (World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd, 1985).*

[18] Bouchachia. K, *Les Modes de Spin 1/2 dans le Modèle Géométro-Différentiel de la Particule Etendue (Thèse de Magistère, USTHB, Alger, 2005).*