UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE

FACULTE DE MATHEMATIQUES

THESE

Présentée par

RAHMANI Mourad

Pour l'obtention du grade de

MAGISTER

Spécialité : MATHEMATIQUES

Analyse Complexe

Géométrie du bord de la boule de la norme spectrale du système triple de Jordan hermitien positif de la série IV_n $(n > 2)$ et calcul de noyaux résolvants canoniques pour l'opérateur $\overline{\partial}$

Soutenu publiquement le 27 Septembre 2003 devant le jury :

M^r. D. TENIOU, Professeur, USTHB.	Président
M^r. M.S HACHAICHI, Maître de Conférences, USTHB.	Directeur de Thèse
M^r. K. BETINA, Professeur, USTHB.	Examinateur
M^r. A. KESSI, Professeur, USTHB.	Examinateur
M^r. A. AFFANE, Maître de Conférences, USTHB.	Examinateur
M^r. A. CHABOUR, Chargé de Cours, USTHB.	Examinateur

Table des matières

Remerciements

Je tiens ici à remercier très chaleureusement toutes les personnes que j'ai rencontrées au cours des dernières années et qui m'ont soutenu.

J'aimerais exprimer plus particulièrement ma gratitude à monsieur M.S. HACHAICHI mon directeur de thèse, pour m'avoir proposé un sujet aussi intéressant que varié et pour m'avoir consacré autant de temps et d'énergie tout au long de ces deux années.

Je remercie monsieur le professeur D. TENIOU , pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury.

Merci à K. BETINA, A. KESSI, A. AFFANE et A. CHABOUR de faire parti de mon jury.

Je remercie monsieur le professeur O. LOOS qui à bien voulu me donner des indications précieuses.

Notations

$\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$	Corps des réels, complexes
$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{C}^n$	Espace euclidien réel, complexe
$\overline{z}$	$(\overline{z}_1, \overline{z}_2, \cdots, \overline{z}_n)$ complexe conjugué de $z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n$
rg	le rang
Tr	La trace
$\oplus$	Somme directe
δ_{ij}	Symbole de Kronecker
$\bigsqcup$	Réunion disjointe
$\blacksquare$	Indique la fin d'une démonstration
$\bigwedge^r$	Espace vectoriel des $r-$formes multilinéaires alternées
$\wedge$	Produit extérieur
$\sum'$	Sommation sur les multi-indices
∂D	Bord de D
d	La différentielle
∂	La composante holomorphe de d.
$\overline{\partial}$	La composante anti-holomorphe de d.
$\widetilde{B}$	Noyau de Martinelli-Bochner
B_D, $B_{\partial D}$	p.54
B	Noyau de Bochner-Martinelli-Koppelman
$\mathfrak{B}_D, \mathfrak{B}_{\partial D}$	p.56
$\mathfrak{L}^w_D$, $\mathfrak{R}^w_{\partial D}$	p.62
Ω_q	p.63

Introduction

En théorie des fonctions de plusieurs variables complexes, la résolution de l'équation non homogène de Cauchy-Riemann $\overline{\partial} u = f$, f étant une $(0, q) - forme$, joue un rôle fondamental.

Les conditions nécessaires d'existence d'une solution de cette équation sont au nombre de deux.

1. $\overline{\partial} f = 0$ (au sens des distributions)

2. La propriété de pseudo-convexité du domaine considéré.

Plusieurs méthodes ont été mises en oeuvre pour résoudre cette équation avec les meilleures estimations possibles.

En 1970, *G.M.Henkin*, d'une part, *I.Lieb* et *H.Grauert*, d'autre part, firent l'observation fondamentale qu'une extension aux cas des formes différentielles de la formule de *Cauchy-Fantappié-Leray*, dite de représentation intégrale, pour les fonctions holomorphes permettait de construire une solution explicite de l'équation $\overline{\partial} u = f$.
Cette solution explicite de l'équation $\overline{\partial} u = f$ a marqué un tournant dans le développement des fonctions de plusieurs variables en permettant d'aborder à plusieurs variables les problèmes d'analyse fine qu'on ne savait traiter jusqu'alors qu'à une variable.

G.M.Henkin, *H.Grauert* et *I.Lieb* ont montré que lorsque $\Omega \subset \mathbb{C}^n$ est strictement pseudo-convexe et que f est une forme de type $(0, q)$ à coefficients bornés telle que $\overline{\partial} f = 0$, l'équation $\overline{\partial} u = f$ admet une solution bornée dans Ω.

En 1980, dans l'article [20] " *Approximation on pseudoconvex domains* " *Bedford* et *Fornaess* ont posé la question suivante :
Soit Ω un domaine borné pseudo-convexe à frontière $\mathcal{C}^\infty$ contenu dans $\mathbb{C}^n$.

Supposons qu'on ait $\overline{\Omega} = \bigcap\limits_j \Omega_j$ *avec* $\Omega_{j+1} \subset \Omega_j$ *et que pour tout* j, Ω_j *soit pseudo-convexe à frontière* $\mathcal{C}^\infty$. *Pour toute forme* f *de type* $(0,1)$ *avec* $\overline{\partial} f = 0$ *dans* Ω_j, *existe-t-il* u *tel que* $\overline{\partial} u = f$ *dans* Ω_j *et* $\|u\|_{\Omega_j} \leq C \|f\|_\Omega$
C *étant indépendant de* j *est* $\|.\|_\Omega$ *la norme dans* $L^\infty(\Omega)$.

La réponse à la question précédente est négative, puisque dans la même année *N.Sibony* [20] a construit un domaine pseudo-convexe régulier où l'équation $\overline{\partial} u = f$ n'admet pas de solution bornée pour f bornée.

Le problème des estimations L^∞ pour l'équation $\overline{\partial} u = f$ lorsque Ω est $pseudo-convexe$ à frontière réelle analytique demeure ouvert.

Un outil essentiel de l'analyse complexe est la construction d'opérateurs à noyaux résolvant pour résoudre l'équation de Cauchy-Riemann $\overline{\partial} u = f$ lorsque $\overline{\partial} f = 0$, avec des bonnes sections du fibré de Leray.

En 1987, *A.G.Sergeev* [21] a étudié le problème des estimations L^∞ dans le domaine pseudo-convexe (Tube du futur) définie par :

$$\tau^+ = \left\{ z \in \mathbb{C}^{n+1}; (Imz_0)^2 > (Imz_1)^2 + (Imz_2)^2 + \cdots + (Imz_n)^2, Imz_0 > 0 \right\}$$

où le bord $\partial\tau^+$ est la réunion de l'hypersurface lisse $\mathbb{M}$ définie par

$$\mathbb{M} = \left\{ v = \xi + i\eta \in \mathbb{C}^{n+1}, \eta^2 = 0, \eta_0 > 0 \right\}$$

et du

$$\mathbb{R}^{n+1} = \left\{ \xi + i\eta \in \mathbb{C}^{n+1}, \eta = 0 \right\}$$

A.G.Sergeev a construit un noyau de type $Cauchy - Fantappi\acute{e}$ sur τ^+ qui lui a permis d'obtenir une solution explicite de l'équation $\overline{\partial} u = f$ vérifiant l'estimation angulaire au point $x_0 + iy_0 \in \mathbb{M}$:

$$|u(z)| < \frac{C. \|f\|_{L^\infty}}{|y - y_0|^{\frac{n-1}{2}}}$$

Notons que *Polyakov* [22] en 1985 a obtenu des estimations similaires dans des domaines tubulaires de même nature.

En 1935 *Elie Cartan* [14] a donné une classification complète des domaines bornés symétriques de $\mathbb{C}^n$, et il a montré que tous les domaines bornés symétriques de $\mathbb{C}^n$ étaient isomorphes à des domaines cerclés.

A la fin des années soixante *M.Koecher* à mis en évidence une bijection entre les domaines de *Cartan* et un objet algébrique appelé Système Triple de Jordan Hermitien positif ; ainsi si $\mathbb{D}$ est un domaine symétrique borné cerclé irréductible alors $\mathbb{D}$ est la boule unité de la norme spectrale du système triple de Jordan hermitien positif associé, en sorte que $\mathbb{D}$ est convexe donc pseudo-convexe.

En 1977 dans l'article [5] *Algebraic characterization of symetric complex Banach manifolds W.Kaub* montre que le Système Triple de Jordan suffit à caractériser complètement $\mathbb{D}$.

Le tableau suivant résume la classification de E.Cartan

Type $I_{p,q}$	$E = M_{p,q}(\mathbb{C})$	$Q(x)y = xy^*x$
Type II_n	$E = A_n(C)$	$Q(x)y = -x\overline{y}x$
Type III_n	$E = S_n(C)$	$Q(x)y = x\overline{y}x$
Type IV_n	$E = \mathbb{C}^n$	$Q(x)y = q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y}$
Type V	$E = M_{1,2}(O_{\mathbb{C}})$	$Q(x)y = x.(y^*x)$
Type VI	$E = H_3(O_{\mathbb{C}})$	$Q(x)y = \frac{1}{2}(x \circ (x \circ \overline{y}) - x^2 \circ \overline{y})$

En 1998 [7] [8] *M.S.Hachaichi* à étudié le problème des estimations L^∞ dans la boule unité de la norme spectrale du système triple de Jordan hermitien positif du type $I_{p,q}\,(p = q = n)$ définie par :

$$\mathbb{D}_n = \{z \in M_n(\mathbb{C}) : I_n - zz^* \text{ définie positive}\}$$

Il a construit un noyau de type *Henkin-Ramirez* canonique qui lui a permis d'obtenir une solution explicite de l'équation $\overline{\partial}u = f$ où f est une $(0,1)-$*forme*, $\overline{\partial}-$*fermée* dans $\mathbb{D}_n$, qui vérifie l'estimation :

$$\|u\|_{L^\infty}\left[dist(z, \partial\mathbb{D})\right]^{2n^2-2} \leq C\,\|f\|_{L^\infty}$$

où C est une constante qui ne dépend que de n.

Nous nous proposons en premier lieu de définir la *boule de Lie*, comme le domaine symétrique borné, cerclé irréductible de la série IV_n $(n > 2)$ associé au système triple de Jordan hermitien positif $\mathbb{C}^n$ muni du triple produit

$$\{xyz\} = q(x,\overline{y})z + q(z,\overline{y})x - q(x,z)\overline{y}$$

avec

$$q(x,y) = 2\sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

et

$$q(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$$

et à déterminer son bord de manière explicite.

En deuxiéme lieu, on établira des formules de représentation intégrale selon une technique de $Henkin - Leiterer$ pour résoudre l'équation de Cauchy-Riemann dans la boule de Lie.

Notons que *G.Roos* dans [16] a défini la boule de Lie à l'aide du théorème de *Druzkowski* ; il a aussi établi des formules d'homotopie pour $\overline{\partial}$ de type canonique avec la technique des courants.

Notre travail est organisé de la manière suivante :

La première partie intitulée " *Géométrie de la boule de Lie* " est constituée de :

- *Chapitre* 1 : consacré à l'étude du Système Triple de Jordan Hermitien positif.
- *Chapitre* 2 : consacré à la construction de la boule de Lie réalisé comme la boule unité pour la norme spectrale du Système Triple de Jordan Hermitien positif de la série IV_n et l'étude de la géométrie de son bord.

La deuxième partie " *Représentation Intégrale* " est composée de :

- *Chapitre* 3 : consacré à la théorie de la géométrie différentielle et à quelques techniques de cette théorie.
- *Chapitres* 4 et 5 : consacrés aux formules de représentation intégrales des $(0,q)-formes$ différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ et à la résolution de l'équation de $Cauchy - Riemann$ dans la boule de Lie.

Première partie

Géométrie de la boule de Lie

Chapitre 1

Système triple de Jordan hermitien positif

H.Cartan [5] présentant les travaux de E.Cartan , s'exprimait ainsi :

<< On se place dans $\mathbb{C}^n$, ou plus généralement dans un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$, de dimension finie, et l'on considère un domaine borné D dans E (domaine = ouvert connexe).
Les automorphismes holomorphes $D \to D$ forment un groupe, noté $G(D)$, dont les propriétés générales ont été étudiées par H.Cartan (1931-1935). Sur $G(D)$ on considère la topologie de le convergence compacte.... : il existe sur $G(D)$ une structure de variété analytique réelle, compatible avec la topologie, qui fait de $G(D)$ un groupe de Lie réel...

L'algèbre de Lie $g(D)$ du groupe $G(D)$ se concrétise comme suit : c'est l'algèbre de Lie des champs de vecteurs holomorphes $D \to E$ qui proviennent des sous-groupes à un paramètre de $G(D)$....

Partant de ces résultats, et de sa familiarité avec les groupes de Lie et les espaces riemanniens symétriques, E.Cartan a réussi, en 1935 , à donner une classification complète des domaines bornés symétriques... Si D est symétrique, on montre que $G(D)$ opère transitivement dans D (autrement dit, D est " homogène "), et D est alors isomorphe à un domaine cerclé borné ; réciproquement, si un domaine borné D est cerclé et homogène, il est symétrique. D'autre part, un domaine borné homogène est un domaine d'holomorphie (c'est le domaine total d'existence d'une fonction holomorphe bornée), et comme un domaine d'holomorphie cerclé est étoilé (par rapport à l'origine 0), on conclut que tout domaine cerclé homogène est étoilé, donc contractile, et en fait homéomorphe à une boule ouverte de E.

E.Cartan a de plus montré que tout domaine borné symétrique est un produit de domaines bornés, symétriques irréductibles... , et surtout il a donné une classification complète des domaines bornés symétriques irréductibles, en exhibant pour chaque classe de domaines isomorphes un modèle (qui est cerclé). Il y a quatre grandes classes... Et il y a en outre deux domaines exceptionnels, de dimension 16 et 27 respectivement, dont les groupes d'automorphismes sont les groupes de Lie exceptionnels E_6 et E_7.
L'espace vectoriel complexifié $g(D) \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ s'identifie à un $\mathbb{C}$-espace vectoriel

de champs de vecteurs holomorphes...
Pour $\xi \in E$, posons

$$Y_\xi \ = \ \tfrac{1}{2}(X_\xi - iX_{i\xi}) \ \ , \ \ Z_\xi \ = \ \tfrac{1}{2}(X_\xi + iX_{i\xi})$$

ce sont deux éléments de l'algèbre de Lie complexifiée. On a

$$\mathsf{Y}_\xi(0) = \xi \ , \ \ \mathsf{Z}_\xi(0) = 0$$

et, pour tout $\lambda \in C$:

$$Y_{\lambda\xi} \ = \lambda Y_\xi \qquad , \qquad Z_{\lambda\xi} \ = \ \overline{\lambda} Z_\xi$$

(Y_ξ est une fonction C-linéaire de ξ, Z_ξ est une fonction C-antiliniéaire de ξ).
Les Y_ξ forment une algèbre de Lie abélienne : $[Y_\xi, Y_\eta] \ = 0$, et de même pour les Z_ξ. Le fait que les Y_ξ forment une algèbre de Lie abélienne a une conséquence importante : il existe dans un voisinage de 0 une carte locale dans laquelle

les champs Y_ξ sont constants : $Y_\xi(x) = \xi$ pour tout $x \ldots$, pour chaque $\xi \in E$, $Z(\xi, x, y)$ la fonction $\mathbb{C}$-bilinéaire symétrique de x et y telle que $Z(\xi, x, x) = Z_\xi(x)$; Z est ainsi une application $\mathbb{R}$-trilinéaire $E \times E \times E \to E$ qui est de plus $\mathbb{C}$-antilinéaire en la première variable ξ, et $\mathbb{C}$-linéaire en chacune des deux autres variables, avec en outre $Z(\xi, x, y) = Z(\xi, y, x)$.
Dans la carte locale en question, on a

$$\mathtt{X}_\xi(\mathtt{x}) = \xi + \mathtt{Z}(\xi, x, x)$$

D'après le " théorème de Poincaré ", il existe dans un voisinage V de 0, une f holomorphe $V \to E$ telle que $f(0) = 0$, $df = \omega$; on a $f'(0) = id_{\mathtt{E}}$, donc f définit un changement de carte au voisinage de $0 \ldots$

Il se produit alors un miracle : cette carte locale $f : V \to E$ se prolonge d'elle-même en une application holomorphe $D \to E$, qui est un isomorphisme de D sur un domaine cerclé borné D'. La démonstration de ce fait est très sophistiquée, mais le résultat est fort simple. Ainsi D est isomorphe à un domaine cerclé borné (fait que E.Cartan avait constaté à la fin de sa cla ssification, sans en donner d'explication) ; on pourra donc supposer désormais que D est un domaine cerclé borné...Par ailleurs D, comme domaine homogène, est nécessairement un domaine d'holomorphie....

La fonction trilinéaire $Z : E \times E \times E \to E$ attachée à D est très précieuse, et elle caractérise D >>

1.1 Introduction

Soit $\mathbb{D}$ un ouvert borné de $\mathbb{C}^n$. On dit que :

- $\mathbb{D}$ est *symétrique* : si pour tout $z \in \mathbb{D}$, il existe une transformation biholomorphe involutive $\psi \in Aut\,(\mathbb{D})$, dont z est un point fixe isolé.

- $\mathbb{D}$ est *cerclé* : s'il contient l'origine et s'il est stable par les transformations du type $z \to e^{it}z, t \in \mathbb{R}$.

Les domaines symétriques bornés, cerclés, irréductibles d'un espace vectoriel complexe de dimension finie, on été classifiés par E.Cartan en quatre domaines classiques
$[I_{p,q}\,(1 \leq p \leq q)\,; II_n\,(n \geq 5)\,; III_n\,(n \geq 2)\,; IV_n\,(n \geq 3)]$ et deux domaines exceptionnels
$[V$ et VI dans $\mathbb{C}^{16}$ et $\mathbb{C}^{27}$ respectivement$]$.

A la fin des années soixante *M.Koecher* à mis en évidence une bijection entre les domaines de Cartan et un objet algébrique appéle *Système Triple de Jordan hermitien positif.*

1.2 Définitions et Notations

Le corps de base est le corps $\mathbb{C}$.

Définition 1.2.1 *: Une forme hermitienne sur un espace vectoriel complexe V est une application $q : V \times V \to \mathbb{C}$ telle que :*

i. Linéarité en la première variable : $q(x + x', y) = q(x, y) + q(x', y)$
$q(\lambda x, y) = \lambda q(x, y)$ *pour tous* $x, x', y \in V$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$

ii. Antilinéarité en la seconde variable $q(x, y + y') = q(x, y) + q(x, y')$
$q(x, \lambda y) = \overline{\lambda} q(x, y)$ *pour tous* $x, y, y' \in V$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$

iii. $q(x, y) = \overline{q(y, x)}$ *pour tous* $x, y \in V$

Définition 1.2.2 *On dit qu'une forme hermitienne q sur V est :*

- *Non dégénerée : si pour tout* $x \in V$: $q(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ *pour tout* $y \in V$

– *Positive : si* $q(x, x) \geq 0$ *pour tout* $x \in V$.

– *Définie positive : si* $q(x, x) > 0$ *pour tout* $x \in V, x \neq 0$.

Définition 1.2.3 *Un produit scalaire hermitien sur un espace vectoriel complexe est une forme hermitienne définie positive sur cet espace.*

Définition 1.2.4 *Un espace hermitien est un espace vectoriel complexe de dimension fini muni d'un produit scalaire hermitien.*

1.3 Système Triple de Jordan Hermitien (STJH)

Un système triple de Jordan hermitien est un espace vectoriel V de dimension finie sur $\mathbb{C}$, muni d'un triple produit $\{\} : V \times V \times V \longrightarrow V$

$$(x, y, z) \longmapsto \{xyz\}$$

1. $\mathbb{C}$-bilinéaire et symétrique en (x, z)

2. $\mathbb{C}$-antilinéaire en y.

3. Vérifiant l'identité de Jordan :

$$\{xy\{uvz\}\} - \{uv\{xyz\}\} = \{\{xyu\}vz\} - \{u\{vxy\}z\} \tag{J}$$

On introduit les opérateurs $D(x, y) : V \longrightarrow V$ et $Q(x, y) : V \longrightarrow V$ pour $x, y \in V$ telle que

$$\{xyz\} = D(x, y)z = Q(x, z)y \tag{1.1}$$

avec

$$\begin{array}{ll} D : V \times V \longrightarrow End_{\mathbb{C}}V & \text{et } Q : V \times V \longrightarrow End_{\mathbb{C}}V \\ \quad (x, y) \longmapsto D(x, y) & \quad (x, z) \longmapsto Q(x, z) \end{array}$$

La forme Q est bilinéaire symétrique ; on note aussi par Q sa forme quadratique associée.

Pour tout x, y et z de V, on a les relations suivantes :

$$Q(x,x) = 2Q(x) \tag{1.2}$$

$$Q(x,z) = Q(x+z) - Q(x) - Q(z) \tag{1.3}$$

$$\{xyx\} = 2Q(x)y \tag{1.4}$$

$$D(Q(x)y,y) = D(x,y)^2 - 2Q(x)Q(y) \tag{1.5}$$

Proposition 1.3.1 *Soit V un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{C}$ muni d'un triple produit qui satisfait* 1. *et* 2. *de la définition, alors les identités $(J1)$ et $(J2)$ impliquent (J) avec*

$$\begin{array}{rcl} (J1) & : & D(x,y)Q(x) = Q(x)D(y,x) \\ (J2) & : & D(Q(x)y,y) = D(x,Q(y)x) \end{array}$$

Définition 1.3.1 *Un sous-système de V est un sous espace vectoriel J tel que*

$$\{JJJ\} \subset J$$

1.4 Algèbre de Jordan

Soit $(V, \{\})$ un système triple de Jordan hermitien, pour chaque $y \in V$, on note par $V^{(y)}$ l'espace vectoriel V sur $\mathbb{C}$ muni d'une application bilinéaire symétrique $\circ_y$ définie par :

$$x \circ_y z = \frac{1}{2}\{xyz\}$$

On note par xz le produit $x \circ_y z$ et par $x^{(p,y)}$ $(x, y \in V, p \in \mathbb{N}^*)$ la puissance $p-ième$ de x dans $V^{(y)}$.

Dans ce cas, on a

$$\begin{aligned} x^2 &= Q(x)y && (1.6) \\ x^{(p,y)} &= \left(\frac{1}{2}D(x,y)\right)^{p-1} x && (1.7) \end{aligned}$$

Définition 1.4.1 *Une algèbre de Jordan sur $\mathbb{C}$, est un espace vectoriel A sur $\mathbb{C}$ muni d'une application bilinéaire symétrique qui satisfait l'identité :*

$$x(x^2 z) = x^2(xz) \qquad (x, z \in V)$$

1.5 Polynôme générique minimal

Pour tout $y \in V$, on note par $\mathrm{rg}V^{(y)}$ le rang de l'algèbre de Jordan $V^{(y)}$ qui est le maximum de la dimension de sous espace $\langle x, x^{(2,y)}, \cdots\cdots, x^{(p,y)}, \cdots \rangle$ engendré par $x, x^{(2,y)}, \cdots\cdots, x^{(p,y)}, \cdots$

Définition 1.5.1 *Soit $(V, \{\})$ un système triple de Jordan hermitien, l'entier r*

$$r = rgV = max\left\{rgV^{(y)}, y \in V\right\}$$

est appelé le rang du système Triple de Jordan.

- Une paire (x, y) de V est dite régulière si $rgV^{(y)}$ est maximal c'est à dire $rgV^{(y)} = r$.
- Dire que x est régulier dans $V^{(y)}$ c'est dire que $x, x^{(2,y)}, \cdots\cdots, x^{(r,y)}$ sont linéairement indépendants.

Proposition 1.5.1 *Soit $(V, \{\})$ un système triple de Jordan hermitien de rang r alors :*

1. *L'ensemble des paires (x, y) régulières est un ouvert dense du sous ensemble $V \times \overline{V}$ où $\overline{V}$ est le conjugué complexe de V.*
2. *Il existe des polynômes : $m_j : V \times \overline{V} \to \mathbb{C}$ $(1 \leq j \leq r)$ homogènes de bidegré (j, j), tels que pour chaque paire (x, y) le polynôme minimal en x dans $V^{(y)}$ est égal à :*

$$m(T; x, y) = T^r + \cdots + (-1)^j m_j(x, y) T^{r-j} + \cdots + (-1)^r m_r(x, y) \tag{1.8}$$

et pour chaque $(x, y) \in V \times V$:

$$x^{(r+1,y)} + \cdots + (-1)^j m_j(x, y) x^{(r+1-j,y)} + \cdots + (-1)^r m_r(x, y) x = 0 \tag{1.9}$$

Définition 1.5.2 *Le polynôme*

$$m(T; x, y) = T^r - m_1(x, y)T^{r-1} + \cdots + (-1)^r m_r(x, y) \tag{1.10}$$

est appelé le polynôme générique minimal de V*.*

Le polynôme non homogène $N : V \times \overline{V} \to \mathbb{C}$ *définie par*

$$N(x, y) = m(1; x, y) \tag{1.11}$$

est appelé la norme générique du système triple de Jordan hermitien $(V, \{\})$

En particulier on a pour $(x, y) \in V \times V$ et $\beta(x, y) \in \bigwedge^r V$:

$$x \wedge x^{(2,y)} \wedge \cdots \wedge x^{(r-1,y)} \wedge x^{(r+1,y)} = m_1(x, y)\beta(x, y) \tag{1.12}$$

$$x^{(2,y)} \wedge \cdots \wedge x^{(r,y)} \wedge x^{(r+1,y)} = m_r(x, y)\beta(x, y) \tag{1.13}$$

avec

$$\beta(x, y) = x \wedge x^{(2,y)} \wedge \cdots \wedge x^{(r,y)} \tag{1.14}$$

1.6 Tripotents et Décomposition de Peirce

1.6.1 Les éléments tripotents d'un STJH

Soit $(V, \{\})$ un système triple de Jordan hermitien .On définit les puissances impaires $x^{(2p+1)}$ $(p \in \mathbb{N})$ de x par :

$$x^{(1)} = x, \cdots, x^{(2p+1)} = Q(x)x^{(2p-1)}$$

ce qui est équivalent à $x^{(2p+1)} = x^{(p,x)}$

Proposition 1.6.1 *Soit* x *un élément de* V *tel que :* $x^{(3)} = \lambda x(\lambda \in \mathbb{C})$; *alors l'opérateur* $D(x, x)$ *annule le polynôme* $T(T - \lambda)(T - 2\lambda)$

Définition 1.6.1 *Un élément* e *d'un* STJ *est dit tripotent s'il satisfait* $e^{(3)} = e$.

Si e est un tripotent de V, d'après la *proposition* 1.6.1 , $D(e,e)$ est diagonalisable et a pour valeurs propres $0,1$ et 2 au maximum.

Les espaces propres de $D(e,e)$

$$V_\alpha(e) = \{z \in V : D(e,e)z = \alpha z\} \, (\alpha \in \{0,1,2\})$$

forment la décomposition de Peirce de V relativement à e :

$$V = V_0(e) \oplus V_1(e) \oplus V_2(e) \tag{1.15}$$

Définition 1.6.2 *La hauteur d'un tripotent e est le rang du sous système $V_2(e)$.*

Définition 1.6.3 *On dit que deux tripotent e_1, e_2 sont fortement orthogonaux, s'il vérifient l'une des propriétés équivalentes suivantes :*

i. $D(e_1,e_2) = 0$

ii. $D(e_2,e_1) = 0$

iii. $\{e_1 e_2 e_2\} = 0$

iv. $\{e_1 e_1 e_2\} = 0$

1.6.2 Décomposition de Peirce

Proposition 1.6.2 *Soient $e_1, e_2, \cdots, e_p$ une famille de tripotents deux à deux orthogonaux . L'opérateur $D(e_j,e_j)$ $(1 \leq j \leq p)$ est diagonalisable et admet les valeurs propres $0, 1$ et 2. Les espaces propre de $D(e_j,e_j)$ $(1 \leq j \leq p)$ sont donné par :*

$$V_{\alpha\beta} = V_{\alpha\beta}(e_1, \cdots, e_p) = \left\{x \in V : D(e_j,e_j)x = \left(\delta^j_\alpha + \delta^j_\beta\right) x\right\} (1 \leq j \leq p)$$

Pour $1 \leq \alpha \leq \beta \leq p$

La décomposition

$$V = \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq p} V_{\alpha\beta}$$

est appelé la décomposition de Peirce relativement à $e_1, e_2, \cdots, e_p$.

Si $e = e_1 + e_2 + \cdots + e_p$ on trouve :

$$\begin{aligned} V_0(e) &= V_{00} = \bigcap_{1 \leq j \leq p} V_0(e_j) \\ V_1(e) &= \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq p} V_{0\alpha} \\ V_2(e) &= \bigoplus_{1 \leq \alpha \leq \beta \leq p} V_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Proposition 1.6.3 *Les espaces $V_{\alpha\beta}$ $(1 \leq \alpha \leq \beta \leq p)$ sont des sous-système de V.*

1.7 Positivité

Soit V un $STJH$, on considère sur V la forme $(x, y) \rightarrow (x \mid y) = TrD(x, y)$ où $TrD(x, y)$ la trace de l'opérateur linéaire $D(x, y) \in End_{\mathbb{C}}V$.

Définition 1.7.1 *Un système de Jordan est dit hermitien positif $(STJHP)$ si la forme hermitienne $(x \mid x) = TrD(x, x)$ est définie positive.*

Définition 1.7.2 *Soit V un $STJHP$.Un tripotent $e \neq 0$ est primitif si $V_2(e) = \mathbb{C}e$*

Définition 1.7.3 *Soit V un $STJHP$:un repère de V est une famille maximale de tripotents primitifs fortement orthogonaux deux à deux.*

Définition 1.7.4 *Soit V un $STJH$.Un idéal de V est un sous-espace vectoriel J tel que*

$$\{JVV\} \subset J \quad ; \quad \{VJV\} \subset J$$

On dit que V est simple s'il ne possède pas d'idéal propre.

Théorème 1.7.1 *Soient V un système triple de Jordan hermitien positif simple et $e = (e_1, e_2, \cdots, e_r)$ un repère de V.*

Soient $V_{jk}(e)$ $(0 \leq j \leq k \leq r)$ les espaces de Peirce, alors :

- $V_{00}(e) = 0$
- $V_{jj}(e) = \mathbb{C}e_j (1 \leq j \leq r)$

– *Tous les espaces* $V_{jk}(e)$ $(1 \leq j \leq k \leq r)$ *ont la même dimension* a.

– *Tous les espaces* $V_{0j}(e)$ $(1 \leq j \leq r)$ *ont la même dimension* b.

Définition 1.7.5 *Le genre* g *de* V *est définie par*

$$g = 2 + a(r-1) + b \tag{1.16}$$

avec $a = dimV_{jk}$ $(1 \leq j \leq k \leq r)$ *et* $b = dimV_{0j}$ $(1 \leq j \leq r)$.

Proposition 1.7.2 *Soit* V *un* $STJHP$ *simple. On a*

$$TrD(x,y) = g \times m_1(x,y) \tag{1.17}$$

1.8 Décomposition spectrale

Théorème 1.8.1 *Soit* V *un système triple de Jordan hermitien positif. Chaque élément* x *de* V *s'écrit de manière unique*

$$x = \lambda_1 e_1 + \lambda_2 e_2 + \cdots + \lambda_p e_p \tag{1.18}$$

où $\lambda_1 > \lambda_2 > \cdots > \lambda_p$ *des nombres réels et* $(e_1, e_2, \cdots, e_p)$ *une famille de tripotents fortement orthogonaux deux à deux.*

Définition 1.8.1 *L'écriture* (1.18) *est appelé la décomposition spectrale de* x.

La fonction $x \to |x| = \lambda_1$ *est une norme appelé la norme spectrale du systéme triple de Jordan hermitien positif* V.

La boule unité $\mathbb{D} = \{x \in V : |x| < 1\}$ est le domaine symétrique borné associé à V pour la norme spectrale $|\,.\,|$.

Selon O. Loos [14], on a

Théorème 1.8.2 *La boule unité pour la norme spectrale d'un $STJHP$ est donnée par :*

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in V : \frac{d^p}{dT^p} m\left(T, x, x\right) |_{T=1} > 0 \quad , 0 \leq p \leq r-1 \right\} \tag{1.19}$$

Théorème 1.8.3 *(Théorème de M.Koecher)*

- *La boule unité pour la norme spectrale d'un $STJHP$ est un domaine de Cartan, irréductible si et seulement si V est simple.*
- *Un domaine de Cartan est de maniére canonique la boule unité d'un système triple de Jordan hermitien positif.*

1.9 Description du bord de la boule unité pour la norme spectrale du STJHP

Soit M_k l'ensemble des tripotents de hauteur k $(k = 1, \cdots, r)$.

Définition 1.9.1 *Le bord de la boule unité pour la norme spectrale d'un STJHP $\mathbb{D}$ noté $\partial\mathbb{D}$ est définie par*

$$\partial\mathbb{D} = \bigsqcup_{e \in M_k} (e + D_e)$$

avec D_e la boule unité pour la norme spectrale du sous système $V_0(e)$.

Proposition 1.9.1 *On a :*

$$\partial\mathbb{D} = \overline{\partial_1\mathbb{D}} = \bigsqcup_{1 \leq k \leq r} \partial_k\mathbb{D} \tag{1.20}$$

Où $\partial_k\mathbb{D}$ est fibré au dessus de M_k par $\{e + x; e \in M_k \text{ et } x \in D_e\}$.

Théorème 1.9.2 *Soit la projection $\pi_k : \partial_k\mathbb{D} \longrightarrow M_k$ de fibre $\pi_k^{-1}(e) = e + D_e$ (c'est à dire pour chaque $x \in \partial_k\mathbb{D}$ on associe l'unique $e \in M_k$ tel que $x \in D_e$), alors*

1. *$\partial_k\mathbb{D}$ et M_k sont des sous variétés analytiques reélles de V.*
2. *π_k est un fibré analytique réel localement trivial.*
3. *La codimension de $\partial_k\mathbb{D}$ est la dimension complexe de $V_2(e)$, e étant un point quelconque de M_k.*

Chapitre 2

Géométrie de la boule de Lie

The group Γ of the domain $\Re_{IV}$ consists of transformations of the form[1]

$$w=\left\{\left[\left(\frac{1}{2}\left(zz'+1\right),\frac{i}{2}\left(zz'-1\right)\right)A'+zB'\right]\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}\right\}^{-1}\times$$
$$\times\left\{\left(\frac{1}{2}\left(zz'+1\right),\frac{i}{2}\left(zz'-1\right)\right)C'+zD'\right\}$$

Where A,B,C and D are real matrices[2] of dimensions $2\times 2, 2\times$ n, n $\times$ n, and n$\times$n, respectively, satisfying the relations

$$\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I_{(2)} & 0\\ 0 & -I_{(n)}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}'=\begin{pmatrix}I_{(2)} & 0\\ 0 & -I_{(n)}\end{pmatrix}$$

And

$$\det\begin{pmatrix}A & B\\ C & D\end{pmatrix}=+1$$

L.K.HUA

2.1 Description de la boule de Lie

Soient $\mathbb{C}^n$ l'espace vectoriel complexe de dimension n et q une forme bilinéaire, symétrique, non dégenerée avec

$$q(x,y)=2\langle x,y\rangle=2\sum_{i=1}^{n}x_iy_i \tag{2.1}$$

[1] $z=(z_1,z_2,\cdots,z_n)$, z' is a matrix of one column and n rows (the transpose of the matrix z)

[2] $I_{(m)}$ is the identity matrix of order m

et

$$q(x) = \langle x, x \rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \tag{2.2}$$

On munit $\mathbb{C}^n$ du triple produit

$$D(x,y)z = \{xyz\} = q(x,\overline{y})z + q(z,\overline{y})x - q(x,z)\overline{y} \tag{2.3}$$

compte tenu de la relation (1.4), on peut écrire :

$$Q(x)y = q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y} \tag{2.4}$$

Proposition 2.1.1 $\mathbb{C}^n$ *muni du produit* (2.3) *est un système triple de Jordan hermitien*

Preuve. Le triple produit $\{\}$ est $\mathbb{C}$-bilinéaire, symétrique en (x,z) et $\mathbb{C}$-antilinéaire en y.On vérifie $(J1)$ et $(J2)$

pour tous x, y, z de $\mathbb{C}^n$

$$\begin{aligned} D(x,y)Q(x)z &= q(x,\overline{y})Q(x)z + q(Q(x)z,\overline{y})x - q(x,Q(x)z)\overline{y} \\ &= q(x,\overline{y})\left[q(x,\overline{z})x - q(x)\overline{z}\right] + q(\left[q(x,\overline{z})x - q(x)\overline{z}\right], \overline{y})x - \\ &\quad - q(x, \left[q(x,\overline{z})x - q(x)\overline{z}\right])\overline{y} \\ &= 2q(x,\overline{y})q(x,\overline{z})x - q(x)q(\overline{z},\overline{y})x - q(x)q(x,\overline{z})\overline{y} - q(x)q(x,\overline{y})\overline{z} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q(x)D(y,x)z &= q(x, \overline{D(y,x)z})x - q(x)\overline{D(y,x)z} \\ &= q(x, [q(\overline{y},x)\overline{z} + q(\overline{z},x)\overline{y} - q(\overline{y},\overline{z})x])x - \\ &\quad -q(x)\left[q(\overline{y},x)\overline{z} + q(\overline{z},x)\overline{y} - q(\overline{y},\overline{z})x\right] \\ &= 2q(\overline{y},x)q(x,\overline{z})x - q(x)q(\overline{y},\overline{z})x - q(x)q(\overline{y},x)\overline{z} - q(x)q(\overline{z},x)\overline{y} \end{aligned}$$

il en résulte que $D(x,y)Q(x) = Q(x)D(y,x)$ d'où $(J1)$

$$\begin{aligned} D(Q(x)y,y)z &= q(Q(x)y,\overline{y})z + q(z,\overline{y})Q(x)y - q(Q(x)y,z)\overline{y} \\ &= q(\left[q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y}\right], \overline{y})z + q(z,\overline{y})\left[q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y}\right] - \\ &\quad -q(\left[q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y}\right], z)\overline{y} \\ &= q(x,\overline{y})^2 z - 2q(x)q(\overline{y})z + q(z,\overline{y})q(x,\overline{y})x - q(x,\overline{y})q(x,z)\overline{y} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D(x,Q(y)x)z &= q(x,\overline{Q(y)x})z + q(z,\overline{Q(y)x})x - q(x,z)\overline{Q(y)x} \\ &= q(x,[q(\overline{y},x)\overline{y} - q(\overline{y})x])z + q(z,[q(\overline{y},x)\overline{y} - q(\overline{y})x])x - \\ &\quad -q(x,z)\,[q(\overline{y},x)\overline{y} - q(\overline{y})x] \\ &= q(\overline{y},x)^2 - 2q(x)q(\overline{y})z + q(\overline{y},x)q(z,\overline{y})x - q(x,z)q(\overline{y},x)\overline{y} \end{aligned}$$

il en résulte aussi que $D(Q(x)y,y) = D(x,Q(y)x)$ d'où $(J2)$. ■

Dans la suite $\mathbb{C}^n$ est muni du triple produit (2.3)

Proposition 2.1.2 *Le rang r du système triple de Jordan défini ci dessus est égal à 2.*

Preuve. Il suffit de trouver un repère $e_1, \cdots, e_r$, c'est à dire une famille maximale de tripotents primitifs orthogonaux deux à deux.

Pour cela on va prendre

$$e_1 = \frac{1}{2}(c_1 + ic_2)$$

et

$$e_2 = \frac{1}{2}(c_1 - ic_2)$$

où c_1, c_2 la base canonique de $\mathbb{C}^n$.

Par la *Proposition* (1.6.2) on obtient la décomposition de Peirce

$$\mathbb{C}^n = V_{11} \oplus V_{22} \oplus V_{12}$$

avec

$$\begin{aligned} V_{11} &= \mathbb{C}e_1 \\ V_{22} &= \mathbb{C}e_2 \\ V_{12} &= \{(x_1, x_2, \cdots, x_n)\,; x_1 = x_2 = 0\} \end{aligned}$$

de plus e_1, e_2 forment un système orthonormal, donc $r = 2$. ■

Lemme 2.1.3 *On a*

1. $x^{(3,y)} = q(x,\overline{y})^2 x - q(x)q(x,\overline{y})\overline{y} - q(\overline{y})q(x)x$
2. *Pour* $\beta(x,y) \in \bigwedge^2 \mathbb{C}^n : \beta(x,y) = -q(x)x \wedge \overline{y}$
3. $x \wedge x^{(3,y)} = -q(x)q(x,\overline{y})x \wedge \overline{y}$

4. $x^{(2,y)} \wedge x^{(3,y)} = -q(x)q(\overline{y})x \wedge \overline{y}$

Preuve.

1. On a $x^{(3,y)} = \left(\frac{1}{2}D(x,y)\right)^2 x$, en utilisant la relation (1.5) on trouve

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}D(x,y)\right)^2 x &= \frac{1}{4}D(Q(x)y,y)x + \frac{1}{2}Q(x)Q(y)x \\ &= q(x,\overline{y})^2 x - q(x)q(x,\overline{y})\overline{y} - q(x)q(\overline{y})x\end{aligned}$$

2. D'après (1.14) on a

$$\begin{aligned}\beta(x,y) &= x \wedge x^{(2,y)} \\ &= x \wedge Q(x)y \\ &= x \wedge [q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y}] \\ &= -q(x)x \wedge \overline{y}\end{aligned}$$

3. Pour la relation 3 : on a

$$\begin{aligned}x \wedge x^{(3,y)} &= x \wedge \left[q(x,\overline{y})^2 x - q(x)q(x,\overline{y})\overline{y} - q(x)q(\overline{y})x\right] \\ &= -q(x)q(x,\overline{y})x \wedge \overline{y}\end{aligned}$$

4. Pour obtenir 4 : on a

$$\begin{aligned}x^{(2,y)} \wedge x^{(3,y)} &= [q(x,\overline{y})x - q(x)\overline{y}] \wedge \left[q(x,\overline{y})^2 x - q(x)q(x,\overline{y})\overline{y} - q(x)q(\overline{y})x\right] \\ &= -q(x)q(x,\overline{y})^2 x \wedge \overline{y} - q(x)q(x,\overline{y})\overline{y} \wedge x + q(x)q(\overline{y})\overline{y} \wedge x \\ &= -q(x)q(\overline{y})x \wedge \overline{y}\end{aligned}$$

■

Proposition 2.1.4 *Le polynôme générique minimal associé au $STJH$ est donné par :*

$$m(T;x,y) = T^2 - q(x,\overline{y})T + q(x)q(\overline{y}) \tag{2.5}$$

pour tous x, y de $\mathbb{C}^n$

Preuve. Comme le rang $r = 2$, alors le polynôme générique minimal est donné par *Définition*(1.5.2)

$$m(T;x,y) = T^2 - m_1(x,y)T + m_2(x,y)$$

Compte tenu du *Lemme* (2.1.3), et les relations (1.12) et (1.13) on trouve

$$m_1(x,y) = q(x,\overline{y}) \tag{2.6}$$

$$m_2(x,y) = q(x)q(\overline{y}) \tag{2.7}$$

d'où le polynôme générique minimal $m(T;x,y) = T^2 - q(x,\overline{y})T + q(x)q(\overline{y})$ ■

Proposition 2.1.5 $\mathbb{C}^n$ *muni du triple produit* (2.3) *est un Système Triple de Jordan Hermitien Positif avec*

$$(x \mid x) = TrD(x,x) = 2n\,\langle x,\overline{x}\rangle \tag{2.8}$$

Preuve. Il résulte de la formule (1.16) que $g = n$ puisque $dimV_{0j} = 0$ et $\dim V_{jk} = n-2$.. D'autre part $TrD(x,x) = nq(x,\overline{x})$ (*Proposition* (1.7.2)) avec $q(x,\overline{x}) = 2\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 > 0$, pour tout $x \in \mathbb{C}^n, x \neq 0$ ■

Théorème 2.1.6 *Le domaine symétrique, borné, cerclé, irréductible de la série classique* $IV_n(n > 2)$ *associé au système triple de Jordan hermitien positif muni du triple produit* $\{xyz\} = q(x,\overline{y})z + q(z,\overline{y})x - q(x,z)\overline{y}$ *est donné par :*

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{C}^n : |\langle x,x\rangle|^2 - 2\langle x,\overline{x}\rangle + 1 > 0\ ;\ \ \langle x,\overline{x}\rangle < 1 \right\} \tag{2.9}$$

La boule de Lie $\mathbb{D}$ *est la boule unité de la norme spectrale du système triple de Jordan hermitien positif.*

Preuve. Résulte directement du *Théorème* (1.8.2)). ■

Corollaire 2.1.1 *La boule de Lie est caractérisée par :*

$$\mathbb{D} = \left\{ x \in \mathbb{C}^n (n > 2) : 2\langle x,\overline{x}\rangle - |\langle x,x\rangle|^2 < 1, |\langle x,x\rangle| < 1 \right\} \tag{2.10}$$

Preuve. Du fait que $|\langle x,x\rangle| \leq \langle x,\overline{x}\rangle$ on obtient (2.10). ■

2.2 Sphère de Lie

Théorème 2.2.1 *Le bord $\partial\mathbb{D}$ de $\mathbb{D}$ est la réunion disjointe d'une variété lisse $\mathbb{R}$-analytique $\partial_1\mathbb{D}$ de dimension $2n-1$ et d'une variété $\partial_2\mathbb{D}$ de dimension réelle n ; on a donc*

$$\partial\mathbb{D} = \overline{\partial_1\mathbb{D}} = \partial_1\mathbb{D} \cup \partial_2\mathbb{D} \tag{2.11}$$

avec

$$\partial_1\mathbb{D} = \left\{x \in \mathbb{C}^n (n>2) : |\langle x, x\rangle|^2 - 2\langle x, \overline{x}\rangle + 1 = 0, \langle x, \overline{x}\rangle < 1\right\} \tag{2.12}$$

$$\partial_2\mathbb{D} = \{x \in \mathbb{C}^n (n>2) : |\langle x, x\rangle| = \langle x, \overline{x}\rangle = 1\} \tag{2.13}$$

Preuve. On note

$$\begin{aligned} f_1(x,\overline{x}) &= m(T,x,\overline{x}) \mid_{T=1} = |\langle x, x\rangle|^2 - 2\langle x, \overline{x}\rangle + 1 \\ f_2(x,\overline{x}) &= \frac{d}{dT} m(T,x,\overline{x}) \mid_{T=1} = 2 - 2\langle x, \overline{x}\rangle \end{aligned}$$

Si x est un point de la frontière de $\mathbb{D}$, on a en ce point

$$f_1(x,\overline{x}) = 0 \quad , \quad f_2(x,\overline{x}) \geq 0$$

où

$$f_1(x,\overline{x}) \geq 0 \quad , \quad f_2(x,\overline{x}) = 0$$

Dans le second cas, on a $f_2(x,\overline{x}) = 0$ implique $\langle x, \overline{x}\rangle = 1$ et la condition $f_1(x,\overline{x}) \geq 0$ implique que $1 \leq |\langle x, x\rangle|^2$ donc $|\langle x, x\rangle| = 1$ puisque $|\langle x, x\rangle| \leq \langle x, \overline{x}\rangle$ d'où $\partial_2\mathbb{D}$.

Soit Σ la sphère unité de $\mathbb{R}^n$ et $\triangle$ le dique ouvert de $\mathbb{C}$;l'application $h : \Sigma \times \partial\triangle \to \partial_2\mathbb{D}$, $h(x,\lambda) = \lambda x$ est un revêtement à deux feuillets de $\partial_2\mathbb{D}$, comme $\Sigma \times \partial\triangle$ est de dimension n, il en est de même de $\partial_2\mathbb{D}$.

$\partial_2\mathbb{D}$ n'est pas orientable lorsque la dimension n est impaire.

Si z est un point de la frontière de $\mathbb{D}$ qui n'appartient pas à $\partial_2\mathbb{D}$, on a donc

$$f_1(x,\overline{x}) = 0 \quad , \quad f_2(x,\overline{x}) > 0$$

d'autre part

$$\partial f_1 = \langle \overline{x}, \overline{x}\rangle \, \partial \langle x, x\rangle - 2\partial \langle x, \overline{x}\rangle \neq 0$$

puisque $\{x, \overline{x}\}$ est libre donc $\partial_1\mathbb{D}$ est une sous-variété lisse de codimension 1 c'est à dire : $\dim_{\mathbb{R}} \partial_1\mathbb{D} = 2n-1$ ■

Corollaire 2.2.1 $\partial_2\mathbb{D} = \{\xi = \lambda x; \lambda \in \mathbb{C}, |\lambda| = 1, x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1\}$ *où* $\|.\|$ *la norme eucludienne de* $\mathbb{C}^n$.

Preuve. Soit $\xi \in \partial_2\mathbb{D}$ alors $|\langle \xi, \xi \rangle| = \langle \xi, \overline{\xi} \rangle = 1$ donc il existe $\alpha \in \mathbb{C}$ tel que $\xi = \alpha\overline{\xi}$ avec $|\alpha| = 1$

On pose $\lambda^2 = \alpha$ alors $\xi = \lambda x$ avec $x \in \mathbb{C}^n, \|x\| = 1$ et $\langle \xi, \xi \rangle = \alpha$ ■

Corollaire 2.2.2 *Pour tout* $\xi \in \partial_1\mathbb{D}$, *on a*

$$|\langle \xi, \xi \rangle| < \langle \xi, \overline{\xi} \rangle$$

et

$$\xi \neq \overline{\xi}$$

Preuve. Soit $\xi \in \partial_1\mathbb{D}$ alors $|\langle \xi, \xi \rangle|^2 = 2\langle \xi, \overline{\xi} \rangle - 1$ et $1 - \langle \xi, \overline{\xi} \rangle > 0$

On a : $2\langle \xi, \overline{\xi} \rangle - 1 < \left(2\langle \xi, \overline{\xi} \rangle - 1\right) + \left(1 - \langle \xi, \overline{\xi} \rangle\right)^2$, comme $\left(2\langle \xi, \overline{\xi} \rangle - 1\right) + \left(1 - \langle \xi, \overline{\xi} \rangle\right)^2 = \langle \xi, \overline{\xi} \rangle^2$, en déduit que $|\langle \xi, \xi \rangle| < \langle \xi, \overline{\xi} \rangle$ ce qui implique que $\xi \neq 0$ d'où $\xi \neq \overline{\xi}$ ■

2.3 Etude Locale de la sphère de Lie

On notes par $\phi(z, \xi)$ la section de Leray définie sur $\mathbb{D} \times \partial_1\mathbb{D}$ par

$$\phi(z, \xi) = 2\langle \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle \xi - 2\overline{\xi} \tag{2.14}$$

et par $\psi(z, \xi)$ la section de Leray définie sur $\mathbb{D}\times\partial_2\mathbb{D}$ par

$$\psi(z, \xi) = \xi - z \tag{2.15}$$

Proposition 2.3.1 *La relation suivante est satisfaite pour chaque* $\xi \in \partial_1\mathbb{D}$ *et pour chaque* $z \in \mathbb{D}$

$$\langle \phi(z, \xi), \xi - z \rangle \neq 0 \tag{2.16}$$

Preuve. On a $\langle \phi(z, \xi), \xi - z \rangle = \sum\limits_{i=1}^{n} \left(2\langle \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle \xi_j - 2\overline{\xi}_j\right)(\xi_j - z_j)$

d'après le *corollaire* (2.2.2) ξet $\overline{\xi}$ sont non colinéaires et de plus $\left\{\xi, \overline{\xi}\right\}$ forment une partie libre donc $2\langle \overline{\xi}, \overline{\xi} \rangle \xi_j - 2\overline{\xi}_j \neq 0$ ■

Proposition 2.3.2 *Pour chaque $\xi \in \partial_2\mathbb{D}$ et pour chaque $z \in \mathbb{D}$, on a*

$$\langle \psi(z,\xi), \xi - z \rangle \neq 0 \tag{2.17}$$

Preuve. Soit $\xi \in \partial_2\mathbb{D}$ d'après le *Corollaire*(2.2.1), $\xi = \lambda x$ avec $\lambda \in \partial\triangle$ et $x \in \Sigma$, on a $\langle \psi(z,\xi) - \xi - z \rangle = \lambda^2 \left\langle x - \overline{\lambda}z, x - \overline{\lambda}z \right\rangle$ et comme $\overline{\lambda}z \in \mathbb{D}$ alors il suffit de montrer que $\langle \xi - z, \xi - z \rangle \neq 0$ si $\xi = x$..

Soit $y \in \Sigma$ tel que $\langle x, y \rangle = 0$ et $z = z_1 x + z_2 y$, la condition $z \in \mathbb{D}$ s'écrit $|z_1 + iz_2| < 1, |z_1 - iz_2| < 1$; d'autre part, ona

$$\begin{aligned} \langle x - z, x - z \rangle &= 1 - 2\langle x, z \rangle + \langle z, z \rangle = 1 - 2z_1 + z_1^2 + z_2^2 = \\ &= (1 - z_1 - iz_2)(1 - z_1 + iz_2) \end{aligned}$$

et le dernier membre est non nul. ■

Deuxième partie

Représentation Intégrale

Chapitre 3

Variétés différentielles

3.1 Préliminaires et Notations

On munit $\mathbb{C}^n$ des coordonnées z_j , $j = 1, .., n$; on pose

$$\begin{aligned} x_j &= \Re e(z_j) \\ x_{j+n} &= \Im m(z_j) \end{aligned}$$

alors

$$z_j = x_j + ix_{j+n} \qquad (x_j, x_{j+n}) \in \mathbb{R}^2.$$

L'isomorphisme de $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\iota \ : \ \mathbb{C}^n \ \to \ \mathbb{R}^{2n}$

$$(z_1, \cdots z_n) \mapsto (x_1, x_{n+1}, \cdots , x_{2n})$$

permet d'identifier $\mathbb{C}^n$ à $\mathbb{R}^{2n}$.

On suppose $\mathbb{R}$ muni de la topologie habituelle définie par la valeur absolue, $\mathbb{R}^{2n}$ muni de la topologie produit et $\mathbb{C}^n$ de la topologie transportée par ι^{-1}.

Soit D un ouvert de $\mathbb{C}^n$ considéré aussi comme un ouvert de $\mathbb{R}^{2n}$. Les fonctions coordonnées complexes z_j et leurs imaginaires conjugées $\overline{z}_j$ ont pour différentielles dans $\mathbb{R}^{2n}$.

$$dz_j = dx_j + idx_{j+n} \tag{3.1}$$

$$d\overline{z}_j = dx_j - idx_{j+n} \tag{3.2}$$

alors

$$dx_j = \frac{1}{2}(dz_j + d\overline{z}_j) \tag{3.3}$$
$$dx_{j+n} = \frac{i}{2}(d\overline{z}_j - dz_j) \tag{3.4}$$

Soit $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{D})$ une fonction continûment différentiable dans D, on a

$$\begin{aligned} df &= \sum_{j=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial x_j}dx_j + \frac{\partial f}{\partial x_{j+n}}dx_{j+n}) \\ &= \sum_{k=1}^{n}(\frac{\partial f}{\partial z_k}dz_k + \frac{\partial f}{\partial \overline{z_k}}d\overline{z}_k) \end{aligned} \tag{3.5}$$

avec

$$\frac{\partial}{\partial z_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} + \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{k+n}}) \tag{3.6}$$
$$\frac{\partial}{\partial \overline{z}_k} = \frac{1}{2}(\frac{\partial}{\partial x_k} - \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x_{k+n}}) \tag{3.7}$$

On note

$$\partial f = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial z_j}dz_j \tag{3.8}$$
$$\overline{\partial} f = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}_j}d\overline{z}_j \tag{3.9}$$

alors

$$df = \partial f + \overline{\partial} f \text{ dans } D. \tag{3.10}$$

Les formes différentielles ∂f, $\overline{\partial} f$ sont respectivement de type $(1, 0)$ et $(0, 1)$.

Remarques

1. $\frac{\partial}{\partial z_k}, \frac{\partial}{\partial \overline{z}_k}$ signifient seulement les opérateurs différentiels, ce ne sont pas, des dérivations partielles par rapport aux variables $z_k, \overline{z}_k$.

2. Une fonction $f \in \mathcal{C}^1(\mathrm{D})$ est dite *holomorphe* dans D si $\overline{\partial} f = 0$ dans D. La condition

$$\overline{\partial} f = 0 \tag{3.11}$$

est dite condition de $Cauchy - Riemann$, elle équivaut à : $df = \partial f$.

3.2 Pseudo-Convexité

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$ à fontière régulière. Plus précisement, on suppose que

$$D = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : r_j(z) < 0 \quad \text{pour } j = 1..n\}$$

où $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ est une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ définie dans un voisinage de $\overline{D}$ telle que $dr_1(z) \wedge dr_2(z) \wedge \cdots \wedge dr_n(z)$ ne s'annule pas sur

$$\partial D = \{z = (z_1, z_2, \cdots, z_n) \in \mathbb{C}^n : r_j(z) = 0 \quad \text{pour } j = 1..n\}$$

Une telle fonction $r = (r_1, r_2, \cdots, r_n)$ est appelée fonction définissante pour le domaine D.

La forme hermitienne

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 \rho}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\xi_j\overline{\xi}_k \qquad z \in D \ , \ \xi \in \mathbb{C}^n$$

est appelée Hessien complexe de ρ en z . La matrice correspondante est appelée matrice hessienne complexe.

Définition 3.2.1 *Un domaine D dans $\subset \mathbb{C}^n$ est dit pseudo-convexe , si la fonction*

$$z \longmapsto -ln \ dist(z, \partial D)$$

est plurisousharmonique.

Lorsque la frontière de D est régulière, la pseudo-convexité s'exprime en termes de la fonction définissante.

Proposition 3.2.1 *On suppose D défini à l'aide de la fonction définissante r, alors D est pseudo-convexe si et seulement si*

$$\sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 r}{\partial z_j \partial \overline{z}_k}(z)\xi_j\overline{\xi}_k \ \geq 0 \qquad z \in D \ , \ \xi \in \mathbb{C}^n$$

avec ξ satisfaisant à la condition suivante : $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_j}(z)\xi_j = 0$.

Définition 3.2.2 *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$ définie à l'aide de la fonction définissante r, le sous-espace vectoriel de dimension $n-1$ formé de $\xi \in C^n$ tels que*

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial r}{\partial z_j}(z)\xi_j = 0.$$

est appelé espace tangent complexe à ∂D en z.

La restriction du Hessien complexe à l'espace tangent complexe est appelée forme de Levi.

Remarque

Lorsque D est régulièr, la pseudo-convexité de D est équivalente à la positivité de la forme de Levi.

Définition 3.2.3 *Soit D un domaine de $\mathbb{C}^n$*

1. *Lorsque la forme de Levi est définie positive, on dit que le domaine D est strictement pseudo-convexe.*

2. *Lorsque D est pseudo-convexe sans être strictement pseudo-convexe, on dit que D est faiblement pseudo-convexe.*

3.3 Variétés différentiabls

3.3.1 Variétés topologiques

Une *variété topologique* est tout d'abord un espace topologique, mais on suppose, de surcroît, que chacun de ses points possède un voisinage homéomorphe à un ouvert de $\mathbb{R}^n$. On dit alors que cet espace est une variété topologique de dimension n.

Exemple

Une variété topologique de dimension 2 est un espace qui , localement, c'est à dire si on ne regarde pas trop loin, ressemble à un petit morceau de feuille de papier qu'on aurait pu découper avec des ciseaux après en avoir tracé le pourtour au crayon.

La structure globale de cet espace peut être evidemment assez différente puisque la variété elle-même est obtenue par recollement de tous ces petits morceaux de papier .

Ainsi, un pneu de bicyclette éventuellement dégonflé, plié et "froissé" fournit un exemple d'objet qu'on peut modéliser à l'aide d'une variété topologique de dimension 2 : un *tore*

3.3.2 Cartes

Sur un espace topologique $\mathbb{X}$, une *carte* h de $\mathbb{X}$ est un homéomorphisme d'un ouvert U de $\mathbb{X}$ sur un ouvert de $\mathbb{R}^n$ pour un certain entier naturel n .

L'ouvert U est le domaine de la carte h ; on dit que c'est un ouvert de carte. On désigne la carte h par le couple (h, U).

3.3.3 Cartes compatibles

$i)$ Deux cartes h et h' de $\mathbb{X}$, de même domaine U sont dites *compatibles* si les deux homéomorphismes réciproques :

$$\begin{aligned} h' \circ h^{-1} &\;:\; h(U) \to h'(U) \\ h \circ h'^{-1} &\;:\; h'(U) \to h(U) \end{aligned}$$

sont de classe $\mathcal{C}^k$, au sens des applications d'un ouvert d'un espace numérique dans un autre .

$ii)$ Deux cartes (h, U) et (h', U') sont dites compatibles si

ou bien $U \cap U' = \emptyset$

ou bien si $h\,|_{U \cap U'}$ et $h'\,|_{U \cap U'}$ sont compatibles au sens de $i)$

3.3.4 Atlas

Un *atlas* de $\mathbb{X}$, de classe $\mathcal{C}^k$, est un ensemble de cartes deux à deux compatibles, dont les domaines constituent un recouvrement ouvert de $\mathbb{X}$.

Deux atlas de classe $\mathcal{C}^k$ sont dits compatibles si leur réunion est un atlas de classe $\mathcal{C}^k$.Dans l'ensemble des atlas de $\mathbb{X}$, la relation "$\mathfrak{U}$ et $\mathfrak{B}$ sont compatibles" est une relation d'équivalence.

3.3.5 Variété différentielle

On appelle *variété différentielle* de classe $\mathcal{C}^k$ un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts, muni d'une classe d'équivalence d'atlas de classe $\mathcal{C}^k$.

3.3.6 Applications différentiables

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^k$. Une application $f : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ est dite $p - fois$ continûment différentiable ou de classe $\mathcal{C}^p$ $(p \leq k)$ si elle est continue et vérifie la condition suivante :

Pour tout couple de cartes (h, U) , (l, V) de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$ respectivement tel que $f(U) \subset V$, l'application $l \circ (f \mid_U) \circ h^{-1} : h(U) \to l(V)$ est de classe $\mathcal{C}^p$ en tant qu'application d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$ dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

3.3.7 Coordonnées locales

Soit (h, U) une carte d'une variété différentielle $\mathbb{X}$ de classe $\mathcal{C}^k$, alors h est une application $\mathcal{C}^k : U \to h(U) \subset \mathbb{R}^n$, $x \mapsto h(x) = (x_1(x), \cdots x_n(x))$

où $x_j : U \to \mathbb{R} \quad (j = 1, \cdots, n)$

$x \mapsto x_j(x)$

est une fonction $\mathcal{C}^k$ sur U ; les fonctions $x_1, \cdots, x_n$ sont appelées les *coordonnées locales* de $\mathbb{X}$ sur U définies par la carte (h, U).

3.4 Espace cotangent ; Fibré cotangent

3.4.1 Espace cotangent en un point

Une carte (h, U) de $\mathbb{X}$ telle que $x \in U$ est dite une carte de $\mathbb{X}$ en x. En un point x d'une variété $\mathbb{X}$ de classe $\mathcal{C}^q$ $(q \geq 1)$; on considère l'ensemble $\mathcal{F}_x$ des fonctions $\mathcal{C}^1$ définies au voisinage de x dans $\mathbb{X}$, *i.e.* pour toute $f \in \mathcal{F}_x$ il existe un voisinage V de x dans $\mathbb{X}$ tel que f soit $\mathcal{C}^1$ sur V à valeurs dans $\mathbb{C}$.

Soient $f, g \in \mathcal{F}_x$, alors il existe un voisinage ouvert V de x contenu dans U sur lequel f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$. On considère la relation d'équivalence $\mathfrak{R}$ sur $\mathcal{F}_x$ définie comme suit :

$$f \ \mathfrak{R} \ g \text{ signifie } D(f \circ h^{-1}) = D(g \circ h^{-1}) \in \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$$

où $D(f \circ h^{-1})$ désigne la dérivée de la fonction $f \circ h^{-1} : h^{-1}(V) \to \mathbb{C}$ au point $h(x)$.

L'ensemble $\mathcal{F}_x$ est un $\mathbb{C}-$*espace vectoriel* pour l'addition des fonctions et la multiplication par les complexes et la relation $\mathfrak{R}$ est compatible avec la structure vectorielle de $\mathcal{F}_x$, donc $\mathcal{F}_x/\mathfrak{R}$ est un $\mathbb{C}-$ *espace vectoriel*.

Considérons l'application $\theta^{*}{}_{hx} : \mathcal{F}_x/\mathfrak{R} \to \mathfrak{L}(\mathbb{R}^n, \mathbb{C}) \simeq \mathbb{C}^n$

$$\textit{classe de } f \mapsto D(f \circ h^{-1})$$

C'est un isomorphisme d'espaces vectoriels . On désigne l'espace vectoriel $\mathcal{F}_x/\mathfrak{R}$ par $T_x^*(\mathbb{X})$ et on l'appelle *l'espace cotangent complexe à* $\mathbb{X}$ en x.

Dans la carte h, on désigne par $dx_1, \cdots, dx_n$, les éléments de $T_x^*(\mathbb{X})$ de représentants $x_1, \cdots, x_n$; ils constituent une base de $T_x^*(\mathbb{X})$; les éléments de $T_x^*(\mathbb{X})$ sont appelés les *différentielles* en x.

On note par f la fonction $f \circ h^{-1}$ définie sur $h(U) \subset \mathbb{R}^n$; alors f admet des dérivées partielles $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}$ et d'après l'expression de $D(f \circ h^{-1})$ la différentielle $d_x f$ de f en x est

$$d_x f = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x) dx_j \tag{3.12}$$

Les $\dfrac{\partial f}{\partial x_j}(x)$ sont des nombres ; les éléments de $T_x^*(\mathbb{X})$ s'écrivent donc, dans le système de coordonnées locales $(x_1, \cdots, x_n)$ sous la forme

$$\omega = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j dx_j \tag{3.13}$$

avec $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

3.4.2 Fibré cotangent

On pose

$$T^*(\mathbb{X}) = \bigsqcup_{x \in \mathbb{X}} T_x^*(\mathbb{X})$$

et on note par $\pi_{\mathbb{X}}^* : T^*(\mathbb{X}) \to \mathbb{X}$ l'application surjective qui envoie $d_x f \in T_x^*(\mathbb{X})$ sur $x \in \mathbb{X}$

Théorème 3.4.1 *$\mathbb{X}$ étant une variété de classe $\mathcal{C}^q$ $(q \geq 1)$, il existe sur $T^*(X)$ une structure de variété différentielle de classe $\mathcal{C}^{q-1}$ telle que $\pi_{\mathbb{X}}^*$ soit $\mathcal{C}^{q-1}$ et que, pour toute carte (h, U) de X, l'application $\Theta_h : U \times \mathbb{C}^n \to \pi_{\mathbb{X}}^{*-1}(U), (x, u) \mapsto d_x(u \circ h)$ soit un difféomorphisme $\mathcal{C}^{q-1}$.*

D'après le théorème, il existe un voisinage ouvert U de x dans $\mathbb{X}$ et un difféomorphisme Θ_h tel que $\pi^*_{\mathbb{X}}(\Theta(y,u)) = y$ pour tout $y \in U$ et tout $u \in \mathbb{C}^n$ alors, le triple $(E, X, \pi^*_{\mathbb{X}})$ avec $E = T^*(X)$ est appelé une fibration localement triviale de base $\mathbb{X}$, de fibre type $\mathbb{C}^n$ d'espace total E ; pour tout $x \in E, E_x = \pi^{-1}_{\mathbb{X}}$ est appelé la fibre de E en x.

Une section s de $(E, X, \pi^*_{\mathbb{X}})$ est une application continue $s : X \to E$ telle que $\pi \circ s = id_X$, autrement dit, l'image de x par s appartient à la fibre E_x de E en x

Il en résulte : pour tout $x \in X$, il existe un voisinage U de x dans $\mathbb{X}$ un espace vectoriel et un difféomorphisme Θ_h tel que, pour tout $y \in U$ $\Theta_h(h, .)$ $C^n \to \pi^{*-1}_{\mathbb{X}}(y) = y$ est un isomorphisme de $\mathbb{C}$-espace vectoriel alros $(E, X, \pi^*_{\mathbb{X}})$ est un (espace) fibré vectoriel complexe. On dit que $T^*(\mathbb{X})$ est le fibré cotangent complexe à la variété différentielle $\mathbb{X}$.

3.4.3 Forme différentielle de degré 1

Une section ω de $T^*(\mathbb{X})$ au-dessus d'un ouvert de $\mathbb{X}$ est appelé une *forme différentielle* de degré 1, ou une *1-forme* différentielle.

U étant un ouvert de $\mathbb{X}$ sur lequel $(x_1, \cdots, x_n)$ sont les coordonnées locales, $x \mapsto dx_j(x)$ est une *1-forme* différentielle sur U notée dx_j.

Pour tout point $x \in U$, $(dx_j)(x)$; $j = 1, .., n$ est une base de $T^*_x(\mathbb{X})$, on dit que $dx_1, \cdots, dx_n$ forment un repère de $T^*(\mathbb{X})$ au-dessus de U et qu'elles sont associées à la carte h ;

Toute *1-forme* différentielle ω sur U s'ecrit d'une seule façon

$$x \mapsto \omega(x) = \sum_{j=1}^{n} a_j(x) dx_j \tag{3.14}$$

où les a_j sont des fonctions scalaires à valeurs complexes sur U.

Si la section ω est une application différentiable de classe $\mathcal{C}^p$, on dit que la *1-forme* différentielle ω est de classe $\mathcal{C}^p$.

3.5 Formes différentielle sur une variété

Soit $\bigwedge^{\bullet} T^*(\mathbb{X})$ le fibré vectoriel sur $\mathbb{X}$ construit à partir de l'algèbre extérieure [12] .

Une *p-forme* différentielle, ou forme différentielle de degré p est une section du fibré $\bigwedge^p T^*(\mathbb{X})$ au dessus de l'ouvert U d'une carte sur lequel les fonctions coordonnées sont $(x_1, ..., x_n)$; une telle *p-forme* ω s'écrit, compte tenu de l'anticomutativité de $\wedge$

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{3.15}$$

où les $a_{i_1 \cdots i_p}$ sont des fonctions sur U

ω est dite de classe $\mathcal{C}^r$ si c'est une section $\mathcal{C}^r$ de $\bigwedge^p T^*(\mathbb{X})$, alors les fonctions $a_{i_1 \cdots i_p}$ sont $\mathcal{C}^r$ sur U.

Si α et β sont des formes différentielles de degrés p, q respectivement, sur l'ouvert U de $\mathbb{X}$, alors on a :

$$\alpha \wedge \beta = (-1)^{pq} \beta \wedge \alpha \tag{3.16}$$

3.6 Différentielle extérieure

Soit ω une *p-forme* différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ définie sur un ouvert U d'une variété différentielle $\mathbb{X}$ de coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ on a :

$$\omega = \sum_{i_1 < \cdots < i_p} a_{i_1 \cdots i_p} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \tag{3.17}$$

où $a_{i_1 \cdots i_p}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur U

On pose

$$\begin{aligned} d\omega &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} da_{i_1 \cdots i_p} \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \\ &= \sum_{i_1 < \cdots < i_p} \sum_j \frac{\partial a_{i_1 \cdots i_p}}{\partial x_j} dx_j \wedge dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_p} \end{aligned} \tag{3.18}$$

C'est une $(\ p+1) - forme$ différentielle dite *différentielle extérieure* de ω sur U.

On a les propriétés suivantes :

1. α et β étant deux formes différentielles sur un ouvert U alors :

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta$$

2. Si α est de degrè p :

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta \tag{3.19}$$

3. Si α est de $\mathcal{C}^2$ sur U :

$$dd\alpha = d^2\alpha = 0 \tag{3.20}$$

Définition 3.6.1 *On dit qu'une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$, ω est $d-fermée$ (ou simplement fermée) si $d\omega = 0$; en particulier si α est de classe $\mathcal{C}^2$ et si $\omega = d\alpha$ alors* $d\omega = 0$

3.7 Variétés orientables

Théorème 3.7.1 *Sur une variété différentielle $\mathbb{X}$, de classe $\mathcal{C}^1$, de dimension n, les deux propriétés suivantes sont équivalentes :*

(a) Il existe, sur $\mathbb{X}$ une *n-forme* différentielle continue ω, a coefficients réels, telle que, pour tout $x \in \mathbb{X}$, on ait $\omega(x) \neq 0$ ($forme$ *volume*)

(b) Il existe un atlas $\mathfrak{U}$, dont les ouverts de cartes sont connexes, tel que pour deux cartes $h, h' \in \mathfrak{U}$ restreintes au même ouvert U de x, on ait : $J(h' \circ h^{-1})(y) > 0$ pour tout $x \in U, y = h(x)$; $J(h' \circ h^{-1})$ désignant le jacobien de l'application $h' \circ h^{-1} : h(U) \to h'(U)$.

Si l'une des conditions $(a), (b)$ est satisfaite, on dit que la variété différentielle $\mathbb{X}$ est *orientable*.

Remarque

Sur $\mathbb{C}^n$ une orientation est définie de la maniére suivante : si $z_1, \cdots, z_n$ sont les coordonnées complexes dans $\mathbb{C}^n$ et $x_1, \cdots, x_{2n}$ les coordonnées réelles telles que $z_j = x_j + ix_{j+n}$ $(j = 1, \cdots, n)$ alors la forme différentielle $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$ est positive.

3.8 Intégrale d'une forme différentielle de degré maximum sur une variété orientée

On va considérer des formes différentielles à coefficients localement intégrables.

Soit $\omega \in L^1_{loc}$ une *n-forme* différentielle sur la variété orientée $\mathbb{X}$, de dimension n et soit $\mathfrak{U}$ un atlas de l'orientation.

On appelle *support* d'une forme différentielle ω le complémentaire du plus grand ouvert sur lequel ω est nulle ; c'est un fermé noté *supp* ω.

On suppose *supp* ω compact. Dans le cas où *supp* ω est contenu dans le domaine U d'une carte h de $\mathfrak{U}$ de coordonnées locales $(x_1, \cdots, , x_n)$, on a :

$$\omega = a dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

par définition, l'intégrale de ω sur $\mathbb{X}$ est :

$$\int_{\mathbb{X}} \omega = \int_{U} \omega = \int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} a(h^{-1}(y)) dx_1 \cdots dx_n$$

où $x \in U$ et $y = h(x)$

Le dernier membre est une intégrale multiple sur $\mathbb{R}^n$ oriénté par

$$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Pour une forme ω à support compact quelconque sur $\mathbb{X}$, on considère une partion $\mathcal{C}^\infty$ de l'unité $(\varphi_i)_{i \in I}$ subordonnée à un recouvrement ouvert (U_i) par des ouverts de cartes de $\mathfrak{U}$ et on pose :

$$\int_{\mathbb{X}} \omega = \sum_{i \in I} \int_{\mathbb{X}} \varphi_i \omega$$

La somme du second membre est fini, puisque *supp* ω est compact ; elle est indépendante de la partition de l'unité choisie.

L'expression $\int\limits_{\mathbb{X}} \omega$ définie ci-dessus et par définition, l'intégrale de la *n-forme* différentielle ω sur la variété orientée $\mathbb{X}$..

Si l'on change l'orientation de $\mathbb{X}$, l'intégrale est multipliée par -1

Proposition 3.8.1 *Soient $\mathbb{X}$ une variété différentielle orienté de dimension n et ω une $(n-1) - forme$ différentielle de U sur $\mathbb{X}$ à support compact alors :*

$$\int_{\mathbb{X}} d\omega = 0$$

3.9 Image réciproque par une application différentiable

Soit $\mu : \mathbb{X} \to \mathbb{Y}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ de variétés différentielles. Soient (h, U), (k, V) deux cartes de $\mathbb{X}$ et de $\mathbb{Y}$ respectivement, de coordonnées respectives $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$, $(y_1, y_2, \cdots, y_n)$ telle que $\mu(U) \subset V$

Alors, pour toute forme différentielle ω sur un ouvert W de $\mathbb{Y}$ dont la restriction à $V \cap W$ s'écrit

$$\sum_{j_1 \cdots j_p} b_{j_1 \cdots j_p}(y) dy_{j_1} \wedge dy_{j_2} \wedge \cdots \wedge dy_{j_p}$$

On pose

$$\mu^* \omega = b_{j_1 \cdots j_p} \circ \mu\,(x)\, d\,(y_{j_1} \circ \mu)\,(x) \wedge d\,(y_{j_2} \circ \mu)\,(x) \wedge \cdots \wedge d\,\big(y_{j_p} \circ \mu\big)\,(x)$$

$\mu^* \omega$ est appelée l'image réciproque de ω par μ.

3.10 Intégration partielle des formes différentielles

Soient $\mathbb{X}$ et $\mathbb{Y}$ deux variétés différentielles de classe $\mathcal{C}^1$ de dimension n, m respectivement et ω une *p-forme* différentielle définie sur le produit $\mathbb{X} \times \mathbb{Y}$.

Si $y_1, \cdots, y_m$ sont les coordonnées locales de l'ouvert U dans $\mathbb{Y}$ alors la forme différentielle ω s'ecrit de façon unique :

$$\omega(x, y) = \sum_{|I| \leq p}^{/} a_{i_1 \cdots i_r}(x, y) \wedge dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r} \tag{3.21}$$

avec $a_{i_1 \cdots i_r}$ une forme différentielle de degré $p - |I|$ sur $\mathbb{X}$, qui dépend de $y \in \mathbb{Y}$.

La sommation étant effectuée pour les $r - uples$ $I = (i_1, \cdots, i_r)$ vérifiant $1 \leq i_1 < \cdots < i_r \leq m, |I| = r$ la longueure de I.

Si la variété $\mathbb{X}$ est orientée et si l'intégrale $\int\limits_{\mathbb{X}} a_{i_1 \cdots i_p}(x, y)$ existe pour chaque $y \in \mathbb{Y}$ et pour chaque $r - uples$ $(i_1, \cdots i_r)$ d'entiers, avec $r = p - n$ on définit

$$\int\limits_{\mathbb{X}} \omega(x, y) = \sum_{|I| = p-n} (\int\limits_{\mathbb{X}} a_{i_1 \cdots i_r}(x, y)) dy_{i_1} \wedge \cdots \wedge dy_{i_r} \tag{3.22}$$

3.11 Valeur absolue d'une forme différentielle

Soit $\mathbb{X}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ de dimension n, orientée.

Si ω une forme différentielle de degré maximal sur $\mathbb{X}$ qui s'écrit

$$\omega = adx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

dans un système de coordonnés locales $x_1, \cdots, x_n$ de $\mathbb{X}$ sur U, on définit la *valeur absolue* de ω sur U par :

$$|\omega| = |a|\, dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

Si ω est intégrable, alors

$$\left| \int_{\mathbb{X}} \omega \right| \leq \int_{\mathbb{X}} |\omega|$$

si ω' une autre forme différentielle de degré maximal sur $\mathbb{X}$ qui s'écrit

$$\omega' = a' dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

et si $|a'| \leq |a|$ en tant que fonctions à valeurs complexes définiés sur U on conviendra alors que

$$|\omega'| \leq |\omega|$$

3.12 Variétés analytiques complexes

3.12.1 Variété analytique complexe

Soit $\mathbb{X}$ un espace topologique séparé, réunion dénombrable de compacts, muni d'un atlas $\mathfrak{U}$ dont les cartes (h, U) satisfont aux conditions suivantes :

(i) $h(U)$ est un ouvert de $\mathbb{C}^n$ identifié à $\mathbb{R}^{2n}$ par $\imath$;

(ii) Si $(h, U), (h', U') \in \mathfrak{U}$ et si $U \cap U' \neq \emptyset$, l'homémorphisme $h' \circ h^{-1}$est une application biholomorphe de l'ouvert $h(U \cap U')$ de $\mathbb{C}^n$ sur l'ouvert $h'(U \cap U')$ de $\mathbb{C}^n$.

$\mathfrak{U}$ est appelé un atlas analytique complexe, et h une carte holomorphe .

$\mathbb{X}$ muni d'une classe d'équivalence d'atlas analytique complexe est appelé une *variété analytique complexe* de dimension complexe n . $\mathbb{X}$ est aussi une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^k$ lorsque on la munit de la classe d'équivalence d'atlas de classe $\mathcal{C}^k$ contenant $\mathfrak{U}$.

3.12.2 Formes différentielles sur une variété analytique complexe

Une forme différentielle f de type (p,q) ou une $(p,q)-forme$ sur une variété analytique complexe est une expression qui s'écrit de façon unique dans une carte :

$$f = \sum_{|I|=p}^{/} \sum_{|J|=q}^{/} f_{IJ}\, dz^I \wedge d\overline{z}^J \tag{3.23}$$

La sommation étant effectuée pour les $p-uples$ $I = (i_1, \cdots, i_p)$ et les $q-uples$ $J = (j_1, \cdots, j_q)$ vérifiant les relations $1 \leq i_1 < \cdots < i_p \leq n$ et $1 \leq j_1 < \cdots < j_q \leq n$ et où

$$dz^I = dz_{i_1} \wedge \cdots \wedge dz_{i_p} \tag{3.24}$$

$$d\overline{z}^J = d\overline{z}_{j_1} \wedge \cdots \wedge d\overline{z}_{j_q}. \tag{3.25}$$

et f_{IJ} étant des fonctions définie sur la variété.

Si f est une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ de type (p,q) alors la différentielle éxterieure

$$\begin{aligned} df &= \sum_{|I|,|J|}' df_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \\ &= \partial f + \overline{\partial} f \end{aligned} \tag{3.26}$$

avec

$$\partial f = \sum_{|I|,|J|}' \partial f_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \tag{3.27}$$

de type $(p+1,q)$

et

$$\overline{\partial} f = \sum_{|I|,|J|}' \overline{\partial} f_{IJ} \wedge dz^I \wedge d\overline{z}^J \tag{3.28}$$

de type $(p,q+1)$.

Si f est de classe $\mathcal{C}^2$ alors l'identité $ddf = 0$ entraîne que les trois composantes de :

$$ddf = \partial\partial f + (\partial\overline{\partial} + \overline{\partial}\partial) f + \overline{\partial}\overline{\partial} f$$

de types respectifs $(p+2,q), (p+1,q+1)$ et $(p,q+2)$ sont nulles.

3.13 Pull-back

Soit $h = (h_1, \cdots, h_m) : D \to \mathbb{C}^m$ une fonction holomorphe et soit $G \subseteq \mathbb{C}^n$tel que $h(D) \subseteq G$.

Si f une forme différentielle sur G alors h^*f est l'image réciproque de f par rapport à h , elle est définie par :

$$h^*f = \sum_{\substack{1\le i_1<\cdots<i_p\le m \\ 1\le j_1<\cdots<j_q\le m}} (f_{IJ} \circ h) dh_{i_1} \wedge \cdots \wedge dh_{i_p} \wedge d\overline{h}_{j_1} \wedge \cdots \wedge dh_{j_q}$$

Proposition 3.13.1 *Pour chaque forme différentielle f continue dans G, on a (au sens des distributions)*

$$\partial h^* f = h^* \partial f \qquad et \qquad \overline{\partial} h^* f = h^* \overline{\partial} f$$

Chapitre 4

Formules de Martinelli-Bochner et Koppelman

Les représentations intégrales des formes différentielles jouent un rôle important en analyse complexe .

En particulier, la valeur d'une fonction complexe dans un domaine Ω peut s'exprimer uniquement à l'aide des valeurs prises par la fonction f sur la frontière $\partial\Omega$ ou même sur une partie de celle-ci.

L'exemple le plus simple est celui de la formule de *Cauchy*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\partial\Omega_1 \times \cdots \times \partial\Omega_n} \frac{f(\xi) d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n}{(\xi_1 - z_1) \cdots (\xi_n - z_n)}$$

qui a une frontière régulière $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

Plusieurs autres représentations intégrales généralisent celle de *Cauchy* dans des domaines plus compliqués ; dont :

La représentation de $Martinelli - Bochner - Koppelman$ pour certains domaines bornés.

4.1 Les formes différentielles $\omega(u)$ et $\omega'(v)$

Soit $\mathbb{X}$ une variété différentielle de classe $\mathcal{C}^1$ et soient

$u = (u_1, \cdots, u_n) : X \to \mathbb{C}^n$ et $v = (v_1, \cdots, v_n) : X \to \mathbb{C}^n$

deux cartes de classe $\mathcal{C}^1$.

On pose

$$\omega(u) = du_1 \wedge \cdots \wedge du_n = \bigwedge_{1 \le k \le n} du_k \tag{4.1}$$

$$\omega_x(u) = d_x u_1 \wedge \cdots \wedge d_x u_n = \bigwedge_{1 \le k \le n} d_x u_k \tag{4.2}$$

$$\omega'(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \bigwedge_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} dv_k \tag{4.3}$$

$$\omega'_x(v) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \bigwedge_{\substack{1 \le k \le n \\ k \ne j}} d_x v_k \tag{4.4}$$

$$\langle v, u \rangle = \sum_{j=1}^{n} v_j u_j \tag{4.5}$$

Lemme 4.1.1 *On a :*

$$d\omega'(v) = n\omega(v) \tag{4.6}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} d\Big(\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} v_j \bigwedge_{k \ne j} dv_k\Big) &= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} dv_j \bigwedge_{k \ne j} dv_k \\ &= \sum_{j=1}^{n} \bigwedge_{1 \le k \le n} dv_k. \\ &= n\omega(v). \end{aligned}$$

d'où (4.6) ■

Lemme 4.1.2 *La relation suivante est verifiée*

$$d\langle v,u\rangle^n \wedge \omega'(v)\wedge\omega(u) = n.\langle v,u\rangle^n \omega(v)\wedge\omega(u). \tag{4.7}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} d\langle v,u\rangle^n \wedge \omega'(v)\wedge\omega(u) &= n\langle v,u\rangle^{n-1}\sum_{j=1}^{n} d(v_j u_j)\omega'(v)\wedge\omega(u) \\ &= n\langle v,u\rangle^{n-1}\sum_{j=1}^{n}(v_j du_j + u_j dv_j)\omega'(v)\wedge\omega(u) \end{aligned}$$

comme $\omega(u)$ contient le facteur $du_1\wedge\cdots\wedge du_n$ alors

$$\sum_{j=1}^{n} v_j du_j\, \omega'(v)\wedge\omega(u) = 0$$

donc

$$\begin{aligned} d\langle v,u\rangle^n \wedge \omega'(v)\wedge\omega(u) &= n\langle v,u\rangle^{n-1}\sum_{j=1}^{n} v_j u_j \bigwedge_{1\le k\le n} dv_k\wedge\omega(u) \\ &= n\langle v,u\rangle^n \omega(v)\wedge\omega(u). \end{aligned}$$

d'où (4.7) ■

On considère l'ensemble E définie par

$$E = \{(u,v)\in\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n : \langle v,u\rangle \neq 0\}$$

et sur l'ouvert E on définit la forme différentielle

$$\mu(u,v) = \frac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{\langle v,u\rangle^n}$$

Le résultat suivant sera très utile dans la suite :

Proposition 4.1.3 *Soit $\mathbb{X}$ une variété de classe $\mathcal{C}^\infty$ et $u,v : X\to\mathbb{C}^n$ deux cartes de classe $\mathcal{C}^1$, la forme différentielle*

$$\frac{\omega'(v)\wedge\omega(u)}{\langle v,u\rangle^n} \tag{4.8}$$

est fermée pour tout $x\in\mathbb{X}$ avec $\langle v(x),u(x)\rangle\neq 0$.

Preuve. Compte tenu de $d\omega(u) = 0$ et du *Lemme* (4.1.2), on a

$$\begin{aligned} d\mu(u,v) &= \frac{d(\omega'(v)\wedge\omega(u))}{\langle v,u\rangle^n} - \frac{d\langle v,u\rangle^n \wedge \omega'(v)\wedge\omega(u)}{\langle v,u\rangle^{2n}} \\ &= \frac{n.\omega(v)\wedge\omega(u)}{\langle v,u\rangle^n} - \frac{n\langle v,u\rangle^n\,\omega(v)\wedge\omega(u)}{\langle v,u\rangle^{2n}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

■

Proposition 4.1.4 *Soit $x_j = x_j(\xi)$ $j = 1,\cdots,n$, les coordonnées réelles de $\xi \in \mathbb{C}^n$ avec $\xi_j = x_j(\xi) + ix_{j+n}(\xi)$ alors pour tout $z \in \mathbb{C}^n$ on a*

$$d_\xi(\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)) = n.(2i)^n.dx_1\wedge\cdots\wedge dx_{2n} \tag{4.9}$$

Preuve.

$$\begin{aligned} d_\xi(\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)) &= d_\xi\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}d\xi_j \bigwedge_{1\le k\le n} d\overline{\xi}_k \bigwedge_{1\le l\le n} d\xi_l \\ &= n.\bigwedge_{1\le k\le n} d\overline{\xi}_k \bigwedge_{1\le l\le n} d\xi_l \\ &= n.\bigwedge_{1\le k\le n}(dx_k - idx_{k+n}) \bigwedge_{1\le l\le n}(dx_l + idx_{l+n}) \\ &= n.\bigwedge_{1\le k\le n}(2i)(dx_k\wedge dx_{k+n}) \\ &= n.(2i)^n \bigwedge_{1\le j\le 2n} dx_j. \end{aligned}$$

■

4.2 Noyau et Formule de Martinelli-Bochner

4.2.1 Les opérateurs $\mathrm{B}_{\mathbb{D}}$ et $\mathrm{B}_{\partial\mathbb{D}}$

Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$, on note Δ la diagonale de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ et

$$\omega'(\overline{\xi}-\overline{z}) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}(\overline{\xi}_j-\overline{z}_j)\bigwedge_{k\ne j} d\overline{\xi}_k. \tag{4.10}$$

On considère la forme différentielle

$$\widetilde{B}\,(z,\xi) = \frac{\omega'(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}} \tag{4.11}$$

Définition 4.2.1 *On appelle noyau deMartinelli − Bochner la forme différentielle* $\widetilde{B}\,(z,\xi)$ *définie sur* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ *par*

$$\widetilde{B}\,(z,\xi) = \sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\frac{(\overline{\xi}_j-\overline{z}_j)}{|\xi-z|^{2n}}\bigwedge_{k\neq j} d\overline{\xi}_k\wedge\omega(\xi) \tag{4.12}$$

Pour $z\in\mathbb{C}^n$ fixé, la *proposition* (4.1.3) implique que le noyau de $Martinelli - Bochner$ est lisse dans $\mathbb{C}^n\setminus\{z\}$ et de singularité d'ordre $2n-1$ en $z=\xi$.

∘ Pour chaque *1-forme* bornée sur D , on définit l'opérateure B_D par :

$$(B_D f)(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\xi\in D} f(\xi)\wedge\frac{\omega'_{\xi}(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}} \qquad z\in D \tag{4.13}$$

la forme différentielle $B_D f$ ainsi-définie est continue sur D.

∘ Pour chaque fonction f bornée sur ∂D on définie aussi l'opérateur $B_{\partial D}$ par :

$$(B_{\partial D} f)(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\xi\in \partial D} f(\xi)\frac{\omega'_{\xi}(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}} \qquad z\in D \tag{4.14}$$

4.2.2 Formule de Martinelli-Bochner dans la boule de Lie

Théorème 4.2.1 *Soit*

$$\mathbb{D} = \left\{z\in\mathbb{C}^n\ (n>2) : |\langle z,z\rangle|^2 - 2\langle\overline{z},z\rangle + 1 > 0; \langle z,\overline{z}\rangle < 1\right\}$$

Pour chaque fonction f continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, on a la représentation intégrale :

$$f = B_{\partial\mathbb{D}} f - B_{\mathbb{D}}\overline{\partial} f \quad dans\ \mathbb{D} \tag{4.15}$$

si f est holomorphe dans $\mathbb{D}$ alors

$$f(z) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\int\limits_{\xi\in\partial\mathbb{D}} f(\xi)\frac{\omega'_{\xi}(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|\xi-z|^{2n}} \quad Si\ z\in\mathbb{D}$$

Preuve. *pour $z \in \mathbb{D}$ fixé, on pose*

$$\theta(\xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \frac{\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi)}{\left\langle \overline{\xi} - \overline{z}, \xi - z \right\rangle^n}.$$

Lemme 4.2.2 *On a :*

$$d(f(\xi)\theta(\xi)) = \overline{\partial} f(\xi) \wedge \theta(\xi) \ \textit{dans}\ \mathbb{D} \backslash z$$

Preuve.

$$d(f(\xi)\theta(\xi)) = df(\xi) \wedge \theta(\xi) + f(\xi) \wedge d\theta(\xi).$$

La *proposition* (4.1.3) implique que $d\theta(\xi) = 0$ dans $\mathbb{D} \setminus \{z\}$ donc :

$$\begin{aligned} d(f(\xi)\theta(\xi)) &= (\partial f(\xi) + \overline{\partial} f(\xi)) \wedge \theta(\xi) \\ &= \overline{\partial} f(\xi) \wedge \theta(\xi). \end{aligned}$$

puisque $\theta(\xi)$ contient le facteur $d\xi_1 \wedge \cdots \wedge d\xi_n$. ■

Soient

$$D_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{D} : |\xi - z| < \varepsilon\}$$

et

$$\Delta_\varepsilon = \{\xi \in \mathbb{D} : |\xi - z| = \varepsilon\} \, (\varepsilon > 0) \, .$$

Lemme 4.2.3 *On a les résultats suivants :*

i) $\int\limits_{\Delta_\varepsilon} \theta(\xi) = 1.$

ii) $\left| \int\limits_{\Delta_\varepsilon} (f(\xi) - f(z))\theta(\xi) \right| \leq c. \max\limits_{|\xi - z| \leq \varepsilon} |f(\xi) - f(z)| \, .$

iii) $\lim\limits_{\varepsilon \to 0} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi) = f(z).$

Preuve. Pour l'assertion *i)* on a

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \theta(\xi) &= \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \frac{\omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi)}{\varepsilon^{2n}} \\ & \frac{(n-1)!}{\varepsilon^{2n}(2\pi i)^n} \int\limits_{\Delta_\varepsilon} \omega'_\xi(\overline{\xi} - \overline{z}) \wedge \omega(\xi) \end{aligned}$$

par la formule de Stockes, on trouve

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\theta(\xi) &= \frac{(n-1)!}{\varepsilon^{2n}(2\pi i)^n}\int\limits_{|\xi-z|<\varepsilon} d(\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi))\\ &= \frac{n!}{\varepsilon^{2n}\pi^n}\int\limits_{|\xi-z|<\varepsilon} d\xi_1\wedge\cdots\wedge d\xi_n \quad \textit{Proposition}\ (4.1.4)\\ &= 1\end{aligned}$$

Pour $ii)$ on a

$$\int\limits_{\Delta_\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n\varepsilon^{2n-1}}\int\limits_{\Delta_\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|z-\xi|}$$

comme

$$\frac{\omega'_\xi(\overline{\xi}-\overline{z})\wedge\omega(\xi)}{|z-\xi|}$$

est bornée dans $\mathbb{D}$, alors il existe une constante c telle que :

$$\left|\int\limits_{\Delta_\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi)\right| \leq c.\max_{|\xi-z|\leq\varepsilon}|f(\xi)-f(z)|$$

Pour $iii)$ on a

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Delta_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi) &= \int\limits_{\Delta_\varepsilon} f(z)\theta(\xi)+\int\limits_{\Delta_\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi)\\ &= f(z)\int\limits_{\Delta_\varepsilon}\theta(\xi)+\int\limits_{\Delta_\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi)\\ &= f(z)+\int\limits_{\Delta_\varepsilon}(f(\xi)-f(z))\theta(\xi) \quad \text{d'après } i)\end{aligned}$$

lorsque $\varepsilon\to 0$

$$\int\limits_{\Delta_\varepsilon} f(\xi)-f(z))\theta(\xi) \quad \textit{tend vers } 0 \text{ d'après } ii)$$

d'où $iii)$ ■

Appliquons la formule de Stockes sur $\mathbb{D}_\varepsilon$(dont le bord est défini par des fonctions algébriques) à la forme différentielle $f(\xi)\theta(\xi)$ *on obtient*

$$\int\limits_{D_\varepsilon} d(f(\xi)\theta(\xi)) = \int\limits_{\partial D_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi)$$

et d'après le Lemme (4.2.2) *on obtient*

$$\int_{D_\varepsilon} \overline{\partial} f(\xi) \wedge \theta(\xi) = \int_{\partial D_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi)$$

Comme $[\partial D_\varepsilon] = [\partial \mathbb{D}] - [\Delta_\varepsilon]$ *alors*

$$\begin{aligned} \int_{D_\varepsilon} \overline{\partial} f(\xi) \wedge \theta(\xi) &= \int_{\partial \mathbb{D}} f(\xi)\theta(\xi) - \int_{\Delta_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi) \\ &= B_{\partial \mathbb{D}} f - \int_{\Delta_\varepsilon} f(\xi)\theta(\xi). \end{aligned}$$

Compte tenu du résultat iii) du *Lemme* (4.2.3), *lorsque* $\varepsilon \to 0$, *on aura la formule de Martinelli-Bochner*(4.5) ∎

4.3 Noyau et formule de Koppelman

Soit $\hat{s}$ une application de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ dans $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ définie par

$$\hat{s}(\xi, z) = \left(\overline{\xi} - \overline{z}, \xi - z\right)$$

On considère la forme différentielle $\hat{s}^*\mu$, elle est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ et fermée puisque μ est fermée.

Définition 4.3.1 *On appelle noyau de* $Bochner - Martinelli - Koppelman$ *la forme différentielle sur* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ *définie par*

$$B = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \hat{s}^* \mu$$

On a

$$B(z, \xi) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n} \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \frac{(\overline{\xi}_j - \overline{z}_j)}{|\xi - z|^{2n}} \bigwedge_{k \neq j} (d\overline{\xi}_k - d\overline{z}_k) \wedge \omega(\xi - z)$$

B se décompose de manière unique sous la forme :

$$B = \sum_{1 \leq q \leq n-1} B_q$$

où B_q est de type $(0, q)$ en z et $(n, n - q - 1)$ en ξ

Lemme 4.3.1 *Pour tout* $(z,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ *on a*

$$\overline{\partial} B\left(z,\xi\right) = 0 \ \ et \ \ \overline{\partial}_z B_q\left(z,\xi\right) = -\overline{\partial}_\xi B_{q+1}\left(z,\xi\right)$$

Preuve. Notons $\Omega_{BM}(x)$ la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ privé de 0 définie par :

$$\Omega_{BM}(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\mu\left(\overline{x},x\right)$$

C'est une $(n,n-1)-forme$, et par conséquent $\overline{\partial}\Omega_{BM} = d\Omega_{BM}$.

Remarquons que $B = \tau^*\Omega_{BM}$ ou τ est l'application holomorphe de $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \setminus \Delta$ dans $\mathbb{C}^n$, $(z,\xi) \mapsto \xi - z$.

On en déduit que $\overline{\partial} B = dB$. $Proposition$(3.13.1) Comme $B = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\hat{s}^*\mu$ et $d\mu = 0$ on a donc $\overline{\partial} B = dB = 0$.

On obtient la seconde relation en comparant les bidegrés. ■

Proposition 4.3.2 *Le noyau de* $Bochner - Martinelli - Koppelman$ B *est une forme différentielle localement intégrable sur* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$.

Preuve. Soient $\tau : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n$ l'application $(z,\xi) \mapsto \xi - z$ et $\Omega_{BM}(x)$ la forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{C}^n$ privé de 0 définie par

$$\Omega_{BM}(x) = \frac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}\frac{1}{|x|^{2n}}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\overline{x}_j\bigwedge_{k\neq j} d\overline{x}_k \wedge \omega(x)$$

les coefficients de $\Omega_{BM}(x)$ sont localement intégrable dans $\mathbb{C}^n$.

Comme $B = \tau^*\Omega_{BM}$ donc B est localement intégrable sur $\mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$. ■

4.3.1 Les opérateurs $\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}$ et $\mathfrak{B}_{\partial\mathbb{D}}$ pour des formes différentielle de degré arbitraire

Soit B le noyeau de $Bochner - Martinelli - Koppelamn$ et $\mathbb{D}$ la boule de Lie.

- Si f est une forme différentielle bornée définie sur sur $\mathbb{D}$, on pose pour $z \in \mathbb{D}$:

$$(\mathfrak{B}_{\mathbb{D}} f)(z) = \int\limits_{\xi \in \mathbb{D}} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \tag{4.16}$$

Puisque B à une singularité intégrable en $\xi = z$, la forme différentielle $\mathfrak{B}_{\mathbb{D}} f$ est bien définie sur $\mathbb{D}$.

- Si f une est une forme différentielle bornée sur $\partial\mathbb{D}$, on pse pour $z \in \mathbb{D}$:

$$(\mathfrak{B}_{\partial\mathbb{D}} f)(z) = \int\limits_{\xi \in \partial\mathbb{D}} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \tag{4.17}$$

La forme différentielle $\mathfrak{B}_{\partial\mathbb{D}} f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{D}$.

Remarque

Si f est de type $(0,q)$, on a $(\mathfrak{B}_{\mathbb{D}} f)(\ .\ ) = \int\limits_{\xi \in \mathbb{D}} f(\xi) \wedge B_{q-1}(\ .\ ,\xi)$

4.3.2 Formule de Koppelman

La formule de *Koppelman* est une généralisation de la formule intégrale de *Martinelli − Bochner*.

Théorème 4.3.3 *Soient*

$$\mathbb{D} = \left\{ z \in \mathbb{C}^n \ (n > 2) : |\langle z,z\rangle|^2 - 2\langle \overline{z}, z\rangle + 1 > 0; \langle z,\overline{z}\rangle < 1 \right\}$$

et f une $(0,q)-forme$ différentielle $(q = 1..n)$ continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, telle que $\overline{\partial} f$ soit aussi continue sur $\overline{\mathbb{D}}$, alors :

$$(-1)^q f = \mathfrak{B}_{\partial\mathbb{D}} f - \mathfrak{B}_{\mathbb{D}} \overline{\partial} f \ + \overline{\partial}\mathfrak{B}_{\mathbb{D}} f \quad dans\ \mathbb{D} \tag{4.18}$$

Preuve. Soit φ une forme différentielle de classe $\mathcal{C}^\infty$ à support compact dans $\mathbb{D}$, on a au sens des courants

$$\left\langle \overline{\partial} T, \varphi \right\rangle = (-1)^q \left\langle T, \overline{\partial}\varphi \right\rangle$$

où T est un courant de bidegré $(0, q-1)$; le théorème est équivalant alors à

$$(-1)^q \int\limits_{\mathbb{D}} \mathfrak{B}_{\mathbb{D}} f \wedge \overline{\partial}\varphi = (-1)^q \int\limits_{\mathbb{D}} f \wedge \varphi - \int\limits_{\mathbb{D}} \mathfrak{B}_{\partial\mathbb{D}} f \wedge \varphi + \int\limits_{\mathbb{D}} \mathfrak{B}_{\mathbb{D}} \overline{\partial} f \wedge \varphi \tag{4.19}$$

Pour que (4.16) ai un sens, il faut que le bidegré de φ soit $(n, n-q)$, du fait que $\mathfrak{B}_{\partial\mathbb{D}} f$ et $\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\overline{\partial} f$ sont de bidegrès $(0, q)$ et $(0, q-1)$ respectivement.

La formule (4.19) devient

$$\int_{(\xi,z)\in\mathbb{D}\times\partial\mathbb{D}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) - \int_{(\xi,z)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}} \overline{\partial} f(z)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$
$$+ (-1)^q \int_{(\xi,z)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}} f(z)\wedge B(z,\xi)\wedge\overline{\partial}\varphi(z) = (-1)^q \int_{z\in\mathbb{D}} f(\xi)\wedge\varphi(z)$$

On considère l'ouvert Δ_ε de $\mathbb{C}^n\times\mathbb{C}^n$ défini par

$$\Delta_\varepsilon = \mathbb{D}\times\mathbb{D}\setminus\{(z,\xi)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D} : |z-\xi|\le\varepsilon\}$$

Son bord $\partial\Delta_\varepsilon$ est la réunion de

$$F_{1,\varepsilon} = \partial\left(\mathbb{D}\times\mathbb{D}\right)\setminus\{(z,\xi)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D} : |z-\xi|\le\varepsilon\}$$

et de

$$F_{2,\varepsilon} = \left\{(z,\xi)\in\overline{\mathbb{D}}\times\overline{\mathbb{D}} : |z-\xi| = \varepsilon\right\}$$

Comme φ est à support compact dans $\mathbb{D}$, la forme différentielle $\overline{\partial} f(z)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$ est nulle sur $\partial\mathbb{D}\times\mathbb{D}$.

Par ailleurs si $\xi\in\partial\mathbb{D}$ et $z\in supp\ \ \varphi$ on a

$$|\xi - z| \ge d\left(supp\varphi, \mathbb{C}^n\setminus\mathbb{D}\right)$$

et par conséquent si $\varepsilon < d\left(supp\varphi, \mathbb{C}^n\setminus D\right)$,l'ensemble $supp\ \ \varphi\times\partial D$ est inclus dans $F_{1,\varepsilon}$. On obtient donc

$$\int_{(\xi,z)\in\mathbb{D}\times\partial\mathbb{D}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = \int_{(\xi,z)\in F_{1,\varepsilon}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$

De plus si $z\in supp\varphi$ et $|\xi - z| = \varepsilon$ alors ξ appartient à $\{\xi\in\mathbb{C}^n : d(\xi, supp\varphi)\le\varepsilon\}$ qui est un compact de $\mathbb{D}$ si $\varepsilon < d(supp\varphi, \mathbb{C}^n\setminus D)$ donc pour ε assez petit si $z\in supp\varphi$ et $(z,\xi)\in F_{2,\varepsilon}$, alors (z,ξ) varie dans un compact de $\mathbb{D}\times\mathbb{D}$ et donc

$$\int_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z) = \int_{(\xi,z)\in F_{2,\varepsilon}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\wedge\varphi(z)$$

Finalement pour $\varepsilon < d(supp\varphi, \mathbb{C}^n \setminus \mathbb{D})$, on obtient

$$B(z,\xi) \wedge \varphi(z) - \int\limits_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) = \int\limits_{(\xi,z)\in\Delta_\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z)$$

La formule de Stockes donne alors

$$\begin{aligned} B(z,\xi) \wedge \varphi(z) - \int\limits_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) \\ &= \int\limits_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} d_{z,\xi}\left(f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z)\right) \\ &= \int\limits_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} df(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) + (-1)^{q-1} \int\limits_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge d\varphi(z) \end{aligned}$$

car $dB = 0$ sur Δ_ε

On a

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} df(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) = \int\limits_{(\xi,z)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}} df(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) \tag{4.20}$$

$$\lim_{\varepsilon\to0} \int\limits_{(z,\xi)\in\Delta\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge d\varphi(z) = \int\limits_{(\xi,z)\in\mathbb{D}\times\mathbb{D}} df(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge d\varphi(z) \tag{4.21}$$

Il reste à prouver que

$$\underset{\varepsilon\to0}{lim} \int\limits_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) = (-1)^q \int\limits_{z\in\mathbb{D}} f(z) \wedge \varphi(z). \tag{4.22}$$

Pour cela, considérons l'automorphisme $T : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \to \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n$ défini par $T\ (z,x) = (z, z+x)\,, T$ transforme $\mathbb{C}^n \times S(0,\varepsilon)$ en $\{(z,\xi) \in \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n : |z-\xi| = \varepsilon\}$ et par conséquent

$$I_\varepsilon = \int\limits_{|z-\xi|=\varepsilon} f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z) = \int\limits_{\mathbb{C}^n\times S(0,\varepsilon)} T^*\left(f(\xi) \wedge B(z,\xi) \wedge \varphi(z)\right)$$

Mais $T^*B(z,x) = C_n\,|x|^{-2n}\,\omega'\left(\overline{x}\right) \wedge \omega(x)$, avec $C_n = \dfrac{(n-1)!}{(2\pi i)^n}$ et si

$$f(\xi) = \sum_{|I|=q}^{/} f_I(\xi) d\xi_I$$

alors

$$T^*f(z,x) = \sum_{|I|=q}^{/} f_I(z+x) d\left(\overline{z+x}\right)_I$$

On obtient donc

$$I_\varepsilon = C_n \sum_{|I|=q}^{\prime} \int\limits_{\mathbb{C}^n \times S(0,\varepsilon)} f_I(z+x) d\left(\overline{z+x}\right)_I \wedge \frac{\omega'\left(\overline{x}\right) \wedge \omega(x)}{|x|^{2n}} \wedge \varphi(z)$$

Grâce au théorème de Fubini on peut écrire

$$I_\varepsilon = (-1)^q \sum_{|I|=q}^{\prime} \int\limits_{\mathbb{C}^n} \left[\int\limits_{S(0,\varepsilon)} C_n f_I(z+x) \wedge \frac{\omega'\left(\overline{x}\right) \wedge \omega(x)}{|x|^{2n}} \right] d\overline{z}_I \wedge \varphi(z)$$

d'après la formule de *Martinelli-Bochner* :

$$C_n \int\limits_{S(0,\varepsilon)} f_I(z+x) \frac{\omega'(\overline{x}) \wedge \omega(x)}{|x|^{2n}} =$$

$$= \; f_I(z) + C_n \int\limits_{S(0,\varepsilon)} f_I(z+x) - f_I(z) \frac{\omega'(\overline{x}) \wedge \omega(x)}{|x|^{2n}}.$$

lorsque $\varepsilon \longrightarrow 0$

$$C_n \int\limits_{x \in S_\varepsilon} f_I(z+x) \frac{\omega'(\overline{x}) \wedge \omega(x)}{|x|^{2n}}$$

tend vers $f_I(z)$

la formule de *Martinelli-Bochner-Koppelman* se déduit de (4.20),(4.21) et (4.22) ■

Chapitre 5

Formule de Cauchy-Fantappié

5.1 Section de Leray

Définition 5.1.1 *Soit D un domaine borné de $\mathbb{C}^n$. Une application*

$$w(z,\xi) = (w_1(z,\xi), \cdots, w_n(z,\xi))$$

de classe $\mathcal{C}^1$ pour $z \in D$ et ξ dans un voisinage $U_{\partial D}$ de ∂D à valeurs dans $\mathbb{C}^n$ est une section de Leray pour D si

$$\langle w(z,\xi), \xi - z \rangle \neq 0 \quad \textit{pour tout} \quad (z,\xi) \in D \times \partial D$$

Remarque

L'application $w(z,\xi) = \overline{\xi} - \overline{z}$ est une section de Leray pour tout domaine borné D de $\mathbb{C}^n$. En effet

$$\langle w(z,\xi), \xi - z \rangle = \left\langle \overline{\xi} - \overline{z}, \xi - z \right\rangle = |\xi - z|^2 \neq 0 \quad si \quad z \neq \xi$$

5.2 Les opérateurs $\mathfrak{L}^w_{\partial D}$ et $\mathfrak{R}^w_D$ pour des formes de degré arbitraire.

Soit $w(z,\xi)$ une section de Leray pour D

On pose pour $\lambda \in [0,1]$

$$\eta^w(z,\xi,\lambda) = (1-\lambda)\frac{w(z,\xi)}{\langle w(z,\xi), \xi - z \rangle} + \lambda \frac{\overline{\xi} - \overline{z}}{|\xi - z|^2} \tag{5.1}$$

$$\overline{\omega}'_{z,\xi,\lambda}\left(\eta^{w}\left(z,\xi,\lambda\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}\eta_{j}^{w}(z,\xi,\lambda)\bigwedge_{k\neq j}(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_{\lambda})\eta_{k}^{w}(z,\xi,\lambda)\text{ pour }z\in D \tag{5.2}$$

$$K^{\eta^{w}}\left(z,\xi,\lambda\right)=\frac{(n-1)!}{\left(2i\pi\right)^{n}}\,\overline{\omega}'_{z,\xi,\lambda}\left(\eta^{w}\left(z,\xi,\lambda\right)\right)\wedge\omega(\xi-z) \tag{5.3}$$

si $z\in D$ et $\xi\in U_{\partial D}$ satisfont $\left\langle w\left(z,\xi\right),\xi-z\right\rangle\neq 0$

On note également

$$\overline{\omega}'_{z,\xi}\left(w\left(z,\xi\right)\right)=\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j+1}w_{j}^{w}(z,\xi)\bigwedge_{k\neq j}\overline{\partial}_{z,\xi}w_{k}\left(z,\xi\right) \tag{5.4}$$

pour $z\in D$ et $\xi\in U_{\partial D}$ tels que $\left\langle w\left(z,\xi\right),\xi-z\right\rangle\neq 0$

$$K^{w}\left(z,\xi\right)=\frac{(n-1)!}{\left(2i\pi\right)^{n}}\,\frac{\overline{\omega}'_{z,\xi}\left(w\left(z,\xi\right)\right)\wedge\omega(\xi-z)}{\left\langle w\left(z,\xi\right),\xi-z\right\rangle^{n}} \tag{5.5}$$

Le noyeau $K^{\eta^{w}}\left(z,\xi,\lambda\right)$ est une forme différentielle continue de degré $2n-1$ sur $\left\{(z,\xi,\lambda)\in D\times U_{\partial D}\times[0,1]:\left\langle w\left(z,\xi\right),\xi-z\right\rangle\neq 0\right\}$

Le noyeau $K^{w}\left(z,\xi\right)$ est une forme différentielle continue de bidegré $(n,n-1)$ sur $\left\{(z,\xi)\in D\times U_{\partial D}:\left\langle w\left(z,\xi\right),\xi-z\right\rangle\neq 0\right\}.$

Lemme 5.2.1

i) On a, au sens des distributions

$$(\overline{\partial}_{z,\xi}+d_{\lambda})K^{\eta^{w}}\left(z,\xi,\lambda\right)=0$$

si $z\in D$ et $\xi\in U_{\partial D}$ et $\lambda\in[0,1]$

ii) $K^{\eta^{w}}\left(z,\xi,\lambda\right)|_{\lambda=0}=K^{w}\left(z,\xi\right)$ et $K^{\eta^{w}}\left(z,\xi,\lambda\right)|_{\lambda=1}=B(z,\xi)$

Preuve. puisque la fonction $\xi - z$ est holomorphe en (z,ξ) et indépendant de λ

$$(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\omega(\xi - z) = 0$$

et par conséquent

$$(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) = \frac{n!}{(2\pi i)^n}(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\bigwedge_{1\leq k\leq n}(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta_k^w(z,\xi,\lambda) \wedge \omega\,(\xi - z)$$

Mais sur $D \times \partial D \times [0,1]$ on a $\langle \eta^w(z,\xi,\lambda), \xi - z\rangle = 1$, ce qui implique

$$\sum_{j=1}^{n}(\xi_j - z_j)\,(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta_k^w(z,\xi,\lambda) = 0$$

On en déduit que pour tout $z \in D, \xi \in U_{\partial D}$ et $\lambda \in [0,1]$

$$\bigwedge_{1\leq k\leq n}(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)\eta_k^w(z,\xi,\lambda) = 0$$

ce qui prouve que $(\overline{\partial}_{z,\xi} + d_\lambda)K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) = 0$

L'assertion 2. se déduit des définitions des formes différentielles K^{η^w} , K^w et du résultat

$$\mu(u,v) = \omega'\left(\frac{u}{\langle u,v\rangle^n}\right) \wedge \omega(v)$$

■

- Si f est une forme différentielle borné sur ∂D, on définit l'opérateur $\mathfrak{L}^w_{\partial D} f$ par :

$$(\mathfrak{L}^\phi_{\partial D} f)(z) = \int_{\xi\in\partial D} f(\xi) \wedge K^w(z,\xi) \qquad z \in D \tag{5.6}$$

- Si f est une forme différentielle borné sur ∂D, on définit l'opérateur $\mathfrak{R}^w_{\partial D} f$ par :

$$(\mathfrak{R}^\phi_{\partial D} f)(z) = \int_{(\xi,\lambda)\in\partial D\times[0,1]} f(\xi) \wedge K^{\eta^w}(z,\xi,\lambda) \qquad z \in D \tag{5.7}$$

bidegré $(n, n-q)$ à support compact dans D

5.3 Formule de Cauchy-Fantappié associée à la boule de Lie

Les propositions (2.3.1) et (2.3.2) avaient établi que

$$\left\langle 2\left\langle \overline{\xi},\overline{\xi}\right\rangle \xi-2\overline{\xi},\xi-z\right\rangle \neq 0 \quad \forall \xi\in\partial_1\mathbb{D} \quad \text{et } \forall z\in\mathbb{D}$$

et

$$\left\langle \xi-z,\xi-z\right\rangle \neq 0 \quad \forall \xi\in\partial_2\mathbb{D} \quad \text{et } \forall z\in\mathbb{D}$$

Notons

$$w^{(1)}\left(z,\xi\right)=2\left\langle \overline{\xi},\overline{\xi}\right\rangle \xi-2\overline{\xi}$$

et

$$w^{(2)}\left(z,\xi\right)=\xi-z$$

$w^{(1)}$ et $w^{(2)}$ sont de classe $\mathcal{C}^{\infty}$ sur $\partial_1\mathbb{D}$ et $\partial_2\mathbb{D}$ respectivement et holomorphes sur $\mathbb{D}$

D'après les résultats de G. Roos [16], on a

Théorème 5.3.1 *Soit*

$$\mathbb{D}=\left\{z\in\mathbb{C}^n:\left|\left\langle z,z\right\rangle\right|^2-2\left\langle z,\overline{z}\right\rangle+1>0\ ;\ \ \left\langle z,\overline{z}\right\rangle<1\right\}$$

Pour chaque (0,q)-forme (q=1..n) f continue sur $\mathbb{D}$*, telle que* $\overline{\partial}f$ *soit aussi continue sur* $\mathbb{D}$*, on a la représentation intégrale*

$$(-1)^q f=\overline{\partial}\left[\mathfrak{R}^{w^{(1)}}_{\partial_1\mathbb{D}}f+\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}f\right]-\left[\mathfrak{R}^{w^{(1)}}_{\partial_1\mathbb{D}}\overline{\partial}f+\mathfrak{B}_{\mathbb{D}}\overline{\partial}f\right] \tag{5.8}$$

où

$$\left(\mathfrak{R}^{w^{(1)}}_{\partial_1\mathbb{D}}f\right)(z)=\int\limits_{\xi\in\partial_1\mathbb{D}}f\left(\xi\right)\wedge\Omega_{q-1}\left(z,\xi\right) \tag{5.9}$$

$$\left(\mathfrak{R}^{w^{(1)}}_{\partial_1\mathbb{D}}\overline{\partial}f\right)(z)=\int\limits_{\xi\in\partial_1\mathbb{D}}f\left(\xi\right)\wedge\Omega_{q}\left(z,\xi\right) \tag{5.10}$$

avec

$$\Omega_q\left(z,\xi\right)=\frac{1}{\left(2\pi i\right)^n}\ \partial_\xi\left(\left|\xi-z\right|^2\right)\wedge\frac{1}{2}w^{(1)}(z,\xi)\wedge\left[\overline{\partial}_z\partial_\xi\left(\left|\xi-z\right|^2\right)\right]^q$$
$$\wedge\sum_{j=q}^{n-2}C_j^q\frac{\left(\overline{\partial}\partial\left|\xi\right|^2\right)^{j-q}\wedge\left(\overline{\partial}w^{(1)}\right)^{n-2-j}}{\left|\xi-z\right|^{2j+2}\left\langle w^{(1)},\xi-z\right\rangle} \tag{5.11}$$

Preuve. Voir [16] *Théorème* 6 § 4 ■

On en déduit une formule de résolution de l'opérateur de Cauchy-Riemann dans la boule de Lie

Corollaire 5.3.1 *Soit* f *une* $(0,q)-forme$ $(q=1..n)$ *continue sur* $\overline{\mathbb{D}}$, *vérifiant* $\overline{\partial}f=0$ *dans* $\mathbb{D}$ *alors :*

$$u=(-1)^q\left[\int\limits_{\xi\in\partial_1\mathbb{D}} f(\xi)\wedge\Omega_{q-1}(z,\xi)+\int\limits_{\xi\in\mathbb{D}} f(\xi)\wedge B(z,\xi)\right]$$

est la solution explicite dans $\mathbb{D}$ *de l'équation de* $Cauchy-Riemann$ $\overline{\partial}u=f$ *au sens des courants*

Annexe A

Formule de Stockes

A.1 Sous-Variétés

Soit $\mathbb{X}$ une variété de dimension n et Y une partie de $\mathbb{X}$.On dit que Y est une $sous-variété$ de dimension m $(m \leq n)$ de $\mathbb{X}$, si pour tout $y \in Y$ il existe une carte (h, U) de $\mathbb{X}$ en y telle que

$$h(U \cap Y) = h(U) \cap \mathbb{R}^m$$

A.2 Domaine et orientation de son bord

Soit $\mathbb{X}$ une variété de dimension n. On appelle domaine $\mathbb{D}$ de $\mathbb{X}$ toute partie $\mathbb{D}$ fermée de $\mathbb{X}$ telle que pour tout x de $\mathbb{D}$ on ait :

- Soit il existe U ouvert de $\mathbb{X}$ tel que $x \in U \subset \mathbb{D}$.
- Soit il existe une carte (h, U) centrée en x telle que

$$U \cap \mathbb{D} = \{(x_1, \cdots, x_n) \in U : x_1 \leq 0\}$$

Comme une carte est un homéomorphisme et que, si $x_1 = 0, (x_1, \cdots, x_n)$ appartient à la frontiére de $U \cap \mathbb{D}$,

c'est que x appartient à la frontière de $\mathbb{D}$, que l'on notera $\partial\mathbb{D}$ et appellera le bord de $\mathbb{D}$.

$\partial\mathbb{D}$ est une sous-variété de dimension $n - 1$.

Théorème A.2.1 *Soit $\mathbb{X}$ une variété orientée et $\mathbb{D}$ un domaine de $\mathbb{X}$.*

$\partial\mathbb{D}$ est canoniquement orientée.

A.3 Formule de Stockes

Théorème A.3.1 ***(de Stockes)*** *Soient $\mathbb{D}$ un domaine d'une variété orientée $\mathbb{X}$ de dimension n, $\partial\mathbb{D}$ son bord orientée, et soit ω une $(n-1)-forme$ sur $\mathbb{X}$ à support compact.*

La formule suivante est vraie

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \omega \mid_{\partial\mathbb{D}} = \int_{\mathbb{D}} d\omega \tag{A.1}$$

Preuve. Soit (h_α, U_α) un atlas de $\mathbb{X}$ et (χ_α) une partition de l'unité subordonnée au recouvrement de $\mathbb{X}$ par les U_α.

par linéraité de l'intégrale, il suffit de prouver

$$\int_{\partial\mathbb{D}} \chi_\alpha\omega \mid_{\partial\mathbb{D}} = \int_{\mathbb{D}} d(\chi_\alpha\omega) \quad \text{pour tout } \alpha \tag{A.2}$$

On a sur U_α les coordonnées $(x_1, \cdots, x_n)$ et $\partial\mathbb{D}\cap U_\alpha$ est donnée par l'équation $x_1 = 0$ dans ces coordonnées

On note

$$\omega_\alpha = h_\alpha^*(\chi_\alpha\omega) = \sum_i f_i \bigwedge_{k\neq i} dx_k.$$

Il y a deux cas :

1^{er} Cas : $\partial\mathbb{D}\cap U_\alpha = \emptyset$

On calcule $d\omega_\alpha$

$$d\omega_\alpha = \sum_i \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{D}} d\omega_\alpha &= \sum_{i=1}^{n} \int_{U_\alpha} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i-1} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= 0
\end{aligned}$$

par Fubini, car chaque f_i est à support compact dans $\mathbb{R}$.

2^{eme} cas : $\partial\mathbb{D}\cap U_\alpha \neq \emptyset$

l'écriture précedente est toujours valide et on a par Fubini que

$$\int\limits_{U_\alpha\cap\partial\mathbb{D}} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}(-1)^{i-1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n = 0 \quad \text{si} \quad i \neq 1$$

d'où l'on tire

$$\int\limits_{\mathbb{D}} d\omega_\alpha = \int\limits_{U_\alpha\cap\partial\mathbb{D}} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

tandis que :

$$\int\limits_{\partial\mathbb{D}} d\omega_\alpha = \int\limits_{\{x_1=0\}} f_1 dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.$$

car la forme $dx_1 \mid_{\{x_1=0\}}$ est identiquement null.

La formule en conséquence démontrée grâce à Fubini et l'observation que :

$$f_1(0) = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} dx_1.$$

■

Remarque

La formule de Stockes est valable pour les ouverts bornées de $\mathbb{C}^n$ dans le bord est réunion disjointe de sous variétés définis par des fonctions algèbriques.

Bibliographie

[1] A.Affane , *Représentation intégrale pour les domaines de Cartan*, Documenta Mathematica 5 (2000) 1-13.

[2] A.Dufresnoy, C.Laurent-Thiébaut , *Ecole de Printemps d'Analyse Complexe - Rabat (Maroc)*, Mai 2000 .

[3] M.Berger, B.Gostiaux , *Géométrie différentielle : Variétés,Courbes et surfaces* , Presses Universitaires de France 1987.

[4] T.Bouche, *Introduction à la géométrie différentielle des variétés analytiques complexes*, Université Joseph Fourier 1996.

[5] H.Cartan, *Domaines symétriques dans un espace de Banach Complexe 'Actas del V congeso de la agrupación de Matemáticos de Exprsión Latina'* Madrid 1978

[6] P.Dolbeaut, *Analyse complexe*, Masson 1990.

[7] M.S.Hachaichi, *La Géométrie du disque unité généralisé de* $M_n(C)$, Maghreb.Math.Rev,Vol 7, No1 Jun (1998) 53-69.

[8] M.S.Hachaichi, *Formule de répresentation intégrale et application à la résolution de l'équation de Cauchy-Riemann dans le disque unité généralisé de* $M_n(C)$, Maghreb.Math.Rev,Vol 7, No2 Dec (1998) 101-134.

[9] G.M.Henkin,J.Leiterer, *Theory of function on complex manifolds*, Brikhauser-Verlag 1984.

[10] L.Hörmander, *An Introduction to complex Analysis in several variables*, Van Nostrand,Princeton 1966

[11] L.K.Hua, *Harmonique Analysis of Functions of several complex variables in the classical Domains* , Volume 6 AMS 1963

[12] J.Lafontaine, *Introduction aux variétés différentielles*, Presses Universitaires de Grenoble 1996.

[13] O.Loos, *Jordan pairs*, Lec.Notes in Math Vol 460 (1975).

[14] O.Loos, *Bounded symmetric domains and Jordan pairs*, Univ of Califonia at Irvine 1977.

[15] F.Norguet, *Introduction aux fonctions de plusieurs variables complexes : Représentation Intégrales*, Université Paris VII 1970-1971

[16] G.Roos, *Fonctions de plusieurs variables complexes et formules de représentations intégrales*, Lec.Notes in Math Vol 1118.

[17] W.Rudin, *Function theory in the unit ball of* $\mathbb{C}^n$, Springer-Verlag 1980.

[18] V.S.Valdimirov, *Les fonctions de plusieurs variables complexe et leur application à la théorie quantique des champs*, Dunod Paris 1967

[19] J.Wermer, *Banach Algebras and several complex variables*, Springer-Verlag 1976.

[20] N.Sibony, *Un exemple de domaine pseudo-convexe régulier où l'équation* $\overline{\partial}u = f$ *n'admet pas de solution bornée pour* f *bornée*, Inventiones mathematicae 62,pp 235-242 (1980)

[21] A.G.Sergeev, *Complex geometry and integral representations in the future tube*, Math.USSR Isvestiya Vol.29,N 3(1987) 597-627.

[22] A.Polyakov, *A solution of the* $\overline{\partial}$*-equation with an estimate in tubular domains* , Usp.Mat Nauk 40 N 1 (241) (1985) 213-214.