

N° d'ordre:

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE
SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMÉDIÈNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES



THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

PRÉSENTÉE POUR L'OBTENTION DU GRADE DE DOCTEUR

EN : MATHÉMATIQUES

SPÉCIALITÉ : RECHERCHE OPÉRATIONNELLE : MATHS DISCRÈTES ET
OPTIMISATION

AOUDIA LAMIA

PAR :

CONNECTIVITÉ DE CERTAINS POLYÈDRES COMBINATOIRES

Soutenue publiquement le 15/02/2020 devant le jury composé de :

Mr. BERRACHEDI ABDELHAFID, Professeur à l'USTHB

Mr. AÏDER MÉZIANE, Professeur à l'USTHB

Mr. NGUYEN VIET HUNG, Professeur à l'Université Clermont Auvergne

Mme BENMEZIANE ZINEB, MC/A à l'USTHB

Mr. AIDENE MOHAMED, Professeur à l'UMMTO

Mr SADI BACHIR, MC/A à l'UMMTO

Président du jury

Directeur de thèse

Co-Directeur de thèse

Examinatrice

Examinateur

Examinateur

A mon papa et ma maman.

REMERCIEMENT

Je souhaite exprimer ma sincère gratitude aux personnes suivantes :

Monsieur Le Professeur Méziane AÏDER pour m'avoir accordé l'honneur d'assurer la direction et le suivi scientifique et technique du présent manuscrit. Je le remercie pour sa grande contribution à l'aboutissement de ce travail, également pour s'être montré disponible, en dépit de ses nombreuses occupations.

Monsieur le Professeur Viet Hung NGUYEN pour m'avoir accordé l'honneur d'assurer la direction et le suivi scientifique et technique du présent mémoire. Je le remercie pour sa grande disponibilité tout au long de mes séjours répétés au sein du Laboratoire LIP6, malgré ses nombreuses occupations.

Madame et Messieurs les membres de jury, qui ont bien voulu accepter de juger ce travail, en l'occurrence :

Monsieur le Professeur Abdelhafid BERRACHEDI de l'U.S.T.H.B. pour l'honneur qu'il me fait en assurant la présidence de ce jury ;

Mme Zineb BENMEZIANE Maître de conférence à l'U.S.T.H.B pour avoir très aimablement accepté d'examiner ce travail et de participer au jury ;

Monsieur Le Professeur Mohamed AÏDENE de l'U.M.M.T.O. pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.

Monsieur Bachir SAADI Maître de conférence à l'U.M.M.T.O pour avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie de ce jury.

Je tiens à remercier également les équipes Décision et RO du Laboratoire LIP6 "2013- 2015" pour les différentes discussions aux heures des pauses qui ont aidé à enrichir ma culture générale dans le domaine de l'informatique décisionnelle.

Je ne saurais oublier de remercier tous les amis et collègues pour le soutien qu'ils m'ont apporté, et la patience dont ils ont fait preuve à mon égard.

Mes remerciements s'étendent également à ma famille, je pense en particulier à mon père et ma mère dont le soutien a été prépondérant et exceptionnel.

TABLE DES MATIÈRES

TABLE DES MATIÈRES	iv
LISTE DES FIGURES	v
1 PRÉLIMINAIRES	5
1.1 ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROGRAMMATION LINÉAIRE	6
1.2 THÉORIE DES GRAPHES	6
1.3 POLYÈDRE COMBINATOIRE	11
1.4 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS	18
1.4.1 Algorithme de Séparation et coupe	19
1.4.2 Séparation et Optimisation	21
1.4.3 Formulations Etendues	24
1.5 TECHNIQUES DE PREUVE	27
2 PROBLÈME DE FORÊTS D'ÉTOILES DE POIDS MAXIMUM	30
2.1 DÉFINITION DU PROBLÈME DES FORÊTS D'ÉTOILES	31
2.2 APPLICATIONS DU PROBLÈME DES FORÊTS D'ÉTOILES DE POIDS MAXIMUM	31
2.2.1 Application dans l'industrie de l'automobile	32
2.3 APPLICATION DES FORÊTS D'ÉTOILES DANS L'ALIGNEMENT DES SÉQUENCES GÉNOMIQUES MULTIPLES	34
2.4 PROBLÈME DE FORÊTS D'ÉTOILES ET LES PROBLÈMES DE LOCA- LISATION SANS CONTRAINTES DE CAPACITÉ	35
2.5 LE PROBLÈME DE FORÊT D'ÉTOILES DE POIDS MAXIMUM ET LE PROBLÈME DE L'ABSORBANT	36
2.6 COMPLEXITÉ DU MWSFP	37
3 POLYTOPE DE FORÊTS D'ÉTOILES	38
3.1 FORMULATION DU MWSFP EN PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS	39
3.2 FACETTES DU SFP (G)	42
3.3 POLYTOPE DES FORÊTS D'ÉTOILES DANS LES ARBRES	45
3.4 POLYTOPE DES FORÊTS D'ÉTOILES DANS LES CYCLES	51
3.4.1 Description complète du polytope SFP (C)	54
3.5 LES INÉGALITÉS DU b -COUPLAGE PARFAIT	57
4 LE POLYTOPE SFP (K_n)	60
4.1 DÉFINITIONS ET RESTRICTIONS	61

4.2	INÉGALITÉS DÉFINISSANT DES FACETTES PRIMITIVES	62
4.3	CONSTRUCTION DE FACETTES	69
4.3.1	Clonage d'un sommet	71
4.3.2	Clonage d'une arête	76
4.3.3	Inégalité de $\{u, v\}$ -2-partition	77
4.3.4	Conclusion	79
5	ALGORITHMES POUR LE MWSFP	81
5.1	UN ALGORITHME LINÉAIRE POUR LE MWSFP DANS LES CYCLES	82
5.2	ALGORITHME DE BRANCHEMENT ET COUPE	85
5.2.1	L'idée de base	85
5.2.2	Séparation des inégalités de b -couplage	87
	BIBLIOGRAPHIE	92

LISTE DES FIGURES

1.1	Exemple de graphes.	9
2.1	exemple de problème de localisation	36
3.1	Support de l'inégalité du M -arbre associé à un 4-couplage.	43
3.2	Un cycle et son line-graphe.	52
3.3	Le graphe support du M -Cycle	56
4.1	Les graphes supports des inégalités de 3-Cycle et de 4-cycle	66
4.2	Graphes supports des inégalités du paw du bull et du net	68
4.3	Opération de clonage d'un sommet opérée sur un 4-Cycle	71
4.4	Opération de clonage d'arêtes : type1	77
4.5	Opération de clonage d'une arête : type2	77
4.6	Graphe support de l'inégalité (u, v) -2 partition	78
4.7	Graphes supports d'inégalités définissant des facettes des polytope P_4, P_5 et P_6	80
5.1	simulation du plus long chemin	84

INTRODUCTION

Plusieurs problèmes issus de domaines divers tels que l'industrie, le transport, l'économie, la biologie... se ramènent à des problèmes d'optimisation combinatoire, une discipline de la programmation mathématique qui a connu un développement considérable tant sur le plan théorique que sur le plan pratique. Un problème d'optimisation combinatoire peut être défini comme étant celui de déterminer un plus petit ou un plus grand élément d'un ensemble fini. A première vue, un tel problème paraît très simple à résoudre vu le caractère fini de l'ensemble de ses solutions. Mais en pratique, le nombre de ces solutions peut être exponentiel. Et dans ce cas, une méthode qui consisterait à énumérer toutes les solutions du problème ne peut être envisagée.

L'efficacité d'une méthode de résolution (algorithme) est généralement mesurée par le temps d'exécution. Si ce temps est borné par une fonction polynomiale en la taille du problème alors la méthode est dite efficace ou polynomiale. Pour un certain type de problèmes d'optimisation combinatoire on ne connaît pas d'algorithmes efficaces de résolution. Ces problèmes ont la propriété que s'il existe un algorithme polynomial pour l'un d'entre-eux alors il en existerait un pour chacun. Pour ces problèmes dits *NP-durs* il y a donc peu d'espoir de pouvoir trouver une méthode efficace.

Une approche qui s'est révélée efficace pour ce type de problèmes est l'approche dite polyédrale. Cette approche permet de ramener le problème à la résolution d'un programme linéaire par la description du polyèdre enveloppe convexe des solutions par un système linéaire. Une étape cruciale dans cette méthode concerne l'identification des contraintes de ce système. Une caractérisation complète du polyèdre est généralement difficile à ob-

tenir. Elle s'avère impossible dans le cas où le problème est NP -dur. Cependant, depuis la découverte de la méthode des ellipsoïde par Khachiyan [Khachiyan \[1980\]](#), une description partielle du polyèdre des solutions peut être suffisante pour résoudre le problème en temps polynomial. En effet en utilisant cette méthode Grotschel, Lovász et Schrijver [Grötschel et al. \[1981\]](#) voir aussi Padberg et Rao [Padberg et Rao \[1980\]](#) ont montré qu'il existe un algorithme polynomial pour résoudre un problème d'optimisation sur un polyèdre donné si et seulement s'il existe un algorithme polynomial pour le problème de séparation associé à ce polyèdre, c'est-à-dire un algorithme qui permet de décider pour un point x donné si x appartient au polyèdre et dans le cas contraire de trouver un hyperplan qui sépare x du polyèdre.

En conséquence si pour un problème d'optimisation combinatoire on connaît un système de contraintes linéaires décrivant partiellement le polyèdre des solutions, et si le problème de séparation associé à ces contraintes est polynomial alors ce système peut être suffisant pour donner une solution optimale au problème en temps polynomial en utilisant une méthode de coupes. Une telle approche a été appliquée avec succès pour plusieurs problèmes d'optimisation combinatoire comme le problème du voyageur de commerce symétrique [Barahona et Grötschel \[1985\]](#) [Padberg et Rinaldi \[1991\]](#) [Grötschel et Padberg \[1979\]](#) et asymétrique [Balas et Fischetti \[1993\]](#) [Queyranne et Wang \[1993\]](#) et le problème de la coupe maximale, le problème de partition en clique [Wakabayashi \[1986\]](#).

En effet, un problème d'optimisation combinatoire est un problème qui prend comme support un ensemble fini E et une fonction $f : 2^E \rightarrow \mathbb{R}$ et qui consiste à maximiser ou minimiser la fonction f sur l'ensemble des parties de E ayant une certaine propriété selon le problème étudié. On peut associer à chaque solution réalisable (partie de E ayant une certaine propriété) un vecteur caractéristique qui prend des valeurs dans $\{0, 1\}^{|E|}$. Supposons que S est l'ensemble des vecteurs caractéristiques de toutes les solutions réalisables du problème, il représente l'ensemble des points dans $\{0, 1\}^{|E|} \subseteq \mathbb{R}^{|E|}$. Soit $conv(S)$ l'enveloppe convexe des points de S . Ce dernier est appelé *polytope*. Le polytope peut être aussi défini comme l'intersection d'un nombre fini de demi espaces.

Dans ce manuscrit nous nous sommes intéressés à la caractérisation

d'un polyèdre combinatoire, plus précisément un $\{0,1\}$ -polytope associé aux solutions d'un certain problème d'optimisation combinatoire et aux liens entre les facettes de ce polyèdre. Nous voulons par ce travail mettre l'accent sur la connectivité (lien entre) de certains polyèdres et essayer d'obtenir la description complète ou partielle d'un polyèdre à partir d'un autre polyèdre dont la description complète ou partielle est déjà connue. Pour une meilleure compréhension et visualisation des techniques utilisées, nous nous intéressons au polyèdre associé au problème de forêts d'étoiles de poids maximum dans un graphe.

Le problème de forêts d'étoiles de poids maximum a été peu étudié autant sur le plan algorithmique que sur le plan polyédrique. Cependant un algorithme linéaire dans le cas des arbres a été proposé par Nguyen et al. [Nguyen et al. \[2008\]](#). Nous avons proposé un algorithme linéaire dans le cas des cycles [Aoudia et al. \[2014\]](#). Par la suite, Nguyen dans [Nguyen \[2015\]](#) a proposé un algorithme linéaire dans le cas des cactus. Contrairement à plusieurs problèmes d'optimisation combinatoires NP-difficile, l'approche polyédrique du problème des forêts d'étoiles, à notre connaissance, n'a pas été traité. Aussi nous allons apporter notre contribution pour combler ce vide où nous proposons une description complète du polytope associé au problème des forêts d'étoiles défini dans les cycles et les arbres et nous introduisons de nouvelles inégalités définissant des facettes.

Dans ce document, nous nous intéressons à l'étude polyédrique de l'enveloppe convexe des solutions du problème des forêts d'étoiles de poids maximum.

Dans le chapitre deux, nous introduisons le problème des forêts d'étoiles de poids maximum et quelques problèmes qui sont en étroite relation avec le premier. Nous allons ensuite, discuter des applications du problème des forêts d'étoiles plus précisément ses applications dans la gestion optimale de diversité et dans la bio-informatique. Nous donnons une formulation du problème en programmation linéaire en nombres entiers qui va nous permettre de définir l'enveloppe convexe des solutions formant ainsi un polytope dont l'étude sera l'objet du prochain chapitre.

Dans le chapitre trois, nous définissons le polytope des forêts d'étoiles $SFP(G)$. Nous allons d'abord discuter de ses propriétés, ensuite exposer ses inégalités définissant des facettes. Nous définissons certaines classes

de facettes qui vont nous permettre de fournir une description complète du $SFP(G)$ dans certaines classes de graphes notamment les cycles et les arbres.

Dans le chapitre quatre, nous allons étudier le polytope des forêts d'étoiles des graphes complets. Nous allons adopter la notation P_n pour le polytope $SFP(K_n)$ où K_n est le graphe complet défini sur n sommets. Nous allons ainsi discuter des propriétés du polytope P_n et nous allons introduire des inégalités définissant des facettes de P_n et que nous nommons *facettes fondamentales*. Ces dernières seront utilisées dans des opérations récursives dans les graphes que nous définirons dans ce même chapitre et qui vont nous permettre d'introduire de nouvelles facettes pour P_n et/ou de les généraliser. Nous concluons le chapitre par une description complète du polytope des forêts d'étoiles P_n pour $n = 4$ et une discussion des relations de P_4 avec P_n pour certaines valeurs de $n > 4$.

Le chapitre cinq, sera dédié à la partie algorithmique de notre travail en l'occurrence l'algorithme linéaire pour trouver une forêt d'étoiles de poids maximum dans les cycles. Ainsi qu'une brève explication des algorithmes de séparation des inégalités introduites dans les chapitres trois et quatre pour la résolution du problème de forêts d'étoiles de poids maximum.

PRÉLIMINAIRES

1

Ce chapitre résume les outils mathématiques qui nous seront utiles pour l'introduction et la compréhension de la thématique abordée dans ce manuscrit, la combinatoire polyédrique, en l'occurrence la théorie des graphes, l'algèbre linéaire, la programmation linéaire, la programmation linéaire en nombre entiers ainsi que certaines propriétés de la complexité combinatoire et algorithmique. Nous allons par cela spécifier les notations adoptées tout au long de ce document. Elles ne se présentent pas toutes dans ce chapitre, il y aura des notions qui apparaîtront au fur et à mesure.

1.1 ALGÈBRE LINÉAIRE ET PROGRAMMATION LINÉAIRE

Un vecteur $x \in \mathbb{R}^n$ est dit une *combinaison linéaire* des vecteurs $x_1, x_2, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ si pour $\lambda_i \in \mathbb{R}, i = 1 \dots k$, nous avons

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i.$$

En plus si $\lambda_i \geq 0 \forall i = 1, \dots, k$ nous l'appelons *combinaison conique*. Si la combinaison linéaire vérifie $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ alors elle est dite *combinaison affine* des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_k .

Quand le vecteur x est une combinaison à la fois conique et affine des vecteurs x_1, x_2, \dots, x_k , il est dit définir une combinaison convexe de ces vecteurs x_1, x_2, \dots, x_k .

Une combinaison est dite *propre* si ni $\lambda = 0$ ni $\lambda = e_j$ pour tout $j = 1 \dots k$ où e_j est un vecteur dans \mathbb{R}^k où seule la j 'ième composante prend la valeur 1 quand toutes les autres sont zéro.

Pour un ensemble non vide $S \subseteq \mathbb{R}^n$ on désigne par $aff(S)$ (resp. $conv(S)$) l'*enveloppe affine* de S (resp. l'*enveloppe convexe* de S)

Un sous ensemble $S \subseteq \mathbb{R}^n$ est dit *affinement indépendant* (resp. linéairement indépendant) si aucun de ses éléments n'est une combinaison *affine* (resp. *linéaire*) propre des éléments de S . Autrement S est dit affinement (resp. linéairement) *dépendant*.

Pour tout sous ensemble de \mathbb{R}^n le rang de S noté $rg(S)$ (resp. rang affine de S noté $arg(S)$) le plus grand nombre d'éléments de S linéairement indépendants (resp. affinement indépendants).

1.2 THÉORIE DES GRAPHES

Soit V un ensemble non vide et soit $E = \{uv | u, v \in V, u \neq v\}$ l'ensemble des liens entre les éléments de V , la paire $G = (V, E)$ est appelée *un graphe*. L'ensemble V représente *les sommets* du graphe et l'ensemble E celui des *arêtes* du graphe $G = (V, E)$. Si $e = uv$ est une arête du graphe alors on dit que l'arête e *joint* u et v ou l'arête e est *incidente* aux sommets u et v et que ces derniers sont dits les *extrémités* de l'arête e . Deux sommets u, v sont *adjacents* ou *voisins* si il existe une arête qui joint u et v . Le graphe tel qu'il est défini ci-dessus est un graphe *simple* il n'admet pas de boucles

(pas d'arête entre un sommet et lui même), et pas d'arête multiple entre deux sommets. Deux arêtes sont dites *adjacentes* si elles ont une extrémité commune. Un graphe est dit *complet* si pour toute paire de sommets $u, v \in V, u \neq v$ il existe une arête $e = \{u, v\} \in E$. On note un graphe complet par $G = (V, E) \equiv K_n$ où $n = |V|$.

Pour tout sous ensemble de sommets $W \subseteq V$ dans G , nous définissons l'ensemble des arêtes joignant W et $V \setminus W$ par $\delta(W) = \{\{u, v\} | u \in W, v \in V \setminus W\}$ et $\delta(W)$ est dite la *coupe* induite par W . Les coupes dans G sont aussi appelées *cocycles*. Pour tout $v \in V$, nous écrivons $\delta(v)$ pour désigner la coupe induite par un singleton $\delta(\{v\})$ et sa taille $|\delta(v)|$ est appelée le *degré* de v que nous notons $d(v)$. L'ensemble des voisins de v noté $N(v)$ désigne l'ensemble des sommets adjacents à v .

Soit $G = (V, E)$ est un graphe et si $G' = (V', E')$ un graphe tel que $V' \subseteq V$ et $E' \subseteq E$, alors G' est dit *un sous graphe* de G . Nous disons aussi que G' est contenu dans G ou G contient G' . Pour un graphe $G = (V, E)$ et un sous ensemble de sommets $V' \subseteq V$, $E(V')$ est l'ensemble des arêtes de E induite par V' (dont les deux extrémités sont dans V'), le sous graphe $G' = (V', E(V'))$ est dit *sous graphe sommet-induit* par V' de G ou en plus court (*sous graphe induit*). De manière similaire pour un sous ensemble d'arêtes $E'' \subseteq E$, on désigne par $V(E'')$ l'ensemble des sommets extrémités des arêtes de E'' d'où $V(E'') = \{v, u \in V | uv \in E''\}$. Le sous graphe résultant $G'' = (V(E''), E'')$ est dit le *sous graphe arête induit* de G engendré par E'' ou *sous graphe partiel* de G . Si $V(E'') = V$, alors G'' est dit *graphe partiel* de G .

Deux graphes $G_1 = (V_1, E_1)$, $G_2 = (V_2, E_2)$ sont dits *isomorphes* si il existe une fonction bijective $\phi: V_1 \rightarrow V_2$ telle que pour tout $u, v \in V_1$ nous avons $\{u, v\} \in E_1$ si et seulement si $\{\phi(u), \phi(v)\} \in E_2$.

Le *line-graph* noté $L(G)$ d'un graphe G est un graphe simple dont l'ensemble des sommets est l'ensemble des arêtes du graphe G et dans lequel deux sommets sont adjacents si et seulement si leurs arêtes correspondantes dans G ont un sommet commun.

Une séquence d'arêtes $W = \{\{v_1, v_2\}, \{v_2, v_3\}, \dots, \{v_{k-2}, v_{k-1}\}, \{v_{k-1}, v_k\}\} \subseteq E$ est une *chaîne* entre v_1 et v_k dans G . Le nombre d'arêtes dans la séquence est la *longueur de la chaîne*. Si $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$, la chaîne W est dite *chaîne élémentaire* de longueur $k - 1$, nous la notons P_k . Un graphe est dit *connexe* si entre chaque paire de sommets $u, v \in V$, il existe une chaîne

dans G . Un graphe défini par un seul sommet, $G = (\{v\}, \emptyset)$, est par convention *connexe*.

La *distance* entre une paire de sommets $\{u, v\}$ notée $d(u, v)$ est la longueur de la plus courte chaîne reliant u et v . La distance entre deux sommets disjoints est par convention $+\infty$. Le *diamètre* d'un graphe noté $diam(G)$ est la plus grande distance entre toutes les paires de sommets de G .

Soit P_k une $\{v_1, v_k\}$ -chaîne de longueur $k - 1$ dans $G = (V, E)$ et $v_1 v_k \in E$. Alors $P_k \cup \{v_k, v_1\}$ est appelée chaîne fermée ou *cycle* de longueur k , il est aussi appelé *k-cycle*.

Pour un graphe quelconque $G = (V, E)$, les sous graphes induits maximaux (maximal au sens de l'inclusion) H_i de G sont dits *composantes connexes* de G . Tout graphe G admet une seule et unique décomposition en composantes connexes.

Un graphe ne comprenant pas de cycles est dit graphe *acyclique* ou *forêt*. Une forêt connexe définit un *arbre*. Si un graphe partiel de G est un arbre, alors il est dit *un arbre couvrant* de G .

Dans un arbre, toute paire de sommets u et v est connectée par exactement une chaîne. Un arbre défini sur n sommets contient $n - 1$ arêtes. Un arbre de diamètre au plus 2 est dit *étoile*. Une *forêt d'étoiles* est un graphe où chaque composante connexe est une étoile. Une *forêt d'étoiles couvrante* d'un graphe G est une forêt d'étoiles couvrant tout les sommets de G , autrement dit c'est un sous graphe couvrant tous les sommets de G où chaque composante connexe est une étoile. Par convention, un sommet isolé est une étoile. Autrement dit, Une forêt d'étoile dans un graphe G est un graphe partiel acyclique où chaque composante connexe est de diamètre au plus 2.

Une *clique* dans un graphe $G = (V, E)$ est un sous ensemble de sommets $V_C \subseteq V$ tel que chaque paire de sommets $u, v \in V_C$ est connectée par une arête dans E . Autrement dit, le sous graphe induit par V_C , $G_C = (V_C, E(V_C))$ forme un graphe complet.

Un *stable* dans G est un sous ensemble de sommets $V_S \subseteq V$ tel que aucune paire de sommets $u, v \in V_S$ n'est connectée. Le complémentaire d'une clique est un stable et vice-versa.

Un *absorbant* ou *dominant* dans un graphe $G = (V, E)$ est un ensemble des sommets V_A tel que tout sommet de V est soit dans V_A ou adja-

cent à un sommet de V_A . Nous pouvons l'exprimer comme $V_A = \{v \in V \mid \forall u \in V \setminus v, \{u, v\} \in E\}$. Une *arête-absorbant* est un ensemble d'arêtes $E_A \subseteq E$ tel que pour toute arête $e \in E$; nous avons $e \in E_A$ ou e est adjacente à une arête dans E_A .

Un *couplage* dans $G = (V, E)$ est un ensemble d'arêtes $M \subseteq E$ tel que deux quelconques des arêtes de M sont non adjacentes. Un sommet v est dit *saturé* par un couplage M s'il existe une arête de M incidente à v . Un couplage qui sature les sommets du graphe G est dit *parfait*.

Un graphe est représenté par un diagramme dans un plan où chaque sommet $v \in V$ est représenté par un petit cercle, et chaque arête $e = \{u, v\}$ par un trait. Les cercles et les lignes sont souvent étiquetés selon les sommets et les arêtes leur correspondant.

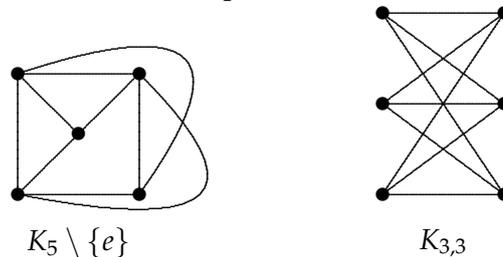


FIGURE 1.1 – Exemple de graphes.

Quand un graphe peut être dessiné dans le plan de sorte à ce que les sommets soient des points distincts, et les arêtes des traits (courbes) simples qui ne se croisent pas, le graphe est dit *planaire*.

Un graphe $G = (V, E)$ est dit *biparti* si on peut partitionner l'ensemble de ses sommets V en deux sous ensemble $V = V_1 \cup V_2$ où $V_1 \cap V_2 = \emptyset$ et qu'aucun sommet dans V_i n'est adjacent à un sommet dans V_i pour $i = 1, 2$. Il est noté $G = (V_1, V_2, E)$.

Un *graphe orienté* (un *digraphe*) est une paire $D = (V, A)$ où V est un ensemble fini et $E \subseteq V \times V$ un ensemble de paires ordonnées d'éléments distincts de V . Comme pour les graphes, les éléments de V sont appelés *sommets* de $D = (V, A)$. Les éléments de A sont appelés les *arcs* de D . Si $a = (u, v)$ est un arc de $D = (V, A)$ alors a est dit *incident* à u et aussi *incident* à v , ou u est la queue (père) de a , v est la tête (fils) de a . Nous pouvons aussi dire que l'arc $a = (u, v)$ va de u vers v ; u et v sont les sommets extrémités de a . Si X et Y sont deux sous-ensembles de sommets disjoints dans V alors l'ensemble des arcs dont l'extrémité initiale (la queue) est dans X et l'extrémité terminale (la tête) dans Y est noté par $(X : Y)$. Deux sommet

s $(u, v) \in V$ sont dits *adjacents* dans $D = (V, A)$ si $(u, v) \in A$ ou $(v, u) \in A$. Pour tout $V' \subseteq V$ nous définissons $A(V') = \{(u, v) \in A \mid u, v \in V'\}$ et pour tout $A' \subseteq A$ nous définissons $V(A') = \{u, v \in V \mid (u, v) \in A'\}$.

Etant donné un graphe $G = (V, E)$, attribuons à chaque arête de E une orientation précise; cette façon, de faire nous permet de construire un ensemble d'arcs A sur l'ensemble des sommets V où chaque arête $\{u, v\} \in E$ devient soit l'arc (u, v) ou l'arc (v, u) . Ainsi construit, le graphe $D = (V, A)$ est dit *une orientation du graphe* $G = (V, E)$.

Pour $v \in V$ on note par $\delta^-(v) = \{(u, v) \in A \mid u \in V\}$ l'ensemble des arcs entrants v , $\delta^+(v) = \{(v, u) \in A \mid u \in V\}$ l'ensemble des arcs sortants de v et $d(v) = |\delta^-(v)| + |\delta^+(v)|$ représente le degré du sommet v dans D .

Soit \succeq une relation d'ordre défini dans V . La relation \succeq est dite *transitive* Pour tout triplet $u, v, w \in V$ si $u \succeq v$ et $v \succeq w$ alors $u \succeq w$.

Un graphe orienté muni d'une relation d'ordre transitive est dit *transitif*.

Problème de plus court chemin

D'après Sakarovitch [Sakarovitch \[1984\]](#) un graphe $G = (X, A)$ muni d'une application $d : U \rightarrow \mathbb{R}$ qui à chaque arc fait correspondre sa longueur (son poids ou coût) définit un réseau $R = (X, A, d)$. Étant donnés deux sommets x et y d'un réseau $R = (X, A, d)$, trois cas peuvent se présenter

1. Il n'existe pas de chemin de x à y dans R .
2. Il existe un chemin de x à y dans R mais pas de chemin de longueur minimum.
3. Dans l'ensemble des chemin joignant x à y dans R , il en existe un de longueur minimum.

Ce dernier cas donne lieu à un problème connu en optimisation combinatoire dit *problème du plus court chemin*. Pour résoudre le problème de plus court chemin nous avons plusieurs Algorithmes, notamment l'algorithme de Dijkstra [Sakarovitch \[1984\]](#) ou encore l'algorithme de Belman-Ford [Sakarovitch \[1984\]](#) [Cormen et al.](#)

Algorithme de Belman-Ford

L'algorithme de Bellman-Ford résout le problème du plus court chemin à une seule source où les coûts des arcs peuvent être négatifs. Les plus courts chemins sont toujours bien définis dans les graphes orientés acycliques.

ALGORITHME DE BELLEMAN-FORD

- * Tri topologique des sommets de G .
- * Initialiser le graphe à une source (G, s) .
- * Pour tout sommet u , pris dans le tri topologique ordonné
 - * Pour tout sommet $v \in G.Adj[u]$.
 - * Relaxer $\{u, v, w\}$.

La complexité de l'algorithme de Belman-Ford dans le cas générale est $\mathcal{O}(|A| \cdot |X|)$ [Cormen et al.](#). Quand le graphe $(D=(X,A))$ est orienté sans circuit, l'algorithme de Belman-Ford est de complexité $\mathcal{O}(|A| + |X|) = \mathcal{O}(|A|)$ [Cormen et al.](#).

1.3 POLYÈDRE COMBINATOIRE

Pour tout (m, n) -matrice $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$ et pour tout m -vecteur $b \in \mathbb{R}^m$, on appelle l'ensemble

$$P(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$$

un polyèdre où plus précisément, le polyèdre induit par la matrice A et le vecteur b . Tout polyèdre peut être vu comme une intersection d'un nombre fini de demi-espaces. Tout demi-espace est représenté par une inégalité linéaire. Un *polytope* est un polyèdre borné. Si $A = (a_{ij})_{i=1, \dots, m, j=1, \dots, n}$ et $b = (b_1, b_2, \dots, b_m)^T$, alors le polyèdre $P(A, b)$ peut être vu comme l'intersection de \mathbb{R}^n et les demis espaces H_i de \mathbb{R}^n donné par

$$H_i = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j \leq b_i\} \text{ pour } i \in \{1, 2, \dots, m\}, A_i \neq 0.$$

Etant donné un polyèdre, il n'existe pas de représentation unique au sens d'une matrice A et vecteur b . Les inégalités qui définissent les sous

espaces H_k pour $k \in \{1, 2, \dots, m\}$ sont dites *redondantes* respectivement à $P(A, b)$ si $x \in \bigcap_{i=1, i \neq k}^m H_i$ implique $x \in H_k$.

Il existe plusieurs représentations algébriques équivalentes pour un polyèdre P sous forme d'égalités et/ou d'inégalités linéaires. Généralement, l'ensemble des variables se restreint à l'ensemble des variables de même signe (fréquemment positif) . La forme générale d'une représentation algébrique d'un polyèdre est donnée comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} By + Cz \leq d \\ Dy + Ez = e \\ y \in \mathbb{R}^p \\ z \in \mathbb{R}^q \\ z \geq 0 \end{array} \right. \quad (1.1)$$

Où, B, C, D, E sont des matrices réelles et d, e des vecteurs réels de dimensions appropriées. A travers l'identification $x = \begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix}$, $x \in \mathbb{R}^{p+q}$, il est facile de voir que (1.1) définit le polyèdre $P(A, b)$ pour

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \\ -D & -E \\ 0 & -I_q \end{pmatrix} \text{ et } b = \begin{pmatrix} d \\ e \\ -e \\ 0 \end{pmatrix}$$

En plus de la présentation $P = P(A, b)$, nous utilisons la présentation

$$P = P^=(A, b) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}.$$

En effet, si le polyèdre P n'est pas de pleine dimension (ce qui veut dire $\dim(P) = k < n$), il devrait être contenu dans un sous espace affine S de \mathbb{R}^n de dimension k tel qu'il existe une représentation de la forme suivante :

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Bx \leq d, Dx = e\}$$

où D est une matrice de plein rang ayant $n - k$ lignes et $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx =$

e }. On appelle ce système d'équations, $Dx = e$, un *système d'équation minimal* pour P .

Une inégalité $a^T x \leq a_0$ avec $a \neq 0$ est dite *inégalité valide* respectivement au polyèdre P si pour tout $y \in P$, $a^T y \leq a_0$. Autrement dit $P \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq a_0\}$ se qui ce traduit verbalement : le polyèdre P est contenu dans le demi espace défini par $a^T x \leq a_0$. Si $a^T x \leq a_0$ est une inégalité valide et que l'intersection d'un demi-espace affine de dimension $n - 1$, $H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = a_0\}$ avec P est non vide et différente de P , alors $F = P \cap H$ est dite *face* de P . On dit aussi que F est *la face* de P défini par l'inégalité valide $a^T x \leq a_0$. Ainsi l'ensemble $H = \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = a_0\}$ est *l'hyperplan* induit par l'inégalité linéaire $a^T x \leq a_0$.

Deux inégalités définissant des faces pour P , $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ et $I_b \equiv b^T x \leq b_0$ sont dites *équivalentes* si elles définissent la même face de P i.e $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x = a_0\} = P \cap \{x \in \mathbb{R}^n | b^T x = b_0\}$. Noter que toute face d'un polyèdre est elle même un polyèdre et l'intersection de deux faces de P est aussi une face de P .

Nous allons dire que " $a^T x \leq a_0$ " induit une face de P " au lieu de " $a^T x \leq a_0$ " induit une face $P \cap \{x \in \mathbb{R}^n | a^T x \leq a_0\}$ de P .

Parmi les faces du polyèdre P , il y a celles qui sont plus importantes que d'autres, on peut les distinguer selon leurs dimensions. La face de dimension 0 représente *un point extrême* du polyèdre P et la face de dimension $\dim(P) - 1$ représente une *facette* du polyèdre P . La facette est une face maximale (maximal au sens de l'inclusion), aucune autre face propre ne la contient. Un point extrême est une face minimale de P autrement dit c'est une face propre de P qui ne contient aucune autre face.

Quand on s'intéresse aux polyèdres, spécialement à l'étude algorithmique de ces derniers, ce qui nous importe est une description minimale, non redondante des égalités et inégalités qui les définissent. Le théorème qui suit résume quelques propriétés de facettes d'un polytope quelconque P .

Théorème 1.1 Soit $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax \leq b, Dx = d\}$ un polyèdre où $Dx = d$ est un système d'équation minimal de P consistant en k équation. L'élimination de toute inégalité du système $Ax \leq b$ produit un polyèdre P' qui contient strictement P .

(i) La dimension de P est $\dim(P) = n - k$.

- (ii) Toute inégalité du système $Ax \leq b$ définit une facette pour P et aucune inégalité n'est équivalente à une autre dans le même système.
- (iii) Si en plus P est de pleine dimension i.e $k = 0$, et $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$ alors toute inégalité de $Ax \leq b$ est unique (à une multiplication près par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$).

Si $a^T x \leq a_0$ est une inégalité induisant une facette pour le polyèdre P où $a = (a_1, a_2, \dots, a_n)^T \in \mathbb{Z}^n$, $a_0 \in \mathbb{Z}$ et les entiers a_0, a_1, \dots, a_n sont premiers i.e. il n'existe aucun $\lambda \in \mathbb{Z}$, $\lambda \geq 2$ tel que $\frac{a_i}{\lambda} \in \mathbb{Z}$ pour tout $i \in \{0, 1, \dots, n\}$ alors $a^T x \leq a_0$ est dite une inégalité à coefficients entiers premiers induisant une facette pour le polytope P .

Pour tout polyèdre de pleine dimension $P \in \mathbb{Q}^n$ comprenant des points extrêmes rationnels il existe un système unique d'inégalités $Ax \leq b$, où chaque inégalité $a^T x \leq a_0$ dans $Ax \leq b$ est une inégalité à coefficients entiers premiers induisant une facette pour P .

Notons que tous les polyèdres abordés dans cette thèse sont tous bornés, ainsi nous nous focalisons sur les polytopes. Un polytope est l'enveloppe convexe de tous ses points extrêmes.

Théorème 1.2 [Schrijver \[2003\]](#) Un polytope est cet ensemble dans \mathbb{R}^n qui est l'enveloppe convexe d'un nombre fini de points dans \mathbb{R}^n .

Le Théorème 1.2 est un cas particulier du Théorème fondamental de Weyl [Schrijver \[1986\]](#). La définition des polytopes via leurs points extrêmes va jouer un rôle important tout au long de cette thèse.

Nous nous intéressons plus précisément au $\{0, 1\}$ -polytopes. Un $\{0, 1\}$ -polytope est un polytope P défini comme l'enveloppe convexe d'un ensemble fini S où $S \subseteq \{0, 1\}^n$ i.e. $P = \text{conv}(S)$. Un ensemble $S \subseteq \{0, 1\}^n$ est dit *monotone* si pour tout $y \in S$, $x \leq y$ et $x \in \{0, 1\}^n$ implique $x \in S$. Un $\{0, 1\}$ -polytope P est dit *monotone* si pour tout $y \in P$ la relation $0 \leq x \leq y$ implique $x \in P$.

Proposition 1.1 [Schrijver \[1986\]](#) Un polyèdre est monotone si et seulement s'il est enveloppe convexe d'un ensemble monotone S .

Les polytopes de pleine dimension et monotones possèdent des propriétés subtiles que nous abordons ci-après :

Proposition 1.2 Soit $P \subseteq \{0, 1\}^n$ un $\{0, 1\}$ -polytope de pleine dimension et monotone, alors lors les inégalités dite triviales $x_i \leq 0$ définissent des facettes pour le polytope P pour tout $i \in \{1, 2, \dots, n\}$.

On appelle une facette du type $x_i \leq \alpha$ une facette triviale.

Théorème 1.3 *Hammer et al. [1975]* Soit $P \subseteq \{0, 1\}^n$ un $\{0, 1\}$ -polytope de pleine dimension et monotone, alors :

- (i) $x_i \geq 0, i \in \{1, 2, \dots, n\}$ sont les seules inégalités qui induisent des facettes pour le polytope P avec le coté droit des inégalités égal à zéro.
- (ii) Toutes les facettes non triviales de P sont induites par les inégalités $a^T x \leq a_0$ avec $a \geq 0$ et $a_0 > 0$.

L'intérêt dans l'étude des polyèdres et de caractériser explicitement les inégalités qui définissent des facettes, des inégalités induisant des faces essentielles pour la description du polytope (P). La détermination de telles inégalités est une des préoccupations majeures de la combinatoire polyédrique appelée par les pionniers du domaine "La chasse aux facettes" par Grötschel et Padberg *Grötschel et Padberg [1979]*. Trouver un algorithme polynomial pour l'identification des facettes pour une classe de facettes déjà connues suscite le même intérêt.

Pour ce faire, nous allons énoncer deux théorèmes avec leurs preuves, ces derniers sont la base des techniques utilisées pour montrer qu'une inégalité valide pour un polytope donné P définit une facette pour celui-ci. Nous allons aussi discuter de la méthode du lifting séquentiel qui consiste à générer de nouvelles facettes parmi une classe de facettes connue pour un polyèdre combinatoire donné.

Théorème 1.4 *Jünger [1985]* Soit $P \subseteq \mathbb{R}^n$ un polyèdre et $D \subseteq \mathbb{R}^{m \times n}, d \in \mathbb{R}^m$, tel que $\text{aff}(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx = d\}$. Si F est une face (non vide) de P , alors les assertions suivantes sont équivalentes :

- (i) F est une facette de P .
- (ii) $\dim(F) = \dim(P) - 1$.
- (iii) Il existe une inégalité $a^T x \leq a_0$ valide pour P avec les trois propriétés suivantes :
 - (a) $F = \{x \in P \mid a^T x = a_0\}$.
 - (b) Il existe un vecteur $\hat{x} \in P$ tel que $a^T \hat{x} \leq a_0$.

(c) Si une inégalité $b^T x \leq b_0$ est valide pour P telle que $F \subseteq \bar{F} = \{x \in P \mid b^T x = b_0\}$ alors il existe un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et un nombre $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$\begin{aligned} b^T &= \lambda^T D + \mu a^T \\ b_0 &= \lambda^T d + \mu a_0 \end{aligned}$$

Démonstration. (i) \Leftrightarrow (ii) découle directement de la définition de facette.

(ii) \Rightarrow (iii) : on suppose que F est une facette. Aussi (iii)(a) et (iii)(b) découle directement de la définition.

Pour montrer (iii)(c), soit $b^T x \leq b_0$ une inégalité valide pour P . Si $\bar{F} = P$, alors le vecteur b doit être linéairement dépendant des lignes de D ce qui implique l'existence d'un certain vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ tel que $b^T = \lambda^T D$ et on peut choisir $\mu = 0$.

Si $P \neq \bar{F}$ et $F \subseteq \bar{F}$ nous avons $\dim(P) - 1 \leq \dim(\bar{F}) < \dim(P)$ en conséquence $\bar{F} = F$ ce qui implique : $\{x \in P \mid Dx = d, a^T x = a_0\} = \{x \in P \mid Dx = d, b^T x = b_0\}$. La définition de D et le fait que $\text{rg}\left(\begin{smallmatrix} D \\ a^T \end{smallmatrix}\right) = \text{rg}(D) + 1$ (cela découle de (iii)(b)) implique l'existence d'un certain vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et $\mu \neq 0$ avec les propriétés requises.

(iii) \Rightarrow (i) Supposons que \bar{F} est une facette de P et $\bar{x} \in \bar{F}$. Alors nous avons $b^T \bar{x} = b_0$ et par (iii)(c) il existe un certain $\lambda \in \mathbb{R}^m$, et $\mu \in \mathbb{R}$ tels que :

$$(\lambda^T D + \mu a^T) \bar{x} = (\lambda^T d + \mu a_0)$$

ou

$$\mu a^T \bar{x} = \lambda^T (d - D\bar{x}) + \mu a_0$$

et comme $d - D\bar{x} = 0$ et $\mu \neq 0$ (i.e. $b^T x \leq b_0$) ne peut définir une facette.

$$a^T \bar{x} = a_0$$

Ce qui implique $\bar{x} \in F$. Par conséquent du fait que $F \subseteq \bar{F}$ on obtient $F = \bar{F}$.

□

Si nous traitons des polytopes de pleine dimension, alors nous n'avons

pas besoin du système d'équation $Dx = d$ du Théorème 1.4 et la condition (iii)(c) devient :

(iii)(c') Si $b^T x \leq b_0$ est une inégalité valide pour P telle que $F \subseteq \bar{F} = \{x \in P \mid b^T x = b_0\}$ alors il existe un nombre $\mu \in \mathbb{R}$ telle que :

$$b^T = \mu a^T$$

ce qui implique que $b_0 = \mu a_0$.

Maintenant, nous supposons que nous avons une inégalité $a^T x \leq a_0$ valide pour un polytope P dont nous connaissons l'enveloppe affine ; $aff(P) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Dx = d\}$. Nous souhaitons montrer que $a^T x \leq a_0$ définit une facette pour P . Le Théorème 1.4 fournit deux possibilités pour le faire :

- * soit en exhibant $\dim(P) = k$ vecteurs affinement indépendants $x_1, x_2, \dots, x_k \in P$ tel que $a^T x_j = a_0$ pour tout $j \in \{1, 2, \dots, k\}$.
- * Soit par montrer que pour une inégalité $b^T x \leq b_0$ valide pour P vérifiant $\{x \in P \mid a^T x = a_0\} \subseteq \{x \in P \mid b^T x = b_0\}$, il existe un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^m$ et un nombre $\mu \in \mathbb{R}$ tels que $b^T = \lambda^T D + \mu a^T$ et $b_0 = \lambda^T d + \mu a_0$.

En effet, la preuve du Théorème 1.4 montre qu'il suffit de considérer une inégalité $b^T x \leq b_0$ définissant une facette pour le polytope P .

Le deuxième théorème important dans la preuve de facette que nous devons à Padberg, Nemhauser et Trotter est énoncé ci-après.

Théorème 1.5 (*Padberg Padberg [1973]Padberg [1975], Nemhauser et Trotter Nemhauser et Trotter [1975]*) Soient $S \subseteq \{0, 1\}^n$ et $P = \text{conv}(S)$ un polytope monotone de pleine dimension. Pour $J \subseteq N = \{1, 2, \dots, n\}$, soient $Z_j = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_j = 0\}$, $S_j = S \cap Z_j$ et $P_j = P \cap Z_j$ pour tout $j \in J$. Si pour $a_0 > 0$ l'inégalité :

$$\sum_{k \notin J} a_k x_k \leq a_0$$

définit une facette pour le polytope P_j et

$$a_j = a_0 - \max \left\{ \sum_{k \notin J} a_k x_k \mid e^j + x \in S_j \setminus \{j\} \right\}$$

alors l'inégalité

$$a_j x_j + \sum_{k \notin J} a_k x_k \leq a_0$$

défini une facette pour le polyèdre $P_{J \setminus \{j\}}$.

Démonstration. Comme P est monotone et de pleine dimension, d'après le Théorème 1.3, toute inégalité définissant une facette pour un polyèdre P de la forme $d^T x \leq d_0$ satisfait $d \geq 0$ et $d_0 > 0$. Cette propriété est reportée sur P_j pour tout $J \subseteq N$. L'inégalité $\sum_{k \notin J} a_k x_k \leq a_0$ définit une facette pour P_j et $\dim(P_j) = n - |J|$. Alors, il existe une collection $C_j \subseteq S_j$ de $n - |J|$ vecteurs linéairement indépendants $c_p^j \in S_j$, $p \in \{1, 2, \dots, n - |J|\}$ qui satisfont $\sum_{k \notin J} a_k c_p^j = 0$. La validité de l'inégalité $\sum_{k \notin J} a_k x_k \leq a_0$ respectivement à P_j implique $a_j \geq 0$. De la définition de a_j , on déduit que $a_j x_j + \sum_{k \notin J} a_k x_k \leq a_0$ est valide respectivement à $P_{J \setminus \{j\}}$. Cette dernière inégalité définit une facette pour le polytope $P_{J \setminus \{j\}}$ puisque $C_{J \setminus \{j\}} = C_j \cup \{\hat{x}\}$ où $\hat{x} = x^* + e^j$ pour une solution optimale x^* de $\max\{\sum_{k \notin J} a_k x_k \mid e^j + x \in S_{J \setminus \{j\}}\}$ est une collection de $n - |J| + 1 = \dim(P_{J \setminus \{j\}})$ vecteurs linéairement indépendants dans $S_{J \setminus \{j\}}$ satisfaisants $a_j x_j + \sum_{k \notin J} a_k x_k = a_0$. \square

Ce dernier théorème nous montre comment une facette d'un polytope P_j (sous polytope de P) peut être liftée pour définir une facette pour un polytope de dimension supérieure (polytope de dimension $n - |J| + 1$). Pour cette raison le coefficient a_j défini dans le Théorème 1.5 est dit *le coefficient lifté* de x_j . En répétant cette procédure, on peut éventuellement obtenir des facettes pour le polytope P . Comme les coefficients du lifting peuvent être calculés dans un ordre arbitraire, plusieurs facettes de P sont obtenues de cette manière. Cette procédure est dite *le lifting séquentiel*. Toute application du théorème entraîne la résolution d'un problème de programmation linéaire en $\{0, 1\}$ qui est connu *NP-difficile* dans le cas général. Pourtant, ce résultat nous offre un moyen utile pour dériver des inégalités définissant des facettes pour les polyèdres combinatoires.

1.4 PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS

Le domaine de la programmation linéaire en nombres entiers est concerné par l'étude des problèmes de la programmation linéaire avec une restriction supplémentaire sur l'ensemble des solutions réalisables qui est

l'intégralité. Un problème de programmation linéaire en nombres entiers noté *PLNE* peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P(A, b) \\ x \in \mathbb{Z}^n \end{cases} \quad (1.2)$$

On peut aussi ajouter une restriction sur l'ensemble des solutions réalisables en supposant cette fois qu'elles prennent des valeurs dans $\{0, 1\}$.

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P(A, b) \\ x \in \{0, 1\}^n \end{cases} \quad (1.3)$$

Dans ce document, nous sommes plutôt concernés par la programmation linéaire bivalente (en variable $\{0, 1\}$).

Contrairement aux problèmes de programmation linéaire qui sont de complexité polynomiale [Karmakar \[1984\]](#) [Khachiyan \[1980\]](#), les problèmes de programmation linéaire en nombres entiers quant à eux dans le cas général sont \mathcal{NP} -difficiles. Les méthodes classiques pour la résolution de ces problèmes sont les plans coupant ou, la séparation et l'évaluation ou encore une combinaison des deux. Nous considérons le programme *PLNE* (1.2), par la suppression de la dernière contrainte (la contrainte d'intégralité) résulte un problème appelé *la relaxation linéaire* de (1.2).

Dans la suite nous allons énoncer l'algorithme de séparation et coupe tels qu'il sont cités dans [Jünger \[1985\]](#) et [Wakabayashi \[1986\]](#). Supposons que $\{x \in \mathbb{Z}^n \mid x \in P(A, b)\} \neq \emptyset$ et que $P(A, b)$ est le polyèdre qui lui est associé.

1.4.1 Algorithme de Séparation et coupe

Pour définir l'algorithme de séparation et coupe (branch-and-cut, en anglais) nous aurons à introduire deux algorithmes pour la résolution des problèmes *PLNE*.

Méthode des Plans Coupants

PC1 Initialiser le PL à

$$\begin{aligned} \max c^T x \\ x \in P(A, b) \end{aligned}$$

PC2 Résoudre le PL pour obtenir un point extrême optimal.

PC3 Si $x^* \in \mathbb{Z}^n$ alors **stop**. x^* est une solution optimale.

PC4 Générer un vecteur a et un nombre a_0 tel que $a^T x^* > a_0$ mais $a^T x \leq a_0$ pour tout sommet entier $x \in P(A, b)$. Ajouter l'inégalité $a^T x \leq a_0$ à l'ensemble des contraintes du PL et **aller** à **PC2**.

Méthode de Séparation et Evaluation

SE1 Initialiser la liste des problèmes L au problème : Le relaxé linéaire du (1.2) et $\hat{c} \leftarrow \infty$.

SE2 Si L est vide alors **stop**. \hat{x} est une solution optimale.

SE3 Choisir un problème $PL \in L$, supprimer PL de la liste L et résoudre le PL .

SE4 Si il n'y a pas de solution, **aller** à **SE2**.

SE5 Soit $x^* = (x_1^*, x_2^*, \dots, x_n^*)$ le point extrême optimum trouvé à l'étape **SE3**. Si $c^T x^* \leq \hat{c}$ alors **aller** à **SE2**.

SE6 Si $x^* \notin \mathbb{Z}^n$ alors **faire** : choisir i tel que $x_i^* \notin \mathbb{Z}$, noter par $PL1$ le problème PL avec la nouvelle contrainte $x_i \leq \lfloor x_i^* \rfloor$ et par $PL2$ le problème PL avec une contrainte additionnelle $x_i \geq \lceil x_i^* \rceil$. Ajouter $PL1$ et $PL2$ à la liste L et **aller** à **SE3**.

SE7 Si $x^* \in \mathbb{Z}^n$, et $c^T x^* \leq \hat{c}$ alors $\hat{x} \rightarrow x^*$ **aller** à **SE2**.

La combinaison des deux méthodes précédentes donne lieu à une nouvelle méthode appelée *méthode de séparation et coupe*, nous la décrivons dans ce qui suit :

BC1 Initialisation : Noter le problème initial PL par $PLNE^0$ et poser l'ensemble des sommets actifs $L = PLNE^0$. Poser la borne supérieure $z^h = +\infty$. Choisir un problème $l \in L$ et poser sa borne inférieure $z^l = -\infty$.

BC2 Fin : Si $L = \emptyset$, alors la solution x mène à la valeur optimal de l'objectif. Si x n'existe pas, le $PLNE$ n'admet de solution.

- BC3** Election du problème : choisir et supprimer un problème $PLNE^l$ de L .
- BC4** Relaxation : résoudre le problème LPR de ILP^l . Si la relaxation est non réalisable, poser $z^l = -\infty$ et aller à l'étape [BC5]
- BC5** Ajouter un plan coupant : chercher les plans coupants, les ajouter à la relaxation. Retourner à l'étape [BC4]
- BC6** parcourir et élaguer :
- (a) Si $c^l \geq c$, alors aller à l'étape [BC2]
 - (b) Si $c^l < c$ et $x^l R$ entier réalisable, alors mettre à jour $z = z^l$, supprimer le problème avec $z^l \geq z$, et aller à l'étape [BC2].
- BC7** *Partition* : soit $\{S^l_j\}_{j=1}^{j=k}$ une partition de l'ensemble des contraintes S^l du problème $PLNE^l$. Ajouter ces problèmes $\{PLNE^{lj}\}_{j=1}^{j=k}$ à L , où $PLNE^{lj}$ est le $PLNE^l$ avec une restriction sur la zone réalisable S^l_j et Z_{ij} pour $j = 1, \dots, k$ l'ensemble des valeurs z^l pour le problème parent l . Aller à l'étape **BC2**.

1.4.2 Séparation et Optimisation

Nous associons à un problème d'optimisation combinatoire C un polytope $P(C)$. Plus précisément $P(C)$ est l'enveloppe convexe des vecteurs caractéristiques (d'incidence) de toutes les solutions de C . Autrement dit les 0 – 1- polytopes combinatoire sont les polytopes sous la forme

$$P = conv(F)$$

où $F \subset \{0,1\}^n$, et F représentent les vecteurs d'incidence d'un problème d'optimisation combinatoire. À tout problème d'optimisation combinatoire de la forme

$$\begin{cases} \max c^T x \\ x \in P = conv(F) \end{cases} \quad (1.4)$$

pour un certain $F \subset \{0,1\}^n$ et $c \in \mathbb{Q}^n$, nous associons le problème de décision suivant :

Etant donné un vecteur $\hat{x} \in \mathbb{Q}^n$ décider si $x \in P$, et si $x \notin P$ trouver un vecteur $d \in \mathbb{Q}^n$ et un nombre $d_0 \in \mathbb{Q}$ tel que l'inégalité $d^T x \leq d_0$ est valide pour P et $d^T \hat{x} > d_0$.

que nous appelons le problème de séparation de P .

Nous reprenons ci-après un des principaux résultats issu des travaux de Grötschel et al. [Grötschel et al. \[1981\]](#) sur le problème de séparation.

Théorème 1.6 (*Grötschel et al. [1981]*) *Il existe un algorithme polynomial pour la résolution d'un problème d'optimisation si et seulement s'il existe un algorithme polynomial pour la résolution du problème de séparation associé.*

L'existence d'un algorithme polynomial pour résoudre le problème de séparation est en rapport avec l'identification d'une inégalité $d^T x \leq d_0$ définissant une facette de P si $\hat{x} \notin P$. Alors, résoudre le problème d'identification des facettes implique l'existence d'un algorithme polynomial pour solutionner le problème d'optimisation (1.4).

Ci-après nous énonçons l'algorithme de séparation [Jünger \[1985\]](#).

Algorithme **SEP**

Input (Un oracle pour l'identification des facettes du polytope P . Un vecteur $c \in \mathbb{Z}^n$);

output (Un point extrême $x^* \in P$ avec $c^T x^* \geq c^T x$ pour tout $x \in P$);

pour $j := 1$ to n do $p_j := 2^n c_j + 2^{n-j}$; **faire**
initialiser LP à

$$\begin{aligned} \max \quad & p^T x \\ & 0 \leq x \leq 1 \end{aligned}$$

initialiser réalisable := faux;

tant que non réalisable **faire**

résoudre LP , soit x^* une solution optimale;

résoudre le problème d'identification d'une facette pour x^* et P ;

si $x^* \in P$ **alors**

réalisable := vrai,

sinon

poser $d^T x \leq d_0$ définit une facette de P telle que $d^T x^* > d_0$; ajouter $d^T x \leq d_0$ aux contraintes de LP .

fin du si

fin du tant que

fin du pour

La boucle **Pour** au début de l'algorithme SEP perturbe les coefficients de la fonction objectif tout en maintenant la condition énoncée dans la proposition suivante :

Proposition 1.3 *Grötschel et Pulleyblank [1981]* Si $p_j = 2^n + c_j + 2^{n-j}$ alors le problème

$$\begin{cases} \max p^T x \\ x \in P \end{cases} \quad (1.5)$$

possède une solution optimale unique x^* qui est aussi une solution optimale de (4.3.2).

Démonstration. Supposons qu'il existe deux solutions optimales différentes de (4.3.2). Comme P possède uniquement des points extrêmes en $\{0,1\}$, il s'ensuit qu'il existe deux solutions $x^1, x^2 \in \{0,1\}^n$. Soit $j \in \{1, \dots, n\}$ tel que $x_k^1 = x_k^2$ pour tout $k \in \{1, 2, \dots, j-1\}$ et $x_j^1 \neq x_j^2$ ainsi nous avons

$$\begin{aligned} 0 &= p^T x^1 - p^T x^2 \\ &= \sum_{k=j}^n p_k x_k^1 - \sum_{k=j}^n p_k x_k^2 \\ &= 2^n \left(\sum_{k=j}^n c_k (x_k^1 - x_k^2) \right) + \sum_{k=j}^n 2^{n-k} (x_k^1 - x_k^2). \end{aligned}$$

Or la première somme est un entier multiple de 2^n et la valeur absolue de α de la deuxième somme satisfait $1 \leq \alpha \leq 2^n - 1$, d'où la contradiction. L'optimalité de x^* de (1.5) est une évidence. \square

La Proposition 1.3 assure qu'un point extrême de P atteint à l'optimum est calculé. L'algorithme commence alors par un programme linéaire trivial où les contraintes sont restreintes aux contraintes triviales $P_0 = \{x \in Q^n \mid 0 \leq x \leq 1\}$. Si on note par P_i les polytopes issus de la relaxation proposée par la boucle **Tant que**; alors nous avons l'inclusion suivante :

$$P_0 \supset P_1 \supset P_2 \supset \dots \supset P_{t-1} \supset P_t \supseteq P$$

les inclusions sont toutes strictes sauf pour la dernière. En effet, un algorithme polynomiale implique que la dernière inclusion est stricte si le nombre de facettes est exponentiel en la taille des entrées, ce qui est généralement le cas d'un polytope combinatoire $P(C)$ associé à un problème NP -difficile C . La preuve du théorème entraîne la résolution en temps polynomial de la relaxation linéaire du problème via les méthodes des el-

lipsoïdes et le nombre t des exécutions de la boucle "tant que" est borné par la taille des entrées.

1.4.3 Formulations Etendues

Comme nous l'avons mentionné ci haut tout problème d'optimisation peut être formulé sous forme d'un **PLNE** i.e. par une fonction objectif linéaire, des contraintes linéaires sous forme d'inégalités ou égalités et les contraintes d'intégralité. Une telle formulation est dite *parfaite* si la suppression des contraintes d'intégralité donne lieu à un polyèdre entier. L'intérêt porté à la formulation entière parfaite réside dans la possibilité de résoudre le problème associé en temps polynomial grâce aux méthodes des ellipsoïdes Grötschel et al. [1988]. Malheureusement, le nombre des contraintes nécessaires pour les formulations parfaites est souvent exponentiel en la taille des données du problème. Pour dévier de telles situations des résultats ont montré que l'ajout de quelques variables peut réduire considérablement le nombre de contraintes. En effet cela revient à formuler un problème donné, dans un espace de dimension supérieure, cette nouvelle formulation est ainsi dite *formulation étendue*. Nous appelons une formulation étendue parfaite d'un problème donné dont le nombre de contraintes est polynomial en la taille du problème une *formulation étendue compacte*. De telles formulations sont d'une grande utilité pour les domaines de la programmation linéaire en nombres entiers ou celui de l'optimisation combinatoire sous leurs deux aspects : théorique ou algorithmique.

Il existe plusieurs outils pour dériver et étudier les formulations étendues, mais avant de s'y consacrer nous devons définir la notion de *projection*.

En effet la projection est un des outils de base qui permet de relier les formulations étendues aux formulations dans l'espace d'origine pour un problème donné. Il existe deux méthodes classiques pour exécuter la projection : la première introduite par Balas utilise la notion du cône de projection et la deuxième fait appel à la procédure de Fourier-Motzkin.

Etant donné un ensemble $S \subset \mathbb{R}^n$ et un sous espace linéaire $L \subset \mathbb{R}^n$. La *projection orthogonale* de S dans L est l'ensemble des points $u \in L$ tel qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^n$ orthogonal à u vérifiant $u + v \in S$. On s'intéresse à la projection orthogonale dans l'espace $L = \{x \in \mathbb{R}^n \mid x_i = 0, i \in$

$N \setminus M$ où $N = \{1, 2, \dots, n\}$ et M est un sous ensemble de N . L'ensemble des points $\{x \in \mathbb{R}^M \mid \exists z \in \mathbb{R}^{N \setminus M} \text{ tel que } \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in S\}$ représente l'ensemble des points de \mathbb{R}^N projetés sur \mathbb{R}^M noté $proj_x(S)$.

Notre intérêt pour ce type de projection découle de l'équivalence entre les deux problèmes suivants :

$$\max\{f(x) \mid x \in proj_x(S)\}$$

et

$$\max\{f(x) + 0z \mid \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} \in S\}$$

Une formulation est dite *étendue* pour un problème donné si elle est définie dans un espace de dimension supérieure à la dimension de l'espace d'origine du problème.

La projection conique

Etant donné un polyèdre $Q = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$, considérons une inégalité valide $a^T x \leq b$ pour Q . Il s'en suit de la définition de la projection que $a^T x \leq b$ est aussi valide pour $proj_x(Q)$. Comme, pour tout vecteur u satisfaisant $u \geq 0$, $uB = 0$, l'inégalité $uAx \leq ub$ est valide pour Q , cette observation montre aussi que l'inégalité $uAx \leq ub$ est valide pour $proj_x(Q)$. Le théorème qui suit montre que l'inverse est aussi vrai. Ainsi nous définissons le cône de projection du polyèdre $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$ comme suit

$$C_Q = \{u \in \mathbb{R}^m \mid uB = 0, u \geq 0\}$$

Théorème 1.7 *Balas [1998]* Etant donné un polyèdre $Q = \{x \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^p \mid Ax + Bz \leq b\}$, sa projection sur l'espace des x est $proj_x(Q) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid uAx \leq ub \text{ pour tout } u \in C_Q\}$

Démonstration. Etant donné $\bar{x} \in \mathbb{R}^n$, notons que \bar{x} est dans $proj_x(Q)$ si et seulement si le polyèdre $\{z \in \mathbb{R}^p \mid Bz \leq b - A\bar{x}\}$ est non vide. En d'autre terme \bar{x} n'appartient pas à $proj_x(Q)$ si et seulement si $Bz \leq b - A\bar{x}$ est non réalisable. Par le Lemme de Farkas, le système $Bz \leq b - A\bar{x}$ est non

réalisable si et seulement si il existe un vecteur $u \geq 0$ tel que $uB = 0$ et $uA\bar{x} > ub$. L'inégalité $uAx \leq ub$ est valide pour $proj_x(Q)$ et non vérifiée par \bar{x} . \square

Ce théorème possède plusieurs variantes, cela dépend de la forme que prend le système qui définit Q .

La procédure d'élimination de Fourier-Motzkin

La méthode de Fourier-Motzkin opère sur les lignes d'un système linéaire qui définit un polyèdre Q par l'élimination de quelques variables, variable par variable dans le même esprit que celui des méthodes de Gauss pour la résolution des systèmes linéaires. Etant donné un système linéaire $Ax + cz \leq b$ (les inconnues $x \in \mathbb{R}^n, z \in \mathbb{R}^n$) avec des inégalités indexées par M définies comme suit

$$I^+ = \{i \in M | c_i > 0\} \quad (1.6)$$

$$I^- = \{i \in M | c_i < 0\} \quad (1.7)$$

$$I^0 = \{i \in M | c_i = 0\} \quad (1.8)$$

En multipliant les lignes par des nombres positifs bien appropriés nous supposons que les valeurs de c sont $0, \pm 1$. Le système $Ax + cz \leq b$ peut être réécrit

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} + z \leq b_i \quad i \in I^+ \quad (1.9)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} - z \leq b_i \quad i \in I^- \quad (1.10)$$

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} \leq b_i \quad i \in I^0 \quad (1.11)$$

Pour chaque paire d'indices $i \in I^+$ et $k \in I^-$ nous construisons l'inégalité :

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} + \sum_{j=1}^n a_{kj} \leq b_i + b_k \quad (1.12)$$

Notons le système composé des inégalités I^0 et l'inégalité (1.12) par $A'x \leq b'$. Ainsi nous avons :

Théorème 1.8 *Schrijver [1986]* Soit $Q = \{(x, z) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \mid Ax + cz \leq b\}$ et $P = \{x \in \mathbb{R}^n \mid A'x \leq b'\}$. Alors $P = \text{proj}_x(Q)$.

Démonstration. Par construction, toutes les inégalités dans le système $A'x \leq b'$ sont toutes valides à la fois pour Q et $\text{proj}_x(Q) \subset P$.

Pour montrer que $P \subset \text{proj}_x(Q)$, on doit montrer que si x' satisfait $A'x' \leq b'$, alors il existe $z' \in \mathbb{R}$ tel que $(x', z') \in Q$. En effet le système $cz \leq b - Ax'$ est réalisable. Aussi, nous supposons que les valeurs de c sont $0, \pm 1$.

Soient $u = \min_{i \in I^+} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j \right\}$ (où $u = +\infty$ si $I^+ = \emptyset$) et $l = \max_{i \in I^-} \left\{ \sum_{j=1}^n a_{ij} x'_j - b_i \right\}$ (où $l = -\infty$ si $I^- = \emptyset$). Comme $A'x' \leq b'$, la construction du système $A'x \leq b'$ implique $l \leq u$ par conséquent, $l \leq z'u$, $(x', z') \in Q$ □

Remarque 1.1 *A chaque itération, la méthode de Fourier génère un nombre fini d'inégalités. Ceci fournit un procédé algorithmique qui démontre que la projection d'un polyèdre est aussi un polyèdre.*

Remarque 1.2 *A chaque itération, la méthode de Fourier élimine $|I^+| + |I^-|$ inégalités et en crée $|I^+| + |I^-|$ inégalités, ainsi le nombre d'inégalités prend un ordre qui est mis au carré à chaque itération. D'où l'on conclut que le nombre d'inégalités créées par l'élimination de Fourier-Motzkin est exponentiel.*

La procédure d'élimination de Fourier-Motzkin peut être utilisée pour résoudre un système d'inégalités en projetant au loin (éliminant les variables une à une) les variables jusqu'à ce qu'il en reste juste une seule.

Dans la prochaine section nous présentons des technique de preuve de facettes qui nous seront utiles dans les chapitres à venir 3 et 4.

1.5 TECHNIQUES DE PREUVE

Dans cette section nous présentons les techniques de preuve de facette que nous allons adopter tout au long de ce document.

Soit $I \equiv a^T x \leq a_0$ une inégalité valide pour $SFP(G)$. Noter que $SFP(G)$ est de pleine dimension, $\dim(SFP(G)) = |E|$. Nous avons le lemme qui suit :

Lemme 1.1

1. Supposons que toutes les forêts d'étoiles serrant pour I satisfont aussi l'inégalité $b^T x \leq b_0$. L'inégalité valide I définit une facette pour $SFP(G)$ si en fixant, soit un coefficient $b_e \neq 0$ ou $b_0 \neq 0$, nous pouvons montrer que pour toute arête $e \in E$ nous avons $b_e = 0$.
2. Supposons que l'inégalité $I \equiv a^T x \leq a_0$ définit une facette du $SFP(G)$. Si \mathcal{F}_a est le noyau de I et toutes les forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a satisfont aussi $b^T x = b_0$ alors en fixant pour une arête e_1 de E_{n_1} $b_{e_1} \neq 0$ telle que $a_{e_1} \neq 0$ ou bien en fixant $b_0 \neq 0$, nous pouvons montrer en utilisant seulement les forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a que $a_e = 0$ pour tout $e \in E$.

Démonstration. 1. Soit X l'ensemble des vecteurs caractéristiques de toutes les forêts d'étoiles serrant pour I . Soit A_{X,E_n} la matrice dont les lignes sont des vecteurs de X et les colonnes sont indexées par E_n . Ajoutons à la matrice A_{X,E_n} une colonne c qui est le vecteur 1 nous obtenons la matrice $A_{(X,1),E_n \cup c}$. Les forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a génèrent le système d'équation suivant :

$$A_{(X,1),E_n \cup c} \begin{pmatrix} b \\ b_0 \end{pmatrix} = 0. \quad (1.13)$$

Choisissons un coefficient b_e ou le coefficient b_0 , soit b_1 . Par hypothèse et en fixant $b_1 \neq 0$ et au moyen des forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a , nous obtenons $b_e = 0$ pour tout $e \in E$. Le rang de la matrice $A_{(X,1),E_n \cup c}$ est donc égal à $|E|$. Il existe alors un ensemble \mathcal{F}_a^1 de $|E|$ forêts d'étoiles serrant pour I telles que les lignes de $A_{(X,1),E_n \cup c}$ correspondant à ces forêts d'étoiles sont linéairement indépendantes. Nous déduisons que les forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a^1 sont affinement indépendantes. Comme $\dim(SFP(G)) = |E|$ alors I définit une facette de $SFP(G)$.

2. Comme I définit une facette de $SFP(G)$, au moyen des forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a nous devons dériver que $a_e = \nu b_e$ où $\nu \in \mathbb{R}^*$ pour tout $e \in E$. Nous choisissons un coefficient b_e tel que $b_e \neq 0$ ou le coefficient b_0 . Nous appelons le coefficient choisi b_1 , et a_1 le coefficient correspondant dans I . Nous avons $b_1 = \nu a_1$. Comme $a_1 \neq 0$, $\nu = \frac{b_1}{a_1}$ et $b_e = \frac{b_1 a_e}{a_1}$ pour tout $e \in E$. Si nous fixons $b_1 \neq 0$ alors $a_e = 0$ pour tout $e \in E_n$.

□

Preuve par maximalité

Une autre méthode pour montrer que $I \equiv a^T x \leq a_0$ définit une face d'un polytope de pleine dimension P est de montrer que la face induite par I n'est contenue dans aucune autre face induite par une inégalité $I' \equiv b^T x \leq a_0$. En exprimant P comme l'enveloppe convexe d'un ensemble fini de points S , $P = \text{conv}(S)$ et en posant $\mathcal{F} = \{x \in S \mid a^T x \leq a_0\}$ nous aurons juste à montrer qu'une autre inégalité $I' \equiv b^T x \leq b_0$ qui est valide pour P dont la face induite contient la face \mathcal{F} , alors l'inégalité $I' \equiv b^T x \leq b_0$ n'est autre qu'une multiplication par un scalaire positif de I . Dans le cas où P n'est pas de pleine dimension, nous devons d'abord vérifier que I n'est pas une équation implicite. En plus, nous devons vérifier que les inégalités I' et I sont différentes non pas par une multiplication par un scalaire positif mais aussi par une combinaison linéaire avec les équations implicites de P . La procédure se fait étape par étape, par l'utilisation des propriétés de \mathcal{F} pour recueillir des informations concernant les coefficients de b .

PROBLÈME DE FORÊTS D'ÉTOILES **2**

DE POIDS MAXIMUM

L'objet de cette thèse est l'étude polyédrique de l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des solutions du problème des forêts d'étoiles. Dans ce chapitre nous allons définir le problème et discuter de sa complexité, et de ses applications. Par la suite nous proposons une formulation du problème en programmation linéaire en nombres entiers. Les solutions de ce dernier représentent des vecteurs dont l'enveloppe convexe définit un polyèdre borné dit polytope. La description de ce dernier sera l'objet du prochain chapitre.

2.1 DÉFINITION DU PROBLÈME DES FORÊTS D'ÉTOILES

Le problème des forêts d'étoiles de poids maximum qu'on notera *MWSFP* (de son nom anglais : *Maximum Weighted Star Forest Problem*) peut être formulé comme suit :

Entrée : $G = (V, E)$, $\mathcal{F} \subset 2^E$, $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, où $\mathcal{F} = \{F \subset E \mid (V, F) \text{ est une forêt d'étoiles dans } G\}$.

Sortie : $F^* \in \mathcal{F}$ tel que $\forall F \in \mathcal{F} : w(F^*) \geq w(F)$.

Une instance d'un *MWSFP* consiste en un graphe simple et non orienté $G = (V, E)$, d'une fonction poids $c : E \rightarrow \mathbb{Z}$ défini sur les arêtes de G . L'objectif est de déterminer une forêt d'étoiles de poids maximum. Autrement dit un sous graphe de $G = (V, E)$ dont les composantes connexes sont toutes des étoiles. (Un sommet isolé est considéré comme étoile). Plus précisément, on doit déterminer un sous ensemble $F \subseteq E$ d'arêtes tel que le graphe partiel $G_F = (V, F)$ ne contiendrait ni un cycle ni un chemin de longueur supérieure ou égale à 3, et dont le poids total $c(F) = \sum_{e \in F} c(e)$ est aussi grand que possible. Ceci peut être exprimé comme suit :

$$\begin{cases} \max c(F) \\ \text{s.t. } (V, F) \text{ est une forêt d'étoiles de } G = (V, E) \end{cases}$$

Nous allons appeler un sous ensemble $F \subseteq E$ des arêtes de $G = (V, E)$ une forêt d'étoiles si le sous graphe (graphe partiel) $G = (V, F)$ est une forêt d'étoiles de G .

Notons qu'une solution optimale du problème des forêts d'étoiles de poids maximum ne peut jamais comprendre une arête de poids négatif ou nul. En effet, la suppression d'une arête de poids nul d'une solution optimale F^* donne lieu à une autre solution optimale.

2.2 APPLICATIONS DU PROBLÈME DES FORÊTS D'ÉTOILES DE POIDS MAXIMUM

Dans cette section nous exposerons deux applications majeures, parmi d'autres applications, du problème des forêts d'étoiles de poids maximum.

2.2.1 Application dans l'industrie de l'automobile

Une des applications majeures du problème des forêts d'étoiles de poids maximum est le problème de gestion de la diversité. Un exemple de ce problème apparaît dans l'industrie de l'automobile [Agra et al. \[2005\]](#). En effet, les automobiles sont assemblées avec des fils de connexion pour activer un ensemble *d'options* exigées, comme exemple l'airbag, le climatiseur, la radio, etc. Une *configuration* est une agrégation (assemblage d'un tout homogène) d'un minimum de connexions qui permet une activation d'un groupe d'options données .

Pour des raisons techniques, il n'est pas raisonnable (il devrait même coûter trop cher) de produire plusieurs variétés de configurations différentes. Dans la pratique un nombre p de différentes configurations est agréé par les responsables, et les clients sont approvisionnés en voitures dont la configuration est généralement supérieure à leurs demandes. Cela cause des sur-coût de production, ce qui rend important le choix de la configuration p .

Ce problème est connu sous le nom du problème de gestion de la diversité. Un problème introduit par Avella et al. [Avella et al. \[2005\]](#) et Briant [Briant \[2000\]](#).

Etant donné un graphe orienté sans cycles $G = (V, A)$, un ensemble ordonné (V, \succeq) . Les éléments de V représentent les configurations et $v \succeq u$ si toute option dont la configuration u peut être aussi activée par v . Il est plus commode d'interpréter chaque configuration v comme l'ensemble des options que v peut activer. Tout arc $a = (u, v)$ est de poids w_a qui peut être vu comme le coût pour que l'option v se substitue à l'option u . Dans [Briant et Naddef \[2004\]](#) les auteurs ont posé $w_a = c_v d_u$, où c_v est le coût de la production de la configuration v , et d_u est la demande pour la configuration u .

L'objectif est de trouver un plan de gestion optimal, autrement dit une partition de l'ensemble des options en un ensemble minimum de configurations telles qu'une option ne peut apparaitre dans plus d'une configuration. La représentation de l'ensemble des solutions possède la structure d'une forêt d'étoiles.

Soit $G = (V, A)$ un graphe orienté transitif et sans cycles défini sur l'ensemble ordonné (V, \succeq) . On associe à chaque arc $a = (u, v)$ une fonc-

tion poids, w_a . Une forêt d'étoiles couvrante SF de G est un sous graphe orienté couvrant V (graphe partiel) de G dont chaque composante connexe est une étoile. Dans chaque étoile, un sommet v fixé est adjacent à tous les sommets de la composante connexe. Ce sommet v est dit centre de l'étoile. Noter que tout élément maximal (au sens de l'ordre \succeq) de V doit être un centre d'une étoile.

Le poids d'une forêt d'étoiles F est la somme des poids sur les arcs $w(F) = \sum_{a \in F} w_a$.

Chaque sommet est une configuration, (V est l'ensemble des options actives) et chaque arc $a = (i, j) \in A$ signifie que la configuration i contient la configuration j .

Supposons que c_i et c_j sont les coûts de production par unité des configurations j et i et qu'il est prévu de vendre n_j configurations j , chaque arc (u, v) possède un coût $c_{ij} = n_j(c_i - c_j)$.

Le graphe représentant la relation d'inclusion possède les propriétés suivantes :

- * Le graphe G est orienté.
- * Les coûts c_{ij} sur les arcs sont positifs.
- * Les arcs sont transitifs, sans cycle (circuit).

Le but est de déterminer une forêt d'étoiles couvrante du coût minimum et d'un nombre fixe k d'étoiles.

Soit $x_{ij} = 1$ si l'arc $(i, j) \in F$ et $x_{ij} = 0$ sinon. Le modèle analytique est donné comme suit :

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij}$$

$$s.t. \sum_{i \in \delta^-(j)} x_{ij} + y_j = 1, j \in V \quad \forall j \in V \quad (2.1)$$

$$x_{ij} \leq y_i \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.2)$$

$$\sum_{j \in V} y_j \leq k \quad (2.3)$$

$$x_{ij}, y_s \in \{0, 1\}, \quad \forall s \in V, \forall (i, j) \in A \quad (2.4)$$

où k est le nombre des configurations permises.

La contraintes(2.1) assure quel type de configuration à produire ou à

remplacer par une autre configuration qui l'engendre. La contrainte (2.2) assure que la configuration du type " i " devient valable pour subvenir à la configuration " j " ainsi la configuration " i " doit être produite. La contrainte (2.3) assure qu'on produit au plus k configurations.

Comme on peut le constater, la formulation proposée dans Avella et al. dans Avella et al. [2005] est une formulation sommet-arc. On peut retrouver la même formulation dans Agra et al. [2005].

2.3 APPLICATION DES FORÊTS D'ÉTOILES DANS L'ALIGNEMENT DES SÉQUENCES GÉNOMIQUES MULTIPLES

La motivation principale pour l'étude des forêts d'étoiles est inspiré des travaux de Nguyen et al. Nguyen et al. [2008]. Elle consiste en l'alignement des séquences multiples du génome, une des tâches bio-informatiques des plus basiques pour la comparaison des génomes. "*La spéciation*" est un processus d'évolution qui crée de nouvelles espèces. Deux gènes issus de deux espèces différentes sont dites *orthologues* s'ils divergent après une spéciation (ils sont le résultat d'une même spéciation). *La duplication* est un processus d'évolution dans lequel, un segment du génome est copié et inséré sur différentes positions. Deux gènes déjà liés peuvent diverger au cours d'un événement de duplication entre espèces. Pour accomplir une analyse comparative du génome, il est préférable de produire un alignement de plusieurs espèces orthologues dont au plus une ligne de séquence provenant d'une espèce donnée apparaît dans chaque block d'alignement. La relation de plusieurs à plusieurs orthologues parmi les gènes dupliqués est l'origine d'une explosion combinatoire assez spectaculaire en la taille de l'alignement. Quand l'alignement des multi-espèces contient toutes les combinaisons des relations deux à deux orthologues.

Jusqu'à nos jours, on ne connaît pas de bonnes solutions pour aligner des régions génomiques richement dupliquées. Le programme connu (Threaded blockset aligner (TBA) en français : un programme d'alignement de sous-ensembles en fil) filtre des alignements dupliqués ainsi, il ne peut pas capturer toute les relations deux à deux orthologues dans l'ensemble des gènes dupliqués d'après Kent et al. Kent [2002]. Il suffit de prendre l'exemple de l'alpha globine chez les êtres humains et les rats. En effet,

en utilisant **TBA**, chaque gène alpha globine humain est aligné à un seul gène alpha globine rat bien que l'on sait qu'en réalité le gène alpha globine humain est orthologue à plusieurs gènes alpha globine rat. Ces autres alignements sont alors perdus. Pour contrôler la taille des blocs d'alignement tout en garantissant la qualité de l'alignement, les auteurs dans [Nguyen et al. \[2008\]](#) proposent de définir un graphe d'alignement (un graphe bi-parti) en utilisant les similarités entre chaque paire des séquences données et par la suite en utilisant la forêt d'étoiles couvrante de poids maximum du graphe d'alignement résultant comme un guide dans la construction des blocs d'alignements.

2.4 PROBLÈME DE FORÊTS D'ÉTOILES ET LES PROBLÈMES DE LOCALISATION SANS CONTRAINTES DE CAPACITÉ

Plusieurs problèmes réels peuvent être modélisés ou formulés comme un problème de recouvrement. Un des exemples types est le problème de localisation. Supposons que nous avons un ensemble de sites potentiels $N = \{1, 2, \dots, n\}$ pour la localisation des casernes de pompier, un exemple qu'on peut trouver dans [Alevras et Padberg \[2001\]](#). Une station placée sur le site j avec un coût c_j . Nous avons aussi un ensemble de communautés $M = \{1, 2, \dots, m\}$ qui devraient être protégées. Le sous ensemble des communautés qui devraient être protégées par la caserne située dans le site j est M_j . Comme exemple, M_j peut être l'ensemble des communautés qui devraient être accessibles en dix minutes. Ainsi, le problème qui consiste à choisir l'ensemble des sites pour localiser les casernes de pompiers de coût minimum de manière à ce que n'importe quelle communauté soit accessible en dix minutes, est un problème de recouvrement.

Il existe plusieurs autres problèmes que nous pouvons ramener au problème du recouvrement, comme le problème d'affectation des clients aux routes de livraisons, affectation de l'équipage des compagnies aériennes
...

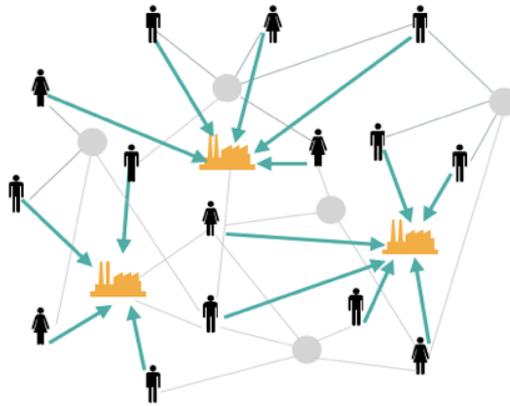


FIGURE 2.1 – exemple de problème de localisation

2.5 LE PROBLÈME DE FORÊT D'ÉTOILES DE POIDS MAXIMUM ET LE PROBLÈME DE L'ABSORBANT

Soit $G = (V, E)$ un graphe où V représente l'ensemble des sommets et E l'ensemble de ses arêtes. Un sous ensemble $D \subseteq V$ est dit *absorbant* dans G si tout sommet de V est soit dans D ou admet un voisin dans D . On dit que les sommets de D *dominent* les sommets de V . Quand on associe à chaque sommet de G un poids $c \in \mathbb{R}$ nous désignons par *problème de l'absorbant de poids minimum* le problème qui consiste à chercher dans G un sous ensemble de sommets $D \subset V$ tels que $\forall v \in V$ v est dans D ou voisin à un sommet dans D dont le poids total est minimum. Ore [Ore \[1962\]](#) et Berge [Berge \[1962\]](#) ont été les premiers à considérer et à discuter du problème de l'absorbant en théorie des graphes.

La notion de l'absorbant apparaît naturellement dans plusieurs situations relevant de la stratégie de placement d'hommes ou d'appareils aux sommets d'un Graphe. Ore [Ore \[1962\]](#) a introduit cette notion en évoquant le problème des reines qui consiste à trouver dans un échiquier le nombre minimum de reines nécessaire pour que chaque case soit couverte est contrôlée par au moins une reine. Une case est couverte par une reine si elle est sur une ligne ou une colonne ou une diagonale dans la quelle se trouve une reine.

Berge quand à lui a proposé l'exemple du contrôle d'un ensemble de sommets d'un réseau par un ensemble de stations radars. Une autre application du problème de l'absorbant de poids minimum apparaît dans le

domaine des télécommunications, où nous avons un ensemble de villes et de centres de transmissions et les liens reliant les centres de transmissions aux villes. Ce problème peut être modélisé sous forme d'un graphe où les villes et les centres de transmission représentent des sommets, et les liens existant entre les centres de transmission sont représentés par des arêtes. L'absorbant dans ce cas représente les sites à munir d'un centre de transmission.

Si on veut couvrir toutes les villes par un minimum de stations au moindre coût nous devons chercher un absorbant de coût minimum. Et dans ce cas, il n'y a que le coût de la réalisation des stations qui est pris en considération. Quand chaque ville n'est reliée qu'à un seul centre de transmission. Si on s'intéresse au gain engendré par l'affiliation d'une ville au centre de transmission par exemple, et viser à choisir les emplacements qui vont engendrer un bénéfice maximum, dans cette seconde situation, on doit chercher une forêt d'étoiles de poids maximum. (Ici les poids d'une arête représentent le gain engendré par l'affiliation d'une ville à un centre de transmission.)

2.6 COMPLEXITÉ DU MWSFP

La complexité du problème de forêt d'étoiles de poids maximum **MWSFP** découle de la complexité du problème de l'absorbant. En effet Nguyen et *al.* [Nguyen et al. \[2008\]](#) ont montré que le problème de la recherche d'une forêt d'étoile avec un nombre maximum d'arêtes est *NP*-difficile. En effet, ils ont montré que, quand le graphe est non pondéré, la recherche d'une forêt d'étoiles avec un nombre maximum d'arête est équivalent au problème de l'absorbant minimum dans un graphe.

POLYTOPE DE FORÊTS D'ÉTOILES 3

Dans ce chapitre, nous allons rapporter les résultats du papier publié dans RAIRO, Operational Research. Nous introduisons le polytope de forêts d'étoiles et ses propriétés, ainsi que quelques inégalités définissant des facettes de ce polytope. Par la suite, nous proposons deux descriptions partielles du polytope associé au problème des forêts d'étoiles de poids maximum défini dans deux classes de graphe en l'occurrence les cycles et les arbres.

3.1 FORMULATION DU MWSFP EN PROGRAMMATION LINÉAIRE EN NOMBRES ENTIERS

Soit $x^F \in \mathbb{R}^{|E|}$ le vecteur caractéristique d'une forêt d'étoiles F défini comme suit $x_e^F = \begin{cases} 1 & \text{si } e \in F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$. Soit $c \in \mathbb{R}^{|E|}$ le poids affecté à chaque arête $e \in E$. Nous cherchons la forêt d'étoiles dont le poids total sur ses arêtes est le plus grand possible. Nous considérons la formulation en programmation linéaire en nombres entiers (PLNE) suivante :

$$\max c^T x$$

$$s.t. \quad x(P) \leq 2 \text{ pour tout } P \in \mathcal{P}_4 \quad (3.1)$$

$$x(C) \leq 2 \text{ pour tout } C \in \mathcal{C}_3 \quad (3.2)$$

$$0 \leq x_e \leq 1 \text{ pour tout } e \in E \quad (3.3)$$

$$x \text{ entier} \quad (3.4)$$

Les inégalités (3.1), sont dites inégalités de 3-chemin, elles expriment le fait que sur une succession de 3 arêtes la forêt d'étoiles ne peut en contenir qu'au plus deux. De manière similaire, Les inégalités (3.2) dites inégalités de 3-cycle servent à écarter la présence des cycles de longueur 3 dans les solutions réalisables. Les inégalités (3.3) sont dites les inégalités triviales.

Théorème 3.1 *Le programme linéaire en nombres entiers (PLNE) est équivalent au problème des forêts d'étoiles.*

Démonstration. (\implies) D'après les inégalités (3.1) et (3.2) une solution réalisable du (PLNE), est un vecteur caractéristique d'un ensemble F tel que (V, F) ne comprend ni un cycle ni un chemin de longueur supérieur à deux. Donc, aucune composante connexe ne peut être de diamètre supérieur à deux.

(\impliedby) Découle de la définition des forêts d'étoiles. □

Soit S l'ensemble des vecteurs $x \in \mathbb{R}^E$ vérifiant (3.1)-(3.4). S représente l'ensemble des vecteurs d'incidence des forêts d'étoiles définies sur un graphe $G = (V, E)$.

Soit $\mathbf{SFP}(G)$ l'enveloppe convexe de toute les solutions réalisable du (PLNE) défini par (3.1)-(3.4). Autrement dit

$$\mathbf{SFP}(G) = \text{conv}(S)$$

Si F est une forêt d'étoiles dans $G = (V, E)$ alors tout sous ensemble $F' \subset F$ définit une autre forêt d'étoiles. D'après cette propriété dite des systèmes indépendants dans la théorie des ensembles nous pouvons immédiatement déduire que leurs vecteurs d'incidence $x^F, x^{F'} \in \{0, 1\}^{|E|}$ vérifient $x^{F'} \leq x^F$. Et comme $\mathbf{SFP}(G)$ est l'enveloppe convexe des forêts d'étoiles dans $G = (V, E)$, nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.1 $\mathbf{SFP}(G)$ est un polytope monotone.

Démonstration. Soit $x \in \mathbf{SFP}(G)$, nous avons à montrer que tout vecteur y vérifiant $y \geq 0$ et $y \leq x$ est un élément de $\mathbf{SFP}(G)$. Si $y = 0$ ou $y = x$, l'assertion est vraie. Par ailleurs, il suffit de montrer que $y \in \mathbf{SFP}(G)$ pour un $y \in \mathbb{R}^E$ satisfaisant : $0 < \beta < y_e < \alpha < 1$ si $e \in E$ et $y_e = x_e$ pour tout $e \in E \setminus \{\hat{e}\}$. D'après le Théorème de Weyl : $x \in \mathbf{SFP}(G)$ peut s'exprimer comme une combinaison convexe des vecteurs d'incidences x^F des forêts d'étoiles $F \subseteq E$, autrement dit, il existe une collection $\mathcal{F} = \{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ des forêts d'étoiles de G et un vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^k$; $0 \leq \lambda \leq 1$ et $1^T \cdot \lambda = 1, (\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1)$ tel que

$$x = \sum_{i=1}^k \lambda_i x^{F_i}$$

D'après la propriété des systèmes indépendants nous savons que $F'_i = F_i \setminus \{\hat{e}\}$ est une forêt d'étoiles dans G pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$ et nous avons

$$y = \frac{\beta}{\alpha} \sum_i^k \lambda_i x^{F_i} + (1 - \frac{\beta}{\alpha}) \sum_i^k \lambda_i x^{F'_i} \quad (3.5)$$

Par définition $\gamma_i = \frac{\beta}{\alpha} \lambda_i$ et $\delta_i = (1 - \frac{\beta}{\alpha}) \lambda_i$ satisfont $0 \leq \gamma_i, \delta_i \leq 1$ Aussi

$$\sum_i^k (\gamma_i + \delta_i) = \sum_i^k \lambda_i (\frac{\beta}{\alpha} + (1 - \frac{\beta}{\alpha})) = \sum_i^k \lambda_i = 1$$

D'après (3.5) y est une combinaison convexe des vecteurs d'incidences des forêts d'étoiles dans G . Et l'assertion découle du Théorème de Weyl. \square

Lemme 3.2 *Pour un graphe non orienté $G = (V, E)$, nous avons $\dim(\mathbf{SFP}(G)) = |E|$.*

Démonstration. Par définition $\mathbf{SFP}(G)$ contient le vecteur zéro et tous les vecteurs unités dans \mathbb{R}^E . Il est clair que ces $|E| + 1$ vecteurs sont affinement indépendants. \square

En rassemblant ses deux lemmes nous avons :

Corollaire 3.1 *Pour tout graphe non orienté $G = (V, E)$, le polytope $\mathbf{SFP}(G)$ est un $\{0, 1\}$ -polytope de pleine dimension et monotone.*

D'après le Corollaire 3.1 on peut conclure qu'il existe une matrice A et un vecteur b tels que $\mathbf{SFP}(G) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b\}$, où chaque inégalité $a^T x \leq a_0$ du système $Ax \leq b$ définit une facette de $\mathbf{SFP}(G)$, et celle-ci est unique à une multiplication près par un scalaire positif. Du Théorème 1.3 on conclut que l'inégalité $a^T x \leq a_0$ définit une facette non triviale à coefficients positifs $a \geq 0$ et $a_0 > 0$.

Théorème 3.2 *Pour toute facette non triviale F de $\mathbf{SFP}(G)$ il existe un vecteur $a \in \mathbb{R}_+^{|E|}$ et un scalaire $a_0 > 0$ tels que $a^T x \leq a_0$ est une inégalité valide de $\mathbf{SFP}(G)$ définissant F , i.e. $F = \{x \in \mathbf{SFP}(G) \mid a^T x = a_0\}$*

Démonstration. D'après le Corollaire 3.1, $\mathbf{SFP}(G)$ est un $\{0, 1\}$ -polytope monotone et de pleine dimension. Ainsi, la preuve du Théorème 3.2 découle clairement du Théorème 1.3 que nous devons à de Hammer et *al.* [Hammer et al. \[1975\]](#). \square

Dans le but d'introduire de nouvelles classes de facettes nous avons besoin de quelques définitions et notations qui nous seront utiles dans la suite de ce document.

Etant donné un graphe $H = (V_H, E_H)$, nous dirons que l'inégalité de la forme $\sum_{e \in E} a_e x(e) \leq a_0$ où $a_0 \neq 0$ pour tout $e \in E_H$, est *induite par H* . Nous appelons aussi $H = (V_H, E_H)$ où $E_H = \{e \in E \mid a_e \neq 0\}$ et $V_H = V(E_H)$ le *graphe support* de l'inégalité $a^T x \leq a_0$.

Nous avons la remarque suivante :

Lemme 3.3 *Soit $\bar{G} = (\bar{V}, \bar{E})$ un sous graphe induit dans G , alors toute inégalité $I \equiv a^T x \leq a_0$ définissant une facette pour $\mathbf{SFP}(\bar{G})$ définit aussi une facette pour $\mathbf{SFP}(G)$.*

Démonstration. D'abord, noter que ceci est vrai pour les inégalités triviales $x(e) \leq 1$ et $x(e) \geq 0$ puisqu'elles définissent des facettes du $\mathbf{SFP}(G)$ pour tout graphe G . Soit I une inégalité définissant une facette non triviale pour $\mathbf{SFP}(\bar{G})$. I définit une facette pour $\mathbf{SFP}(G)$ si nous montrons que pour toute arête $e \in E \setminus \bar{E}$ il existe une forêt d'étoiles F dans \bar{G} serrée pour I tel que $F \cup \{e\}$ est aussi une forêt d'étoiles dans G . Nous allons procéder par l'absurde, supposons que pour une certaine arête $e = ij \in E \setminus \bar{E}$, une telle forêt d'étoiles F ne peut exister. Ceci implique que pour toute forêt d'étoiles F dans \bar{G} vérifiant I à égalité nous avons, $F \cup \{ij\}$ n'est pas une forêt d'étoiles dans G . Dans ce cas, exactement un seul sommet i ou j appartient à \bar{V} . En plus, comme \bar{G} est un sous graphe induit de G , toute forêt d'étoiles F de \bar{G} serrée pour I doit contenir une arête ik tel que i est de degré $d(i) = 1$ dans F et k est de degré au moins 2 dans F . Dans le cas contraire, $F \cup \{ij\}$ est une forêt d'étoiles dans G . Alors toute forêt d'étoiles F dans \bar{G} serrée pour I satisfait aussi $x(\delta_{\bar{G}}(i)) = 1$. Du fait que le polytope $\mathbf{SFP}(G)$ est de pleine dimension nous concluons que $I \equiv x(\delta_{\bar{G}}(i)) \leq 1$. Et comme I n'est pas triviale pour tout $e \in E$ nous devrions prendre i de degré supérieur ou égal à 2 dans \bar{G} , or dans ce cas $x(\delta_{\bar{G}}(i)) \leq 1$ n'est pas valide pour $\mathbf{SFP}(\bar{G})$.

□

3.2 FACETTES DU $\mathbf{SFP}(G)$

Dans cette section, nous introduirons deux classes d'inégalités valides pour le polytope $\mathbf{SFP}(G)$. Ces inégalités définissent des facettes du polytope $\mathbf{SFP}(G)$ pour certaines classes de graphes.

Soit G est un graphe quelconque. Un couplage $M = (e_1, e_2, \dots, e_n)$ dans G est un M -couplage si

- Il existe un sous ensemble de sommets $S = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subseteq V(M)$ tel que $t_i \in V(\{e_i\})$ pour $i = 1, \dots, k$.
- Le sous graphe induit par S est connexe.

Un sous graphe τ de G est un M -arbre associé à M si :

- τ est un arbre.
- les sommets de τ sont les sommets du couplage M .
- L'ensemble des arêtes pendantes (feuilles) de τ sont les arêtes du couplage M .

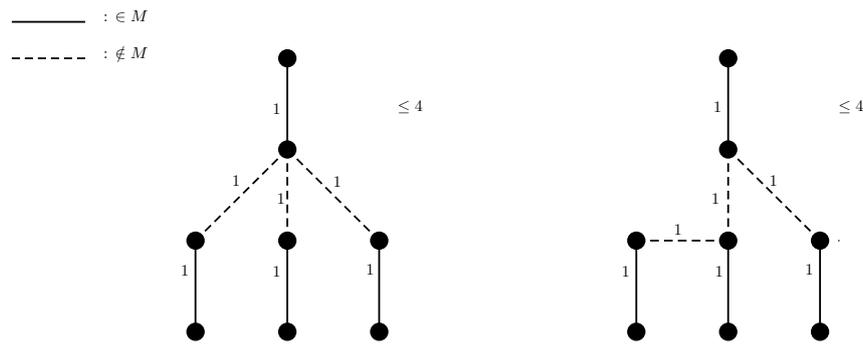


FIGURE 3.1 – Support de l'inégalité du M -arbre associé à un 4-couplage.

Etant donné un M -couplage M et un M -arbre τ associé à M , nous définissons les inégalités du M -arbre comme suit :

$$x(\tau) \leq |M| \tag{3.6}$$

On peut remarquer que les inégalités du M -arbre comprennent les inégalités triviales $x_e \leq 1$ pour tout $e \in E$ et les inégalités de 3-chemin. Celles-ci sont les inégalités de M -arbre avec $|M| = 1$ et $|M| = 2$ respectivement.

Commençons par montrer la validité des inégalités du M -arbre pour $\mathbf{SFP}(G)$.

Théorème 3.3 *Les inégalités du M -arbre (3.6) sont valides pour le $\mathbf{SFP}(G)$.*

Démonstration. Montrer la validité de (3.6) pour $\mathbf{SFP}(G)$ revient à montrer que $|F \cap \tau| \leq |M|$, pour toute forêt d'étoiles F dans G . On distingue trois cas :

Si F contient seulement des arêtes de M , alors $|F \cap \tau| \leq |M|$.

Si F contient seulement des arêtes de $\tau \setminus M$ alors $|F \cap M| \leq |\tau \setminus M|$ et, d'après la définition du M -arbre $|\tau \setminus M| = |M| - 1 \leq |M|$.

A présent, on suppose que F contient des arêtes dans M et d'autres dans $\tau \setminus M$.

- * $F \cap \tau$ est un couplage alors $|F \cap \tau| \leq |M|$ comme M couvre tous les sommets de τ .
- * $F \cap \tau$ n'est pas un couplage. Alors, $F \cap \tau$ devrait contenir une (sous-) étoile S avec u_2 comme centre comprenant au moins deux arêtes de la forêt F , soit une arête u_1u_2 qui appartient à M et une autre

arête u_2v_2 appartenant à $\tau \setminus M$. Comme v_2 devrait aussi être recouvert par M alors il existe une arête $v_1v_2 \in M$. Comme u_1u_2 et u_2v_2 appartiennent préalablement à F , v_1v_2 ne pourrait y appartenir (i.e. $v_1v_2 \notin F$).

De plus, par la définition du M -arbre, v_1 devrait être de degré 1 dans τ . Il s'ensuit que chaque arête dans F appartenant à $\tau \setminus M$ (e.g. u_2v_2) correspond exactement à une autre arête soit v_1v_2 dans $F \setminus F$. De là, $|F \cap (\tau \setminus M)| \leq |M \setminus F|$ ce qui nous permet de déduire $|(F \cap (\tau \setminus M)) \cup (F \cap M)| \leq |(M \setminus F) \cup (F \cap M)| = |M|$. Comme $M \subseteq \tau$; $|F \cap (\tau \setminus M) \cup (F \cap M)| = |F \cap \tau|$. Ainsi $|F \cap \tau| \leq |M|$.

□

Remarque 3.1 *Pour tout M -couplage M d'un arbre, il existe un seul et unique M -arbre associé à M .*

Démonstration. On suppose que $M = \{e_1, e_2, \dots, e_k\}$. On peut remarquer qu'il existe un sous ensemble $S = \{t_1, t_2, \dots, t_k\} \subset V(M)$, tel que $t_i \in V(\{e_i\})$ pour $i = 1, \dots, k$ et le sous graphe induit par S est connexe. En effet, la présence de deux sous ensembles S induirait un cycle ce qui n'est pas possible dans les arbres. □

Théorème 3.4 *Les inégalités de M -arbre définissent des facettes pour le $\mathbf{SFP}(G)$.*

Démonstration. Nous supposons qu'il existe une inégalité définissant une facette $\alpha^t x \leq \beta$ pour le polytope $\mathbf{SFP}(G)$ tel que toutes les forêts d'étoiles satisfaisant (3.6) à égalité satisfont aussi les inégalités $\alpha^t x \leq \beta$ à égalité. D'après le Théorème 3.3, les inégalités (3.6) sont valides pour le polytope $\mathbf{SFP}(T)$, et d'après le Lemme 3.2, $\mathbf{SFP}(T)$ est de pleine dimension, il suffit de montrer que $\alpha^t x \leq \beta$ est équivalente à un multiplicateur positif près de (3.6). Il est facile de voir que M est une forêt d'étoiles satisfaisant (3.6) à égalité et satisfait aussi $\alpha^t x \leq \beta$ à égalité (i.e. $\alpha(M) = \beta$). Pour toute arête $e \in E \setminus \tau$, on peut facilement remarquer que $M \cup \{e\}$ est aussi une forêt d'étoiles satisfaisant (3.6) à égalité. D'où $\alpha(M \cup \{e\}) = \beta$. Ce qui implique que $\alpha_e = 0$ pour tout $e \in E \setminus \tau$. Soit u_2v_2 une arête quelconque dans $\tau \setminus M$ et u_1u_2 et v_1v_2 des arêtes dans M incidentes à u_2 et v_2 respectivement. Il est clair que M , $M \setminus \{u_1u_2\} \cup \{u_2v_2\}$ et $M \setminus \{v_1, v_2\} \cup \{u_2v_2\}$ sont toutes des forêts d'étoiles vérifiant (3.6) à égalité. Ceci implique $\alpha_{u_1u_2} = \alpha_{u_2v_2} = \alpha_{v_1v_2}$.

Si on étend ce raisonnement à toutes les arêtes dans $\tau \setminus M$ on obtient $\alpha_e = \alpha_{e'}$, pour tout $e, e' \in \tau$. Ainsi nous avons montré que $\alpha^t x \leq \beta$ est à un multiplicateur positif près de (3.6). \square

3.3 POLYTOPE DES FORÊTS D'ÉTOILES DANS LES ARBRES

Cette section est dédiée à la caractérisation des forêts d'étoiles dans les arbres.

Remarque 3.2 *Pour tout M -couplage M dans T , il existe un seul et unique M -arbre associé à M .*

Etant donné un M -couplage de T , soit τ_M le M -arbre associé à M . Le but de cette section est de montrer le théorème qui suit :

Théorème 3.5 *Les inégalités du M -arbre et les inégalités de non-négativité donnent une description complète du polytope $SFP(G)$ quand G est un arbre.*

Pour la preuve du théorème précédent nous allons utiliser une formulation étendue du problème **MWSFP** quand celui-ci est défini dans les arbres. Nous nous référons à une variante du problème de localisation sans capacités. Cette variante du problème de localisation apparait dans [Baïou et Barahona \[2009\]](#). Pour obtenir une telle formulation nous aurons besoin de quelques définitions.

Soit $\vec{T} = (V, \vec{E})$ un arbre bi-orienté, obtenu en remplaçant chaque arête ij par deux arcs (i, j) et (j, i) . Alors \vec{T} possède le même ensemble de sommets que celui de T et le nombre d'arcs $|\vec{E}|$ et deux fois le nombre d'arêtes dans E . Nous considérons le problème de localisation sans capacité (*UFLP*) défini sur \vec{T} où chaque sommet i peut être soit un entrepôt soit un client, et chaque arc $(i, j) \in \vec{T}$ représente l'affectation du client i à l'entrepôt j . Dans la solution du problème de l'*UFLP*, chaque sommet i devrait être considéré soit comme un entrepôt, soit comme un client. Si dans une solution, i est un entrepôt donc il devrait être ouvert avec un coût $w(i)$ et i est dit *centre* dans ce cas. Dans le cas échéant, (i.e. i est un client) i doit être affecté à un entrepôt j avec un coût $c(i, j)$. Noter qu'il pourrait y avoir des entrepôts (centres) pour qui aucun client n'est affecté.

Nous considérons le problème de localisation sans capacité symétrique

noté *SUFLP*, une version particulière du problème de l'*UFLP* sur \vec{T} où les coûts d'affectation des clients aux entrepôts sont symétriques (i.e. $c(i, j) = c(j, i)$) et il n'existe aucun coût pour l'ouverture d'un entrepôt (i.e. $w(i) = 0$ pour tout $i \in V$). Pour chaque solution de l'*UFLP* nous associons un vecteur caractéristique $(x, y) \in \mathbb{R}^{|\vec{E}|+|V|}$ défini comme suit :

- Pour tout $(i, j) \in \vec{E}$, $\vec{x}(i, j) = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j) \in F \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$ où $\vec{x}(i, j)$ est la composante de x correspondant à l'arc $(i, j) \in \vec{E}$ et
- Pour tout $i \in V$, $y(i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \text{ est un centre dans } F \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$ où $y(i)$ est la composante du vecteur y correspondant au sommet $i \in V$.

Soit $UFLP(\vec{T})$ l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences des solutions du *UFLP* dans \vec{T} .

Théorème 3.6 *Baiou et Barahona [2009]* Le système linéaire qui suit définit complètement le polytope $UFLP(\vec{T})$:

$$\sum_{(i,j) \in \vec{E}} \vec{x}(j, i) + y(i) \leq 1 \text{ pour tout } i \in V \quad (3.7)$$

$$\vec{x}(i, j) \leq y(i) \text{ pour tout } (i, j) \in \vec{E} \quad (3.8)$$

$$0 \leq y(i) \leq 1 \text{ pour tout } v \in V \quad (3.9)$$

$$\vec{x}(i, j) \geq 0 \text{ pour tout } (i, j) \in \vec{E} \quad (3.10)$$

Dans *Baiou et Barahona [2009]* les auteurs ont caractérisé tous les graphes G pour lesquels le système linéaire précédent donne une description complète du polytope $UFLP(G)$. Ces graphes comprennent les arbres bi-orientés. Considérons à présent le problème de la forêt d'étoiles de poids maximum *MWSFP* sur T , où pour chaque arête $ij \in T$, le coût c_{ij} est égal à $c(i, j)$. Il est facile de voir qu'il existe une correspondance entre les solutions du *SUFLP* sur \vec{T} , et celles du *MWSFP* sur T , comme il est exprimé dans le lemme qui suit :

- Lemme 3.4**
- (a) Toute solution du *SUFLP* sur \vec{T} correspond à une solution du *MWSFP* sur T de même coût.
 - (b) D'autre part à toute solution du *MWSFP* sur T correspond une ou plusieurs solutions pour le *SUFLP* sur \vec{T} au même coût.

Démonstration.

(a) Etant donné une solution L pour $SUFLP$ sur \vec{T} , on construit une solution F du $MWSFP$ comme suit :

- Tout entrepôt $j \in L$ est un centre dans F .
- Toute affectation i à j dans L correspond à l'arête $ij \in F$

Si une arête ij dans la solution du $MWSFP$ où j est un centre alors l'affectation de i à j (i, j) appartient à la solution du $SUFLP$. Quand ij est une arête isolée dans la solution du $MWSFP$, la correspondance mène vers plusieurs solutions du $SUFLP$ du même coût selon le choix du centre parmi i et j . \square

Etant donné une variable supplémentaire $x \in \mathbb{R}^E$, où les composantes x_{ij} correspondent aux arêtes $ij \in E$, soit $\mathbf{ESFP}(\vec{T})$ le système linéaire donné par les inégalités (3.7), (3.8), (3.9), (3.10) avec les inégalités $x_{ij} = \vec{x}(i, j) + \vec{x}(j, i)$ pour $(i, j) \in E$. Nous avons le lemme suivant :

Lemme 3.5 $\mathbf{ESFP}(\vec{T})$ est une formulation étendue du $\mathbf{SFP}(T)$.

Démonstration. Soit (\vec{x}, y) une solution du $UFLP(\vec{T})$ alors d'après le Théorème 3.6, (\vec{x}, y) est entier. Soit $x \in \mathbb{R}^E$ tel que $x_{ij} = \vec{x}(i, j) + \vec{x}(j, i)$ pour tout $ij \in E$. De l'inégalité (3.7), nous avons $\vec{x}(i, j) \leq 1 - y(i)$ et de (3.8) nous avons $\vec{x}(i, j) \leq y(i)$. De là, on déduit $x_{ij} = \vec{x}(i, j) + \vec{x}(j, i) \leq 1$ pour tout $ij \in E$. Il est facile de voir que x est le vecteur d'incidence d'une forêt d'étoiles dans T , donc un point extrême du $\mathbf{SFP}(T)$.

Inversement, soit x un point extrême du $\mathbf{SFP}(T)$. Soit F une forêt d'étoiles induite par x . Soit $\vec{x} \in \mathbb{R}^E$ défini pour tout arête $ij \in E$ comme suit :

- Si $x_{ij} = 0$ alors $\vec{x}(i, j) = \vec{x}(j, i) = 0$
- Si $x_{ij} = 1$ alors si ij est une arête isolée dans F , alors on choisit entre i et j celui qui va être le centre. Supposons que c'est i , on pose alors $\vec{x}(i, j) = 1, \vec{x}(j, i) = 0$ et $y(i) = 1, y(j) = 0$. Si ij n'est pas une arête isolée dans F , supposons sans perte de généralité que i est un centre dans F et $\vec{x}(j, i) = 1, \vec{x}(i, j) = 0$ et $y(i) = 1$ et $y(j) = 0$

Pour tout $i \in V$ où i est un singleton dans F , on pose $y(i) = 1$. Il est facile de remarquer que $(x, \vec{x}, y)^t$ ainsi défini est un point extrême de $\mathbf{ESFP}(\vec{T})$. \square

Théorème 3.7 *De la projection du ESFP(\vec{T}) sur les variables x_{ij} résulte un système composé des inégalités du M -arbre défini sur T et des inégalités de non-négativité.*

Dans cette section nous allons appliquer la projection en utilisant la procédure de Fourier-Motzkin. Nous commençons d'abord par éliminer les variables y . Pour tout $i \in V$, de l'inégalité (3.7), nous avons $y(i) \leq 1 - \sum_{(i,j) \in \vec{E}} \vec{x}(i,j)$ et d'après (3.9), nous avons $y(i) \geq \vec{x}(i,j)$ pour tout $(i,j) \in \vec{E}$. Ainsi l'élimination des variables $y(i)$ par la procédure de Fourier Motzkin donne $\vec{x}(i,j) + \sum_{(i,k) \in \vec{E}} \vec{x}(i,k) \leq 1$. Cette dernière est équivalente à $x_{ij} + \sum_{(i,k) \in \vec{E}, k \neq j} \vec{x}(i,k) \leq 1$. Nous obtenons le système qui suit :

$$x_{ij} + \sum_{(i,k) \in \vec{E}, k \neq j} \vec{x}(i,k) \leq 1 \text{ pour tout } i \in V, ij \in E \quad (3.11)$$

$$x_{ij} = \vec{x}(i,j) + \vec{x}(j,i) \text{ pour tout } ij \in E \quad (3.12)$$

$$\vec{x}(i,j) \geq 0 \text{ pour tout } (i,j) \in \vec{E}$$

Pour chaque inégalité du type (3.11) nous associons (i, ij) qui comprend un sommet $i \in V$ et une arête $ij \in E$. Nous allons appeler i le *centre de l'inégalité* (3.11) et l'arête ij l'*affectation* de l'inégalité (3.11). L'application de la procédure de Fourier-Motzkin pour éliminer les variables $\vec{x}(i,j)$ peut être considéré comme suit :

- Soit remplacer $\vec{x}(i,j) + \vec{x}(j,i)$ par x_{ij} dans une des combinaison linéaires de l'inégalité (3.11).
- Ou trivialement, l'éliminer (i.e. combinaison avec $-\vec{x}(i,j) \leq 0$).

Toutefois, les combinaisons linéaires des inégalités (3.11) ne forment pas toutes une application de la procédure Fourier-Motzkin. Alors nous appelons une *combinaison correcte* toute combinaison linéaire des inégalités (3.11) entraînant l'élimination d'une variable \vec{x} par la procédure de Fourier-Motzkin. Les caractéristiques d'une telle combinaison sont illustrées dans la remarque suivante :

Remarque 3.3 *Une combinaison correcte C des inégalités (3.11) est une combinaison linéaire entière des inégalités (3.11) telle que pour toute arête $ij \in E$:*

- soit c_{ij}^2 et c_{ji}^2 sont égales et strictement positifs,
- ou $c_{ij}^1 = 0$ et au moins c_{ij}^2 ou c_{ji}^2 est égale à 0

Où, c_{ij}^1, c_{ij}^2 et c_{ji}^2 sont respectivement les sommes des coefficients correspondant à $x_{ij}, \vec{x}(i,j)$ et $\vec{x}(j,i)$ dans C .

Démonstration. Nous allons simuler la procédure de Fourier-Motzkin sur C pour éliminer les variables \vec{x} . Soit ij une arête quelconque dans E . Nous avons deux cas possibles :

- c_{ij}^2 et c_{ji}^2 sont strictement positifs. On suppose sans perte de généralité que $c_{ij}^2 \leq c_{ji}^2$. Soit C_1 (resp. C_2) l'ensemble des inégalités (3.11) participant dans C avec un coefficient positif pour $\vec{x}(i, j)$ (resp. $\vec{x}(j, i)$). La procédure de Fourier-Motzkin utilise l'inégalité (3.12) avec les inégalités (3.11) dans C_1 pour complètement éliminer d'abord $\vec{x}(i, j)$. Ensuite elle utilise l'inégalité obtenue en combinaison avec (3.11) dans C_2 pour éliminer complètement les variables $\vec{x}(j, i)$. Ainsi les variables $\vec{x}(j, i)$ sont complètement éliminées seulement pour le cas où $c_{ij}^2 = c_{ji}^2$
- Au moins $c_{ij}^2 = c_{ji}^2$ est égale à 0. Supposons sans perte de généralité que $c_{ij}^2 = 0$. Soit C_2 l'ensemble des inégalités (3.11) participant dans C avec un coefficient positif pour $\vec{x}(i, j)$. La procédure de Fourier Motzkin peut utiliser les inégalités dans C_2 avec les inégalités $-\vec{x}(j, i) \leq 0$ pour complètement éliminer $\vec{x}(j, i)$ de C_2 . Ceci est possible seulement si l'égalité $x_{ij} = \vec{x}(i, j) + \vec{x}(j, i)$ n'a pas été utilisée dans l'élimination de $\vec{x}(j, i)$ auparavant.(i.e. $c_{ij}^1 = 0$).

□

De la remarque 3.3 on peut déduire le résultat suivant :

Corollaire 3.2 *Etant donnée une combinaison correcte C , on peut supposer sans perte de généralité que les coefficients dans la combinaison linéaire C des inégalités (3.11) sont tous égaux à 1*

En conséquence, étant donné une combinaison correcte C , on peut considérer C comme un ensemble des inégalités (3.11) et les sommes c_{ij}^1, c_{ij}^2 et c_{ji}^2 pour toute arête $ij \in E$ deviennent la somme d'au plus un élément et prennent la valeur 0 ou 1. Pour cette raison, nous allons utiliser le terme *coefficient* au lieu de *somme*. Etant données deux combinaisons correctes C' et C'' , elle sont dites *disjointes* si pour chaque arête $ij \in E$:

- si au moins un coefficient $c_{ij}''^1, c_{ij}''^2, c_{ji}''^2$ est égal à 1, les coefficients $c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ji}^2$ sont tous égaux à 0.
- Inversement quand au moins un des coefficient parmi $c_{ij}^1, c_{ij}^2, c_{ji}^2$ est égal à 1, les coefficients $c_{ij}''^1, c_{ij}''^2, c_{ji}''^2$ sont tous égaux à 0.

Une combinaison correcte est dite *minimale* s'il n'existe pas deux combinaisons disjointes C' et C'' telles que $C = C' \cup C''$. Le lemme qui va suivre donne une caractérisation des combinaisons correctes minimales.

Lemme 3.6 *Une combinaison linéaire C des inégalités (3.11) est minimale si et seulement si l'affectation des inégalités (3.11) apparaissant dans C forme un couplage de T et le sous graphe de T induit par les centres de ces inégalités est connexe.*

Démonstration. (\Rightarrow) Supposons que C est une combinaison correcte et que l'ensemble des affectations des inégalités participant dans C ne forme pas un couplage dans T . Ainsi, T est un arbre, il existe deux affectations ij et ik telles que ik est la seule affectation incidente à k . Supposons que ces deux affectations correspondent respectivement à deux inégalités du type (3.11), I_1, I_2 participant dans C . Nous avons deux cas :

- I_1 prend i comme centre et I_2 prend k comme centre. Dans ce cas, C n'est pas une combinaison correcte. Comme nous avons $c_{ik}^2 = 1, c_{ki}^2 = 0$ mais $c_{ik}^1 = 1$ d'où la contradiction.
- I_1 prend j comme centre et I_2 prend k comme centre. Pour toute arête $kp \in T, p$ n'est pas un centre dans C puisque autrement C contiendrait un cycle. De là, on peut remarquer que le singleton I_2 et le sous ensemble $C \setminus \{I_2\}$ sont disjoints, ce qui implique que C n'est pas minimal, d'où la contradiction.

Supposons maintenant que le sous graphe de T induit par les centres des inégalités dans C n'est pas connexe. Supposons que $C' \subseteq C$ tel que le sous graphe induit par les inégalités apparaissant dans C' est une composante connexe du sous graphe induit par les centres des inégalités dans C . Pour tout sommet i qui n'est pas un centre dans C' , on peut voir que i n'est pas un centre dans C , dans le cas contraire le sous graphe induit par les centres des inégalités dans C' ne serait pas une composante connexe du sous graphe induit par les centres des inégalités dans C . Cela implique que C' et $C \setminus C'$ sont disjointes, alors C n'est pas minimale.

(\Leftarrow) Supposons que C est une combinaison telle que les affectations forment un couplage M , et le sous le graphe H induit par les centres des inégalités dans C est connexe. Comme T est un arbre et H est connexe, il est facile de remarquer que les arêtes de H et M forment

un M -arbre où M est le M -couplage associé. Montrons que C est une combinaison correcte. Pour tout arête $ij \in E$:

- si i et j sont deux centres dans C , alors $c_{ij}^2 = 0$ (comme $ij \notin M$) et $c_{ij}^1 = c_{ji}^1$.
- si exactement un des sommets i ou j est le centre dans C . Soit $c_{ij}^2 = 0$ et $c_{ij}^1 = 1$ et $c_{ji}^1 = 0$

Nous déduisons que C est une combinaison correcte. Montrons maintenant que C est minimale. Soit C' un sous ensemble quelconque de C , nous montrons que C' et $C'' = C \setminus C'$ ne sont pas disjointes. Comme le sous graphe induit par les centres de C est connexe, il existe une arête $ij \in E$ telle que i est le centre de C' et j est un centre dans C'' . On peut remarquer que $c_{ij}^{\prime 2} = 1$, $c_{ji}^{\prime 2} = 0$ et $c_{ij}^{\prime 1} = 0$, $c_{ji}^{\prime 1} = 1$. Cela implique que C' et C'' ne sont pas disjointes, en conséquence C est minimale. □

Preuve du Théorème 3.7

Les arguments qui précèdent ainsi que le Lemme (3.6) montrent que la projection du $ESFP(\vec{T})$ sur les variables x_{ij} est complètement caractérisée par une combinaison correcte minimale des inégalités (3.11). Le Lemme 3.6 indique aussi que pour toute combinaison correcte minimale C , la projection présentée par C donne l'inégalité du M -arbre. En effet, les affectations des inégalités dans C correspondent au M -couplage dans T (puisque les arêtes correspondant aux affectations forment un couplage dans T et le sous graphe induit par les centres des affectations est connexe). Inversement, tout M -couplage M de T correspond à une combinaison correcte minimale C des inégalités (3.11) où les affectations correspondent aux arêtes de M et les centres correspondent à un sous ensemble S de $V(M)$ de taille $|M|$ dont le sous graphe induit est connexe. (De la Remarque 3.2, l'ensemble S est unique).

3.4 POLYTOPE DES FORÊTS D'ÉTOILES DANS LES CYCLES

Dans cette section, nous allons nous restreindre aux graphes dont la structure est un cycle sans cordes $C = (V(C), E(C))$. L'ensemble des sommets de C est $V(C) = \{1, \dots, n\}$ numérotés de 1 à n et l'ensemble des

arêtes $E(C) = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ où $e_i = (i, i + 1)$ pour tout $i = 1, \dots, n - 1$, et $e_n = (n, 1)$. Les arêtes dans C sont pondérées par un vecteur $c \in \mathbb{R}^n$ où c_i est le poids associé à l'arête e_i pour $i = 1 \dots, n$. Nous considérons aussi $L(C) = (V^L, E^L)$ le line graphe de C où les sommets correspondent aux arêtes de C , et deux sommets dans V^L sont adjacents si les arêtes correspondantes sont adjacentes dans C . Noter que $L(C)$ est également un

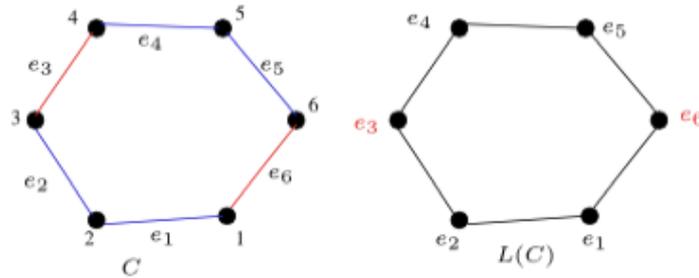


FIGURE 3.2 – Un cycle et son line-graphe.

sommet-pondéré par le vecteur c . Étant donné un sommet $1 \leq i \leq n$, et un entier positif t , désignons par $i + t$ le sommet $i + t$ si $i + t \leq n$ et le sommet $i + t \bmod (n)$ si $i + t > n$. Pour deux sommets u et v avec $v = u + t$ pour un certain entier positif $t > 0$ dans C , on note par $C(u, v)$ la chaîne $u + 1, u + 2, \dots, u + t - 1$ de C qui relie $u + 1$ à $v = u + t - 1$ (noter que le chemin $C(u, v)$ ne contient pas u et v). Pour deux arêtes e et f dans C avec $e = e_i$ et $f = e_{i+t-1}$, on note par $C(e, f)$ la chaîne $(e_{i+1}, e_{i+1} \dots, e_{i+t-2})$. Il est à noter que le chemin $C(e, f)$ ne comprend ni e ni f .

Dans le chapitre deux nous avons mis en avant la relation étroite entre le problème de l'absorbant de poids minimum et celui des forêts d'étoiles de poids maximum. Dans ce qui va suivre nous allons nous intéresser à la relation entre le polytope des forêts d'étoiles et celui des absorbants ainsi que celui des arête-absorbants dans le cas des cycles.

Dans les cycles sans corde de longueur supérieure à 3, il n'y a pas de structure de 3-cycles comme sous graphe. Ce qui nous conduit à la remarque suivante :

Remarque 3.4 Soit $F \subseteq C$ une forêt d'étoiles si et seulement si F ne contient pas de 3-chemin.

Le lemme qui suit établit la relation entre une forêt d'étoiles et un arête-absorbant dans un cycle.

Lemme 3.7 *Le complémentaire d'une forêt d'étoiles dans C est un arête-absorbant et vice-versa.*

Démonstration. (\Rightarrow) Soit $F \subseteq E(C)$ une forêt d'étoiles dans C et $\bar{F} = C \setminus F$. Supposons que \bar{F} n'est pas un arête-absorbant. Alors, il existe une arête $e_i \in F$ non adjacente à aucune autre arête dans \bar{F} . Comme C est un cycle, donc les arêtes voisines à e_i dans C (e_{i-1}, e_{i+1}) n'appartiennent pas à \bar{F} . De là, les trois arêtes e_{i-1}, e_i, e_{i+1} formant un trois chemin appartiennent toutes à F ce qui contredit le fait que F est une forêt d'étoiles.

(\Leftarrow) Soit $ED \subseteq E(C)$ un arête-absorbant dans C . Soit $F = C \setminus ED$. Supposons que F n'est pas une forêt d'étoiles. Alors F comprendrait un 3-chemin (v_1, v_2, v_3, v_4) . Ainsi l'arête (v_2, v_3) n'est dominée (absorbée) par aucune arête de ED . Ce qui implique que ED n'est pas un arête-absorbant. D'où la contradiction. \square

On peut remarquer qu'il existe une correspondance un-à-un entre les sommets du graphe ligne $L(C)$ et les arêtes de C . Ceci conduit à une correspondance entre l'absorbant dans C et l'arête absorbant dans $L(C)$. La remarque suivante illustre ce résultat.

Remarque 3.5 *Tout arête-absorbant dans C est un absorbant dans $L(C)$ et vice versa.*

Toutes ces relations que nous avons établies ci-haut peuvent être reproduites en terme polyédrique dans le lemme suivant :

Lemme 3.8 *Les assertions suivantes sont équivalentes :*

- (i) $\alpha^t y \geq \beta$ avec $y \in \mathbb{R}^n$ définit une facette pour $DP(L(C))$.
- (ii) $\alpha^t x \geq \beta$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ définit une facette pour $EDP(C)$.
- (iii) $\alpha^t x \leq \sum_{e \in E(C)} \alpha(e) - \beta$ avec $x \in \mathbb{R}^n$ définit une facette pour $SFP(C)$.

Ainsi, les polytopes $SFP(C)$, $EDP(C)$ et $DP(L(C))$ sont équivalents en terme de correspondance une-à-une entre leurs facettes.

Démonstration. Ces polytopes sont définis dans \mathbb{R}^n et il sont de pleine dimension. Le lemme découle des relations décrites dans le Lemme 3.4 et dans la Remarque 3.5 comme elles sont préservées sous des transformations affines. \square

Bouchakour et al. dans [Bouchakour et al. \[2008\]](#) ont donné la des-

cription complète du polytope des absorbants $DP(L(C))$ dans les cycles, d'après le Lemme 3.8 nous pouvons aussi dériver une description complète du polytope des forêts d'étoiles $SFP(C)$ et $EDP(C)$. C'est l'objet de la section qui suit.

3.4.1 Description complète du polytope $SFP(C)$

Soit $L(C)$ le graphe de ligne d'un cycle C . Le polytope $DP(L(C)) \subseteq \mathbb{R}^n$ dont les composantes indexées par les sommets dans V^L . Bouchakour et al. dans [Bouchakour et al. \[2008\]](#) et [Bouchakour et Mahjoub \[1997\]](#) ont proposé la formulation en nombres entiers du problème de l'absorbant du poids minimum.

$$\begin{aligned} & \min c^t x \\ & 0 \leq x(v) \leq 1 \quad \text{pour tout } v \in V^L \end{aligned} \tag{3.13}$$

$$x(N(v)) \geq 1 \quad \text{pour tout } v \in V^L \tag{3.14}$$

$$x(v) \text{ entier pour tout } v \in V^L$$

Les auteurs dans [Bouchakour et Mahjoub \[1997\]](#) et [Bouchakour et al. \[2008\]](#) ont caractérisé deux autres inégalités pour le polytope du $DP(L(C))$.

Théorème 3.8 [Bouchakour et Mahjoub \[1997\]](#) *Les inégalités*

$$x(V^L) \geq \lceil \frac{|C|}{3} \rceil \tag{3.15}$$

Définissent des facettes pour le $DP(L(C))$ si et seulement si $|C| = 3$ ou $|C| \geq 4$ et $|C|$ non multiple de 3.

Théorème 3.9 [Bouchakour et al. \[2008\]](#) *Soit $W = \{v_1, v_2, \dots, v_p\}$ un sous ensemble de $p \geq 3$ sommets dans V^L satisfaisant les conditions suivantes*

$$\mathbf{C1} \quad p \text{ est impair et } v_1 \leq v_2 \leq \dots \leq v_p,$$

$$\mathbf{C2} \quad |C(v_i, v_{i+1})| = 3k_i \text{ avec } k_i \geq 1, \text{ pour } i = 1, \dots, p \text{ avec } v_{p+1} = v_1$$

Alors la contrainte

$$2 \sum_{v \in W} x_v + \sum_{v \in V^L \setminus W} x_v \geq \sum_{i=1}^p k_i + \lceil \frac{p}{2} \rceil \quad (3.16)$$

définit une facette pour le $DP(L(C))$.

Dans ce qui suit nous allons appliquer le Lemme 3.8 pour dériver des inégalités définissant des facettes pour le polytope $SFP(C)$. Il est clair que l'application du Lemme 3.8 aux inégalités (3.13) produit les inégalités triviales suivantes :

$$0 \leq x(e) \leq 1 \text{ pour tout } e \in E(C)$$

pour le $SFP(C)$.

L'application du Lemme 3.8 aux inégalités (3.14) induit les inégalités de 3-chemin suivantes :

$$x(P) \leq 2 \text{ pour tout chemin de longueur 3 dans } C.$$

Pour le $SFP(C)$, cette dernière a été décrite précédemment. La proposition qui suit résulte de l'application du Lemme 3.8 sur les inégalités (3.15)

Proposition 3.1 *Les inégalités du cycle :*

$$x(E(C)) \leq \lfloor \frac{2|C|}{3} \rfloor \quad (3.17)$$

définissent des facettes pour le $SFP(C)$ quand $|C| = 3$ ou $|C| \geq 4$ n'est pas un multiple de 3.

Soit $W = \{v_1, v_2, \dots, v_p\} \subseteq V^L$ un sous ensemble des sommets de V^L tel qu'il est défini dans le Théorème 3.9. Soit f_i l'arête dans C correspondant au sommet v_i dans $L(C)$ et soit $M = \{f_1, f_2, \dots, f_p\}$. Pour $i = 1, \dots, p$; nous définissons $C(f_i, f_{i+1})$ avec $f_{p+1} = f_1$ le chemin entre f_i et f_{i+1} dans C , qui ne contient aucune arête de M . Les conditions C_1 et C_2 sur l'ensemble W sont transformées en conditions **M1** et **M2** sur l'ensemble M comme suit :

M1 M est un couplage de taille p impair et $p \geq 3$.

M2 $|C(f_i, f_{i+1})| = 3k_i$, $k_i \geq 1$ pour $i = 1, \dots, p$ avec $f_{p+1} = f_1$.

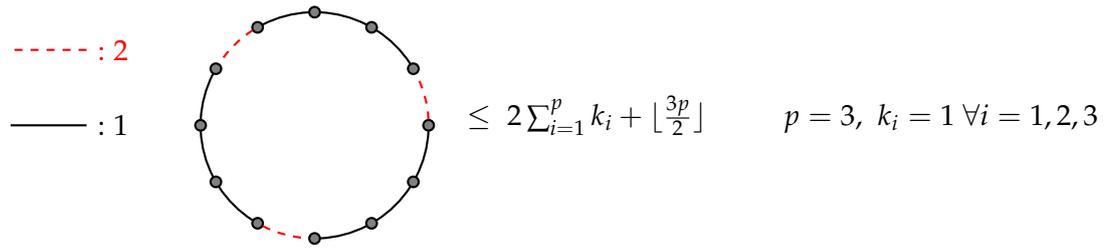


FIGURE 3.3 – Le graphe support du M -Cycle

A présent, on peut déduire le résultat suivant en appliquant le Lemme 3.8 sur les inégalités (3.16).

Proposition 3.2 *Les inégalités du M -cycle*

$$2x(M) + x(E(C) \setminus M) \leq 2 \sum_{i=1}^p k_i + \lfloor \frac{3p}{2} \rfloor \quad (3.18)$$

tel que $M \subseteq E(C)$ et satisfait les conditions $\mathbf{M1}$ et $\mathbf{M2}$; définissent des facettes pour le $\mathbf{SFP}(C)$.

Démonstration. Soit M un couplage quelconque de C satisfaisant les conditions $\mathbf{M1}$ et $\mathbf{M2}$. Supposons que v_1, \dots, v_p les sommets dans $L(C)$ correspondant respectivement au arêtes f_1, \dots, f_p dans C . Il est facile de remarquer que v_1, v_2, \dots, v_p satisfont les conditions $\mathbf{C1}$ et $\mathbf{C2}$ du Théorème 3.9, en conséquence :

$$2 \sum_{v \in W} x(v) + \sum_{v \in V^L \setminus W} x(v) \geq \sum_{i=1}^p k_i + \lceil \frac{p}{2} \rceil$$

définit une facette pour $\mathbf{DP}(L(C))$. Ainsi, le résultat du théorème découle du Lemme 3.8. □

Un exemple du graphe support des inégalités du M -cycle est illustré dans la figure 3.3, où cycle C est défini sur 12 sommets et le couplage M comprend 3 arêtes.

Maintenant nous avons tous les ingrédients qui nous permettent de donner la description complète du polytope des forêts d'étoiles dans les cycles. Bouchakour et al. dans [Bouchakour et al. \[2008\]](#) ont montré le résultat suivant :

Théorème 3.10 *Bouchakour et al. [2008]* Une description linéaire complète du polytope $DP(L(C))$ est donnée par les inégalités : (3.13), (3.14), (3.15) et (3.16).

Comme conséquence directe, nous avons le résultat suivant :

Corollaire 3.3 Quand le graphe G est un cycle, $SFP(G)$ est complètement décrit par les inégalités triviales, les inégalités de 3-chemin, les inégalités de cycle (3.17) et les inégalités de M -cycle (3.18).

3.5 LES INÉGALITÉS DU b -COUPLAGE PARFAIT

Dans cette section le graphe $G = (V, E)$ est quelconque. Quand nous procédons par la projection des inégalités (3.7) sur les variables $x_{ij} \in E$, comme G peut être plus large qu'un arbre, nous devons obtenir une classe d'inégalités valides pour le polytope $SFP(G)$ plus large que les inégalités du M -arbre. En effet, le but de cette section est de caractériser cette classe d'inégalités que nous allons appeler *inégalités de b -couplage parfait*. Etant donné un sous ensemble de sommets $S \subseteq V$ nous notons par $G_S = (S, E(S))$ le sous graphe induit par S . Nous allons supposer que G_S est un graphe connexe. Un b -couplage parfait dans G_S est un sous graphe (qui n'est pas forcément simple) dont le degré de chaque sommet $v \in S$ dans G_S est b .

Etant donné un sous ensemble $S \subseteq V$ tel que G_S est connexe et B un b -couplage parfait dans G_S . Soit $S_2 \subseteq S$ l'ensemble des sommets de degré au moins 2 dans G_S . Pour toute arête $ij \in E(S)$, posons m_{ij} la multiplicité de ij dans B (où $m_{ij} = 0$ si $ij \notin B$).

Ainsi l'inégalité du b -couplage parfait peut être définie comme suit :

$$\sum_{ij \in E(S) \setminus E(S_2)} m_{ij} x_{ij} + \sum_{ij \in E(S_2)} (m_{ij} + b) x_{ij} \leq b |S_2| \quad (3.19)$$

$\forall S \subseteq V$ où G_S est connexe pour tout b -couplage B dans G_S .

Noter que l'inégalité du M -arbre décrite dans la section 3 est un cas particulier des inégalités de b -couplage parfait où G_S est un arbre et B un b -couplage parfait, $b = 1$.

Théorème 3.11 La projection des inégalités (3.7) sur les variables x_{ij} pour tout $ij \in E$ donne des inégalités de b -couplage parfait.

Démonstration. Considérons une projection de l'inégalité (3.7) sur les variables x_{ij} représentée par une combinaison correcte minimale C des inégalités (3.7). Soit B le graphe support induit par les affectations correspondantes aux inégalités dans C (si i est affecté à j alors l'arête $ij \in B$). Noter que B peut avoir des arêtes de multiplicité strictement supérieures à 1. Soit $G_S = (S, E(S))$ le sous graphe induit par B . Supposons que B n'est pas un b -couplage parfait pour un certain b . Alors, il existe une arête $ij \in E(S)$ tel que les degrés de i et j dans B sont mutuellement différents. En conséquence, il devrait y avoir soit la variable $\vec{x}(i, j)$ ou la variable $\vec{x}(j, i)$ qui ne peut être remplacée par x_{ij} . Alors C n'est pas une combinaison correcte. D'où la contradiction.

Maintenant, étant donné un sous ensemble $S \subseteq V$ tel que $G_S = (S, E(S))$ le sous graphe induit par S est connexe et B un b -couplage parfait dans G_S . Soit I la somme des inégalités (3.11) dont les centres sont les sommets dans S_2 et les affectations sont les arêtes dans B . Comme B est un b -couplage parfait, le coté droit de l'inégalité I est $b|S_2|$. Pour toute arête $ij \in G_S$, nous avons les trois cas suivants :

- (a) $ij \in E(S) \setminus E(S_2)$ nous pouvons voir que $ij \in B$, et seulement une extrémité de ij (soit i ou j) est dans S_2 . Alors le coefficient de x_{ij} dans I est m_{ij} .
- (b) Si $ij \in B \cap E(S_2)$ alors x_{ij} apparaît $2m_{ij}$ fois dans les inégalités (3.7) avec ij comme affectation, i et j étant respectivement des centres. Les $\vec{x}(i, j)$ apparaissent $(b - m_{ij})$ fois dans les inégalités où i est un centre et à affectations différentes de ij . De manière similaire la variable $\vec{x}(j, i)$ apparaît $b - m_{ij}$ fois dans les inégalités avec j comme centre et une affectation qui n'est pas ij . Comme $x_{ij} = \vec{x}(i, j) + \vec{x}(j, i)$, nous obtenons $b - m_{ij}$ fois x_{ij} . Au total le coefficient de x_{ij} dans I est $2m_{ij} + b - m_{ij} = b + m_{ij}$.
- (b) Si $ij \in E(S_2) \setminus B$ alors $\vec{x}(i, j)$ apparaît b fois dans les inégalités où i est un centre et $\vec{x}(j, i)$ apparaît b fois dans les inégalités avec j comme centre. Donc, au total, le coefficient de x_{ij} dans I est b qui est égal à $b + m_{ij}$ puisque $m_{ij} = 0$. Ce qui montre que I est une inégalité de b -couplage parfait.

□

A noter que les inégalités du b -couplage ne définissent pas forcément

des facettes pour le polytope $\mathbf{SFP}(G)$, néanmoins elles sont valides. On peut s'intéresser au problème de séparation de ces inégalités qui consiste à savoir si un point $x^* \in [0, 1]$, ne vérifie pas quelques inégalités du b -couplage et si c'est le cas, donner explicitement au moins une des inégalités. Nous allons montrer dans le chapitre cinq que les inégalités du b -couplage sont séparables en temps polynomiale, par la résolution d'un programme linéaire dans sa formulation étendue proposée si- haut.

CONCLUSION

Dans ce chapitre, nous avons introduit le polytope des forêts d'étoiles, un polytope 0-1-monotone et de pleine dimension ce qui permet d'assurer qu'il existe un système linéaire $Ax \leq b$ unique à une multiplication près par un scalaire positif. Le but de l'étude polyédrique est de définir explicitement les coefficients du système $Ax \leq b$. Ceci n'est pas toujours possible puisque le problème est NP - difficile. Néanmoins on peut se restreindre au cas où le problème est résoluble en temps polynomial, comme dans le cas où le graphe est un cycle, ou un arbre. Dans le cas où le graphe est un cycle nous avons proposé une description complète du polytope $\mathbf{SFP}(C)$ en s'appuyant sur la connexion (lien) entre le polytope des $\mathbf{SFP}(G)$ et le polytope des absorbants défini dans les cycles.

Dans le cas des arbres nous avons aussi proposé une description complète du polytope $\mathbf{SFP}(T)$ en mettant l'accent sur la connexion de ce polytope et le polytope associé à une variante du problème de localisation défini par Baiou et Barahona [Baiou et Barahona \[2009\]](#).

Les techniques utilisées dans les deux cas sont différentes, dans le premier la technique se base sur une transformation via le passage au line-graph et la notion de complémentarité. Dans la seconde nous avons fait appel aux formulations étendues et aux techniques de projection.

Dans le prochain chapitre nous allons nous intéresser au polytope des forêts d'étoiles quand le graphe est complet ainsi qu'à la structure faciale de celui-ci.

LE POLYTOPE $\mathbf{SFP}(K_n)$

4

Dans ce chapitre, nous nous intéressons au polytope des forêts d'étoiles défini dans un graphe complet. Plus précisément à la caractérisation du polytope $\mathbf{SFP}(K_n)$ que nous noterons tout au long du chapitre par P_n où n est le nombre de sommets du graphe complet K_n .

L'objectif principal est de caractériser les inégalités définissant des facettes du polytope P_n . Celles-ci possèdent une propriété forte ; puisqu'elle vont définir des facettes pour le polytope des forêts d'étoiles $\mathbf{SFP}(G)$ où G est un graphe quelconque comprenant les graphes supports de ces inégalités comme sous graphes de G pas forcément induits. Et cette propriété de facette nous permet de proposer les conditions nécessaires pour qu'une inégalité définisse une facette pour le polytope $\mathbf{SFP}(G)$ pour G quelconque.

4.1 DÉFINITIONS ET RESTRICTIONS

Etant donné un graphe complet $K_n = (V_n, E_n)$, on note par P_n l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence de toutes les forêts d'étoiles définies sur K_n . Autrement dit $P_n = \mathbf{SFP}(K_n)$. Rappelons que x^F est le vecteur d'incidence de F dans E_n .

$$P_n = \mathbf{conv}(\{x^F \in \{0, 1\}^{|E|} \mid (V_n, F) \text{ est une forêt d'étoiles dans } G\}).$$

Comme, nous l'avons mentionné dans le chapitre précédent le polytope $\mathbf{SFP}(G)$ est un $\{0 - 1\}$ -polytope de pleine dimension et monotone, ce qui justifie ce qui suit :

- Il existe une matrice A à coefficients tous positifs ou nuls tel que

$$P_n = \{x \in \mathbb{R}^{|E|} \mid Ax \leq b, x \geq 0\}.$$

- Toute inégalité du système $Ax \leq a_0$ ainsi que les inégalités $x \geq 0$ définissent des facettes du polytope P_n .
- Toute inégalité $a^T x \leq a_0$ du système $Ax \leq b$ est à coefficients $a_e \geq 0$ et $a_0 > 0$.

La caractérisation du polytope P_n consiste alors à définir les coefficients de la matrice "A" dans le meilleur des cas. Cela peut s'avérer impossible pour les problèmes de classe *NP*-difficile, tel est le cas du problème des forêts d'étoiles de poids maximum. Ce qu'on peut espérer c'est identifier quelques classes d'inégalités du système $Ax \leq b$ qui donneraient une description partielle du polytope P_n .

Note : Une forêt d'étoiles d'un graphe $G = (V, E)$ est un sous graphe (V, F) pour $F \subseteq E$. Nous allons souvent confondre la forêt d'étoiles avec l'ensemble des arêtes qui la définit. On dira F est une forêt d'étoiles au lieu de (V, F) une forêt d'étoiles.

Etant donnée une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$, une forêt d'étoile F est dite *serrée* respectivement à I_a si son vecteur d'incidence x^F vérifie I_a à égalité, i.e. $a^T x^F = a_0$.

4.2 INÉGALITÉS DÉFINISSANT DES FACETTES PRIMITIVES

Tout au long de cette section nous allons confondre les inégalités valides du polytope P_n avec leurs graphes supports. Nous allons établir le lien entre une inégalité induite par un graphe d'ordre k avec le polytope P_n quand $n > k$.

Définition 4.1 *Etant donné un graphe $G = (V, E)$, on dit qu'une inégalité $\sum_{e \in E} a_e x_e \leq a_0$ où $a_e \neq 0$ pour tout $e \in E$, est **induite par G** . Quand le graphe se résume à une arête, soit e , on se réfère à l'inégalité $a_e x_e \leq a_0$, dite aussi, inégalité triviale.*

Définition 4.2 *Etant donnée une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ valide pour le polytope P_n . On appelle **graphe support de I_a** le graphe induit par les arêtes E_a à coefficients non nuls dans I_a .*

Autrement dit le graphe $H_a = (V_a, E_a)$ où $E_a = \{e \in E_n \mid a_e \neq 0\}$ et $V_a = \{V_n(E_a)\}$.

Dans le but de mettre en évidence la relation entre une inégalité induite par un graphe d'ordre k et le polytope des forêts d'étoiles P_n pour $n > k$, nous allons procéder comme suit :

* Nous supposons que $G = (V, E)$ est un sous graphe du graphe complet $K_n = (V_n, E_n)$ et nous considérons $I_a \equiv a_e x_e \leq a_0$ comme une inégalité définie dans $\mathbb{R}^{|E_n|}$. Nous écrivons $I_a \equiv a^T x \leq a_0 \equiv \sum_{e \in E} a_e x_e \leq a_0$ où $a \in \mathbb{R}^{|E_n|}$ et $a_f = 0$ pour tout $f \in E_n \setminus E$ et nous obtenons de cette manière l'inégalité $a^T x \leq a_0$ définie dans $\mathbb{R}^{|E_n|}$.

Par conséquent, quand nous nous référons à une inégalité induite par un graphe G d'ordre k en connexion avec le polytope P_n , $n \geq k$, G est supposé être un sous graphe de K_n .

Remarque 4.1 *Soit $G = (V, E)$ un graphe d'ordre k . Alors, on peut trouver au moins $\binom{n}{k}$ graphes isomorphes à G dans un graphe complet K_n [Berge \[1970\]](#). Autrement dit si G induit une inégalité définissant une facette pour P_n alors P_n comprend au moins $\binom{n}{k}$ inégalités définissant des facettes.*

Avant de présenter quelques graphes d'ordre k qui définissent des facettes pour le polytope P_n , nous allons énoncer le **Théorème du lifting** qui nous sera utile tout au long de ce chapitre.

Théorème 4.1 (*Théorème du lifting*) Etant donné un graphe $G = (V, E)$ d'ordre k , supposons que $I_a \equiv \sum_{e \in E} a_e x_e \leq a_0$ une inégalité induite par G définit une facette pour P_k . Alors cette inégalité définit aussi une facette pour P_n pour tout $n \geq k$.

Démonstration. P_k est le polytope des forêts d'étoiles défini dans un graphe complet d'ordre k . Comme celui-ci est un sous graphe induit de K_n pour $n \geq k$ alors le résultat découle du Lemme 3.3 démontré au chapitre précédent. \square

Conséquence

Pour montrer qu'une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ induite par un graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre k définit une facette pour P_n , il suffit de montrer qu'elle définit une facette pour P_k .

Pour Montrer que $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ induite par G_a d'ordre k définit une facette pour P_k , il suffit de montrer que I_a définit une facette pour **SFP**(G_a) et G_a vérifie une certaine **condition** qui sera précisée dans le théorème qui va suivre.

Soit $\mathcal{F}_a = \{F \subset E_a \mid (V_a, F) \text{ est une forêt d'étoiles vérifiant } I_a \text{ à égalité}\}$ la famille des forêts d'étoiles dite *serrées* pour I_a .

Théorème 4.2 Etant donnée un graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre k . Soit $I_a \equiv \sum_{e \in E_a} a_e x_e \leq a_0$ l'inégalité induite par G_a définissant une facette pour **SFP**(G_a). I_a définit une facette pour P_k si et seulement si le graphe G_a vérifie la condition suivante :

(L) Pour toute paire de sommets $\{u, v\} \subseteq V_a$ et $uv \notin E_a$, il existe une forêt d'étoiles $F^{u,v} \in \mathcal{F}_a$ où les sommets u, v sont tous deux sommets isolés ou l'un est un sommet isolé et l'autre est un centre d'une étoile.

Démonstration. Comme I_a est une facette de **SFP**(G_a), alors il existe $|E_a|$ forêts d'étoiles dans G_a qui sont serrées respectivement à I_a (vérifient I_a à égalité), et dont les vecteurs d'incidence sont linéairement indépendants. Soit $\mathcal{N}_a \subseteq \mathcal{F}_a$ tel que $|\mathcal{N}_a| = |E_a|$ cet ensemble de forêts d'étoiles.

(\Leftarrow) Supposons que I_a est une facette de **SFP**(G_a) et que la condition **(L)** est vérifiée, alors pour tout $\{u, v\} \subseteq V_a$, où $uv \notin E_a$, Il existe $F^{uv} \in \mathcal{N}_a$ telle que $F^{uv} \cup \{uv\}$ soit une forêt d'étoiles. Elle est serrée respectivement à I_a , puisque $a_e = 0$ pour tout $e \notin E_a$. Ainsi on peut former $|E_k \setminus E_a|$ nouvelles forêts d'étoiles dont les vecteurs d'incidences sont affinement

indépendants, et serrées respectivement à I_a . Soit M une (m,m) -matrice dont les lignes sont les vecteurs d'incidences des forêts d'étoiles.

- (a) $x^F, \forall F \in \mathcal{N}_a, \forall e \in E_a$. (Il y a $|E_a|$ vecteurs lignes.)
- (b) $x^{F'}$ où $F' = F^{uv} \cup \{uv\}$ pour tout $uv \in E_k \setminus E_a$. (Il y a $|E_k| - |E_a|$ vecteurs lignes.)

La matrice M peut être mise sous la forme suivante :

$$M = \begin{matrix} & E_a & E_k \setminus E_a \\ \begin{matrix} (a) \\ (b) \end{matrix} & \begin{pmatrix} M_0 & 0 \\ M_1 & \mathbb{I} \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Comme les $|E_a|$ vecteurs lignes de la matrice M_0 sont affinement indépendants, et la matrice identité \mathbb{I} est de plein rang, $|E_k \setminus E_a|$, il s'ensuit que les vecteurs lignes de la matrice M sont affinement indépendants. Au total $|E_a| + |E_k \setminus E_a| = |E_k|$ vecteurs lignes affinement indépendants correspondant aux forêts d'étoiles serrées pour I_a . D'où I_a définit une facette de P_k .

(\Rightarrow) Supposons que I_a est une facette de $SFP(G_a)$, et que G_a ne vérifie pas la condition **(L)**. Soit I_a une inégalité induite par $G_a = (V_a, E_a)$ définissant une facette pour $SFP(G)$, et qu'il existe une paire de sommets $\{u, v\} \subset V_a$ et $uv \notin E_a$ telle que pour tout $F^{u,v} \in \mathcal{F}_a$, $F^{u,v} \cup \{uv\}$ n'est pas une forêt d'étoiles. Autrement dit, il n'existe aucune forêt d'étoiles qui peut comprendre l'arête uv avec un coefficient nul. Définissons l'inégalité $I' \equiv \sum_{e \in E_a} a_e x(e) + a'_{uv} x(uv) \leq a_0$ induite par le graphe $G' = (V_a, E_a \cup \{uv\})$. Cette inégalité est vérifiée à égalité par toutes les forêts d'étoiles de \mathcal{F}_a et par une forêt d'étoile $F \setminus \{e\} \cup \{uv\}$, (puisque aucune d'elle ne peut comprendre l'arête uv avec un $a_{uv} = 0$).

On peut remarquer que l'inégalité I' est vérifiée à égalité par $|E_a| + 1$ forêts d'étoiles dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants, donc I' est une facette de $SFP(G')$ où $G' = (V_a, E_a \cup \{uv\})$. Ainsi, I_a est dominée par l'inégalité I' , donc ne définit pas une facette pour P_k . □

Pour montrer qu'une inégalité définit une facette pour P_n nous avons le résultat suivant :

Corollaire 4.1 *Etant donné une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ induite par un graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre k . I_a définit une facette pour P_n si et seulement si :*

1. I_a définit une facette pour $\mathbf{SFP}(G_a)$.
2. Pour tout $v \in V_a$, il existe une forêt d'étoiles $F^v \in \mathcal{F}_a$ telle que v est un sommet isolé ou un centre d'une étoile.
3. Pour toute paire de sommets $u, v \in V_a$ telle que $uv \notin E_a$, il existe une forêt d'étoiles $F^{u,v} \in \mathcal{N}_a$ telle que u est un centre d'une étoile et v est un sommet isolé dans $F^{u,v}$, ou u et v sont tous deux des sommets isolés dans $F^{u,v}$.

Pour montrer qu'une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ induite par le graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre k , définit une facette pour P_n ; $n \geq k$ nous procédons comme suit :

- (a) D'abord, montrer que I_a définit une facette pour $\mathbf{SFP}(G_a)$.
- (b) Ensuite montrer que G_a vérifie la condition **(L)** du Théorème 4.2.

A présent nous introduisons quelques facettes du polytope P_n observées sur le polytope des forêts d'étoiles défini sur des petites structures, graphes complets d'ordre $n \leq 6$.

Inégalités Triviales

Nous rappelons que les inégalités " $0 \leq x(e) \leq 1$ " pour tout $e \in E$ dite *inégalité triviale* définissent des facettes du polytope des forêts d'étoiles $\mathbf{SFP}(G)$ pour un graphe G quelconque.

Corollaire 4.2 *Les inégalités*

$$x(e) \geq 0 \quad \text{pour tout } e \in E_n,$$

$$x(e) \leq 1 \quad \text{pour tout } e \in E_n,$$

définissent des facettes de P_n .

Inégalités de Cycle

Nous avons aussi montré que les inégalités de 3-cycle définissent des facettes du polytope $\mathbf{SFP}(G)$ contrairement aux inégalités de 3-chemin qui ne définissent pas des facettes de $\mathbf{SFP}(G)$ que sous certaines conditions.

Corollaire 4.3 Les inégalités de 3-cycle ou du triangle :

$$x(uv) + x(vw) + x(wu) \leq 2 \text{ pour tout } u, v, w \in V_n, u \neq v \neq w \neq u$$

définissent des facettes du polytope P_n .

Quant aux inégalités de 3-chemin induites par des graphes chemins P d'ordre 4 définies comme suit :

$$x(P) \leq 2 \text{ pour tout } P \in \mathcal{P}_4,$$

elles ne définissent pas des facettes du polytope P_n puisqu'elles ne définissent pas des facettes déjà pour P_4 . En effet, $I_P \equiv x(P) \leq 2$ sont des facettes du polytope $SFP(P)$ mais elles ne vérifient pas la condition **(L)** du Théorème 4.2. Alors, il existe des inégalités I'_P qui les dominent, ce sont les inégalités de 4-cycle.



FIGURE 4.1 – Les graphes supports des inégalités de 3-Cycle et de 4-cycle

Etant donné un cycle C d'ordre 4. L'inégalité du 4-cycle est une inégalité induite par C illustré dans la Figure 4.1.

Théorème 4.3 Les inégalité de 4-cycle :

$$x(C) \leq 2 \text{ pour tout } C \in \mathcal{C}_4,$$

définissent des facettes pour le polytope P_n .

Démonstration. D'après le Théorème 4.1 et Théorème 4.2, il suffit de montrer que l'inégalité de 4-cycle I_C définit une facette pour $SFP(C)$ où $C \in \mathcal{C}_4$, et que le graphe C vérifie la condition **(L)**. Soit $C = (V_4, E_4)$ un cycle sans corde où $V_4 = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, $E_4 = \{v_1v_2, v_2v_3, v_3v_4, v_1v_4\}$. Soient $F^1 = \{v_1v_2, v_1v_4\}$, $F^2 = \{v_1v_2, v_3v_4\}$, $F^3 = \{v_2v_3, v_3v_4\}$, $F^4 = \{v_4v_1, v_4v_3\}$, 4 forêts d'étoiles serrées respectivement à I_C , il n'est pas difficile de vérifier que leurs vecteurs d'incidence sont linéairement indépendants donc affi-

nement indépendants. Aussi, il est à remarquer que le graphe C vérifie la condition **(L)**. $v_1v_3 \notin E_4$, la forêt d'étoiles F^3 comprend v_3 comme centre d'une étoile et v_1 comme sommet isolé. Et pour l'arête v_2v_4 , nous avons la forêt F^4 comprenant v_4 comme centre d'une étoile et v_2 comme sommet isolé.

□

Inégalités de Paw, de bull et de net

Soit $H = (V_H, E_H)$ un graphe défini par un 3-cycle et une arête pendante. H est nommé *paw* (le nom anglais de ce graphe 4.2 West [2000]). Soit $E_H = C_H \cup \{e_H\}$, désignons par M_H tout couplage parfait dans H .

Théorème 4.4 *Les inégalités dite du Paw :*

$$x(C_H) + x(M_H) \leq |M_H|, \quad (4.1)$$

définissent des facettes de P_n .

Démonstration. Montrons d'abord que l'inégalité de paw définit une facette de $\mathbf{SFP}(H)$ où $H = (V_a, E_a)$ est le graphe support de l'inégalité (4.1). Il suffit de trouver 4 forêts d'étoiles à vecteurs caractéristiques affinement indépendants qui sont serrées pour l'inégalité (4.1). Supposons que $M = \{v_1v_2, v_3v_4\}$ et $C = \{v_2v_3, v_3v_4, v_2v_3\}$. Nous pouvons vérifier que les 4 forêts d'étoiles suivantes : $F^{v_2} = \{v_2v_1, v_2v_3, v_2v_4\}$, $F^{v_3, v_1} = \{v_2v_1; v_3v_4\}$, $F^{v_4} = \{v_4v_2, v_4v_3\}$, $F^{v_3} = \{v_4v_2; v_3v_4\}$ sont serrées respectivement à l'inégalité de paw (4.1) et que leur vecteurs caractéristiques sont affinement indépendants. D'où (4.1) définit une facette pour $\mathbf{SFP}(H)$.

Montrons maintenant que l'inégalité (4.1) définit une facette de $\mathbf{SFP}(K_n)$. D'après les Théorèmes 4.1 et 4.2, il suffit de montrer que H vérifie la condition **(L)**. Ce qui n'est pas difficile à vérifier puisqu'il y a deux arête manquante à la clique formée par les sommet du paw, graphe support support de l'inégalité (4.1) . Celles-ci vérifient la condition **(L)**, d'où le résultat.

□

Il existe encore d'autres structures dont les inégalités induites définissent des facettes de P_n telles que les **bulls** et les **nets** que nous illus-

trons dans la Figure 4.2. Pour démontrer qu'elles définissent des facettes on utilise le même procédé pour les autres facettes évoqués ci-haut.

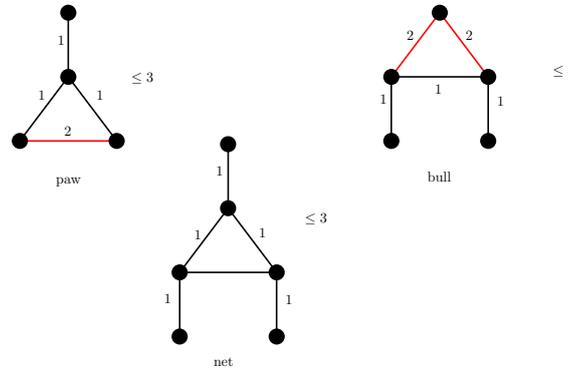


FIGURE 4.2 – Graphes supports des inégalités du paw du bull et du net

Conformément à la définition des facettes triviales propre à certains polytopes définis dans K_n , qu'on trouve dans Grötschel et al. [Grötschel et Padberg \[1979\]](#), et dans Queyranne et al. [Queyranne et Wang \[1993\]](#) nous définissons les facettes triviales de P_k .

Définition 4.3 Une inégalité $a^T x \leq a_0$ définissant une facette pour P_n est dite **facette triviale** de P_n si elle est équivalente à une des facettes suivantes :

- $x(e) \geq 0$, pour $e \in E_k$,
- $x(e) \leq 1$ pour $e \in E_k$,
- $x(C) \leq 2$ pour $C \in C_3$.

Nous allons aussi introduire le concept d'inégalité *primitive*. Ce concept a été déjà utilisé par Balas et Fischetti pour le polytope du voyageur de commerce asymétrique dans [Balas et Fischetti \[1993\]](#) et repris par plusieurs autres auteurs. On peut aussi le retrouver sous le nom de facette *fondamentale* utilisé par Wakabayashi pour le polytope des partitions en cliques [Wakabayashi \[1986\]](#).

Nous notons par $\bar{G}_a = (\bar{V}_a, \bar{E}_a)$ le graphe obtenu de G_a par la suppression d'un sommet h , $\bar{V}_a = V_a \setminus \{h\}$. Soit $I_{\bar{a}}$ l'inégalité induite par le graphe \bar{G}_a .

Définition 4.4 Soit $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ une inégalité induite par le graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre

k valide pour le polytope P_k . Soient h, l , deux sommets distincts de V_a . Alors les sommets h et k sont dits **clones** respectivement à I_a si :

- (a) $a_{vh} = a_{vl}$ pour tout $v \in V_a \setminus \{h, l\}$,
- (b) $a_{hl} = \max\{a_{hv}, \forall v \in N(h)\}$,
- (c) L'inégalité $I_{\bar{a}} \equiv \bar{a}^T \bar{x} \leq \bar{a}_0$ où \bar{a} est la restriction de a sur \bar{E}_a , et $\bar{a}_0 = a_0 - a_{hl}$ est une inégalité valide pour P_{k-1} .

S'il n'existe aucune paire de clones dans le graphe G_a respectivement à I_a , l'inégalité I_a est dite *primitive*.

On peut remarquer que les inégalités citées ci-dessus sont toutes primitives.

Dans la section suivante nous allons discuter de certaines procédures qui permettent de construire des facettes du polytope P_n .

4.3 CONSTRUCTION DE FACETTES

Dans cette section nous introduisons certaines opérations qui vont nous permettre de construire des facettes pour le polytope $P_{n'}$ à partir des inégalités définissant des facettes pour P_n où $n < n'$. Les opérations vont être effectuées sur le graphe support d'une inégalité définissant une facette pour P_n et sous certaines conditions le graphe résultant va être le graphe support d'une inégalité définissant une facette pour le polytope $P_{n'}$. **SFP**(G), où G est obtenu à partir d'un autre graphe en effectuant certaines opérations. Nous avons la définition :

Définition 4.5 Etant donné un graphe $G = (V, A)$, une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$.

* Un sommet $v \in V$ est dit **triangulaire** respectivement à I_a si pour toute paire de sommets $u, w \in V$ nous avons,

$$a_{uv} + a_{vw} \geq a_{uw}.$$

* Un sommet $v \in V$ est dit **homogène** respectivement à I_a si pour tout $e \in \delta(v)$ nous avons $a_e \in \{0, c\}$ où $c > 0$.

Etant donnée une inégalité $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ induite par le graphe $G_a = (V_a, E_a)$ définissant une facette pour P_k . Soient $h \in V_a$ un sommet

triangulaire respectivement à I_a , et $N(h)$ l'ensemble de ses voisins. Nous avons montré les résultats suivants :

Lemme 4.1 Soient $u, v \in V_a$. Si $u \notin N(h)$ et $v \notin N(h)$, alors $a_{uv} = 0$.

Démonstration. Comme h est triangulaire respectivement à I_a nous avons

$$a_{hu} + a_{hv} \geq a_{uv}.$$

Or par définition de I_a , $a_{hu} = a_{hv} = 0$ ($hu \notin E_a$, $hv \notin E_a$), d'où $a_{uv} \leq 0$.

Comme I_a définit une facette pour P_k , alors $a_{uv} \geq 0$. Ainsi $a_{uv} = 0$. □

Lemme 4.2 Soient $u \notin N(h)$, $v \in N(h)$ et F^{uv} une forêt d'étoiles serrée respectivement à I_a . Si v est une feuille d'une étoile centrée en u dans F , et h un centre d'une étoile ou un sommet isolé dans F^{uv} , alors $F^h = F^{uv} \setminus \{uv\} \cup \{hv\}$ est une forêt d'étoile serrée respectivement à I_a .

Démonstration. h triangulaire resp. à $I_a \iff a_{hu} + a_{hv} \geq a_{uv}$

Or $u \notin N(h)$, d'où $a_{hu} \geq a_{uv}$.

$$\begin{aligned} F^{uv} \text{ est serrée resp. à } I_a &\iff \sum_{e \in F^{uv}} a_e = a_0 \\ &\iff \sum_{e \in F^{uv} \setminus \{uv\}} a_e + a_{uv} = a_0 \\ &\iff \sum_{e \in F^{uv} \setminus \{uv\}} a_e + a_{hv} \geq a_0 \\ &\iff \sum_{e \in F^{uv} \setminus \{uv\} \cup \{hv\}} a_e \geq a_0 \end{aligned}$$

D'où $F^{uv} \setminus \{uv\} \cup \{hv\}$ est serrée resp. à I_a .

et $a_{uv} = a_{hv}$ □

Lemme 4.3 Soit h un sommet triangulaire respectivement à I_a et soit $u \notin N(h)$, il existe une forêt d'étoile $F^{hu} \in \mathcal{F}_a$ telle que h et u sont tous deux sommets isolés, ou l'un est un sommet isolé et l'autre est un centre d'une étoile.

Démonstration. Si les deux sommets h et u sont deux sommets isolés alors aucun sommet dans $N(h)$ n'est centre d'une étoile. Donc tout sommet $v \in N(h)$ peut être remplacé par l'arête hv à coefficient $a_{hv} \geq a_{vv'}$ puisque h est triangulaire. □

4.3.1 Clonage d'un sommet

Etant donnés une inégalité définissant une facette pour P_n , $I_a \equiv a^T x \leq a_0$ induite par le graphe $G_a = (V_a, E_a)$ et un sommet $h \in V_a$. Le clonage du sommet $h \in V_a$ consiste à créer un nouveau sommet clone h' et $|N(h)|$ nouvelles arêtes, plus précisément les arêtes qui joignent le sommet clone h' à h et à tous les voisins de h . Autrement dit, créer une nouvelle inégalité $I_{a'}^h \equiv a'^T x \leq a'_0$ induite par le graphe $G' = (V_{a'}, E_{a'})$ où $V_{a'} = V_a \cup \{h'\}$ et $E_{a'} = E_a \cup \{\{h\} : V_a\}$, telle que :

$$\begin{cases} a'_e &= a_e & \text{pour tout } e \in E, \\ a'_{h'v} &= a_{hv} & \text{pour tout } v \in V_a \setminus \{h\}, \\ a'_{hh'} &= \max_{v \in N(h)} a_{hv}, \\ a'_0 &= a_0 + a'_{hh'}. \end{cases}$$



FIGURE 4.3 – Opération de clonage d'un sommet opérée sur un 4-Cycle

La Figure 4.3 illustre un exemple de l'opération de clonage d'un sommet effectuée sur le graphe support de l'inégalité de 4-cycle générant ainsi une nouvelle inégalité définissant une facette du polytope P_6 et donc pour tout polytope $P_k, k \geq 6$ (après un zéro-lifting).

Remarque 4.2 Un sommet h homogène (resp. triangulaire) respectivement à I_a demeure homogène (resp. triangulaire) respectivement à l'inégalité $I_{a'}$ obtenue par clonage du sommet h .

Remarque 4.3 Un sommet v triangulaire respectivement à l'inégalité I_a devient non triangulaire respectivement à l'inégalité $I_{a'}$ obtenue par clonage sur un sommet h non voisin de v .

Lemme 4.4 *Si h est homogène respectivement à I_a alors h' est homogène respectivement à $I_{a'}$.*

Démonstration. h' est le clone de h , nous avons par définition :

$$\begin{aligned} a'_e &= a_e \quad \forall e \in E_a \\ a'_{h'v} &= a_{hv} \quad \forall v \in V_a \\ a'_{hh'} &= \max_{v \in V_a} a_{hv} \end{aligned}$$

Or h est homogène respectivement à I_a : $a_{hv} = \begin{cases} c & \text{si } v \in N(h) \\ 0 & \text{si } v \notin N(h) \end{cases}$

$$a'_{hh'} = \max\{0, c\} = c$$

Tout voisin de h est un voisin de h' . D'où : $a_{h'v} = \begin{cases} c & \text{si } v \in N(h') \\ 0 & \text{si } v \notin N(h). \end{cases}$

h' est homogène respectivement à $I_{a'}$ □

Lemme 4.5 *Si h est triangulaire respectivement à I_a alors h' est triangulaire respectivement à $I_{a'}$.*

Démonstration. Le lemme découle de la définition de $I_{a'}$ et de la triangularité du sommet h . Soient $u, v \in V_a$, $a'_{h'u} + a'_{h'v} = a_{hu} + a_{hv} \geq a_{uv} \geq a'_{uv}$ □

Soit \mathcal{F}_a une collection de forêts d'étoiles serrées respectivement à I_a . Nous allons discuter des positions du sommet h dans \mathcal{F}_a .

Remarque 4.4 *Toutes les forêts d'étoiles dans \mathcal{F}_a sont maximales.*

Remarque 4.5 *Soit F une forêt d'étoiles dans \mathcal{F}_a nous distinguons les trois cas suivants :*

- (i) h peut être un sommet isolé dans F , aucun de ses voisins dans G_a n'est centre d'une étoile dans F . On note cette forêt d'étoiles F^{h_0} .
- (ii) h peut être centre d'une étoile dans F , aucun de ses voisins dans G_a n'est sommet isolé dans F . On note ces forêts d'étoiles par F^h .
- (iii) h peut être feuille d'une étoile dans F centrée par un de ses voisins dans G_a soit s . On note ces forêts d'étoiles par F^{hs} .

Les remarques 4.4 et 4.5 conduisent à déduire la structure des forêts

d'étoiles serrées respectivement à une inégalité $I_{a'}$ obtenue par le clonage d'un sommet du graphe support d'une inégalité I_a .

Remarque 4.6 *Le clonage du sommet h mène à la création des forêts d'étoiles serrées respectivement à $I_{a'}$ suivantes.*

- (i) $F^{h_0} \cup \{hh'\}$.
- (ii) $F^h \cup \{hh'\}$ ou $F^h \cup \{h'u\}$ pour tout $u \in N(h)$ où u est centre d'une étoile.
- (iii) $F^{hs} \cup \{h's\}$ ou $F^h \cup \{h'u\}$ pour tout $u \in N(h)$ où u est centre d'une étoile ou un sommet isolé.

Lemme 4.6 *Supposons que h est triangulaire et homogène dans G_a . Si v est le seul sommet voisin de h dans G_a , v étant centre d'une étoile dans $F \in \mathcal{F}_a$, alors h est un centre d'une étoile dans F .*

Démonstration. Si h n'est pas un centre d'une étoile dans F alors h est une feuille d'une étoile centrée en v , et tous les autres voisins de h sont des feuilles de l'étoile centré en v , ou feuilles de l'étoile centré en un sommet non voisin de h . Comme h est triangulaire respectivement à I_a alors aucune paire des sommets non voisins de h n'est liée dans G_a , et pour toute paire de sommets u, v voisins de h , on a $a_{hu} + a_{hv} \geq a_{uv}$. Alors, trouver une autre forêt d'étoiles serrée pour G_a dans ce cas est impossible. D'où la contradiction. h ne peut être sommet isolé puisque v , son voisin dans G_a est un centre d'une étoile, ce qui n'est pas possible dans une étoile serrée dans I_a . \square

Du Théorème 4.2 nous avons, pour tout $uv \notin E_a$, il existe une forêt d'étoiles $F^{uv} \in \mathcal{F}_a$ telle que u, v sont tous deux sommets isolés, ou l'un d'eux est un sommet isolé et l'autre est un centre d'une étoile dans $F^{u,v}$.

Lemme 4.7 *Soit h un sommet triangulaire et homogène respectivement à I_a . Si h est un sommet isolé, et $s \in V_a \setminus N(h)$ est un centre d'une étoile dans $F^{st} \in \mathcal{N}_a$ alors :*

1. Toutes les feuilles de l'étoile S centrée en s , dans F^{st} sont des sommets voisins de h dans G_a .
2. Pour toute feuille r de l'étoile centrée en s nous avons : $F^{sh} \setminus \{sr\} \cup \{hr\}$ est une forêt d'étoile serrée respectivement à I_a .
3. Il existe $\hat{F}^{h,s} \in \mathcal{N}_a$ où h est un centre d'une étoiles et s est un sommet isolé.

Démonstration. 1. Par définition du graphe support, quand s n'est pas voisin de h dans G_a nous avons $a_{hs} = 0$. Aussi, si r est une feuille de l'étoile centrée en s dans F_a alors $a_{sr} > 0$. Comme h est un sommet triangulaire respectivement à I_a nous avons $a_{hs} + a_{hr} \geq a_{sr} \Rightarrow a_{hr} \geq a_{sr}$. D'où, r est voisin de h .

2. Supposons qu'il existe une feuille $r \in V(S) \setminus \{s\}$ telle que la forêt d'étoiles $F^{s,h} \setminus \{sr\} \cup \{hr\}$ n'est pas serrée respectivement à I_a , alors $a_{sr} \neq a_{hr} \Rightarrow a_{hr} > a_{sr}$. Ceci contredit la validité de I_a .

3. Si $F^{s,h}$ est serrée respectivement à I_a alors $F^{s,h} \setminus \{sr\} \cup \{rh\}$ est serrée respectivement à I_a . Pour tout feuille r de l'étoile S centrée en s , $a_{rs} = a_{rh}$. Alors une étoile centrée en h est de même poids qu'une étoile centrée en s . Donc la forêt d'étoile comprenant h est serrée respectivement à I_a . \square

Etant donné un graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre k , et I_a une inégalité induite par G_a définissant une facette non triviale de P_k . Soit h un sommet de V_a .

Théorème 4.5 Une inégalité $I_{a'}$ obtenue, d'une inégalité I_a définissant une facette non triviale de P_k , par clonage d'un sommet $h \in V_a$, définit une facette pour P_{k+1} seulement si le sommet h est triangulaire et homogène respectivement à I_a .

Démonstration. Comme I_a est une facette de P_k , alors il existe $|E_a|$ forêts d'étoiles serrées pour I_a , dont les vecteurs d'incidence sont affinement indépendants. Soit \mathcal{N}_a cette collection de forêts d'étoiles. Pour tout $F \in \mathcal{N}_a$, on construit une forêt d'étoiles serrée pour $I_{a'}$ selon les cas précisés dans 4.5 et 4.6.

Du Corollaire 4.1 nous savons que : pour tout $v \in V_a$, il existe une forêt d'étoiles F^v comprenant v comme sommet isolé ou centre d'une étoile. Alors $\forall v \in N[h]$, $F^v \cup \{vh'\}$ forme une forêt d'étoiles serrée pour $I_{a'}$ ($a_{vh'} = \max a_{vh} = c$ par homogénéité de h et la définition de $a'_{hh'}$).

Pour s'assurer que les vecteurs d'incidence des forêts d'étoiles choisies sont affinement indépendants on procède comme suit :

- (a) On fixe les arêtes $h'v$ pour tout $v \in N(h)$, et on choisit $F^v \in \mathcal{N}_a$ telle que $F^v \cup vh'$ est une forêt d'étoiles dans $G_{a'}$.
- (b) On fixe l'arête hh' , et on choisit $F^h \in \mathcal{N}_a$ telle que $F^v \cup hh'$ est une forêt d'étoiles dans $G_{a'}$.

(c) Pour toute forêt d'étoiles $F \in \mathcal{N}_a$, on choisit une arête parmi $\{h'v | v \in N(h)\} \cup \{hh'\}$.

Si $F \cup \{h'v\}$ apparait dans (a) on choisit $h'u$ tel que u est un centre d'une étoile dans F et u voisin de h dans G_a .

Si un tel u n'existe pas alors d'après le Lemme 4.6, h est un centre dans F . Alors on choisit $F^v \cup hh'$.

Résumons dans une matrice les vecteurs d'incidence des forêts d'étoiles serrées pour $I_{a'}$ où les colonnes représentent les arêtes de $E_{a'}$, et les lignes représentent les vecteurs d'incidences des forêts d'étoiles serrées respectivement à $I_{a'}$.

$$M = \begin{matrix} & E_a & hh' & [h' : N(h)] \\ \begin{matrix} (c) \\ (b) \\ (a) \end{matrix} & \begin{pmatrix} \mathcal{N}_a & hh' & vh' \\ \mathcal{N}^h & 1 & 0 \\ \mathcal{N}^v & 0 & \mathbb{I} \end{pmatrix} & = & \left(\begin{array}{c|c|c} \boxed{\mathcal{N}_a} & hh' & h'v \\ \hline F^h & 1 & 0 \\ \hline F^v & 0 & \boxed{\mathbb{I}} \end{array} \right) \end{matrix}$$

Ainsi, nous avons construit $|E_{a'}|$ forêts d'étoiles dont les vecteurs d'incidences sont affinement indépendants. D'où $I_{a'}$ définit une facette pour $SFP(G_{a'})$.

D'après le Théorème 4.2 pour tout $s \notin N(h)$, il existe une forêt d'étoiles $F^{s,h} \in \mathcal{N}_a$ telle que h, s sont tous deux des sommets isolés, ou l'un est un centre d'une étoile et l'autre et un sommet isolé. Quand h et s sont tous deux sommets isolés dans $F^{s,h}$ alors $F^{s,h} \cup \{sh\} \cup \{hh'\}$ est une forêt d'étoiles serrée pour $I_{a'}$. Pareil pour $F^{s,h} \cup \{sh'\} \cup \{hh'\}$.

Quand h est un centre d'une étoile dans $F^{s,h}$ et s un sommet isolé dans $F^{s,h}$, alors $F^{s,h} \cup \{sh\} \cup \{hh'\}$ forme une forêt d'étoiles serrée pour $I_{a'}$.

Nous résumons toutes les forêts d'étoiles dans K_{n+1} dont les vecteurs d'incidences sont serrées pour $I_{a'}$ dans le tableaux suivant :

E_a	hh'	$[h' : N(h)]$	$[h' : \bar{N}(h)]$	$E_k \setminus E_a$
M^0	L	$L^{h'}$	0	0
F^m	1	0	0	0
M^v	0	\mathbb{I}	0	0
F^{sh}	e	0	\mathbb{I}	0
F^{sh}	0	e	0	\mathbb{I}

□

4.3.2 Clonage d'une arête

Etant donnée une inégalité I_a induite par le graphe $G_a = (V_a, E_a)$ d'ordre k définissant une facette pour P_k . Il est possible d'étendre cette inégalité à une inégalité définissant une facette $I_{a'} \equiv a'^T x \leq a'_0$ pour P_{k+2} , donc on définit aussi une facette pour P_n pour tout $n \geq k + 2$, par le clonage d'une arête.

Soit $z = xy$ une arête dans E_k . Nous considérons le graphe K_{n+2} obtenu de K_n par clonage d'une arête z par $z' = x'y'$ et poser les coefficients des arêtes du nouveau graphe comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} a'_{uv} = a_{uv} & \text{pour tout } uv \in E_n \\ a'_{ux'} = a_{ux} & \text{for all } u \in V_n \\ a'_{uy'} = a_{uy} & \text{for all } u \in V_n \\ a'_{xx'} = \min_{u \in N(x)} a_{xu} \\ a'_{yy'} = \min_{u \in N(y)} a_{yu} \\ a'_{x'y'} = a_{xy} \\ a'_0 = a_0 + a'_{x'y'} \end{array} \right.$$

Nous avons deux exemples de clonage d'arêtes opéré sur l'inégalité du paw comme on peut le voir sur la Figure 4.4.

La Figure 4.4 est un exemple de l'opération de clonage d'une arête de type 1, i.e. clonage d'une arête à coefficient supérieur à 1. Sur la figure, un exemple opéré sur l'arête de coefficient 2 apparaissant dans le graphe support de l'inégalité de Paw, ($x(H) \leq 3$). Le clonage de cette arête est effectué p fois, ici $p = 2$ pour donner l'inégalité : $x(H') \leq 3 + 2 = 7$).

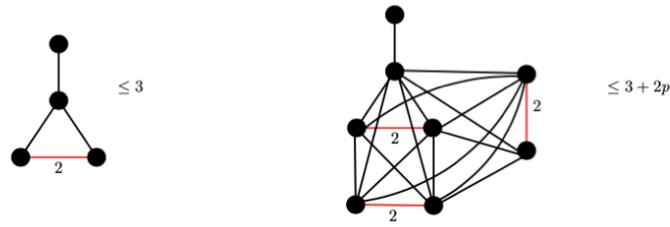


FIGURE 4.4 – Opération de clonage d’arêtes : type1

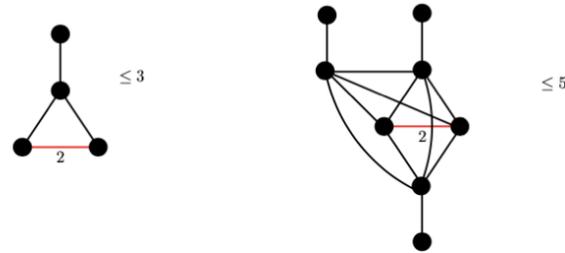


FIGURE 4.5 – Opération de clonage d’une arête : type2

La Figure 4.5 est un exemple de l’opération de clonage d’une arête de type 2, i.e. clonage d’une arête pendante. On observe l’opération de clonage opéré sur une arête pendante apparaissant dans le graphe support de l’inégalité de Paw ($x(H) \leq 3$). Le clonage de cette arête est effectué p , ici $p = 2$ pour donner l’inégalité : $p(H') \leq 3 + p = 5$

Les opérations de clonage d’une arête ou d’un sommet nous offre un moyen pour dériver des facettes de P_n . Dans la section qui va suivre, nous présentons une nouvelle classe d’inégalités qui est un résultat de clonage de sommets.

4.3.3 Inégalité de $\{u, v\}$ -2-partition

En appliquant l’opération de clonage sur l’inégalité du 4-cycle nous aurons l’inégalité de $\{u, v\}$ -2-partition. Soit $K_n = (V_n, E_n)$ un graphe complet. Pour toute paire de sommets $u, v \in V_n, u \neq v$, et deux sous ensembles disjoints S et T de $V_n \setminus \{u, v\}$, l’inégalité

$$x(uv) + x([u : S]) + x([v : T]) + x(E(S \cup T)) \leq |S| + |T| \quad (4.2)$$

est dite inégalité de $u - v$ -2-partition.

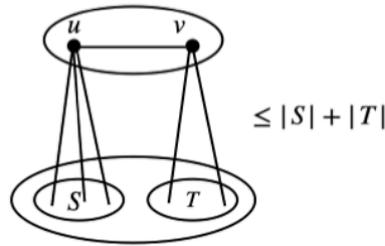


FIGURE 4.6 – Graphe support de l’inégalité (u, v) -2 partition

Proposition 4.1 Pour tout $n \geq 4$, pour toute paire de sommets u, v et pour toute paire de sous ensembles S, T de V_n , l’inégalité de u, v -2-partition suivante :

$$x(uv) + x([u : S]) + x([v : T]) + x(E(S \cup T)) \leq |S| + |T|$$

définit une facette pour le polytope P_k , $k \geq |S| + |T|$

L’inégalité est obtenue par l’application de l’opération de sommet clonage sur l’inégalité de 4-cycle $\{u, v, s, t\}$. En effet, s étant un sommet triangulaire et homogène respectivement à l’inégalité de 4-cycle. Après l’opération de clonage, s demeure triangulaire. On opère le clonage du sommet s , $p = |S| - 1$ fois ainsi on obtient l’inégalité suivante

$$x(uv) + x([u : S]) + x(vt) + x([t : S]) \leq (|S| - 1) + 2 \quad (4.3)$$

Du Théorème 4.5 l’inégalité obtenue définit une facette pour P_k pour $k \geq |S| + 3$. Ensuite on choisit un autre sommet triangulaire et homogène hormis s et ses clones, soit t ou u . Le sommet u n’étant plus triangulaire respectivement à la nouvelle inégalité dès la première opération de clonage (u n’étant pas voisin de s , le clonage de s conduit à la création d’une arête à coefficient non nul). On choisit t et on effectue l’opération de clonage $|T| - 1$ fois. L’inégalité résultante est l’inégalité :

$$x(uv) + x([u : S]) + x([v : T]) + x(E(S \cup T)) \leq (|S| - 1) + (|T| - 1) + 2 \quad (4.4)$$

L’inégalité (4.4) est obtenue par application de l’opération de clonage d’un sommet triangulaire et homogène respectivement à I^S définissant une fa-

cette pour le polytope $P_{|S|+3}$. D'après le Théorème 4.5, l'inégalité résultante I^{S+1} définit une facette pour $P_{|S|+4}$. Par récurrence, l'inégalité obtenue définit une facette pour P_n avec $n \geq |S| + |T| + 2$.

Remarque 4.7 *L'opération de clonage d'un sommet homogène et triangulaire p fois peut être confondue avec l'opération de substitution d'un sommet par une clique qu'on peut trouver dans les travaux de Chvatàl [Chvatàl \[1973\]](#), [Chvatàl \[1975\]](#).*

4.3.4 Conclusion

Dans ce chapitre nous nous sommes intéressés au polytope P_n , le polytope des forêts d'étoiles définies dans un graphe complet d'ordre n . Nous nous sommes intéressés aux propriétés du polytope P_n ainsi qu'à sa structure faciale. Il est à noter que toute inégalité définissant une facette pour P_n définit une facette pour $SFP(G)$ quand G comprend le graphe support de cette inégalité comme sous graphe.

Il n'est pas difficile de vérifier que le polytope P_4 est complètement décrit par les inégalités triviales, les inégalités de 3-cycle et 4-cycle, ainsi que les inégalités de paw. Quant au polytope P_5 , il est complètement décrit par les inégalités triviales, des inégalités 3 et de 4-cycle, des inégalités de paw, des inégalités de bull, des inégalités de 4-cycle 1-lifté, des inégalités de paw 1-liftés et les inégalités de roue W_4 obtenues par l'ajout d'un sommet universel au 4-cycles. 4.7

La Figure 4.7 nous offre un aperçu des graphes support des facettes des polytopes de forêts P_4 , P_5 et P_6 .

ALGORITHMES POUR LE **MWSFP** 5

Dans le chapitre 4 nous nous sommes intéressés à la structure faciale du polytope des forêts d'étoiles $SFP(G)$. Nous nous sommes investis dans l'introduction de nouvelles inégalités définissant des facettes et certaines classes d'inégalités valides plus au moins intéressantes.

Maintenant nous allons voir l'utilité de ces résultats polyédriques, notamment montrer comment ils peuvent être utilisés pour la conception d'un algorithme de plans coupants pour le problème des forêts d'étoiles. Nous discuterons brièvement de l'idée de base de l'algorithme des plans coupants avant d'aborder quelques aspects d'implémentation. Mais avant cela nous proposons un algorithme linéaire pour la résolution du problème **MWSFP** défini dans les cycles.

5.1 UN ALGORITHME LINÉAIRE POUR LE MWSFP DANS LES CYCLES

Le problème des forêts d'étoiles est dans la classe \mathcal{NP} difficile dans le cas général, cependant, il existe des classes de graphes où le problème est montré polynomial. Ici nous proposons un algorithme linéaire pour résoudre le problème des forêts d'étoiles de poids maximum défini dans les cycles. Toutefois, il est nécessaire de mentionner que juste après avoir établi ce résultat, Nguyen dans [Nguyen \[2015\]](#) a proposé un algorithme linéaire pour résoudre le problème des forêts d'étoiles de poids maximum dans les cactus une classe de graphe qui comprend les cycles.

L'idée principale de l'algorithme que nous proposons est de transformer le problème de forêts d'étoiles de poids maximum, défini sur un cycle, en un problème du plus court chemin défini sur un réseau. L'étape fondamentale de cet algorithme est la transformation à effectuer du cycle vers le réseau.

Supposons que les sommets de C sont numérotés de 1 à n et les arêtes e_i de poids c_i et l'arête entre le sommet i et le sommet $i + 1$ pour tout $i = 1, \dots, i - 1$. En particulier, l'arête e_n de poids c_n est l'arête entre n et 1. Nous transformons le problème **MWSFP** dans C en six problèmes de plus long chemin dans un graphe acyclique orienté G' .

D'abord nous construisons le graphe $G' = (X', A')$ du graphe G . Pour un sommet $i \in G$ nous allons créer dans A' quatre sommets i_{-2}, i_{-1}, i_1, i_2 dits les clones du sommet i . Les arêtes sont construites comme suit : pour tout sommet $1 \leq i \leq n - 1$ dans G' :

- un arc $(i_{-2}, (i + 1)_1)$ du coût positif c_i ,
- un arc $(i_{-1}, (i + 1)_1)$ du coût positif c_i , un arc $(i_{-1}, (i + 1)_{-2})$ du coût 0,
- un arc $(i_1, (i + 1)_2)$ du coût positif c_i , un arc $(i_1, (i + 1)_{-1})$ du coût 0,
- En dernier, un arc $(i_2, (i + 1)_{-1})$ du coût 0.

Si on considère le début d'un chemin comme une source s et la fin de même chemin comme un puits t , on parle alors d'un s - t chemine .

Si pour tout arc construit nous affectons une couleur telle que les arcs du coût positif prennent la couleur bleue et les arcs du coût 0 prennent la couleur rouge. Nous aurons à montrer la proposition qui suit :

Proposition 5.1 *Il existe au plus deux arcs de même couleurs dans un s - t - chemin quelconque de $G' = (X', A')$.*

Démonstration. Dans un graphe $G' = (X', A')$ tel qu'il est défini. Dans la notation du sommet i_x , le signe d'indice x exprime la couleur de l'arc entrant, rouge pour le négatif, et bleue pour le positif. Quant à sa valeur $|x|$, elle exprime le nombre d'arcs successifs de même couleur qui précèdent i_x . Ainsi nous avons les possibilités suivantes ;

- * $x = -2$ alors le sommet d'indice -2 est précédé par deux arcs rouges. La seule possibilité de sortie est d'atteindre le sommet d'indice $x = 1$; et la couleur de l'arc est bleue.
- * $x = -1$ alors le sommet d'indice -1 est précédé par un arc rouge. A partir d'un sommet d'indice -1 il existe deux possibilités. Soit atteindre le sommet d'indice $x = 1$ et la couleur de l'arc est bleue. Ou atteindre le sommet d'indice -2 et la couleur de l'arc est rouge, et le prochain arc (sortant du sommet d'indice -2) doit être bleu.
- * $x = 1$ alors le sommet d'indice $x = 1$ est précédé par un arc bleu. Et, d'un sommet d'indice 1 il y a deux possibilités de sortie. Atteindre le sommet d'indice $x = -1$, la couleur de l'arc est rouge. Ou atteindre le sommet d'indice $x = 2$ et la couleur de l'arc est bleue. Du sommet d'indice $x = 2$ il existe une possibilité, c'est d'atteindre le sommet d'indice $x = -1$ et l'arc est rouge.
- * $x = 2$ alors le sommet d'indice 2 est précédé par deux arcs bleus. Aussi, du sommet d'indice 2, la seule possibilité de sortie est d'atteindre le sommet d'indice 1, la couleur de l'arc est rouge.

Ce qui implique que dans tous les cas, il ne peut y avoir trois arcs successifs de même couleur. □

Lemme 5.1 *Un chemin non nul de 1_x à n_x dans G' correspond à une forêt d'étoiles dans G .*

Démonstration. Par la correspondance de chaque sommet i_x de G' à un sommet i dans C et tous les arcs à coût non nuls (i_x, j_y) dans un chemin de G' par une arête bleue ij dans C nous obtenons une chaîne à arêtes bleue et rouge dans C . Comme il y a au plus deux arcs successifs de même couleur (donc du même coût) dans le graphe G' , nous obtenons une chaîne comprenant au plus deux arêtes successives de même couleur. Ce qui vérifie l'inégalité de 3-chemin. □

Remarque 5.1 Une forêt d'étoiles maximale de G correspond à une de ces forêts :

1. Le chemin de coût non nul entre 1_{-2} à n_{-1} dans G' .
2. Le chemin de coût non nul entre 1_{-1} à n_1 dans G' .
3. Le chemin de coût non nul entre 1_{-1} à n_2 dans G' .
4. Le chemin de coût non nul entre 1_1 à n_{-1} dans $G' + l'arête n1$.
5. Le chemin de coût non nul entre 1_1 à n_{-2} dans $G' + l'arête n1$.
6. Le chemin de coût non nul entre 1_1 à n_2 dans $G' + l'arête n1$.

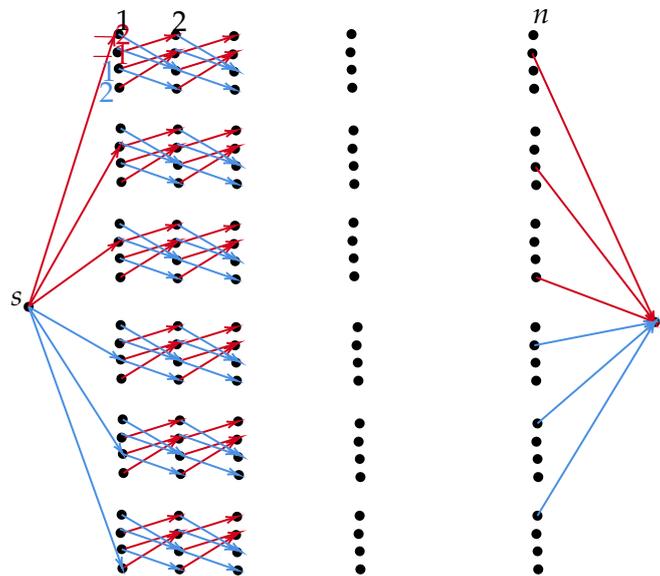


FIGURE 5.1 – simulation du plus long chemin

Théorème 5.1 Chercher une forêt d'étoiles de poids maximum dans G est équivalent à chercher les 6 chemins de 1_x à 1_y dans G' où les valeurs de x et y sont dans $\{-2, -1, 1, 2\}$, cela est réalisé en temps polynomial.

Démonstration. Tout chemin de 1_x à n_y dans le graphe G' correspond à une forêt d'étoiles dans C d'après le Lemme 5.1.

Supposons que nous avons une forêt d'étoiles couvrante F^* dans G (G est un cycle). Affecter à chaque arête dans F^* la couleur bleue et aux arêtes en dehors de F^* la couleur rouge. Si on désigne par i l'arête $i(i + 1)$ où $i = 1, \dots, n$, considérons $n + 1 = 1$. Du graphe C nous construisons un graphe orienté G' tel qu'il est expliqué ci-haut. Ensuite nous choisissons un chemin de 1_x vers n_y respectant les couleurs des arêtes dans C :

- Si l'arête est bleue choisir l'arc $i_x i_y$ avec $x < y$.
- Si l'arête est rouge choisir un arc rouge $i_x i_y$ avec $x > y$

□

Corollaire 5.1 *Etant donné un réseau $N = (X, A)$ et une fonction $l : A \rightarrow \mathbb{Q}$, le plus long $s - t$ chemin peut être trouvé en ordre $O(|X|)$.*

Démonstration. En effet, L'algorithme de Bellman-Ford retourne le plus long chemin après $n - 1$ itérations. A chaque itération, au plus 24 tests sont exécutés. □

5.2 ALGORITHME DE BRANCHEMENT ET COUPE

5.2.1 L'idée de base

Rappelons que dans le problème de la forêt d'étoiles de poids maximum *MWSFP*, étant donné un graphe $G = (V, E)$ et une fonction poids w définie sur l'ensemble des arêtes E de G , $w : E \rightarrow \mathbb{Z}$ qui associe à chaque arête $e \in E$ un poids w_e ; nous cherchons une forêt d'étoiles couvrante (V, F) où $F \subseteq E$ telle que son poids total $w(F)$ est le plus grand possible. Pour des raisons de commodité nous supposons que $V = \{1, 2, \dots, n\}$. Nous savons que le *MWSFP* peut être formulé comme suit :

$$\begin{cases} \max w^T x \\ x \in SFP(G) \end{cases} \quad (5.1)$$

où $SFP(G) = \text{conv}\{x^F \in \{0, 1\}^m \mid F \text{ est une forêt d'étoiles dans } G\}$.

Noter que (5.1) est un programme linéaire puisque la fonction objectif à maximiser sur le *polytope* est *linéaire*.

Pour appliquer les techniques de la programmation linéaire, la formulation du problème (5.1) telle quelle, n'est d'aucune utilité sauf si le polytope $SFP(G)$ est représenté sous forme d'un système d'égalités et/ou d'inégalités linéaires. Nous n'avons pas réussi à obtenir une description complète du polytope $SFP(G)$, un résultat qui ne peut être obtenu puisque le problème du *MWSFP* est \mathcal{NP} difficile. Néanmoins nous avons pu trouver quelques classes d'inégalités valides et des inégalités définissant des facettes pour le $SFP(G)$. Ces inégalités déterminent une description partielle du polytope $SFP(G)$ qui entraîne une relaxation linéaire du (5.1).

L'idée principale de l'algorithme de coupe et branchement (séparation) est de remplacer (5.1) par cette relaxation linéaire et le résoudre avec *la méthode du simplexe*. Si la solution de cette relaxation linéaire est le vecteur caractéristique d'une forêt d'étoiles, alors nous obtenons ainsi une solution optimale de (5.1), sinon introduire la phase de séparation et évaluation.

La meilleure relaxation linéaire de (5.1) que nous pouvons avoir est celle donnée par $\min\{w^T x : x \text{ satisfait toutes les inégalités de } \mathcal{I}\}$, où \mathcal{I} est l'ensemble de toutes les inégalités introduites dans le chapitre 4. Sauf qu'il faut noter que l'ensemble \mathcal{I} est extrêmement grand et comprend des inégalités plutôt difficiles. Ainsi, nous devons choisir un ensemble des $I \subseteq \mathcal{I}$ de manière appropriée pour notre approche.

Avant de discuter des paramètres à prendre en compte pour le choix de I , nous allons expliquer le principe de l'algorithme des plans coupants.

Supposons que l'ensemble I est déjà choisi, notre approche consiste à résoudre un programme linéaire PL défini par les inégalités de \mathcal{I} , soit $PL(I)$ qui est la relaxation de (5.1). Nous commençons par résoudre la relaxation $PL(I)$, au cours des calculs nous devons générer itérativement les contraintes I à la manière des plans coupants et les ajouter au programme linéaire courant. Autrement dit, nous résolvons le premier programme linéaire trivial

$$\begin{cases} \max w^T x \\ 0 \leq x_{ij} \leq 1 \text{ pour tout } ij \in E \end{cases}$$

Si la solution optimale x^* obtenue est le vecteur caractéristique d'une forêt d'étoiles alors le procédé s'arrête, et x^* est la solution optimale de (5.1). Sinon, nous cherchons un plan coupant (ou une coupe), une inégalité $a^T x \leq a_0$ telle que $a^T x^* > a_0$. Si une telle coupe est trouvée, nous la rajoutons au programme linéaire courant. Nous répétons la procédure ainsi décrite jusqu'à obtenir une solution optimale.

Le schéma proposé montre clairement que l'efficacité de cette approche dépend largement de la qualité des inégalités dans I et de l'efficacité à résoudre le problème de séparation (trouver les inégalités non vérifiées par x^* (qui sont générées à chaque étape)).

5.2.2 Séparation des inégalités de b -couplage

Dans cette section nous allons revenir à la formulation de la variante du problème de localisation sans capacité proposé par Baiou et al. [Baïou et Barahona \[2009\]](#). En effet, nous proposons un algorithme pour la séparation des inégalités de b -couplage en temps polynomial qui se base sur cette formulation.

La séparation d'une inégalité de b -couplage consiste à vérifier si une solution fractionnaire $x^* \in [0, 1]^{|E|}$ donnée, ne vérifie pas une certaine inégalité parmi les inégalités de b -couplage, et si c'est le cas en extraire explicitement au moins une. Nous allons résoudre ce problème en nous ramenant au problème de localisation sans capacité. Plus précisément nous allons résoudre le programme linéaire (SEP) suivant

$$\begin{aligned}
 (SEP) \min \quad & \sum_{ij \in E} \delta_{ij} \\
 \sum_{(i,k) \in \vec{E}, k \neq j} \quad & \vec{x}(i,k) - \delta_{ij} \leq 1 - x_{ij}^* \text{ pour tout } i \in V, ij \in E \\
 \vec{x}(i,j) + \vec{x}(j,i) \quad & = x_{ij}^* \text{ pour tout } ij \in E \\
 \vec{x}(i,j), \vec{x}(j,i), \delta_{ij} \quad & \geq 0 \text{ pour tout } ij \in E.
 \end{aligned}$$

Théorème 5.2 *Il existe une inégalité de b -couplage non vérifiée par x^* si et seulement si la valeur de la fonction objectif de (SEP) est strictement positive.*

Démonstration. Il est clair que si la valeur d'une solution optimale (SEP) est inférieure ou égale à zéro, x^* appartient à la projection de la formulation étendue, et satisfait toutes les inégalités de b -couplage. Nous montrons que si cette valeur est strictement positive alors on peut trouver une inégalité de b -couplage parfait non vérifiée par x^* .

Supposons que la solution optimale est (δ^*, \vec{x}^*) avec la valeur de la fonction objectif positive. Nous expliquons en détail dans ce qui suit comment trouver une inégalité de b -couplage parfait qui n'est pas vérifiée par x^* .

(E1) Trouver parmi les coefficients δ^* , un certain δ_{ij}^* tel que x_{ij}^* est aussi positive. Il est facile de montrer (par l'absurde par exemple) qu'un tel δ_{ij}^* existe toujours.

(E2) Poser G^* comme le graphe support de x^* (i.e. le sous graphe de G

induit par les composantes positives de x^*). Trouver dans G^* la composante G_{ij}^* contenant ij .

- (E3) Trouver un couplage parfait fractionnaire comprenant ij . Convertir ce couplage parfait fractionnaire en un b -couplage parfait B contenant ij en multipliant la valeur fractionnaire des arêtes du couplage parfait fractionnaire par le plus petit dénominateur commun des fractions, et poser S l'ensemble des sommets de C_{ij}^* . Poser I comme l'inégalité du b -couplage parfait respectivement à B et S . donner en résultat (en sortie) I .

Maintenant montrons que l'inégalité résultante (en sortie) I est une inégalité de b -couplage parfait et non vérifiée par x^* . Noter que I est obtenue en additionnant les inégalités (3.11) associées au b -couplage parfait B trouvé à l'étape 2. D'après les étapes 1 et 3, pour l'arête ij trouvée à l'étape 1, nous savons que $ij \in B$ et

$$\sum_{(i,k) \in \vec{E}, k \neq j} \vec{x}(i,k) > 1 - x_{ij}^*.$$

Pour montrer que I n'est pas vérifiée par x^* , nous devons montrer que pour toute arête $uv \in B$, nous avons

$$\sum_{(u,k) \in \vec{E}, k \neq v} \vec{x}(u,k) > 1 - x_{uv}^*$$

et

$$\sum_{(v,k) \in \vec{E}, k \neq u} \vec{x}(v,k) \geq 1 - x_{uv}^*$$

(alors pour ij nous avons

$$\sum_{(i,k) \in \vec{E}, k \neq j} \vec{x}(i,k) > 1 - x_{ij}^*$$

and

$$\sum_{(j,k) \in \vec{E}, k \neq i} \vec{x}(j,k) \geq 1 - x_{ij}^*.$$

Supposons que le contraire est vrai i.e. il existe une certaine arête uv tel que $\sum_{(u,k) \in \vec{E}, k \neq v} \vec{x}(u,k) < 1 - x_{uv}^*$

Comme C_{ij}^* est connexe, il existe un chemin P_{ui} entre u et i . Sup-

posons que $P_{ui} = p_0 p_1 \dots p_h$ avec $p_0 = u$ et $p_h = i$. Nous augmentons la valeur de $\vec{x}^*(p_k, p_{k+1})$ et diminuons celle de $\vec{x}(p_{k+1}, p_k)$ harmonieusement en maintenant $\sum_{(u,k) \in \vec{E}, k \neq v} \vec{x}(uk) \leq 1 - x_{uv}^*$ et $\vec{x}(p_{k+1}, p_k) \geq 0$ pour tout $k = 0, \dots, h-2$. Comme $\sum_{(u,k) \in \vec{E}, k \neq v} \vec{x}(u,k) < 1 - x_{uv}^*$ et $\vec{x}^*(p_k, p_{k+1}) + \vec{x}^*(p_{k+1}, p_k) = x_{p_k p_{k+1}}^* > 0$ pour tout $k = 1, \dots, h-2$. Ces augmentations et diminutions sont strictes et de même valeur β . Aussi nous maintenons β inférieur ou égal à δ_{ij}^* . Finalement, nous augmentons $x^*(p_{h-1}, u)$ et diminuons δ_{ij}^* les deux par β . Nous pouvons ainsi voir que de cette modification de la solution résulte (δ^*, \vec{x}^*) une autre solution réalisable pour (SEP) avec une valeur de l'objectif, plus petite. D'où la contradiction. Ainsi quand nous additionnons les inégalités (3.11) associées au b -couplage parfait B , nous obtenons

$$\sum_{ij \in E(S) \setminus E(S_2)} m_{ij} x_{ij} + \sum_{ij \in E(S_2)} (m_{ij} + b) x_{ij} \geq b |S_2| \quad (5.2)$$

Où $S_2 \subseteq S$ est l'ensemble des sommets de degré au moins 2 dans G_S , qui montre que I n'est pas vérifiée par x^* . \square

CONCLUSION

Dans cette thèse, nous avons considéré le problème des forêts d'étoiles de poids maximum. Nous nous sommes intéressés en particulier à l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidences de ses solutions. Celle-ci définit un polytope dit $SFP(G)$ qui est monotone et de pleine dimension, le but de cette thèse est de caractériser ce polytope en terme d'inégalités. Dans un premier temps nous avons défini le problème des forêts d'étoiles et nous avons fourni une formulation linéaire en nombre entiers. Nous avons discuté de ses quelques applications, notamment : dans la bio-informatique et dans l'industrie de l'automobile.

Dans le chapitre 3, nous nous sommes intéressés à l'enveloppe convexe des vecteurs d'incidence des solutions du problème des forêts d'étoiles de poids maximum. Nous avons fourni une description complète du $SFP(G)$ quand le graphe G est un arbre et aussi quand le graphe est un cycle. Dans ce chapitre nous avons utilisé le polytope associé à une variante du problème de localisation pour proposer une formulation étendue pour le problème des forêts d'étoiles de poids maximum. Nous avons montré que la projection du polytope ainsi construit sur l'espace des arêtes donne lieu à de nouvelles facettes pour le polytope $SFP(G)$ dans le cas des arbres et d'inégalités valides pour le cas d'un graphe quelconque. Une autre technique a été utilisée pour la caractérisation du polytope $SFP(G)$ quand le graphe est un cycle. Pour ce cas, le polytope $SFP(G)$ a été rapproché au polytope des absorbants et des transformations en line-graphe et de complémentarités.

Dans le chapitre 4 nous avons traité le polytope $SFP(G)$ dans les graphes complets où une autre approche a été adoptée. Nous avons commencé notre étude sur des petites structures (des graphes complets k_n où $n \leq 6$) où des inégalités définissant des facettes primitives sont observées. Nous avons défini des opérations dans les graphes que nous avons exploité pour généraliser ces facettes.

A la suite de cette étude plusieurs questions demeurent ouvertes. On peut penser en premier lieu à la caractérisation du polytope des forêts d'étoiles dans la classe des graphes dits cactus, ou encore dans d'autres classes de graphes dans lesquelles le problème des forêts d'étoiles est résoluble en temps polynomial. Il serait aussi intéressant d'investir les contraintes de b-couplage parfait introduite dans le Chapitre 3. Ces contraintes que nous avons montré valides pour ce polytope et que nous avons montrées séparables en temps polynomial peuvent être utilisées dans un algorithme de coupe qu'il serait intéressant d'implémenter.

BIBLIOGRAPHIE

- A. Agra, D. Cardoso, O. Cerdeira, et E. Rocha. A spanning star forest model for the diversity problem in automobile industry. Proceedings of the 17th European Conference on Combinatorial Optimization, ECCO XVII, 2005.
- D. Alevras et M.W. Padberg. *Linear Programming and Extensions : Problems and Solutions*. Springer, Berlin, 2001.
- L. Aoudia, V. H. Nguyen, A. R. Mahjoub, et M. Aïder. On the star forest polytope. Dans *International Conference on Control, Decision and Information Technologies, CoDIT 2014, Metz, France, November 3-5, 2014*, pages 263–268, 2014. URL <https://doi.org/10.1109/CoDIT.2014.6996904>.
- P. Avella, M. Boccia, C.Di Martino, G. Oliviero, A. Sforza, et I. Vasiliev. A decomposition approach for a very large scale optimal diversity management problem. *4OR*, 3(1) :23–37, 2005. URL <https://doi.org/10.1007/s10288-004-0059-1>.
- M. Baïou et F. Barahona. On the Integrality of Some Facility Location Polytopes. *SIAM J. Discrete Math.*, 23(2) :665–679, 2009. URL <https://doi.org/10.1137/070706070>.
- E. Balas. Projection with a minimal system of inequalities. *Comp. Opt. and Appl.*, 10(2) :189–193, 1998. URL <https://doi.org/10.1023/A:1018368920203>.
- E. Balas et M. Fischetti. A lifting procedure for the asymmetric traveling salesman polytope and a large new class of facets. *Math. Program.*, 58 : 325–352, 1993. URL <https://doi.org/10.1007/BF01581274>.
- F. Barahona et M. Grötschel. The traveling salesman problem for graphs not contractible to $K_5 - e$. Rapport technique, Augsburg University, Mathematisches Institut, Memminger strabe 6, D8900 Augsburg, 1985.

- C. Berge. *Theory of Graph and its application*. Mathuen, London, 1962.
- C. Berge. *Graphes et hypergraphes*. Dunod, 1970.
- M. Bouchakour, T. M. Contenza, C. W. Lee, et A. R. Mahjoub. On the dominating set polytope. *European Journal of Combinatorics*, 29(3) :652–661, 2008. ISSN 01956698.
- M. Bouchakour et A. R. Mahjoub. One-node cutsets and the dominating set polytope. *Discrete Mathematics*, 165–166 :101–123, 1997. ISSN 0012-365X. URL <http://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0012365X96001641>.
- O. Briant. "Etude théorique et Numérique du Problème de la Gestion de la Diversité". Phd thesis, Université Joseph-Fourier - Grenoble I, Juin 2000. URL <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00294618>. Université : Université scientifique et médicale de Grenoble.
- O. Briant et D. Naddef. The Optimal Diversity Management Problem. *Operations Research*, 52(4) :515–526, 2004. URL <https://doi.org/10.1287/opre.1040.0108>.
- V. Chvatàl. Edmonds polytopes and hierarchy of combinatorial problems. *Discret Mathematics*, 4 :305–337, 1973.
- V. Chvatàl. On certain polytopes associated with graphs. *Journal of Combinatorial Theory*, 18(2) :138–154, 1975.
- T.H. Cormen, C.E. Leiserson, R.L. Rivest, et C. Stein. *Introduction to Algorithms*. The MIT Press, 2nd édition. ISBN 0262032937. URL <http://www.amazon.com/Introduction-Algorithms-Thomas-H-Cormen/dp/0262032937>.
- M. Grötschel, L. Lovász, et A. Schrijver. "Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization", volume 2 de *Algorithms and Combinatorics*. Springer, 1988. ISBN 3-540-13624-X, 0-387-13624-X (U.S.).
- M. Grötschel, L. Lovász, et A. Shrijver. The ellipsoid method and its consequences in combinatorial optimization. *Combinatorica*, 1(2), 1981.

- M. Grötschel et M.W. Padberg. On the symmetric travelling salesman problem I : inequalities. *Mathematical Programming*, 16 :265–280, 1979.
- M. Grötschel et W. R. Pulleyblank. Weakly bipartite graphs and the max-cut problem. *Operations Research Letters*, 1(1) :23–27, 1981.
- P. L. Hammer, E. L. Johnson, et U. N. Peled. Facet of regular 0–1 polytopes. *Mathematical Programming*, 8(1) :179–206, Dec 1975. ISSN 1436-4646. URL <https://doi.org/10.1007/BF01580442>.
- M. Jünger. "Polyhedral combinatorics and the acyclic subdigraph problem". PhD thesis, University of Augsburg, Germany, 1985. URL <http://d-nb.info/850292948>.
- N. Karmakar. A new polynomial time algorithm for linear programming. *Combinatorica*, 4(2), 1984.
- X. Gu V. V. Kent. DIVERGE : phylogeny-based analysis for functional-structural divergence of a protein family. *Bioinformatics*, 18(3) :500–501, 2002. URL <https://doi.org/10.1093/bioinformatics/18.3.500>.
- L. G. Khachiyan. Polynomial algorithms in linear programming. *Zh. Vychisl. Mat. Mat. Fiz.*, 20(1), 1980.
- G.L. Nemhauser et L.E. Trotter. Vertex Packings : Structural properties and Algorithm. *Mathematical Programming*, 8(1) :232–248, 1975.
- C.T. Nguyen, J. Shen, M. Hou, L. Sheng, M. Webb, et L. Zhang. Approximating The spanning Star Forest Problem and Its Application To Genomic Sequence Alignment. *Siam J. Comput*, 38(3) :946–962, 2008.
- V. H. Nguyen. The maximum weight spanning star forest problem on cactus graphs. *Discrete Math., Alg. and Appl.*, 7(2), 2015. URL <https://doi.org/10.1142/S1793830915500184>.
- O. Ore. Theory of Graphs. American Mathematical Society Colloquium Publications, 1962.
- M. Padberg et G. Rinaldi. A branch and cut algorithm for the resolution of large-scale symmetric traveling salesman problems. *SIAM Review*, 33 : 60–100, 1991.

- M. W. Padberg. On the facial structure of set packing polyhedra. *Math. Program.*, 5(1) :199–215, 1973. URL <https://doi.org/10.1007/BF01580121>.
- M. W. Padberg. Technical note - A note on zero-one programming. *Operations Research*, 23(4) :833–837, 1975. URL <https://doi.org/10.1287/opre.23.4.833>.
- M. W. Padberg et M. R. Rao. The russian method for linear inequalities iii : Bounded integer programming. Rapport technique, New York University, New York, 1980.
- M. Queyranne et Y. Wang. Hamiltonian path and symmetric travelling salesman polytopes. *Math. Program.*, 58 :89–110, 1993. URL <https://doi.org/10.1007/BF01581260>.
- M. Sakarovitch. *Optimisation combinatoire*. HERMANN Enseignement des Sciences, Paris, 1984.
- A. Schrijver. *Theory of linear Integer programming*. John Wiley and sons, New York, wiley interscience in discrete mathematics and optimization édition, 1986.
- A. Schrijver. *"Combinatorial Optimization : Polyhedra and Efficiency"*. Springer, New York, 2003.
- Y. Wakabayashi. *"Aggregation of binary relations : algorithmic and polyhedral investigations"*. PhD thesis, University of Augsburg, Germany, 1986. URL <http://d-nb.info/870902490>.
- Douglas B. West. *Introduction to Graph Theory*. Prentice Hall, 2 édition, September 2000. ISBN 0130144002.

Résumé

Un polyèdre combinatoire est un polyèdre associé à un problème d'optimisation combinatoire, c'est l'enveloppe convexe (des vecteurs d'incidence) des solutions réalisables de ce problème. Plusieurs problèmes se formulent comme une maximisation ou une minimisation des fonctions linéaires sur les polyèdres qui leurs sont associés. Décrire un polyèdre par un système linéaire (en terme d'inégalités et égalités linéaires) permet de résoudre le problème par le biais de la programmation linéaire.

Afin de déterminer un tel système (d'égalités et inégalités), une des approches consiste à rapprocher le problème considéré avec d'autres problèmes d'optimisation combinatoire dont les polyèdres associés sont préalablement connus. Une autre approche est d'étudier le polyèdre associé au problème sur des petites structures.

L'objet principal de la thèse est la caractérisation des polyèdres en termes d'égalités et inégalités linéaires en utilisant ces deux approches. Le problème considéré est issue de la théorie des graphes, le problème de forêts d'étoiles de poids maximum. Ce problème étant de classe *NP*-difficile, une description complète du polyèdre associé s'avère impossible. Néanmoins, une description partielle est proposée. La première approche permet de décrire le polytope des forêts d'étoiles dans les cycles et les arbres. La deuxième approche donne lieu à des résultats polyédriques du polyèdre quand le graphe est complet.

Abstract

A combinatorial polyhedron is a polyhedron associated to a combinatorial optimization problem. It is the convex hull of (the incidence vectors of) the feasible solutions of that problème. Number of problems are formulated as maximizing or minimizing linear functions on the associated polyhedra. Describing a polyhedron by a linear system (in terms of linear inequalities and equalities) allows to solve the problem through linear programming techniques.

In order to determine such a system (of equalities and inequalities), one approach consists to highlight the links between the problem under consideration and other problems whose associated polyhedra are previously completely or partially known. Another approach is to study the polyhedron of the problem on small structures.

The main object of the thesis is the characterization of polyhedra in terms of linear equalities and inequalities using these two approaches. Considering the problem of maximum weighted star forest. This problem is *NP*-hard, so a complete description of the associated polyhedron is impossible to find only if $P = NP$. Nevertheless, a partial description is proposed. The first approach allows to describe the polytope of star forests in cycles and trees. The second approach gives polyhedral results of the problem when the graph is complete.