N° d'ordre : 09/2020-D/MT

**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**
**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE**

Faculté de Mathématiques

Thèse de Doctorat en Sciences

Discipline : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Présentée par : **ABBAD Sadjia**

Thème

# Combinatoire et arithmétique des suites récurrentes linéaires et réalisabilité

**Soutenue publiquement le 12/07/2020, devant le jury composé de :**

| | | |
|---|---|---|
| M. Mohand HERNANE | Professeur, à l'U.S.T.H.B | Président |
| M. Benali BENZAGHOU | Professeur, à l'U.S.T.H.B | Directeur de thèse |
| M. Hacène BELBACHIR | Professeur, à l'U.S.T.H.B | Codirecteur de thèse |
| M. Abdelkader BOUYAKOUB | Professeur, à l' Université d'Oran 1 | Examinateur |
| M. Moussa AHMIA | Maître de Conférences/ A, à l'Université de Jijel | Examinateur |
| M. Ahmed AIT-MOKHTAR | Maître de Conférences/ A, à ENS El Kouba | Examinateur |
| M. Abdelaziz BELLAGH | Professeur , à l'U.S.T.H.B | Invité |

## *Dédicaces*

*À la mémoire de ma mère,*
*"Que Dieu ait son âme".*
*À mon père.*

# *Remerciements*

En tout premier lieu, je remercie le bon Dieu, tout Puissant de m'avoir donné de la force pour poursuivre, ainsi le courage pour dépasser les diffucltés.

Je souhaite exprimer mes remerciements les plus affectueux à mes parents pour leur soutien et leur encouragements. Je ne peux cesser de les remercier. Ce travail leur est entièrement dédié.

Mes remerciement les plus sincères vont à mes sœurs Fatma zohra, Dalila et Sihem, mes frères Abdelhamid et Madjid pour leur soutien et encouragements tout au long ces trois dernières années.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse Professeur Benali BENZAGHOU qui est le premier m'a initie à la recherche en Mathématiques. Je le remercie également de m'avoir encadré.

Ma gratitude va à mon Co-directeur de thèse Professeur Hacène BELBACHIR pour la confiance qu'il m'a témoignée en acceptant de diriger cette thèse. Je suis extrêmement redevable du temps qu'il m'a consacré. Je le remercie infiniment pour sa disponibilité et ses judicieux conseils. Il a su me transmettre la motivation nécessaire pour m'impliquer dans le domaine.

Je remercie le Professeur Mohand HERNANE de m'avoir fait l'honneur de présider le jury de ma thèse.

J'adresse mes sincères remerciements à Abdelkader BOUYAKOUB, Moussa AHMIA, Ahmed AIT-MOKHTAR d'avoir accepté d'examiner cette thèse.

Professeur Abdelaziz BELLAGH m'a fait un grand honneur d'avoir accepté de faire partie du jury. Je tiens à exprimer toute ma gratitude.

Je tiens à remercier mes amies Lila Hadjadj et Nabila Ben Ahmed, leur soutien inconditionnel et leurs encouragements ont été d'une grande aide.

Enfin, je remercie vivement tous ceux qui, de près ou de loin ont participé à la réalisation de cette thèse.

**Résumé**

Dans notre Thèse nous introduisons pour tous entiers $r, s$ avec $(1 \leq s \leq r)$ une famille de suites compagnons associées à la suite r-Fibonacci, que nous appelons $r$-Lucas de type $s$. Dans une première partie, nous présentons certains aspects liés à des propriétés algébriques et combinatoires tels que ; leurs séries génératrices, formes de Binet associées, formes explicites, extensions aux indices négatifs, les suites tronquées et les hyper suites. Nous proposons des interprétations combinatoires pour la suite r-Fibonacci ainsi que pour la famille des compagnons. Nous donnons encore quelques propriétés de convolutions et des identités de sommes alternées des termes de la suite $r$-Fibonacci et ses suites compagnons. Également, nous proposons un q-analogue pour les suites compagnons $r$-Lucas de type s puis nous passons au $(p, q)$-analogue une extension du $q$-analogue de la suite $r$-Fibonacci et de ses suites compagnons. Dans la deuxième partie de notre travail nous nous intéressons à la réalisabilité des suites récurrentes linéaires, c'est-à-dire les suites qui comptent le nombre des points périodiques de période donnée d'un système dynamique donné. Nous avons conclu que la suite $r$-Lucas est réalisable et nous avons caractérisé les suites $r$-Fibonacci de termes initiaux arbitraires réalisables.

**Mots clés :**suite $r$-Fibonacci, suites compagnons, relation de récurrence, polynômes hyper $r$-Lucas, polynômes incomplets $r$-Lucas, $q$-analogue, réalisablité.

**Abstract :**

In our thesis we introduce for all integers $r, s$ with $(1 \leq s \leq r)$ a family of companion sequences associated to the $r$-Fibonacci sequence, which we call $r$-Lucas of type $s$. In the first part of this work, we present and study some aspects related to algebraic and combinatorial properties such as : their generating functions, associated Binet formula, explicit forms, extensions to negative indexes, incomplete sequences and hyper sequences. We propose a combinatorial interpretation for the $r$-Fibonacci sequence and their companion sequences. We give some properties of convolution and alternative sums identities for the terms of the $r$-Fibonacci sequence and its companion sequences. Also, we propose a q-analogue for the $r$-Lucas companion sequences of type $s$, then we extend to the $(p, q)$-analogue of the $r$-Fibonacci sequence and its companion sequences. In the second part of our work we are interested in the realizability of linear recurrent sequences, which is, the sequences that count the number of periodic points in a given period of a given dynamical system. We show that the $r$-Lucas sequence is realizable and we characterize the $r$-Fibonacci realizable sequence of arbitrary initial terms.

**Keywords :**

$r$-Fibonacci sequence, companion sequences, recurrence relation, hyper-$r$-Lucas polynomial, incomplete $r$-Lucas polynomial, $q$-analogues, realizability.

# Table des matières

# Liste des tableaux

# Table des figures

# Introduction Générale

Les suites récurrentes linéaires sont apparues dés 1202 en combinatoire avec l'exemple introduit par le mathématicien Italien Léonard de Pise (surnommé Fibonacci) de la suite $(1, 1, 2, 3, 5, \ldots)$, pour décrire l'évolution d'une population de lapins [28]. Leur grand âge ainsi que la diversité de leurs champs d'applications font des suites récurrentes linéaires un sujet vaste et si riche en résultats qu'ils faudrait plusieurs ouvrages. Pour faire le tour de toutes leurs propriétés, on trouve dans [17], une introduction très intéressante aux suites récurrentes linéaires ainsi qu'une bibliographie qui, jointe à celle qu'on trouve dans [38]. L'étude de ces suites présente et constitue depuis de nombreuses années un élément central de la théorie des nombres. De plus ces suites apparaissent presque partout en mathématiques et en informatique.

Ce travail est divisé en deux parties, la première partie est consacrée à l'étude de certaines propriétés arithmétiques et combinatoires des suites récurrentes linéaires. La seconde traite la réalisabilité de ces suites, à savoir les suites qui comptent le nombre des points périodiques de période donnée d'un système dynamique.
Les travaux que nous avons réalisés, sont répartis dans notre thèse en six chapitres :

Le chapitre 1 est un chapitre d'introduction qui permet de comprendre tout ce qui va venir dans la thèse et qui va servir d'outils des lemmes et des théorèmes qui sont déja connus dans la littérature et qui seront utilisés à plusieurs reprises dans la thèse. On introduit les suites récurrentes linéaires globalement, en commençant par celle de Fibonacci ainsi que sa suite compagnon qui est la suite de Lucas et tous les résultats qui sont issus de généralisations liées à cette suite sur tous les points de vue que ça soit les formes de Binet, les formes explicites, les fonctions génératrices, les suites tronquées, les $q$-analogues, ou les extensions aux aspects négatifs et quelques applications qui permettent de comprendre est ce que ces suites réalisent des systèmes dynamiques, c'est à dire : est ce qu'elles comptent le nombre de points périodiques de période donnée qui proviennent d'un système dynamique donné.

Dans le chapitre 2, nous introduirons pour tous entiers non nuls $r$ et $s$ avec $(1 \leq s \leq r)$, une famille de $s$ suites compagnons associées à la suite $r$-Fibonacci généralisée que nous appelons $r$-Lucas de type $s$. Dans la littérature on retrouve généralement deux suites compagnons pour les valeurs $s = 1$ et $s = r$. Une fois que cette famille de suites compagnons est introduite, nous allons étudier et présenter certains aspects liés à des propriétés algébriques et combinatoires. Nous établirons leurs fonctions génératrices correspondantes ainsi que leurs formes de Binet. Ensuite, nous donnerons des interprétations combinatoires pour la suite initiale ainsi que pour les $r$-Lucas de type $s$ en utilisant les pavages linéaires et les pavages circulaires qui généralisent les travaux de Benjamin et Quinn [14]. Dans un troisième temps dans ce chapitre, nous présenterons les extensions de ces suites aux indices négatifs, nous montrerons que les termes de la suite $(V_{-n}^{(r,s)})_n$ satisferont des identités équivalentes spécifiques. Nous terminerons ce chapitre en donnant quelques identités combinatoires qui sont traitées en général dans la littérature comme des identités de convolution ou des identités de sommes alternées de termes de la suite $r$-Fibonacci et ses suites compagnons.

Le chapitre 3 est relatif aux $q$-analogue et $(p,q)$-analogue de la suite de polynômes $r$-Fibonacci et de polynômes $r$-Lucas de type $s$. Historiquement, les $q$-analogues des entiers ont été introduits par Gauss et il y a eu plusieurs travaux qui ont été réalisés par rapport aux $q$-analogues des coefficients binomiaux. Pour la suite de Fibonacci, le premier auteur qui s'est intéressé à la $q$-déformation de cette suite est Carlitz [15], qui a proposé une définition qui a été reprise par plusieurs auteurs. Cigler [18] a repris la définition de Carlitz pour essayer de reproduire les proprietés de $q$-analogue de la suite de Lucas, sauf que l'approche donnée par Cigler ne permettait pas de récupérer la récurrence linéaire d'ordre deux par rapport à la définition qui est issue de la forme explicite des directions dans le triangle de Pascal. Après, Cigler [19] a trouvé aussi une approche unificatrice qui récupère celle qui est déjà introduite auparavant et celle de Carlitz. Ensuite, pour palier au problème relatif à l'approche de Cigler, il y a l'approche de Belbachir et Benmezai [12] qui est une approche alternative et qui permet de récupérer des suites récurrentes linéaires d'ordre deux, c'est les deux extensions $q$-analogue de Lucas de type (1) et de type (2). Dans ce chapitre nous proposerons un $q$-analogue de la suite polynômiale $r$-Fibonacci comme extension d'un travail déjà réalisé par Benmezai dans sa thèse, que nous avons étendu au cas des suites compagnons $r$-Lucas de type $s$, pour tout $1 \leq s \leq r$. Comme une dernière partie de ce chapitre nous suggérons une extension au $(p,q)$-analogue des suites $r$-Fibonacci et ses suites compagnons, nous avons pu reproduire un certain nombre de propriétés.

Le chapitre 4 est consacré aux polynômes incomplets $r$-Lucas et hyper $r$-Lucas de type $s$. Les polynômes incomplets sont liés à la compréhension de la suite de Fibonacci et de Lucas que l'on connait par la forme explicite qui somme sur les diagonales du triangle de Pascal ou de la superposition de deux triangles de Pascal, sauf que nous ne prenons pas tous les termes mais nous ne prenons que les $k$ premiers termes, d'où les termes de troncature. Ces suites ont une propriété assez remarquable qui passe par la matrice d'Euler Seidel, ainsi que les hyper suites qui seront introduites dans ce chapitre. Nous donnerons les fonctions génératrices, nous introduirons les interprétations combinatoires et les hyper $r$-Fibonacci pour les hyper $r$-Lucas de type $s$.

Dans le chapitre 5 le terme $U_n^{(r)}$ de la suite $r$-Fibonacci présente la somme du terme précédent et le terme qui est décalé de $r$-positions. La question qui se pose si le décalage n'est pas en backward mais en forward c'est à dire c'est un décalage en avant pas en arrière ; que se passe t-il ? C'est ce que nous appelons $r$-Fibonacci pour $r$ négatif. Nous allons étudier ces suites qui sont déjà connues dans la littérature (voir [46]), mais nous allons essentiellement la comprendre à travers les suites compagnons. Nous allons introduire les formes de Binet correspondantes et expliciter le terme général, ce qui induit un triangle de Pascal correspondant qui va être explicité dans le chapitre.

Enfin, le chapitre 6 s'intéresse à la réalisabilité des suites récurrentes linéaires, il est bien connu dans la littérature que la suite de Fibonacci n'est pas réalisable et que la suite de Lucas l'est (voir [43]). Que veut dire une suite est réalisable ? On dit qu'une suite d'entiers $(a_n)_{n\geq 1}$ est réalisable lorsqu'elle réalise un système dynamique au sens que les termes de la suite en question comptent le nombre des points périodiques de période $n$ à ce système dynamique. Il s'avère que la suite $r$-Fibonacci n'est jamais réalisable et que sa famille de suite compagnons pour un choix bien spécifique et déterminé de $s$, nous avons la propriété de réalisabilité qui est satisfaite par la suite $r$-Lucas de type $r$. Nous avons une extension tout à fait naturelle du résultat connu dans la littérature qui a été introduit par Y. Puri et T. Ward [41, 42] et qui permet de caractériser les suites $r$-Fibonacci de termes initiaux arbitraires, réalisables.

# Chapitre 1

# Panorama sur des propriétés algébriques, arithmétiques et combinatoires des suites récurrentes linéaires et leurs dynamiques

Dans ce chapitre, nous allons étudier certaines propriétés algébriques et combinatoires des suites récurrentes linéaires sur un corps commutatif. Nous donnerons les différents résultats connus dans la littérature et qui seront utilisés tout au long de cette thèse. Nous rappellerons ensuite quelques notions de systèmes dynamiques.

## 1.1 Préliminaires sur les suites récurrentes linéaires

Dans cette section $\mathbf{K}$ désigne un corps commutatif de caractéristique 0 et $\mathbf{K}[X]$ l'anneau des polynômes à coefficients dans $\mathbf{K}$. Cette section est largement précisée dans [17, 43].

### 1.1.1 Définitions et propriétés

**Définition 1.1.** *On dit qu'une suite $u = (u_n)_{n \geq 0}$ est une suite récurrente linéaire à coefficients constants et à termes dans $\mathbf{K}$, s'il existe un entier naturel non nul $m$ et des éléments $a_1, \ldots, a_m$ de $\mathbf{K}$, non tous nuls, vérifiant la relation*

$$u_{n+m} = a_1 u_{n+m-1} + a_2 u_{n+m-2} + \cdots + a_m u_n. \tag{1.1}$$

*Une telle suite est déterminée par ses $m$ premières valeurs $u_0, \ldots, u_{m-1}$ et si l'entier $m$ est minimal, alors il est appelé longueur de la suite.*
*L'ensemble des suites récurrentes linéaires à coefficients dans $\mathbf{K}$ sera noté $\mathcal{R}(\mathbf{K})$.*

*Le polynôme défini par :*

$$P(X) = X^m - a_1X^{m-1} - a_2X^{m-2} - \cdots - a_m = \prod_{j=1}^{h}(X-\alpha_j)^{r_j} \in \mathbf{K}[X],$$

*est appelé polynôme caractéristique (ou générateur) de la suite $u$, où les $\alpha_j$ sont les racines de $P$ de multiplicité $r_j$ et $\sum_{j=1}^{h} r_j = m$.*
*Le polynôme réciproque du polynôme $P$ est donné par :*

$$q(X) = X^m P(1/X).$$

**Remarque 1.1.** *La définition précédente (relation(1.1)) permet d'étendre la définition de la suite $u$ vers la gauche en incluant les termes d'indices négatifs. Si on pose $u'_n = u_{-n}$ pour $n = 0, 1, 2, \ldots,$ on a :*

$$u'_{n+m} = -(a_{m-1}/a_m)u'_{n+m-1} - \cdots - (a_1/a_m)u'_{n+1} + (1/a_m)u'_n.$$

**Définition 1.2.** *L'application $T : \mathcal{R}(\mathbf{K}) \to \mathcal{R}(\mathbf{K})$ qui à toute suite $u$ associe une suite $Tu$ définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$Tu(n) = u(n+1),$$

*est appelée application décalage (ou shift).*

**Remarque 1.2.** *Soient $P = \sum_{0\le i\le h} a_iX^i$ un polynôme de $\mathbf{K}[X]$ et $u \in \mathcal{R}(\mathbf{K})$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :*

$$(Pu)(n) = \sum_{0\le i\le h} a_iT^iu = \sum_{0\le i\le h} a_iu(n+i),$$

*où $T^i$ désigne le $i^{\text{ème}}$ itéré de $T$ défini pour tout $n \in \mathbb{N}$ par :*

$$T^iu(n) = u(n+i).$$

*Muni de l'addition et de l'opération produit $Pu$, l'ensemble $\mathcal{R}(\mathbf{K})$ est un $\mathbf{K}[X]$-module. On désigne par $I_u$ l'idéal annulateur de $u$ dans $\mathbf{K}[X]$, i.e*

$$I_u = \{P \in \mathbf{K}[X]; Pu = 0\},$$

*et les éléments de $I_u$ sont les polynômes annulateurs de $u$. Comme $\mathbf{K}[X]$ est un anneau principal, alors l'idéal $I_u$ est principal engendré par le polynôme unitaire de degré minimal appelé polynôme minimal de la suite $u$. On dit que $u$ est une suite récurrente linéaire à termes dans $\mathbf{K}$ si son idéal annulateur $I_u$ est non nul.*

### 1.1.2 Somme et produit de Hadamard de suites récurrentes linéaires

Soient $u = (u_n)$ et $v = (v_n)$ deux suites récurrentes linéaires de polynômes caractéristiques respectifs $P$ et $Q$,

1. La somme $u + v = (u_n + v_n)$ est une suite récurrente linéaire de polynôme caractéristique $PQ$. Il suffit de montrer que le polynôme $PQ \in I_{u+v}$, (voir [17]).
2. Si $P = \prod_{i=1}^{h}(X - \alpha_i)^{r_i}$ et $Q = \prod_{j=1}^{k}(X - \beta_j)^{s_j}$ alors le produit de Hadamard $uv = (u_n v_n)$ est une suite récurrente linéaire dont le polynôme caractéristique est $\prod_{i,j=1}(X - \alpha_i\beta_j)^{r_j+s_j-1}$.

### 1.1.3 Terme général

**Théorème 1.1.** *[43] Si une suite $u$ vérifie une relation de type* (1.1) *et de polynôme caractéristique $P(X) \in \mathbf{K}[X]$ alors les termes de la suite $u$ sont les coefficients d'une série formelle présentée par la fonction rationnelle*

$$\frac{r(X)}{q(X)}, \text{ avec } q(0) \neq 0, \tag{1.2}$$

*où $q(X)$ est le polynôme réciproque du polynôme caractéristique $P$ et de degré $r$ inférieur à $m$, le degré du polynôme $P$.*

*Démonstration.* Supposons que la suite $u$ vérifie la relation (1.1), on a par identification des coefficients de $X^{m+n}$ pour $n = 0, 1, \ldots$ :

$$\sum_{n\geq 0} u_n X^n \left(1 - a_1 X - a_2 X^2 - \cdots - a_m X^m\right)$$

est un polynôme en $X$ de degré au plus $n + m$. Grace à la formule (1.1), la série $\sum_{n\geq 0} u_n X^n$ est une fraction rationnelle de la forme (1.2). □

Supposons maintenant que la suite $u = \sum_{n\geq 0} u_n X^n$ est une fraction rationnelle

$$u = \frac{r(X)}{q(X)}, \text{ avec } q(0) \neq 0.$$

Soient $\beta_1, \ldots, \beta_h$ les racines du polynôme $q$ dans une extension algébrique $L$ du corps $\mathbf{K}$ de muliplicité $r_i$, pour $1 \leq i \leq h$.
La décomposition en éléments simples de la fraction rationnelle $\dfrac{r(X)}{q(X)}$ est de la forme :

$$\frac{r(X)}{q(X)} = A(X) + \sum_{i=1}^{h}\sum_{j=1}^{r_j} \frac{b_{ij}}{(X - \beta_i)^j}, \tag{1.3}$$

où $A(X)$ est un polynôme à coefficients dans $\mathbf{K}$, qui est le quotient de la division euclidienne de $r$ par $q$.
En utilisant l'identité formelle pour tout entier positif $j$,

$$(X-\beta_i)^{-j} = (-1)^j \beta_i^{-j} \sum_{n\geq 0} \binom{n+j-1}{j-1} (X\beta_i^{-1})^n, \tag{1.4}$$

et si on pose $\alpha_i = \dfrac{1}{\beta_i}$ pour $(1 \leq i \leq h)$, alors l'expression (1.3) conduit à la relation

$$u = A(X) + \sum_{n\geq 0} \sum_{i=1}^{h} \sum_{j=1}^{r_j} (-1)^j b_{ij} \alpha_i^{n+j} \binom{n+j-1}{j-1} X^n.$$

On a donc le terme général de la suite $u$ s'écrit sous la forme :

$$u_n = \sum_{i=1}^{h} P_i \alpha_i^n, \tag{1.5}$$

avec

$$P_i(n) = \sum_{j=1}^{r_j} (-1)^j b_{ij} \alpha_i^j \binom{n+j-1}{j-1} X^n.$$

Les polynômes $P_i$ $(1 \leq i \leq h)$ sont des polynômes en $n$ à coefficients dans le corps $L$ et de degré inférieur à $r_i$.

**Exemple 1.1.** *L'exemple le plus ancien (1202) d'une suite récurrente récurrente d'ordre deux est la suite de Fibonacci définie pour tout $n \geqslant 0$, par la relation de récurrence*

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

*et de conditions initiales $F_0 = 0$ et $F_1 = 1$.*
*La formule (1.5) s'écrit :*

$$F_n = \frac{\alpha_1^n - \alpha_2^n}{\alpha_1 - \alpha_2} \text{ avec } \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

*La fonction génératrice est*

$$\sum_{n\geq 1} F_{n+1} X^n = \frac{1}{1-X-X^2}.$$

*Les termes d'indices négatifs de la suite de Fibonacci sont donnés par :*

$$F_{-n} = (-1)^{(n+1)} F_n, \text{ pour tout } n \in \mathbb{N},$$

*qui se traduit par :*

$$\ldots, -8, 5, -3, 2, -1, 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, \ldots$$

### 1.1.4 Puissances d'une matrice

La donnée d'une suite $u$ est équivalente à la donnée d'un entier $m$, d'une matrice carrée $A \in \mathbb{M}_m(K)$, d'un vecteur ligne $\alpha \in \mathbb{M}_{1,m}(K)$ et d'un vecteur colonne $u(0) \in \mathbb{M}_{m,1}(K)$ tels que :

$$u_n = \alpha A^n u(0), \ \textit{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

En effet, si $u$ une suite définie par la relation (1.1) alors la matrice

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \\ a_m & a_{m-1} & \cdots & a_1 \end{pmatrix},$$

n'est autre que la matrice compagnon du polynôme caractéristique $P(X) = X^m - a_1 X^{m-1} - a_2 X^{m-2} - \cdots - a_m$ et si on pose $u(n)$ le vecteur transposé de vecteur $(u_n, u_{n+1}, \ldots, u_{n+m-1})$, alors on a la relation

$$u(n) = Au(n-1) \text{ pour } n \geq 0.$$

En effectuant le calcul de la puissance $n^{ième}$ de la matrice $A$, le terme général de la suite $u$ s'obtient pour tout $n \geq 0$ ainsi :

$$u_n = \alpha A^n u(0),$$

avec $u(0)$ est le vecteur transposé du vecteur $(u_0, u_1, \ldots, u_{m-1})$ et $\alpha$ est le vecteur unité $(1, 0, \ldots, 0)$.

### 1.1.5 Expression explicite du terme général d'une suite récurrente linéaire

Le théorème suivant nous permettra d'expliciter le terme général de la suite $u_n$ en fonction de $n, a_1, \ldots, a_m, \alpha_0, \ldots, \alpha_{m-1}$. Ce théorème sera le théorème clef que nous allons utiliser à plusieurs reprises dans cette thèse.

**Théorème 1.2.** *([9]) Soit $(u_n)_{n>-m}$ une suite récurrente à termes dans un anneau unitaire $\mathcal{A}$, définie par :*

$$\begin{cases} u_{-j} = \alpha_j \quad (0 \leq j \leq m-1), \\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \cdots + a_m u_{n-m} \ (n \geq 1). \end{cases} \tag{1.6}$$

*Soient $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq m-1}$ et $(y_n)_{n>-m}$ deux suites de $\mathcal{A}$ définies par*

$$\lambda_j = -\sum_{k=0}^{m-1-j} a_k \alpha_{k+j} \quad (0 \leq j \leq m-1) \ \textit{with } a_0 = -1, \tag{1.7}$$

*et*

$$y_n = \sum_{k_1+2k_2+\cdots+mk_m=n} \binom{k_1+k_2+\cdots+k_m}{k_1,k_2,\ldots,k_m} a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_m^{k_m} \quad (n > -m), \tag{1.8}$$

*alors, pour tout $n > -m$, on a :*

$$u_n = \lambda_0 y_n + \lambda_1 y_{n+1} + \cdots + \lambda_{m-1} y_{n+m-1}. \tag{1.9}$$

**Exemple 1.2.** *Il est bien connu que la suite de Lucas vérifie la même relation de récurrence que la suite de Fibonacci, avec des termes initiaux différents. Cette suite fut étudiée par le mathématicien Edouard Lucas (1842-1891).*

$$L_0 = 2, L_1 = 1 \text{ et } L_n = L_{n-1} + L_{n-2}.$$

*De sorte que ses valeurs successives sont :* $2, 1, 3, 4, 7, 11, \ldots$.
*La formule* (1.5) *s'écrit :*

$$L_n = \alpha_1^n + \alpha_2^n \text{ avec } \alpha_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \text{ et } \alpha_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}.$$

*La fonction génératrice est*

$$\sum_{n\geq 1} L_{n+1}X^n = \frac{2-X}{1-X-X^2}.$$

*Enfin, on a le lien avec la suite de Fibonacci*

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}.$$

## 1.2 Fonction de Möbius

**Définition 1.3.** *La fonction de Möbius $\mu$ est la fonction définie sur les entiers naturels non nuls par :*

$$\mu(n) = \begin{cases} 1, & \text{si } \ n = 1, \\ (-1)^m, & \text{si } n \text{ est le produit de } m \text{ nombres premiers distincts}, \\ 0, & \text{si } n \text{ est divisible par un carré .} \end{cases}$$

Quelques propriétés de la fonction $\mu$ :

1. Pour tous $n$ et $m$ premiers entre eux,

$$\mu(nm) = \mu(n)\mu(m).$$

2. Pour tout $n \geq 1$,

$$\sum_{d/n} \mu(d) = \begin{cases} 1, & \text{si } n = 1 \\ 0, & \text{si } n > 1 \end{cases}$$

3. Pour tout $n \geq 1$, si $k$ est le nombre de diviseurs premiers de $n$ alors

$$\sum_{d/n} | \mu(d) | = 2^k.$$

La fonction Möbius intervient dans les formules d'inversions des fonctions arithmétiques. On a ainsi le théorème suivant :

**Théorème 1.3.** *[31] Soient $(a_n)_{n\geq 1}$ et $(b_n)_{n\geq 1}$ deux suites.*

$$a_n = \sum_{d/n} b_d \text{ si et seulement si } b_n = \sum_{d/n} \mu(n/d) a_d.$$

## 1.3 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est la donnée d'un ensemble $X$ et d'un groupe $G$ agissant sur $X$. La plupart du temps, le groupe est soit additif $(\mathbb{Z}, +)$ et on parle alors d'un système dynamique discret soit le groupe additif $(\mathbb{R}, +)$ et la dynamique est dite continue.

Par exemple :

- Si $X$ est un espace topologique et $T : X \to X$ est une application continue, nous parlerons de dynamique topologique.
- Si $X$ est un groupe et $T : X \to X$ est un automorphisme, alors $(T, X)$ est dit un système dynamique algébrique.
- Si $X$ est une variété et $T$ est une application différentiable ; on parle alors d'un système dynamique différentiable.

La notion de périodicité est l'une des plus importantes dans tout le domaine de la dynamique. C'est pourquoi nous commençons par énoncer la définition suivie par un exemple. L'ensemble des points fixes d'un système $(T, X)$ est :

$$Fix(T) = \{x \in X / Tx = x\}.$$

et la $k^{ième}$ itération de T est donnée par : $T^k x = T(T^{(k-1)}x)$, $k \geq 1$.
Dans cette section nous adopterons les notations de [27, 43].

**Définition 1.4.** *Soit $T : X \to X$ une application, un élément $x \in X$ est dit périodique pour l'application $T$ s'il existe un entier $n \geq 1$ tel que $T^n x = x$. Autrement dit $x$ est le point fixe de $T^n$ et le nombre de points périodiques de période $n \geq 1$ est*

$$Per_n(T) = \#Fix(T^n) = \# \{x \in X / T^n x = x\}.$$

*La plus petite période de $x$ est appelée la période première.*

**Exemple 1.3.** *Soit $T$ l'application définie sur $\mathbb{C}$ par $T : z \mapsto z^k$, le nombre de points périodiques n'est autre que le nombre de solutions de l'équation complexe $z^{k^n} = z$, il en résulte alors :*

$$Per_n(T) = \#Fix(T^n) = k^n \text{ pour tout } n \geq 1.$$

**Définition 1.5.** *Soit $x \in X$, on appelle orbite positif de $x$ sous l'action de $T$ l'ensemble*

$$O_+(x) = \left\{x, Tx, T^2x, \ldots,\right\} = \{T^n x; n \in \mathbb{N}\}.$$

*Si l'application $T$ est inversible, l'orbite totale de $x$ est*

$$O(x) = \{T^n x; n \in \mathbb{Z}\}.$$

Un cas particulier important est quand l'orbite du point $x$ est finie, dans ce cas on dit que l'élément $x$ est pré-périodique.

**Définition 1.6.** *Le nombre de points périodiques de période première égale à $n \geqslant 1$ est*

$$L_n(T) = \#\{x \in Fix(T^n)/\#\{T^k(x)\}_{k \in \mathbb{N}} = n\}.$$

*Le nombre des orbites de longueur $n \geqslant 1$ suivant une application $T$ est donné par la formule suivante :*

$$\mathcal{O}_n = \frac{L_n(T)}{n}.$$

**Remarque 1.3.** *Un point $x$ est périodique de période $n$ si et seulement si $T^n(x) = x$ et sa période première est égale à $n$ si l'orbite de $x$ contient exactement $n$ points.*

Le lemme suivant répond à la question posée sur la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 1}$ : $1, 1, 2, 3, 5, \ldots$ si elle compte les points périodiques d'un système dynamique donné.

**Lemme 1.1.** *[43] Il n'existe aucune application $T : X \longrightarrow X$ satisfaisant $Per_n(T) = F_n$.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une application $T : X \longrightarrow X$ vérifiant : $Per_n(T) = F_n$, donc $T$ a un seul point fixe. Les points fixes de l'application $T^3$ sont : le point fixe de $T$ et les éléments qui proviennent des orbites de longueur 3, si elles existent. C'est à dire : si on a $Per_1(T) = 1$, alors les valeurs possibles pour $Per_3(T)$ sont : $1, 4, 7, 10, \ldots$, ce qui contredit l'hypothèse $Per_3(T) = 2$. □

### 1.3.1 Systèmes dynamiques symboliques

Soit $\mathcal{A}$ un alphabet ou ensemble fini des symboles que l'on munit de la topologie discrète, induite par exemple par la distance discrète définie par :

$$d(a, b) = \begin{cases} 1, & si \quad a \neq b, \\ 0, & si \quad a = b. \end{cases}$$

On pose $\mathbb{E} = \mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$ et $X = \mathcal{A}^{\mathbb{E}}$, l'ensemble des suites infinies définies comme suit :

$$\mathcal{A}^{\mathbb{E}} = \{x = (x_i)_{i\in\mathbb{E}} : x_i \in \mathcal{A} \textit{ pour tout } i \in \mathbb{E}\}.$$

L'ensemble $X$ muni de la topologie produit est un espace métrisable par la distance suivante :

$$d(x,y) = \sum_{i\in\mathbb{E}} 2^{-|i|} d(x_i, y_i).$$

Un élément $x = (x_i)_{i\in\mathbb{E}}$ de $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ est dit un mot dont $x_i$ désigne la ième lettre.

**Définition 1.7.** *L'application $\sigma : \mathcal{A}^{\mathbb{E}} \to \mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ définie par :*

$$\sigma(x_i) = x_{i+1} \quad \textit{pour tout} \quad i \in \mathbb{E},$$

*s'appelle le décalage (ou shift).*

**Propriétés**

1. Pour $n \in \mathbb{N}$, la $n^{ième}$ itération de $\sigma$ décale la suite $x = (x_i)_{i\in\mathbb{E}}$ $n$ positions, c'est-à-dire :

$$\sigma^n(x_i) = x_{i+n} \quad \text{pour tout} \quad i \in \mathbb{E}.$$

2. L'application décalage est continue.

**Définition 1.8.** *On appelle système symbolique tout système dynamique topologique $(X, \sigma)$ construit à partir d'un alphabet $\mathcal{A}$.*

**Définition 1.9.** *Un $\mathcal{A}$-décalage à gauche est le système dynamique symbolique composé de l'ensemble $\mathcal{A}^{\mathbb{E}}$ muni de la topologie produit et l'application de décalage. Si $\mathcal{A} = \{0, 1, 2 \ldots, n\}$ alors le système dynamique $(\mathcal{A}^{\mathbb{E}}, \sigma)$ est dit un $n$-décalage.*

**Exemple 1.4.** *Pour $\mathcal{A} = \{0, 1\}$*

$$X = \{x = (x_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}};\ \textit{si } x_k = 1 \textit{ alors } x_{k+1} = 0\}.$$

*Le système $(X, \sigma)$ est un espace de décalage dit "Golden mean shift".*

Pour avoir plus de détails sur les systèmes dynamiques symboliques et les espaces de décalages, nous renvoyons à [36].

# Chapitre 2

# Les suites compagnons associées à la suite $r$-Fibonacci généralisée : propriétés algébriques et combinatoires

Dans ce chapitre, nous introduirons pour tous entiers non nuls $s$ et $r$ avec $(1 \leq s \leq r)$, une famille de $s$ suites compagnons associées à la suite $r$-Fibonacci généralisée, dites les $r$-Lucas de type $s$, puis nous établirons leurs séries génératrices correspondantes ainsi que leurs formes de Binet. Ensuite, nous donnons une interprétation combinatoire pour les termes de la suite initiale et les $r$-Lucas de type $s$ en utilisant les pavages linéaires et les pavages circulaires, après nous aborderons une extension aux indices négatifs. A la fin de ce chapitre, nous donnerons quelques propriétés combinatoires connues comme des identités de convolution ou des identités sommes alternées des termes de la suite $r$-Fibonacci et de ses suites compagnons.

## 2.1 Les suites compagnons associées à la suite $r$-Fibonacci généralisée

Soient $x, y \in \mathbb{R}$, pour tout entier $n \geq 2$, la suite de Fibonacci généralisée $(U_n(x,y)) \equiv (U_n)_{n\geq 1}$ et la suite de Lucas $(V_n(x,y)) \equiv (V_n)_{n\geq 1}$ sont définies respectivement par les récurrences suivantes :

$$\begin{cases} U_0 = 0, U_1 = 1, U_n = xU_{n-1} + yU_{n-2} \quad (n \geq 2), \\ V_0 = 2, V_1 = x, V_n = xV_{n-1} + yV_{n-2} \quad (n \geq 2). \end{cases}$$

Des cas particuliers sont les suites des Fibonacci $(F_n)_n$, Pell $(P_n)_n$, Jacobsthal $(J_n)_n$ et respectivement, leurs suites compagnons : Lucas $(L_n)_n$, Pell-Lucas $(Q_n)_n$ et Jacobsthal-Lucas $(j_n)_n$ : $(F_n, L_n) = (U_n(1,1), V_n(1,1))$, $(P_n, Q_n) = (U_n(2,1), V_n(2,1))$ et $(J_n, j_n) =$

$(U_n(1,2), V_n(1,2))$. Pour des propriétés combinatoires et arithmétiques, on trouve dans la littérature plusieurs références voir par exemple [10, 11].
Des généralisations de la suite de Fibonacci sont bien connues dans la littérature, à titre d'exemple on a :

1. La suite de Dickinson [21] définie par :

$$S_m = S_{m-c+a} + S_{m-c} \qquad \textit{avec } a, c \textit{ des entiers.}$$

2. La multibonacci de Miles [40] définie pour tout entier $k \geq 2$ par :

$$f_n = f_{n-1} + f_{n-2} + \cdots + f_{n-k}.$$

Une autre généralisation de la suite de Fibonacci est la suite nommée la $r$-Fibonacci généralisée. Elle a été introduite par Raab [45] et elle est définie par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} U_0^{(r)} = 0, \ U_k^{(r)} = x^{k-1} \ (1 \leq k \leq r), \\ U_{n+1}^{(r)} = xU_n^{(r)} + yU_{n-r}^{(r)} \ (n \geq r). \end{cases} \tag{2.1}$$

Il est bien établi que, pour tout $n \geq r$

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k. \tag{2.2}$$

La fonction génératrice de la suite $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$ est donnée par l'expression suivante :

$$U(z) = \sum_{n\geq 0} U_{n+1}^{(r)} z^n = \frac{1}{1 - xz - yz^{r+1}}. \tag{2.3}$$

Pour plus de détails et de résultats sur la suite $r$-Fibonacci généralisée, voir [32, 33, 45].

**Définition 2.1.** *Pour tous entiers $n$, $r$ et $s$ $(1 \leq s \leq r)$, on définit la famille de suites compagnons associées à la suite $r$-Fibonacci généralisée $(U_n^{(r)})_n$ par la relation suivante :*

$$\begin{cases} V_0^{(r,s)} = s+1, \ V_k^{(r)} = x^k \ (1 \leq k \leq r), \\ V_{n+1}^{(r,s)} = xV_n^{(r,s)} + yV_{n-r}^{(r,s)} \ (n \geq r). \end{cases} \tag{2.4}$$

*La suite $(V_n^{(r,s)})$ est nommée $r$-Lucas de type $s$.*

**Remarque 2.1.** *Pour $s = 0$, on obtient la suite $r$-Fibonacci décalée.*

Le théorème suivant permet d'exprimer les $V_n^{(r,s)}$ en fonction de $s$ et de $U_n^{(r)}$.

**Théorème 2.1.** *Soient $r$ et $s$ deux entiers tels que $1 \leq s \leq r$ et $x$ et $y$ deux éléments d'un anneau unitaire $\mathcal{A}$, avec $y$ inversible. Pour tout $n \geq r$, on a :*

$$V_n^{(r,s)} = U_{n+1}^{(r)} + syU_{n-r}^{(r)}, \tag{2.5}$$

*il en résulte la forme explicite suivante, pour tout $n \geq 1$,*

$$V_n^{(r,s)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \frac{n-(r-s)k}{n-rk} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k. \tag{2.6}$$

Pour la démonstration du théorème, on utilise le Théorème 1.2.

*Démonstration.* Considérons la suite $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ définie par la relation de récurrence (6.2.4), qui correspond dans la relation (1.6) à : $a_1 = x, a_{r+1} = y$ et $a_2 = a_3 = \cdots = a_r = 0$. En remarquant que pour tout $0 \leq j \leq r$, on a $u_{-j} = \alpha_j = y^{-1}(U_{r-j+1} - xU_{r-j})$, ce qui donne $\alpha_0 = s+1$, $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_{r-1} = 0$ et $\alpha_r = -sxy^{-1}$.
Par conséquent, la suite $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r}$ est définie comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_0 = s+1, \\ \lambda_j = -\sum\limits_{k=j}^{r} a_{k-j}\alpha_k = -a_{r-j}\alpha_r \text{ pour } 1 \leq j \leq r. \end{cases}$$

Pour $a_0 = -1$, on trouve les valeurs suivantes : $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_{r-2} = 0$, $\lambda_{r-1} = sx^2y^{-1}$ et $\lambda_r = -sxy^{-1}$.
En utilisant la formule (1.8) du Théorème 1.2, on obtient pour tout $n \geq 0$,

$$y_n = \sum_{k_1+(r+1)k_{r+1}=n} \binom{k_1+k_{r+1}}{k_1, k_{r+1}} x^{k_1} y^{k_{r+1}} = \sum_{k\geq 0} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k = U_{n+1}^{(r)}.$$

La formule (1.9), nous permet détablir l'expression de $V_n^{(r,s)}$ en fonction de $s, x, y, \lambda_0, \ldots, \lambda_r$ et $U_n^{(r)}$. D'où pour tout entier $n \geq r$,

$$\begin{aligned} V_n^{(r,s)} &= \lambda_0 U_{n+1}^{(r)} + \lambda_1 U_{n+2}^{(r)} + \cdots + \lambda_r U_{n+r+1}^{(r)} \\ &= \lambda_0 U_{n+1}^{(r)} + \lambda_{r-1} U_{n+r}^{(r)} + \lambda_r U_{n+r+1}^{(r)} \\ &= (s+1)U_{n+1}^{(r)} + sxy^{-1}(xU_{n+r}^{(r)} - U_{n+r+1}^{(r)}) \\ &= (s+1)U_{n+1}^{(r)} - sxU_n^{(r)} \\ &= syU_{n-r}^{(r)} + U_{n+1}^{(r)}. \end{aligned}$$

Finalement

$$\begin{aligned}
V_n^{(r,s)} &= U_{n+1}^{(r)} + syU_{n-r}^{(r)} \\
&= \sum_{k\geq 0}\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k + sy\sum_{k\geq 0}\binom{n-r-1-rk}{k}x^{n-r-1-(r+1)k}y^k \\
&= \sum_{k\geq 0}\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k + s\sum_{k\geq 0}\binom{n-1-r(k+1)}{k}x^{n-(r+1)(k+1)}y^{k+1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}(1+s\frac{k}{n-rk})\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}\frac{n-(r-s)k}{n-rk}\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k.
\end{aligned}$$

□

**Remarque 2.2.** *La relation de récurrence de la suite $(U_n^{(r)})_n$ s'écrit sous forme matricielle comme suit*

$$\mathcal{U}_{n+1}^{(r)} = A_r(x,y)\mathcal{U}_n^{(r)},$$

*où* $\mathcal{U}_n^{(r)} := \begin{pmatrix} U_n^{(r)} \\ U_{n+1}^{(r)} \\ U_n^{(r)} \\ \vdots \\ U_{n+r}^{(r)} \end{pmatrix}$ *pour $n \geq 0$ et* $A_r(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & y \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & x \end{pmatrix}$ *appelée matrice compagnon associée à la récurrence linéaire* (2.1).

*Par induction sur $n$, on calcule la puissance $n^{ième}$ de $A_r(x,y)$,*

$$A_r^n(x,y) = \begin{pmatrix} yU_{n-r}^{(r)} & yU_{n-r+1}^{(r)} & \cdots & yU_{n-1}^{(r)} & yU_n^{(r)} \\ yU_{n-r-1}^{(r)} & yU_{n-r}^{(r)} & \cdots & yU_{n-2}^{(r)} & yU_{n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ yU_{n-2r+1}^{(r)} & yU_{n-2r+2}^{(r)} & \cdots & yU_{n-r}^{(r)} & yU_{n-r+1}^{(r)} \\ U_{n-r+1}^{(r)} & U_{n-r+2}^{(r)} & \cdots & U_n^{(r)} & U_{n+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

*Considérons maintenant pour tout entier $s$ avec $1 \leq s \leq r$, la sous matrice $C_s(x,y)$ d'ordre $(s+1)$, obtenue de la matrice $A_r^n(x,y)$, en supprimant la première ligne et la première colonne.*

*En évaluant la trace $C_s(x,y)$, on retrouve la relation* (2.5).

*Pour $s = r = 1$,* $C_s(x,y) = \begin{pmatrix} yU_{n-1}^{(1)} & yU_n^{(1)} \\ yU_n^{(1)} & U_{n+1}^{(1)} \end{pmatrix}$ *et*

$$tr(C_s(x,y)) = tr(A_1^n(x,y)) = U_{n+1}^{(1)} + yU_{n-1}^{(1)} = V_n^{(1,1)}.$$

*Pour* $s = r$ $(r > 1)$, $C_s(x,y) = A_r^n(x,y)$ *et* $tr(C_s(x,y)) = U_{n+1}^{(r)} + ryU_{n-r}^{(r)} = V_n^{(r,r)}$.

*Si on prend le cas* $s = 2$ *et* $r = 3$, *donc* $C_2(x,y)$ *est la sous matrice obtenue de* $A_3^n(x,y)$ *d'ordre* 3, *donnée par :*

$$C_2(x,y) = \begin{pmatrix} yU_{n-3}^{(3)} & yU_{n-2}^{(3)} & yU_{n-1}^{(3)} \\ yU_{n-4}^{(3)} & yU_{n-3}^{(3)} & yU_{n-2}^{(3)} \\ U_{n-1}^{(3)} & U_n^{(3)} & U_{n+1}^{(3)} \end{pmatrix},$$

*donc*

$$tr(C_2(x,y)) = U_{n+1}^{(3)} + 2yU_{n-3}^{(3)} = V_n^{(3,2)}.$$

### 2.1.1 La fonction génératrice de la suite $r$-Lucas de type $s$

Dans cette sous section nous allons évaluer la fonction génératrice de la suite $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ pour tout $1 \leq s \leq r$.

**Théorème 2.2.** *Soit* $\mathcal{A} = \mathbb{R}$ *ou* $\mathbb{C}$, *pour* $z \in \mathbb{C}$ *la fonction génératrice de la suite* $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ *est donnée par :*

$$V(z) = \sum_{n\geq 0} V_n^{(r,s)} z^n = \frac{(1+s) - sxz}{1 - xz - yz^{r+1}}. \tag{2.7}$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned} V(z) &= \textstyle\sum_{n\geq 0} V_n{}^{(r,s)} z^n \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} (U_{n+1}{}^{(r)} + syU_{n-r}{}^{(r)}) z^n \\ &= \textstyle\sum_{n\geq 0} (U_{n+1}{}^{(r)} z^n + s \sum_{n\geq 0} yU_{n-r}{}^{(r)}) z^n \\ &= U(z) + s \textstyle\sum_{n\geq 0} (U_{n+1} - xU_n) z^n \\ &= (1+s)U(z) - sxzU(z), \end{aligned}$$

$U(z)$ est la série génératrice de la suite $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$, d'où $V(z) = \dfrac{(1+s) - sxz}{1 - xz - yz^{r+1}}$. □

### 2.1.2 Formules de Binet

Afin d'introduire les formes de Binet correspondantes aux suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$, nous allons dans cette sous section, étudier les propriétés de l'équation caractéristique associée aux suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$ donnée par :

$$t^{r+1} - xt^r - y = 0. \tag{2.8}$$

Ces propriétés comprennent le discriminant, l'emplacement des racines et sa réductibilité et solvabilité.

Le polynôme caractéristique associé aux suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$ est

$$P(t) = t^{r+1} - xt^r - y = \prod_{j=1}^{h} (X - \alpha_j)^{r_j},$$

où $\alpha_1, \ldots, \alpha_h$ sont les $(r+1)$ racines de l'équation (2.8) de multiplicité $r_j$ et $\sum_{j=1}^{h} r_j = r+1$. En utilisant le critère de De Gua pour trouver des racines imaginaires, nous voyons que l'équation (2.8) a au plus trois racines réelles puisque il y a $(r-1)$ termes successifs absents entre deux termes de même signe et donc il existe au moins $(r-2)$ racines imaginaires. De plus si $\alpha$ est une racine multiple de l'équation (2.8), il est facile de vérifier que $\alpha = rx/(r+1)$ et que l'ordre de multiplicité maximale d'une racine réelle est égal à 2.

**Théorème 2.3.** *Le discriminant du polynôme caractéristique $P$ est*

$$\triangle = (-1)^{r(r+1)/2} y \left( ((xr)^{r+1} + yr(r+1)^{r+1})/r \right).$$

*Démonstration.* Si $P'$ désigne la dérivée de polynôme $P$ et $R(P, P')$ est le résultant des polynômes $P$ et $P'$, alors en utilisant un résultat de [37] qui précise le discriminant d'un polynôme, on a

$$\triangle = (-1)^{r(r+1)/2} R(P, P'),$$

avec

$$R(P, P') = (r+1)^{(r+1)} \prod_i P(m_i)$$

où $m_i$ sont les racines du polynôme $P'$. Ce qui donne :

$$\begin{aligned}
\triangle &= (-1)^{r(r+1)/2} (r+1)^{(r+1)} P(0) P(rx/r+1) \\
&= (-1)^{r(r+1)/2} (r+1)^{(r+1)} (-y) \left( (rx/r+1)^{r+1} - x(rx/r+1)^r - y \right) \\
&= (-1)^{r(r+1)/2} y \left( (xr)^{r+1}/r + y(r+1)^{r+1} \right).
\end{aligned}$$

□

Une conséquence immédiate du théorème précédent est que $\alpha = rx/(r+1)$ est une racine multiple de l'équation (2.8), si et seulement si $y = (-1/r)\left(rx/r+1\right)^{r+1}$.

**Théorème 2.4.** *Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}$ les racines du polynôme caractéristique $P(t) = t^{r+1} - xt^r - y$ associée aux suites $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$ et $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ tel que $y \neq (-1/r)\left(rx/r+1\right)^{r+1}$. Alors pour tout entier $1 \leq s \leq r$, on a :*

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} \quad et \quad V_n^{(r,s)} = \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^n \frac{(s+1)\alpha_k - sx}{(r+1)\alpha_k - rx}.$$

*Démonstration.* En utilisant la décomposition de Jordan de la matrice $A_r(x, y)$, on voit qu'il existe des éléments rationnelles $b_k$ tels que l'on ait $U_n^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} b_k \alpha_k^n$. Le système peut être résolu par la règle de Cramer et le déterminant de Vandermonde en utilisant les $(r+1)$ termes initiaux de la suite $(U_n^{(r)})$. Il en résulte que :

$$b_k = \frac{\alpha_k^{r-1}}{(\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\cdots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k - \alpha_{r+1})}. \tag{2.9}$$

D'autre part, on a $P(t) = t^{r+1} - xt^r - y = (t-\alpha_1)(t-\alpha_2)\cdots(t-\alpha_{r+1})$, alors pour $1 \leq k \leq r+1$,

$$\begin{aligned} P'(\alpha_k) &= (r+1)\alpha_k^r - rx\alpha_k^{r-1} \\ &= (\alpha_k - \alpha_1)(\alpha_k - \alpha_2)\cdots(\alpha_k - \alpha_{k-1})(\alpha_k - \alpha_{k+1})\cdots(\alpha_k - \alpha_{r+1}), \end{aligned}$$

ce qui donne :

$$b_k = \frac{\alpha_k^{r-1}}{(r+1)\alpha_k^r - rx\alpha_k^{r-1}} = \frac{\alpha_k^{r-1}}{\alpha_k^{r-1}((r+1)\alpha_k - rx)} = \frac{1}{((r+1)\alpha_k - rx)}.$$

Donc

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} b_k \alpha_k^{n+1} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n+1}}{(r+1)\alpha_k - rx}.$$

La forme de Binet de $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ se déduit de la relation (2.5).

$$\begin{aligned} V_n^{(r,s)} &= U_{n+1}^{(r)} + syU_{n-r}^{(r)} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} + sy\sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n-r}}{(r+1)\alpha_k - rx} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n-r}(\alpha_k^{r+1} + sy)}{(r+1)\alpha_k - rx} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n-r}(\alpha_k^{r+1} + s(\alpha_k^{r+1} - x\alpha_k^r)}{(r+1)\alpha_k - rx} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{n-r}((s+1)\alpha_k^{r+1} - x\alpha_k^r)}{(r+1)\alpha_k - rx} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^n \frac{(s+1)\alpha_k - sx}{(r+1)\alpha_k - rx}. \end{aligned}$$

□

## 2.2 Interprétation combinatoire des suites $(U_n^{(r)})$ et $(V_n^{(r,s)})$

Dans la présente section, nous proposons une interprétation combinatoire pour les termes de la suite $r$-Fibonacci généralisée et les suites $r$-Lucas de type $s$ en utilisant un pavage linéaire, inspiré des travaux de Benjamin et Quinn [14] pour $r = 1$.
Pour tout entier $n \geq 1$, le nombre généralisé de Fibonacci $U_{n+1}$ compte le nombre de manière de paver un $n$-ruban avec des carrés et des dominos colorés, où $x$ représente l'intensité de coloration pour les carrés et $y$ représente l'intensité de coloration pour les dominos.

**Définition 2.2.** *Un $n$-ruban est la concaténation de $n$ cellules carrées numérotées de 1 jusqu'à $n$ d'une manière linéaire.*

**Définition 2.3.** *Un $k$-omino est un polymino linéaire qui couvre $k$ cellules consécutives d'un ruban, pour $k = 1$ et $k = 2$ on obtient respectivement un carré et un domino.*

**Définition 2.4.** *Un $n$-ruban circulaire ($n$ -bracelet) est la concaténation de $n$ cellules carrées numérotées de 1 jusqu'à $n$ d'une manière circulaire .*

**Remarque 2.3.** *Notons que la première pièce d'un $n$-bracelet est celle qui couvre la cellule numéro 1, elle peut être soit un carré, un $(r+1)$-omino qui couvre les cellules de 1 jusqu'à $(r+1)$ ou bien un $(r+1)$-omino qui couvre les cellules 1 et $(r+1)$.*

**Définition 2.5.** *Un $n$-bracelet est dit sans phase si il y a un $(r+1)$-omino qui couvre les cellules 1 et $(r+1)$ au niveau $t$ pour $1 \leq t \leq r$ du $(r+1)$-omino correspondant, sinon le $n$-bracelet est dit en phase (avec phase).*

Dans notre cas les positions susceptibles d'être sans phase sont $1, \ldots, s$. Par exemple, comme illustré sur les Figures 2.2, 2.3 et 2.4, on a : les 3 premiers bracelets sont avec phase et les autres correspondent à des bracelets sans phase où le 4-omino couvre les cellules 1 et 5 au niveau de $s$ premières positions peuvent occuper, pour $1 \leq s \leq 3$.

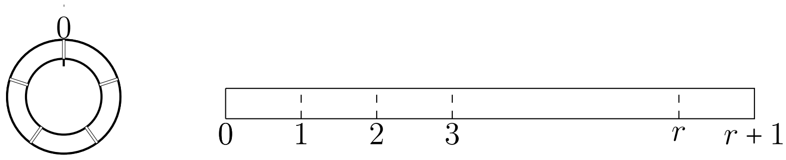


FIGURE 2.1 – $n$-bracelet et $(r+1)$-omino.

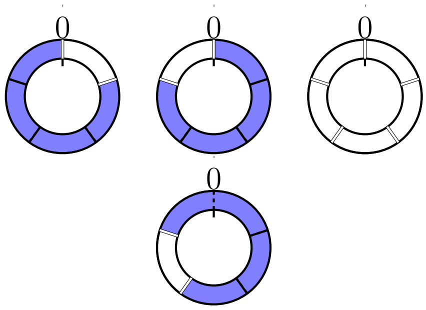

FIGURE 2.2 – Pavage circulaire de longueur 5 pour $s = 1$.

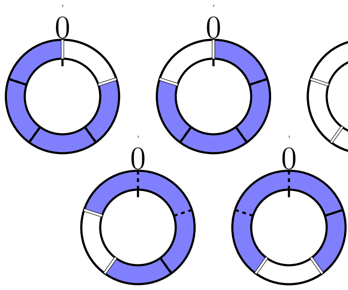

FIGURE 2.3 – Pavage circulaire de longueur 5 pour $s = 2$.

D'après la relation 2.2 et le Théorème 2.1 on a :

$$U_{n+1}^{(r)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} U(n,k) \quad \text{avec} \quad U(n,k) := \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k \tag{2.10}$$

et

$$V_n^{(r,s)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} V(n,k) \quad \text{avec} \quad V(n,k) := \frac{n-(r-s)k}{n-rk} \binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k. \tag{2.11}$$

**Proposition 2.1.** *Soient $x, y$ et $n$ des entiers, le nombre de $r$-Fibonacci $U_{n+1}^{(r)}$ compte le nombre de manières de paver un $n$-ruban avec des carrés et des $(r+1)$-ominos, où il y a $x$ différentes couleurs pour les carrés et $y$ différentes couleurs pour les $(r+1)$-ominos.*

*Démonstration.* Soient $n \geq r$ et $(k = 0, \ldots, \lfloor n/(r+1) \rfloor)$, on suppose que le pavage contient $k$ $(r+1)$-ominos, alors nécessairement il reste $n-(r+1)k$ carrés á paver. En tout, il y a $n-(r+1)k+k = n-rk$ pièce et par conséquent, le nombre de manières de choisir $k$ $(r+1)$-ominos de poids $y^k$ et des carrés de poids $x^{n-(r+1)k}$ parmi $n-rk$ est : $\binom{n-rk}{k} x^{n-(r+1)k} y^k$. □

Le résultat ci-dessous est l'interprétation combinatoire des termes de la suite $(V^{(r,s)})_n$ pour tous entiers positifs $s$ et $r$ avec $1 \leq s \leq r$.

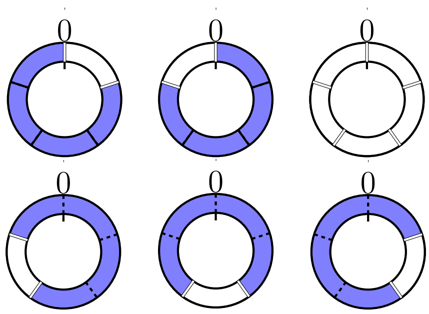


FIGURE 2.4 – Pavage circulaire de longueur 5 pour $s = 3$.

**Théorème 2.5.** *Soient $n, r$ et $s$ des entiers et $x, y \in \mathbb{N}$, $V_n^{(r,s)}$ compte le nombre de manières de paver un $n$-bracelet avec des carrés de $x$ différentes couleurs et des $(r+1)$-ominos de $y$ différentes couleurs, avec les $s$ premières positions sont autorisées d'être sur le point zéro du bracelet.*

Pour la démonstration nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 2.1.** *Pour tous entiers $n, r$ et $s$ et $x, y \in \mathbb{N}$, $V(n,k)$ le nombre de manières de paver un $n$-bracelet avec exactement $k$ ($k = 0, \ldots, \lfloor n/(r+1) \rfloor$) $(r+1)$-ominos de $y$ différentes couleurs et des carrés de $x$ différentes couleurs, avec les $s$ premières positions sont autorisées d'être sur le point zéro du bracelet est donnée par l'expression suivante :*

$$V(n,k) = \frac{n-(r-s)k}{n-rk}\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k. \tag{2.12}$$

*Preuve du Lemme 2.1.* Premièrement, on suppose que le $n$-bracelet est avec phase c'est à dire aucun $(r+1)$-omino ne couvre les cellules 1 et $n$, alors le nombre de manières de paver un $n$-bracelet correspond au nombre de manières de paver un $n$-ruban qui est $\binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k$.
Deuxièment, supposons qu'il y a un $(r+1)$-omino occupant les cellules 1 et $n$ c'est à dire le $n$-bracelet est sans phase. Nous acceptons seulement les premières $s$ positions du $(r+1)$-ominos couvrant les cellules 1 et $n$. Donc on a necessairement $s$ possibilités, pour $1 \leq s \leq r$. Alors il reste à paver $n-(r+1)$ cellules avec $(k-1)$ $(r+1)$-ominos ce qui correspond exactement à $\binom{n-rk-1}{k-1}x^{n-(r+1)k}y^k$ possibilités. Finalement on a :

$$V(n,k) = \binom{n-rk}{k}x^{n-(r+1)k}y^k + s\binom{n-rk-1}{k-1}x^{n-(r+1)k}y^k.$$

□

*Preuve du Théorème 2.5.* Notons que le nombre de manières de paver un $n$-bracelet avec des carrés de $x$ différentes couleurs et des $(r+1)$-ominos de $y$ différentes couleurs est

$$V_n^{(r,s)} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} V(n,k),$$

□

## 2.3 Extension des suites $(U_n^{(r)})_n$ et $(V_n^{(r,s)})_n$ aux indices négatifs

Les formules de Binet ainsi que la relation de récurrence (2.1) nous permettent d'étendre les termes des suites $(U_n^{(r)})_n$ et $(V_n^{(r,s)})_n$ vers la gauche, c'est à dire de calculer les termes d'indices négatifs. Dans ce sens, nous proposons la définition suivante :

**Définition 2.6.** *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$U_{-n}^{(r)} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n}}{(r+1)\alpha_k - rx} \quad et \quad V_{-n}^{(r,s)} = \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^{-n} \frac{(s+1)\alpha_k - sx}{(r+1)\alpha_k - rx}.$$

Le résultat suivant se démontre facilement par un changement de variables.

**Proposition 2.2.** *Soient $\mathcal{A}$ un anneau unitaire et $x, y$ deux éléments inversibles de $\mathcal{A}$, pour tous entiers $n \geq 0$ et $r \geq 1$, les termes de la suite $(U_{-n}^{(r)})_n$ vérifient la relation de la récurrence suivante :*

$$U_{-n}^{(r)} = y^{-1} U_{-n+r+1}^{(r)} - xy^{-1} U_{-n+r}^{(r)} \quad (n \geq r+1). \tag{2.13}$$

*Démonstration.* On remplace $n$ par $-n + r$ dans la formule de Binet.

$$\begin{aligned}
U_{-n+r+1}^{(r)} &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n+r+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{(\alpha_k^{-n})(\alpha_k^{r+1})}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n}(x\alpha_k^r + y)}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= x \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n+r}}{(r+1)\alpha_k - rx} + y \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n}}{(r+1)\alpha_k - rx} \\
&= xU_{-n+r}^{(r)} + yU_{-n}^{(r)},
\end{aligned}$$

ce qui achève la démonstration, pour tout entier $n \geq r + 1$,

$$U_{-n}^{(r)} = y^{-1} U_{-n+r+1}^{(r)} - xy^{-1} U_{-n+r}^{(r)}.$$

□

Par exemple, dans la Table 2.1, nous présenterons les premiers termes des suites $(U_{-n}^{(2)})$ et $(V_{-n}^{(2,1)})$.

| $n$ | $U_{-n}^{(2)}$ | $V_{-n}^{(2,1)}$ |
|---|---|---|
| -13 | $5x^4y^{-6} - 4xy^{-5}$ | $-7x^5y^{-6} + 16x^2y^{-5}$ |
| -12 | $-x^5y^{-6} + 6x^2y^{-5}$ | $x^6y^{-6} - 14x^3y^{-5} + 2y^{-4}$ |
| -11 | $-4x^3y^{-5} + y^{-4}$ | $6x^4y^{-5} - 7xy^{-4}$ |
| -10 | $x^4y^{-5} - 3xy^{-4}$ | $-x^5y^{-5} + 9x^2y^{-4}$ |
| -9 | $3x^2y^{-4}$ | $-5x^3y^{-4} + 2y^{-3}$ |
| -8 | $-x^3y^{-4} + y^{-3}$ | $x^4y^{-4} - 5xy^{-3}$ |
| -7 | $-2xy^{-3}$ | $4x^2y^{-3}$ |
| -6 | $x^2y^{-3}$ | $-x^3y^{-3} + 2y^{-2}$ |
| -5 | $y^{-2}$ | $-3xy^{-2}$ |
| -4 | $-xy^{-2}$ | $x^2y^{-2}$ |
| -3 | 0 | $2y^{-1}$ |
| -2 | $y^{-1}$ | $-xy^{-1}$ |
| -1 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 2 |

TABLE 2.1 – Quelques valeurs des termes de $(U_{-n}^{(2)})$ et $(V_{-n}^{(2,1)})$.

**Lemme 2.2.** *Pour tous entiers $m, r$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{k}{m+j} = (-1)^{(r+1)} \binom{k-1}{m+r} + \binom{k-1}{m}. \tag{2.14}$$

*Démonstration.* En utilisant les propriétés du coefficient binomial, le lemme se démontre par induction sur $r$ pour tout $r \geq 1$. On a :

$$\sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{k}{m+j} = \binom{k}{m+1} = \binom{k-1}{m+1} + \binom{k-1}{m},$$

donc l'assertion (2.14) est vérifée pour $r = 1$. Supposons que (2.14) est vraie pour tout $p \leq r$, et montrons qu'elle est vraie pour $r+1$.
En effet :

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{r+1} (-1)^{j+1} \binom{k}{m+j} &= \sum_{j=1}^{r} (-1)^{j+1} \binom{k}{m+j} + (-1)^{r} \binom{k}{m+r+1} \\
&= (-1)^{r+1} \binom{k-1}{m+r} + \binom{k-1}{m} + (-1)^{r} \binom{k}{m+r+1} \\
&= (-1)^{r+2} \binom{k-1}{m+r+1} + \binom{k-1}{m}.
\end{aligned}$$

D'où le résultat. □

**Théorème 2.6.** *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite $(U_{-n}^{(r)})_{n \geq 1}$ satisfait les deux identités* *équivalentes suivantes*

$$U_{-n}^{(r)} = \sum_{k} \binom{k-1}{n-rk} (-x)^{-n-1+(r+1)k} y^{-k}, \tag{2.15}$$

$$U_{-n}^{(r)} = \sum_{k} \binom{(n-k-r)/r}{k} (-x)^{(n-r-(r+1)k)/r} y^{(-n+k)/r}, \tag{2.16}$$

*avec* $U_0 = 0$. *La première somme est limitée aux entiers* $k \geq 1$ *tels que* $\lfloor (n+1)/(r+1) \rfloor \leq k \leq \lfloor (n-1)/r \rfloor$ *; la deuxième somme est limitée aux entiers* $k$ *compris entre* $0$ *et* $\lfloor (n-r)/(r+1) \rfloor$, *et qui satisfont* $r$ *divise* $(n-k)$.

*Démonstration.* Considérons la suite $(W_n)_{(n\geq 0)}$ définie par $W_n = U_{-n}^{(r)}$, alors

$$W_n = y^{-1} W_{n-r-1}^{(r)} - xy^{-1} W_{n-r}^{(r)},$$

avec $a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0$, $a_r = -xy^{-1}$ et $a_{r+1} = y^{-1}$. Remarquons que pour $1 \leq j \leq r$ on a $W_{-j} = U_j^{(r)} = x^{j-1}$. Par conséquent, la suite $(\lambda_j)_{0\leq j\leq r}$ définie pour tout entier $0 \leq j \leq r$ comme suit :

$$\lambda_j = -\sum_{k=0}^{r-j} a_k U_{k+j}^{(r)} \text{ avec } a_0 = -1.$$

Ce qui donne : $\lambda_0 = x^r y^{-1}$ et $\lambda_j = x^{j-1}$ pour $1 \leq j \leq r$.
Finalement, la suite $(y_n)_n$ est donnée par l'expression suivante

$$y_n = \sum_{rk_r+(r+1)k_{r+1}=n} \binom{k_r+k_{r+1}}{k_r, k_{r+1}} a_r^{k_r} a_{r+1}^{k_{r+1}} = \sum_k \binom{k}{n-rk} (-x)^{(r+1)k-n} y^{-k}.$$

En appliquant le Théorème 1.2, on obtient l'expression de $(W_n)_n$ en fonction de $(\lambda_n)$ et $(y_n)$ pour tout entier $n \geq 0$,

$$\begin{aligned}
W_n &= \lambda_0 y_n + \lambda_1 y_{n+1} + \cdots + \lambda_r y_{n+r},\\
&= x^r y^{-1} y_n + \textstyle\sum_{j=1}^r x^{j-1} y_{n+j},\\
&= x^r y^{-1} \sum_k \binom{k}{n-rk} (-x)^{(r+1)k-n} y^{-k} + x^{j-1} \textstyle\sum_{j=1}^r \sum_k \binom{k}{n+j-rk} (-x)^{(r+1)k-n-j} y^{-k}\\
&= \sum_k (-x)^{rk+k-n-1} y^{-k} \left(\textstyle\sum_{j=1}^r (-1)^{j+1} \binom{k}{n+j-rk} + (-1)^{(r)} \binom{k-1}{n+r-rk}\right)\\
&= \sum_k \binom{k-1}{n-rk} (-x)^{-n-1+(r+1)k} y^{-k} (\text{ Lemme 2.2})\\
&= \sum_{k;\ r|(n-k)} \binom{(n-k-r)/r}{k} (-x)^{(n-r-(r+1)k)/r} y^{(-n+k)/r}.
\end{aligned}$$

D'où la relation (2.16). □

En utilisant la formule de Binet, nous démontrons une identité semblable à la relation (2.5) établie par le terme général de la suite $(V_{-n}^{(r,s)})_{n\geq 1}$ en fonction de $s$ et $U_{-n}^{(r)}$.

**Théorème 2.7.** *Soient $r$ et $s$ deux entiers tels que $1 \leq s \leq r$, pour tout $n \geq 1$ on a*

$$V_{-n}^{(r,s)} = U_{-n+1}^{(r)} + syU_{-n-r}^{(r)}, \tag{2.17}$$

*ainsi, on obtient les expressions suivantes, pour tout $n \geq 1$*

$$V_{-n}^{(r,s)} = \sum_{k}^{\lfloor (n-1)/r \rfloor} \frac{n-(r-s)k}{n-rk}\binom{k-1}{n-1-rk}(-x)^{-n+(r+1)k}y^{-k} + s(-x)^{n/r}y^{-n/r}[r \mid n], \tag{2.18}$$

*ou encore*

$$V_{-n}^{(r,s)} = \sum_{k,\ r|(n-k)} \frac{sn+(r-s)k}{rk}\binom{(n-k-r)/r}{k-1}(-x)^{(n-(r+1)k)/r}y^{(-n+k)/r} + s(-x)^{n/r}y^{-n/r}[r \mid n], \tag{2.19}$$

*avec $V_0^{(r,s)} = s+1$ et $[r \mid n] = 1$ pour $r$ divise $n$ et $0$ sinon.*
*Nous pouvons limiter la première somme à des entiers $k$ compris entre $\lfloor n/(r+1) \rfloor$ et $\lfloor (n-1)/r \rfloor$ ; la deuxième somme est limitée aux entiers $k$ compris entre $1$ et $\lfloor n/(r+1) \rfloor$, et qui satisfont $r$ divise $(n-k)$.*

*Démonstration.* Pour démontrer l'identité (2.17), il suffit d'appliquer les formes de Binet correspondantes

$$\begin{aligned}
V_{-n}^{(r,s)} &= \sum_{k=1}^{r+1} \alpha_k^{-n}\frac{(s+1)\alpha_k - sx}{(r+1)\alpha_k - rx}\\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n+1} + s\alpha_k^{-n+1} - sx\alpha_k^{-n}}{(r+1)\alpha_k - rx}\\
&= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\alpha_k^{-n+1}}{(r+1)\alpha_k - rx} + s\sum_{k=1}^{r+1}\frac{\alpha_k^{-n-r}(\alpha_k^{r+1} - x\alpha_k^{r})}{(r+1)\alpha_k - rx}\\
&= U_{-n+1}^{(r)} + sy\sum_{k=1}^{r+1}\frac{\alpha_k^{-n-r}}{(r+1)\alpha_k - rx}\\
&= U_{-n+1}^{(r)} + syU_{-n-r}^{(r)}.
\end{aligned}$$

Nous donnerons la preuve de l'identité (2.18), la preuve de la deuxième (2.19) est obtenue facilement en utilisant la même approche. En appliquant les relations (2.17) et (2.15), on obtient :

$$
\begin{aligned}
V_{-n}^{(r,s)} &= U_{-n+1}^{(r)} + syU_{-n-r}^{(r)} \\
&= \sum_{k}^{\lfloor (n-1)/r \rfloor} \binom{k-1}{n-1-rk}(-x)^{-n+(r+1)k}y^{-k} + s\sum_{k}^{\lfloor (n-1)/r \rfloor} \binom{k-1}{n+r-rk}(-x)^{-n-r-1+(r+1)k}y^{-k+1} \\
&= \sum_{k}^{\lfloor (n-1)/r \rfloor} \binom{k-1}{n-1-rk}(-x)^{-n+(r+1)k}y^{-k} + s\sum_{k}^{\lfloor n/r \rfloor} \binom{k}{n-rk}(-x)^{-n+(r+1)k}y^{-k} \\
&= \sum_{k}^{\lfloor (n-1)/r \rfloor} (1+s\tfrac{k}{n-rk})\binom{k-1}{n-1-rk}(-x)^{-n+(r+1)k}y^{-k} + s\binom{\lfloor n/r \rfloor}{n-r\lfloor n/r \rfloor}(-x)^{-n+(r+1)\lfloor n/r \rfloor}y^{-\lfloor n/r \rfloor},
\end{aligned}
$$

ce qui achève la démonstration. □

Nous déduisons que la caractérisation (2.5) de la suite $(V_n^{(r,s)})$ donnée par le Théorème 2.1 est généralisée pour les $n$ négatifs.

Nous allons maintenant présenter quelques applications liées aux Théorèmes 2.6 et 2.7.

**Application 1** Soient $(F_n)_n$ la suite de Fibonacci et $(L_n)_n$ la suite de Lucas, alors pour tout $n \geq 1$ on a :

$$F_{-n} = (-1)^{-n-1}\sum_{k}^{n}\binom{k-1}{n-k} \tag{2.20}$$

et

$$L_{-n} = (-1)^{-n}\sum_{k}^{n-1}\frac{n}{n-k}\binom{k-1}{n-1-k} + (-1)^n. \tag{2.21}$$

**Application 2** En prenant $r = 1$ et $(x, y) = (2, 1)$, on obtient la suite de Pell $(P_n)_n$ et la suite de Pell Lucas $(Q_n)_n$. Pour tout $n \geq 1$ on a :

$$P_{-n} = (-2)^{-n-1}\sum_{k}^{n}\binom{k-1}{n-k}, \tag{2.22}$$

$$Q_{-n} = (-2)^{-n}\sum_{k}^{n-1}\frac{n}{n-k}\binom{k-1}{n-1-k} + (-2)^n. \tag{2.23}$$

**Application 3** Considérons la suite 2-Fibonacci $(U_n^{(2)})_n$. Pour tout $n \geq 1$,

$$U_{-n}^{(2)} = \sum_{k}\binom{k-1}{n-2k}(-1)^{-n-1+3k}.$$

Les suites compagnons d'indices négatifs pour $s = 1, 2$ sont définies par les identités suivantes,

$$V_{-n}^{(2,1)} = \sum_{k}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\frac{n-k}{n-2k}\binom{k-1}{n-1-2k}(-1)^{-n+3k} + \frac{1}{2}(1+(-1)^n)(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}$$

et

$$V_{-n}^{(2,2)} = \sum_{k}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor}\frac{n}{n-2k}\binom{k-1}{n-1-2k}(-1)^{-n+3k} + (1+(-1)^n)(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}.$$

## 2.4 Applications

### 2.4.1 Relations de convolution

Dans cette sous section, nous allons présenter quelques relations de convolutions de la suite $r$-Fibonacci généraliséeet de ses compagnons, les polynômes $r$-Lucas.

**Théorème 2.8.** *Soient $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$ et $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ respectivement la suite r-Fibonacci généralisée et la suite polynômiale r-Lucas de type s. Pour tous entiers $n, m \geq r$, on a*

$$y\sum_{j=1}^{r} U_{n-j}^{(r)} U_{m+j}^{(r)} = U_{n+m+r}^{(r)} - U_n^{(r)} U_{m+r+1}^{(r)}$$

*et*

$$y\sum_{j=1}^{r} U_{m-r+j}^{(r)} V_{n-j}^{(r,s)} = V_{n+m}^{(r,s)} - U_{m+1}^{(r)} V_n^{(r,s)}.$$

*Démonstration.* Le résultat est obtenu par identification des termes de mêmes entrées dans les matrices $A_r^{n+m}(x,y)$ et $A_r^n(x,y) \times\ A_r^m(x,y)$. □

**Corollaire 2.1.** *Pour tout entier $n \geq 0$, les identités suivantes sont vérifiées :*

$$U_{2n}^{(r)} = 2y\sum_{j=0}^{\lfloor r/2\rfloor} U_{n-j}^{(r)} U_{n-r+j}^{(r)} + x^{2(r/2-\lfloor r/2\rfloor)} U_n^{(r)} U_{n+1-2(r/2-\lfloor r/2\rfloor)}^{(r)} \tag{2.24}$$

*et*

$$U_{2n+1}^{(r)} = 2y\sum_{j=0}^{\lfloor r/2\rfloor} U_{n+1-j}^{(r)} U_{n-r+j}^{(r)} + (U_{n+1}^{(r)})^2 + 2y(r/2-\lfloor r/2\rfloor)(U_{n-(r-1)/2}^{(r)})^2. \tag{2.25}$$

Pour $(x,y) = (1,1)$ et $r = 1$, on retrouve les identités de Cassini et quelques identités connues pour la suite de Fibonacci [35],

$$F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1} \text{ et } L_{n+m} = F_mL_{n-1} + F_{m+1}L_n,$$

$$F_{2n} = F_{n+1}^2 - F_{n-1}^2 \text{ et } F_{2n+1} = F_{n+1}^2 + F_n^2.$$

### 2.4.2 Sommes pondérées alternées des termes de la suite $r$-Fibonacci généralisée et de ses suites compagnons

Dans la présente sous section, nous donnons une forme explicite de la somme alternée des termes de la suite $r$-Fibonacci généralisée, ainsi que de ses compagnons $(V_n^{(r,s)})$ pour tout entier $s$.

Considérons pour tout entier naturel non nul $m$, la suite de terme général $\xi_n^{(r)} = m^{n-1}U_n^{(r)}$ satisfaisant la relation de récurrence suivante :

$$\xi_{n+1}^{(r)} = mx\xi_n^{(r)} + m^{r+1}y\xi_{n-r}^{(r)},$$

où les termes initiaux sont donnés par : $\xi_0^{(r)} = 0, \quad \xi_k^{(r)} = (mx)^{k-1}$ $(1 \leq k \leq r)$.
Nous définissons encore pour tout entier naturel non nul $m$, les suites compagnons associées à la suite $(\xi_n^{(r)})$ indexée par $s$ $(1 \leq s \leq r)$ :

$$\eta_n^{(r,s)} = m^n V_n^{(r,s)},$$

satisfaisant la récurrence

$$\eta_n^{(r,s)} = mx\eta_{n-1}^{(r,s)} + m^{r+1}y\eta_{n-r-1}^{(r,s)},$$

avec $\eta_0 = s+1$ et $\eta_k = (mx)^k$ $(1 \leq k \leq r)$.
Les suites $(\xi_n^{(r)})$ et $(\eta_n^{(r,s)})$ sont liées par la relation suivante :

$$\eta_n = \xi_{n+1} + sm^{r+1}y\xi_{n-r}.$$

Soit $A_r(x,y)$ la matrice compagnon d'ordre $(r+1)$ associée à $\xi_n^{(r)}$ :

$$A_r(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & m^{r+1}y \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & mx \end{pmatrix},$$

et sa puissance n$^{ième}$ est donnée par :

$$A_r^n(x,y) = \begin{pmatrix} m^{r+1}y\xi_{n-r}^{(r)} & y\xi_{n-r+1}^{(r)} & \cdots & m^{r+1}y\xi_{n-1}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_n^{(r)} \\ m^{r+1}y\xi_{n-r-1}^{(r)} & y\xi_{n-r}^{(r)} & \cdots & m^{r+1}y\xi_{n-2}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ m^{r+1}y\xi_{n-2r+1}^{(r)} & y\xi_{n-2r+2}^{(r)} & \cdots & m^{r+1}y\xi_{n-r}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-r+1}^{(r)} \\ \xi_{n-r+1}^{(r)} & \xi_{n-r+2}^{(r)} & \cdots & \xi_n^{(r)} & \xi_{n+1}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Maintenant, nous allons utiliser une approche matricielle (appliquée par Kilic dans [32, 33]), pour calculer la somme $S_n^{(r)}(m)$ des termes de la suite $\xi_n^{(r)}$.

$$S_n^{(r)}(m) = \sum_{j=1}^{n} \xi_j^{(r)}.$$

Nous étendons la représentation matricielle de $(\xi_n^{(r)})$ et nous définissons la matrice génératrice de la somme de termes de la suite $(\xi_n^{(r)})$ comme suit : soient $T_r(x,y)$ et $R_n(x,y)$

des matrices carrées d'ordre $(r+2)$ définies respectivement par :

$$T_r(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & mx & 0 & \cdots & 0 & m^{r+1}y \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$R_n(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ S_n & \xi_{n+1}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-r+1}^{(r)} & \cdots & m^{r+1}y\xi_{n-1}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n}^{(r)} \\ S_{n-1} & \xi_{n}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-r}^{(r)} & \cdots & m^{r+1}y\xi_{n-2}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-1}^{(r)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ S_{n-r+1} & \xi_{n-r+2}^{(r)} & \ddots & \cdots & m^{r+1}y\xi_{n-r}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-r+1}^{(r)} \\ S_{n-r} & m^{r+1}y\xi_{n-r+1}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-2r+1}^{(r)} & \cdots & \xi_{n-r-1}^{(r)} & m^{r+1}y\xi_{n-r}^{(r)} \end{pmatrix}.$$

Nous définissons aussi la matrice $(r+2)\times(r+2)$

$$G_n(x,y) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{1}{1-mx-m^{r+1}y} & \alpha_1^r & \alpha_2^r & \cdots & \alpha_r^r & \alpha_{r+1}^r \\ \frac{1}{1-mx-m^{r+1}y} & \alpha_1^{r-1} & \alpha_2^{r-1} & \cdots & \alpha_r^{r-1} & \alpha_{r+1}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{1-mx-m^{r+1}y} & \alpha_1 & \ddots & \vdots & \alpha_r & \alpha_{r+1} \\ \frac{1}{1-mx-m^{r+1}y} & 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix}. \tag{2.26}$$

Supposons que le discriminant du polynôme caractéristique correspondant à la matrice $A_r(x,y)$ est différent de zéro, alors les valeurs propres de $T_r(x,y)$, $1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1}$ sont toutes distinctes.

**Théorème 2.9.** *Soit $S_n^{(r)}(m)$ la somme de termes de la suite $(\xi_k^{(r)})$ de $1$ jusqu'à $n$, et $P(t) = t^{r+1} - mxt^r - m^{r+1}y$ le polynôme caractéristique correspondant avec $P(1) \neq 0$. Alors*

$$S_n^{(r)}(m) = \frac{1}{1-mx-m^{r+1}y}\left(1 - \xi_{n+1}^{(r)} - m^{r+1}y\sum_{j=1}^{r}\xi_{n-r+j}^{(r)}\right). \tag{2.27}$$

*Démonstration.* On a :

$$T_r(x,y) \times G_r(x,y) = G_r(x,y) \times M, \tag{2.28}$$

où $M{=}Diag(1, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{r+1})$.

En utilisant la définition du déterminant de Vandermonde, on a :

$$det(G_r(x,y)) = \prod_{j\neq k}(\alpha_j - \alpha_k) \neq 0$$

i.e $(G_r(x,y))$ est inversible, alors l'identitè (2.28) s'écrit comme suit :

$$G_r^{-1}(x,y) \times T_r(x,y) \times G_r(x,y) = M,$$

ce qui donne :

$$G_r^{-1}(x,y) \times T_r^n(x,y) \times G_r(x,y) = M^n \quad \text{ou encore} \quad T_r^n(x,y) \times G_r(x,y) = G_r(x,y) \times M^n$$

comme $T_r^n(x,y) = R_n(x,y)$ alors, en identifiant les termes de même entrée, l'identité (2.27) est établie. □

**Corollaire 2.2.** *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la somme des termes de la suite r-Fibonacci généralisée $(U_n^{(r)}(x,y))_n$ est donnée par la formule suivante :*

$$S_n^{(r)}(1) = \frac{1}{1-x-y}(1 - U_{n+1}^{(r)} - y\sum_{j=1}^{r} U_{n-r+j}^{(r)}).$$

**Corollaire 2.3.** *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la somme alternée des termes de la suite r-Fibonacci généralisée $(U_n^{(r)}(x,y))_n$ est donnée par l'expression suivante :*

$$S_n^{(r)}(-1) = \frac{1}{1+x+(-1)^r y}(1 - (-1)^n U_{n+1}^{(r)} + (-1)^r y\sum_{j=1}^{r}(-1)^{n-r+j-1} U_{n-r+j}^{(r)}).$$

**Exemples 2.1.**

1. *Pour $r = 1$ et $(x,y) = (1,1)$, on obtient la somme et la somme alternée des termes de la suite de Fibonacci. $(F_n)_{n\geq 0}$.*

$$\sum_{j=1}^{n} F_j = F_{n+2} - 1$$

*et*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}F_j = 1 - (-1)^n F_{n-1}.$$

2. *Pour $r = 1$ et $(x,y) = (2,1)$, la suite $(U_n^{(r)})$ est réduite à la suite de Pell $(P_n)_{n\geq 0}$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} P_j = \frac{1}{2}(P_{n+1} + P_n - 1)$$

*et*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^{j-1}P_j = \frac{1}{2}(1 + (-1)^{n-1}(P_{n+1} - P_n)).$$

3. *Pour $r = 2$ et $(x,y) = (1,1)$, on obtient la suite 2-Fibonacci $(T_n)_{n\geq 0}$ satisfaisant la*

*récurrence* $T_{n+1} = T_n + T_{n-2}$ *avec* $T_0 = 0, T_1 = T_2 = 1$, *alors*

$$\sum_{j=1}^{n} T_j = (T_{n+3} - 1) \quad et \quad \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j-1} T_j = \frac{1}{3}(1 - (-1)^n (T_{n+1} + T_{n-3})).$$

Maintenant, nous établirons pour tout entier naturel non nul $s$, l'expression de la somme des termes des suites compagnons $(\eta_n^{(r,s)})$ de $(\xi_n^{(r)})$ définie par

$$S_n^{(r,s)}(m) = \sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(r,s)} = \sum_{j=1}^{n} m^j V_j^{(r,s)}.$$

**Théorème 2.10.** *Soient* $S_n^{(r,s)}(m)$ *la somme des termes de* $(\eta_k^{(r,s)})$ *de* 1 *jusqu'à* $n$ *et* $P(t) = t^{r+1} - mxt^r - m^{r+1}y$ *le polynôme caractéristique correspondant tel que* $P(1) \neq 0$. *Alors*

$$S_n^{(r,s)}(m) = \frac{1}{1 - mx - m^{r+1}y}(1 + sm^{r+1}y - \eta_{n+1}^{(r,s)} - m^{r+1}y \textstyle\sum_{j=1}^{r} \eta_{n-r+j}^{(r,s)}) - 1. \tag{2.29}$$

*Démonstration.* Selon la relation (2.5) on a :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=r}^{n} \eta_j^{(r,s)} &= \textstyle\sum_{j=r}^{n} (\xi_{j+1}^{(r)} + sm^{r+1}y\xi_{j-r}^{(r)}) \\
&= \textstyle\sum_{j=r+1}^{n+1} \xi_j^{(r)} + sm^{r+1}y \textstyle\sum_{j=1}^{n-r} \xi_j^{(r)} \\
&= S_{n+1}^{(r)}(m) - \textstyle\sum_{j=1}^{r} \xi_j^{(r)} + sm^{r+1}y S_{n-r}^{(r)}(m),
\end{aligned}$$

or

$$\textstyle\sum_{j=1}^{r} \xi_j^{(r)} = \sum_{j=1}^{r} (mx)^{j-1} = \sum_{j=0}^{r-1} (mx)^j = 1 + \sum_{j=1}^{r-1} \eta_j^{(r,s)},$$

alors en utilisant la relation (2.27), on trouve :

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(r,s)} + 1 &= \frac{1}{1 - mx - m^{r+1}y}(1 - \xi_{n+2}^{(r)} - m^{r+1}y \textstyle\sum_{j=1}^{r} \xi_{n-r+j+1}^{(r)}) \\
&+ sy \frac{1}{1 - mx - m^{r+1}y}(1 - \xi_{n-r+1}^{(r)} - m^{r+1}y \textstyle\sum_{j=1}^{r} \xi_{n-2r+j}^{(r)}) \\
&= \frac{1}{1 - mx - m^{r+1}y}(1 + sm^{r+1}y - \eta_{n+1}^{(r,s)} - m^{r+1}y \textstyle\sum_{j=1}^{r} \eta_{n-r+j}^{(r,s)}).
\end{aligned}$$

Finalement

$$\textstyle\sum_{j=1}^{n} \eta_j^{(r,s)} = \frac{1}{1 - mx - m^{r+1}y}(1 + sm^{r+1}y - \eta_{n+1}^{(r,s)} - m^{r+1}y \textstyle\sum_{j=1}^{r} \eta_{n-r+j}^{(r,s)}) - 1.$$

□

Le théorème précédent nous permet d'évaluer la somme et la somme alternative des termes des suites compagnons de la suite $r$-Fibonacci généralisée.

**Corollaire 2.4.** *Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{j=1}^{n} V_j^{(r,s)} = S_n^{(r,s)}(1) = \frac{1}{1-x-y}(1+sy-V_{n+1}^{(r,s)} - y\sum_{j=1}^{r} V_{n-r+j}^{(r,s)}) - 1.$$

**Corollaire 2.5.** *La somme alternée de la suite $(V_n^{(r,s)}(x,y))_n$ est donnée par :*

$$\sum_{j=1}^{n}(-1)^j V_j^{(r,s)} = \frac{1}{1+x+(-1)^r y}(1-(-1)^r sy + (-1)^n V_{n+1}^{(r,s)} + (-1)^r y \sum_{j=1}^{r}(-1)^{n-r+j} V_{n-r+j}^{(r,s)}) - 1.$$

**Exemples 2.2.**

1. *Pour $(r,s) = (1,1)$ et $(x,y) = (1,1)$, on obtient la suite de Lucas $(L_n)_{n\geq 0}$,*

$$\sum_{k=1}^{n} L_k = L_{n+2} - 3,$$

*et*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k L_k = 1 + (-1)^n L_{n-1}.$$

2. *Pour $(r,s) = (2,1)$ et $(x,y) = (1,1)$, on trouve la suite $(T_n^{(2,1)})_{n\geq 0}$ nommée la 2-Fibonacci-Lucas de type 1, alors*

$$\sum_{k=1}^{n} T_k^{(2,1)} = T_{n+3}^{(2,1)} - 3$$

*et*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k T_k^{(2,1)} = \frac{1}{3}((-1)^n(T_{n+1}^{(2,1)} + T_{n-3}^{(2,1)}) - 1.$$

3. *Pour $(r,s) = (2,2)$ et $(x,y) = (1,1)$, on obtient la suite $(T_n^{(2,2)})_{n\geq 0}$ appelée la 2-Fibonacci-Lucas de type 2, alors*

$$\sum_{k=1}^{n} T_k^{(2,2)} = T_{n+3}^{(2,2)} - 4$$

*et*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k T_k^{(2,2)} = \frac{1}{3}(-1 + (-1)^n(T_{n+1}^{(2,1)} + T_{n-3}^{(2,1)}) - 1.$$

# Chapitre 3

# Le $q$-analogue et le $(p, q)$-analogue de la suite de polynômes $r$-Fibonacci et de ses compagnons

## 3.1 Introduction

Le $q$-analogue d'une identité, un théorème ou une expression est une généralisation impliquant un nouveau paramètre $q \in \mathbb{R}$ qui se spécialise en l'identité originale en faisant tendre $q$ vers 1.
La $q$-théorie classique commence par la définition des entiers naturels, l'égalité

$$\lim_{q \to 1} \frac{1 - q^n}{1 - q} = n$$

suggère que l'on peut définir le $q$-analogue de l'entier $n$ comme étant

$$[n]_q := 1 + q + \cdots + q^{n-1},$$

satisfaisant

$$[n]_q = [k]_q + q^k [n-k]_q = q^{n-k} [k]_q + [n-k]_q.$$

En utilisant la définition du $q$-analogue d'un entier, on définit le $q$-analogue de la factorielle connue sous le nom $q$-factorielle, par

$$[n]_q! := [1]_q [2]_q \cdots [n]_q.$$

A partir de la $q$-factorielle, on définit le $q$-analogue des coefficients binomiaux dit $q$-binomiaux ou coefficients binomiaux de Gauss,

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k}\begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q = q^k\begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q.$$

Dans la première section de ce chapitre, nous présenterons les différentes approches définissant le $q$-analogue des suites polynômiales de Fibonacci et de Lucas, suggérés par Carlitz et Cigler [18, 15], suivie par l'approche unificatrice donnée par Cigler [19]. Nous passerons ensuite dans la deuxième section au $q$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée, l'approche proposée par Belbachir et Benmezai [12].

## 3.2 Les approches de Carlitz et de Cigler pour le $q$-analogue de la suite de Fibonacci et de Lucas

1. En 1975, Carlitz [15] a proposé comme $q$-analogue de la suite de polynômes bivariés de Fibonacci, les polynômes définis pour tout $n \geq 0$, par :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} q^{k^2} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k} y^k, \tag{3.1}$$

avec $\mathbf{F}_0^{(r)}(x,y) = 0$.
La suite de polynômes $(\mathbf{F}_n(x,y))_{n\geq 0}$ satisfait les relations de récurrence suivantes :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y) = x\mathbf{F}_n(x,y) + q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}(x,y) \tag{3.2}$$

et

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y) = x\mathbf{F}_n(x,qy) + qy\mathbf{F}_{n-1}(x,q^2y). \tag{3.3}$$

Cigler a associé à la définition de Carlitz un $q$-analogue des polynômes bivariés de Lucas, en utilisant un analogue intéressant de la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice associée à la suite de Fibonacci $C(x,y) := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ x & y \end{pmatrix}$, il montre que

$$C(x,q^{n-1}y)C(x,q^{n-2}y)\cdots C(x,y) = \begin{pmatrix} y\mathbf{F}_{n-1}(x,qy) & \mathbf{F}_n(x,y) \\ y\mathbf{F}_n(x,qy) & \mathbf{F}_{n+1}(x,y) \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

ce qui produit par la suite le résultat suivant :

$$\mathbf{L}_n(x,y) = tr(C(x,q^{n-1}y)C(x,q^{n-2}y)\cdots C(x,y)) = y\mathbf{F}_{n-1}(x,qy) + \mathbf{F}_{n+1}(x,y). \quad (3.5)$$

L'identité (3.5) entraine que pour $n \geq 1$, on a

$$\mathbf{L}_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{k^2-k} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k. \quad (3.6)$$

2. Le $q$-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas proposé par Cigler [18] sont définis par :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k, \text{ avec } \mathbf{F}_0^{(r)}(x,y) = 0, \quad (3.7)$$

$$\mathbf{L}_n(x,y) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k, \text{ avec } \mathbf{L}_0^{(r)}(x,y) = 2. \quad (3.8)$$

La suite de polynômes $(\mathbf{F}_n(x,y))_{n\geq 1}$ satisfait les deux relations de récurrence suivantes :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y) = x\mathbf{F}_n(x,y) + q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}(x,y/q) \quad (3.9)$$

et

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y) = x\mathbf{F}_n(x,qy) + qy\mathbf{F}_{n-1}(x,qy). \quad (3.10)$$

3. Les propositions de Carlitz et de Cigler pour le $q$-analogue des polynômes de Fibonacci et les polynômes de Lucas sont des approches distinctes, chacune d'elles possède des propriétés intéressantes, Cigler suggère une définition commune qui relie ces deux approches en impliquant un nouveau paramètre $m$. Il propose dans [19] les définitions suivantes :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k, \text{ avec } \mathbf{F}_0^{(r)}(x,y) = 0 \quad (3.11)$$

et

$$\mathbf{L}_n(x,y,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(1+m)\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k, \text{ avec } \mathbf{L}_0^{(r)}(x,y) = 2. \quad (3.12)$$

Notons que pour $m = 1$ (respectivement pour $m = 0$), les polynômes $\mathbf{F}_{n+1}(x,y,1)$ et

$\mathbf{L}_n(x,y,1)$ (respectivement les polynômes $\mathbf{F}_{n+1}(x,y,0)$ et $\mathbf{L}_n(x,y,0)$) correspondent à l'approche de Carlitz [15] (respectivement à l'approche de Cigler [18]).
Les relations de récurrence (3.2), (3.3) (respectivement (3.9), (3.10)) se généralisent pour l'approche unificatrice de Cigler comme suit :

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) = x\mathbf{F}_n(x,y,m) + q^{n-1}y\mathbf{F}_{n-1}(x,yq^{m-1},m) \tag{3.13}$$

et

$$\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) = x\mathbf{F}_n(x,qy,m) + qy\mathbf{F}_{n-1}(x,q^{m+1}y,m). \tag{3.14}$$

**Remarque 3.1.** *On voit que le $q$-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci satisfait des relations de type* (3.2) *et* (3.3) *pour l'approche de Carlitz et des relations de type* (3.9), (3.10) *pour l'approche de Cigler. Cependant que le $q$-analogue des polynômes bivariés de Lucas ne satisfait aucune relation de récurrence de types précédents. La relation de récurrence la plus courte pour les $\mathbf{L}_n(x,y)$ est une récurrence d'ordre* 4*, malgré que la relation de récurrence initiale est d'ordre* 2 *($q \to 1$).*

### 3.2.1 Approche alternative aux approches de Carlitz et Cigler pour le $q$-analogue de la suite polynomiale de Lucas

En tenant compte de la Remarque (3.1), Belbachir et Benmezai dans [13] définissent le $q$-analogue de la suite de Lucas de première espèce respectivement de seconde espèce comme suit

$$\mathbf{L}_n(x,y,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(1+m)\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k \tag{3.15}$$

et

$$\mathbb{L}_n(x,y,m) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(1+m)\binom{k}{2}} \frac{[n]_q}{[n-k]_q} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q x^{n-2k}y^k, \tag{3.16}$$

avec $\mathbf{L}_0^{(r)}(x,y) = \mathbb{L}_0(x,y) = 2$. Ces polynômes sont liés aux $q$-analogue des polynômes bivariés de Fibonacci par les relations suivantes :

$$\mathbf{L}_n(x,y,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(x,y/q,m) - \mathbf{F}_n(x,y,m) \tag{3.17}$$

et

$$\mathbb{L}_n(x,y,m) = 2\mathbf{F}_{n+1}(x,y,m) - \mathbf{F}_n(x,y,m). \tag{3.18}$$

## 3.3 Le $q$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée

Dans [12], on trouve la définition suivante du $q$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée, qui est une généralisation de l'approche unificatrice proposée par Cigler [19].

**Définition 3.1.** *On définit le $q$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée par la formule explicite :*

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q z^k, \tag{3.19}$$

*avec* $\mathbf{U}_0^{(r)}(z,m) = 0$.

**Cas Particuliers :**

1. Pour $r = 1$ et $m = 1$, on retrouve le $q$-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Carlitz.
2. Pour $r = 1$ et $m = 0$, on obtient le $q$-analogue des polynômes de Fibonacci proposé par Cigler.
3. Pour $r = 1$, on trouve l'approche unificatrice du $q$-analogue des polynômes de Fibonacci suggérée par Cigler.

**Théorème 3.1.** *[12] Les polynômes $\mathbf{U}_n^{(r)}(z,m)$ satisfont les relations suivantes :*

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) = \mathbf{U}_n^{(r)}(qz,m) + qz\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m+1},m), \tag{3.20}$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) = \mathbf{U}_n^{(r)}(z,m) + q^{n-r}z\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m-r},m), \tag{3.21}$$

*avec* $\mathbf{U}_0^{(r)}(z,m) = 0, \mathbf{U}_1^{(r)}(z,m) = \cdots = \mathbf{U}_r^{(r)}(z,m) = 1$.

*Démonstration.* Pour la démonstration des identités (3.20) et (3.21), il suffit d'utiliser les propriétés des coefficients binomiaux ordinaires et $q$-binomiaux.

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \left( \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{(n-rk-k)} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \right) z^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k \end{bmatrix}_q z^k + q^{(n-rk-k)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q z^k \\
&= \mathbf{U}_n^{(r)}(z,m) + q^{n-(r+1)(k+1)} \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+2}{2}+m\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-r(k+1)-1 \\ k \end{bmatrix}_q z^{k+1} \\
&= \mathbf{U}_n^{(r)}(z,m) + q^{n-r}z \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-r-1-k \\ k \end{bmatrix}_q (q^{m-r}z)^k \\
&= \mathbf{U}_n^{(r)}(z,m) + q^{n-r}z\mathbf{U}_n^{(r)}(q^{m-r}z,m).
\end{aligned}$$

□

### 3.3.1 La série génératrice du $q$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée

**Théorème 3.2.** *La série génératrice ordinaire de la suite de polynômes* $(\mathbf{U}_n^{(r)}(z,m))_n$ *est donnée par :*

$$\sum_{n\geq 0}\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,m)z^n = \sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}y^k z^{(r+1)k}}{(1-xz)(1-qxz)\cdots(1-q^k xz)}. \tag{3.22}$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n\geq 0}\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,m)z^n &= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-rk \\ k\end{bmatrix}_q x^{n-(r+1)k}y^k\right)z^k \\
&= \sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n+k \\ k\end{bmatrix}_q x^{n}y^k\right)z^{n+(r+1)k} \\
&= \sum_{k\geq 0} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} y^k z^{(r+1)k}\sum_{n\geq 0}\begin{bmatrix} n+k \\ k\end{bmatrix}_q (xz)^n \\
&= \sum_{k\geq 0}\frac{q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}y^k z^{(r+1)k}}{(1-xz)(1-qxz)\cdots(1-q^k xz)}.
\end{aligned}$$

D'où la démonstration de l'identité (3.22) s'acheve, en utilisant le résultat suivant :

$$\sum_{n\geq 0}\begin{bmatrix} n+k \\ k\end{bmatrix}_q z^n = \frac{1}{(1-z)(1-qz)\cdots(1-q^k z)}.$$

□

## 3.4 Le $q$-analogue de la suite $(V_n^{(r,s)})$

Dans cette section, nous proposons un $q$-analogue des polynômes $r$-Lucas de type $s$, en s'inspirant de l'expression explicite de $(V_n^{(r,s)})_{n\geq 0}$ donnée par la relation (2.5).

**Définition 3.2.** *Soient $r, s$ deux entiers positifs tels que $1 \leq s \leq r$, nous appelons $q$-analogue des polynômes $r$-Lucas de type $s$ de première espèce respectivement de seconde espèce, les polynômes définis, pour tout entier naturel $n \geq 0$ comme suit :*

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{(m+1)\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-rk \\ k\end{bmatrix}_q (1+s\frac{[k]_q}{[n-rk]_q})z^k, \tag{3.23}$$

*respectivement*

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(z,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix} n-rk \\ k\end{bmatrix}_q (1+sq^{(n-(r+1)k)}\frac{[k]_q}{[n-rk]_q})z^k, \tag{3.24}$$

*avec* $\mathbf{V}_0^{(r,s)}(z,m) = \mathbb{V}_0^{(r,s)}(z,m) = s+1.$

**Cas particuliers :**

1. Pour $s = r = 1$, on obtient le polynôme $q$-Lucas de première et de seconde espèce définis dans [13].
2. Pour $s = 1$, on obtient le $q$-analogue des polynômes $r$-Lucas de première espèce et le $q$-analogue des polynômes $r$-Lucas de seconde espèce définis dans [12].

En utilisant la définition, nous établirons des identités exprimant le $q$-analogue des polynômes $r$-Lucas de type $s$ en fonction du $q$-analogue des polynômes $r$-Fibonacci.

**Théorème 3.3.** *Pour tous entiers positifs $r$ et $s$, les polynômes $\mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m)$ et $\mathbb{V}_n^{(r,s)}(z,m)$ vérifient les récurrences suivantes :*

1. *Expression de $V_n^{(r,s)}$ en fonction de $\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}$ et $\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}$,*

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) = \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z/q,m) + sz\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^m,m), \tag{3.25}$$

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(z,m) = \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) + sq^{n-r}z\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m-r},m), \tag{3.26}$$

2. *Expression de $V_n^{(r,s)}$ en fonction de $\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}$ et $\mathbf{U}_n^{(r)}$,*

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) = (1+s)\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z/q,m) - s\mathbf{U}_n^{(r)}(z,m), \tag{3.27}$$

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(z,m) = (1+s)\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) - s\mathbf{U}_n^{(r)}(z,m), \tag{3.28}$$

3. *Expression de $V_n^{(r,s)}$ en fonction de $\mathbf{U}_n^{(r)}$ et $\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}$,*

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) = \mathbf{U}_n(z,m) + (1+s)z\mathbf{U}_{n-r}(zq^m,m), \tag{3.29}$$

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(z,m) = \mathbf{U}_n^{(r)}(z,m) + (1+s)q^{n-r}z\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m-r},m). \tag{3.30}$$

*Démonstration.* Montrons les deux premières identités, le raisonnement pour les autres identités est le même.

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}(m+1)} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q z^k \\
&+ s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k}{2}(m+1)} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_q \frac{[k]_q}{[n-rk]_q} z^k \\
&= \mathbf{U}(z/q,m) + sz\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k+1}{2}} \begin{bmatrix} n-rk-(r+1) \\ k \end{bmatrix}_q z^k \\
&= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z/q,m) + sz\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^m,m),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_n^{(r,s)}(z,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix} z^k \\
&+ s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix} q^{(n-(r+1)k)} \frac{[k]_q}{[n-rk]_q} z^k \\
&= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) + s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}+n-(r+1)k} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q z^k \\
&= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) \\
&+ sz\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k+1}{2}+n-(r+1)(k+1)} \begin{bmatrix} n-r(k+1)-1 \\ k \end{bmatrix}_q z^k \\
&= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) \\
&+ szq^{n-r}\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-r(k+1)-1 \\ k \end{bmatrix}_q (q^{m-r}z)^k \\
&= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) + szq^{n-r}\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m-r},m).
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 3.1.** *Soient $r,s$ des entiers positifs avec $1 \le s \le r$, les polynômes $\mathbf{V}_n^{(r,s)}$ et $\mathbb{V}_n^{(r,s)}$ satisfont les relations de récurrence suivantes :*

$$\mathbf{V}_{n+1}^{(r,s)}(z,m) = \mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) + q^{n-r}z\mathbf{V}_{n-r}^{(r,s)}(zq^{m-r},m), \tag{3.31}$$

$$\mathbb{V}_{n+1}^{(r,s)}(z,m) = \mathbb{V}_n^{(r,s)}(qz,m) + qz\mathbb{V}_{n-r}^{(r,s)}(zq^{m+1},m), \tag{3.32}$$

*avec* $\mathbf{V}_0^{(r,s)} = \mathbb{V}_0^{(r,s)} = s+1$.

*Démonstration.* En utilisant les récurrences (3.21) et (3.27), nous obtenons facilement l'identité (6.2) .

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_{n+1}^{(r,s)}(z,m) &= (1+s)\mathbf{U}_{n+2}^{(r)}(z/q,m) - s\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z,m) \\
&= (1+s)(\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(z/q,m) + q^{n+1-r}(z/q)\mathbf{U}_{n+1-r}^{(r)}(q^{m-r}(z/q),m)) \\
&- s(\mathbf{U}_n^{(r)}(z,m) + q^{n-r}z\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m-r},m)) \\
&+ q^{n-r}z\left[((1+s)\mathbf{U}_{n+1-r}^{(r)}(zq^{m-r-1},m) - s\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(zq^{m-r},m))\right] \\
&= \mathbf{V}_n^{(r,s)}(z,m) + q^{n-r}z\mathbf{V}_{n-r}^{(r,s)}(zq^{m-r},m).
\end{aligned}$$

□

## 3.5 Le $(p,q)$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée et ses suites compagnons $(V_n^{(r,s)})$

La théorie de $(p,q)$- analogue a été étudiée par de nombreux mathématiciens. Corcino [20] a étudié le $(p,q)$-extension des coefficients binomiaux et en a déduit des propriétés similaires à celles des coefficients ordinaires. Dans [6], les auteurs donnent une interprétation des coefficients bi$^s$nominaux et de leur $(p,q)$-analogue en utilisant un nouveau type de fonction symétrique. Ahmia et Belbachir [5] montrent que la log-convexité est préservée sous la transformation $(p,q)$-binomiale.
Considérons les notations suivantes :
Soient $p,q \in \mathbb{R}$, les $(p,q)$-nombres sont définis par :

$$[n]_{p,q} := p^{n-1} + p^{n-2}q + p^{n-2}q^2 + \cdots + pq^{n-2} + q^{n-1} = \frac{p^n - q^n}{p-q},$$

$$[n]_{p,q}! := [1]_{p,q}[2]_{p,q}\cdots[n]_{p,q},$$

on a :

$$[n]_{p,q} = p^{n-k}[k]_{p,q} + q^k[n-k]_{p,q},$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = \frac{[n]_{p,q}!}{[k]_{p,q}![n-k]_{p,q}!}$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = p^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}, \tag{3.33}$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{p,q} = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} + p^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q}. \tag{3.34}$$

### 3.5.1 Le $(p,q)$-analogue de la suite $r$-Fibonacci

Inspiré de la définition du $(p,q)$-binomiale donnée dans [20], nous donnerons la définition suivante pour le $(p,q)$-analogue du polynôme bivarié $r$-Fibonacci $\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q,m)$.

**Définition 3.3.** *Pour tout entier $n \geq 0$, le $(p,q)$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée est défini comme suit :*

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k} y^k, \tag{3.35}$$

*avec $\mathbf{U}_0^{(r)} = 0$ et $\mathbf{U}_j^{(r)} = p^{\binom{j+1}{2}} x^{j-1}$ for $1 \leq j \leq r$.*

**Remarque 3.2.** *Faisant tendre $p$ vers 1, nous retrouvons quelques cas particuliers du $(p,q)$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée en tant que le $q$-analogue proposé dans [12] et le $q$-analogue introduit par Cigler en posant $r = 1$ et $m = 0$ (voir[18]).*

**Théorème 3.4.** *Le $(p,q)$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée satisfait les récurrences suivantes :*

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q,m)=px\mathbf{U}_{n}^{(r)}(px,qy,p,q,m)+qy\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(px,q^{m+1}y,p,q,m), \tag{3.36}$$

$$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q,m)=px\mathbf{U}_{n}^{(r)}(px,py,p,q,m)+qy\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(qx,q^{m+1}y,p,q,m). \tag{3.37}$$

*Démonstration.* La démonstration de la première identité se fait en utilisant (3.33).
$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q,m)$

$$=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\left(q^{k}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}+p^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}\right)x^{n-(r+1)k}y^{k}$$

$$=px\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}(px)^{n-(r+1)k-1}(qy)^{k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}p^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}x^{n-(r+1)k}y^{k}$$

$$=px\mathbf{U}_{n}^{(r)}(px,qy,p,q,m)$$

$$+\sum_{k=1}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}}q^{\binom{k+2}{2}+m\binom{k+1}{2}}p^{n-(r+1)(k+1)}\begin{bmatrix}n-r(k+1)-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}x^{n-(r+1)(k+1)}y^{k+1}$$

$$=px\mathbf{U}_{n}^{(r)}(px,qy,p,q,m)$$

$$+qy\sum_{k=1}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-r-1-rk\\k\end{bmatrix}_{p,q}(px)^{n-r-1-(r+1)k}(q^{m+1}y)^{k}$$

$$=px\mathbf{U}_{n}^{(r)}(px,qy,p,q,m)+qy\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(px,q^{m+1}y,p,q,m).$$

Maintenant, en utilisant (3.34), nous montrons la deuxième identité.

$\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x,y,p,q,m)$

$$=\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\left(p^{k}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}+q^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}\right)x^{n-(r+1)k}y^{k}$$

$$=px\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k\end{bmatrix}_{p,q}(px)^{n-(r+1)k-1}(py)^{k}$$

$$+\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}}q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}}q^{n-(r+1)k}\begin{bmatrix}n-rk-1\\k-1\end{bmatrix}_{p,q}x^{n-(r+1)k}y^{k},$$

$$=px\mathbf{U}_n^{(r)}(px,py,p,q,m)$$

$$+\sum_{k=1}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}} q^{\binom{k+2}{2}+m\binom{k+1}{2}} q^{n-(r+1)(k+1)} \begin{bmatrix} n-r(k+1)-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)(k+1)} y^{k+1}$$

$$=px\mathbf{U}_n^{(r)}(px,py,p,q,m)$$

$$+qy\sum_{k=1}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} (qx)^{n-r-1-(r+1)k} (q^{m+1}y)^k$$

$$=px\mathbf{U}_n^{(r)}(px,py,p,q,m)+qy\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(qx,q^{m+1}y,p,q,m).$$

□

### 3.5.2 Le $(p,q)$-analogue de la suite $r$-Lucas de type $s$

**Définition 3.4.** *Soient $r$ et $s$ deux entiers tels que $1 \leq s \leq r$. Pour tout entier $n \geq 0$, on définit le $(p,q)$-analogue des polynômes $r$-Lucas de type $s$ de première espèce respectivement de seconde espèce, par :*

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{(m+1)\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} \left(1+sp^{n-(r+1)k}\frac{[k]_{p,q}}{[n-rk]_{p,q}}\right) x^{n-(r+1)k} y^k$$

*et*

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) := \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} p^{-k} \left(1+sq^{(n-(r+1)k)}\frac{[k]_{p,q}}{[n-rk]_{p,q}}\right) x^{n-(r+1)k} y^k,$$

*avec $\mathbf{V}_0^{(r,s)}(z,m) = \mathbb{V}_0^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = s+1$.*

**Remarque 3.3.** *Pour $p=1$, nous obtenons le $q$-analogue des polynômes $r$-Lucas de type $s$, (voir [1]).*

Dans le théorème suivant, nous allons présenter les différentes identités exprimant le $(p,q)$-analogue des polynômes $r$-lucas de type $s$ en fonction du $(p,q)$-analogue des polynômes $r$-Fibonacci.

**Théorème 3.5.** *Pour tous entiers $r$ et $s$, les polynômes $\mathbf{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m)$ et $\mathbb{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m)$ satisfont les récurrences suivantes :*

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/q,p,q,m)+sy\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(x,yq^m,p,q,m),$$

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/p,p,q,m)+s(\frac{q}{p})^{n-r}y\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(x,yp^rq^{m-r},p,q,m).$$

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = (s+1)\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/q,p,q,m) - sx\mathbf{U}_n^{(r)}(x,y,p,q,m),$$

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = (s+1)\mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/p,p,q,m) - sx\mathbf{U}_n^{(r)}(x,y,p,q,m).$$

$$\mathbf{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = x\mathbf{U}_n(x,y,p,q,m) + (1+s)y\mathbf{U}_{n-r}(x,yq^m,p,q,m),$$

$$\mathbb{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = x\mathbf{U}_n^{(r)}(x,y,p,q,m) + (1+s)(q/p)^{n-r}y\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(x,yp^rq^{m-r},m).$$

*Démonstration.*

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k}{2}(m+1)} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k}y^k \\
&+ s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}+(n-(r+1)k)} q^{\binom{k}{2}(m+1)} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} (x/p)^{n-(r+1)k}(y/q)^k \\
&+ s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)(k+1)}{2}} q^{\binom{k+1}{2}(m+1)} \begin{bmatrix} n-r(k+1)-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-(r+1)(k+1)}y^{k+1} \\
&= \mathbf{U}(x/p,y/q,p,q,m) \\
&+ sy\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-r-1-rk}(q^my)^k \\
&= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p,y/q,p,q,m) + sy\mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(x,q^my,p,q,m).
\end{aligned}$$

Montrons la deuxième relation :

$$\begin{aligned}
\mathbb{V}_n^{(r,s)}(x,y,p,q,m) &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} p^{-k} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix} x^{n-(r+1)k}y^k \\
&+ s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} p^{-k} q^{(n-(r+1)k)} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{n-(r+)k}y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n+1-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-rk \\ k \end{bmatrix} (x/p)^{n-(r+1)k}(y/p)^k \\
&+ s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} p^{\binom{n-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} p^{-k} q^{(n-(r+1)k)} \begin{bmatrix} n-rk-1 \\ k-1 \end{bmatrix} x^{n-(r+1)k}y^k,
\end{aligned}$$

$$= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p, y/p, p, q, m)$$

$$+ sy \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} q^{(m-r)k+n-r} p^{-n+r(k+1)} \begin{bmatrix} n-r(k+1)-1 \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-r-1-(r+1)k} y^k$$

$$= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p, y/p, p, q, m)$$

$$+ sy(q/p)^{n-r} \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} p^{\binom{n-r-(r+1)k}{2}} q^{\binom{k+1}{2}+m\binom{k}{2}} \begin{bmatrix} n-r-1-rk \\ k \end{bmatrix}_{p,q} x^{n-r-1-(r+1)k} (p^r q^{m-r} y)^k$$

$$= \mathbf{U}_{n+1}^{(r)}(x/p, y/p, p, q, m) + sy(q/p)^{n-r} \mathbf{U}_{n-r}^{(r)}(x, yp^r q^{m-r}, p, q, m).$$

□

Dans le corollaire qui suit, en utilisant les identités précédentes, nous montrons que le $(p,q)$- analogue des polynômes $r$-Lucas de type $s$ du premier et du second espèce vérifie les mêmes relations de récurrence que le $(p,q)$-analogue du polynôme bivarié $r$-Fibonacci donnés par les relations (3.36) et (3.37).

**Corollaire 3.2.** *Le $(p,q)$-analogue des polynômes de $r$-Lucas de type $s$ du premère espèce respectivement de seconde espèce, satisfont les récurrences suivantes :*

$$\mathbf{V}_{n+1}^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = px\mathbf{V}_n^{(r,s)}(px,qy,p,q,m) + qy\mathbf{V}_{n-r}^{(r,s)}(px,q^{m+1}y,p,q,m)$$

*et*

$$\mathbb{V}_{n+1}^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = px\mathbb{V}_n^{(r,s)}(px,py,p,q,m) + qy\mathbb{V}_{n-r}^{(r,s)}(qx,q^{m+1}y,p,q,m),$$

*avec* $\mathbf{V}_0^{(r,s)}(z,m) = \mathbb{V}_0^{(r,s)}(x,y,p,q,m) = s+1.$

# Chapitre 4

# Les polynômes incomplets $r$-Lucas et hyper $r$-Lucas de type $s$

## 4.1 Introduction

Une application spécifique des formes explicites combinatoires bien connues pour les nombres de Fibonacci et de Lucas permet d'obtenir deux classes d'entiers appelés les nombres incomplets de Fibonacci $F_n(k)$ et les nombres incomplets de Lucas $L_n(k)$ gouvernés par les paramètres $n$ et $k$. Dans [29], l'auteur définit ces nombres comme suit :

$$F_n(k) := \sum_{j=0}^{k} \binom{n-j-1}{j}\ ,\ 0 \leq k \leq \lfloor n-1/2 \rfloor$$

et

$$L_n(k) := \sum_{j=0}^{k} \frac{n}{n-j} \binom{n-j}{j}\ ,\ 0 \leq k \leq \lfloor n/2 \rfloor.$$

Ces nombres ont une propriété assez remarquable qui passe par la matrice d'Euler Seidel, cet algorithme peut être appliqué aux nombres hyper-harmoniques, nombres de Fibonacci et de Lucas, ordinaires et incomplets. Par ailleurs, les auteurs dans [23] définissent les nombres hyper-Fibonacci et les nombres hyper-Lucas. En utilisant ces nouveaux concepts, certaines relations entre les nombres de Fibonacci et de Lucas ordinaires et incomplets ont été étudiées.

Dans le présent chapitre, nous allons traiter les polynômes $r$-Lucas incomplets, les polynômes hyper $r$-Fibonacci et hyper $r$-Lucas de type $s$ pour tout $s$ compris entre 1 et $r$. Après avoir défini ces suites, leurs fonctions génératrices sont déterminées, ainsi que l'interprétation combinatoire pour les hyper $r$-Fibonacci. Nous établirons ensuite une relation entre les polynômes hyper $r$-Lucas de type $s$ et les polynômes $r$-Lucas de type $s$ incomplets et ordinaires.

Dans ce chapitre les notations suivantes seront adoptées :

1. $U_n$ et $V_n$ représentent respectivement la suite $r$-Fibonacci généralisée et les polynômes bivariés $r$-Lucas de type $s$.
2. $U_n(k)$ et $V_n(k)$ sont les polynômes bivariés incomplets $r$-Fibonacci et de $r$-Lucas de type $s$ respectivement.
3. $U_n^{[m]}$ et $V_n^{[m]}$ sont les polynômes bivariés hyper $r$-Fibonacci et les hyper $r$-Lucas de type $s$ respectivement.

## 4.2 Les polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$

Tasci. D, Firengiz. M. C et Tuglu N. dans [48] proposent la définition des polynômes incomplets $r$-Fibonacci,

$$U_{n+1}(k) = \sum_{j=0}^{k} \binom{n-rj}{j} x^{n-(r+1)j} y^j \;,\; 0 \le k \le \lfloor n/(r+1) \rfloor. \tag{4.1}$$

Ces polynômes satisfont la relation de récurrence suivante :

$$U_{n+1}(k+1) = xU_n(k+1) + yU_{n-r}(k). \tag{4.2}$$

Ils définissent aussi le polynôme bivarié incomplet $r$-Lucas qui est le polynôme $r$-Lucas de type $r$ pour la famille suggérée dans cette thèse. Notre proposition dans cette section est de trouver une expression unificatrice des polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$, généralisant l'identité (1.2) donnée dans [48].

**Définition 4.1.** *Pour tous entiers naturels $r, s$ avec $1 \le s \le r$, les polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$ sont définis comme suit :*

$$V_n(k) = \sum_{j=0}^{k} \frac{n-(r-s)j}{n-rj} \binom{n-rj}{j} x^{n-(r+1)j} y^j, \; 0 \le k \le \lfloor n/(r+1) \rfloor. \tag{4.3}$$

1. Pour $k = \lfloor n/(r+1) \rfloor$, $V_n(k) = V_n$, on retrouve les polynômes de $r$-Lucas de type $s$.
2. Pour $x = y = 1$, $s = r = 1$, on obtient la suite incomplète de Lucas [29].
3. Pour $x = 2$, $y = 1$ et $s = r = 1$, on obtient la suite incomplète de Jacobsthal-Lucas [25].

Dans le théorème suivant, nous établirons une relation entre les polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$ et les polynômes incomplets $r$-Fibonacci

**Théorème 4.1.** *Soient $r, s$ deux entiers positifs, avec $1 \le s \le r$. Les polynômes incomplets $r$-Lucas polynomials de type $s$ satisfont la relation suivante*

$$V_n(k) = U_{n+1}(k) + syU_{n-r}(k-1). \tag{4.4}$$

*Démonstration.* En utilisant la relation (4.3), on a pour tout $0 \le k \le \lfloor n/(r+1) \rfloor$ :

$$\begin{aligned} V_n(k) &= \sum_{j=0}^{k} \binom{n-rj}{j} x^{n-(r+1)j} y^j + s \sum_{j=0}^{k} \binom{n-rj-1}{j-1} x^{n-(r+1)j} y^j \\ &= U_{n+1}(k) + syU_{n-r}(k-1). \end{aligned}$$

□

On a ainsi le théorème suivant :

**Théorème 4.2.** *Pour tous entiers $r, s$ et $0 \le k \le \lfloor n/(r+1) \rfloor$, les polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$ satisfont la récurrence suivante :*

$$V_n(k+1) = xV_{n-1}(k+1) + yV_{n-r-1}(k). \tag{4.5}$$

*Démonstration.* La démonstration se fait en utilisant l'identité (4.4) et la relation de récurrence de la suite incomplète de $r$-Fibonacci généralisée.

$$\begin{aligned} V_n(k+1) &= U_{n+1}(k+1) + syU_{n-r}(k) \\ &= xU_n(k+1) + yU_{n-r}(k) + sy(xU_{n-r-1}(k) + yU_{n-1-r-r}(k-1)) \\ &= x(U_n(k+1) + syU_{n-r-1}(k)) + y(U_{n-r}(k) + syU_{n-1-2r}(k-1)) \\ &= xV_{n-1}(k+1) + yV_{n-r-1}(k). \end{aligned}$$

□

Les relations (4.3) et (4.5) nous permettent d'établir une relation non homogène pour les polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$ donnée par le théorème suivant :

**Théorème 4.3.** *Pour tous entiers positifs $r, s$ $(1 \le s \le r)$. Les polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$ satisfont la relation non homogène suivante :*

$$V_n(k) = xV_{n-1}(k) + yV_{n-r-1}(k) - \frac{n-r-1-(r-s)k}{n-1-r(k+1)} \binom{n-1-r(k+1)}{k} x^{n-r-1-(r+1)k} y^{k+1} \tag{4.6}$$

*Démonstration.* On a :

$$\begin{aligned} V_n(k) &= xV_{n-1}(k) + yV_{n-r-1}(k-1) \\ &= xV_{n-1}(k) + y \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n-r-1-(r-s)j}{n-r-1-rj} \binom{n-r-1-rj}{j} x^{n-r-1-(r+1)j} y^j, \ 0 \le k \le \lfloor n/(r+1) \rfloor \\ &= xV_{n-1}(k) + yV_{n-r-1}(k) - \frac{n-r-1-(r-s)k}{n-1-r(k+1)} \binom{n-1-r(k+1)}{k} x^{n-r-1-(r+1)k} y^{k+1}, \end{aligned}$$

d'où le théorème. $\square$

### 4.2.1 La fonction génératrice des polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$

Le lemme ci-dessous nous permet d'introduire la fonction génératrice des polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$.

**Lemme 4.1.** *([44]) Soit $(s_n)_{n\geq 0}$ une suite de nombres complexes vérifiant la relation de récurrence non homogène suivante :*

$$s_n = xs_{n-1} + ys_{n-r-1} + \alpha_n \quad n > r,$$

*où $(\alpha_n)$ est une suite de nombres complexes. Alors la fonction génératrice $S_r^k(x, y; t)$ de la suite $(s_n)$ est*

$$S_r^k(x, y; t) = \frac{(s_0 - \alpha_0 + \sum_{i=1}^{r}(s_i - xs_{i-1} - \alpha_i)t^i + G(t))}{(1 - xt - yt^{r+1})}, \tag{4.7}$$

*avec $G$ est la fonction génératrice de $(\alpha_n)$.*

**Théorème 4.4.** *La fonction génératrice des polynômes incomplets $r$-Lucas de type $s$ est donnée par :*

$$\sum_{n\geqslant 0} V_n(k)t^n = \frac{t^{k(r+1)}}{(1 - xt - yt^{r+1})}\left[V_{k(r+1)} + \sum_{i=1}^{r}(V_{k(r+1)+i} - xV_{k(r+1)+i-1})t^i - \frac{y^{k+1}t^{r+1}[s(1 - xt) + 1]}{(1 - xt)^{k+1}}\right].$$

*Démonstration.* Grâce à la relation (4.3), nous obtenons les valeurs de $V_n(k)$,
pour $0 \leqslant n < k(r+1)$ on a : $V_n(k) = 0$ et pour $n \geqslant k(r+1)$ on a :
$s_0 = V_{k(r+1)}(k) = V_{k(r+1)}$, $s_1 = V_{k(r+1)+1}(k) = V_{k(r+1)+1}$ et $s_r = V_{k(r+1)+r}(k) = V_{k(r+1)+r}$.
De plus, la suite $(\alpha_n)$ est définie comme suit :

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \cdots = \alpha_r = 0$$

et

$$\alpha_n = \frac{n - r - 1 - (r - s)k}{n - 1 - r(k+1)}\binom{n - 1 - r(k+1)}{k}x^{n-(r+1)(k+1)}y^{k+1}.$$

Alors la fonction génératrice de la suite $(\alpha_n)$ (voir [47] page 355) est donnée par :

$$G(t) = \frac{y^{k+1}t^{r+1}[s(1 - xt) + 1]}{(1 - xt)^{k+1}}.$$

Donc d'aprés le Lemme 4.1, on trouve la fonction génératrice des polynômes $(V_n(k))$ pour $1 \leqslant s \leqslant r$. $\square$

## 4.3 Les polynômes bivariés hyper $r$-Fibonacci et hyper $r$-Lucas de type $s$

### 4.3.1 Les polynômes bivariés hyper $r$-Fibonacci

**Définition 4.2.** *[24] Soit $(a_n)_{n\geq 0}$ une suite d'éléments d'un anneau commutatif $\mathcal{A}$. On appelle matrice d'Euler Seidel associée à $(a_n)_{n\geq 0}$ la suite double $(a_n^{(k)})$ $(n \geq 0, k \geq 0)$ donnée par la récurrence suivante,*

$$\begin{cases} a_n^{(0)} = a_n, \quad (n \geq 0), \\ a_n^{(k)} = a_{n-1}^{(k)} + a_n^{(k-1)}, \quad (n \geq 1, k \geq 1). \end{cases} \tag{4.8}$$

La suite $(a_n^{(0)})$ première ligne de la matrice, est la suite initiale. La suite $(a_0^{(n)})$ première colonne de la matrice, est la suite finale. Il en résulte immédiatement de (4.8) l'identité

$$a_n^{(k)} = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i} a_{n+1}^{(0)}. \tag{4.9}$$

Les auteurs dans [7], ont généralisé l'algorithme d'Euler Seidel en définissant une matrice symétrique infinie associée à $(a_n)_{n\geq 0}$ par la relation de récurrence suivante

$$\begin{cases} a_n^{(0)} = a_n, \quad (n \geq 0), \\ a_n^{(k)} = xa_{n-1}^{(k)} + ya_n^{(k-1)}, \quad (n \geq 1, k \geq 1), \end{cases} \tag{4.10}$$

avec $x$ et $y$ deux nombres réels.
Notons que le terme $a_n^{(k)}$ désigne l'élément qui se trouve dans l'intersection du $k$-ème ligne et le $n$-ème colonne,

$$\begin{pmatrix} . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & . & . & . \\ . & . & . & & ya_n^{(k-1)} & . & . \\ . & . & . & & \downarrow & . & . \\ & & xa_{n-1}^{(k)} & \rightarrow & a_n^{(k)} & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \end{pmatrix}.$$

c'est facile de voir que l'identité (4.9) se généralise en :

$$a_n^k = x^n \sum_{i=1}^{k} y^{k-i} \binom{n+k-i-1}{n-1} a_0^i + y^k \sum_{s=1}^{n} x^{n-s} \binom{n+k-s-1}{k-1} a_s^0. \tag{4.11}$$

Ainsi, nous définissons le polynôme bivarié hyper $r$-Fibonacci.

**Définition 4.3.** *Pour tout $m \geqslant 0$, les polynômes bivariés hyper $r$-Fibonacci sont définis* *par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} U_n^{[0]} = U_n^{(r)}, \; U_0^{[m]} = y^m, \\ U_{n+1}^{[m]} = xU_n^{[m]} + yU_{n+1}^{[m-1]}. \end{cases} \tag{4.12}$$

La relation (4.12), s'écrit comme suit :

$$U_n^{[m]} = \sum_{j=0}^{n} yx^{n-j} U_j^{[m-1]}. \tag{4.13}$$

Nous présenterons dans la suite quelques cas particuliers des polynômes hyper $r$-Fibonacci.

Pour $r = 1$, $x = 1$ et $y = 1$, $U_n^{[m]}(1,1) = F_n^{[m]}$, nous obtenons les nombres hyper-Fibonacci, [7].

Pour $r = 1$, $x = 2$ et $y = 1$, $U_n^{[m]}(2,1) = p_n^{[m]}$, nous trouvons les nombres hyper-Pell, [4].

Pour $r = 1$, $x = 1$ et $y = 2$, $U_n^{[m]}(1,2) = j_n^{[m]}$, nous avons les nombres hyper-Jacobsthal.

Il en résulte de la relation (4.11), que le polynôme bivarié hyper $r$-Fibonacci s'exprime comme suit :

$$U_{n+1}^{[m]} = \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n+m-k}{m-1} x^{n+1-k} y^m U_k. \tag{4.14}$$

### 4.3.2 Interprétation combinatoire

Dans ce paragraphe, nous donnerons une interprétation combinatoire de la relation (4.12) ainsi que la formule explicite du polynôme bivarié hyper $r$-Fibonacci.

**Lemme 4.2.** *Soit $T_{n,m}$ le nombre de façons de couvrir un $[n+(r+1)m]$-ruban en utilisant au moins $m$ $(r+1)$-ominos et des carrés. Alors $T_{0,m} = y^m$, $T_{n,0} = U(n,k)$ et pour tout $n \geq 1$,*

$$T_{n,m} = xT_{n-1,m} + yT_{n,m-1}. \tag{4.15}$$

*Démonstration.* Pour $m = 0$, $T_{n,0}$ correspond au nombre de manières de couvrir un $n$-ruban avec des carrés et des ominos sans aucune condition sur le nombre des ominos, alors on a forcément $T_{n,0} = U(n,k)$.
Pour $n = 0$, $T_{0,m}$ est le nombre de manières de couvrir un $[(r+1)m]$-ruban avec au moins $m$ $(r+1)$-ominos d'intensité de coloration $y$, ce qui donne $y^m = U_0^{[m]}$.
Maintenant, considérons $T_{n,m}$ le nombre de façon de couvrir un $[n+(r+1)m]$-ruban avec au moins $m$ $(r+1)$-ominos :
Si on commence le pavage avec un carré de $x$ différentes couleurs, alors il reste $n-1+(r+1)m$ cases à couvrir avec au moins $m$ $(r+1)$-ominos et par suite il y a $xT_{(n-1),m}$ façons possibles.
Si la première pièce utilisée est un $(r+1)$-omino de $y$ différentes couleurs, alors pour le reste de pavage $n+(r+1)m-(r+1) = n+(r+1)(m-1)$, on a $yT_{n,m-1}$ façons possibles.
D'où la relation (4.15) □

**Théorème 4.5.** *Soient $n, r$ et $m$ des entiers et $x, y \in \mathbb{N}$, le polynôme hyper $r$-Fibonacci $U_n^{[m]}$ représente le nombre de façons de paver un $[n+(r+1)m]$-ruban en utilisant au moins $m$ $(r+1)$-ominos, où $x$ représente les différentes couleurs pour les carrés et $y$ représente différentes couleurs pour les $(r+1)$-omino ; c'est-à-dire : $U_n^{[m]} = T_{n,m}$.*

La proposition suivante nous permet d'exprimer la forme explicite du polynôme hyper $r$-Fibonacci $U_n^{[m]}$.

**Proposition 4.1.** *Soient $x, y \in \mathbb{N}$. Pour tous $n \geq 0$, $m \geq 0$ et $(k = 0, \ldots, \lfloor n/(r+1) \rfloor)$, le nombre de façons de couvrir $n+(r+1)m$-ruban en utilisant au moins $(k+m)$-ominos est :*

$$\binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}.$$

*Démonstration.* Le pavage d'un $n+(r+1)m$-ruban avec au moins $(k+m)$ $(r+1)$-ominos contient nécessairement $n-(r+1)k$ carrés de différentes couleurs $x$, d'où il y a $n-(r+1)k+k+m = n+m-rk$ pièces dans le pavage. Alors on a $\binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}$ façons de choisir $(k+m)$ $(r+1)$-ominos de différentes couleurs $y$ parmi les $(n+m-rk)$ pièces. □

**Théorème 4.6.** *Pour tous $n \geqslant 0$, $m \geqslant 0$ et $k = 0, \ldots, \lfloor n/(r+1) \rfloor$, on a :*

$$U_{n+1}^{[m]} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}. \tag{4.16}$$

*Démonstration.* En utilisant le Théorème 4.5 et la Proposition 2, nous établirons la relation (4.16).

□

**Corollaire 4.1.** *Les premiers termes du polynôme hyper $r$-Fibonacci sont donnés par l'identité suivante :*

$$U_k^{[m]} = \binom{m+k-1}{k-1} x^{k-1} y^m, \qquad (1 \leq k \leq r).$$

**Théorème 4.7.** *Le polynôme hyper $r$-Fibonacci $U_n^{[m]}$ satisfait la relation non homogène suivante :*

$$U_{n+1}^{[m]} = xU_n^{[m]} + yU_{n-r}^{[m]} + \binom{n+m-1}{m-1} x^n y^m. \tag{4.17}$$

*Démonstration.* En utilisant les relations (4.12) et (4.16), on a :

$$\begin{aligned}
U_{n+1}^{[m]} &= xU_n^{[m]} + yU_{n+1}^{[m-1]} \\
&= xU_n^{[m]} + y \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \tbinom{n+m-1-rk}{m-1+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m-1} \\
&= xU_n^{[m]} + y \sum_{k=1}^{\lfloor n/(r+1) \rfloor} \tbinom{n+m-1-rk}{m-1+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m-1} + \tbinom{n+m-1}{m-1} x^n y^m \\
&= xU_n^{[m]} + y \sum_{k=0}^{\lfloor (n-r-1)/(r+1) \rfloor} \tbinom{n+m-1-r(k+1)}{m+k} x^{n-(r+1)(k+1)} y^{k+m} + \tbinom{n+m-1}{m-1} x^n y^m \\
&= xU_n^{[m]} + xU_{n-r}^{[m]} + \tbinom{n+m-1}{m-1} x^n y^m.
\end{aligned}$$

□

Le théorème suivant fait le lien entre le polynôme bivarié $r$-Fibonacci et les polynômes hyper $r$-Fibonacci et $r$-Fibonacci incomplet.

**Théorème 4.8.** *Pour tout $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on a :*

$$U_{n+(r+1)m} = U_n^{[m]} + U_{n+(r+1)m}(m-1). \tag{4.18}$$

*Démonstration.* Pour la démonstration nous utiliserons les relations (4.1) et (4.16).

$$\begin{aligned}
U_{n+(r+1)m} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor+m} \binom{n+(r+1)m-rk-1}{k} x^{n+(r+1)m-(r+1)k-1} y^k \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor+m} \binom{n+m-r(k-m)-1}{k} x^{n+(r+1)(m-k)-1} y^k \\
&= \sum_{k=-m}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk-1}{k+m} x^{n-(r+1)k-1} y^{k+m} \\
&= \sum_{k=-m}^{-1} \binom{n+m-rk-1}{k+m} x^{n-(r+1)k-1} y^{k+m} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \binom{n+m-rk-1}{k+m} x^{n-(r+1)k-1} y^{k+m} \\
&= U_n^{[m]} + \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n+m(r+1)-rk-1}{k} x^{n+m(r+1)-rk-1} y^k \\
&= U_n^{[m]} + U_{n+(r+1)m}(m-1).
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.2.** *Pour tous entiers $m, n$ et $r$, les nombres hyper $r$-Fibonacci satisfont la relation suivante :*

$$U_n^{[m]} = U_{n+(r+1)m} - \sum_{k=0}^{m-1} \binom{n-1+(r+1)m-rk}{k}. \tag{4.19}$$

### 4.3.3 Les polynômes bivariés hyper $r$-Lucas de type $s$

Aprés avoir défini les polynômes bivariés hyper $r$-Lucas de type $s$, nous allons donner leurs formes explicites en fonction de $s$ et les polynômes bivariés hyper $r$-Fibonacci.

**Définition 4.4.** *Pour tout entier $m \geqslant 0$, les polynômes bivariés hyper $r$-Lucas de type $s$ sont définis par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} V_n^{[0]} = V_n^{(r,s)}, \ V_0^{[m]} = (s+1)y^m, \\ V_n^{[m]} = xV_{n-1}^{[m]} + yV_n^{[m-1]}. \end{cases} \tag{4.20}$$

Des cas particuliers des polynômes hyper $r$-Lucas de type $s$.

Pour $r = s = 1$, $x = 1$ et $y = 1$, $V_n^{[m]}(1,1) = L_n^{[m]}$, on trouve les nombres hyper-Lucas, [7].

pour $r = s = 1$, $x = 2$ et $y = 1$, $V_n^{[m]}(2,1) = P_n^{[m]}$, on a les nombres hyper-Pell-Lucas, [4].

Pour $r = s = 1$, $x = 1$ et $y = 2$, $V_n^{[m]}(1,2) = J_n^{[m]}$, on obtient les nombres hyper-Jacobsthal-Lucas.

**Théorème 4.9.** *Soient $r$ et $s$ des entiers positifs tels que $1 \leq s \leq r$. Pour tous entiers $n \geq 0$ et $m \geq 1$ on a :*

$$V_n^{[m]} = \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{n+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}. \tag{4.21}$$

*Démonstration.* Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur l'entier $n+m$. Posons $V_{n+m} = V_n^{[m]}$. On a $V_0^{[0]} = s+1 = V_1^{[0]}$ et $V_0^{[1]} = (s+1)y$ donc la relation (4.21) est vérifiée pour $n+m=0$ et $n+m=1$. Supposons maintenant que l'identité (4.21) est vraie pour tout entier $p < n+m+1$ et montrons qu'elle est vraie pour $p = n+m+1$.
En utilisant la relation (4.20), on a :

$$\begin{aligned}
V_{n+1}^{[m]} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tfrac{n+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk}\tbinom{n+m-rk}{m-1+k} x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m} \\
&+ \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor} \tfrac{n+1+(s+1)(m-1)-(r-s)k}{n+m-rk}\tbinom{n+m-rk}{m-1+k} x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m-1} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-rk}{m+k} x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m} + s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-rk-1}{m+k-1} x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m} \\
&+ \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-rk}{m+k-1} x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m} + s\sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/(r+1)\rfloor} \tbinom{n+m-rk-1}{m+k-2} x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \left[\tbinom{n+m-rk+1}{m+k} + s\tbinom{n+m-rk}{m+k-1}\right] x^{n+1-(r+1)k} y^{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \tfrac{n+1+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk+1}\tbinom{n+m-rk+1}{m+k} x^{n-(r+1)k} y^{k+m}.
\end{aligned}$$

□

**Remarque 4.1.** *A partir des relations* (4.20) *et* (4.21)*, nous déduisons que les polynômes hyper $r$-Lucas de type $s$ satisfont une relation de récurrence non homogène donnée par :*

$$V_n^{[m]} = xV_{n-1}^{[m]} + yV_{n-r-1}^{[m]} + \frac{n+(s+1)(m-1)}{n+m-1}\binom{n+m-1}{m-1} x^n y^m. \tag{4.22}$$

Le théorème suivant est analogue au Théorème 2.1 pour les $r$-Lucas de type $s$, nous exprimons les polynômes hyper $r$-Lucas de type $s$ en fonction de $s$ et le polynôme hyper $r$-Fibonacci.

**Théorème 4.10.** *Pour tous entiers $n$,$m$, $r$ et $s$ $(1 \leq s \leq r)$, on a :*

$$V_n^{[m]} = U_{n+1}^{[m]} + syU_{n+1}^{[m-1]}, \tag{4.23}$$

*ce qui donne de plus pour tous entiers $n \geqslant r$ et $m \geqslant 1$,*

$$V_n^{[m]} = U_{n+1}^{[m]} + syU_{n-r}^{[m]} + s\binom{n+m-1}{m-1}x^n y^m. \tag{4.24}$$

*Démonstration.* La démonsration découle simplement des relations (4.16) et (4.21). En effet,

$$\begin{aligned}
V_n^{[m]} &= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor} \frac{n+(s+1)m-(r-s)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}\binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} + \sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}\frac{(s+m)k}{n+m-rk}\binom{n+m-rk}{m+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= U_{n+1}^{[m]} + s\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}\binom{n+m-rk-1}{m+k-1}x^{n-(r+1)k}y^{k+m} \\
&= U_{n+1}^{[m]} + sy\sum_{k=0}^{\lfloor n/(r+1)\rfloor}\binom{n+m-1-rk}{m-1+k}x^{n-(r+1)k}y^{k+m-1} \\
&= U_{n+1}^{[m]} + syU_{n+1}^{[m-1]}.
\end{aligned}$$

□

**Corollaire 4.3.** *Soient $m,n$ des entiers positifs. En prenant $x = y = 1$ et $r = s = 1$, on obtient :*

$$V_n^{[m]} + U_n^{[m]} = 2U_{n+1}^{[m]} \text{ et } V_n^{[m]} - U_n^{[m]} = 2U_{n+1}^{[m-1]}.$$

Maintenant, nous établirons le raccordement existant entre les polynômes incomplets $r$-Lucas, les hyper $r$-Lucas et les polynômes $r$-Lucas de type $s$.

**Théorème 4.11.** *Pour tous entiers $m \geqslant 1$ et $n \geqslant 0$, on a :*

$$V_{n+(r+1)m} = V_n^{[m]} + V_{n+(r+1)m}(m-1). \tag{4.25}$$

*Démonstration.* En utilisant les relations (4.18) et (4.23) on a :

$$\begin{aligned}
V_{n+(r+1)m} &= U_{n+(r+1)m+1}^{[m]} + syU_{n+(r+1)m+1}^{[m-1]} \\
&= \left[U_{n+(r+1)m+1} + U_{n+(r+1)m+1}(m-1)\right] + sy\left[U_{n+(r+1)(m-1)+1} + U_{n+(r+1)(m-1)+1}(m-2)\right] \\
&= \left[U_{n+(r+1)m+1} + syU_{n+(r+1)(m-1)+1}\right] + \left[U_{n+(r+1)m+1}(m-1) + syU_{n+(r+1)(m-1)+1}(m-2)\right] \\
&= V_n^{[m]} + V_{n+(r+1)m}(m-1).
\end{aligned}$$

□

# Chapitre 5

# La $r$-Fibonacci pour $r \in \mathbb{Z}$ et sa suite compagnon

Ce chapitre est consacré à l'étude de la suite $r$-Fibonacci généralisée pour $r$ négatif, nous allons présenter quelques propriétés correspondantes. Nous proposerons la définition de cette suite et sa suite compagnon, en donnant une expression explicite pour ses termes généraux et évaluant ses fonctions génératrices et les formes de Binet qui lui sont associées.

## 5.1 La $r$-Fibonacci pour $r$ négatif

Soient $x$ et $y$ deux éléments inversibles d'un anneau commutatif unitaire $\mathcal{A}$.

**Définition 5.1.** *Pour tout entier $r \geq 1$, on définit la suite $(-r)$-Fibonacci généralisée $(U_n^{(-r)}(x,y))_n$ par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} U_0^{(-r)} = 0,\ U_1^{(-r)} = 1,\ U_2^{(-r)} = \cdots = U_r^{(-r)} = 0, \\ U_{n+1}^{(-r)} = y^{-1}U_{n-r+1}^{(-r)} - y^{-1}xU_{n-r}^{(-r)}\ \ (n \geq r). \end{cases} \tag{5.1}$$

**Théorème 5.1.** *Soient $n \geq 1$ et $x, y$ deux éléments d'un anneau commutative $\mathcal{A}$. On suppose que $x$ et $y$ sont inversibles dans $\mathcal{A}$, alors*

$$U_{n+1}^{(-r)} = \sum_k \binom{k}{n-rk} y^{-k}(-x)^{n-rk},$$

*équivalent à*

$$U_{n+1}^{(-r)} = \sum_k \binom{(n-k)/r}{k} y^{-(n-k)/r}(-x)^k,$$

*nous restreignons la première somme à des entiers compris entre $\lfloor n/(r+1) \rfloor$ et $\lfloor n/r \rfloor$ ; la seconde sommation est limitée aux entiers $k$ compris entre $0$ et $\lfloor n/r \rfloor$, satisfaisant la propriété : $r$ divise $(n-k)$.*

*Démonstration.* Pour la preuve de ce théorème, nous utiliserons encore une fois le Théorème 1.2. Considérons la suite $(U_n^{(-r)})_n$ donnée par la relation $U_n^{(-r)} = y^{-1}U_{n-r}^{(-r)} - y^{-1}xU_{n-r-1}^{(-r)}$ avec $a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0$, $a_r = y^{-1}$ et $a_{r+1} = -xy^{-1}$. Alors, pour tout $n \geq -r$ on a :

$$\begin{aligned} y_n^{(-r)} &= \sum_{ri+(r+1)j=n} \binom{i+j}{j}(y^{-1})^i(-xy^{-1})^j \\ &= \sum_{r(i+j)+j=n} \binom{i+j}{j}(y^{-1})^{i+j}(-x)^j \\ &= \sum_{k}^{\lfloor n/r \rfloor} \binom{k}{n-rk}(-x)^{n-rk}(y^{-1})^k. \end{aligned}$$

De plus, on a pour tout $0 \leq j \leq r-1$, $U_{-j}^{(-r)} = 0$ et $U_{-r}^{(-r)} = -x^{-1}y$. D'autre part, la suite $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq r}$ est définie par $\lambda_j = \sum_{k=0}^{r-j} a_k U_{k+j}^{(-r)}$, avec $a_0 = -1$, ce qui donne $\lambda_j = 0$ pour $1 \leq j \leq r-1$, $\lambda_0 = x^{-1}$ et $\lambda_r = -x^{-1}y$.
Finalement, l'expression de la suite $(U_n^{(-r)})_n$ est donnée comme suit :

$$\begin{aligned} U_n^{(-r)} &= \sum_{j=0}^{r} \lambda_j y_{n+j}^{(-r)} \\ &= \lambda_0 y_n^{(-r)} + \lambda_r y_{n+r}^{(-r)} \\ &= \sum_{k}^{\lfloor n/r \rfloor} \binom{k}{n-1-rk}(-x)^{n-1-rk}(y^{-1})^k. \end{aligned}$$

La deuxième identité se déduit facilement en posant $n - rk = k'$. □

Soit $B_r(x,y)$ la matrice compagnon associée à la suite $(-r)$-Fibonacci d'ordre $(r+1)$

$$B_r(x,y) := \begin{pmatrix} 0 & 0 & \cdots & y^{-1} & -xy^{-1} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

**Théorème 5.2.** *Pour tout $n \geq 1$, la puissance $n^{\text{ième}}$ de la matrice $B_r(x,y)$ est :*

$$B_r^n(x,y) = \begin{pmatrix} U_{n+1}^{(-r)} & U_{n+2}^{(-r)} & \cdots & U_{n+r}^{(-r)} & -xy^{-1}U_n^{(-r)} \\ U_n^{(-r)} & U_{n+1}^{(-r)} & \cdots & U_{n+r-1}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-1}^{(-r)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ U_{n-r+2}^{(-r)} & U_{n-r+3}^{(-r)} & \cdots & U_{n+1}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-r+1}^{(-r)} \\ U_{n-r+1}^{(-r)} & U_{n-r+2}^{(-r)} & \cdots & U_n^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-r}^{(-r)} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* La démonstration se fait par induction sur l'entier $n$ et en utilisant la relation (5.1).
Le résultat est vérifié pour $n = 1$, on suppose qu'il est vrai jusqu'à l'ordre $n$. Nous avons :

$$\begin{aligned}
B_r^{n+1}(x,y) &= B_r^n(x,y)B_r(x,y)\\
&= \begin{pmatrix}
U_{n+1}^{(-r)} & U_{n+2}^{(-r)} & \cdots & U_{n+r}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n}^{(-r)}\\
U_{n}^{(-r)} & U_{n+1}^{(-r)} & \cdots & U_{n+r-1}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-1}^{(-r)}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
U_{n-r+2}^{(-r)} & U_{n-r+3}^{(-r)} & \cdots & U_{n+1}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-r+1}^{(-r)}\\
U_{n-r+1}^{(-r)} & U_{n-r+2}^{(-r)} & \cdots & U_{n}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-r}^{(-r)}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix}
0 & 0 & \cdots & y^{-1} & -xy^{-1}\\
1 & 0 & \cdots & 0 & 0\\
0 & 1 & \ddots & \vdots & \vdots\\
\vdots & \ddots & \ddots & 0 & 0\\
0 & \cdots & 0 & 1 & 0
\end{pmatrix}\\
&= \begin{pmatrix}
U_{n+2}^{(-r)} & U_{n+3}^{(-r)} & \cdots & U_{n+r+1}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n+1}^{(-r)}\\
U_{n+1}^{(-r)} & U_{n+2}^{(-r)} & \cdots & U_{n+r}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n}^{(-r)}\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\
U_{n-r+3}^{(-r)} & U_{n-r+4}^{(-r)} & \cdots & U_{n+2}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-r+2}^{(-r)}\\
U_{n-r+2}^{(-r)} & U_{n-r+3}^{(-r)} & \cdots & U_{n+1}^{(-r)} & -xy^{-1}U_{n-r+1}^{(-r)}
\end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d'où le résultat. □

Nous pouvons déduire quelques propriétés combinatoires de la suite $(U_n^{(-r)})$, il s'ensuit le corollaire suivant :

**Corollaire 5.1.** *Pour tous entiers $n \geq 1$ et $m \geq 1$ on a :*

$$U_{n+m}^{(-r)} = \sum_{j=0}^{r-1} U_{n+j}^{(-r)}U_{m+1-j}^{(-r)} - xy^{-1}U_{n-1}^{(-r)}U_{m-r+1}^{(-r)}. \tag{5.2}$$

*d'où :*

$$U_{2n}^{(-r)} = \sum_{j=0}^{r-1} U_{n+j}^{(-r)}U_{n+1-j}^{(-r)} - xy^{-1}U_{n-1}^{(-r)}U_{n-r+1}^{(-r)}. \tag{5.3}$$

*En particulier pour $r = 2$ on a :*

$$U_{2n}^{(-2)} = 2U_n^{(-2)}U_{n+1}^{(-2)} - xy^{-1}(U_{n-1}^{(-2)})^2. \tag{5.4}$$

*Démonstration.* La formule (5.2) découle de l'égalité

$$B_r^{n+m}(x,y) = B_r^n(x,y)B_r^m(x,y).$$

L'expression (5.3) s'obtient en posant $m = n$. □

## 5.2 La suite compagnon associée à la suite $(-r)$-Fibonacci généralisée

**Définition 5.2.** *Pour tout entier $r \geq 2$, on définit la suite compagnon associée à la suite $(U_n^{(-r)})$ par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} V_0^{(-r)} = r+1, \ V_1^{(-r)} = \cdots = V_{r-1}^{(-r)} = 0, \ V_r^{(-r)} = ry^{-1}, \\ V_{n+1}^{(-r)} = y^{-1}V_{n-r+1}^{(-r)} - y^{-1}xV_{n-r}^{(-r)}, \ (n \geq r). \end{cases} \tag{5.5}$$

La suite $(-r)$-Fibonacci généralisée et sa suite compagnon satisfont une identité similaire à (2.5), dans la proposition qui suit nous exprimons les termes de la suite $(V_n^{(-r)})$ en fonction de $r$ et $U_n^{(-r)}$.

**Proposition 5.1.** *Soient $r$ un entier positif $r \geq 2$ et $x, y$ deux éléments inversibles d'un anneau commutative unitaire $\mathcal{A}$, pour tout entier $n \geq r$ on a :*

$$V_n^{(-r)} = rU_{n+1}^{(-r)} - xy^{-1}U_{n-r}^{(-r)}. \tag{5.6}$$

*Démonstration.* Considérons la suite $(V_n^{(-r)})$ définie par la relation de récurrence

$$V_n^{(-r)} = y^{-1}V_{n-r}^{(-r)} - y^{-1}xV_{n-r-1}^{(-r)}.$$

L'application du théorème (1.2), pour $a_1 = a_2 = \cdots = a_{r-1} = 0$ et $a_r = y^{-1}, a_{r+1} = -xy^{-1}$, nous permet d'avoir $V_{-j}^{(-r)} = (x^{-j})$ pour $1 \leq j \leq r$ et $V_0^{(-r)} = r+1$. Donc, la suite $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq r-1}$ est donnée par $\lambda_j = -\sum_{j=0}^{r-1-j} a_k V_{k-j}^{(-r)}$ avec $a_0 = -1$. Ce qui donne, $\lambda_0 = r+1-y^{-1}(x^{-1})^r$ et $\lambda_j = x^{-j}$ pour $1 \leq j \leq r$. Finalement, on obtient le résultat suivant :

$$\begin{aligned} V_n^{(-r)} &= \lambda_0 U_{n+1}^{(-r)} + \lambda_1 U_{n+2}^{(-r)} + \cdots + \lambda_r U_{n+r+1}^{(-r)} \\ &= (r+1-y^{-1}(x^{-1})^r)U_{n+1}^{(-r)} + \sum_{j=1}^{r}(x^{-1})^j U_{n+1+j}^{(-r)} \\ &= rU_{n+1}^{(-r)} + U_{n+1}^{(-r)} - y^{-1}U_{n-r+1}^{(-r)} \\ &= rU_{n+1}^{(-r)} - y^{-1}xU_{n-r}^{(-r)}. \end{aligned}$$

□

**Théorème 5.3.** *Pour tout entier $n \geq 1$, la suite $(V_n^{(-r)})_{n \geq 1}$ satisfait les identités suivantes :*

$$V_n^{(-r)} = \sum_k \frac{n}{n-rk}\binom{k-1}{n-1-rk}y^{-k}(-x)^{n-rk} + ry^{-n/r}[r \mid n], \tag{5.7}$$

*et*

$$V_n^{(-r)} = \sum_k \frac{n}{k+1}\binom{(n-1-r-k)/r}{k} y^{-(n-1-k)/r}(-x)^{k+1} + ry^{-n/r}[r \mid n], \tag{5.8}$$

*avec* $V_0^{(-r)} = r+1$ *et* $[r \mid n] = 1$ *pour* $r$ *divise* $n$ *et* $0$ *sinon.*
*La première somme est restreint sur les entiers* $k$, $\lfloor n/(r+1) \rfloor \leq k \leq \lfloor n/r \rfloor$. *Tandis que la deuxième somme est limitée sur des entiers* $k$ *compris entre* $0$ *et* $\lfloor n/(r+1) \rfloor - 1$ *et satisfaisant la condition :* $r$ *divise* $(n-k-1)$.

*Démonstration.* Nous démmontrons ce résultat en utilisant la relation (5.6) et le théorème 5.1. En effet,

$$\begin{aligned}
V_n^{(-r)} &= rU_{n+1}^{(-r)} - xy^{-1}U_{n-r}^{(-r)} \\
&= r\sum_k \binom{k}{n-rk} y^{-k}(-x)^{n-rk} - xy^{-1}\sum_k \binom{k}{n-r-1-rk} y^{-k}(-x)^{n-r-1-rk} \\
&= r\sum_k \binom{k}{n-rk} y^{-k}(-x)^{n-rk} + \sum_k \binom{k}{n-r-1-rk} y^{-k-1}(-x)^{n-r-rk} \\
&= \sum_k r\binom{k}{n-rk} + y^{-k}(-x)^{n-rk} + \sum_k \binom{k-1}{n-1-rk} y^{-k}(-x)^{n-rk} \\
&= \sum_k \left(\frac{rk}{n-rk}\binom{k-1}{n-1-rk} + \binom{k-1}{n-1-rk}\right) y^{-k}(-x)^{n-rk} + +ry^{-n/r}[r \mid n] \\
&= \sum_k \frac{n}{n-rk}\binom{k-1}{n-1-rk} y^{-k}(-x)^{n-rk} + +ry^{-n/r}[r \mid n].
\end{aligned}$$

□

Les fonctions génératrices de la suite $(-r)$-Fibonacci généralisée pour $r \geq 1$ et sa suite compagnon sont explicitées dans le théorème suivant.

**Théorème 5.4.** *Pour tous* $z \in \mathbb{C}$, *les fonctions génératrices des suites* $(U_n^{(-r)})_{n\geq 0}$ *et* $(V_n^{(-r)})_{n\geq 0}$ *sont données par :*

$$U(z) = \sum_{n\geq 0} U_{n+1}^{(-r)} z^n = \frac{1}{1 - y^{-1}z^r + xy^{-1}z^{r+1}} \quad \text{et} \quad V(z) = \sum_{n\geq 0} V_n^{(-r)} z^n = \frac{r+1-y^{-1}z^r}{1 - y^{-1}z^r + xy^{-1}z^{r+1}}$$

*Démonstration.* En utilisant la relation (5.1), on obtient :

$$(1 - y^{-1}z^r - +xy^{-1}z^{r+1})U(z) = U_1^{(-r)} \text{ et } U(z) = \frac{1}{1 - y^{-1}z^r + xy^{-1}z^{r+1}}.$$

Finalement, l'expression de $V(z) = \sum_{n\geq 0} V_n^{(-r)} z^n$ se déduit de la relation (5.6). □

## 5.3 Formules de Binet

Dans le but d'établir les formules de Binet associées à la suite $(-r)$-Fibonacci et sa suite compagnon, nous avons besoin du lemme suivant :

**Lemme 5.1.** *Soit $P(t) = t^{r+1} - y^{-1}t + xy^{-1}$ le polynôme caractéristique associé à la suite $(U_n^{(-r)})_{n\geq 0}$. On suppose que $x \neq (\frac{r}{r+1})(ry)^{-1/r}$, alors le polynôme $P$ n'a pas de racines multiples.*

*Démonstration.* Supposons que l'équation $P(t) = 0$ admet une racine multiple $\beta$ avec $\beta \neq 0$. Alors on a : $P(\beta) = \beta^{r+1} - y^{-1}\beta + xy^{-1} = 0$ et $P'(\beta) = (r+1)\beta^r - y^{-1} = 0$ où $P'$ est le polynôme dérivé du polynôme $P$, ce qui donne

$$P(\beta) = (\frac{y^{-1}}{r+1})^{\frac{r+1}{r}} - y^{-1}(\frac{y^{-1}}{r+1})^{\frac{1}{r}} + xy^{-1} = 0,$$

alors

$$x = (\frac{r}{r+1})((r+1)y)^{\frac{-1}{r}},$$

d'où la contradiction. □

**Théorème 5.5.** *Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r+1}$ les racines du polynôme caractéristique associé à la suite $(U_n^{(-r)})_{n\geq 0}$. Supposons que $x \neq (\frac{r}{r+1})(ry)^{-1/r}$ alors*

$$U_{n+1}^{(-r)} = \sum_{k=1}^{r+1} \frac{\beta_k^{n+r+1}}{r\beta_k^{r+1} - xy^{-1}} \qquad et \qquad V_n^{(-r)} = \sum_{k=1}^{r+1} \beta_k^n.$$

*Démonstration.* Soient $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{r+1}$ les valeurs propres de la matrice $B_r(x,y)$, et $M_r(x,y)$ la matrice de Vandermonde définie comme suit :

$$M_r(x,y) = \begin{pmatrix} \beta_1^r & \beta_2^r & \cdots & \beta_{r+1}^r \\ \beta_1^{r-1} & \beta_2^{r-1} & \cdots & \beta_{r+1}^{r-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \beta_1 & \beta_2 & \vdots & \beta_{r+1} \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}.$$

L'hypothèse $x \neq (\frac{r}{r+1})(ry)^{-1/r}$ implique que le discriminant du polynôme caractéristique associé à la suite $(U_n^{(-r)})_{n\geq 0}$ est non nul et par suite toutes ses racines sont simples, alors les valeurs propres de la matrice $B_r(x,y)$ sont toutes distinctes et ainsi la matrice $B_r(x,y)$ est diagonalisable c'est-à-dire

$$B_r(x,y) \times M_r(x,y) = M_r(x,y) \times D,$$

où $D = Diag(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1})$. Alors

$$M_r^{-1}(x,y) \times B_r^n(x,y) \times M_r(x,y) = D^n.$$

En prenant $B_r(x,y) = (b_{ij})$, nous obtenons le système d'équations linéaires suivant :

$$\begin{cases} b_{i1}\beta_1^r + b_{i2}\beta_1^{r-1} + \cdots + b_{i(r+1)} = \beta_1^{n+r+1-i}, \\ b_{i1}\beta_2^r + b_{12}\beta_2^{r-1} + \cdots + b_{i(r+1)} = \beta_2^{n+r+1-i}, \\ \vdots \\ b_{i1}\beta_{r+1}^r + b_{i2}\beta_{r+1}^{r-1} + \cdots + b_{i(r+1)} = \beta_{r+1}^{n+r+1-i}. \end{cases}$$

Alors, la résolution de ce système en utilisant des méthodes d'algèbre linéaire, nous donne pour tout $1 \leq i, j \leq r$,

$$b_{ij} = \frac{det(M_r^{(j)}(x,y))}{det(M_r(x,y))},$$

où $(M_r^j(x,y))$ est la matrice obtenue de la matrice $(M_r(x,y))$ par la substitution de la $j^{ième}$ colonne par le vecteur :

$$M_r^i(x,y) = \begin{pmatrix} \beta_1^{n+r+1-i} \\ \beta_2^{n+r+1-i} \\ \vdots \\ \beta_r^{n+r+1-i} \end{pmatrix}.$$

En posant $i = j = 1$, on obtient :

$$b_{11} = U_{n+1}^{(-r)} = \frac{det(M_r^1(x,y))}{det(M_r(x,y))},$$

Il en résulte de la formule (5.6) :

$$\begin{aligned} V_n^{(-r)} &= rU_{n+1}^{(-r)} - xy^{-1}U_{n-r}^{(-r)} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \frac{r\beta_k^{n+r+1} - xy^{-1}\beta_k^{n-r+r}}{r\beta_k^{r+1} - xy^{-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \beta_k^n \frac{r\beta_k^{r+1} - xy^{-1}}{r\beta_k^{r+1} - xy^{-1}} \\ &= \sum_{k=1}^{r+1} \beta_k^n. \end{aligned}$$

□

# Chapitre 6

# Réalisablité de quelques suites récurrentes linéaires

De nombreuses suites étudiées jusqu'à présent sont bien connues dans les systèmes dynamiques car elles se présentent naturellement comme des suites comptant les points périodiques. Un système dynamique est la donnée d'une application continue $T : X \to X$ où $X$ est un espace topologique. Un tel système est la collection des itérations de l'application $T$ sous la composition des fonctions. Dans ce chapitre nous nous intéressons aux suites réalisables, cette notion de réalisabilté a été introduite et étudiée la première fois par Y. Puri et T. Ward [41], ils ont montré que l'ensemble des suites réalisables contient une classe spéciale des suites récurrentes linéaires binaires. Notre principal travail est d'étudier la réalisabilité de certaines suites récurrentes linéaires d'ordre supérieur à 2, notamment la suite d'entiers positifs $r$-Fibonacci et sa suite compagnon $r$-Lucas.

## 6.1 Suites réalisables

### 6.1.1 Définitions et Préliminaires

**Définition 6.1.** *Une suite $a = (a_n)_{n\geq 1}$ d'entiers est dite exactement réalisable s'il existe un ensemble $X$ et une application $T : X \to X$ vérifiant la propriété suivante :*

$$\textit{Pour tout } n \geq 1,\ a_n = Per_n(T) = \#Fix(T^n) = \#\left\{x \in X / T^n x = x\right\}. \tag{6.1}$$

On dit que le système dynamique $(T, X)$ réalise la suite $(a_n)_{n\geq 1}$, ou encore la suite $(a_n)_{n\geq 1}$ est réalisable par le système dynamique $(T, X)$.
On désigne par $\mathcal{ER}$, l'ensemble des suites exactement réalisables.

**Exemples 6.1.** *1. Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8\}$ un ensemble et $T$ une permutation de*

*$X$ définie par :*

$$T : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 8 & 1 & 2 & 5 & 4 & 6 & 7 & 3 \end{pmatrix}.$$

*Le système $(T, X)$ réalise la suite $\{2, 4, 2, 8, 2, 4, 2, 8, \ldots\}$.*

2. *Si $a$ un entier positif alors la suite $(a^n)_{n\geq 1}$ est exactement réalisable. En effet, si on prend l'ensemble $X = \{0, 1, \ldots, a-1\}^{\mathbb{N}}$ et $T$ l'application décalage à gauche ; tel que si $x = (x_1, x_2, x_3, \ldots) \in X$ alors $Tx = (x_2, x_3, x_4, \ldots)$ alors le système $(T, X)$ réalise la suite $(a^n)_{n\geq 1}$.*

3. *Considérons $(M_n)_{n\geq 1}$ la suite de Mersenne, définie par $M_n = 2^n - 1$. La suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est réalisable par le système $(T, X)$ où $X = \{x \in \mathbb{C} / \mid x \mid = 1\}$ et $T : X \to X$ définie par : $T(x) = x^2$. On a pour tout $n \geq 1$*

$$Per_n(T) = \#\left\{x \in X \ / \ x^{2^n - 1} = 1\right\} = \#\left\{x_k = \exp \frac{2ik\pi}{2^n - 1} \ / \ k = 0, \ldots, 2^n - 2\right\},$$

*d'où, pour tout entier $n \geq 1$, $Per_n(T) = M_n$.*

4. *La suite de Jacobsthal – Lucas, $R_n = \mid (-2^n) - 1 \mid$ compte le nombre des points périodiques de l'application $T : \ x \mapsto T(x) = x^{-2}$ dans le cercle unité.*

5. *Soit $X = \{x = (x_k) \in \{0, 1\}^{\mathbb{Z}}$ si $x_k = 1$ alors $x_{k+1} = 0\}$ et $T : X \to X$ l'application de décalage à gauche définie par : $(Tx)_n = x_{n+1}$. On a pour tout $n \geq 1$,*

$$Per_n(T) = tr(A^n) = L_n,$$

*où $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.*

*Il en résulte que le système dynamique $(T, X)$ réalise la suite de Lucas $(L_n)_{n\geq 1}$.*

Soient $X$ un ensemble et $T : X \to X$ une application. Si $Per_n(T)$ et $L_n(T)$ sont finis, alors les propriétés suivantes sont vérifiées :

1. Premièrement, l'ensemble des points périodiques de période $n$ par l'application $T$ est la réunion disjointe des orbites de longueur $d$ divisant $n$, alors pour tout $n \geq 1$ on a :

$$Per_n(T) = \sum_{d/n} L_d(T), \tag{6.2}$$

par la formule d'inversion de Möbius, la relation (6.2) est équivalente à :

$$L_n(T) = \sum_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) Per_d(T). \tag{6.3}$$

2. Deuxièmement, si $x$ est de période première $d$ alors les points de l'orbite de $x$ : $x, T(x), T^2(x), \ldots$ sont tous de période première $d$, donc pour tout $d \geq 0$

$$0 \leq L_d(T) \equiv 0 \mod d. \tag{6.4}$$

Le lemme suivant présente un dispositif combinatoire qui caractérise les suites exactement réalisables.

**Lemme 6.1.** *[41, 42] Soit $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers. La suite $a$ est exactement réalisable si et seulement si*

$$0 \leq \sum_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) a_d \equiv 0 \mod n \textit{ pour tout } n \geq 1. \tag{6.5}$$

*Démonstration.* Les relations (6.2), (6.3) et (6.4) permettent d'établir la condition nécessaire. Supposons que la suite d'entiers $a = (a_n)_{n\geq 1}$ est réalisable, alors il existe un système dynamique $(X, T)$ tel que $a_n = Per_n(T)$ pour tout $n \geq 1$, donc par la relation (6.2) on a

$$a_n = \sum_{d/n} L_d(T)$$

donc

$$L_n(T) = \sum_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) a_d,$$

il en résulte par la relation (6.4)

$$0 \leq \sum_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) a_d \equiv 0 \mod n.$$

Inversement, pour montrer que la suite d'entiers $a = (a_n)_{n\geq 1}$ satisfaisant la condition (6.5) est réalisable, il suffit de trouver la dynamique $(T, X)$ qui réalise cette suite.
Considérons la suite $(b_n)_n$ définie pour tout $n \geq 1$ par :

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) a_d \in \mathbb{N}$$

.

Si $b_n > 0$, pour des valeurs de $n$ choisis arbitrairement, alors $X = \mathbb{N}$ et $T$ est une permutation avec $b_n$ cycles de longueur $n$ pour tout $n \geq 1$.

Si les $b_n = 0$ (non tous nuls), considérons un ensemble $X$ de cardinal $\sum_{n\geq 1} nb_n$ et $T$ est une permutation avec $b_n$ cycles de longueur $n$, pour tout $n \geq 1$. □

**Remarque 6.1.** *Pour montrer qu'une suite d'entiers est exactement réalisable, on peut procéder de deux manières. La première, consiste à trouver le système $(T, X)$ dont la suite est dans $\mathcal{ER}$ et la deuxième méthode on utilise le lemme précédent. Par contre, on peut utiliser le corollaire suivant pour montrer qu'une suite d'entiers n'est pas exactement réalisable.*

**Corollaire 6.1.** *Soient $p$ un nombre premier et $a = (a_n)_{n\geq 1}$ une suite d'entiers. Si $a$ est exactement réalisable alors $a_p - a_1$ est un entier positif divisible par $p$.*

*Démonstration.* En utilisant la relation (6.5), on a pour tout nombre premier $p$,

$$\sum_{d/p} \mu(\frac{p}{d}) a_d = a_p - a_1 \equiv 0 \mod p,$$

car $\mu(p) = -1$ et $\mu(1) = 1$. □

**Exemple 6.1.** *D'après la relation* (6.5)*, la suite de Fibonacci* $(F_n) : 1, 1, 2, 3 \ldots$ *n'est pas réalisable, en remarquant que $F_3 - F_1 = 1$ n'est pas divisible par* 3.

### 6.1.2 Propriétés algébriques des suites réalisables

**Lemme 6.2.** *[43]*
*Si $u = (u_n)_{n\geq 1}$ et $v = (v_n)_{n\geq 1}$ sont deux suites exactement réalisables alors $u+v = (u_n+v_n)_{n\geq 1}$ et $uv = (u_n v_n)_{n\geq 1}$ sont exactement réalisables.*

*Démonstration.* Supposons que les suites $u$ et $v$ sont respectivement réalisables par les systèmes $(T_u, X_1)$ et $(T_v, X_2)$. On alors pour tout $n \geq 1$,

$$Per_n(T_u) = u_n \text{ et } Per_n(T_v) = v_n. \tag{6.6}$$

Pour la suite $u + v$, considérons l'ensemble réunion disjoint $X = X_1 \cup X_2$ et $T$ l'application définie sur $X$ par :

$$T(x) = \begin{cases} T_u(x) \text{ si } x \in X_1, \\ T_v(x) \text{ si } x \in X_2 \end{cases}$$

Donc pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} Fix(T^n) &= \{x \in X / T^n x = x\} \\ &= \{x \in X_1 / T_u^n x = x\} \cup \{x \in X_2 / T_v^n x = x\} \end{aligned}$$

comme la réunion est disjoint alors par (6.6) :

$$Per_n(T) = \#Fix(T^n) = \#Fix(T_u^n) + \#Fix(T_v^n) = u_n + v_n,$$

et la suite $u + v$ est réalisable par le système $(T, X)$.
Maintenant pour montrer la réalisabilité de la suite $uv$, nous considérons l'ensemble $X = (X_1 \times X_2$ et l'application $T : X \to X$ définie par :

$$T(x_1, x_2) = (T_u(x_1), T_v(x_2) \ pour \ tout \ (x_1, x_2) \in X.$$

Donc pour tout $n \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} Fix(T^n) &= \{x \in X / T^n x = x\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in X / (T_u^n(x_1), T_v^n(x_2)) = (x_1, x_2)\} \\ &= \{(x_1, x_2) \in X / T_u^n(x_1) = x_1 \ \ et \ T_v^n(x_2)) = x_2\} \\ &= \{x \in X_1 / T_u^n x = x\} \times \{x \in X_2 / T_v^n x = x\} \end{aligned}$$

d'où :

$$Per_n(T) = \#Fix(T^n) = \#Fix(T_u^n) \times \#Fix(T_v^n) = u_n \times v_n,$$

et le système $(T, X)$ réalise la suite $uv$. □

## 6.2 Suites récurrentes linéaires réalisables

Dans [26, 41], les auteurs donnent une condition nécessaire et suffisante pour qu'une suite récurrente d'ordre 2 à termes positifs soit réalisable et ils ont montré que les seules solutions réalisables pour la récurrence de Fibonacci sont les multiples de la suite de Lucas. Notre but dans cette section est d'étudier la réalisabilité de la suite $r$-Fibonacci $(U_n^{(r)})$ et de sa suite compagnon $(V_n^{(r,s)})$.

### 6.2.1 Réalisabilité d'une suite récurrente linéaire d'ordre 2

Une suite récurrente d'ordre 2 est donnée par la relation suivante :

$$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \quad \text{avec } u_1, u_2 \in \mathbb{Z}_+^* \tag{6.7}$$

Si on prend le cas particulier $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$, on obtient la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$.

**Proposition 6.1.** *Une suite récurrente d'ordre 2 définie par la relation (6.7) satisfait l'identité suivante :*

$$u_n = u_1 F_{n-2} + u_2 F_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 3. \tag{6.8}$$

*En particulier,*

$$L_n = F_{n-2} + 3F_{n-1} \text{ pour tout } n \geq 1, \tag{6.9}$$

*où $(L_n)$ désigne la suite de Lucas.*

Les propriétés suivantes sont immédiatement obtenues par la l'identié (6.9) pour tout nombre premier $p$ :

1. $F_{p-2} + 3F_{p-1} \equiv 1 \pmod p$
2. $F_{p-1} \equiv 1 \pmod p \Leftrightarrow F_{p-2} \equiv -2 \pmod p$

**Lemme 6.3.** *Pour tout nombre premier $p$, on a : $F_{p-1} \equiv 1 \pmod p$ si et seulement si $p = 5m \pm 2$*

**Théorème 6.1.** *[26, 41]*

*Soit $u = (u_n)_{n\geq 1}$ une suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie pour tout $n \geq 2$ par la relation suivante $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$ avec $u_1, u_2 \geq 1$.*

*La suite $u$ est exactement réalisable si et seulement si $u_2 = 3u_1$.*

*Démonstration.* Supposons que $u_2 = 3u_1$, alors $u = 3L$ où $L$ est la suite de Lucas, or $L \in \mathcal{ER}$ donc $u \in \mathcal{ER}$ d'aprés la propriété (1). Réciproquement, on suppose que $u \in \mathcal{ER}$. Par le lemme 2 , $u_p - u_1$ est divisible par $p$ pour tout nombre premier $p$. C'est-à-dire :

$$u_1(F_{p-2} - 1) + u_2 F_{p-1} \equiv 0 \pmod p \tag{6.10}$$

Si $p = 5m \pm 2$, on a $F_{p-1} \equiv 1 \pmod p$ et par les propriétés (1) et (2), on obtient la relation $u_2 \equiv 3u_1 \pmod p$. Comme 2 et 5 sont premiers entre eux, par le Théorème de Dirichlet (voir [31, 6, Theorem 180]), il existe une infinité de nombres premiers de la forme $p = 5m \pm 2$, alors la relation $u_2 \equiv 3u_1 \pmod p$ est vraie et par suite $u_2 = 3u_1$. □

**Théorème 6.2.** *[41] Considérons la suite $u = (u_n)_{n\geq 1}$ définie par la relation de la récurrence suivante :*

$$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n \text{ avec } u_1, u_2 \geq 1.$$

*Supposons que $\Delta = a^2 + 4b$ n'est pas un carré et que $(a, a^2 + 2b) = 1$. Alors on a :*

$$u \text{ est exactement réalisable si et seulement si } \frac{u_2}{u_1} = \frac{a^2 + 2b}{a}. \tag{6.11}$$

*Démonstration.* Voir [41]. □

### 6.2.2 Réalisabilité de la suite $r$-Lucas de type $r$

Dans le théorème suivant, nous caractérisons le système dynamique réalisant la suite de $r$-Lucas .

**Théorème 6.3.** *La suite r-Lucas généralisée définie par la récurrence* $V_n^{(r)} = V_{n-1}^{(r)} + V_{n-r-1}^{(r)}$, *avec* $V_0^{(r)} = r+1$, $V_k^{(r)} = 1$ $(1 \leq k \leq r)$, *est exactement réalisable.*

*Démonstration.* Considérons l'homéomorphisme $f : X \to X$ défini par $(f(x))_n = x_{n+1}$, oú $X = \left\{ x = (x_k) \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}} / \text{ si } x_k = 1 \text{ alors } x_{k+1} = \cdots = x_{k+r} = 0 \text{ pour tout } k \in \mathbb{Z} \right\}$. C'est-à-dire 1 doit être suivi par $r$ zéros. La suite $r$-Lucas est exactement réalisable par le système dynamique $(T, X)$ avec $X$ est l'ensemble défini ci-dessus.
En utilisant le résultat de Lind et Marcus (voir [36, Proposition 2.2.12]), on a pour tout entier $n \geq 1$ :

$$Per_n(T) = tr(A_r^n) = V_n^{(r)},$$

où $A$ est la matrice compagnon associée à la suite $(V_n^{(r)})$

$$A_r = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

□

Le théorème 6.3 et le lemme 6.2 entrainent le corollaire suivant :

**Corollaire 6.2.** *Pour tout entier non nul k, les suites* $kV = (kV_n^{(r)})$ *et* $V^k = ((V_n^{(r)})^k)$ *sont réalisables.*

La réalisabilité de la suite $r$-Lucas et le Lemme 6.5, nous permettent d'établir de nombreuses congruences, la plupart de ces congruences sont bien connues pour $r = 1$.

**Corollaire 6.3.** *Pour tout entier positif n et tout nombre premier p, on a les congruences suivantes :*

1. $\sum\limits_{d/n} \mu(\frac{n}{d}) V_d^{(r)} \equiv 0 \bmod n.$
2. *Pour tout entier* $k \geq 1$, *on a* $V_{p^k}^{(r)} \equiv V_{p^{k-1}}^{(r)} \bmod p^k.$
3. *Pour* $n = p$, *il découle de la relation* (2.5) *que :*

$$V_p^{(r)} = U_p^{(r)} + (r+1) U_{p-r}^{(r)} \equiv V_1^{(r)} \bmod p.$$

*4. Pour $p$ et $q$ deux nombres premiers on a :*

$$V_{pq}^{(r)} + 1 \equiv V_p^{(r)} + V_q^{(r)} \bmod pq.$$

Une autre conséquence du théorème (6.3) est :

**Corollaire 6.4.** *Pour tous entiers positifs $r$ et $p$ un nombre premier, on a la congruence suivante :*

$$U_{p-r}^{(r)} \equiv 1 \bmod p \Leftrightarrow U_p^{(r)} \equiv -r \bmod p. \tag{6.12}$$

*Démonstration.* La démonstration découle directement de l'identité (3) du corollaire 6.3. □

### 6.2.3 Réalisabilité de la suite des nombres $r$-Fibonacci

Pour tout entier $r \geq 1$, considérons la suite nommée les nombres $r$-Fibonacci $U_n^{(r)}$, en prenant le cas particulier de la suite $r$-Fibonacci généralisée pour $x = y = 1$.
Les premiers termes pour les premières valeurs de $r$ de la suite $U_n^{(r)}$ sont présentés dans le tableau ci-dessous :

| r | Nom | Code de Sloane | Premiers termes |
|---|---|---|---|
| 1 | Fibonacci | A000045 | 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, ,... |
| 2 | 2-Fibonacci | A000930 | 1, 1, 1, 2, 3, 4, 6, 9, 13, 19, 28, 41, 60,... |
| 3 | 3-Fibonacci | A003269 | 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7, 10, 14, 19, 26,... |
| 4 | 4-Fibonacci | A003520 | 1, 1, 1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 11, 15, 20,... |

TABLE 6.1 – Premières valeurs des nombres $r$-Fibonacci.

Le lemme suivant nous affirme que pour tout entier $r \geq 1$, la suite de nombres $r$-Fibonacci $(U_n^{(r)}) : \underbrace{1, 1, 1 \ldots, 1}_{(r+1)\ termes}, 2, 3, 4, \ldots$, n'est pas réalisable.

**Lemme 6.4.** *Il n'existe aucune application $T : X \longrightarrow X$ satisfaisant $Per_n(T) = U_n^{(r)}$.*

*Démonstration.* Supposons qu'il existe une application $T : X \longrightarrow X$ vérifiant : $Per_n(T) = U_n^{(r)}$, donc $T$ a un seul point fixe. Les points fixes de l'application $T^{(r+2)}$ sont : le point fixe de $T$ et les autres proviennent des orbites de longueur $r+2$, si elles existent. C'est à dire : si on a $Per_1(T) = 1$, alors les valeurs possibles pour $Per_{(r+2)}(T)$ sont : $1, r+3, 2r+5, 3r+7, \ldots$, ce qui contredit l'hypothèse $Per_{(r+2)}(T) = 2$. □

### 6.2.4 La suite $(a, b, r)$-Fibonacci

Soient $a, b$ deux entiers, la suite $(a, b, r)$-Fibonacci est la suite $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ d'ordre $(r+1)$ définie par la relation suivante :

$$G_{n+1}^{(r)} = G_n^{(r)} + G_{n-r}^{(r)} \text{ pour tout } (n \geq 2), \tag{6.13}$$

les conditions initiales sont données par :

$$G_0^{(r)} = a, G_1^{(r)} = b \text{ et } G_{-r}^{(r)} = G_{-r+1}^{(r)} = \cdots = G_{-1}^{(r)} = 0.$$

1. Si on prend $a = 0$ et $b = 1$, la suite $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ n'est autre que la suite $r$-Fibonacci généralisée $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$.
2. Si on prend $a = s + 1$ et $b = 1$, on retrouve les suites $r$-Lucas de type $s$ pour tout $s$ compris entre 1 et $r$.

En remarquant que les suites $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ et $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$ ont la même relation de récurrence, donc il est naturel de demander s'il y a une relation entre elles. En ce sens, nous avons le lemme suivant :

**Lemme 6.5.** *Pour tout entier $n \geq 0$, les suites $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ et $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$ satisfont la relation suivante :*

$$G_n^{(r)} = aU_{n+1}^{(r)} + (b - a)U_n^{(r)}. \tag{6.14}$$

*En particulier, pour tout entier $s$ $(1 \leq s \leq r)$ on a :*

$$V_n^{(r,s)} = (1 + s)U_{n+1}^{(r)} - sU_n^{(r)}. \tag{6.15}$$

*Démonstration.* Par un simple calcul de la fonction génératrice de la suite $G_n^{(r)}$, on trouve :

$$G(z) = G_0^{(r)} z + G_1^{(r)} z^2 + \cdots + G_{n+1}^{(r)} z^n = \frac{a + (b - a)z}{1 - z - z^{r+1}}, \tag{6.16}$$

alors, il est facile de voir que $G_n^{(r)} = aU_{n+1}^{(r)} + (b-a)U_n^{(r)}$, de sorte que la fonction génératrice de la suite $(U_n^{(r)})$ est donnée par l'expression :

$$U(z) = \frac{z}{1 - z - z^{r+1}}.$$

□

Dans le théorème suivant, on se propose d'étudier la réalisabilité de la suite $(a, b, r)$-Fibonacci.

**Théorème 6.4.** *Soit $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ une suite d'entiers positifs définie par la relation de récurrence* (6.13).
*Si $G_0^{(r)} = (r + 1)G_1^{(r)}$ et $G_1^{(r)} = G_2^{(r)} = \cdots = G_r^{(r)}$ alors $(G_n^{(r)})$ est exactement réalisable.*

Une première conséquence, la réalisabilité de la suite $r$-Lucas définie dans le Théorème 6.3 :

$$r + 1, 1, 1, \ldots, 1, r + 2, r + 3, \ldots, 2r + 1, \ldots,$$

pour tout $r \geq 1$.

*Démonstration.* Le cas $r = 1$ est déjà démontré (voir [41]), où la suite $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ est réduite à la suite de Fibonacci avec conditions initiales arbitraires, donc la condition $G_0^{(r)} = 2G_1^{(r)}$ implique $G_2^{(r)} = 3G_1^{(r)}$.
Pour le cas général $r > 1$, les termes de la suite $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ sont donnés par :

$$(r+1)G_1^{(r)}, \underbrace{G_1^{(r)}, \ldots, G_1^{(r)}}_{r \text{ terms}}, \underbrace{(r+2)G_1^{(r)}, (r+3)G_1^{(r)}, \ldots, (2r+1)G_1^{(r)}}_{r \text{ terms}}, \ldots$$

alors la suite $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ est un multiple de la suite $r$-Lucas qui est exactement réalisable. □

**Remarque 6.2.** *Concernant la partie négative de la proposition* (6.4)*, nous devons montrer que, si la suite* $(G_n^{(r)})_{n\geq 0}$ *définie par la relation de récurrence* (6.13) *est réalisable, alors la propriété* $G_0^{(r)} = (r+1)G_1^{(r)}$ *est maintenue. Pour réaliser la preuve, nous devons utiliser le lemme 6.5 et certaines propriétés de congruences de la suite* $r$*-Fibonacci* $(U_n^{(r)})_{n\geq 0}$ *modulo un nombre premier, en ce sens l'identité* (6.12) *sera utilisée.*

# Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons considéré la suite $r$-Fibonacci généralisée définie pour tout entier naturel $r \geq 1$ par :

$$\begin{cases} U_0^{(r)} = 0, \ U_k^{(r)} = x^{k-1} \ (1 \leq k \leq r), \\ U_{n+1}^{(r)} = xU_n^{(r)} + yU_{n-r}^{(r)} \ (n \geq r). \end{cases}$$

Les éléments de cette suite récurrente caractérise les champs des éléments du triangle de pascal de la forme $\binom{n-rk}{k}$ pour $k = 1, \ldots, \lfloor n/(r+1) \rfloor$. Nous avons introduit pour tous entiers $r, s$ avec $(1 \leq s \leq r)$ une famille de suites compagnons associées à la suite $r$-Fibonacci généralisée, appelées $r$-Lucas de type $s$.

$$\begin{cases} V_0^{(r,s)} = s+1, \ V_k^{(r)} = x^k \ (1 \leq k \leq r), \\ V_{n+1}^{(r,s)} = xV_n^{(r,s)} + yV_{n-r}^{(r,s)} \ (n \geq r). \end{cases}$$

Les propriétés combinatoires et algébriques de ces suites ont fait l'objet de ce travail.

1. Dans le chapitre deuxième, nous avons établi leurs séries génératrices, formes de Binet associées, formes explicites et des extensions aux indices négatifs. Nous avons donné encore quelques propriétés de convolutions et des identités de somme alternées des termes de la suite $r$-Fibonacci et de ses suites compagnons. Également, nous avons proposé des interprétations combinatoires pour les termes de la suite $r$-Fibonacci ainsi que pour la famille de ses suites compagnons.

2. Au chapitre troisième, le $q$-analogue pour les suites compagnons $r$-Lucas de type $s$ a été proposé. Nous avons aussi suggéré une extension au $(p, q)$-analogue de la suite $r$-Fibonacci généralisée et de ses suites compagnons.

3. Au chapitre quatrième, nous avons défini et étudié les suites incomplètes $r$-Lucas de type $s$, les suites hyper $r$-Fibonacci et hyper $r$-Lucas de type $s$ pour tout entier $s$ compris entre 1 et $r$.

4. Dans le chapitre cinquième, nous avons étudié la suite $r$-Fibonacci généralisée pour $r$ négatif. Nous avons proposé pour tout entier $r \geq 1$, la définition de la suite $(-r)$-Fibonacci et de sa suite compagnon, en donnant la forme explicite pour ses termes. Ensuite, nous avons établi leurs séries génératrices et les formes de Binet associées.

5. Finalement, au chapitre sixième, nous nous sommes intéressés à la réalisabilité des suites récurrentes linéaires, c'est-à-dire les suites qui comptent le nombre des points périodiques de période donnée d'un système donné. Nous avons montré que la suite $r$-Lucas de type $r$ est réalisable et nous avons caractérisé les suites $r$-Fibonacci de termes initiaux arbitraires réalisables.

Notre perspective est de s'intéresser à l'étude de la périodicité de la suite $r$-Fibonacci d'ordre 3 modulo un nombre premier $p$.

# Bibliographie


[1] **Abbad.** S, Belbachir. H, Benzaghou. B, Companion sequences associated to the $r$-Fibonacci sequence : algebraic and combinatorial properties, Turk J Math 2019, 43 : 1095-1114. DOI : 10.3906/mat-1808-27.

[2] **Abbad.** S, Belbachir. H, The $r$-Fibonacci polynomial and its companion sequences, revisited, soumis.

[3] **Abbad.** S, Belbachir. H, Realizability of some linear recurrence sequences, soumis.

[4] Ahmia. M, Belbachir. H, Belkhir. A, The Log-concavity and log convexity properties associated to hyperPell and hyperPell-Lucas sequences. Annales Mathematicae et Informaticae. 2014 ; 43 : 3-12.

[5] Ahmia. M, Belbachir. H, p,q-Analogue of a linear transformation preserving log-convexity, Indian J. Pure Appl. Math, 2018 49(3) : 549-557.

[6] Bazerniar. A, Ahmia. M, Belbachir. H, Connection between bi$^s$ nomial coefficients and their analogs and symmetric functions, Turk J Math 2018, 42 : 807-818.

[7] Bashi. MM, Mező. I, Solak. S, A symmetric algorithm for hyper-Fibonacci and hyper-Lucas numbers. Annales Mathematicae et Informaticae 2014 ; 43 : 19-27.

[8] Belbachir. H, Belkhir. A, On some generalizations of Horadam's numbers. Filomat 2018 ; 32(14) : 5037-5052. doi : 10.2298/FIL1814037B.

[9] Belbachir. H, Bencherif. F, Linear recurrent sequences and powers of a square matrix. Integers 2006 ; 6 : A12.

[10] Belbachir. H, Bencherif. F, On some proprerties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials. Journal of Integer Sequences, 2008 ; 11, Article 08.2.6.

[11] Belbachir. H, Bencherif. F, Sums of product of generalized Fibonacci and Lucas numbers. Ars Combinatoria 2013 ; 110 : 33-43.

[12] Belbachir. H, Benmezai. A, Bouyakoub. A, Cigler and Carlitz approaches for $q$-Fibonacci and $q$-Lucas polynomials. Soumis.

[13] Belbachir. H, Benmezai. A ; An alternative approach to Cigler's q-Lucas polynomials. Applied Mathematics and Computation 2013 : 691-698. doi.org/10.1016/j.amc.2013.10.009.

[14] Benjamin. A, Quinn. JJ, Su FED. Phased tilings and generalized Fibonacci identities. Fibonacci Quarterly 2000 ; 38 : 282-288.

[15] Carlitz. L, Fibonacci notes, 4 : $q$-Fibonacci polynomials. Fibonacci Quarterly 1975 ; 13 : 97-102.

[16] Cao. N, Zhao. Z, Some Properties of Hyperfibonacci and Hyperlucas Numbers, Journal of Integer Sequences, 2010 ; 13 : Article 10.8.8.

[17] Cerlienco. L, Mignotte. M, Piras. F. Suites récurrentes linéaires, propriétés algébriques et arithmétiques. Enseignements Mathématiques 1987 ; 33 : 67-108.

[18] Cigler. J, A new class of q-Fibonacci polynomials. The Electronic Journal of Combinatorics 2003 ; 10. Research Paper 19.

[19] Cigler. J, Some beautiful q-analogues of Fibonacci and Lucas polynomials. ArXiv 2011 ; 1104.2699.

[20] R. B. Corcino, On p,q-binomial coefficients, Integers, 8 : A29, 16, 2008.

[21] Dickinson.D, On sums involving binomial coefficients. American Mathematical Monthly 1950 ; 57 : 82-86.

[22] Dil. A, Kurt. V, Cenkci.M, Algorithms for Bernoulli and allied polynomials, Journal of Integer Sequences, (2007) ; 10 : Article 07.5.4.

[23] Dil. A and Mező. I, A symmetric algorithm hyperharmonic and Fibonacci numbers, Applied Mathematics and Computation 2008 ; 206 : 942-951.

[24] Dumont. D, Matrices d'Euler-Seidel, Seminaire Lotharingien de Combinatorie, 1981.

[25] Djordjevic. G. B, Srivastava. HM, Incomplete generalized Jaccobsthal and Jacobsthal-Lucas numbers. Mathematical and Computer Modelling 2005 ; 42 : 1049-1056. doi.org/10.1016/j.mcm.2004.10.026.

[26] Everest. G, Van der Poorten. A. J, Puri.Y and Ward.T, Integer Sequences and Periodic Points, Journal of Integer Sequences, Vol. 5,2002.

[27] Everest. G, Van der Poorten. A, Shpalinski. I and Ward.T, Recurrences sequences, Mathematical Surveys and Monographs, Vol 104. American Mathematical Society.

[28] Fibonacci. L, Liber Abaci, 1202.

[29] Filipponi. P, Incomplete Fibonacci and Lucas numbers. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo 1996 ; 45(1) : 37-56. doi.org/10.1007/BF02845088.

[30] Graham. RL, Knuth. DE, Patashnik. O, Concrete Mathematics - A foundation for computer science. Advanced Book Program (1st ed.). Reading, MA, USA : Addison-Wesley Publishing Company, 1989.

[31] Hardy. G, Wright. E. M, An introduction to Theory of Numbers ,Claredon Press, fifth edition, 1979.

[32] Kilic. E, The generalized order-k Fibonacci-Pell sequence by matrix methods. Journal of Computational and Applied Mathematics 2007 ; 209 : 133-145. doi.org/10.1016/j.cam.2006.10.071.

[33] Kilic. E, The Binet formula, sums and representations of generalized Fibonacci $p$-numbers. European Journal of Combinatorics 2008 ; 29 : 701-711. doi.org/10.1016/j.ejc.2007.03.004.

[34] Kilic. E, Evaluation of hessenberg determinants via generating function approach. Filomat 2017 ; 31(15) : 4945-4962. doi.org/12298/FIL1715945K.

[35] Koshy. T, Fibonacci and Lucas numbers with application. Wiley, New York, 2001.

[36] Lind. D, Marcus.B, An introduction to symbolic dynamics and coding. Cambridge University Press, Combridge (1995).

[37] Lang. S, Algebra. 3rd ed. Reading, Mass : Addison-Wesley, 1993.

[38] Lucas. E, Théorie des nombres. Paris, Gauthiers-Villars, 1891.

[39] P. B. Moss. The Arithmetic of Realizable Sequences. PhD Thesis, The University of East Anglia, (2003).

[40] Miles. EP, Generalized Fibonacci numbers and associated matrices. American Mathematical Monthly 1960 ; 67(10) : 745-752. doi : 10.2307/2308649.

[41] Puri. Y, Ward. T, Arithmetic and growth of periodic orbits. Journal of Integer Sequences, Vol. 4 (2001).

[42] Puri. Y, Arithmetic of numbers of periodic Points. PhD Thesis, The University of East Anglia, (2001).

[43] Poorten. A, Shparlinski. I, Exponential functions, linear recurrence sequences, and their applications, Centre for Number Theory Research Macquarie University, Sydney.

[44] Pinter. A, Srivastava. M, Generating functions of the incomplete Fibonacci and Lucas numbers. Rendiconti del Circolo mathematico di Palmero 1999 ; 48(3) : 591-596. doi.org/10.1007/BF02844348.

[45] Raab. JA, A generalization of the connection between the Fibonacci sequence and Pascal's triangle. Fibonacci Quarterly 1963 ; 1(3) : 21-31.

[46] Shallit. J. O, Yamron. J. P, On linear recurrence and divisibility by primes. Fibonacci Quarterly 1984 ; 22(4) : 366-368.

[47] Srivastava. HM, Manocha. HL, A treatise on generating functions. Halsted Press, Ellis Horwood Limited, Chichester, UK, John Wiley et Sons, NY, USA, 1984.

[48] Tasci. D, Firengiz. MC, Tuglu. N, Incomplete Bivariate Fibonacci and Lucas $p$-polynomials. Discrete Dynamics in Nature and Society 2012 ; Article ID 840345, 11 pages. doi : 10.1155/2012/840345.