

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTE DES MATHEMATIQUES



Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister
en Mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

LALIB MOUFIDA

Sujet

*Analyse de problèmes de contact sans frottement avec adhésion pour
des matériaux élastiques*

Soutenu publiquement, le 25/ 11 /2012, devant le jury composé de :

M ^r . BBOUCHI Rachid	Professeur	U.S.T.H.B.	Président
M ^r . TOUZALINE Arezki	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse
M ^r . KHEMMOUDJ Ammar	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur
M ^r . KESSAB Amor	Maître de Conférences	U.S.T.H.B.	Examineur

Remerciements

Mes premiers remerciements vont, comme il se doit, à Monsieur "**Arezki TOUZALINE**" Professeur à l'U.S.T.H.B, qui a assumé la direction de cette thèse. Je voudrais surtout le remercier pour ses précieux conseils et ses encouragements continuels qui ne cessaient de me remonter le moral pendant les moments difficiles.

Je remercie monsieur **Rachid BEBOUCHI** d'avoir accepté de présider le jury de thèse, se fut un grand honneur pour moi.

Je remercie aussi messieurs **Ammar KHEMMOUDJ** et **Amor KESSAB** d'avoir été membres du jury et d'avoir examiné ce travail.

Table des matières

0.1	Introduction	3
0.2	Notations	5
1	FORMULATION DES PROBLÈMES AUX LIMITES	7
1.1	Préliminaires	8
1.1.1	Espaces fonctionnels	8
1.1.2	Lemme de type Gronwall	14
1.1.3	Compléments divers	16
1.2	Formulation des problèmes aux limites	17
1.2.1	Tenseur de déformations	17
1.2.2	L'équation de mouvement	18
1.2.3	Loi de comportement	18
1.2.4	Conditions au bord	19
1.2.5	Formulation mathématique des problèmes	21
2	PROBLÈME DE CONTACT QUASI-STATIQUE AVEC ADHÉ- SION ET CONDITIONS DE SIGNORINI	25
2.1	Formulation du problème - Hypothèses	26
2.2	Formulation variationnelle du problème	30
2.3	Résultat d'existence et d'unicité de la solution	34
3	PROBLÈME DE CONTACT QUASI-STATIQUE AVEC ADHÉ- SION ET COMPLIANCE NORMALE	42
3.1	Formulation du problème - Hypothèses	42
3.2	Formulation variationnelle du problème	45

3.3	Résultat d'existence et d'unicité de la solution	47
4	PROBLÈME PÉNALISÉ	52
4.1	Problème mécanique et Formulation variationnelle	52
4.2	Existence et unicité de la solution	55
4.3	Résultat de convergence	58
4.4	Exemple de fonction F :	65

0.1 Introduction

Les problèmes de contact sans frottement entre deux corps déformables ou entre un corps déformable et une fondation rigide abondent en industrie et dans la vie de tous les jours. Le contact du sabot de frein avec le disque, de la chemise avec le piston, des pneus d'une voiture avec le sol, l'enfoncement progressif d'une personne dans un fauteuil et le contact entre les plaques tectoniques, sont des exemples courants. Vu l'importance de ces phénomènes physiques, des efforts considérables ont été consacrés à l'étude de ces problèmes de contact.

Le processus d'adhésion est un phénomène d'interface qui accompagne le contact. Il joue un rôle important dans l'industrie en particulier dans l'assemblage des matériaux composites. Les modèles de base peuvent être trouvés dans [3, 7, 9, 10, 14]. L'analyse des modèles avec contact adhésif peut être trouvée dans [1, 2, 4, 5, 6, 8, 11, 12, 18]. Dans les travaux [9] et [10], Frémond propose une théorie nouvelle du contact avec adhésion, issue de la mécanique des milieux continus.

Cette théorie se base sur les conditions du contact unilatéral de Hertz-Signorini-Moreau; elle utilise une variable interne β additionnelle qui mesure localement " l'intensité de l'adhésion ". Cette variable est régie par une loi d'évolution au-delà du seuil d'adhésion. Les modèles étudiés dans [1, 2, 11, 18] comportent des géométries spéciales. En effet, le problème d'un faisceau en contact adhésif peut être trouvé dans [1, 2]. Le contact adhésif d'une membrane a été étudié respectivement dans les cas quasi-statique ou dynamique, par contre dans [18] un modèle de contact adhésif d'antiplan a été étudié pour trouver une solution faible unique en élasticité linéaire. D'ailleurs, une nouvelle application de la théorie du contact adhésif dans le domaine médical des membres prothétiques à été considérée dans [15, 16].

La nouveauté dans tout cela est l'introduction d'une variable de surface interne qui est " *le champ d'adhésion* " noté dans cette thèse par β . Ce champ décrit la fraction ponctuelle de la densité d'adhésion active sur la surface de contact, parfois il est nommé " *intensité d'adhésion* ".

Selon [9] et [10], le champ d'adhésion satisfait les restrictions $0 \leq \beta \leq 1$.

Quand $\beta = 1$ en un point de la surface de contact, l'adhésion est complète et toutes les liaisons sont actives. Si $\beta = 0$ toutes les liaisons sont inactives, coupées et il

n'y a pas d'adhésion. Mais lorsque $0 < \beta < 1$ l'adhésion est partielle et seulement une fraction β des liaisons est active. Sur ce sujet, nous renvoyons le lecteur à la bibliographie [14, 15, 17].

Le but de ce travail est d'exposer et d'étudier les problèmes de contact quasi-statiques entre un corps élastique et une fondation. Le contact est sans frottement et avec adhésion. On établit pour chaque problème une formulation variationnelle dont on montre un résultat d'existence et d'unicité. Aussi on montre que la solution du problème de contact unilatéral sans frottement avec adhésion peut être obtenue comme limite de la solution d'un problème pénalisé quand le paramètre de pénalisation tend vers 0.

Le manuscrit est composé de quatre chapitres. Dans le premier chapitre on rappelle certaines notions mathématiques nécessaires à l'appréhension du travail. On écrit la formulation mathématique des différents problèmes mécaniques qui seront traités par la suite ainsi que les notions des espaces fonctionnels, notamment de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation en rappelant les théorèmes de trace. Nous rappelons également les résultats abstraits standards d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques.

Dans le deuxième chapitre, on s'intéresse à l'étude du problème élastique non-linéaire avec adhésion, ce problème est de contact quasi-statique sans frottement avec un support rigide. Le contact est modélisé à l'aide des conditions de Signorini. Nous présentons une formulation variationnelle du problème et nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution faible.

Le troisième chapitre est consacré à l'étude du problème de contact avec compliance normale, sans frottement avec adhésion, entre un corps élastique non-linéaire et une fondation déformable. On propose une formulation variationnelle du problème puis nous présentons les résultats d'existence et d'unicité de la solution.

Enfin, dans le quatrième chapitre, on étudie un problème pénalisé dont on montre l'existence et l'unicité de la solution. On montre que la solution du problème de contact sans frottement avec adhésion s'obtient comme limite du problème de contact avec compliance normale lorsque le paramètre de pénalisation tend vers 0.

0.2 Notations

Si Ω est un domaine de \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), on note par :

Γ	la frontière de Ω .
Γ_i ($i = \overline{1, 3}$)	une partie mesurable de la frontière Γ .
$mes\Gamma_1$	la mesure de lebesgue $(d - 1)$ dimensionnelle de Γ_1 .
ν	la normale unitaire sortante à Γ .
v_ν	la composante normale du champ vectoriel v .
σ_ν	la composante normale du champ tensoriel σ .
$C^1(\overline{\Omega})$	l'espace des fonctions réelles continûment différentiables sur $\overline{\Omega}$.
$D(\Omega)$	l'espace des fonctions réelles indéfiniment différentiables et à support compact contenu dans Ω .
H_Γ	l'espace $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$.
H'_Γ	l'espace dual de H_Γ .
$\operatorname{div} \sigma, \operatorname{Div} \sigma$	la divergence de σ .
H	l'espace $L^2(\Omega)^d$.
Q	l'espace $L^2(\Omega)_s^{d \times d}$.
H_1	l'espace $H_1(\Omega)^d$.
Q_1	l'espace $\{\sigma \in Q : \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in H\}$.
$\gamma : C^1(\overline{\Omega})^d \rightarrow L^2(\Omega)^d$	l'application trace pour les fonctions vectorielles.

Si X est un espace de Hilbert réel et d est un entier non nul, on utilise les notations suivantes :

X^d	l'espace $\{x = (x_i) \mid x_i \in X, i = 1, \dots, d\}$.
$(\cdot, \cdot)_X$	le produit scalaire de X .
$\ \cdot\ _X$	la norme de X .
$x_n \rightarrow x$	la convergence forte de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .
$x_n \rightharpoonup x$	la convergence faible de la suite (x_n) vers l'élément x dans X .

Si de plus $[0, T]$ est un intervalle de temps, $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq +\infty$, on note par

$C([0, T]; X)$	l'espace des fonctions continues sur $[0, T]$ à valeurs dans X .
$\ \cdot\ _{C([0, T]; X)}$	la norme de $C([0, T]; X)$
$L^p(0, T; X)$	l'espace de Lebesgue.
$\ \cdot\ _{L^p(0, T; X)}$	la norme de $L^p(0, T; X)$
$W^{k,p}(0, T; X)$	l'espace de Sobolev.
$\ \cdot\ _{W^{k,p}(0, T; X)}$	la norme de $W^{k,p}(0, T; X)$.

Pour une fonction u , on note par :

$\varepsilon(u)$	le tenseur de déformation linearisé.
$\partial_i u$	la dérivée partielle de u par rapport à la i ème composante x_i .

Autres notations :

S^d	l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur \mathbb{R}^d .
c	une constante générique strictement positive.
$p.p.$	presque partout.
$t.q$	tel que (telle que).
$i.e$	c'est-à-dire.

Chapitre 1

FORMULATION DES PROBLÈMES AUX LIMITES

Le but de ce chapitre est l'introduction et la formulation mathématique des problèmes mécaniques auxquels on s'intéresse ainsi que le rappel sur les notions nécessaires en théorie des milieux continus et d'analyse fonctionnelle pour l'appréhension de ce travail.

Ce chapitre est constitué de deux parties. La première partie se compose de trois sections. Dans les deux premières sections on introduit des espaces fonctionnels notamment de type Sobolev associés aux opérateurs divergence et déformation en rappelant le théorème de trace, les propriétés essentielles et le lemme de Gronwall. Dans la troisième section on rappelle des résultats d'existence et d'unicité concernant les inéquations variationnelles elliptiques.

La deuxième partie est composée de cinq sections. Dans les trois premières sections on fait des rappels sur le tenseur des contraintes, le champ des déplacements, le tenseur des déformations et la loi de comportement. Dans la quatrième section on présente des conditions aux limites sans frottement d'un corps déformable avec une fondation. Enfin dans la dernière section on présente les modèles généraux des problèmes de contact adhésif d'un corps déformable avec une fondation qu'on utilisera par la suite.

1.1 Préliminaires

Afin de faciliter la lecture de ce manuscrit, nous jugeons utile et nécessaire de rappeler, dès maintenant, quelques éléments d'analyse fonctionnels. Nous commençons par les espaces fonctionnels.

1.1.1 Espaces fonctionnels

On introduit dans cette section les différents espaces de type Sobolev et les espaces fonctionnels utilisés en mécanique. On présente leurs principales propriétés et notamment le théorème de trace. On rappelle aussi quelques espaces de fonctions définis sur un intervalle réel et à valeurs dans un espace de Hilbert. On adopte ici la convention de sommation d'indice muet.

Espaces des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}

Un multi indice est une collection de d entiers non négatifs, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_d)$. On note $|\alpha| = \sum_{i=1}^d \alpha_i$. Si une fonction réelle v définie sur Ω est n fois différentiable, alors pour tout $|\alpha| < n$,

$$D^\alpha v(x) = \frac{\partial^{|\alpha|} v(x)}{\partial^{\alpha_1} x_1 \cdots \partial^{\alpha_d} x_d}$$

est la dérivée partielle de v d'ordre α .

Les espaces L^p

i) On introduit sur Ω l'espace $L^p(\Omega)$, c'est l'espace de fonctions, défini pour $1 \leq p < \infty$ par :

$$L^p(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } v \text{ mesurable et } |v|^p \in L^1(\Omega)\}$$

$L^1(\Omega)$ est un espace de Banach pour la norme définie par :

$$\|v\|_{L^1(\Omega)} = \int_{\Omega} |v(x)| dx.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

$L^p(\Omega)$ muni de cette norme est un espace de Banach. En particulier, $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert muni du produit scalaire donné par

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} v(x) w(x) dx$$

ii) On introduit aussi pour $p = \infty$ l'espace :

$$L^\infty(\Omega) = \{v : \Omega \rightarrow \mathbb{R} ; v \text{ mesurable et il existe } c > 0 \text{ t.q. } |v(x)| \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega\}$$

$L^\infty(\Omega)$ est aussi un espace de Banach pour la norme

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^\infty(\Omega)} &= \sup_{x \in \Omega} |v(x)|. \\ &= \inf \{c > 0; |f(x)| \leq c \text{ p.p. } x \in \Omega\}. \end{aligned}$$

La convergence forte et faible

– Soit $1 \leq p \leq \infty$, on dit que (v_n) converge fortement vers v dans $L^p(\Omega)$ si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|v_n - v\|_{L^p(\Omega)} = 0$$

– Si $1 \leq p \leq \infty$ et si $v_n \rightarrow v$ fortement dans $L^p(\Omega)$, alors $\|v_n\|_{L^p(\Omega)} \rightarrow \|v\|_{L^p(\Omega)}$ dans \mathbb{R} .

- Si $1 \leq p < \infty$ et si $v_n \rightharpoonup v$ faiblement (i.e $v_n \rightharpoonup v$) dans $L^p(\Omega)$, alors (v_n) est bornée, de plus

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|_{L^p(\Omega)}.$$

Espace de Sobolev On appelle *espace de Sobolev* d'ordre m sur $L^p(\Omega)$ et l'on note $W^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{v / v \in L^p(\Omega), D^\alpha v \in L^p(\Omega), |\alpha| \leq m\}$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach muni la norme

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Le cas $p = 2$ est fondamental, pour simplifier l'écriture, on posera $W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$ qui est *un espace de Hilbert* muni du produit scalaire

$$(v, w)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} (D^\alpha v, D^\alpha w).$$

Théorème de trace

Si Γ est de classe C^1 alors, il existe une application linéaire et continue $\gamma : v \mapsto v|_\Gamma$ appelée l'application trace définie sur H_1 à valeurs dans $L^2(\Gamma)^d$.

$$L^2(\Gamma) = \{f \mid f \text{ mesurable et de carré sommable sur } \Gamma \text{ pour la mesure } d\Gamma\}.$$

Rappelons que l'application de trace $\gamma : H_1 \rightarrow L^2(\Gamma)^d$ n'est pas surjective. L'espace image de H_1 par cette application est un sous espace de $L^2(\Gamma)^d$ noté $H_\Gamma = H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)^d$ qui est un espace de Hilbert. L'application: $v \mapsto \gamma v$ est linéaire continue et surjective de H_1 dans H_Γ . On utilisera souvent la notation v au lieu de γv désignant la trace de v sur Γ .

Soit H'_Γ le dual H_Γ , on note son produit de dualité par

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma},$$

et pour tout $\sigma \in Q_1$ on a la formule de Green :

$$\langle \sigma(t) \nu, \gamma u(t) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} = (\sigma, \varepsilon(u))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v)_H \quad \forall v \in H_1.$$

Espaces des fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^d ou dans $\mathbb{R}^{d \times d}$ et propriétés

Dans cette partie, on va étendre les définitions et les propriétés précédentes aux cas des espaces de fonctions à valeurs dans \mathbb{R}^d et celles à valeurs dans $\mathbb{R}^{d \times d}$.

Rappelons que Ω un ouvert de \mathbb{R}^d et S^d désigne l'espace des tenseur symétriques d'ordre deux sur \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), “ \cdot ” et $\|\cdot\|$ représentent respectivement le produit scalaire et la norme euclidienne sur \mathbb{R}^d et S^d respectivement. Ainsi,

$$u \cdot v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v \cdot v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d$$

$$\sigma \cdot \tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau \cdot \tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in S^d.$$

Pour le champ des déplacements et le champ des contraintes nous utilisons les espaces suivants :

$$H = L^2(\Omega)^d = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega)\},$$

$$H_1 = H^1(\Omega)^d = \{u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega)\},$$

$$Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega)\},$$

$$Q_1 = \{\sigma \in Q / \operatorname{div} \sigma = (\sigma_{ij,j}) \in L^2(\Omega)^d\}.$$

Les espaces H , H_1 , Q et Q_1 sont des espaces de Hilbert réel munis des produits scalaires donnés respectivement par :

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx,$$

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx,$$

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q,$$

$$(\sigma, \tau)_{Q_1} = (\sigma, \tau)_Q + (\operatorname{div} \sigma, \operatorname{div} \tau)_H,$$

Les normes sur les espaces H , H_1 , Q et Q_1 sont notées par $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_1}$, $\|\cdot\|_Q$ et $\|\cdot\|_{Q_1}$, respectivement. Puisque la frontière Γ est lipschitzienne, le vecteur normal extérieur ν à la frontière est défini p.p. Pour tout champ de vecteurs $v \in H_1$ nous utilisons la notation v pour désigner la trace de v sur Γ et nous notons par v_ν la composante normale de v sur la frontière donnée par

$$v_\nu = v \cdot \nu.$$

Pour σ un champ tensoriel régulier (C^1), sa trace normale sur la frontière est le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu$. Nous définissons la composante normale sur la frontière par la formule :

$$\sigma_\nu = (\sigma\nu) \cdot \nu.$$

Rappelons aussi la formule de Green ci-dessous :

$$(\sigma, \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma_\nu \cdot v \, da \quad \forall v \in H_1. \quad (1.1.1)$$

Soit un corps matériel (*Fig.1*) qui occupe un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$), de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée régulière, constituée de trois parties Γ_1 , Γ_2 et Γ_3 mesurables et disjointes, on introduit l'ensemble

$$Z = \{\beta \in L^\infty(\Gamma_3) / 0 \leq \beta \leq 1 \text{ p.p. sur } \Gamma_3\} \quad (1.1.2)$$

Pour le champ des déplacements nous avons besoin du sous-espace fermé V de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 : v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\} \quad (1.1.3)$$

Proposition 1.1.1 (l'inégalité de Korn)

Si $\operatorname{mes}(\Gamma_1) > 0$ alors il existe une constante $c_\Omega > 0$ dépendant seulement de Ω et Γ_1 telle que :

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c_\Omega \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V. \quad (1.1.4)$$

Une preuve de cette inégalité peut être trouvée dans [21 p.79]. Considérons dans V le produit scalaire défini par :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v)), \quad \forall u, v \in V, \quad (1.1.5)$$

et soit $\|\cdot\|_V$ la norme associée, i.e.

$$\|v\|_V = \|\varepsilon(v)\|_Q, \quad \forall v \in V, \quad (1.1.6)$$

On a un **théorème de trace de Sobolev** :

il existe une constante $c_0 > 0$ dépendant uniquement de Ω , Γ_1 et Γ_3 telle que

$$\|v\|_{L^2(\Gamma_3)^d} \leq c_0 \|v\|_V \quad \forall v \in V. \quad (1.1.7)$$

Remarque 1.1.2.

Si $mes(\Gamma_1) > 0$ alors de l'inégalité de Korn on déduit que “ $v \longrightarrow \|\varepsilon(v)\|_Q$ ” est une norme sur V équivalente à la norme canonique $\|\cdot\|_{H_1}$ et ainsi $(V, \|\cdot\|_V)$ est un espace de Hilbert réel.

Espace de fonctions à valeurs vectorielles $W^{k,p}(0, T; X)$ ou X est un espace de Banach On rappelle les principaux résultats sur les fonctions définies sur un intervalle de temps et à valeurs dans un espace de Banach réel. Nous notons par $C([0, T]; X)$ l'espace des fonctions continues définies sur $[0, T]$ dans X , muni de la norme :

$$\|u\|_{C([0, T]; X)} = \max_{t \in [0, T]} \|u(t)\|_X.$$

Pour tout espace de Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ et $T > 0$ nous utilisons les notations classiques des espaces $L^p(0, T; X)$ et $W^{k,p}(0, T; X)$ pour $k \in [0, \infty]$ et $1 \leq p \leq \infty$.

L'espace $L^p(0, T; X)$ désigne l'espace des (class de) fonctions $u : [0, T] \longrightarrow X$

mesurables, qui sont des espaces de Banach pour la norme :

$$\|u\|_{L^p(0,T;X)} = \begin{cases} \left(\int_0^T \|v(t)\|_X^p dt \right)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < \infty \\ \sup_{t \in [0,T]} \text{ess } \|v(x)\|_X & \text{si } p = \infty \end{cases}$$

En particulier l'espace $L^2(0, T; X)$ est un espace de Hilbert, muni du produit scalaire :

$$(u, v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t), v(t))_X dt$$

Par ailleurs, l'espace $W^{k,\infty}(0, T; X)$ est un espace de Banach pour la norme définie par :

$$\|u\|_{W^{k,\infty}(0,T;X)} = \sum_{j=0}^k \sup_{t \in [0,T]} \text{ess } \|D_j u\|_X$$

Pour le cas particulier $k = 0$

$$W^{k,\infty}(0, T; X) = L^\infty(0, T; X)$$

et on note la norme de $L^\infty(0, T; X)$ par $\|\cdot\|_{L^\infty(0,T;X)}$.

Pour $k = 1$, l'espace $W^{1,\infty}(0, T; X)$ est défini par :

$$W^{1,\infty}(0, T; X) = \left\{ u : [0, T] \longrightarrow X \text{ tel que } : u \in L^\infty(0, T; X) \text{ et } \dot{u} \in L^\infty(0, T; X) \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,\infty}(0,T;X)} = \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} + \left\| \dot{u} \right\|_{L^\infty(0,T;X)}$$

1.1.2 Lemme de type Gronwall

Nous rappelons ici les lemmes classiques du type Gronwall qui interviennent dans de nombreux problèmes de majoration et d'estimation d'erreur, en particulier pour établir l'unicité de la solution.

Lemme 1.1.3. Soient $m, \eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ telles que $m(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, $a \geq 0$ une constante, et $\Psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$.

(1) Si

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t m(s) ds + \int_0^t \eta(s) \Psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T]$$

alors

$$\Psi(t) \leq \left(a + \int_0^t m(s) ds \right) \exp \left(\int_0^t \eta(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

(2) Si

$$\Psi(t) \leq m(t) + a \int_0^t \Psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T], \quad (1.1.8)$$

alors

$$\int_0^t \Psi(s) ds \leq e^{aT} \int_0^t m(s) ds.$$

Pour le cas particulier $m = 0$, la partie (1) de ce lemme devient

Corollaire 1.1.4. Soit $\eta \in C([0, T]; \mathbb{R})$ tel que $\eta(t) \geq 0$ pour tout $t \in [0, T]$, et soit $a \geq 0$. Si $\Psi \in C([0, T]; \mathbb{R})$ est une fonction telle que

$$\Psi(t) \leq a + \int_0^t \eta(s) \Psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T],$$

alors

$$\Psi(t) \leq a \exp \left(\int_0^t \eta(s) ds \right) \quad \forall t \in [0, T].$$

Le corollaire 1.1.4. est souvent utilisé pour montrer l'unicité de la solution de la façon suivante :

On suppose deux solutions, en notant par Ψ la norme de la différence entre ces

solutions, on essaie ensuite de majorer Ψ sous la forme

$$\Psi(t) \leq \int_0^t \eta(s) \Psi(s) ds \quad \forall t \in [0, T].$$

1.1.3 Compléments divers

Dans cette section on présente des résultats d'existence et d'unicité concernant les équations variationnelles elliptiques, les équations d'évolution et les équations différentielles ordinaires dans les espaces de Hilbert.

Nous commençons cette section par un bref rappel sur les opérateurs fortement monotone et de Lipschitz. A cette fin, soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur : L'opérateur A est dit :

(a) *fortement monotone* s'il existe $m > 0$ tel que

$$(Au - Av, u - v)_X \geq m \|u - v\|_X^2 \quad \forall v, u \in X. \quad (1.1.9)$$

(b) *de Lipschitz* s'il existe $M > 0$ tel que

$$\|Au - Av\|_X \leq M \|u - v\|_X \quad \forall u, v \in X. \quad (1.1.10)$$

(voir [17])

Théorème 1.1.5 *Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz, K un convexe fermé non-vide de X est $f \in X$. Alors le problème :*

Trouver $u \in K$ tel que :

$$(Au, v - u) \geq (f, v - u)_X \quad \forall v \in K$$

admet une solution unique (voir [17]).

Proposition 1.1.6 *Soit $A : X \longrightarrow X$ un opérateur fortement monotone et de Lipschitz. Alors, pour tout $f \in X$ il existe un élément unique $u \in X$ tel que $Au = f$.*

On finit cette section par le résultat suivant :

Théorème 1.1.7 (voir [17]) *Soit $(X, \|\cdot\|_X)$ un espace de Banach réel et $T > 0$, soit $F(t, \cdot) : X \rightarrow X$ un opérateur défini p.p. sur $(0, T)$, qui satisfait les conditions suivantes :*

- *Il existe $L_F > 0$ tel que $\|F(t, x) - F(t, y)\|_X \leq L_F \|x - y\|_X \quad \forall x, y \in X, p.p. t \in (0, T)$.*
- *Il existe $p \geq 1$ tel que $t \mapsto F(t, x) \in L^p(0, T; X) \quad \forall x \in X$.*

Alors, pour tout $x_0 \in X$, il existe une fonction unique $x \in W^{1,p}(0, T; X)$ telle que

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= F(t, x(t)) \quad p.p. t \in (0, T), \\ x(0) &= x_0. \end{aligned}$$

1.2 Formulation des problèmes aux limites

Un solide est un ensemble de particules ou de points matériels. Chaque particule du solide occupe un point de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) et le solide est associé à une configuration qui est le domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$. Dans tout ce qui suit, on va considérer un corps déformable occupant un domaine borné Ω de \mathbb{R}^d ($d = 2, 3$) de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ supposée régulière. On étudie dans un intervalle de temps $[0, T]$, l'évolution du corps due à l'application de forces de volume et de surface.

1.2.1 Tenseur de déformations

Les tenseurs du second ordre jouent un rôle important en mécanique des milieux continus. Lorsque le corps est soumis à des tractions extérieures et des forces de volume il se déforme, c'est-à-dire que chaque point à l'intérieur du corps, se retrouvera à une position différente après déformation. On s'intéresse, au seul cas de petites déformations, le *tenseur des déformations linéarisé* noté ε_{ij} , est défini par

$$\varepsilon(u) = (\varepsilon_{ij}(u)), \quad \varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\partial_j u_i + \partial_i u_j)$$

où ∂_i représente l'opérateur de dérivation partielle par rapport à la variable x_i . On adopte la convention de sommation d'indice muet.

1.2.2 L'équation de mouvement

Dans toute la suite S^d désigne l'espace des tenseurs symétriques du second ordre sur \mathbb{R}^d , $\operatorname{div} \sigma$ est la divergence du champ des contraintes σ , et $f_0 : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ est la densité des forces volumiques.

Pour l'étude d'un système physique dans le cas statique ou quasi-statique, l'équation d'équilibre s'écrit :

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T). \quad (1.2.2)$$

où $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S^d$ est le champ des contraintes.

Remarque 1.2.1. L'équation (1.2.2) ne suffit pas à elle seule pour décrire les mouvements des milieux continus. En effet, il faut la compléter par une description propre au matériau. C'est l'objet de la loi de comportement qu'on va introduire brièvement dans la section suivante.

1.2.3 Loi de comportement

Dans un corps élastique, l'action d'un certain nombre d'efforts conduit à un certain nombre de déformations, si l'on connaît la relation entre les deux, à savoir la relation entre le tenseur des contraintes σ_{ij} et le tenseur des déformations ε_{ij} , on est capable de caractériser et de prévoir le comportement mécanique du matériau. Cette relation d'origine souvent expérimentale, est appelée *loi de comportement*. On présente ci-dessous la loi de comportement élastique traitée dans ce mémoire.

Pour les matériaux élastiques non-linéaires, la loi de comportement est de la forme

$$\sigma = F(\varepsilon) \quad (1.2.3)$$

où $F = (F_{ijkh})$ est une application non linéaire.

1.2.4 Conditions au bord

La prise en compte du contact en mécanique des solides déformables impose la définition des conditions aux limites sur les déplacements et sur les forces aux interfaces de contact.

Condition de traction-déplacement

On considère les conditions aux limites suivantes :

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T) \quad (1.2.4)$$

$$\sigma\nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T) \quad (1.2.5)$$

- La condition (1.2.4) est appelée *condition aux limites de déplacement*, elle signifie que le corps est encastré en Γ_1 .
- La condition (1.2.5) est appelée *condition aux limites de traction*, elle signifie que le vecteur des contraintes de Cauchy $\sigma\nu = (\sigma_{ij}\nu_j)$, $i = 1, \dots, d$ est imposé sur la partie Γ_2 , où f_2 représente *la densité des forces surfaciques appliquées*.

Loi de contact avec adhésion

Le contact avec adhésion entre des corps déformables, quand de la colle est utilisée afin d'éviter le déplacement relatif des surfaces, a reçu récemment une attention accrue dans la littérature mathématique.

– Évolution du champ d'adhésion.

L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle de la forme :

$$\dot{\beta} = - (\gamma_\nu \beta (R_\nu(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad (1.2.6)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (1.2.7)$$

Ici γ_ν est le coefficient d'adhésion. R_ν est un opérateur de troncation défini par :

$$R_\nu(s) = \begin{cases} L & \text{si } s < -L, \\ -s & \text{si } -L \leq s \leq 0, \\ 0 & \text{si } s > 0, \end{cases} \quad (1.2.8)$$

où $L > 0$ est la longueur caractéristique de la liaison.

- **Condition de contact de type Signorini avec adhésion.** Cette condition modélise le contact avec une fondation rigide; elle est donnée par les relations suivantes :

$$\begin{aligned} u_\nu \leq 0, \sigma_\nu - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu) \beta^2 &\leq 0, \\ (\sigma_\nu - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu) \beta^2) u_\nu &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{aligned} \quad (1.2.9)$$

Ici u_ν et σ_ν représentent respectivement la composante normale du champ des déplacements et du champ des contraintes.

Si nous choisissons dans (1.2.9) L assez large, on peut supposer que $R_\nu(u_\nu) = -u_\nu$, d'où les conditions de contact (1.2.9) deviennent :

$$\begin{aligned} u_\nu \leq 0, \sigma_\nu + \gamma_\nu u_\nu \beta^2 &\leq 0, \\ (\sigma_\nu + \gamma_\nu u_\nu \beta^2) u_\nu &= 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{aligned} \quad (1.2.10)$$

Ces conditions ont été utilisées dans [6, 14] pour modéliser le contact adhésif unilatéral. On déduit de (1.2.10) qu'il n'y pas d'interpénétration entre le corps et l'obstacle puisque $u_\nu \leq 0$ durant le processus. Quand le champ d'adhésion est nul, (1.2.10) devient

$$u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu u_\nu \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T).$$

Ce sont les conditions de contact classiques de Signorini, sans adhésion.

- **Contact avec compliance normale et adhésion.** Dans ce cas, la fondation est déformable. La contrainte normale σ_ν satisfait la condition dite de

compliance normale avec adhésion, c'est-à-dire

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.2.11)$$

où p_ν est une fonction non-négative. Le deuxième terme de l'égalité (1.2.11) est la contribution de l'adhésion (*voir, e.g., [14]*). Cependant, si nous choisissons L suffisamment grand, la contribution de l'adhésion à la traction normale est représentée par $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$; la traction adhésive est en tension et est proportionnelle (avec coefficient de proportionnalité γ_ν) au carré de l'intensité de l'adhésion et au déplacement normal.

Comme exemple de fonctions de compliance normale, nous prouvons considérer

$$p_\nu(r) = cr_+$$

et

$$p_\nu(r) = \begin{cases} cr_+ & \text{si } r \leq \alpha \\ c\alpha & \text{si } r > \alpha \end{cases}$$

où $c > 0$ et $\alpha > 0$ sont des paramètres de surface (*voir [17]*).

1.2.5 Formulation mathématique des problèmes

En mécanique des milieux continus, l'évolution d'un corps déformable sous l'action des efforts extérieurs, est modélisée par un système d'équations aux dérivées partielles contenant l'équation d'équilibre, la loi de comportement du matériau ainsi que les conditions initiales et aux limites auxquelles il est soumis. Dans la suite, nous allons introduire les modèles généraux des problèmes de contact adhésif étudiés dans ce manuscrit.

La position du problème est la suivante :

Considérons un corps élastique non-linéaire en évolution quasi-statique occupant dans son état non déformé un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, de frontière $\Gamma = \bar{\Gamma}_1 \cup \bar{\Gamma}_2 \cup \bar{\Gamma}_3$, où $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont trois parties disjointes suffisamment régulières de Γ et $mes(\Gamma_1) > 0$. Supposons que le corps est fixé sur Γ_1 et notons par f_0 la densité volumique des forces, données dans Ω et par f_2 la densité surfacique des forces, données sur Γ_2 . Soit $T > 0$; nous étudions dans l'intervalle de temps $[0, T]$ l'évolution du corps sous l'application de forces de volume et de forces surfaciques.

Nous notons par $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ le champ de déplacements, $\sigma : \Omega \times [0, T] \longrightarrow S^d$ le champ de contraintes, $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ le champ d'adhésion et $\varepsilon(u)$ le tenseur des déformations linéarisé.

Dans la configuration de référence (1.1) le corps est en contact adhésif sans frottement avec un obstacle, ce que l'on appelle une fondation, sur la surface potentielle de contact Γ_3 .

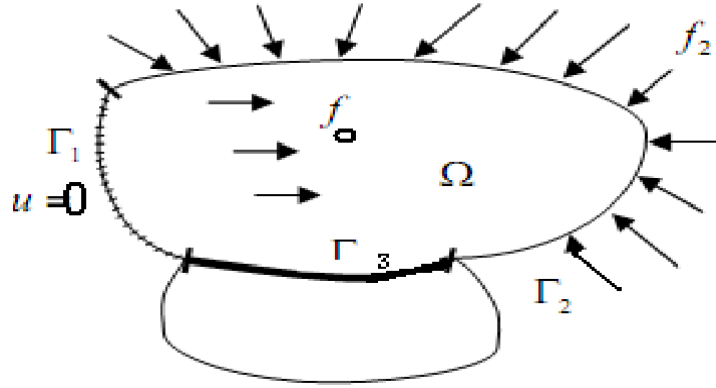


FIG.1.1 – Cadre physique

Dans la suite, notre objectif, est l'étude du problème de contact sans frottement de Signorini avec adhésion, ainsi que le problème sans frottement de compliance

normale avec adhésion, pour des matériaux élastiques non-linéaires. Les problèmes de contact que nous considérons peuvent être formulés de la façon suivante :

Problème P_1 : (contact unilatéral sans frottement avec adhésion)

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2.12)$$

$$\sigma = F \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2.13)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (1.2.14)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.2.15)$$

$$\begin{aligned} u_\nu \leq 0, \quad \sigma_\nu - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu) \beta^2 \leq 0, \\ (\sigma_\nu - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu) \beta^2) u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \end{aligned} \quad (1.2.16)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.2.17)$$

$$\dot{\beta} = -(\gamma_\nu \beta (R_\nu(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.2.18)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.2.19)$$

Problème P_2 : (contact avec compliance normale et adhésion)

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$ et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2.20)$$

$$\sigma = F \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (1.2.21)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (1.2.22)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (1.2.23)$$

$$\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.2.24)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.2.25)$$

$$\dot{\beta} = - (\gamma_\nu \beta (R_\nu (u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (1.2.26)$$

$$\beta (0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (1.2.27)$$

Par rapport au problème P_2 , ici on utilise une condition de compliance normale avec adhésion, (1.2.24), qui remplace la condition de Signorini (1.2.16).

Chapitre 2

PROBLÈME DE CONTACT QUASI-STATIQUE AVEC ADHÉSION ET CONDITIONS DE SIGNORINI

Dans ce chapitre on considère un problème de contact quasi-statique entre un corps élastique non-linéaire et un obstacle. Le contact est sans frottement et il est modélisé à l'aide d'une condition de Signorini dans laquelle on tient compte de l'adhésion des surfaces en contact. L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Notre objectif est de formuler le problème variationnel et prouver l'existence et l'unicité de la solution.

La formulation classique du problème mécanique traité est donnée par le problème P_1 .

2.1 Formulation du problème - Hypothèses

Nous considérons un corps élastique non-linéaire qui occupe un domaine $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 2, 3$) de frontière Γ supposée régulière. On décompose Γ en trois parties mesurables et disjointes Γ_1, Γ_2 et Γ_3 , telle que $mes(\Gamma_1) > 0$. Le corps est encastré en Γ_1 , soumis à des forces volumiques dans Ω et à des forces surfaciques sur Γ_2 . Le long de Γ_3 , le corps est en contact adhésif sans frottement avec le support. Cela revient à étudier le problème P_1 du chapitre 1, section 1.1.5.

Problème P_1 :

Trouver le champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^d$, et le champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \rightarrow [0, 1]$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.1)$$

$$\sigma = F \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (2.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (2.1.3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (2.1.4)$$

$$u_\nu \leq 0, \sigma_\nu - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu) \beta^2 \leq 0, \quad (2.1.5)$$

$$(\sigma_\nu - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu) \beta^2) u_\nu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T),$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.6)$$

$$\dot{\beta} = -(\gamma_\nu \beta (R_\nu(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (2.1.7)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \quad (2.1.8)$$

Rappelons ici que :

L'équation (2.1.1) représente l'équation d'équilibre.

L'équation (2.1.2) représente la loi de comportement du matériau où $\varepsilon(u)$ représente le tenseur des déformations linéarisé.

Les conditions (2.1.3), (2.1.4) sont les conditions aux limites classiques de dépla-

cement-traction.

L'équation (2.1.5) représente les conditions de Signorini avec adhésion où γ_ν est un coefficient d'adhésion.

La condition (2.1.6) représente la condition de contact sans frottement et montre que la contrainte tangentielle disparaît sur la surface de contact pendant le processus.

L'équation (2.1.7) est l'équation différentielle ordinaire décrivant l'évolution du champ d'adhésion où le paramètre ϵ_a est un coefficient d'adhésion γ_ν et $r_+ = \max\{0, r\}$, $r \in \mathbb{R}$. Nous notons que dans ce modèle, s'il y a décohésion, l'adhésion ne peut se rétablir, car $\dot{\beta} \leq 0$. En outre, il est facile de voir que si $0 \leq \beta_0 \leq 1$ p.p sur Γ_3 , alors $0 \leq \beta(t) \leq 1 \forall t \in [0, T]$ p.p sur Γ_3 pendant le processus (voir le remarque ci-dessous).

Enfin, dans (2.1.8) on a la condition initiale dans laquelle β_0 représente le champ d'adhésion initial.

Remarque 2.1.1.

Il est facile de voir que si $0 \leq \beta_0 \leq 1$ p.p. sur Γ_3 , alors $0 \leq \beta \leq 1$ p.p. sur Γ_3 pendant le processus. En effet, des équations (2.1.7) et (2.1.8) on obtient que $\beta(x, t) \leq \beta_0(x)$ et c'est pourquoi l'hypothèse (1.1.2) montre que $\beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t > 0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. D'autre part, si $\beta(x, t_0) = 0$ à l'instant t_0 , alors il s'ensuit de (2.1.7) et (2.1.8) que $\dot{\beta}(x, t) = 0$ pour tout $t > t_0$ et ainsi $\beta(x, t) = 0$ pour tout $t > t_0$, p.p. $x \in \Gamma_3$. Nous concluons que $0 \leq \beta(x, t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. $x \in \Gamma_3$.

Nous rappelons les espaces utilisés :

S^d est l'espace des tenseurs symétriques de second ordre sur \mathbb{R}^d ($d = 1, 2, 3$), ' \cdot ' et $\|\cdot\|$ dénotent le produit scalaire et la norme euclidienne dans S^d et \mathbb{R}^d respectivement, c'est-à-dire :

$$u.v = u_i v_i, \quad \|v\| = (v.v)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^d,$$

$$\sigma.\tau = \sigma_{ij} \tau_{ij}, \quad \|\tau\| = (\tau.\tau)^{\frac{1}{2}}, \quad \forall \sigma, \tau \in S^d.$$

On rappelle également les espaces :

$$H = \{u = (u_i) / u_i \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\},$$

$$Q = \{\sigma = (\sigma_{ij}) / \sigma_{ij} = \sigma_{ji} \in L^2(\Omega), i = \overline{1, d}\},$$

munis des produits scalaires donnés respectivement par :

$$(u, v)_H = \int_{\Omega} u_i v_i dx,$$

$$(\sigma, \tau)_Q = \int_{\Omega} \sigma_{ij} \tau_{ij} dx,$$

et les normes associés $\|\cdot\|_H, \|\cdot\|_Q$.

Pour le champ de déplacements, on utilisera l'espace

$$H_1 = \{u = (u_i) / u_i \in H^1(\Omega)\},$$

H_1 est un espace de Hilbert muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H_1} = (u, v)_H + (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \quad \forall u, v \in H_1$$

et de la norme associée $\|\cdot\|_{H_1}$.

Pour l'étude des problèmes P_1 et P_2 on introduit l'ensemble

$$Z = \{\beta \in L^\infty(\Gamma_3) / 0 \leq \beta \leq 1 \text{ p.p sur } \Gamma_3\}$$

et pour le champ des déplacements on introduit le sous-espace fermé de H_1 défini par :

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_3\}.$$

Sur V nous considérons le produit scalaire donnée par :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \quad \forall u, v \in V,$$

et la norme associée $\|\cdot\|_V$.

On suppose que l'opérateur élastique non-linéaire $F : \Omega \times S^d \longrightarrow S^d$ satisfait les conditions suivantes (voir [23]) :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ il existe } M > 0 \text{ tel que :} \\ \quad \|F(\cdot, \varepsilon_1) - F(\cdot, \varepsilon_2)\| \leq M \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \text{ p.p. dans } \Omega. \\ (b) \text{ il existe } m > 0 \text{ tel que :} \\ \quad (F(\cdot, \varepsilon_1) - F(\cdot, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2, \quad \forall \varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d \text{ p.p. dans } \Omega. \\ (c) \text{ L'application } x \longrightarrow F(x, \varepsilon) \text{ est Lebesgue mesurable sur } \Omega, \text{ pour tout } \varepsilon \in S^d. \\ (d) \quad F(x, 0) = 0, \quad \text{p.p. } x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.1.9)$$

Les forces volumiques f_0 et les tractions surfaciques f_2 ont la régularité

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d), \quad (2.1.10)$$

ce qui implique

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; V). \quad (2.1.11)$$

Les coefficients d'adhésion γ_ν et ϵ_a satisfont les conditions

$$\gamma_\nu \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \gamma_\nu \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.1.12)$$

$$\epsilon_a \in L^\infty(\Gamma_3), \quad \epsilon_a \geq 0 \text{ p.p. sur } \Gamma_3, \quad (2.1.13)$$

Finalement, le champ d'adhésion initial satisfait

$$\beta_0 \in Z, \quad (2.1.14)$$

En utilisant (2.1.10) et le théorème de représentation de Riesz-Fréchet, il résulte l'existence d'un élément unique $f(t) \in V$ tel que :

$$(f(t), v)_V = (f_0(t), v)_H + (f_2(t), v)_{L^2(\Gamma_2)^d} \quad \forall v \in V, t \in [0, T]. \quad (2.1.15)$$

On définit la fonctionnelle d'adhésion $j_{ad} : L^2(\Gamma_3) \times V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ par :

$$j_{ad}(\beta, u, v) = - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) v_\nu da, \quad (2.1.16)$$

Les conditions (2.1.12) et (2.1.13) entraînent que l'intégrale dans (2.1.16) est bien définie.

Soit aussi le sous-ensemble convexe de déplacements admissibles défini par :

$$K = \{v \in V : v_\nu \leq 0 \text{ sur } \Gamma_3\}. \quad (2.1.17)$$

□

On a la formulation variationnelle suivante.

2.2 Formulation variationnelle du problème

Pour donner la formulation variationnelle du problème mécanique P_1 , on établit le résultat suivant :

Lemme 2.2.1 *Si la fonction u est une solution régulière (C^1) du problème mécanique P_1 alors pour tout $t \in [0, T]$:*

$$\begin{cases} u(t) \in K, \\ (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in K. \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Démonstration. Soit $v \in V$ et $t \in [0, T]$. En utilisant la formule de Green (1.1.1), on a :

$$\begin{aligned} & (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v - u(t))_H \\ &= \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da \quad \forall v \in H_1. \end{aligned}$$

Et en utilisant (2.1.1) et (2.1.4), on obtient encore :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q = (f_0, v - u(t))_H + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da.$$

Par ailleurs on a :

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da = \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da$$

D'où :

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q &= (f_0(t), v - u(t))_H + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot (v - u(t)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot (v - u(t)) da \end{aligned}$$

Grâce à (2.1.15) on a :

$$\begin{aligned} (\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q &= (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) da. \\ &= (f(t), v - u(t))_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t) (v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da \end{aligned} \tag{2.2.2}$$

Puisque $\sigma_{\tau}(t) = 0$ sur Γ_3 , alors :

$$\int_{\Gamma_3} \sigma(t) \nu \cdot (v - u(t)) da = \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t) (v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da.$$

D'où d'après (2.1.16) et (2.1.5), on a :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_{\nu}(t) (v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da &= \int_{\Gamma_3} (\sigma_{\nu}(t) - \gamma_{\nu} \beta^2 R_{\nu}(u_{\nu}(t))) (v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da \\ &\quad + \int_{\Gamma_3} \gamma_{\nu} \beta^2 R_{\nu}(u_{\nu}(t)) (v_{\nu} - u_{\nu}(t)) da \end{aligned}$$

or

$$\int_{\Gamma_3} (\sigma_\nu(t) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu(t))) (v_\nu - u_\nu(t)) da \geq 0$$

d'où

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu(t) (v_\nu - u_\nu(t)) da &\geq \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu(t)) (v_\nu - u_\nu(t)) da \\ &= j_{ad}(u(t), u(t)) - j_{ad}(u(t), v) \end{aligned}$$

En portant cette inégalité dans (2.2.2), on trouve

$$(\sigma(t), \varepsilon(v) - \varepsilon(u(t)))_Q \geq (f(t), v - u(t))_V + j_{ad}(u(t), u(t)) - j_{ad}(u(t), v)$$

Le lemme **2.2.1** nous permet donc d'établir la formulation variationnelle suivante pour le problème P_1 .

Problème P_1^V :

Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \rightarrow V$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que :

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \quad (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v - u(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v - u(t)) \\ \geq (f(t), v - u(t))_V \quad \forall v \in K, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\gamma_\nu \beta(t) (R_\nu(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \quad p.p. t \in (0, T), \quad (2.2.4)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (2.2.5)$$

Réciproquement, on peut vérifier par un calcul formel que si u est une solution régulière du problème P_1^V , alors u vérifie les équations et les conditions aux limites du problème P_1 . Pour cela, on a le lemme suivant :

Lemme 2.2.2 *Si u est une solution régulière (C^1) du problème P_1^V , alors u vérifie les équations et les conditions aux limites du problème P_1 .*

Démonstration. Soient $t \in (0, T)$ et u une solution régulière du problème P_1^V , il suffit de montrer que u satisfait les conditions (2.1.1) – (2.1.8).

1/ Soit $\varphi \in D(\Omega)^d$, choisissons $v = u(t) \pm \varphi$ dans l'inégalité (2.2.3), il vient :

$$\operatorname{div} \sigma(u(t)) + f_0(t) = 0 \quad \forall t \in [0, T]. \quad (2.2.6)$$

2/ Maintenant pour obtenir les autres équations en utilisant (2.2.3) et (2.2.6) il résulte

$$\langle \sigma(t) \nu, \gamma v - \gamma u(t) \rangle_{H'_\Gamma \times H_\Gamma} + j_{ad}(u(t), v) - j_{ad}(u(t), u(t)) \geq (f(t), v - u(t))_V, \quad \forall v \in V.$$

En choisissant $v = u(t) \pm w$ avec $w \in V$ tel que $w = 0$ sur $\Gamma_1 \cup \Gamma_3$, il vient

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma(t) \nu - f_2(t)) \gamma w da = 0.$$

Puisque $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_2)$ est dense dans $L^2(\Gamma_3)$, par densité on obtient

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma(t) \nu - f_2(t)) w da = 0, \quad \forall w \in L^2(\Gamma_3).$$

Cette égalité implique

$$\sigma(t) \nu = f_2(t) \quad \text{sur } \Gamma_2. \quad (2.2.7)$$

3/ Enfin pour terminer puisque $u(t) \in K$ on a $u_\nu(t) \leq 0$ et en choisissant $z_\nu = 0$ puis $z_\nu = 2u_\nu(t)$ dans (2.2.3), on obtient :

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma_\nu(t) - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t) \beta^2(t))) u_\nu(t) = 0. \quad (2.2.8)$$

Il s'ensuit que

$$\int_{\Gamma_2} (\sigma_\nu(t) - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t) \beta^2(t))) z_\nu \geq 0, \quad \forall z \in K$$

Ce qui implique

$$\sigma_\nu(t) - \gamma_\nu R_\nu(u_\nu(t) \beta^2(t)) \leq 0 \quad \text{sur } \Gamma_3,$$

et finalement en utilisant (2.2.8) on obtient les conditions de contact unilatéral (2.2.5). ■

□

2.3 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

Le but principal dans ce paragraphe est d'obtenir le résultat d'existence et d'unicité de la solution du problème variationnel P_1^V .

Théorème 2.3.1 *Sous les hypothèses (2.1.9) – (2.1.14), le problème P_1^V admet une solution faible unique (u, β) qui satisfait*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V), \tag{2.3.1}$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \tag{2.3.2}$$

Le couple (u, β) qui satisfait (2.1.2), (2.2.3) – (2.2.5) est appelé *une solution faible* du problème de contact de Signorini P_1^V .

Démonstration. La preuve du théorème **2.3.1** est basée sur des résultats classiques des équations non linéaires avec les opérateurs monotones et les équations différentielles ordinaires, combinées avec des arguments de point fixe. Cela est réalisé en plusieurs étapes. Nous supposons dans la suite que les hypothèses (2.1.9) – (2.1.14) sont vérifiées. En outre, partout dans cette section, c représentera une constante strictement positive, qui dépend du Ω , Γ_1 , Γ_3 , F , γ_ν , L et T mais elle est indépendante du temps. Soit j_{ad} linéaire par rapport au dernier argument et donc

$$j_{ad}(\beta, u, -v) = -j_{ad}(\beta, u, v) \tag{2.3.4}$$

Ensuite nous utilisons (2.1.16) et les propriétés de l'opérateur R_ν et la condition

de Signorini, nous trouvons après quelques calculs :

$$\begin{aligned}
& j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) - j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) = \\
& \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta_1^2 [R_\nu(u_{1\nu}) - R_\nu(u_{2\nu})](u_{1\nu} - u_{2\nu}) da + \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu (\beta_1^2 - \beta_2^2) R_\nu(u_{2\nu})(u_{1\nu} - u_{2\nu}) da \\
& \leq c \int_{\Gamma_3} |\beta_1 - \beta_2| \|u_1 - u_2\| da,
\end{aligned}$$

et par le **théorème de trace de Sobolev** (1.1.7), on obtient

$$j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) - j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2) \leq c \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \|u_1 - u_2\|_V. \quad (2.3.5)$$

Des calculs similaires, basés sur la continuité de R_ν , montrent que

$$|j_{ad}(\beta_1, u_1, v) - j_{ad}(\beta_2, u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \quad (2.3.6)$$

Nous prenons $\beta_1 = \beta_2 = \beta$, dans (2.3.6), et nous obtenons :

$$j_{ad}(\beta, u_1, u_2 - u_1) + j_{ad}(\beta, u_2, u_1 - u_2) \leq 0 \quad (2.3.7)$$

Aussi, nous prenons $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans (2.3.7) et, en utilisant les égalités $R_\nu(0) = 0$ et (2.3.4) on obtient

$$j_{ad}(\beta, v, v) \geq 0 \quad (2.3.8)$$

Soit \mathcal{Z} un sous-ensemble fermé de l'espace $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$ défini par :

$$\mathcal{Z} = \{ \beta \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)) / \beta(t) \in Z \forall t \in [0, T], \beta(0) = \beta_0 \}. \quad (2.3.9)$$

– Dans “**la première étape**” nous considérons le problème auxiliaire suivant pour le champ des déplacements pour lequel $\beta \in \mathcal{Z}$ est donné.

Problème $P_{1\beta}^{disp}$: Trouver un champ des déplacements $u_\beta : [0, T] \longrightarrow V$, tel que :

$$\begin{cases} u_\beta(t) \in K, \\ (F\varepsilon(u_\beta(t)), \varepsilon(v - u_\beta(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_\beta(t), v - u_\beta(t)) \\ \geq (f(t), v - u_\beta(t))_V \quad \forall v \in K, t \in [0, T]. \end{cases} \quad (2.3.10)$$

Nous avons le résultat suivant :

Lemme 2.3.2 *Il existe une solution unique du problème $P_{1\beta}^{disp}$ qui satisfait $u_\beta \in C([0, T]; V)$.*

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$ et soit $A_t : V \longrightarrow V$ l'opérateur défini par :

$$(A_t u, v)_V = (F\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

Nous utilisons (2.1.9) (a), (2.1.9) (b), (2.3.6) et (2.3.8) pour voir que l'opérateur A_t est *fortement monotone et de Lipschitz*; puisque K est un sous-ensemble convexe fermé non vide de V , il résulte d'après les résultats standards sur les inéquations variationnelles elliptiques (**Théorème 1.1.5**) qu'il existe un élément unique $u_\beta(t)$ tel que : $u_\beta \in K$ qui satisfait (2.3.10).

Soient $t_1, t_2 \in [0, T]$, notons $u_i = u(t_i)$, $i = 1, 2$. Dans l'inéquation vérifiée par u_1 , on prend $v = u_2$; puis dans l'inéquation vérifiée par u_2 , on prend $v = u_1$.

En additionnant les inégalités obtenues; on obtient après quelques calculs :

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u_1 - u_2), \varepsilon(u_1 - u_2))_Q &\leq (f_1 - f_2, u_1 - u_2)_V + j_{ad}(\beta_1, u_1, u_2 - u_1) \\ &\quad + j_{ad}(\beta_2, u_2, u_1 - u_2). \end{aligned}$$

En utilisant (2.1.10) et (2.3.5), on obtient :

$$\|u_1 - u_2\|_V \leq c \left(\|f_1 - f_2\|_V + \|\beta_1 - \beta_2\|_{L^2(\Gamma_3)} \right). \quad (2.3.10)$$

L'inégalité précédente (2.3.10) et la régularité des fonctions f et β montre que

$$u_\beta \in C([0, T]; V).$$

De plus, on conclut la partie existence dans le lemme **2.3.2** et que la partie unicité résulte de la solvabilité unique de (2.3.9) pour tout $t \in [0, T]$.

– Dans “*la deuxième étape*” on utilise la fonction de déplacement u_β solution du problème $P_{1\beta}^{disp}$ et considérons le problème à valeur initiale suivant :

Problème $P_{1\beta}^{bon}$:

Trouver un champ d’adhésion $\theta_\beta : [0, T] \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = - \left[(\gamma_\nu \theta_\beta(t) (R_\nu(u_{\beta\nu}(t)))^2 - \epsilon_a) \right]_+ \quad p.p. \ t \in (0, T), \quad (2.3.11)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0 \quad (2.3.12)$$

On obtient le résultat suivant :

Lemme 2.3.3.

Il existe une solution unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ du problème $P_{1\beta}^{bon}$. De plus, $\theta_\beta(t) \in Z$ pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Considérons l’application $F_\beta : [0, T] \times L^\infty(\Gamma_3) \longrightarrow L^\infty(\Gamma_3)$ définie par :

$$F_\beta(t, \theta) = - \left(\gamma_\nu \theta (R_\nu(u_{\beta\nu}(t)))^2 - \epsilon_a \right)_+,$$

Pour tout $t \in [0, T]$ et $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$. Puisque $|R_\nu(u_{\beta\nu}(t))| \leq L, \forall t \in [0, T]$, il résulte que F_β est lipschitzienne par rapport au deuxième argument, et cela uniformément en temps. D’ailleurs, pour n’importe quel $\theta \in L^\infty(\Gamma_3)$, l’application $t \longrightarrow F_\beta(t, \theta)$ appartient à $L^\infty(0, T; L^\infty(\Gamma_3))$. Ainsi, utilisant le théorème **1.1.6**, nous constatons qu’il existe une fonction unique $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ qui satisfait (2.3.11), (2.3.12). Aussi, d’après les arguments utilisés dans la remarque **2.1.1** nous déduisons que $0 \leq \theta_\beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, *p.p.* sur Γ_3 . Par conséquent, à partir de la définition de l’ensemble Z , on trouve que $\theta_\beta \in Z$, pour tout $t \in [0, T]$, ce qui donne la preuve du lemme précédent. ■

Il résulte du lemme **2.3.3** que pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ la solution θ_β du problème $P_{1\beta}^{bon}$ appartient à \mathcal{Z} , (voir (2.3.9)). Donc, on peut considérer l’opérateur $\wedge : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$ donné par :

$$\wedge \beta = \theta_\beta \quad (2.3.13)$$

– Dans “*la troisième étape*” montrons le résultat suivant :

Lemme 2.3.4. *Il existe un élément unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\wedge\beta^* = \beta^*$.*

Démonstration. Nous montrons que pour $m \in \mathbb{N}^*$, l’application \wedge^m est une contraction dans \mathcal{Z} . Pour cela, soient β_i ($i = 1, 2$) deux fonctions dans \mathcal{Z} et notons par u_i, θ_i les fonctions obtenues dans les lemmes **2.3.2** et **2.3.3** respectivement, pour $\beta = \beta_i, i = 1, 2$. Soit $t \in [0, T]$, on utilise les arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.3.11) pour déduire que

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_V \leq c \|\beta_1(t) - \beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (2.3.14)$$

Ce qui implique :

$$\int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds. \quad (2.3.15)$$

D’autre part, de (2.3.11) et (2.3.12) on a :

$$\theta_i(t) = \beta_0 - \int_0^t (\gamma_\nu \theta_i(s) |R_\nu(u_{i\nu}(s))|^2 - \epsilon_a)_+ ds$$

D’où :

$$\begin{aligned} & \|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \\ & c \int_0^t \left\| \left| \theta_1(s) |R_\nu(u_{1\nu}(s))|^2 - \theta_2(s) |R_\nu(u_{2\nu}(s))|^2 \right| \right\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \end{aligned}$$

En plus en utilisant la définition de R_ν et en écrivant $\theta_1 = \theta_1 - \theta_2 + \theta_2$, on obtient :

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \left(\int_0^t \|\theta_1(s) - \theta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds + \int_0^t \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds \right).$$

D'après l'inégalité de Granwall, il s'ensuit que

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_{1\nu}(s) - u_{2\nu}(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En utilisant (1.1.7) on obtient

$$\|\theta_1(t) - \theta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds. \quad (2.3.16)$$

De plus, à l'aide de (2.3.13) et de l'estimation (2.3.16), on déduit :

$$\|\wedge\beta_1(t) - \wedge\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_1(s) - u_2(s)\|_V ds. \quad (2.3.17)$$

Combinons maintenant (2.3.15) et (2.3.17) on voit que

$$\|\wedge\beta_1(t) - \wedge\beta_2(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|\beta_1(s) - \beta_2(s)\|_{L^2(\Gamma_3)} ds.$$

En réitérant cette inégalité m fois, on obtient :

$$\|\wedge^m\beta_1 - \wedge^m\beta_2\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))} \leq \frac{c^m T^m}{m!} \|\beta_1 - \beta_2\|_{C([0,T];L^2(\Gamma_3))}. \quad (2.3.18)$$

Rappelons que \mathcal{Z} est un ensemble fermé non vide de l'espace de Banach $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$. Comme $\lim_{m \rightarrow \infty} \frac{c^m T^m}{m!} = 0$, cela implique pour m assez grand que l'opérateur $\wedge^m : \mathcal{Z} \rightarrow \mathcal{Z}$ est une contraction. Alors, en vertu du théorème du point fixe de Banach,

il résulte qu'il existe un élément unique $\beta^* \in \mathcal{Z}$ tel que $\wedge^m \beta^* = \beta^*$ et β^* est aussi l'unique point fixe de \wedge .

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème **2.3.1**.

Existence.

Soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ est un point fixe de \wedge (c'est-à-dire : $\wedge \beta^* = \beta^*$), et soit u^* est la solution du problème $P_{1\beta}^{disp}$ pour $\beta = \beta^*$ c'est-à-dire $u^* = u_{\beta^*}$. On utilise les arguments similaires à ceux utilisés dans la preuve de (2.3.14) pour obtenir :

$$\|u^*(t_1) - u^*(t_2)\|_V \leq c \left(\|\beta^*(t_1) - \beta^*(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f(t_1) - f(t_2)\|_V \right) \quad (2.3.19)$$

$$\forall t_1, t_2 \in [0, T].$$

Comme $\beta^* = \theta_{\beta^*}$, du lemme **2.3.3** résulte que $\beta^* \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$ et aussi (2.3.19) implique que $u^* \in W^{1,\infty}(0, T; V)$. Nous concluons par (2.3.9), (2.3.11) et (2.3.12) que (u^*, β^*) est une solution du problème P_1^V et satisfait (2.3.1) et (2.3.2).

Unicité.

L'unicité de la solution est une conséquence de l'unicité du point fixe de l'opérateur \wedge donné par (2.3.13). En effet, soit (u, β) une solution du problème P_1^V qui satisfait (2.3.1), (2.3.2). En utilisant les mêmes arguments que dans la remarque **2.1.1**, on déduit que $\beta \in \mathcal{Z}$; de plus, il s'ensuit de (2.2.3) que u est une solution du problème $P_{1\beta}^{disp}$. Par le lemme **2.3.2** ce problème a une solution unique u_β , et donc

$$u = u_\beta. \quad (2.3.20)$$

On remplace $u = u_\beta$ dans (2.2.4) et on utilise la condition initiale (2.2.5) pour voir que β est une solution du problème $P_{1\beta}^{bon}$. Comme d'après le lemme **2.3.3** ce problème a une solution unique θ_β , on obtient :

$$\beta = \theta_\beta \quad (2.3.21)$$

Maintenant, on utilise (2.3.13) et (2.3.21) pour voir que $\wedge \beta = \beta$, i.e. β est un point

fixe de l'opérateur \wedge . D'où en utilisant le lemme **2.3.4**, on obtient :

$$\beta = \beta^*. \tag{2.3.22}$$

Donc l'unicité du théorème est une conséquence de (2.3.20) et (2.3.22). ■

Chapitre 3

PROBLÈME DE CONTACT QUASI-STATIQUE AVEC ADHÉSION ET COMPLIANCE NORMALE

Dans ce chapitre, on étudie le problème de contact quasi-statique avec adhésion entre un corps élastique non-linéaire et une fondation déformable. Les conditions de contact sont de type de compliance normale et l'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle du premier ordre. Nous avons deux objectifs. Le premier est de formuler le problème variationnel et prouver l'existence et l'unicité de la solution. Le second est de montrer un résultat de convergence.

3.1 Formulation du problème - Hypothèses

On suppose un corps élastique qui occupe initialement un domaine borné $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ ($d = 1, 2, 3$) ayant les propriétés suivantes :

- ▶ Le domaine Ω de frontière $\partial\Omega = \Gamma$ régulière constituée de trois parties Γ_1, Γ_2 et Γ_3 mesurables et disjoints et telle que $mes(\Gamma_1) > 0$.
- ▶ En Γ_1 le corps est encastré.

- Le corps est soumis à des forces volumiques dans Ω et des forces surfaciques sur Γ_2 .
- En contact sans frottement le long de Γ_3 avec une fondation déformable.

On étudie le problème P_2 du chapitre 1, section 1.2.5. Le problème mécanique s'énonce comme suit :

Problème P_2 :

Trouver un champ des déplacements $u : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.1)$$

$$\sigma = F \varepsilon(u) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (3.1.2)$$

$$u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (3.1.3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (3.1.4)$$

$$-\sigma_\nu = p_\nu(u_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.5)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.6)$$

$$\dot{\beta} = -(\gamma_\nu \beta (R_\nu(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (3.1.7)$$

$$\beta(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (3.1.8)$$

Dans le problème P_2 nous remplaçons les conditions de contact de Signorini avec adhésion (2.1.5) (problème P_1) par la condition de compliance normale avec adhésion (3.1.5) où p_ν est une fonction non-négative donnée qui sera décrite ci-dessous. Sous cette condition l'interpénétrabilité entre le corps et la fondation est autorisée, c'est-à-dire u_ν peut être positive sur Γ_3 . La contribution de l'adhésion à la traction normale est représentée par le terme $\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu)$; la traction d'adhésion est proportionnelle, avec un coefficient de proportionnalité γ_ν , au carré de l'intensité de l'adhésion et au déplacement normal, cela tant qu'elle ne dépasse pas la longueur L . La traction extensible maximale est $\gamma_\nu L$. La condition de contact (3.1.5) est utilisée dans divers parties de ce manuscrit, voir [4, 5].

On suppose que la *fonction de compliance normale* p_ν vérifie les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \quad \text{Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \quad (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) \quad x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est une fonction mesurable} \\ \quad \text{sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (e) \quad p_\nu(x, r) = 0 \quad \forall r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (3.1.9)$$

Pour le problème avec compliance normale, en plus de la fonctionnelle (2.1.16), nous avons besoin de la fonctionnelle de compliance normale $j_{nc} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ donnée par :

$$j_{nc}(u, v) = - \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da, \quad (3.1.10)$$

et pour le champ des déplacements on rappelle l'espace V défini par :

$$V = \{v \in H_1 / v = 0 \text{ sur } \Gamma_1\}$$

Puisque $mes(\Gamma_1) > 0$, l'inégalité de Korn s'applique sur V , il existe une constante $c > 0$ dépendant uniquement de Ω et Γ_1 telle que :

$$\|\varepsilon(v)\|_Q \geq c \|v\|_{H_1} \quad \forall v \in V.$$

Comme au chapitre 2, V est muni du produit scalaire :

$$(u, v)_V = (\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q, \quad \forall u, v \in V,$$

et de la même norme associée. On fait les hypothèses :

$$f_0 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Omega)^d), \quad f_2 \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_2)^d). \quad (3.1.11)$$

Soit la fonction f définie par :

$$(f(t), v)_V = \int_{\Omega} f_0(t) \cdot v da + \int_{\Gamma_2} f_2(t) \cdot v da \quad \forall v \in V, \text{ p.p. } t \in [0, T], \quad (3.1.12)$$

(3.1.11) et (3.1.12) impliquent

$$f \in W^{1,\infty}(0, T; V) \quad (2.1.13)$$

□

3.2 Formulation variationnelle du problème

Dans cette section, on étudie la formulation variationnelle du problème mécanique P_2 , pour cela on établit d'abord le résultat suivant :

Lemme 3.2.1.

Si la fonction u est une solution régulière (C^1) du problème mécanique P_2 alors pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} u(t) \in V, \\ (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) + j_{nc}(u(t), v) \\ = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (3.2.1)$$

Démonstration. Il suffit de suivre les mêmes étapes que dans la démonstration du lemme 2.2.1 du chapitre 2.

Soit $v \in V$ et $t \in [0, T]$. En utilisant la formule de Green on a :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_Q + (\operatorname{div} \sigma, v)_H = \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da \quad \forall v \in H_1.$$

En utilisant les conditions (3.1.1), (3.1.3) et (3.1.4), on obtient :

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_Q = (f_0, v)_H + \int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da$$

et

$$\int_{\Gamma} \sigma \nu \cdot v da = \int_{\Gamma_2} \sigma \nu \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da,$$

d'où

$$(\sigma(t), \varepsilon(v))_Q = (f_0(t), v)_H + \int_{\Gamma_2} f_2 \cdot v da + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da$$

Grâce à (3.1.2) et (3.1.12) on a :

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma \nu \cdot v da$$

D'autre part d'après (3.1.5), (2.1.16) et (3.1.10) on a :

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} (\gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) - p_\nu(u_\nu)) v_\nu da$$

ou encore :

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu(t)) v_\nu da + \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_\nu) v_\nu da = (f(t), v)_V,$$

Soit enfin l'égalité suivante :

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) + j_{nc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad (3.2.2)$$

$$\forall v \in V, t \in [0, T].$$

■

Le lemme précédent permet d'associer au problème P_2 la formulation variationnelle suivante.

Problème P_2^V : Trouver un champ des déplacements $u : [0, T] \longrightarrow V$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \longrightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que :

$$(F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u(t), v) + j_{nc}(u(t), v) = (f(t), v)_V \quad (3.2.3)$$

$$\forall v \in V, t \in [0, T],$$

$$\dot{\beta}(t) = - (\gamma_\nu \beta(t) (R_\nu(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \quad p.p. \quad t \in (0, T), \quad (3.2.4)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (3.2.5)$$

Remarque 3.2.1 Remarquons que les problèmes variationnels P_1^V et P_2^V sont formulés en termes de déplacement et champ d'adhésion. Si la solution (u, β) de ces problèmes variationnels est connue, le champ de contraintes correspondant σ peut être obtenu facilement par utilisation de la loi de comportement (2.1.1) ou (3.1.1) \square

3.3 Résultat d'existence et d'unicité de la solution

Notre résultat principal d'existence et d'unicité que nous énonçons dans cette section et que nous prouverons par la suite, est :

Théorème 3.3.1 *Supposons que (2.1.9) – (2.1.14) et (3.1.9) soient vérifiées. Alors il existe une solution unique du problème variationnel P_2^V qui satisfait la régularité*

$$u \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad (3.3.1)$$

$$\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (3.3.2)$$

Le couple (u, β) qui satisfait (3.1.2), (3.2.3) – (3.2.5) est appelé *solution faible* du problème P_2 . Nous concluons que, sous les hypothèses (2.1.9) – (2.1.14) et (3.1.9), le problème (3.1.1)–(3.1.8) a une solution faible unique. De plus, la solution faible satisfaisant (3.3.1) – (3.3.2), a une régularité (3.3.2) obtenue par utilisation des arguments similaires que ceux utilisés dans la section 2.

Maintenant, en utilisant la linéarité de j_{nc} par rapport au dernier argument, on a

$$j_{nc}(u, -v) = -j_{nc}(u, v) \quad (3.3.3)$$

En utilisant (3.1.10), on a aussi :

$$j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{2\nu}) - p_\nu(u_{1\nu})) v_\nu da,$$

et donc :

$$|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \leq \int_{\Gamma_3} |p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})| |v_\nu| da,$$

d'où par (3.1.9) (b) et le théorème de trace de Sobolev (voir : (1.1.7)) on obtient

$$|j_{nc}(u_1, v) - j_{nc}(u_2, v)| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V. \quad (3.3.4)$$

En utilisant de nouveau (3.1.10) on voit que :

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) - j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) = \int_{\Gamma_3} (p_\nu(u_{1\nu}) - p_\nu(u_{2\nu})) (u_{1\nu} - u_{2\nu}) da$$

Par ailleurs (3.1.9) (c) implique

$$j_{nc}(u_1, u_2 - u_1) + j_{nc}(u_2, u_1 - u_2) \leq 0. \quad (3.3.5)$$

On prend $u_1 = v$ et $u_2 = 0$ dans l'inégalité précédente et en utilisant (3.1.9) (e) et (3.3.3) on obtient :

$$j_{nc}(v, v) \geq 0. \quad (3.3.6)$$

Les inégalités (3.3.4) – (3.3.6) combinées avec l'égalité (3.3.3) seront utilisées dans le reste du travail.

La démonstration du théorème **3.3.1** est basée sur des arguments similaires aux arguments déjà utilisés dans la démonstration du théorème **2.3.1**. Pour cela et dans la suite, la démonstration sera effectuée en plusieurs étapes.

En effet, on rappelle que \mathcal{Z} est un sous-ensemble fermé de l'espace $C([0, T]; L^2(\Gamma_3))$

défini par :

$$\mathcal{Z} = \{ \beta \in C([0, T]; L^2(\Gamma_3)) / \beta(t) \in Z \forall t \in [0, T], \beta(0) = \beta_0 \}. \quad (3.3.7)$$

Les étapes sont :

i) Pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ on démontre qu'il existe une fonction unique $u_\beta \in C([0, T]; V)$ tel que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u_\beta(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_\beta(t), v) + j_{nc}(u_\beta(t), v) \\ = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Pour prouver cette étape, pour tout $t \in [0, T]$, considérons l'opérateur $A_t : V \longrightarrow V$ défini par :

$$(A_t u, v)_V = (F\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u, v) + j_{nc}(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

• L'opérateur A_t est *fortement monotone* :

En effet, $\forall u, v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} (A_t u - A_t v, u - v)_V &= (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), \varepsilon(u - v))_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u - v, u - v) + j_{nc}(u - v, u - v) \end{aligned}$$

D'après (2.1.9) (b) et (3.3.6), on a :

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), \varepsilon(u - v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u - v, u - v) \\ + j_{nc}(u - v, u - v) \geq m \|\varepsilon(u - v)\|_Q^2, \quad \forall u, v \in V. \end{aligned}$$

d'où :

$$(A_t u - A_t v, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V.$$

• Montrons que l'opérateur A_t est *de Lipschitz* :

En effet, on a : $\forall u, v, w \in V$:

$$\begin{aligned} |(A_t u - A_t v, w)_V| = \\ \left| (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), w)_Q + j_{ad}(\beta(t), u - v, w) + j_{nc}(u - v, w) \right|, \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |(A_t u - A_t v, w)_V| \leq & \left| (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), w)_Q \right| \\ & + |j_{ad}(\beta(t), u - v, w)| + |j_{nc}(u - v, w)| \end{aligned}$$

En utilisant (2.3.6) et (3.3.4) on déduit :

$$|(A_t u - A_t v, w)_V| \leq c \|u_1 - u_2\|_V \|v\|_V.$$

Enfin pour montrer que $u_\beta \in C([0, T]; V)$, on procède comme dans la démonstration du théorème **2.3.1** i.e. on montre que $\forall t_1, t_2 \in [0, T]$

$$\|u_\beta(t_1) - u_\beta(t_2)\|_V \leq c \left(\|\beta(t_1) - \beta(t_2)\|_{L^2(\Gamma_3)} + \|f(t_1) - f(t_2)\|_V \right)$$

et on utilise la régularité de β et de f .

ii) Pour $\beta \in \mathcal{Z}$ donné nous montrons qu'il existe un élément unique θ tel que

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}, \quad (3.3.9)$$

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\gamma_\nu \theta_\beta(t) (R_\nu(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \quad p.p. t \in (0, T), \quad (3.3.10)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0 \quad (3.3.11)$$

En effet, on construit le problème suivant pour le champ d'adhésion

Problème $P_{2\beta}^{bon}$:

Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = -(\gamma_\nu \theta_\beta(t) (R_\nu(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \quad p.p. t \in (0, T),$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0.$$

Pour cela on a le résultat suivant :

Lemme 3.3.2

Il existe une solution unique du problème $P_{2\beta}^{bon}$ qui satisfait

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}.$$

Démonstration. Par le Lemme **2.3.3** on conclut que $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3))$. Aussi, d'après les arguments utilisés dans la remarque **2.2.1** on déduit que $0 \leq \theta_\beta(t) \leq 1$ pour tout $t \in [0, T]$, p.p. sur Γ_3 ; par conséquent, à partir de la définition de l'ensemble \mathcal{Z} , nous montrons que $\theta_\beta(t) \in \mathcal{Z}$, ce qui donne la preuve du lemme.

iii) L'opérateur $\wedge : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$ défini par

$$\wedge\beta = \theta_\beta \tag{3.3.12}$$

admet un unique point fixe $\beta^* \in \mathcal{Z}$. La preuve est basée sur les estimations similaires à celles présentées dans le lemme **2.3.4** et le théorème du point fixe de Banach.

iv) Soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de \wedge et notons $u^* = u_{\beta^*}$, où u_{β^*} est la fonction obtenue dans l'étape *i*) pour $\beta = \beta^*$. En utilisant (3.3.8) – (3.3.12), il vient que le couple (u^*, β^*) est la solution unique du problème P_2^V qui satisfait (3.3.1) – (3.3.2).

Chapitre 4

PROBLÈME PÉNALISÉ

Dans ce chapitre on montre que la solution du problème P_1 est obtenue comme limite de la solution d'un problème pénalisé P_μ quand le paramètre de pénalisation $\mu \rightarrow 0$.

4.1 Problème mécanique et Formulation variationnelle

Nous reprenons le problème P_2 du chapitre 1, section 1.2.5. Pour ce problème on rappelle que le contact est du type *compliance normale* avec adhésion. On remplace la condition de contact (3.1.5) par la condition de contact suivante :

$$-\sigma_\nu = \frac{1}{\mu} p_\nu(\mu_\nu) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_\nu) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T)$$

où $\mu > 0$ est un paramètre de pénalisation et $\frac{1}{\mu}$ est interprété comme le coefficient de rigidité de la fondation. Quand $\frac{1}{\mu}$ est plus grand la réaction de la fondation est plus rigide et si $\frac{1}{\mu}$ est plus petit la réaction est moins rigide.

Notre objectif est de montrer que la solution du problème pénalisé lorsque le paramètre μ tend vers zéro (i.e. que $\frac{1}{\mu} \rightarrow \infty$) converge vers la solution du problème de contact de Signorini avec adhésion.

Le problème mécanique s'énonce comme suit :

Problème $P_{2\mu}$:

Trouver un champ des déplacements $u_\mu : \Omega \times [0, T] \longrightarrow \mathbb{R}^d$ et un champ d'adhésion $\beta : \Gamma_3 \times [0, T] \longrightarrow [0, 1]$ tels que :

$$\operatorname{div} \sigma + f_0 = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.1)$$

$$\sigma = F \varepsilon(u_\mu) \quad \text{dans } \Omega \times (0, T), \quad (4.1.2)$$

$$u_\mu = 0 \quad \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \quad (4.1.3)$$

$$\sigma \nu = f_2 \quad \text{sur } \Gamma_2 \times (0, T), \quad (4.1.4)$$

$$-\sigma_\nu = \frac{1}{\mu} p_\nu(\mu_{\mu\nu}) - \gamma_\nu \beta^2 R_\nu(u_{\mu\nu}) \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.5)$$

$$\sigma_\tau = 0 \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.6)$$

$$\dot{\beta}_\mu = -(\gamma_\nu \beta_\mu (R_\nu(u_\nu))^2 - \epsilon_a)_+ \quad \text{sur } \Gamma_3 \times (0, T), \quad (4.1.7)$$

$$\beta_\mu(0) = \beta_0 \quad \text{sur } \Gamma_3, \quad (4.1.8)$$

Nous supposons que (2.1.10)–(2.1.15) et (3.1.9) soient vérifiées et nous utilisons la notation K, f, j_{ad}, j_{nc} qui est introduite dans les chapitre **2** et **3**. De plus, on suppose que la *fonction de compliance normale* p_ν vérifie les hypothèses suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{l} (a) \quad p_\nu : \Gamma_3 \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}_+. \\ (b) \quad \text{Il existe } L_\nu > 0 \text{ tel que} \\ \quad |p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2)| \leq L_\nu |r_1 - r_2| \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (c) \quad (p_\nu(x, r_1) - p_\nu(x, r_2))(r_1 - r_2) \geq 0 \\ \quad \forall r_1, r_2 \in \mathbb{R}, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \\ (d) \quad x \longmapsto p_\nu(x, r) \text{ est une fonction mesurable} \\ \quad \text{sur } \Gamma_3, \forall r \in \mathbb{R}. \\ (e) \quad p_\nu(x, r) = 0, \forall r \leq 0, \text{ p.p. } x \in \Gamma_3. \end{array} \right. \quad (4.1.9)$$

On étudie la formulation variationnelle du problème mécanique $P_{2\mu}$. Pour cela

on a le résultat suivant

Lemme 4.1.1.

Si la fonction u_μ est solution régulière (C^1) du problème mécanique $P_{2\mu}$ alors pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{cases} u_\mu(t) \in V, \\ (F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta_\mu(t), u_\mu(t), v) + \frac{1}{\mu} j_{nc}(u_\mu(t), v) \\ = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V. \end{cases} \quad (4.1.10)$$

Démonstration. Soit $v \in K$ et $t \in [0, T]$. A l'aide de la formule de Green (1.2.1) et les conditions (4.1.1) – (4.1.4) et (3.1.12), on a :

$$(F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \sigma_\nu \cdot v da.$$

D'autre part d'après (4.1.5), (2.1.16) et (3.1.10) on a :

$$(F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q = (f(t), v)_V + \int_{\Gamma_3} \left[\gamma_\nu \beta_\mu^2 R_\nu(u_{\mu\nu}) - \frac{1}{\mu} p_\nu(u_{\mu\nu}) \right] \cdot v da,$$

d'où :

$$(F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q - \int_{\Gamma_3} \gamma_\nu \beta_\mu^2 R_\nu(u_{\mu\nu}(t)) v_\nu da + \frac{1}{\mu} \int_{\Gamma_3} p_\nu(u_{\mu\nu}) v_\nu da = (f(t), v)_V$$

Alors pour tout $t \in [0, T]$:

$$(F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta_\mu(t), u_\mu(t), v) + \frac{1}{\mu} j_{nc}(u_\mu(t), v) = (f(t), v)_V \\ \forall v \in V.$$

■

Le lemme précédent avec l'équation (4.1.7) sans oublier l'équation (4.1.8) permet d'associer la formulation variationnelle du problème $P_{2\mu}^V$ suivant :

Problème $P_{2\mu}^V$: Trouver un champ des déplacements $u_\mu : [0, T] \rightarrow V$ et un champ d'adhésion $\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tels que :

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta_\mu(t), u_\mu(t), v) + \frac{1}{\mu} j_{nc}(u_\mu(t), v) \\ = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, t \in [0, T], \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

$$\dot{\beta}(t) = -(\gamma_\nu \beta_\mu(t) (R_\nu(u_\nu(t)))^2 - \epsilon_a)_+ \quad p.p. t \in (0, T) \quad (4.1.12)$$

$$\beta(0) = \beta_0. \quad (4.1.13)$$

□

4.2 Existence et unicité de la solution

Notre résultat principal d'existence et d'unicité que nous énonçons ici et que nous prouvons par la suite, est le suivant :

Théorème 4.2.1. *Supposons que (2.1.9) – (2.1.14) et (3.1.9) et (4.1.9) soient vérifiées, alors pour tout $\mu > 0$ le problème $P_{2\mu}^V$ admet une solution unique (u_μ, β_μ) ayant la régularité*

$$u_\mu \in W^{1,\infty}(0, T; V), \quad (4.2.1)$$

$$\beta_\mu \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}. \quad (4.2.2)$$

Le couple (u_μ, β_μ) qui satisfait (4.1.1), (4.1.11) – (4.1.13) est appelé *solution faible* du problème P_2 . Nous concluons que sous les hypothèses (2.1.9) – (2.1.14) et (3.1.9), le problème (4.1.1) – (4.1.8) a une solution faible unique. De plus, la solution faible satisfait (4.2.1) – (4.2.2).

La preuve du théorème ci-dessus est basée sur des arguments similaires déjà utilisés dans la démonstration du théorème **2.3.1**.

i) Pour tout $\beta \in \mathcal{Z}$ nous montrons qu'il existe une fonction unique $u_\beta \in C([0, T]; V)$

tel que pour tout $t \in [0, T]$:

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u_\beta(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u_\beta(t), v) + \frac{1}{\mu}j_{nc}(u_\beta(t), v) \\ = (f(t), v)_V \quad \forall v \in V, \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

Pour prouver cette étape, pour tout $t \in [0, T]$, considérons l'opérateur $A_t : V \longrightarrow V$ défini par :

$$(A_t u, v)_V = (F\varepsilon(u), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u, v) + \frac{1}{\mu}j_{nc}(u, v) \quad \forall u, v \in V.$$

• L'opérateur A_t est *fortement monotone* :

En effet, $\forall u, v \in V$, on a :

$$\begin{aligned} (A_t u - A_t v, u - v)_V &= (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), \varepsilon(u - v))_Q \\ &\quad + j_{ad}(\beta(t), u - v, u - v) + \frac{1}{\mu}j_{nc}(u - v, u - v) \end{aligned}$$

D'après (2.1.9) (b) et (3.3.6), on a :

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), \varepsilon(u - v))_Q + j_{ad}(\beta(t), u - v, u - v) \\ + \frac{1}{\mu}j_{nc}(u - v, u - v) \geq m \|u - v\|_V^2 \end{aligned}$$

d'où :

$$(A_t u - A_t v, u - v)_V \geq m \|u - v\|_V^2 \quad \forall u, v \in V.$$

• Montrons que l'opérateur A_t est *de Lipschitz* :

En effet, $\forall u, v, w \in V$, on a :

$$\begin{aligned} |(A_t u - A_t v, w)_V| &= \\ &= \left| (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), w)_Q + j_{ad}(\beta(t), u - v, w) + \frac{1}{\mu}j_{nc}(u - v, w) \right| \end{aligned}$$

d'où :

$$\begin{aligned} |(A_t u - A_t v, w)_V| &\leq \left| (F\varepsilon(u) - F\varepsilon(v), w)_Q \right| \\ &\quad + |j_{ad}(\beta(t), u - v, w)| + \frac{1}{\mu} |j_{nc}(u - v, w)| \end{aligned}$$

De même que dans la démonstration du théorème **2.3.1** on a

$$u_\beta \in C([0, T]; V).$$

ii) En utilisant (2.3.6) et (3.3.4) on en déduit :

$$|(A_t u - A_t v, w)_V| \leq c \|u - v\|_V \|w\|_V.$$

Pour $\beta \in \mathcal{Z}$ donné, nous montrons qu'il existe un élément unique θ_β tel que

$$\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z} \quad (4.2.4)$$

vérifiant :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = - \left[(\gamma_\nu \theta_\beta(t) (R(u_{\beta,\nu}(t)))^2 - \epsilon_a) \right]_+ \quad p.p. \ t \in (0, T), \quad (4.2.5)$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0 \quad (4.2.6)$$

En effet, on construit le problème suivant pour le champ d'adhésion :

Problème $P_{2\beta}^{bon}$: Trouver un champ d'adhésion $\theta_\beta : [0, T] \rightarrow L^2(\Gamma_3)$ tel que :

$$\dot{\theta}_\beta(t) = - \left[(\gamma_\nu \theta_\beta(t) (R(u_{\beta,\nu}(t)))^2 - \epsilon_a) \right]_+ \quad p.p. \ t \in (0, T),$$

$$\theta_\beta(0) = \beta_0.$$

Pour cela on a le résultat suivant :

Lemme 4.2.2 *Il existe une solution unique du problème $P_{2\beta}^{bon}$ qui satisfait $\theta_\beta \in W^{1,\infty}(0, T; L^2(\Gamma_3)) \cap \mathcal{Z}$.*

Démonstration. voir la démonstration du lemme **3.3.2**.

iii) L'opérateur $\wedge : \mathcal{Z} \longrightarrow \mathcal{Z}$ défini par

$$\wedge\beta = \theta_\beta \tag{4.2.7}$$

admet un unique point fixe $\beta^* \in \mathcal{Z}$. La preuve est basée sur les estimations similaires à celles présentées dans le lemme **2.3.4** et le théorème du point fixe de Banach.

iv) Soit $\beta^* \in \mathcal{Z}$ le point fixe de \wedge et notons $u^* = u_{\beta^*}$, où u_{β^*} est la fonction obtenue dans l'étape i) pour $\beta = \beta^*$. En utilisant (3.3.8) – (3.3.12), il vient que le couple (u^*, β^*) est la solution unique du problème $P_{2\mu}^V$ qui satisfait (4.2.1) – (4.2.2).

■

□

4.3 Résultat de convergence

Dans cette section nous nous intéressons à la convergence de la solution du problème pénalisé $P_{2\mu}$ avec compliance normale lorsque le coefficient μ converge vers zéro. Pour cela on a le résultat suivant :

Théorème 4.3.1. *Supposons que (2.1.9) – (2.1.14), et (4.1.9) soient vérifiées, alors la solution (u_μ, β_μ) du problème $P_{2\mu}^V$ converge vers la solution (u, β) du problème P_1^V c'est-à-dire :*

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V + \|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \longrightarrow 0 \quad \text{lorsque } \mu \longrightarrow 0, \tag{4.3.1}$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. La preuve du théorème se fait en plusieurs étapes. Dans le reste de ce chapitre, nous supposons que les hypothèses du théorème **4.3.1** sont vérifiées

Dans la première étape : nous considérons le problème auxiliaire suivant :

Lemme 4.3.2 *Trouver un champ des déplacements $\tilde{u}_\mu : [0, T] \rightarrow V$ tel que :*

$$(F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(v))_Q + j_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), v) + \frac{1}{\mu}j_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), v) = (f(t), v)_V \quad (4.3.2)$$

$$\forall v \in V, t \in [0, T].$$

Pour tout $\beta \in Z$, on utilise les arguments similaires à ceux de la preuve du théorème **3.3.1** pour démontrer que pour chaque μ positif, le problème **4.3.2** a une solution unique qui satisfait :

$$\tilde{u}_\mu \in C([0, T]; V).$$

On a le lemme suivant :

Lemme 4.3.3. *Nous avons le résultat de convergence suivant :
pour tout $t \in [0, T]$:*

$$\|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V \longrightarrow 0, \quad \text{lorsque } \mu \longrightarrow 0. \quad (4.3.3)$$

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. En prenant $v = \tilde{u}_\mu(t)$ dans (4.3.2), on a :

$$(F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \quad (4.3.4)$$

$$+ \frac{1}{\mu}j_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) = (f(t), \tilde{u}_\mu(t))_V.$$

En utilisant (2.3.8) et (3.3.6) on obtient

$$(F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)))_Q \leq (f(t), \tilde{u}_\mu(t))_V.$$

et en plus par (2.1.9) on en déduit qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\|\tilde{u}_\mu(t)\|_V \leq c \|f(t)\|_V. \quad (4.3.5)$$

Il existe alors un élément $\tilde{u}(t) \in V$, et une sous-suite de la suite $\{\tilde{u}_\mu(t)\}_\mu$, notée encore $\{\tilde{u}_\mu(t)\}_\mu$, telle que

$$\tilde{u}_\mu(t) \rightharpoonup \tilde{u}(t) \text{ dans } V, \text{ lorsque } \mu \longrightarrow 0. \quad (4.3.6)$$

En utilisant encore (4.3.4) et (2.3.8), après quelques calculs on déduit

$$(F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)))_Q + \frac{1}{\mu} j_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \leq (f(t), \tilde{u}_\mu(t))_V,$$

d'où :

$$\frac{1}{\mu} j_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \leq (f(t), \tilde{u}_\mu(t))_V - (F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)))_Q$$

et donc

$$\frac{1}{\mu} j_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \leq c$$

ou

$$j_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t)) \leq c\mu. \quad (4.3.7)$$

Il s'ensuit de (4.3.6) que

$$\tilde{u}_\mu(t) \longrightarrow \tilde{u}(t) \text{ dans } L^2(\Gamma_3)^d, \text{ lorsque } \mu \longrightarrow 0. \quad (4.3.8)$$

En rappelant la formule (3.1.10) pour j_{nc} et les propriétés (3.1.9) de la fonction de compliance normal p_ν , en utilisant (4.3.7) et (4.3.8), on trouve que

$$\int_{\Gamma_3} p_\nu(\tilde{u}_\nu(t)) \tilde{u}_\nu(t) da = 0.$$

Puisque la fonction intégrante est non négative (voir (3.1.9) (c)), de l'égalité précédente on en déduit que $p_\nu(\tilde{u}_\nu(t)) \tilde{u}_\nu(t) = 0$ *p.p.* sur Γ_3 . Il s'ensuit alors de (4.1.9) que $\tilde{u}(t) \leq 0$ *p.p.* sur Γ_3 ce qui montre que $\tilde{u}(t) \in K$.

Maintenant prenons $v - \tilde{u}_\mu(t)$ dans (4.3.2) et gardons à l'esprit les propriétés de la fonction de compliance normale p_ν , on obtient l'inéquation variationnelle

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(v - \tilde{u}_\mu(t)))_Q + j_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), v - \tilde{u}_\mu(t)) \\ \geq (f(t), v - \tilde{u}_\mu(t))_V, \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (4.3.9)$$

En suite, nous utilisons (2.1.16), (4.3.8) et les propriétés de R_ν pour voir que

$$J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), v - \tilde{u}_\mu(t)) \longrightarrow J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}(t), v - \tilde{u}(t)) \text{ lorsque } \mu \longrightarrow 0, \quad (4.3.10)$$

pour tout $v \in V$. Par conséquent, en utilisant (4.3.9), (4.3.6), (4.3.10) et l'argument de semi-continuité inférieure, on obtient :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) \in K, \quad (F\varepsilon(\tilde{u}(t)), \varepsilon(v - \tilde{u}(t)))_Q + J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}(t), v - \tilde{u}(t)) \\ \geq (f(t), v - \tilde{u}(t))_V \quad \forall v \in K. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

Prenons $v = u(t)$ dans (4.3.11) on a :

$$\begin{aligned} \tilde{u}(t) \in K, \\ (F\varepsilon(\tilde{u}(t)), \varepsilon(u(t) - \tilde{u}(t)))_Q + J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)) \geq (f(t), u(t) - \tilde{u}(t))_V \end{aligned}$$

puis prenons $v = \tilde{u}(t)$ dans (4.1.8), on a :

$$\begin{aligned} u(t) \in K, \\ (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(\tilde{u}(t) - u(t)))_Q + J_{ad}(\beta(t), u(t), \tilde{u}(t) - u(t)) \geq (f(t), \tilde{u}(t) - u(t))_V \end{aligned}$$

En additionnant les deux inégalités précédentes, on obtient l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(\tilde{u}(t)), \varepsilon(u(t) - \tilde{u}(t)))_Q + J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)) \\ + (F\varepsilon(u(t)), \varepsilon(\tilde{u}(t) - u(t)))_Q + J_{ad}(\beta(t), u(t), \tilde{u}(t) - u(t)) \\ \geq (f(t), u(t) - \tilde{u}(t))_V + (f(t), \tilde{u}(t) - u(t))_V. \end{aligned}$$

En utilisant (2.1.9) (d) on voit que

$$c \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V^2 \leq J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)) + J_{ad}(\beta(t), u(t), \tilde{u}(t) - u(t)).$$

Or de (2.3.7), le membre de droite de l'inégalité précédente est négatif ou nul

et ainsi

$$\tilde{u}(t) = u(t). \quad (4.3.12)$$

Nous concluons de l'inégalité précédente que $u(t)$ est l'unique limite faible dans V , de toute sous-suite convergente faiblement, et donc il s'ensuit que toute la suite $\{\tilde{u}_\mu(t)\}_\mu$ converge faiblement vers l'élément $u(t) \in V$.

Enfin prenons $v = u(t)$ dans (4.3.9) et utilisons la condition (2.1.9) (b) sur F , on obtient :

$$\begin{aligned} c \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V^2 &\leq (f(t), \tilde{u}(t) - u(t))_V + J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}(t), u(t) - \tilde{u}(t)) \\ &+ (F\varepsilon(\tilde{u}(t)), \varepsilon(u(t) - \tilde{u}(t)))_Q \end{aligned} \quad (4.3.13)$$

En passant alors à la limite lorsque $\mu \rightarrow 0$ dans (4.3.13) et en utilisant (4.3.6), (4.3.10) et (4.3.12) on déduit :

$$\|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V \rightarrow 0 \text{ lorsque } \mu \rightarrow 0$$

ce qui conclut la preuve. ■ ■

Lemme 4.3.4. *Il existe $c > 0$ tel que :*

$$\|\tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)\|_V \leq c \|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \quad (4.3.14)$$

pour tout $t \in [0, T]$.

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$. Prenons $v = \tilde{u}_\mu(t) - u(t)$ dans (4.1.11) on obtient

$$\begin{aligned} (F\varepsilon(u_\mu(t)), \varepsilon(\tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)))_Q + J_{ad}(\beta_\mu(t), u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) \\ + \frac{1}{\mu} J_{nc}(u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u(t)) = (f(t), \tilde{u}(t) - u(t))_V. \end{aligned}$$

De même, prenons $v = u(t) - \tilde{u}_\mu(t)$ dans (4.3.2), on obtient

$$\begin{aligned} & (F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(u(t) - \tilde{u}_\mu(t)))_Q + J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), u(t) - \tilde{u}_\mu(t)) \\ & + \frac{1}{\mu} J_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), u(t) - \tilde{u}_\mu(t)) = (f(t), u(t) - \tilde{u}_\mu(t))_V. \end{aligned}$$

En additionnant les deux égalités précédentes, après quelques calculs élémentaires on trouve :

$$\begin{aligned} & (F\varepsilon(u_\mu(t)) - F\varepsilon(\tilde{u}_\mu(t)), \varepsilon(\tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)))_Q \\ & + J_{ad}(\beta_\mu(t), u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) - J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) \quad (4.3.15) \\ & + \frac{1}{\mu} J_{nc}(u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) - \frac{1}{\mu} J_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) = 0 \end{aligned}$$

Par ailleurs, de (2.3.4), (3.3.3), (2.3.5) et (2.3.8) on a :

$$\begin{aligned} & J_{ad}(\beta_\mu(t), u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) - J_{ad}(\beta(t), \tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) \\ & \leq c \|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \|\tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)\|_V, \end{aligned}$$

Or

$$J_{nc}(u_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) - J_{nc}(\tilde{u}_\mu(t), \tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)) \leq 0.$$

Nous utilisons alors ces deux dernières inégalités dans (4.3.15) et (2.1.9) pour conclure (4.3.14). ■

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver le théorème **4.3.1**.

Démonstration. Soit $t \in [0, T]$.

On a :

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V \leq \|\tilde{u}_\mu(t) - u_\mu(t)\|_V + \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V.$$

Puis en utilisant (4.3.14) on a encore :

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V \leq \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V + c \|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)}. \quad (4.3.16)$$

Par ailleurs on a :

$$\|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq c \int_0^t \|u_\mu(s) - u(s)\|_V ds. \quad (4.3.17)$$

D'où de (4.3.17) et (4.3.16) on déduit

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V + \|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \leq \|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V + c \int_0^t \|u_\mu(s) - u(s)\|_V ds.$$

D'autre part, (4.3.5) implique

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V \leq c(\|f(t)\|_V + \|u(t)\|_V),$$

ce qui montre que

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V \leq c \quad (4.3.18)$$

Comme (4.3.18) et (4.3.3) sont vérifiées pour tout $t \in [0, T]$, en vertu du théorème de convergence dominée de Lebesgue on déduit :

$$\int_0^t \|u_\mu(s) - u(s)\|_V ds \longrightarrow 0 \text{ lorsque } \mu \longrightarrow 0. \quad (4.3.19)$$

car

$$\|\tilde{u}_\mu(t) - u(t)\|_V \longrightarrow 0, \quad \forall t \in [0, T],$$

d'où on obtient :

$$\|u_\mu(t) - u(t)\|_V + \|\beta_\mu(t) - \beta(t)\|_{L^2(\Gamma_3)} \longrightarrow 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

■

4.4 Exemple de fonction F :

Considérons l'opérateur d'élasticité :

$$F : \Omega \times S^d \longrightarrow S^d$$

satisfaisant :

- (a) Il existe $M > 0$ tel que $\|F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)\| \leq M \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d$, *p.p.* dans Ω .
- (b) Il existe $m > 0$ tel que $(F(x, \varepsilon_1) - F(x, \varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2$ pour tout $\varepsilon_1, \varepsilon_2 \in S^d$, *p.p.* dans Ω . (4.4.1)
- (c) L'application $x \longmapsto F(x, \varepsilon)$ est Lebesgue mesurable sur Ω pour tout $\varepsilon \in S^d$.
- (d) $F(x, 0) = 0$, *p.p.* $x \in \Omega$.

Une famille des opérateurs d'élasticité satisfaisant la condition (4.4.1) est fournie par les matériaux non-linéaires de Hencky. Pour un matériau de Hencky, la relation de contrainte-déformation est définie par :

$$\sigma = K_0 \text{tr} \varepsilon(u) I + \Psi \left(|\varepsilon^D(u)|^2 \right) \varepsilon^D(u),$$

de sorte que l'opérateur d'élasticité non-linéaire est :

$$F(\varepsilon) = K_0 \text{tr} \varepsilon I + \Psi \left(|\varepsilon^D|^2 \right) \varepsilon^D. \quad (4.4.2)$$

Ici ; $K_0 > 0$ est un coefficient matériel, I est le tenseur d'identité de deuxième ordre, $\text{tr} \varepsilon = \varepsilon_{ii}$ est la trace de ε , et ε^D est le déviateur de ε :

$$\varepsilon^D = \varepsilon - \frac{1}{d} \text{tr} \varepsilon I. \quad (4.4.3)$$

La fonction Ψ est supposée continument différentiable par morceaux, et il existe

des constantes positives c_1, c_2, d_1 et d_2 telles que pour $\xi \geq 0$,

$$\Psi(\xi) \leq d_1, \quad -c_1 \leq \Psi'(\xi) \leq 0, \quad c_2 \leq \Psi(\xi) + 2\Psi'(\xi)\xi \leq d_2. \quad (4.4.4)$$

Prouvons que la condition (4.4.1) est satisfaite pour l'opérateur d'élasticité défini dans (4.4.2). Nous avons

$$\begin{aligned} F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2) &= K_0 \text{tr} \varepsilon_1(u) I - K_0 \text{tr} \varepsilon_2(u) I + \Psi\left(|\varepsilon_1^D|^2\right) \varepsilon_1^D - \Psi\left(|\varepsilon_2^D|^2\right) \varepsilon_2^D \\ &= K_0 \text{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I + \Psi\left(|\varepsilon_1^D|^2\right) \varepsilon_1^D - \Psi\left(|\varepsilon_2^D|^2\right) \varepsilon_2^D \\ &= K_0 \text{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I \end{aligned}$$

on a :

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \Psi\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2\right) (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \right\} \\ &= \frac{d}{dt} \left\{ \Psi\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|\right) \varepsilon_2^D + \Psi\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|\right) t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D) \right\} \\ &+ 2(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D) \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)| \Psi'\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2\right) \right) (\varepsilon_2^D t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \\ &+ (\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D) \Psi\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2\right) \end{aligned}$$

En intégrant, on trouve :

$$\begin{aligned} &\int_0^1 2(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D) \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)| \Psi'\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2\right) \right) (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) dt \\ &+ \int_0^1 (\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D) \Psi\left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2\right) dt = \Psi\left(|\varepsilon_1^D|^2\right) \varepsilon_1^D - \Psi\left(|\varepsilon_2^D|^2\right) \varepsilon_2^D. \end{aligned}$$

On a :

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2) &= K_0 \operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I \\
&\quad + \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[\Psi \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \right] dt \\
&= K_0 \operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I + \int_0^1 \left[2\Psi' \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) \right. \\
&\quad \times (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \\
&\quad \left. + \Psi \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] dt.
\end{aligned}$$

En utilisant (4.4.3), on a :

$$\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D = (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) - \frac{1}{d} \operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I$$

d'où :

$$\begin{aligned}
F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2) &= K_0 \operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I \\
&\quad + \int_0^1 \left[2\Psi' \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) \times \right. \\
&\quad \left. (|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \right. \\
&\quad \left. + \Psi \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \right] dt
\end{aligned}$$

En utilisant alors (4.4.4) on déduit qu'il existe $M > 0$ tel que :

$$\|F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2)\| \leq M \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|$$

Donc la condition (4.4.1) (a) est satisfaite.

Maintenant, on va vérifier la condition (4.4.1) (b). Pour cela ;

$$\begin{aligned}
(F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &= K_0 \operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \\
&+ \int_0^1 \left[2\Psi' \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) \times (\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)) \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)| \right) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 \right. \\
&+ \left. \Psi \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 \right] dt \geq K_0 |\operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)|^2 \\
&+ \int_0^1 \left[2\Psi' \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) \times |\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 + \Psi \left(|\varepsilon_2^D + t(\varepsilon_1^D - \varepsilon_2^D)|^2 \right) \right] |\varepsilon_1 - \varepsilon_2|^2 dt \\
(F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) &\geq K_0 \operatorname{tr}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) I \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + c_2 \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2 \\
&\geq c_2 \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2
\end{aligned}$$

alors $\exists m > 0$ tel que :

$$(F(\varepsilon_1) - F(\varepsilon_2)) \cdot (\varepsilon_1 - \varepsilon_2) \geq m \|\varepsilon_1 - \varepsilon_2\|^2$$

Résumé

Le but de cette thèse est l'étude de deux problèmes de contact quasi-statique pour des matériaux élastiques. Le contact est sans frottement et est modélisé à l'aide des conditions de Signorini ou de compliance normale dans lesquelles on tient compte de l'adhésion des surfaces en contact. L'évolution du champ d'adhésion est décrite par une équation différentielle ordinaire du premier ordre. Nous présentons dans chaque problème une formulation variationnelle des problèmes mécaniques et un résultat d'existence et d'unicité de la solution de chaque modèle. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps, d'équations différentielles, ainsi que sur le théorème du point fixe de Banach. Finalement, on montre que la solution du problème de Signorini avec adhésion peut être obtenue comme limite de la solution du problème de compliance normale avec adhésion quand le coefficient de rigidité de l'obstacle tend vers l'infini.

Abstract

The purpose of this work is the study of two quasistatic contact problems for elastic bodies. The contact is frictionless and is modeled with Signorini condition or normal compliance in which the adhesion of compact surfaces is taken in to account. The evolution of the bonding field is described by a first order differential equation. We present variational formulations for the mechanical problems and we prove the existence of a unique weak solution to each model. The proofs are based on arguments of time-dependent variational inequalities and the Banach fixed point theorem. Moreover, we prove that the solution of the Signorini contact problem can be obtained as the limit of solution of the contact problem with normal compliance as stiffness coefficient of the foundation converge to infinity.

Bibliographie

- [1] K.T. Andrews, L. Chapman, J.R. Fernández, M.Fisackerly, M. Shillor, L. Vanerian and T. Van Houten, *A membrane in adhesive contact*, SIAM J. Appl. Math. 64 (2003) , 152 – 169.
- [2] K.T. Andrews and M. Shillor, *Dynamic adhesive contact of a membrane*, Adv. Math. Sci. Appl. 13 (2003) , 343 – 356.
- [3] L. Cangémi, *Frottement et adhérence : modèle, traitement numérique et application à l'interface fibre/matrice*, Ph. D. Thesis, Univ. Méditerranée, Aix-Marseille I, 1997.
- [4] O. Chau, J.R.Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Variational and numerical analysis of a quasistatic viscoelastic contact problem with adhesion*, J.Comput. Appl. Math. 159 (2003) , 431 – 465.
- [5] O. Chau, M. Shillor and M. Sofonea, *Dynamic frictionless contact with adhesion*, J. Appl. Math. Phys. (ZAMP) 55 (2004) , 32 – 47.
- [6] M.Cocou and R. Rocca, *Existence results for unilateral quasistatic contact problems with friction and adhesion*, Math Model. Num. Anal. 34 (2000) , 981 – 1001.
- [7] A. Curnier and C. Talon, *A model of adhesion added to contact with friction*, in *Contact Mechanics*, JAC Martins and MDP Monteiro Marques (Eds) , Kluwer, Dordrecht, 2002, 161 – 168.
- [8] J.R.Fernández, M. Shillor and M. Sofonea, *Analysis and numerical simulations of a dynamic contact problem with adhesion*, Math. Comput. Modelling 37 (2003) , 1317 – 1333.

- [9] M.Frémond, *Equilibre des structures qui adhèrent à leur support*, C. R. Acad. Sci. Paris, Série II 295 (1982), 913 – 916.
- [10] M.Frémond, *Adérence des solides*, J. Mécanique Théorique et Appliquée 6 (1987), 383 – 407.
- [11] W. Han, K. L. Kuttler, M. Shillor and M. Sofonea, *Elastic beam in adhesive contact*, Int. J. Solides Structures 39 (2002), 1145 – 1164.
- [12] L. Jianu, M. Shillor and M. Sofonea, *A viscoelastic bilateral frictionless contact problem with adhesion*, Applic. Anal. 80 (2001), 233 – 255.
- [13] J. Nečas and I. Hlaváček, *Mathematical Theory of Elastic and Elastic and Elastoplastic Bodies :An Introduction*, Elsevier, Amsterdam, 1981.
- [14] M. Raous, L. Cangémi and M. Cocu, *A consistent model coupling adhesion, friction, and unilateral contact*, Comput. Meth. Appl. Mech. Engng. 177 (1999), 383 – 399.
- [15] J. Rojek and J. J. Telaga, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. I : General developments*, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 655 – 677
- [16] J. Rojek, J. J. Telaga and S. Stupkiewicz, *Contact problems with friction, adhesion and wear in orthopaedic biomechanics. II : Numerical implementation and application to implanted knee joints*, J. Theor. Appl. Mech. 39 (2001), 679 – 706.
- [17] M. Shillor, M. Sofonea and J. J. Telaga, *Models and Variational Analysis of Quasistatic contact*, Lect. Notes Phys. 655, Springer, Berlin Heidelberg, 2004.
- [18] M. Sofonea and A. Matei, *Elastic antiplane contact problem with adhesion*, J. of Appl. Math. Phys. (ZAMP) 53 (2002), 962 – 972.
- [19] P. Suquet, *Plasticité et homogénéisation*, Thèse de Doctorat d'État, Université Pierre et Marie Curie, Paris 6 (1982).
- [20] Bressi H, *Analyse fonctionnelle- Théorie et applications*, Masson, Paris (1987).
- [21] Duvaut G., Lions J-L : *Les inéquations en mécanique et en physique*, Dunod, Paris 1972.

[22] W. Han and M. Sofonea, *Analysis and Numerical Approximation of an Elastic Frictional Contact Problem with Normal Compliance*, *Applic. Math.* 26, 4 (1999), 415 – 435.

A. Touzaline, *Problèmes élastiques non linéaires de contact avec frottement*, *Thèse de Doctorat d'État*, Université U.S.T.H.B, (2006) .

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à l'étude de deux problèmes de contact quasi-statique pour des matériaux élastiques, dans lesquels on tient compte de l'adhésion des surfaces en contact.

Nous avons d'abord, étudié dans chaque problème une formulation variationnelle des problèmes mécaniques et un résultat d'existence et d'unicité de la solution de chaque modèle. Les démonstrations sont basées sur des arguments d'inéquations variationnelles dépendant du temps, d'équations différentielles, ainsi que sur le théorème du point fixe de Banach.

Finalement, on a montré que la solution du problème de Signorini avec adhésion peut être obtenue comme limite de la solution du problème de compliance normale avec adhésion quand le coefficient de rigidité de l'obstacle tend vers l'infini.