

**MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA  
RECHERCHE SCIENTIFIQUE  
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE  
HOUARI BOUMEDIENNE  
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES**



Mémoire présentée pour l'obtention du diplôme de Doctorat 3<sup>ème</sup> Cycle  
(LMD) en Mathématiques

Spécialité : Équations aux dérivées partielles et Applications

Par

**ABDALLAOUI Athmane**

**THÈME**

**IMPEDANCE MECANIQUE D UNE COUCHE MINCE  
EN ELASTICITE MICROPOLAIRE LINEAIRE.**

Soutenu publiquement, le 12/04/2018 devant le jury composé de :

Mr.	<b>M. S. MOULAY</b>	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Président.
Mr.	<b>K. LEMRABET</b>	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr.	<b>D. E. TENIOU</b>	Professeur	à l'U.S.T.H.B.	Examinateur.
Mr.	<b>M. MOUSSAOUI</b>	Professeur	à l'E.N.S. Kouba.	Examinateur.
Mme.	<b>L. RAHMANI</b>	Professeur	à l'Université de Tizi-Ouzou.	Examinatrice.
Mr.	<b>A. AIBECHÉ</b>	Professeur	à l'Université de Sétif.	Examinateur.

---

# Remerciement

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements à Monsieur **K. LEMRABET** mon Directeur de thèse pour l'intéressant sujet qu'il m'a proposé, pour son aide précieuse et ses conseils et pour la confiance qu'il m'a accordée. Il m'est impossible de lui exprimer toute ma gratitude en seulement quelques lignes.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude à Monsieur **M. S. MOULAY**, Professeur à l'**U.S.T.H.B.** pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je remercie vivement les professeurs **D. E. TENIOU**, **M. A. MOUSSAOUI**, **L. RAHMANI** et **A. AIBECHE** d'avoir accepté d'examiner ce travail et de faire partie du jury.*

*Je ne saurais oublier de remercier tous mes professeurs et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail.*

*Je remercie sincèrement, et plus largement, toutes les personnes du labo **AMNEDP** (Laboratoire d'analyse mathématique et numérique des équations aux dérivées partielles) pour leur aide au sein de ce Laboratoire.*

*Pour finir, mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis, en particulier mes parents et mon frère **SALIM** pour leur soutien tout au long de mes études.*

## Résumé

Dans cette thèse, on considère une famille  $(P^\delta)$ , où  $\delta$  est un petit paramètre positif, de problèmes de transmission bidimensionnels d'élasticité asymétrique linéaire dans un domaine  $\Omega^\delta$  constitué de deux corps micro polaires liés :  $\Omega_-$  et une couche mince  $\Omega_+^\delta$ . On suppose que  $\Omega_-$  et  $\Omega_+^\delta$  sont homogènes et isotropes. De tels problèmes modélisent la propagation des ondes entre  $\Omega_-$  et la couche mince  $\Omega_+^\delta$ . On limite notre considération au cas des problèmes élastostatiques et on s'intéresse à deux types de géométrie : dans un premier cas on va considérer une bande mince qui va nous guider dans le deuxième cas qu'est celui d'une couche mince courbe. Notre objectif est de modéliser l'effet de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur le domaine fixe  $\Omega_-$  par une condition aux limites d'impédance en utilisant les techniques du développement asymptotique. Le problème de transmission est alors approché par un problème d'impédance posé dans le domaine fixe  $\Omega_-$ , et on prouve alors une estimation d'erreur.

**Mots clés:** Milieu micro polaire; couche mince; opérateur d'impédance; élasticité linéaire.

## Abstract

In this thesis, we consider a family  $(P^\delta)$ , where  $\delta$  is a small positive parameter, of two-dimensional transmission problems of linear asymmetric elasticity in a domain  $\Omega^\delta$  consisting of two bonded micropolar bodies,  $\Omega_-$  and a thin layer  $\Omega_+^\delta$ . It is assumed that  $\Omega_-$  and  $\Omega_+^\delta$  are homogeneous and isotropic. Such problems model for instance wave propagation between  $\Omega_-$  and the layer  $\Omega_+^\delta$ . We restrict our consideration to the case of elastostatics and a simple geometry, firstly we consider a thin layer which will guide us in the case of a curve layer. Our aim is to model the effect of the thin layer  $\Omega_+^\delta$  on the fixed domain  $\Omega_-$  by an impedance boundary condition using the techniques of asymptotic expansion. The transmission problem is then approximated by an approximate impedance problem set in the fixed domain  $\Omega_-$ . We then prove an error estimate.

**Keywords:** Micro polar body; thin layer; impedance operator; linear elasticity.

---

# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
0.1 Position du problème . . . . .	1
0.2 Impédance d'une bande mince . . . . .	2
0.3 Impédance d'une couche mince courbe . . . . .	8
0.4 Organisation de la thèse . . . . .	11
<b>1 Rappels d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle</b>	<b>13</b>
1.1 Analyse fonctionnelle . . . . .	13
1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$ , $(1 \leq p \leq +\infty)$ . . . . .	13
1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ . . . . .	14
1.1.3 Les espace de Hilbert $H(\text{div}, \Omega)$ . . . . .	18
1.2 Géométrie différentielle pour les courbes de $\mathbb{R}^2$ . . . . .	19
1.2.1 Abscisse curviligne . . . . .	19
1.2.2 Courbe et rayon de courbure . . . . .	20
1.2.3 Courbure algébrique, rayon de courbure algébrique et formules de Frenet . . . . .	21
<b>2 Elasticité micropolaire linéaire</b>	<b>23</b>
2.1 Introduction . . . . .	23
2.2 Le problème stationnaire d'élasticité micropolaire en dimension trois . . . . .	25
2.3 Eléments de la théorie de l'élasticité micropolaire en dimension trois . . . . .	26
2.3.1 Formule de Cauchy en élasticité micropolaire linéaire . . . . .	26
2.3.2 Equations d'équilibre . . . . .	30

---

2.3.3	Loi de comportement . . . . .	32
2.3.4	Energie de déformation . . . . .	33
2.4	Equation d'équilibre variationnelle . . . . .	34
2.5	Interprétation mécanique de l'équation d'équilibre variationnelle . . . . .	35
2.6	Elasticité micropolaire en dimension deux . . . . .	36
<b>3</b>	<b>Impédance mécanique d'une bande mince en élasticité micropolaire</b>	<b>38</b>
3.1	Introduction . . . . .	38
3.2	Condition d'impédance approchée . . . . .	43
3.3	Développement asymptotique et formulation faible . . . . .	45
3.3.1	Développement asymptotique . . . . .	45
3.3.2	Formulation faible du problème de transmission dans le domaine fixe	52
3.3.3	Résultat de stabilité pour le problème de transmission . . . . .	53
3.3.4	Estimation d'erreur pour le problème de transmission . . . . .	54
3.4	Etude du problème d'impédance approchée . . . . .	56
3.4.1	Formulation faible . . . . .	56
3.4.2	Résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée . . . .	57
3.4.3	Développement asymptotique . . . . .	58
3.4.4	Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approchée . . . .	59
3.5	Estimation d'erreur entre le problème de transmission et le problème d'impédance approchée . . . . .	60
<b>4</b>	<b>Impédance d'une couche mince courbe en élasticité micropolaire</b>	<b>62</b>
4.1	Présentation du problème . . . . .	62
4.2	Problème d'impédance . . . . .	65
4.2.1	Impédance d'une couche mince . . . . .	65
4.3	Eléments sur la géométrie différentielle des couches minces . . . . .	66
4.3.1	Passage aux coordonnées locales . . . . .	66
4.4	Condition d'impédance approchée par le développement de Taylor . . . . .	71
4.4.1	Problème d'impédance approchée . . . . .	73

4.5	Condition d'impédance approchée par le développement asymptotique . . .	73
4.5.1	Changement d'échelle . . . . .	73
4.5.2	Développement asymptotique . . . . .	75
4.6	Etude du problème d'impédance approchée . . . . .	80
4.6.1	Formulation faible . . . . .	80
4.6.2	Résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée . . .	81
4.6.3	Développement asymptotique . . . . .	81
4.6.4	Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approchée . . . .	83
	<b>Conclusion générale</b>	<b>83</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>85</b>

# Introduction

## 0.1 Position du problème

La théorie de l'élasticité asymétrique a été introduite par les frères **Cosserat** pour parer l'insuffisance de la théorie de l'élasticité classique qui s'est avérée inopérante pour modéliser le comportement élastique des milieux granuleux par exemple. A chaque particule est associée un trièdre mobile rigide susceptible de subir au cours de la déformation non seulement un déplacement mais aussi une rotation. Le milieu est donc constitué de points (particules) orientés. On parle de milieu micropolaire. La déformation d'un corps est définie par un champ de déplacements  $u(x)$  et un champ de rotations  $w(x)$ . Le tenseur des déformations  $\gamma_{ji}(x)$  n'est plus symétrique (défini à partir de  $u(x)$  et  $w(x)$ ). Le tenseur des contraintes de forces  $\sigma_{ji}(x)$  (non symétrique) n'est plus suffisant pour décrire l'équilibre, il faut ajouter le tenseur des couples de forces  $\theta_{ji}(x)$  lié par une loi de comportement au tenseur des couples de torsions-courbures  $\chi_{ji}(x)$  (définie à partir de  $w(x)$ ).

Le problème d'élastostatique, dans le cas d'un milieu isotrope, homogène et symétrique par rapport à un point, consiste à déterminer les fonctions  $\sigma_{ji}(x)$ ,  $\theta_{ji}(x)$  et aussi  $\gamma_{ji}(x)$ ,  $\chi_{ji}(x)$  ainsi que les fonctions  $u_i(x)$ ,  $\omega_i(x)$  pour  $x \in \Omega$  vérifiant :

a) Les équations d'équilibre dans  $\Omega$

$$\begin{aligned}\sigma_{ji,j} &= -f_i(x), & x \in \Omega, \\ \theta_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} &= -g_i(x), & x \in \Omega.\end{aligned}$$

b) Les relations linéarisées entre l'état de contrainte et celui de déformation ( les équations de comportement )

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \theta_{ji} &= (\nu + \epsilon)\chi_{ji} + (\nu - \epsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij}.\end{aligned}$$

où

$$\gamma_{ji} = u_{i,j} - \epsilon_{kji}\omega_k,$$

$$\chi_{ji} = \omega_{i,j}.$$

c) Les conditions aux limites

$$u_i = 0, \omega_i = 0 \text{ sur } \Gamma_D,$$

$$\sigma_{ji} n_j = p_i, \theta_{ji} n_j = q_i \text{ sur } \Gamma_N.$$

Dans les expressions ci-dessus  $\mu, \lambda$  désignent les constantes de Lamé,  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  les autres constantes du matériau. Les fonctions  $f_i(x)$  désignent les composantes des forces de masse, tandis que  $g_i(x)$  les composantes des couples de masse. Les grandeurs  $p_i$  et  $q_i$  désignent respectivement les composantes des forces et des moments extérieurs sollicitant la surface  $\Gamma_N$ . Par les symboles  $h_i$  et  $k_i$  nous désignons, respectivement, les composantes données des vecteurs des déplacements et des rotations.  $\epsilon_{ijk}$  désigne l'alternateur connu de Levi-Civita.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ ou } (2, 3, 1), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (3, 2, 1), (1, 3, 2) \text{ ou } (2, 1, 3), \\ 0 & \text{si } i = j \text{ ou } j = k \text{ ou } k = i. \end{cases}$$

Dans cette thèse, on modélise l'effet d'une couche mince  $\Omega_+^\delta$  élastique micropolaire linéaire en dimension deux d'épaisseur  $\delta$  sur un corps  $\Omega_-$ , lorsque  $\delta$  tend vers 0. On travaille avec deux types de géométrie, dans un premier cas, on considère une bande mince qui va nous guider dans le deuxième cas qu'est celui une couche mince courbe

## 0.2 Impédance d'une bande mince

On a considéré le problème de transmission suivant pour l'élasticité asymétrique linéaire en dimension deux :

Inconnues :  $u^\delta(x_1, x_2) = (u_1^\delta(x_1, x_2), u_2^\delta(x_1, x_2))$  champ des déplacements,  $\omega^\delta(x_1, x_2)$  la rotation.



Données :  $f_-(x_1, x_2) = (f_{-1}(x_1, x_2), f_{-2}(x_1, x_2))$  champ des forces de masse,  $g_-(x_1, x_2)$  champ des couples de masse.

Loi de comportement :

$$\sigma_{\pm ji} = (\mu_{\pm} + \alpha_{\pm}) \gamma_{\pm ji} + (\mu_{\pm} - \alpha_{\pm}) \gamma_{\pm ij} + \lambda_{\pm} \gamma_{\pm kk} \delta_{ij}; i, j, k = 1, 2$$

avec

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm 11} &= D_1 u_{\pm 1}^{\delta}, \quad \gamma_{\pm 22} = D_2 u_{\pm 2}^{\delta} \\ \gamma_{\pm 12} &= D_1 u_{\pm 2}^{\delta} - \omega_{\pm}^{\delta}, \quad \gamma_{\pm 21} = D_2 u_{\pm 1}^{\delta} + \omega_{\pm}^{\delta}, \end{aligned}$$

$\mu_{\pm}, \alpha_{\pm}, \lambda_{\pm}, \nu_{\pm}, \epsilon_{\pm}$  sont les coefficients définissant le matériau. Ils vérifient :

$$\mu_{\pm} > 0, \alpha_{\pm} > 0, \nu_{\pm} > 0, \epsilon_{\pm} > 0, 3\lambda_{\pm} + 2\mu_{\pm} > 0.$$

L'indice + (resp -) désigne la restriction à  $\Omega_+^{\delta}$  (resp  $\Omega_-$ ). On pose

$$\begin{aligned} \Omega_- &= \mathbb{R} \times ]-1, 0[, \quad \Gamma_- = \mathbb{R} \times \{-1\}, \quad \Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}, \\ \Omega_+^{\delta} &= \mathbb{R} \times ]0, \delta[, \quad \Gamma_+^{\delta} = \mathbb{R} \times \{\delta\}. \end{aligned}$$

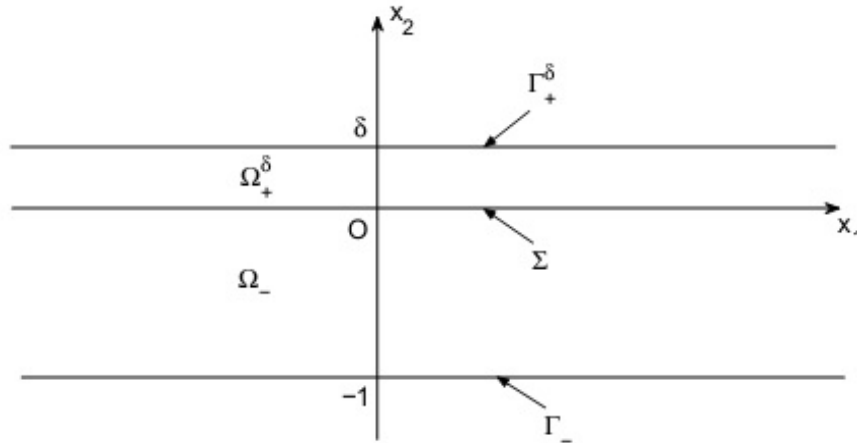


Figure 1. Cas d'une couche mince plane.

- Equations d'équilibre dans  $\Omega_-$

$$\begin{cases} D_1\sigma_{-11}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2\sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = f_{-1}, \\ D_1\sigma_{-12}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2\sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = f_{-2}, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2)\omega_-^\delta + 2\alpha_-(D_1u_{-2}^\delta - D_2u_{-1}^\delta) - 4\alpha_-\omega_-^\delta = g_-. \end{cases} \quad (1.1)$$

- Equations d'équilibre dans  $\Omega_+^\delta$

$$\begin{cases} D_1\sigma_{+11}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ D_1\sigma_{+12}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+)(D_1^2 + D_2^2)\omega_+^\delta + 2\alpha_+(D_1u_{+2}^\delta - D_2u_{+1}^\delta) - 4\alpha_+\omega_+^\delta = 0. \end{cases} \quad (1.2)$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_-$

$$u_-^\delta = 0, \quad \omega_-^\delta = 0.$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$

$$\begin{cases} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+)D_2\omega_+^\delta = 0. \end{cases}$$

- Conditions de transmission sur  $\Sigma$

$$\begin{cases} u_-^\delta = u_+^\delta, \quad \omega_-^\delta = \omega_+^\delta, \\ \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta), \\ \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta), \\ (\nu_- + \epsilon_-)D_2\omega_-^\delta = (\nu_+ + \epsilon_+)D_2\omega_+^\delta. \end{cases}$$

Il est bien connu que le problème de transmission ( $P^\delta$ ) a une solution unique dans l'espace canonique

$$V = \left\{ \begin{array}{l} (v_\pm, \varphi_\pm) \in \mathbb{H}^1(\Omega_\pm) \times H^1(\Omega_\pm); \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, \quad v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\}.$$

Lorsque l'épaisseur  $\delta$  de la couche  $\Omega_+^\delta$  est assez petite, la solution numérique du problème de transmission  $(P^\delta)$  ne peut pas être calculée avec précision en raison des instabilités numériques qui apparaissent. Alors, notre objectif est de calculer des conditions aux limites sur l'interface  $\Sigma$  qui représente d'une manière approchée l'effet de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur  $\Omega_-$ . L'effet exact de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur le domaine  $\Omega_-$ . On considère le problème aux limites

$$(P_+^\delta) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations (1.1)} \quad \text{dans } \Omega_+^\delta, \\ u_+^\delta = \psi^\delta \text{ sur } \Sigma, \\ \omega_+^\delta = \phi^\delta \text{ sur } \Sigma, \\ \left( \begin{array}{c} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta \end{array} \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+^\delta. \end{array} \right.$$

si  $(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$  est solution de ce problème, on pose :

$$T_\delta(\psi^\delta, \phi^\delta) = \left( \begin{array}{c} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta|_\Sigma \end{array} \right),$$

en utilisant les conditions de transmission sur  $\Sigma$ , on obtient

$$T_\delta(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \left( \begin{array}{c} \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^\delta|_\Sigma \end{array} \right).$$

Le problème de transmission  $(P^\delta)$  est alors équivalent au problème d'impédance suivant :

$$(P_-^\delta) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations (1.2)} \quad \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left( \begin{array}{c} \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^\delta|_\Sigma \end{array} \right) = T_\delta(u_-^\delta, \omega_-^\delta) \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Une expression explicite de l'opérateur d'impédance exacte  $T_\delta$  n'est pas accessible pour le cas géométrique général. Dans cette thèse, on donne une approximation  $T_{*\delta}$ :

$$T_{*\delta} \left( (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{|\Sigma} \right) = \delta \left( \begin{array}{c} \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{2\mu_+\lambda_+} D_1^2 u_{-*1}^\delta \\ \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} D_1 \left( D_1 u_{-*2}^\delta - \omega_{-*}^\delta \right) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{-*}^\delta + \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} \left( D_1 u_{-*2}^\delta - \omega_{-*}^\delta \right) \end{array} \right).$$

La solution  $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$  de  $(P^\delta)$  dans  $\Omega_-$  est alors approchée par la solution  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  du problème d'impédance approchée suivant:

$$(P_{-*}^\delta) \left\{ \begin{array}{l} D_1 \sigma_{-11} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_{-*}^\delta \\ \quad + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^\delta - D_2 u_{-*1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_{*-}^\delta = -g_- \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \omega_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ T_{*\delta} \left( (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{|\Sigma} \right) \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

On démontre le théorème suivant:

**Théorème :** *le problème  $(P_{*\delta})$  admet une unique solution dans*

$$V_{*\delta} = \left\{ \begin{array}{l} (v_-, \varphi_-) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_1 v_{-1}, D_1 v_{-2}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), \quad D_1 \varphi_- \in L^2(\Sigma), \\ v_- = \varphi_- = 0 \text{ sur } \partial\Sigma, \quad v_- = \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-. \end{array} \right.$$

et on a l'estimation d'erreur suivante:

$$\|u_-^\delta - u_{-*}^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_-^\delta - \omega_{-*}^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^2.$$

où la constante  $C$  ne dépend que de  $f_-$ ,  $g_-$  et des coefficients d'élasticité.

**Idée de la démonstration**

1. Changement d'échelle dans  $\Omega_+^\delta$ .

$$\begin{aligned}\Omega_+ &= \mathbb{R} \times ]0, 1[; \Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times ]0, \delta[ \\ u_+^\delta &: \Omega_+^\delta \rightarrow \mathbb{R}^2; \tilde{u}_+^\delta : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ \omega_+^\delta &: \Omega_+^\delta \rightarrow \mathbb{R}; \tilde{\omega}_+^\delta : \Omega_+ \rightarrow \mathbb{R} \\ (\tilde{u}_{+1}^\delta(x_1, x_2), \tilde{u}_{+2}^\delta(x_1, x_2)) &= (u_{+1}^\delta(x_1, \delta x_2), \delta u_{+2}^\delta(x_1, \delta x_2)) \\ \tilde{\omega}_+^\delta(x_1, x_2) &= \omega_+^\delta(x_1, \delta x_2).\end{aligned}$$

2. Développement asymptotique.

$$\begin{aligned}\tilde{u}_-^\delta &= \tilde{u}_-^0 + \delta \tilde{u}_-^1 + \delta^2 \tilde{u}_-^2 + \dots, \quad \tilde{\omega}_-^\delta = \tilde{\omega}_-^0 + \delta \tilde{\omega}_-^1 + \delta^2 \tilde{\omega}_-^2 + \dots \\ \tilde{u}_+^\delta &= \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2 \tilde{u}_+^2 + \dots, \quad \tilde{\omega}_+^\delta = \tilde{\omega}_+^0 + \delta \tilde{\omega}_+^1 + \delta^2 \tilde{\omega}_+^2 + \dots\end{aligned}$$

En injectant le développement dans les équations et les conditions aux limites et les conditions de transmission et en identifiant les coefficients de même puissance de  $\delta$ , on obtient une hiérarchie de problèmes aux limites et de transmission. On détermine les solutions par récurrence.

3. A l'ordre 0 la couche mince  $\Omega_+^\delta$  n'a aucun effet sur  $\Omega_-$ .

$$(CL\Sigma)_0 \begin{cases} \sigma_{-21}(u_-^0, \omega_-^0) = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-22}(u_-^0, \omega_-^0) = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ D_2 \omega_-^0 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

4. A l'ordre 1 l'effet de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur  $\Omega_-$  se traduit par des forces et des moments de forces s'exerçant sur  $\Sigma$ :

$$(BC\Sigma)_1 \begin{cases} \sigma_{-21}(u_-^1, \omega_-^1) = \frac{4\mu(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{-1|\Sigma}^0 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-22}(u_-^1, \omega_-^1) = \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_1 \left( D_1 u_{-2|\Sigma}^0 - \omega_{-|\Sigma}^0 \right) \text{ sur } \Sigma, \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^1 = (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_-^0 + \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left[ D_1 u_{-2|\Sigma}^0 - \omega_{-|\Sigma}^0 \right] \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

5. La fonction inconnue définie par  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = (u_-^0 + \delta u_-^1, \omega_-^0 + \delta \omega_-^1)$  satisfait (à  $\delta^2$  près) la condition d'impédance.

$$\begin{cases} \sigma_{-21}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = \frac{4\mu(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{-*1}^\delta|_\Sigma \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-22}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_1 \left( D_1 u_{-*2}^\delta|_\Sigma - \omega_{-*}^\delta|_\Sigma \right) \text{ sur } \Sigma, \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^\delta = (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{-*}^\delta + \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left[ D_1 u_{-*2}^\delta|_\Sigma - \omega_{-*}^\delta|_\Sigma \right] \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

6. On démontre par les techniques des estimations à priori le résultat de stabilité:

$$\|u_-^\delta - u_{-*}^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_-^\delta - \omega_{-*}^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^2.$$

### 0.3 Impédance d'une couche mince courbe

**Géométrie du problème:**

$\Omega_-$  : domaine régulier borné.

$\Omega_+^\delta$  : couche mince courbe régulière bornée.

$$\partial\Omega_- = \Gamma_- \cup \Sigma, \quad \partial\Omega_+^\delta = \Gamma_+^\delta \cup \Sigma, \quad \Sigma = \partial\Omega_- \cap \partial\Omega_+^\delta.$$

où  $\delta$  est un paramètre destiné à tendre vers 0.

$n$  : normale à  $\Sigma$  orientée vers l'extérieur de  $\Omega_-$ .

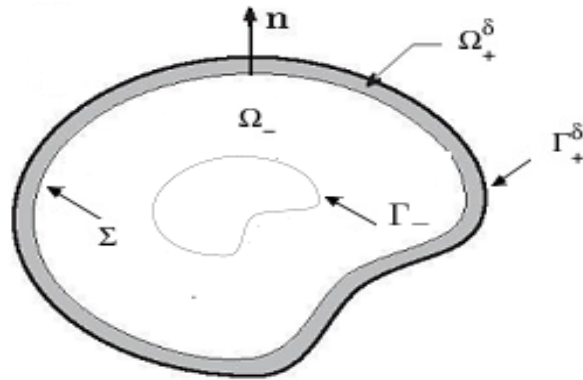


Figure 2. Cas d'une couche mince courbe.

- Equations dans  $\Omega_-$

$$\begin{cases} D_1\sigma_{-11}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2\sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = f_{-1}, \\ D_1\sigma_{-12}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2\sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = f_{-2}, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2)\omega_-^\delta + 2\alpha_- (D_1u_{-2}^\delta - D_2u_{-1}^\delta) - 4\alpha_-\omega_-^\delta = g_-. \end{cases}$$

- Equations dans  $\Omega_+^\delta$

$$\begin{cases} D_1\sigma_{+11}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ D_1\sigma_{+12}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+)(D_1^2 + D_2^2)\omega_+^\delta + 2\alpha_+ (D_1u_{+2}^\delta - D_2u_{+1}^\delta) - 4\alpha_+\omega_+^\delta = 0. \end{cases}$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_-$

$$\begin{cases} u_-^\delta = 0, \\ \omega_-^\delta = 0. \end{cases}$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$

$$\begin{cases} \sigma_{ji}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) n_j = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) \frac{\partial \omega_+^\delta}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

- Conditions de transmission sur  $\Sigma$

$$\begin{cases} u_-^\delta = u_+^\delta, \\ \omega_-^\delta = \omega_+^\delta, \\ \sigma_{ji}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) n_j = \sigma_{ji}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) n_j, \\ (\nu_- + \epsilon_-) \frac{\partial \omega_-^\delta}{\partial n} = (\nu_+ + \epsilon_+) \frac{\partial \omega_+^\delta}{\partial n}. \end{cases}$$

Le paramètre  $\delta$  étant petit, on modélise l'effet de la couche mince par une condition aux limites dite d'impédance ( $T_{*\delta}$ ) liant  $\sigma_{ns}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ ,  $\sigma_{nn}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$ ,  $D_z\omega_{-*}^\delta$  aux traces de  $u_{-*}^\delta$  et  $\omega_{-*}^\delta$  sur  $\Sigma$ , pour se ramener à un problème aux limites posé dans  $\Omega_-$  (domaine fixe), i.e remplacer le système sur  $\Omega_+^\delta$ , les conditions de transmission sur  $\Sigma$  et les condition

aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$  par la condition aux limites d'impédance sur  $\Sigma$ .

$$(T_{*\delta}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{n\tau} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = \delta \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{2\mu_+\lambda_+} D_s (D_s u_{-*\tau}^\delta + u_{-*n}^\delta R) \\ \quad + \delta \frac{4\alpha\mu}{\mu+\alpha} R (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \quad \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_{-nn} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -\delta R \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} (D_s u_{-*\tau}^\delta + u_{-*n}^\delta R) \\ \quad + \delta \frac{4\alpha\mu}{\mu+\alpha} D_s (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \quad \text{sur } \Sigma, \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^\delta = \delta (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) + \delta (\nu_+ + \epsilon_+) D_s^2 \omega_{-*}^\delta \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

La solution  $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$  du problème de transmission peut être approchée par la solution  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  du problème d'impédance suivant:

$$(P_{*\delta}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{-11} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_{-*}^\delta \\ + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^\delta - D_2 u_{-*1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_{-*}^\delta = g_- \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \omega_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ T_{*\delta} \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et on a le résultat de stabilité suivant:

**Théorème :** *le problème  $(P_{*\delta})$  admet une unique solution dans*

$$V_{*\delta} = \left\{ \begin{array}{l} (v_-, \varphi_-) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_1 v_{-1}, D_1 v_{-2}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), \quad D_1 \varphi_- \in L^2(\Sigma), \\ v_- = \varphi_- = 0 \text{ sur } \partial\Sigma, \quad v_- = \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-. \end{array} \right.$$

et on a l'estimation d'erreur suivante:

$$\|u_{-*}^\delta - u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C \delta^{\frac{3}{2}}.$$

où la constante  $C$  ne dépend que de  $f_-$ ,  $g_-$  et des coefficients d'élasticité.

### Idée de la démonstration

On introduit un système de coordonnées adapté à la construction des conditions aux limites d'impédance comme suit:

#### 1. Paramétrisation de la courbe $\Sigma$ .



On utilise le paramétrage

$$\begin{aligned}\varphi : U &\rightarrow \Sigma \\ s &\mapsto m = \varphi(s).\end{aligned}$$

On note

$$\tau(s) = D_s \varphi(s),$$

le vecteur tangent à  $\Sigma$  au point  $m(s)$  de  $\Sigma$ . On note  $n(s)$  le vecteur normal à  $\Sigma$  au point  $m(s)$  de  $\Sigma$ . On a les formules de Frenet

$$\begin{aligned}D_s n(s) &= R(s) \tau(s), \\ D_s \tau(s) &= -R(s) n(s),\end{aligned}$$

où  $R(s)$  est la courbure de  $\Sigma$  en  $m(s)$ .

## 2. Paramétrisation de la couche mince $\Omega_+^\delta$

L'épaisseur  $\delta$  de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  étant petite, on a l'isomorphisme

$$\begin{aligned}\Sigma \times ]0, \delta[ &\rightarrow \Omega_+^\delta \\ (s, z) &\rightarrow m(s) + zn(s)\end{aligned}$$

où  $n(s)$  est la normale à  $\Sigma$ . Ce paramétrage permet de faire un changement d'échelle sur la couche mince et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur  $\delta$  de la couche mince.

3. On démontre par les techniques le résultat de stabilité suivant:

$$\|u_{-*}^\delta - u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{\frac{3}{2}}.$$

## 0.4 Organisation de la thèse

Le reste de cette thèse est organisé comme suit :

**Chapitre 1 :** Dans ce chapitre on présente un certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle qui seront utilisés dans le suite de cette thèse. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages (voir [12], [6], [9], [2], [3], [20]).

**Chapitre 2** : Dans ce chapitre on s'intéresse au problème d'élasticité micropolaire linéaire : les tenseurs décrivant la déformation, les lois de comportement et les équations d'équilibre. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages (voir [7], [18], [13]).

**Chapitre 3** : Dans cette partie, on présente notre contribution concernant la modélisation d'une façon approchée de l'effet d'une bande mince  $\Omega_+^\delta$  élastique micropolaire linéaire en dimension deux, d'épaisseur  $\delta$  sur un corps  $\Omega_-$ , lorsque  $\delta$  tend vers 0 par les techniques des développements asymptotique avec changement d'échelle, ensuite on montre une estimation d'erreur. Le contenu de ce chapitre a fait l'objet d'une publication parut dans le revue **Applied Mathematics and Computation** ( voir [1]). Ce chapitre servira de guide dans le quatrième chapitre pour le cas d'une couche mince courbe.

**Chapitre 4** : Dans ce chapitre, on modélise de façon approchée l'effet d'une couche mince courbe  $\Omega_+^\delta$  élastique micropolaire linéaire en dimension deux, d'épaisseur  $\delta$  sur un corps  $\Omega_-$ , lorsque  $\delta$  tend vers 0 par les techniques des développements asymptotiques avec changement d'échelle. Finalement on présente quelques perspectives pour améliorer les résultats obtenus et d'introduire d'autres problèmes ouverts dans lesquels s'inscrit notre travail.

---

# Rappels d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle

Ce chapitre a pour but de rappeler un certain nombre d'outils d'analyse fonctionnelle et de géométrie différentielle qui seront utilisés dans la suite. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages (voir [12], [6], [9], [2], [3], [20]).

## 1.1 Analyse fonctionnelle

### 1.1.1 Les espaces $L^p(\Omega)$ , ( $1 \leq p \leq +\infty$ )

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 1.1.1** On désigne par  $L^p(\Omega)$  l'espace des fonctions intégrables sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . On pose

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \begin{cases} (\int_{\Omega} |f(x)|^p dx)^{\frac{1}{p}} & \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \sup_{x \in \Omega} \text{ess } |f(x)| & \text{si } p = +\infty. \end{cases}$$

**Notation 1.1.1** Soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ , on désigne par  $q$  l'exposant conjugué de  $p$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

**Proposition 1.1.1** Soient  $f \in L^p(\Omega)$  et  $g \in L^q(\Omega)$  avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . Alors  $f \cdot g \in L^1(\Omega)$  et

$$\|f \cdot g\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}.$$

**Théorème 1.1.1**  $L^p(\Omega)$  est

- un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq +\infty$ .
- réflexif pour  $1 < p < +\infty$ .
- séparable pour  $1 \leq p < +\infty$ .

**Théorème 1.1.2** Soit  $1 < p < +\infty$  et soit  $\varphi \in (L^p(\Omega))'$ . Alors il existe  $u \in L^q(\Omega)$  unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u(x) f(x) dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega),$$

de plus on a

$$\|u\|_{L^q(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^p(\Omega))'}.$$

**Théorème 1.1.3** Soit  $\varphi \in (L^1(\Omega))'$ . Alors il existe  $u \in L^\infty(\Omega)$  unique tel que

$$\langle \varphi, f \rangle = \int_{\Omega} u(x) f(x) dx, \quad \forall f \in L^1(\Omega),$$

de plus on a

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \|\varphi\|_{(L^1(\Omega))'}.$$

## 1.1.2 Les espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

**Définition 1.1.2** Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ . L'ensemble des fonctions à support compact inclus dans  $\Omega$  et indéfiniment dérivables dans  $\Omega$  est appelé espace des fonctions test et noté  $D(\Omega)$  ou  $C_c^\infty(\Omega)$

**Définition 1.1.3** Une distribution sur  $\Omega$  est une forme linéaire continue sur  $D(\Omega)$  (pour la topologie limite inductive). L'ensemble des distributions est noté  $D'(\Omega)$ .

**Définition 1.1.4** Soit  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$  et soit  $p \in \mathbb{R}$  avec  $1 \leq p < +\infty$ . L'espace de Sobolev  $W^{1,p}$  est défini par

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) : \exists g_1, g_2, \dots, g_n \in L^p(\Omega), \text{ tels que} \\ \int_{\Omega} u(x) \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega), \forall i \in \overline{1, n} \end{array} \right\}.$$

On pose

$$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Pour  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ , on note

$$\frac{\partial u(x)}{\partial x_i} = g_i \quad \text{et} \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial u(x)}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_n} \right)^T.$$

L'espace  $W^{1,p}(\Omega)$  est muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

L'espace  $H^1(\Omega)$  est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial u}{\partial x_i}, \frac{\partial v}{\partial x_j} \right)_{L^2(\Omega)}.$$

La norme associée

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} = \left( \|u\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de  $W^{1,2}(\Omega)$ .

**Proposition 1.1.2**  $W^{1,p}(\Omega)$  est

- un espace de Banach pour  $1 \leq p \leq +\infty$ .
- un espace de Hilbert pour  $p = 2$ .
- réflexif pour  $1 < p < +\infty$ .
- séparable pour  $1 < p < +\infty$ .

**Définition 1.1.5** Soient  $m \geq 2$  un entier et  $p$  un réel avec  $1 \leq p \leq +\infty$ . On définit par récurrence

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} : u \in W^{m-1,p}(\Omega) \text{ et } \frac{\partial u}{\partial x_i} \in W^{m-1,p}(\Omega), 0 \leq i \leq n \right\}.$$

Cette définition est équivalente à la précédente i.e

$$W^{m,p}(\Omega) = \left\{ \begin{array}{l} u \in L^p(\Omega) : \forall |\alpha| \leq m, \exists g_\alpha \in L^p(\Omega) \text{ tels que} \\ \int_\Omega u(x) D^\alpha \varphi(x) dx = (-1)^\alpha \int_\Omega g_\alpha \varphi(x) dx, \forall \varphi \in C_c^\infty(\Omega). \end{array} \right\}.$$

On note  $g_\alpha = D^\alpha u$ . L'espace  $W^{m,p}(\Omega)$  muni de la norme

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}$$

est un espace de Banach. On pose  $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$ ,  $H^m(\Omega)$  muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = (u, v)_{L^2(\Omega)} + \sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} (D^\alpha u, D^\alpha v)_{L^2(\Omega)},$$

est un espace de Hilbert.

**Proposition 1.1.3** On suppose que  $\Omega$  est de classe  $C^1$ . Soit  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  avec  $1 \leq p < +\infty$ . Alors il existe une suite  $(u_n)$  de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  telle que  $u_n|_\Omega \longrightarrow u$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Autrement dit, les restrictions à  $\Omega$  des fonctions de  $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$  forment un sous espace dense de  $W^{1,p}(\Omega)$ .

**Définition 1.1.6** Soit  $1 \leq p < +\infty$ .  $W_0^{1,p}(\Omega)$  désigne la fermeture de  $C_c^1(\Omega)$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . On note

$$H_0^1(\Omega) = W_0^{1,2}(\Omega).$$

L'espace  $W_0^{1,p}(\Omega)$  muni de la norme induite par  $W^{1,p}(\Omega)$  est un espace de Banach séparable; il est réflexif si  $1 < p < +\infty$ .  $H_0^1(\Omega)$  est un espace de Hilbert pour le produit scalaire de  $H^1(\Omega)$ .

**Proposition 1.1.4** On suppose que  $\Omega$  est un ouvert borné. Alors il existe une constante  $C$  ( dépendant de  $\Omega$  et  $p$  ) telle que

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega), 1 \leq p < +\infty.$$

En particulier l'expression  $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$  est une norme sur  $W_0^{1,p}(\Omega)$  qui équivaut à la norme sur  $W^{1,p}(\Omega)$ ; sur  $H_0^1(\Omega)$  l'expression  $\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v$  est un produit scalaire qui induit la norme  $\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}$  équivalente à la norme  $\|u\|_{H^1(\Omega)}$ .

**Proposition 1.1.5 (Inégalité de Korn pour une fonction à support compact)**

Soient  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^3$  et  $u \in C_c^\infty(\overline{\Omega})$ . Alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}.$$

**Proposition 1.1.6 (Inégalité de Korn sur  $H_0^1(\Omega)$ )** Soit  $\Omega$  un ouvert régulier de  $\mathbb{R}^3$ .

Alors il existe  $C > 0$  telle que

$$\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} \leq C \sum_{i,j=1}^3 \left\| \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \right\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

**Théorème 1.1.4 (des traces)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ , ou bien  $\Omega = \mathbb{R}_+^n$ . On définit l'application trace  $\gamma_0$  par:

$$\begin{aligned} \gamma_0 : H^1(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega}) &\longrightarrow L^2(\partial\Omega) \cap C^1(\overline{\partial\Omega}) \\ u &\longrightarrow \gamma_0(u) = u|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

Cette application linéaire continue  $\gamma_0$  se prolonge par continuité en une application linéaire continue de  $H^1(\Omega)$  dans  $L^2(\partial\Omega)$ , notée encore  $\gamma_0$ . En particulier il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour toute fonction  $v$  dans  $H^1(\Omega)$ , on a

$$\|v\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H^1(\Omega)}.$$

**Proposition 1.1.7** Les propriétés les plus importantes de la trace sont les suivantes:

- Si  $u \in W^{1,p}(\Omega)$  alors en fait  $u|_{\partial\Omega} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$  et

$$\|u|_{\partial\Omega}\|_{W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)} \leq C \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} \quad \forall u \in W^{1,p}(\Omega).$$

de plus l'opérateur trace  $u \longrightarrow u|_{\partial\Omega}$  est surjectif de  $W^{1,p}(\Omega)$  sur  $W^{1-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ .

- Le noyau de l'opérateur trace est  $W_0^{1,p}(\Omega)$ , c'est-à-dire

$$W_0^{1,p}(\Omega) = \{u \in W^{1,p}(\Omega), u|_{\partial\Omega} = 0\}.$$

**Théorème 1.1.5 (Formule de Green)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. Si  $u$  et  $v$  sont des fonctions de  $H^1(\Omega)$ , elles vérifient

$$\int_{\Omega} u(x) \frac{\partial v}{\partial x_i}(x) dx = - \int_{\Omega} v(x) \frac{\partial u}{\partial x_i}(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) v(x) n_i(x) ds,$$

où  $n = (n_i)_{1 \leq i \leq n}$  est la normale unitaire orientée vers l'extérieur de  $\Omega$ .

**Théorème 1.1.6 (Lax-Milgram)** Soit  $H$  un espace de Hilbert et  $a(u, v)$  une forme bilinéaire continue et coercive. Alors pour tout  $\varphi \in H$  il existe unique  $u \in H$  tel que

$$a(u, v) = (\varphi, v),$$

de plus si  $a$  est symétrique alors  $u$  est caractérisé par la propriété

$$u \in H \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}a(u, u) - (\varphi, u) = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v, v) - (\varphi, v) \right\}.$$

**Proposition 1.1.8** Soit  $H$  un espace de Hilbert réel et soit  $a$  une forme bilinéaire symétrique continue sur  $H$  vérifiant:

$$a(x, x) \geq 0, \quad \forall x \in H.$$

La forme bilinéaire  $a$  est coercive si et seulement si ( $a(x, x) = 0$  implique que  $x = 0$ ).

### 1.1.3 Les espace de Hilbert $H(\text{div}, \Omega)$

**Définition 1.1.7** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de  $\mathbb{R}^n$ . On pose

$$H(\text{div}, \Omega) = \{\omega \in [L^2(\Omega)]^n; \text{div } \omega \in L^2(\Omega)\}.$$

**Proposition 1.1.9** Muni du produit scalaire

$$(u, v) = (u, v)_{[L^2(\Omega)]^n} + (\text{div } u, \text{div } v)_{L^2(\Omega)}.$$

L'espace  $H(\text{div}, \Omega)$  est de Hilbert.



**Proposition 1.1.10** Une forme linéaire  $F \in [H(\operatorname{div}, \Omega)]'$  (dual de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ ) si et seulement s'il existe  $f \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  telle que

$$(F, \omega)_{[H(\operatorname{div}, \Omega)]' \times H(\operatorname{div}, \Omega)} = (f, \omega)_{H(\operatorname{div}, \Omega) \times H(\operatorname{div}, \Omega)} \quad \forall \omega \in H(\operatorname{div}, \Omega).$$

**Proposition 1.1.11** Le sous espace  $[C_c^\infty(\overline{\Omega})]^n$  est dense dans  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ .

**Théorème 1.1.7 (des traces)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier de classe  $C^1$ . On définit une application  $\gamma_1$  par :

$$\begin{aligned} \gamma_1 : H(\operatorname{div}, \Omega) &\longrightarrow H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \\ \omega &\longrightarrow \gamma_1(u) = \omega \cdot n|_{\partial\Omega}. \end{aligned}$$

L'application  $\gamma_1$  ( la trace de la composante normale d'un élément de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  ) est linéaire continue surjective de  $H(\operatorname{div}, \Omega)$  dans  $H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$  (dual de  $H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega)$ ). En particulier il existe une constante  $C > 0$  telle que, pour tout  $v$  dans  $H(\operatorname{div}, \Omega)$ , on a

$$\|v \cdot n|_{\partial\Omega}\|_{H^{-\frac{1}{2}}(\partial\Omega)} \leq C \|v\|_{H(\operatorname{div}, \Omega)}.$$

**Théorème 1.1.8 (Formule de Green)** Soit  $\Omega$  un ouvert borné régulier. Si  $u \in H^1(\Omega)$  et  $\sigma \in H(\operatorname{div}, \Omega)$  est une fonction vectorielle de  $[L^2(\Omega)]^n$  telle que  $\operatorname{div} \sigma(x) \in L^2(\Omega)$ , alors

$$\int_{\Omega} u(x) \operatorname{div} \sigma dx = - \int_{\Omega} \nabla u(x) \cdot \sigma(x) dx + \int_{\partial\Omega} u(x) \sigma(x) \cdot n(x) ds.$$

## 1.2 Géométrie différentielle pour les courbes de $\mathbb{R}^2$

L'objet de cette section est d'introduire un système de coordonnées adapté à la construction des conditions d'impédance. On pourra utilement se reporter à ([2] ou [3]).

### 1.2.1 Abscisse curviligne

**Définition 1.2.1** Soit  $\Sigma$  une courbe de  $\mathbb{R}^2$  de classe  $C^\infty$ , on considère un intervalle  $I$  de  $\mathbb{R}$  et  $\varphi$  une paramétrisation quelconque de  $\Sigma$ , définie de  $I$  dans  $\mathbb{R}$ . Soit  $t_0$  un point fixé

de  $I$ , alors pour tout  $t$  dans  $I$ , on pose:

$$s(t) = \int_{t_0}^t \left\| \varphi'(\xi) \right\| d\xi.$$

L'application

$$s : I \longrightarrow s(I),$$

est un homéomorphisme de classe  $C^\infty$ . La variable  $s$  décrivant  $J = s(I)$  est appelée abscisse curviligne de la courbe  $\Sigma$ . Le point  $\varphi(t_0)$  de la courbe  $\Sigma$  correspondant à  $s_0 = s(t_0) = 0$  est appelé origine de l'abscisse curviligne  $s$ .

**Remarque 1.2.1** L'abscisse curviligne  $s$  mesure la longueur de la courbe  $\Sigma$  du point  $M_0 = \varphi(t_0)$  au point  $M = \varphi(t)$ , et elle est indépendante de la paramétrisation choisie. L'application  $P$  définie de  $J$  dans  $\Sigma$  par  $P = \varphi \circ s^{-1}$  est appelée réparamétrage de  $\Sigma$  par l'abscisse curviligne  $s$ .

**Théorème 1.2.1** Soit  $(\Sigma, \varphi)$  une courbe paramétrée de classe  $C^\infty$ . Le réparamétrage  $P = \varphi \circ s^{-1}$  par une abscisse curviligne  $s$  est un  $C^\infty$  paramétrage et

$$\left\| \frac{dP}{ds} \right\| = 1.$$

## 1.2.2 Courbe et rayon de courbure

Soit  $(\Sigma, \varphi)$  une courbe paramétrée de classe  $C^\infty$  et  $P$  un réparamétrage de  $\Sigma$  par l'abscisse curviligne  $s$ .

**Définition 1.2.2** La courbure de  $\Sigma$  au point  $M = \varphi(t)$  correspondant à  $P(s)$  est le nombre réel positif

$$\rho(s) = \left\| \frac{d^2P}{ds^2} \right\|.$$

**Définition 1.2.3** Soit  $\Sigma$  une courbe paramétrée, on appellera rayon de courbure de  $\Sigma$  au point  $M = P(s)$ , le réel positif

$$c(s) = \frac{1}{\rho(s)}.$$

### 1.2.3 Courbure algébrique, rayon de courbure algébrique et formules de Frenet

Soit  $(\Sigma, \varphi)$  une courbe paramétrée de classe  $C^\infty$ .  $P$  désignant toujours un réparamétrage de  $\Sigma$  par une abscisse curviligne  $s$ , on notera par  $\tau(s)$ , le vecteur tangent à  $\Sigma$  au point  $P(s)$  et  $n(s)$  le vecteur se déduisant de  $\tau(s)$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens direct.

#### Courbure algébrique

On a

$$\langle \tau(s), \tau(s) \rangle = 1.$$

En dérivant la relation  $\langle \tau(s), \tau(s) \rangle = 1$ , on obtient :

$$\tau(s) \cdot \frac{d\tau(s)}{ds} = 0,$$

Il s'ensuit donc l'existence d'une fonction  $R : J \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = R(s) n(s).$$

Par comparaison avec la relation donnée dans la définition 1.2.2, on voit bien que  $\rho(s) = |R(s)|$ . D'où la définition suivante :

**Définition 1.2.4** *la fonction  $R$  est appelée courbure algébrique (courbure orientée) de  $\Sigma$ .*

#### Rayon de courbure algébrique

**Définition 1.2.5** *On appelle rayon de courbure algébrique, le nombre réel*

$$C(s) = \frac{1}{R(s)}.$$

#### Formule de Frenet

Le vecteur  $\tau(s)$  étant normé, alors en dérivant on a

$$\langle \tau(s), \tau(s) \rangle' = 2 \left\langle \tau(s), \frac{d\tau(s)}{ds} \right\rangle = 0,$$

$n(s)$  et  $\frac{d\tau(s)}{ds}$  étant linéairement dépendants, alors il existe une fonction  $R : ]s_1, s_2[ \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$\frac{d\tau(s)}{ds} = R(s) n(s),$$

$R$  est appelée courbure orientée de  $\Sigma$ , ( $C(s) = \frac{1}{R(s)}$  est le rayon de courbure orientée de  $\Sigma$ ).

En dérivant la relation  $\langle n(s), \tau(s) \rangle = 0$ , on obtient :

$$\left\langle \frac{dn(s)}{ds}, \tau(s) \right\rangle + \langle n(s), R(s) n(s) \rangle = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{dn(s)}{ds} = -R(s) \tau(s).$$

Les formules suivantes :

$$\begin{cases} \frac{d\tau(s)}{ds} = R(s) n(s), \\ \frac{dn(s)}{ds} = -R(s) \tau(s), \end{cases}$$

sont les formules de Frenet.

---

# Elasticité micropolaire linéaire

Dans ce chapitre on s'intéresse à l'élasticité micropolaire linéaire : les tenseurs décrivant la déformation, les lois de comportement et les équations d'équilibre. Pour plus de détails, nous renvoyons le lecteur aux ouvrages (voir [7], [18], [13]).

## 2.1 Introduction

La théorie d'élasticité classique traite ces matériaux, en lesquels nous négligeons la structure moléculaire du matériau et ses points sont considérés comme les particules matérielles, c.-à-d., les particules matérielles sont simplement les points géométriques. Dans l'espace euclidien tridimensionnel, la distribution continue des particules se caractérise par une quantité scalaire, appelée densité du matériel. La déformation du corps se caractérise par le vecteur de déplacement et les réactions mutuelles des éléments situés des deux côtés d'une surface  $dS$  infiniment petite, peuvent être définies à l'aide d'un seul vecteur de force  $p dS$ . En admettant cette hypothèse, on est conduit à des états symétriques de déformation et de contrainte, c'est-à-dire à des états qui sont définis par des tenseurs symétriques de déformation et de contrainte. Dans les limites d'élasticité, quelques matériaux, par exemple, acier, aluminium, béton, etc.. concrets s'avèrent exhiber des résultats coïncidant assez avec ceux expérimentalement observés. Cependant, pour d'autres matériaux, par

exemple, fibreux, polymères, asphaltes, on observe des anomalies remarquables entre les résultats expérimentaux et ceux obtenus en utilisant l'élasticité classique. Ces anomalies sont principalement dues à la dominance des structures atomiques du matériau négligées dans l'élasticité classique. Ces anomalies sont clairement notées en cas de problèmes dynamiques des vibrations élastiques impliquant des hautes fréquences et des courtes longueurs d'ondes, donc dans les cas des oscillations dues à la génération des ultrasons.

La théorie classique de l'élasticité s'avère aussi inopérante dans le cas des oscillations des corps granuleux et multi-cellulaires, comme par ex. les polymères. L'effet de la microstructure devient ici significatif en engendrant la formation des ondes de type nouveau, inconnu en théorie classique de l'élasticité.

**W. Voigt** a essayé de parer aux insuffisances de la théorie de l'élasticité classique en admettant que la transmission des actions réciproques de deux parties du corps à travers l'élément de surface  $dS$  s'opère non seulement par l'intermédiaire du vecteur de force  $pdS$ , mais aussi par le vecteur du moment  $mdS$ . De la sorte à côté des contraintes (de force)  $\mu_{ji}$ , ont été définies les contraintes du moment  $\theta_{ji}$ . Ce sont les frères **François** et **Eugène Cosserat** qui ont le mérite d'avoir établi une théorie complète de l'élasticité asymétrique, publiée en **1909** dans l'ouvrage "Théorie des corps déformables" ( voir [2] ). Ils ont admis qu'un corps est constitué de particules liées entre elles sous forme de petites boules parfaitement rigides. Chaque particule subit au cours de la déformation un déplacement  $u$  et une rotation  $\omega$  fonctions de la position  $x$ . De cette façon on décrit un milieu élastique dans lequel tous les points sont orientés (milieu polaire) et dans lequel il s'agit d'une rotation du "point". Les vecteurs  $u$  et  $\omega$  sont indépendants les uns des autres et décrivent entièrement la déformation du corps. L'introduction des vecteurs  $u$ ,  $\omega$  et l'hypothèse que la transmission des forces par l'élément de surface  $dS$  s'opère à l'aide du vecteur de force  $pdS$  et du vecteur du moment  $mdS$  conduit par conséquent aux tenseurs de contrainte  $\mu_{ji}$  et  $\theta_{ji}$ , asymétriques.

## 2.2 Le problème stationnaire d'élasticité micropolaire en dimension trois

Nous allons considérer un solide élastique, homogène et micropolaire occupant dans l'espace un volume  $\bar{\Omega}$  ou  $\Omega$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^3$  de frontière  $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$  avec  $\Gamma_D$  de mesure non nulle. Le milieu est supposé isotrope.

Sous l'effet des charges extérieures, ce milieu subit une déformation qui peut être caractérisée par le champ des déplacements  $u(x)$  et le champ des rotations  $\omega(x)$ . A l'intérieur de ce milieu, les contraintes des forces  $\sigma_{ji}(x)$  et celles des couples  $\theta_{ji}(x)$  sont liées par les équations constitutives, aux composantes du tenseur de déformation  $\gamma_{ji}(x)$  et du tenseur de torsion-courbure  $\chi_{ji}(x)$ .

Le problème stationnaire, dans le cas d'un milieu isotrope, homogène, consiste à déterminer les fonctions  $\sigma_{ji}(x)$ ,  $\theta_{ji}(x)$  et aussi  $\gamma_{ji}(x)$ ,  $\chi_{ji}(x)$  ainsi que les fonctions  $u_i(x)$ ,  $\omega_i(x)$  pour tout  $x \in \Omega$  vérifiant :

a) Equations d'équilibre dans  $\Omega$

$$\begin{aligned}\sigma_{ji,j} &= -f_i(x), & x \in \Omega, \\ \theta_{ji,j} + \epsilon_{ijk}\sigma_{jk} &= -g_i(x), & x \in \Omega.\end{aligned}$$

b) Les relations linéarisées entre l'état de contrainte et celui de déformation ( les lois de comportement )

$$\begin{aligned}\sigma_{ji} &= (\mu + \alpha)\gamma_{ji} + (\mu - \alpha)\gamma_{ij} + \lambda\gamma_{kk}\delta_{ij}, \\ \theta_{ji} &= (\nu + \epsilon)\chi_{ji} + (\nu - \epsilon)\chi_{ij} + \beta\chi_{kk}\delta_{ij},\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}\gamma_{ji} &= u_{i,j} - \epsilon_{kji}\omega_k, \\ \chi_{ji} &= \omega_{i,j}.\end{aligned}$$

c) Les conditions aux limites

$$\begin{aligned}u_i &= 0, \omega_i = 0 \text{ sur } \Gamma_D, \\ \sigma_{ji}n_j &= p_i, \theta_{ji}n_j = q_i \text{ sur } \Gamma_N.\end{aligned}$$

Dans les expressions ci-dessus  $\mu, \lambda$  désignent les constantes de Lamé,  $\alpha, \beta, \gamma, \epsilon$  — les autres constantes du matériau. Les fonctions  $f_i(x)$  désignent les composantes des forces de masse, tandis que  $g_i(x)$  — les composantes du vecteur des couples de masse. Les grandeurs  $p_i$  et  $q_i$  désignent réciproquement les composantes des vecteurs des forces et des moments extérieurs sollicitant la surface  $\Gamma_N$ . Par les symboles  $h_i$  et  $k_i$  nous désignons, respectivement, les composantes données des vecteurs des déplacements et des rotations.  $\epsilon_{ijk}$  désigne l'alternateur connu de Levi-Civita.

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 2, 3), (3, 1, 2) \text{ ou } (2, 3, 1), \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \text{ est } (1, 3, 2), (2, 1, 3) \text{ ou } (3, 2, 1), \\ 0 & \text{si } (i = j \text{ ou } i = k \text{ ou } j = k). \end{cases}$$

## 2.3 Eléments de la théorie de l'élasticité micropolaire en dimension trois

### 2.3.1 Formule de Cauchy en élasticité micropolaire linéaire

Vecteur des contraintes de forces

Coupure, facette et vecteur contrainte

En chaque point  $M$  d'un solide, il existe des forces intérieures que l'on met en évidence en effectuant une **coupure** du solide, par une surface  $S$ , en deux parties  $A$  et  $B$  (Figure 3).

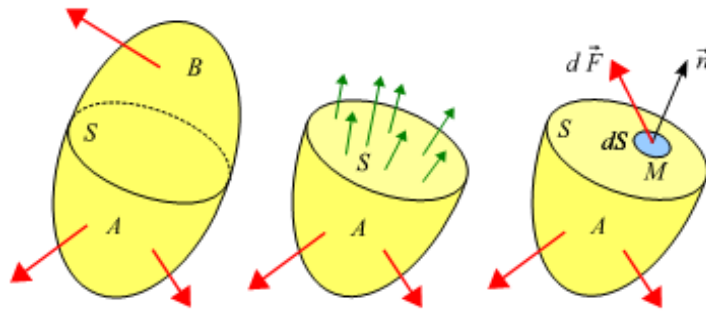


Figure 3. Coupure et facette  $\vec{n}$  en  $M$



La partie  $A$ , par exemple, est en équilibre sous l'action des forces extérieures qui lui sont directement appliquées et des forces intérieures réparties sur la coupure. Considérons un point  $M$  de  $S$ . Soit  $dS$  un élément infinitésimal de la surface  $S$  entourant  $M$  et  $\vec{n}$  le vecteur unitaire, perpendiculaire en  $M$  à  $S$  et dirigé vers l'extérieur de la partie  $A$ . Nous appellerons cet ensemble **facette**  $\vec{n}$  en  $M$ .

Soit  $d\vec{F}$  la force qui s'exerce sur cette facette. On appelle **vecteur contrainte sur la facette**  $\vec{n}$  en  $M$ , le vecteur:  $\vec{T}(M, \vec{n}) = \lim_{dS \rightarrow 0} \frac{d\vec{F}}{dS}$ .

Considérons, en un point  $M$ , le cylindre infiniment petit d'axe  $\vec{n}$ , de hauteur  $h$  et de section  $dS$  (Figure 4).

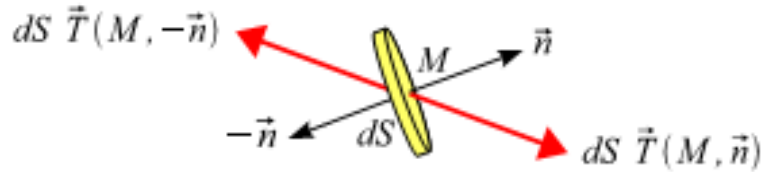


Figure 4. Efforts sur les facettes  $\vec{n}$  et  $-\vec{n}$ .

quand  $h$  tend vers 0, le cylindre est en équilibre sous l'action des forces  $dS \vec{T}(M, \vec{n})$  et  $dS \vec{T}(M, -\vec{n})$

d'où

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \vec{T}(M, -\vec{n}).$$

### Contrainte normale et contrainte tangentielle

Le vecteur contrainte peut être décomposé en sa composante suivant  $\vec{n}$  et sa projection sur la facette (Figure 5).

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = \sigma_n \vec{n} + \vec{\tau}_n$$

avec

$$\sigma_n = \vec{n} \cdot \vec{T}(M, \vec{n})$$

$\sigma_n$  est la contrainte normale et  $\vec{\tau}_n$  est le vecteur de cisaillement ou contrainte tangentielle.

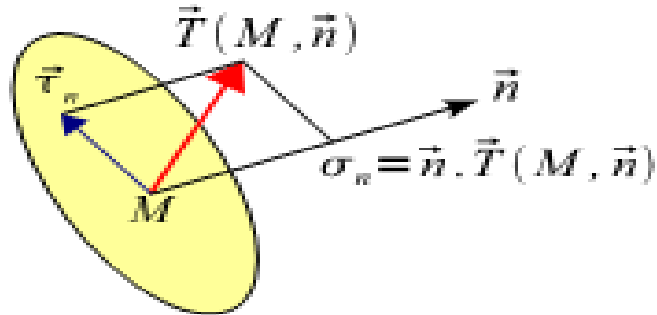


Figure 5. Vecteur contrainte sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$ .

### Formule de Cauchy : tenseur des contraintes

Considérons le tétraèdre  $MABC$  construit sur les axes  $x_1, x_2$  et  $x_3$  (Figure 6).

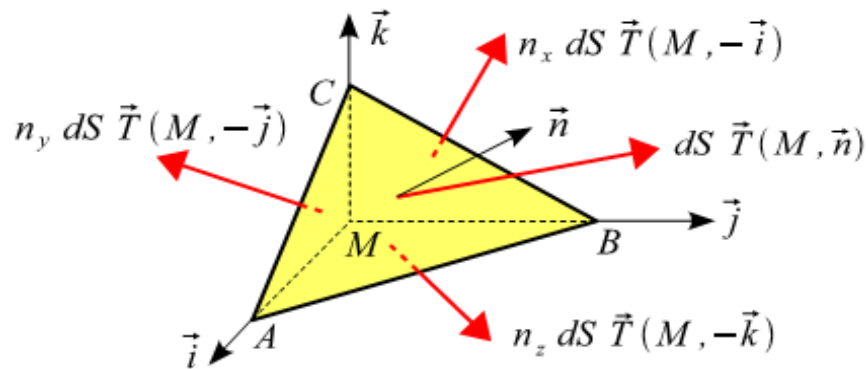


Figure 6. Equilibre de tétraèdre de ( Cauchy)

Soient  $\vec{n}$  de composantes  $(n_1, n_2, n_3)$  la normale unitaire au plan  $ABC$  dirigée vers l'extérieur du tétraèdre et  $dS$  l'aire du triangle  $ABC$ . On a

$$\begin{aligned}
 \vec{AB} \times \vec{AC} &= 2dS \vec{n} \\
 &= 2dS n_1 e_1 + 2dS n_2 e_2 + 2dS n_3 e_3 \\
 &= (\vec{MB} - \vec{MA}) \times (\vec{MC} - \vec{MA}) \\
 &= \vec{MB} \times \vec{MC} - \vec{MA} \times \vec{MC} - \vec{MB} \times \vec{MA} + \vec{MA} \times \vec{MA} \\
 &= \vec{MB} \times \vec{MC} + \vec{MC} \times \vec{MA} + \vec{MA} \times \vec{MB} + 0 \\
 &= 2\text{aire}(MBC) e_1 + 2\text{aire}(MAC) e_2 + 2\text{aire}(MAB) e_3,
 \end{aligned}$$

on en déduit par identification :

$$\text{aire}(MBC) = dS n_1, \text{aire}(MAC) = dS n_2, \text{aire}(MAB) = dS n_3.$$

Le tétraèdre est en équilibre sous l'action des forces appliquées sur ses faces (les forces de volume sont des infiniment petits d'ordre supérieur) :

$$dS \vec{T}(M, \vec{n}) + dS n_1 \vec{T}(M, -e_1) + dS n_2 \vec{T}(M, -e_2) + dS n_3 \vec{T}(M, -e_3) = 0,$$

il vient après simplification :

$$\vec{T}(M, \vec{n}) = n_1 \vec{T}(M, e_1) + n_2 \vec{T}(M, e_2) + n_3 \vec{T}(M, e_3).$$

Cette équation s'écrit sous forme matricielle :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\{T(M, e_1)\} \quad \{T(M, e_2)\} \quad \{T(M, e_3)\}] \{n\}.$$

Soit la formule de **Cauchy** :

$$\{T(M, \vec{n})\} = [\sigma(M)] \{n\},$$

où  $[\sigma(M)]$  est le tenseur des contraintes de Cauchy en  $M$ . Les composantes du tenseur des contraintes dans le repère  $\{e_1, e_2, e_3\}$  sont :

$$T(M, e_1) = \sigma_{x_1 x_1} e_1 + \sigma_{x_1 x_2} e_2 + \sigma_{x_1 x_3} e_3,$$

$$T(M, e_2) = \sigma_{x_2 x_1} e_1 + \sigma_{x_2 x_2} e_2 + \sigma_{x_2 x_3} e_3,$$

$$T(M, e_3) = \sigma_{x_3 x_1} e_1 + \sigma_{x_3 x_2} e_2 + \sigma_{x_3 x_3} e_3.$$

Dans le repère  $\{e_1, e_2, e_3\}$ , les composantes du  $\vec{T}(M, \vec{n})$  sont :

$$\begin{aligned} T_i(M, \vec{n}) &= \sum_{i=1}^3 \sigma_{x_j x_i} n_{x_j}, \\ T_i &= \sigma_{ji} n_j. \end{aligned} \quad (2.1)$$

### Vecteur des contraintes de moments

On suppose que les forces agissant sur  $dS$  sont statiquement équivalent à une force  $\vec{dF}$  et un couple de force. On a noté le vecteur des contraintes des forces par  $\vec{T}(M, \vec{n})$  et on note le vecteur des contraintes couples par  $\vec{\mu}(M, \vec{n})$ , soit  $\vec{dM}$  le vecteur des moments de couple qui s'exerce sur la facette  $dS$ . On appelle **vecteur contrainte des couples sur la facette  $\vec{n}$  en  $M$** , le vecteur :  $\vec{\mu}(M, \vec{n}) = \lim_{ds \rightarrow 0} \frac{\vec{dM}}{dS}$ . Par des calculs semblables à ceux du tenseur des contraintes et de la condition d'équilibre des moments on obtient :

$$\begin{aligned} \mu_i(M, \vec{n}) &= \sum_{j=1}^3 \theta_{x_j x_i} n_{x_j}, \\ \mu_i &= \theta_{ji} n_j. \end{aligned} \quad (2.2)$$

où  $(\theta_{ji})_{ji}$  est le tenseur des contraintes de moments ou tenseur des couples de forces.

## 2.3.2 Equations d'équilibre

### Equations d'équilibre des forces

1. **Contrainte des forces.** à chaque point  $y$  du surface  $\Gamma$  un effort  $T(n, y)$  s'exerce, où  $n$  est la normale extérieure de  $\Gamma$  au point  $y$ . la somme de ces forces est exprimée par l'intégrale

$$\int_{\Gamma} T(n, y) d\Gamma.$$

2. **Forces de masse.** En chaque point  $x$  du domaine  $\Omega$  une force de masse  $f(x)$  s'exerce. La somme de ces forces est exprimée par l'intégrale

$$\int_{\Omega} f(x) dx.$$

La loi d'équilibre des forces donne

$$\int_{\Gamma} T(n, y) d\Gamma + \int_{\Omega} f(x) dx = 0. \quad (2.3)$$

D'après (2.1), on peut réécrire (2.2) sous la forme

$$\int_{\Gamma} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji}(y) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} f_i(x) dx = 0. \quad (2.4)$$

En utilisant la formule de Gauss, on peut écrire (2.4) sous la forme

$$\int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 D_j \sigma_{ji} dx + \int_{\Omega} f_i(x) dx = 0.$$

ce qui donne

$$\sum_{j=1}^3 D_j \sigma_{ji} + f_i(x) = 0, \quad (i = 1; 2; 3), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.5)$$

### Equations d'équilibre des moments

Pour l'équation d'équilibre des moments, il est nécessaire de tenir compte des moments indépendants suivantes :

#### 1. Moment de contrainte des forces

$$\int_{\Gamma} y \times T(n, y) d\Gamma,$$

le signe "  $\times$  " désigne le produit vectoriel.

#### 2. Moment du couple des forces

$$\int_{\Gamma} \mu(n, y) d\Gamma.$$

#### 3. Moment des forces de masse

$$\int_{\Omega} x \times f(x) dx.$$

#### 4. Moment de masse

$$\int_{\Omega} g(x) dx.$$

La loi d'équilibre des moments donne

$$\int_{\Gamma} y \times T(n, y) d\Gamma + \mu(n, y) d\Gamma + \int_{\Omega} (x \times f(x) + g(x)) dx = 0.$$

En utilisant les formules de Cauchy (2.1) et (2.2) et la formule de Gauss, on obtient

$$\begin{aligned} & \int_{\Gamma} \left[ \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} y_j T_k(y) d\Gamma + \mu_i(y) \right] d\Gamma = \int_{\Omega} \sum_l D_l \left[ \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \sigma_{lk} d\Gamma + \theta_{li}(y) \right] dx \\ & = \int_{\Omega} \sum_l \left[ \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j D_l \sigma_{lk} + \delta_j^l \epsilon_{ijk} \sigma_{lk} + D_l \theta_{li} \right] dx, \end{aligned}$$

alors

$$\int_{\Omega} \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} x_j \left[ \sum_l D_l \sigma_{lk} + f_k \right] dx + \int_{\Omega} \left[ \sum_l D_l \theta_{li} + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + g_i \right] dx = 0.$$

En utilisant (2.5), l'équation d'équilibre des moments est donc donnée par :

$$\sum_j D_j \theta_{ji} + \sum_{j,k} \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} + g_i = 0, \quad (i = 1; 2; 3), \quad \forall x \in \Omega. \quad (2.6)$$

Notons que dans la théorie d'élasticité classique l'équation d'équilibre des moments donne la symétrie du tenseur de contrainte. Dans la théorie d'élasticité micropolaire, le tenseur de contrainte est asymétrique, ce qui explique le terme «élasticité asymétrique» fréquemment rencontré dans la littérature.

### 2.3.3 Loi de comportement

On désigne par  $x = (x_{ji}), i, j = 1, 2, 3$  ( $\gamma_{ji} = \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - \epsilon_{kji} \omega_k$ ) le tenseur de déformation associée aux champs de déplacement  $u = (u_i)$  et de rotation  $\omega = (\omega_i)$ . On désigne par  $x = (x_{ji}), i, j = 1, 2, 3$  ( $x_{ji} = \frac{\partial \omega_i}{\partial x_j}$ ) le tenseur de torsion -courbure associée au champ de rotation  $\omega = (\omega_i)$ . On note  $\sigma = (\sigma_{ji}), i, j = 1, 2, 3$  le tenseur de contrainte des forces et  $\theta = (\theta_{ji}), i, j = 1, 2, 3$  le tenseur des contraintes de moments.

La loi de comportement du matériau que l'on considère avec centre de symétrie est celle de l'élasticité micropolaire linéaire qui se traduit par :

$$\sigma_{ji}(x) = c_{jilk} \gamma_{lk}, \quad \theta_{ji} = \dot{c}_{jilk} x_{lk}.$$

Dans le cas du matériau isotrope (avec centre de symétrie). La loi de comportement se simplifie , on parle alors de loi de Hooke elle ne dépend plus que de six coefficients:

$$\sigma_{ji} = (\mu + \alpha) \gamma_{ji} + (\mu - \alpha) \gamma_{ij} + \lambda \delta_{ij} \gamma_{kk}, \quad (2.7)$$

$$\theta_{ji} = (\nu + \epsilon) x_{ji} + (\nu - \epsilon) x_{ij} + \beta \delta_{ij} x_{kk}. \quad (2.8)$$

### 2.3.4 Energie de déformation

Pour un matériau avec centre de symétrie l'énergie intérieure est définie par :

$$E(x) = \frac{1}{2} \sum_{i,j} \sigma_{ji}(x) \gamma_{ji} + \theta_{ji} x_{ji}.$$

L'énergie de déformation est exprimée par :

$$E^{(p)}(x) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ji}(x) \gamma_{ji} + \theta_{ji} x_{ji}.$$

Dans le cas du matériau isotrope (avec centre de symétrie) les coefficients du matériau vérifient certaines restrictions de sorte que l'énergie intérieure  $E$  soit définie positive :

$$\begin{aligned} 3\lambda + 2\mu &> 0, \quad 3\beta + 2\nu > 0, \quad \mu + \alpha > 0, \quad \nu + \epsilon > 0, \\ \nu &> 0, \quad \mu > 0, \quad \alpha > 0, \quad \epsilon > 0. \end{aligned}$$

En utilisant (2.7) et (2.8), les équations du mouvement (2.5) et (2.6) peuvent s'écrire aussi

$$(\mu + \alpha) \Delta u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla \nabla . u + 2\alpha \nabla \times \omega = -f, \quad (2.9)$$

$$[(\nu + \epsilon) \Delta - 4\alpha] \omega + (\beta + \nu - \epsilon) \nabla \nabla . \omega + 2\alpha \nabla \times u = -g. \quad (2.10)$$

Les équations (2.9) et (2.10) représentent un système complexe des équations elliptiques associées. En posant  $\alpha = 0$  on obtient deux systèmes indépendants d'équations

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla \nabla . u = -f, \quad (2.11)$$

$$(\nu + \epsilon) \Delta \omega + (\beta + \nu - \epsilon) \nabla \nabla . \omega = -g. \quad (2.12)$$

L'équation (2.11) équivaut au système des équations des déplacements de la théorie classique d'élasticité. Les équations (2.12) réfèrent à un milieu élastique hypothétique dont les particules peuvent subir des rotations sans être déplacées. Dans les équations (2.11) et (2.12), les propriétés de deux milieux sont conjuguées, chaque particule du matériel subissant, à la fois, les déplacements  $u_i$  et les rotations  $\omega_i$ , les grandeurs  $u_i$  et  $\omega_i$  étant des fonctions mutuellement indépendantes.

## 2.4 Equation d'équilibre variationnelle

Ici, on écrit la formulation faible du problème aux limites d'élasticité micropolaire linéaire qui a été introduit dans la section (2.2). On note

$$\begin{aligned}\mathbf{u} &\equiv \{u, \omega\} \equiv \{u_1, u_2, u_3, \omega_1, \omega_2, \omega_3\}, \\ \mathbf{v} &\equiv \{v, \varphi\} \equiv \{v_1, v_2, v_3, \varphi_1, \varphi_2, \varphi_3\},\end{aligned}$$

et on introduit l'espace

$$W = \left\{ \mathbf{v} \in (H^1(\Omega^\delta))^6 ; \mathbf{v} = 0 \text{ sur } \Gamma_D \cup \Gamma_D^\delta \right\}.$$

En multipliant par  $v = (v_1, v_2, v_3)$ . L'équation du forces, l'équation du moments par  $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3)$ , et en effectuant la somme, on obtient

$$\begin{aligned}& - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 D_j \sigma_{ji} v_i dx - \int_{\Omega} \left( \sum_{j=1}^3 D_j \theta_{ji} \varphi_i + \sum_{j,k=1}^3 \epsilon_{ijk} \sigma_{jk} \varphi_i \right) dx \\ &= \int_{\Omega} f_i(x) v_i dx + \int_{\Omega} g_i \varphi_i dx.\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Gauss et les conditions aux limites, on obtient

$$\begin{aligned}- \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 D_j \sigma_{ji} v_i dx &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} D_j v_i dx - \int_{\Gamma_N} \sum_{j=1}^3 \sigma_{ji} n_j v_i d\Gamma_N \\ - \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 D_j \theta_{ji} \varphi_i dx &= \int_{\Omega} \sum_{j=1}^3 \theta_{ji} D_j \varphi_i dx - \int_{\Gamma_N} \sum_{j=1}^3 \theta_{ji} n_j \varphi_i d\Gamma_N.\end{aligned}$$



En posant

$$\begin{aligned} a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\sigma_{ji} \gamma_{ji} + \theta_{ji} \chi_{ji}) dx, \\ l(\mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (f(x), g(x)) \cdot (v, \varphi) dx + \int_{\Gamma_N} (p, q) \cdot (v, \varphi) d\Gamma_N, \end{aligned}$$

on obtient la formulation variationnelle suivante:

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = l(\mathbf{v}) \quad \text{pour tout } \mathbf{v} \in W .$$

## 2.5 Interprétation mécanique de l'équation d'équilibre variationnelle

On peut donc donner une interprétation mécanique des formulations  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  et  $l(\mathbf{v})$ . L'espace  $W$  représente l'espace des déplacement  $v$  et rotation  $\varphi$  admissibles, la forme bilinéaire  $a(\mathbf{u}, \mathbf{v})$  exprime le principe de travaux virtuels. En effet si  $\mathbf{v} \equiv \{v, \varphi\} \in W$ , alors

$$a(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \int_{\Omega} (\sigma_{ji} \gamma_{ji} + \theta_{ji} \chi_{ji}) dx,$$

représente le travail virtuel des forces internes correspondant au déplacement virtuel  $v$  et rotation virtuel  $\varphi$  tandis que

$$l(\mathbf{v}) = \int_{\Omega} (g(x), f(x)) \cdot \mathbf{v} dx + \int_{\Gamma_N} (p, q) \cdot \mathbf{v} d\Gamma_N,$$

représente le travail des forces extérieures, le déplacement réel  $u$  et la rotation réel  $\omega$  sont le déplacement et la rotation admissibles pour lesquels ces deux travaux sont égaux et ceci pour tout  $\{v, \varphi\} \in W$

Alors le déplacement et la rotation réels  $\{u, \omega\}$  sont ceux parmi tous les déplacement et rotation admissibles  $\{v, \varphi\} \in W$  qui minimisent l'énergie potentielle élastique :

$$J(\mathbf{v}, \mathbf{v}) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} \sigma_{ji}(x) \gamma_{ji} + \theta_{ji} \chi_{ji} - \int_{\Omega} (g(x), f(x)) \cdot \mathbf{v} dx - \int_{\Gamma_N} (p, q) \cdot \mathbf{v} d\Gamma_N.$$

Cette énergie potentielle élastique  $J(\mathbf{v}, \mathbf{v})$  se compose de l'énergie de déformation

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sum_{i,j} (\sigma_{ji} \gamma_{ji} + \theta_{ji} \chi_{ji}) dx,$$

et de l'énergie potentielle des forces extérieures

$$\int_{\Omega} (f(x), g(x)) \cdot \mathbf{v} dx. + \int_{\Gamma_N} (p, q) \cdot \mathbf{v} d\Gamma_N.$$

## 2.6 Elasticité micropolaire en dimension deux

Dans ce qui suit nous allons considérer le problème stationnaire de propagation de l'onde longitudinale, monochromatique dans un plaque infinie qui est un problème bidimensionnel. On suppose que les causes et les effets ne dépendent pas de la variable  $x_3$ , l'étude de ce problème conduit à un système de six équations différentielles contenant deux groupes indépendants d'équations. Le premier group contient les équations :

$$\begin{cases} (\mu + \alpha) \Delta u + (\lambda + \mu - \alpha) \nabla \nabla \cdot u + 2\alpha \nabla \times \omega = -f, \\ [(\nu + \epsilon) \Delta - 4\alpha] \omega_3 + 2\alpha \nabla \times u = -g. \end{cases} \quad (2.13)$$

Les vecteurs de déplacement  $u = (u_1, u_2, 0)$  et de rotation  $\omega = (0, 0, \omega_3)$  apparaissant dans ces dernières équations se trouvent liés aux contraintes  $\sigma_{ji}$  et  $\theta_{ji}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & 0 \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{33} \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \theta_{13} \\ 0 & 0 & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & 0 \end{bmatrix}.$$

Le tenseur de contraintes  $\sigma$  ne dépend que de  $x_1, x_2$ . D'après la loi du comportement on obtient:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= 2\mu D_1 u_1 + \lambda (D_1 u_1 + D_2 u_2), \\ \sigma_{22} &= 2\mu D_2 u_2 + \lambda (D_1 u_1 + D_2 u_2), \\ \sigma_{33} &= \lambda (D_1 u_1 + D_2 u_2), \\ \sigma_{12} &= \mu (D_1 u_2 + D_2 u_1) + \alpha (D_1 u_2 - D_2 u_1) - 2\alpha \omega, \\ \sigma_{21} &= \mu (D_1 u_2 + D_2 u_1) - \alpha (D_1 u_2 - D_2 u_1) + 2\alpha \omega, \end{aligned}$$

et pour les éléments de la matrice  $\theta$ , on a

$$\begin{aligned} \theta_{13} &= (\nu + \epsilon) D_1 \omega, \quad \theta_{31} = (\nu - \epsilon) D_1 \omega, \\ \theta_{23} &= (\nu + \epsilon) D_2 \omega, \quad \theta_{32} = (\nu - \epsilon) D_2 \omega. \end{aligned}$$

Le deuxième groupe contient les équations suivantes:

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu + \alpha) \Delta u_3 + 2\alpha \nabla \times \omega = -f, \\ [(\nu + \epsilon) \Delta - 4\alpha] \omega + (\beta + \nu - \epsilon) \nabla \nabla \cdot \omega + 2\alpha \nabla \times u = -g. \end{array} \right.$$

Les vecteurs de déplacement  $u = (0, 0, u_3)$  et de rotation  $\omega = (\omega_1, \omega_2, 0)$  apparaissant dans ces dernières équations se trouvent liés aux contraintes  $\sigma_{ji}$  et  $\theta_{ji}$

$$\sigma = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \sigma_{31} \\ 0 & 0 & \sigma_{32} \\ \sigma_{13} & \sigma_{23} & 0 \end{bmatrix}, \quad \theta = \begin{bmatrix} \theta_{11} & \theta_{21} & 0 \\ \theta_{12} & \theta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \theta_{33} \end{bmatrix},$$

avec

$$\sigma_{13} = (\mu + \alpha) D_1 u_3 + 2\alpha \omega_2,$$

$$\sigma_{31} = (\mu - \alpha) D_1 u_3 - 2\alpha \omega_2,$$

$$\sigma_{23} = (\mu + \alpha) D_2 u_3 - 2\alpha \omega_1,$$

$$\sigma_{32} = (\mu - \alpha) D_2 u_3 + 2\alpha \omega_1,$$

et

$$\theta_{11} = 2\nu D_1 \omega_1 + \beta (D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2),$$

$$\theta_{22} = 2\nu D_2 \omega_2 + \beta (D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2),$$

$$\theta_{33} = \beta (D_1 \omega_1 + D_2 \omega_2),$$

$$\theta_{12} = (\nu + \epsilon) D_1 \omega_2 + (\nu - \epsilon) D_2 \omega_1,$$

$$\theta_{21} = (\nu + \epsilon) D_2 \omega_1 + (\nu - \epsilon) D_1 \omega_2.$$

Dans le troisième chapitre, on va étudier le système (2.13) d'équations du premier groupe.

---

# Impédance mécanique d'une bande mince en élasticité micropolaire

Dans ce chapitre, on modélise de façon approchée l'effet d'une bande mince  $\Omega_+^\delta$  élastique micropolaire linéaire en dimension deux, d'épaisseur  $\delta$  sur un corps  $\Omega_-$ , lorsque  $\delta$  tend vers 0, par les techniques des développements asymptotiques avec changement d'échelle, ensuite on montre une estimation d'erreur. Ce chapitre servira de guide dans le cas d'une couche mince courbe.

## 3.1 Introduction

On considère une famille  $(P^\delta)$ , où  $\delta$  est un petit paramètre positif, de problèmes de transmission bidimensionnels d'élasticité asymétrique linéaire dans un domaine  $\Omega^\delta$  constitué de deux corps micropolaires liés  $\Omega_-$  et une couche mince  $\Omega_+^\delta$ . On suppose que  $\Omega_-$  et  $\Omega_+^\delta$  sont homogènes et isotropes. De tels problèmes modélisent la propagation des ondes entre  $\Omega_-$  et la couche  $\Omega_+^\delta$ . On limite notre considération au cas élastostatique et un simple cas

géométrique ( Figure 7).

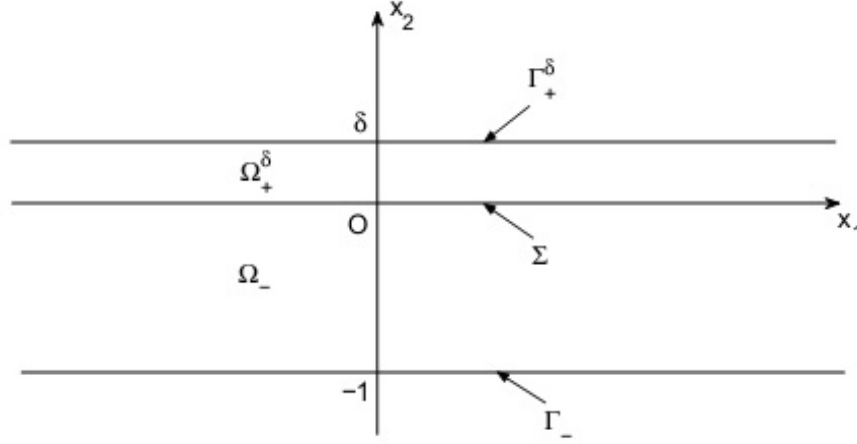


Figure 7. Couche mince plane.

On prend

$$\begin{aligned} \Omega^\delta &= \mathbb{R} \times ]-1, \delta[, \quad \Omega_- = \mathbb{R} \times ]-1, 0[, \quad \Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times ]0, \delta[ \\ \Gamma_- &= \mathbb{R} \times \{-1\}, \quad \Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad \Gamma_+^\delta = \mathbb{R} \times \{\delta\}. \end{aligned}$$

Le problème de transmission ( $P^\delta$ ) est : (voir [18], [7], [13])

- Equations dans  $\Omega_-$

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{-11}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2 \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = -f_{-1}, \\ D_1 \sigma_{-12}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) + D_2 \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = -f_{-2}, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2) \omega_-^\delta \\ + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^\delta - D_2 u_{-1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_-^\delta = -g_-. \end{cases} \quad (3.1)$$

- Equations dans  $\Omega_+^\delta$

$$\begin{cases} D_1 \sigma_{+11}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2 \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ D_1 \sigma_{+12}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2 \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+)(D_1^2 + D_2^2) \omega_+^\delta \\ + 2\alpha_+ (D_1 u_{+2}^\delta - D_2 u_{+1}^\delta) - 4\alpha_+ \omega_+^\delta = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_-$

$$\begin{cases} u_-^\delta = 0, \\ \omega_-^\delta = 0. \end{cases}$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$

$$\begin{cases} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta = 0. \end{cases}$$

- Conditions de transmission sur  $\Sigma$

$$\begin{cases} u_-^\delta = u_+^\delta, \\ \omega_-^\delta = \omega_+^\delta, \\ \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta), \\ \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta), \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^\delta = (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta, \end{cases}$$

où  $\nu_\pm$  et  $\epsilon_\pm$  sont des constantes positives dépendant de la nature du matériau  $\Omega_\pm$ ,  $f_-$  et  $g_-$  sont la force et le moment exercés sur  $\Omega_-$  respectivement,  $u_\pm^\delta$  et  $\omega_\pm^\delta$  sont les champs du déplacement et de la rotation, respectivement

$$(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) = ((u_{\pm 1}^\delta, u_{\pm 2}^\delta), \omega_\pm^\delta),$$

$\gamma_{\pm ji}$  est le tenseur de déformation défini par:

$$\begin{aligned} \gamma_{\pm 11}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) &= D_1 u_{\pm 1}^\delta, \quad \gamma_{\pm 22}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) = D_2 u_{\pm 2}^\delta, \\ \gamma_{\pm 12}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) &= D_1 u_{\pm 2}^\delta - \omega_\pm^\delta, \quad \gamma_{\pm 21}(u_\pm^\delta, \omega_\pm^\delta) = D_2 u_{\pm 1}^\delta + \omega_\pm^\delta \end{aligned}$$

et  $\sigma_{\pm ji}$  est le tenseur de contrainte donné par la loi linéaire:

$$\sigma_{\pm ji} = (\mu_\pm + \alpha_\pm) \gamma_{\pm ji} + (\mu_\pm - \alpha_\pm) \gamma_{\pm ij} + \lambda_\pm \gamma_{\pm kk} \delta_{ij},$$

où  $\delta_{ij}$  est le symbole de Kronecker et  $\mu_\pm$ ,  $\lambda_\pm$ ,  $\alpha_\pm$  sont des constantes matérielles satisfaisant les inégalités

$$\mu_\pm > 0, \quad 3\lambda_\pm + 2\mu_\pm > 0, \quad \alpha_\pm > 0.$$

Il est bien connu que le problème de transmission  $(P^\delta)$  a une solution unique dans l'espace canonique de Sobolev

$$V = \left\{ \begin{array}{l} (v_\pm, \varphi_\pm) \in \mathbb{H}^1(\Omega_\pm) \times H^1(\Omega_\pm); \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\}.$$

Lorsque l'épaisseur  $\delta$  de la couche  $\Omega_+^\delta$  est assez petite, la solution numérique du problème de transmission  $(P^\delta)$  ne peut pas être calculée avec précision en raison des instabilités numériques qui apparaissent. Alors, notre objectif dans ce chapitre est de trouver des conditions de frontière efficaces sur l'interface  $\Sigma$  qui représentent d'une manière approchée l'effet de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur  $\Omega_-$ . L'effet exact de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur le domaine  $\Omega_-$ . On considère le problème aux limites

$$(P_+^\delta) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations (1.1) dans } \Omega_+^\delta, \\ u_+^\delta = \psi^\delta \text{ sur } \Sigma, \\ \omega_+^\delta = \phi^\delta \text{ sur } \Sigma, \\ \left( \begin{array}{l} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta \end{array} \right) = 0 \text{ sur } \Gamma_+^\delta. \end{array} \right.$$

si  $(u_+^\delta, \omega_+^\delta)$  est solution de ce problème, on pose :

$$T_\delta(\psi^\delta, \phi^\delta) = \left( \begin{array}{l} \sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta|_\Sigma \end{array} \right),$$

en utilisant les conditions de transmission sur  $\Sigma$ , on obtient

$$T_\delta(u_-^\delta, \omega_-^\delta) = \left( \begin{array}{l} \sigma_{-21}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{-22}(u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^\delta|_\Sigma \end{array} \right).$$

Le problème de transmission  $(P^\delta)$  est alors équivalent au problème d'impédance suivant:

$$(P_-^\delta) \left\{ \begin{array}{l} \text{Equations (3.1)} \quad \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_-^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left( \begin{array}{l} \sigma_{-21} (u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{-22} (u_-^\delta, \omega_-^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^\delta|_\Sigma \end{array} \right) = T_\delta (u_-^\delta, \omega_-^\delta) \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Une expression explicite de l'opérateur d'impédance exacte  $T_\delta$  n'est pas accessible pour le cas géométrique général. Dans ce chapitre, par une méthode basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à  $\delta$  l'épaisseur de la couche mince, on donne une approximation  $T_{*\delta}$  de  $T_\delta$ :

$$T_{*\delta} = \delta \left( \begin{array}{ccc} \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{2\mu_+\lambda_+} D_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} D_1^3 & -\frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} D_1 \\ 0 & \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} D_1 & (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 - \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} \end{array} \right)$$

La solution  $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$  de  $(P^\delta)$  dans  $\Omega_-$  est alors approchée par la solution  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  du problème d'impédance approchée suivant:

$$(P_{-*}^\delta) \left\{ \begin{array}{l} D_1 \sigma_{-11} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_{-*}^\delta \\ \quad + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^\delta - D_2 u_{-*1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_{-*}^\delta = -g_- \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \omega_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \left( \begin{array}{l} \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^\delta|_\Sigma \end{array} \right) = T_{*\delta} \left( (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma \right) \text{ sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

Ensuite, on démontre le résultat principal suivant.



**Théorème 3.1.1** *Le problème  $(P_{-*}^\delta)$  a une solution unique dans l'espace*

$$V_* = \left\{ \begin{array}{l} (v_-, \varphi_-) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_1 v_{-1}, D_1 v_{-2}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), D_1 \varphi_- \in L^2(\Sigma), \\ v_- = \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}$$

et on a l'estimation d'erreur suivante:

$$\|u_-^\delta - u_{-*}^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_-^\delta - \omega_{-*}^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^2,$$

où  $C > 0$  est une constante qui dépend uniquement de  $f_-, g_-$  et les coefficients d'élasticité.

Le chapitre est organisé comme suit : dans la section 2, on donne une impédance approchée à l'aide d'un développement formel de Taylor. Dans la section 3, on utilise les techniques du développement asymptotique avec changement l'échelle pour obtenir la même impédance approchée. Ensuite on établit une estimation de stabilité pour le problème de transmission. Dans la section 4, on montre un résultat de stabilité pour le problème d'impédance approché. Enfin, dans la section 5, on estime l'erreur entre  $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$  et  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  dans un espace convenable.

## 3.2 Condition d'impédance approchée

Ici, on construit une approximation de premier ordre de l'impédance en utilisant le développement de Taylor. La première étape pour atteindre notre objectif est d'utiliser un développement formel de Taylor de  $\sigma_{+21}, \sigma_{+22}$  et  $D_2 \omega_+$  dans  $\Omega_+^\delta$  par rapport à  $\delta$ . Les conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$  s'écrivent:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{+21}(\delta) = \sigma_{+21}(0) + \delta D_2 \sigma_{+21}(0) + \dots, \\ \sigma_{+22}(\delta) = \sigma_{+22}(0) + \delta D_2 \sigma_{+22}(0) + \dots, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta(\delta) = (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta(0) + \delta (\nu_+ + \epsilon_+) D_2^2 \omega_+^\delta(0) + \dots \end{array} \right. \quad (3.3)$$

La clé pour obtenir une condition aux limite approchée est le fait que les dérivées normales de  $\sigma_{+21}, \sigma_{+22}$  et  $D_2 \omega_+^\delta$  sur  $\Sigma$  peuvent être exprimées explicitement en termes de

traces sur  $\Sigma$  des contraintes  $\sigma_{+21}, \sigma_{+22}$ , le déplacement  $u_+^\delta$  et la rotation  $\omega_+^\delta$ . Comme on a

$$\begin{aligned}\sigma_{+21} &= (\mu_+ + \alpha_+) D_2 u_{+1}^\delta + (\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{+2}^\delta + 2\alpha_+ \omega_+^\delta, \\ \sigma_{+22} &= (2\mu_+ + \lambda_+) D_2 u_{+2}^\delta + \lambda_+ D_1 u_{+1}^\delta, \\ \sigma_{+11} &= (2\mu_+ + \lambda_+) D_1 u_{+1}^\delta + \lambda_+ D_2 u_{+2}^\delta, \\ \sigma_{+12} &= (\mu_+ + \alpha_+) D_1 u_{+2}^\delta + (\mu_+ - \alpha_+) D_2 u_{+1}^\delta - 2\alpha_+ \omega_+^\delta,\end{aligned}$$

il s'ensuit que

$$\begin{aligned}D_2 u_{+2}^\delta &= \frac{1}{(\lambda_+ + 2\mu_+)} [\sigma_{+22} - \lambda_+ D_1 u_{+1}^\delta], \\ D_2 u_{+1}^\delta &= \frac{1}{(\mu_+ + \alpha_+)} [\sigma_{+21} - (\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{+2}^\delta - 2\alpha_+ \omega_+^\delta], \\ \sigma_{+11} &= \frac{4\mu_+ (\lambda_+ + \mu_+)}{(\lambda_+ + 2\mu_+)} D_1 u_{+1}^\delta + \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ + 2\mu_+)} \sigma_{+22}\end{aligned}\quad (3.4)$$

et

$$\sigma_{+12} = \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_1 u_{+2}^\delta - \omega_+^\delta) + \frac{\mu_+ - \alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} \sigma_{+21}.\quad (3.5)$$

D'après les équations (3.2), on a

$$\begin{aligned}D_2 \sigma_{+21} &= -D_1 \sigma_{+11}, \\ D_2 \sigma_{+22} &= -D_1 \sigma_{+12}, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2^2 \omega_+^\delta &= -(\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_+^\delta - 2\alpha_+ (D_1 u_{+2}^\delta - D_2 u_{+1}^\delta) + 4\alpha_+ \omega_+^\delta,\end{aligned}$$

en utilisant (3.4) et (3.5), on obtient

$$\left\{ \begin{aligned}D_2 \sigma_{+21} &= -D_1 \sigma_{+11} = -\frac{4\mu_+ (\lambda_+ + \mu_+)}{(\lambda_+ + 2\mu_+)} D_1^2 u_{+1}^\delta - \frac{\lambda_+}{(\lambda_+ + 2\mu_+)} D_1 \sigma_{+22}, \\ D_2 \sigma_{+22} &= -D_1 \sigma_{+12} = -\frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_1^2 u_{+2}^\delta - D_1 \omega_+^\delta) - \frac{\mu_+ - \alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} D_1 \sigma_{+21}, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_2^2 \omega_+^\delta &= -\frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_1 u_{+2}^\delta - \omega_+^\delta) - (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_+^\delta + \frac{2\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \sigma_{+21}.\end{aligned}\right.\quad (3.6)$$

En injectant les formules (3.6) dans le développement de Taylor (3.3), on obtient et en utilisant les conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 0 &= \sigma_{+21}(0) - \delta \left[ \frac{4\mu_+(\lambda_++\mu_+)}{(\lambda_++2\mu_+)} D_1^2 u_{+1}^\delta + \frac{\lambda_+}{(\lambda_++2\mu_+)} D_1 \sigma_{+22} \right] + \dots, \\
 0 &= \sigma_{+22}(0) - \delta \left[ \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_++\alpha_+)} (D_1^2 u_{+2}^\delta - D_1 \omega_+^\delta) + \frac{\mu_+-\alpha_+}{\mu_++\alpha_+} D_1 \sigma_{+21} \right] + \dots, \\
 0 &= (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \omega_+^\delta(0) - \delta \left[ \begin{aligned} &\frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_++\alpha_+)} (D_1 u_{+2}^\delta - \omega_+^\delta) + (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_+^\delta \\ &\quad - \frac{2\alpha_+}{(\mu_++\alpha_+)} \sigma_{21} \end{aligned} \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{3.7}$$

en utilisant les conditions de transmission sur  $\Sigma$ , on peut écrire (3.7) sous la forme

$$\begin{aligned}
 0 &= \sigma_{-21}(0) - \delta \left[ \frac{4\mu_+(\lambda_++\mu_+)}{(\lambda_++2\mu_+)} D_1^2 u_{-1}^\delta + \frac{\lambda_+}{(\lambda_++2\mu_+)} D_1 \sigma_{+22} \right] + \dots, \\
 0 &= \sigma_{-22}(0) - \delta \left[ \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_++\alpha_+)} (D_1^2 u_{-2}^\delta - D_1 \omega_-^\delta) + \frac{\mu_+-\alpha_+}{\mu_++\alpha_+} D_1 \sigma_{+21} \right] + \dots, \\
 0 &= (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^\delta(0) - \delta \left[ \begin{aligned} &\frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_++\alpha_+)} (D_1 u_{-2}^\delta - \omega_-^\delta) + (\nu_- + \epsilon_-) D_1^2 \omega_-^\delta \\ &\quad - \frac{2\alpha_+}{(\mu_++\alpha_+)} \sigma_{+21} \end{aligned} \right] + \dots
 \end{aligned} \tag{3.8}$$

ce qui donne à l'ordre 1, la condition d'impédance approchée:

$$\begin{pmatrix} \sigma_{-21}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma \\ \sigma_{-22}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)|_\Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^\delta|_\Sigma \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \frac{4\mu_+(\mu_++\lambda_+)}{2\mu_++\lambda_+} D_1^2 u_{-*1}^\delta \\ \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_++\alpha_+)} D_1 (D_1 u_{-*2}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{-*}^\delta + \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_++\alpha_+)} (D_1 u_{-*2}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \end{pmatrix}$$

et on a donc le problème  $(P_{-*}^\delta)$  dans  $\Omega_-$ .

### 3.3 Développement asymptotique et formulation faible

Ici, on utilise les techniques des développements asymptotiques avec changement d'échelle pour obtenir la même impédance approchée  $T_{*\delta}$  obtenue dans la section 2. Ensuite, on établit une estimation de stabilité pour le problème de transmission.

#### 3.3.1 Développement asymptotique

L'impédance approchée  $T_{*\delta}$  peut également être construite par un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur  $\delta$  de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  comme suit:

### Changement d'échelle

Pour travailler dans un domaine fixe, on effectue un changement d'échelle dans la couche mince  $\Omega_+^\delta$  en posant  $\Omega = \mathbb{R} \times ]-1, 1[$ , et en définissant

$$\chi^\delta : \Omega \rightarrow \Omega_+^\delta$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \chi^\delta(x_1, x_2) = \begin{cases} (x_1, x_2) & \text{si } x_2 \leq 0 \\ (x_1, \delta x_2) & \text{si } x_2 > 0 \end{cases}.$$

On pose

$$\tilde{u}^\delta = u^\delta \circ \chi^\delta, \quad \tilde{\omega}^\delta = \omega^\delta \circ \chi^\delta,$$

$$\tilde{u}_-^\delta = (u^\delta \circ \chi^\delta)|_{\Omega_-} = u_-^\delta, \quad \tilde{\omega}_-^\delta = (\omega^\delta \circ \chi^\delta)|_{\Omega_-} = \omega_-^\delta$$

et

$$\tilde{u}_+^\delta : \Omega_+ = \mathbb{R} \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$(x_1, x_2) \mapsto (u_{+1}^\delta(x_1, \delta x_2), \delta u_{+2}^\delta(x_1, \delta x_2))$$

$$\tilde{\omega}_+^\delta : \Omega_+ = \mathbb{R} \times ]0, 1[ \rightarrow \mathbb{R}$$

$$(x_1, x_2) \mapsto \omega_+^\delta(x_1, \delta x_2).$$

Les équations d'équilibre dans la couche mince  $\Omega_+^\delta$ , les conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$  et les conditions de transmission sur  $\Sigma$  deviennent :

- Equations d'équilibre dans  $\Omega_+$ :

$$(E_{+1}) \quad D_1 \left[ 2\mu_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \lambda_+ \left( D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{\delta} D_2 \left[ \begin{array}{c} \mu_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ -\alpha_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta \end{array} \right] = 0,$$

$$(E_{+2}) \quad D_1 \left[ \begin{array}{c} \mu_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ +\alpha_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) - 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta \end{array} \right]$$

$$+ \frac{1}{\delta} D_2 \left[ 2\mu_+ \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta + \lambda_+ \left( D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right) \right] = 0,$$

$$(E_{+3}) \quad (\nu_+ + \epsilon_+) \left( D_1^2 + \frac{1}{\delta^2} D_2^2 \right) \tilde{\omega}_+^\delta$$

$$+ 2\alpha_+ \frac{1}{\delta} (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) - 4\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta = 0.$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_+$ :

$$(CL\Gamma_{+1}) \quad \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ -\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \end{bmatrix} + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta = 0,$$

$$(CL\Gamma_{+2}) \quad 2\mu_+ \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta + \lambda_+ \left( D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right) = 0,$$

$$(CL\Gamma_{+3}) \quad (\nu_+ + \epsilon_+) \frac{1}{\delta} D_2 \tilde{\omega}_+^\delta = 0.$$

- Conditions de transmission sur  $\Sigma$ :

$$(CT\Sigma_1) \quad \tilde{u}_{+1}^\delta = \tilde{u}_{-1}^\delta,$$

$$(CT\Sigma_2) \quad \frac{1}{\delta} \tilde{u}_{+2}^\delta = \tilde{u}_{-2}^\delta,$$

$$(CT\Sigma_3) \quad \tilde{\omega}_+^\delta = \tilde{\omega}_-^\delta,$$

$$(CT\Sigma_4) \quad \sigma_{-21} \left( \tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta \right) = \frac{1}{\delta} \begin{bmatrix} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \\ -\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) \end{bmatrix} + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta,$$

$$(CT\Sigma_5) \quad \sigma_{-22} \left( \tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta \right) = 2\mu_+ \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta + \lambda_+ \left( D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta + \frac{1}{\delta^2} D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta \right),$$

$$(CT\Sigma_6) \quad (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \tilde{\omega}_-^\delta = (\nu_+ + \epsilon_+) \frac{1}{\delta} D_2 \tilde{\omega}_+^\delta.$$

### Développement asymptotique

On écrit le développement de la solution  $(\tilde{u}^\delta, \tilde{\omega}^\delta)$  du problème de transmission en puissance de  $\delta$  sous la forme

$$\tilde{u}_-^\delta = u_-^\delta = u_-^0 + \delta u_-^1 + \delta^2 u_-^2 + \dots,$$

$$\tilde{\omega}_-^\delta = \omega_-^\delta = \omega_-^0 + \delta \omega_-^1 + \delta^2 \omega_-^2 + \dots,$$

$$\tilde{u}_+^\delta = \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2 \tilde{u}_+^2 + \dots,$$

$$\tilde{\omega}_+^\delta = \tilde{\omega}_+^0 + \delta \tilde{\omega}_+^1 + \delta^2 \tilde{\omega}_+^2 + \dots,$$

où  $\tilde{u}_+^k, \tilde{\omega}_+^k, u_-^k, \omega_-^k, k \geq 0$  sont indépendants de  $\delta$ . En injectant ce développement asymptotique dans le problème de transmission et en identifiant les coefficients de même puissance de  $\delta$ , on obtient la hiérarchie suivante de problèmes aux limites :

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_{+1})_{k-2} \quad D_1 [2\mu_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} + \lambda_+ (D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} + D_2 \tilde{u}_{+2}^k)] \\ \quad + D_2 \left[ \begin{array}{l} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k + D_2 \tilde{u}_{+1}^k) \\ -\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k - D_2 \tilde{u}_{+1}^k) + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-1} \end{array} \right] = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \\ (DCL\Gamma_{+1})_{k-1} \quad \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k + D_2 \tilde{u}_{+1}^k) - \alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k - D_2 \tilde{u}_{+1}^k) \\ \quad + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-1} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ \\ (DCT\Sigma_4)_{k-1} \quad \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k + D_2 \tilde{u}_{+1}^k) - \alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^k - D_2 \tilde{u}_{+1}^k) \\ \quad + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-1} = \sigma_{21} (u_-^{k-1}, \omega_-^{k-1}) \text{ sur } \Sigma, \\ \\ (DCT\Sigma_1)_k \quad \tilde{u}_{+1}^k = u_{-1}^k \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (3.7)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_{+2})_{k-3} \quad D_1 \left[ \begin{array}{l} \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^{k-2} + D_2 \tilde{u}_{+1}^{k-2}) \\ +\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^{k-2} - D_2 \tilde{u}_{+1}^{k-2}) - 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-3} \end{array} \right] \\ \quad + D_2 [2\mu_+ D_2 \tilde{u}_{+2}^k + \lambda_+ (D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} + D_2 \tilde{u}_{+2}^k)] = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\ \\ (DCL\Gamma_{+2})_{k-2} \quad (2\mu_+ + \lambda_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^k + \lambda_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ \\ (DCT\Sigma_2)_{k-1} \quad \tilde{u}_{+2}^k = u_{-2}^{k-1} \text{ sur } \Sigma, \\ \\ (DCT\Sigma_5)_{k-2} \quad (2\mu_+ + \lambda_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^k + \lambda_+ D_1 \tilde{u}_{+1}^{k-2} \\ \quad = \sigma_{-22} (u_-^{k-2}, \omega_-^{k-2}) \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right. \quad (3.8)$$

$$\left\{ \begin{array}{l}
 (DE_{+3})_{k-2} \quad (\nu_+ + \epsilon_+) \left( D_1^2 \tilde{\omega}_+^{k-2} + D_2^2 \tilde{\omega}_+^k \right) \\
 \quad + 2\alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^{k-1} - D_2 \tilde{u}_{+1}^{k-1}) - 4\alpha_+ \tilde{\omega}_+^{k-2} = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\
 (DCL\Gamma_{+3})_k \quad (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \tilde{\omega}_+^k = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\
 (DCT\Sigma_3)_k \quad \tilde{\omega}_+^k = \omega_-^k \text{ sur } \Sigma, \\
 (DCT\Sigma_6)_{k-1} \quad (\nu_+ + \epsilon_+) D_2 \tilde{\omega}_+^k = (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^{k-1} \text{ sur } \Sigma,
 \end{array} \right. \quad (3.9)$$

avec

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_+^{-2} = \tilde{u}_+^{-1} = 0 \text{ dans } \Omega_+, \quad \tilde{\omega}_+^{-3} = \tilde{\omega}_+^{-2} = \tilde{\omega}_+^{-1} = 0 \text{ dans } \Omega_+, \\
 \tilde{\omega}_+^{-1} = \tilde{u}_{+1}^{-2} = \tilde{u}_{+1}^{-1} = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \quad \tilde{\omega}_+^{-1} = \tilde{u}_{+1}^{-2} = \tilde{u}_{+1}^{-1} = u_-^{-1} = 0 \text{ sur } \Sigma \\
 \sigma_{21}(u_-^{-1}, \omega_-^{-1}) = \sigma_{-22}(u_-^{-2}, \omega_-^{-2}) = \sigma_{-22}(u_-^{-1}, \omega_-^{-1}) = D_2 \omega_-^{-1} = 0 \text{ sur } \Sigma.
 \end{aligned}$$

Notons que les équations dans  $\Omega_+$  pour les problèmes (3.7) – (3.9) sont des équations différentielles d'ordre deux par rapport à la variable  $x_2$ . En intégrant ces équations et en prenant en compte les conditions de transmission sur  $\Sigma$  et les conditions aux limites sur  $\Gamma_+$ , on peut exprimer  $\tilde{u}_+^k, \tilde{\omega}_+^k$  en fonction des traces de  $u_-^k$  et  $\omega_-^k$  sur  $\Sigma$ .

L'étude des problèmes (3.7) – (3.9), donne les résultats suivants :

Pour  $k = 0$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{2+}^0 &= 0 \text{ dans } \Omega_+, \\
 \tilde{u}_{+1}^0 &= u_{-1|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+, \\
 \tilde{\omega}_+^0 &= \omega_{-|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+.
 \end{aligned}$$

Pour  $k = 1$ , on obtient

$$\begin{aligned}
 \tilde{u}_{+2}^1 &= u_{-2|\Sigma}^0 \text{ dans } \Omega_+, \\
 \tilde{\omega}_+^1 &= \omega_{-|\Sigma}^1 \text{ dans } \Omega_+. \\
 \tilde{u}_{+1}^1(x_1, x_2) &= -\frac{x_2}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left[ \begin{array}{l} (\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{-2|\Sigma}^0 \\ + 2\alpha \omega_{-|\Sigma}^0 \end{array} \right] + u_{-1|\Sigma}^1 \text{ dans } \Omega_+,
 \end{aligned}$$

Pour  $k = 2$ , on obtient

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{+2}^2(x_1, x_2) &= u_{-2|\Sigma}^1 - x_2 \frac{\lambda_+}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1 u_{-1|\Sigma}^0(x_1) \quad \text{dans } \Omega_+, \\ \tilde{u}_{+1}^2(x_1, x_2) &= u_{-1|\Sigma}^2 - \frac{x_2}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left[ \begin{aligned} &(\mu_+ - \alpha_+) D_1 u_{-2|\Sigma}^1(x_1) \\ &+ 2\alpha_+ \omega_{-1|\Sigma}^1(x_1) \end{aligned} \right] \\ &\quad + \frac{1}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left[ \begin{aligned} &\frac{(\mu_+ - \alpha_+) \lambda_+ x_2^2}{2\mu_+ + \lambda_+} \\ &+ \left( x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} \end{aligned} \right] D_1^2 u_{-1|\Sigma}^0(x_1) \quad \text{dans } \Omega_+, \\ 0 &= (2\mu_+ + \lambda_+) D_2 u_{+2}^2 + \lambda_+ D_1 u_{+1}^0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ \tilde{\omega}_+^2(x_1, x_2) &= \left( x_2 - \frac{x_2^2}{2} \right) \left[ \begin{aligned} &\frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)(\nu_+ + \epsilon_+)} \left( D_1 u_{-2|\Sigma}^0 - \omega_{-1|\Sigma}^0 \right) \\ &+ D_1^2 \omega_{-1|\Sigma}^0 \end{aligned} \right] + \omega_{-1|\Sigma}^2 \quad \text{dans } \Omega_+.\end{aligned}$$

Pour  $k = 3$  le problème (3.9) donne la relation suivante:

$$(2\mu_+ + \lambda_+) D_2 u_{+2}^3 + \lambda_+ D_1 u_{+1}^1 = (1 - x_2) \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \left( D_1^2 u_{-2|\Sigma}^0 - D_1 \omega_{-1|\Sigma}^0 \right) \quad \text{dans } \Omega_+.$$

Alors le développement asymptotique des équations d'équilibre dans  $\Omega_-$ , les conditions aux limites sur  $\Gamma_-$  et les conditions de transmission  $(CT\Sigma_4) - (CT\Sigma_6)$  sur  $\Sigma$  donnent les problèmes aux limites suivants dans  $\Omega_-$ :

$$(E_-)_0 \left\{ \begin{aligned} &D_1 \sigma_{-11}(u_-^0, \omega_-^0) + D_2 \sigma_{-21}(u_-^0, \omega_-^0) = -f_{-1} \quad \text{dans } \Omega_-, \\ &D_1 \sigma_{-12}(u_-^0, \omega_-^0) + D_2 \sigma_{-22}(u_-^0, \omega_-^0) = -f_{-2} \quad \text{dans } \Omega_-, \\ &(\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_-^0 \\ &\quad + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^0 - D_2 u_{-1}^0) - 4\alpha_- \omega_-^0 = -g_- \quad \text{dans } \Omega_-, \end{aligned} \right.$$

$$(CL\Gamma_-)_0 \left\{ \begin{aligned} &u_-^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-, \\ &\omega_-^0 = 0 \quad \text{sur } \Gamma_-, \end{aligned} \right.$$

$$(CL\Sigma)_0 \left\{ \begin{aligned} &\sigma_{-21}(u_-^0, \omega_-^0) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ &\sigma_{-22}(u_-^0, \omega_-^0) = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \\ &D_2 \omega_-^0 = 0 \quad \text{sur } \Sigma, \end{aligned} \right.$$

ce qui signifie qu'à l'ordre zéro, la couche mince  $\Omega_+^\delta$  n'a aucun effet sur  $\Omega_-$ .

A l'ordre un l'effet de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  sur  $\Omega_-$  se traduit par des forces et des moments



de forces s'exerçant sur  $\Sigma$ .

$$(E_-)_1 \begin{cases} D_1 \sigma_{-11} (u_-^1, \omega_-^1) + D_2 \sigma_{-21} (u_-^1, \omega_-^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_-^1, \omega_-^1) + D_2 \sigma_{-22} (u_-^1, \omega_-^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_-^1 \\ + 2\alpha_- (D_1 u_{-2}^1 - D_2 u_{-1}^1) - 4\alpha_- \omega_-^1 = 0 \text{ dans } \Omega_-, \end{cases}$$

$$(CL\Gamma_-)_1 \begin{cases} u_-^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_-^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \end{cases}$$

$$(CL\Sigma)_1 \begin{cases} \sigma_{-21} (u_-^1, \omega_-^1) = \frac{4\mu(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{-1|\Sigma}^0 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-22} (u_-^1, \omega_-^1) = \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_1 (D_1 u_{-2|\Sigma}^0 - \omega_{-|\Sigma}^0) \text{ sur } \Sigma, \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_-^1 = (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_-^0 \\ + \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} [D_1 u_{-2|\Sigma}^0 - \omega_{-|\Sigma}^0] \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

### Condition d'impédance approchée

La fonction inconnue définie par  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = (u_-^0 + \delta u_-^1, \omega_-^0 + \delta \omega_-^1)$  satisfait

$$\begin{pmatrix} \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{|\Sigma} \\ \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{|\Sigma} \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*|\Sigma}^\delta \end{pmatrix} = \delta \begin{pmatrix} \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{-*1|\Sigma}^\delta \\ \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_1 (D_1 u_{-*2|\Sigma}^\delta - \omega_{-*|\Sigma}^\delta) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{*}^\delta + \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_1 u_{-*2|\Sigma}^\delta - \omega_{-*|\Sigma}^\delta) \end{pmatrix} \\ - \delta^2 \begin{pmatrix} \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{-1|\Sigma}^1 \\ \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_1 (D_1 u_{-2|\Sigma}^1 - \omega_{-|\Sigma}^1) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{-|\Sigma}^1 + \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_1 u_{-2|\Sigma}^1 - \omega_{-|\Sigma}^1) \end{pmatrix}$$

Si on néglige les termes d'ordre deux par rapport à  $\delta$ , on récupère l'impédance approchée obtenue par le développement formel de Taylor dans la section 2.

### 3.3.2 Formulation faible du problème de transmission dans le domaine fixe

L'espace canonique pour l'étude du problème de transmission dans la jonction des domaines  $\Omega_-$  et  $\Omega_+$  est : (voir [3], [2])

$$V_\delta = \left\{ \begin{array}{l} (v_\pm, \varphi_\pm) \in \mathbb{H}^1(\Omega_\pm) \times H^1(\Omega_\pm); \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, \frac{1}{\delta}v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\},$$

et sa formulation faible s'écrit:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (\tilde{u}_\pm^\delta, \tilde{\varphi}_\pm^\delta) \in V_\delta, \text{ telle que } \forall (v_\pm, \varphi_\pm) \in V_\delta : \\ a^- \left[ (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta), (v_-, \varphi_-) \right] + a^+ \left[ \delta; (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right] = L_\delta(v_\pm, \varphi_\pm) \end{array} \right. \quad (3.10)$$

avec

$$a^- \left[ (\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta), (v_-, \varphi_-) \right] = \int_{\Omega_-} \left[ \begin{array}{l} \sigma_{-11}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-11}(v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-21}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-21}(v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-12}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-12}(v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-22}(\tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta) \gamma_{-22}(v_-, \varphi_-) \\ + (v_- + \epsilon_-) \left( \begin{array}{l} D_1 \tilde{\omega}_-^\delta D_1 \varphi_- \\ + D_2 \tilde{\omega}_-^\delta D_2 \varphi_- \end{array} \right) \end{array} \right] d\Omega_-,$$

$$a^+[\delta; (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+)] = \delta a_1^+ \left[ (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right] + a_0^+ \left[ (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right] \\ + \frac{1}{\delta} a_{-1}^+ \left[ (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right] + \frac{1}{\delta^3} a_{-3}^+ \left[ (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right]$$

$$a_{+1}^+ \left[ (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right] = \int_{\Omega_+} \left[ \begin{array}{l} (\lambda_+ + 2\mu_+) D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta D_1 v_{+1} \\ + (v_+ + \epsilon_+) D_1 \tilde{\omega}_+^\delta D_1 \varphi_+ + 4\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta \varphi_+ \end{array} \right] d\Omega_+,$$

$$a_0^+ \left[ (\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta), (v_+, \varphi_+) \right] = \int_{\Omega_+} 2\alpha_+ \left[ \begin{array}{l} \tilde{\omega}_+^\delta (D_2 v_{+1} - D_1 v_{+2}) \\ + (D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta - D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta) \varphi_+ \end{array} \right] d\Omega_+,$$

$$\begin{aligned}
 a_{-1}^+ \left[ \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right), (v_+, \varphi_+) \right] &= \int_{\Omega_+} \left[ \alpha_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta - D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) (D_1 v_{+2} - D_2 v_{+1}) \right. \\
 &\quad \left. + \mu_+ (D_1 \tilde{u}_{+2}^\delta + D_2 \tilde{u}_{+1}^\delta) (D_1 v_{+2} + D_2 v_{+1}) + (v_+ + \epsilon_+) D_2 \tilde{\omega}_+^\delta D_2 \varphi_+ \right. \\
 &\quad \left. + \lambda_+ (D_1 \tilde{u}_{+1}^\delta D_2 v_{+2} + D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta D_1 v_{+1}) \right] d\Omega_+
 \end{aligned}$$

$$a_{-3}^+ \left[ \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right), (v_+, \varphi_+) \right] = \int_{\Omega_+} (\lambda_+ + 2\mu_+) D_2 \tilde{u}_{+2}^\delta D_2 v_{+2} d\Omega_+$$

et

$$L_\delta (v_\pm, \varphi_\pm) = \int_{\Omega_-} (f_- v_- + g_- \cdot \varphi_-) d\Omega_-.$$

### 3.3.3 Résultat de stabilité pour le problème de transmission

Maintenant, comme dans [4], on démontre un résultat de stabilité pour le problème de transmission.

**Théorème 3.3.1** *Soit  $L_\delta$  une forme linéaire continue sur  $V_\delta$  telle que*

$$|L_\delta (v_\pm, \varphi_\pm)| \leq l_\delta \left[ \begin{array}{l} \mathbf{a} (v_-, \varphi_-) + \sqrt{\delta} \mathbf{b} (v_+, \varphi_+) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathbf{c} (v_+, \varphi_+) + \frac{1}{\delta \sqrt{\delta}} \mathbf{d} (v_+, \varphi_+) \end{array} \right]$$

où  $l_\delta$  est une fonction de  $\delta > 0$ , peut-être pas bornée quand  $\delta$  tend vers 0, et

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a}(v_-, \varphi_-) &= \|v_-\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\varphi_-\|_{H^1(\Omega_-)}, \\
 \mathbf{b}(v_+, \varphi_+) &= \|D_1 v_{+1}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \|D_1 \varphi_+^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \|\varphi_+^\delta\|_{L^2(\Omega_+)}, \\
 \mathbf{c}(v_+, \varphi_+) &= \left[ \begin{array}{l} \|D_1 v_{+2}^\delta + D_2 v_{+1}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \\ \|D_1 v_{+2}^\delta - D_2 v_{+1}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} + \|D_2 \varphi_+^\delta\|_{L^2(\Omega_+)} \end{array} \right], \\
 \mathbf{d}(v_+, \varphi_+) &= \|D_2 v_{+2}^\delta\|_{L^2(\Omega_+)}.
 \end{aligned}$$

Alors il existe  $C > 0$  (ne dépend pas de  $\delta$ ) telle que  $(\tilde{u}_\pm^\delta, \tilde{\omega}_\pm^\delta)$  la solution du problème

$$a^- \left[ \left( \tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta \right), (v_-, \varphi_-) \right] + a^+ \left[ \delta; \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right), (v_+, \varphi_+) \right] = L_\delta (v_\pm, \varphi_\pm) \quad (3.11)$$

satisfait les estimations

$$\mathbf{a} \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) \leq C l_\delta, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{b} \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) \leq C \delta^{-1/2} l_\delta, \quad (3.13)$$

$$\mathbf{c} \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) \leq C \delta^{1/2} l_\delta, \quad (3.14)$$

$$\mathbf{d} \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) \leq C \delta^{3/2} l_\delta. \quad (3.15)$$

**Preuve.** L'expression  $\mathbf{a}^2$  est équivalente à  $a^- \left[ \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right), \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) \right]$  et on a

$$\begin{aligned} a_{-1}^+ \left[ \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right), \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \right] &\leq \left[ \begin{array}{c} (v_+ + \epsilon_+ + \mu_+ + \alpha_+) \mathbf{c}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \\ + 2\lambda_+ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \end{array} \right], \\ a_0^+ \left[ \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right), \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \right] &\leq 4\alpha_+ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right), \\ 4\alpha_+ (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) &\leq 2\alpha_+ \left[ \delta \mathbf{b}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) + \frac{1}{\delta} \mathbf{c}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \right] \end{aligned}$$

et

$$2\lambda_+ \frac{1}{\delta} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{d}) \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \leq \lambda_+ \left[ \delta \mathbf{b}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) + \frac{1}{\delta^3} \mathbf{d}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \right].$$

Alors en prenant  $(v_\pm, \varphi_\pm) = \left( \tilde{u}_\pm, \tilde{\omega}_\pm \right)$  dans la formulation faible, on obtient l'estimation suivante:

$$\left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}^2 \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) + \delta \mathbf{b}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \\ + \frac{1}{\delta} \mathbf{c}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) + \frac{1}{\delta^3} \mathbf{d}^2 \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \end{array} \right] \leq C l_\delta \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a} \left( \tilde{u}_-, \tilde{\omega}_- \right) + \sqrt{\delta} \mathbf{b} \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}} \mathbf{c} \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) + \frac{1}{\delta \sqrt{\delta}} \mathbf{d} \left( \tilde{u}_+, \tilde{\omega}_+ \right) \end{array} \right]$$

où  $C > 0$  est une constante positive indépendante de  $\delta$ . Cela conduit à l'estimation (3.12) – (3.15) pour  $\left( \tilde{u}_\pm, \tilde{\omega}_\pm \right)$ . ■

### 3.3.4 Estimation d'erreur pour le problème de transmission

On pose

$$\begin{aligned} u_-^{(\delta,1)*} &= u_-^0 + \delta u_-^1, \quad u_+^{(\delta,1)*} = \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2 (0, \tilde{u}_{+2}^2), \\ \omega_-^{(\delta,1)*} &= \omega_-^0 + \delta \omega_-^1, \quad \omega_+^{(\delta,1)*} = \tilde{\omega}_+^0 + \delta \tilde{\omega}_+^1. \end{aligned}$$

Le choix de

$$u_{+2}^{\delta*} = \tilde{u}_+^0 + \delta\tilde{u}_+^1 + \delta^2\tilde{u}_{+2}^2$$

a été effectué afin de satisfaire la condition de transmission  $u_{+2}^{\delta*} = \delta u_{-2}^{\delta*}$  sur  $\Sigma$  et donc on a  $(u_{\pm}^{(\delta,1)*}, \omega_{\pm}^{(\delta,1)*})$  dans l'espace  $V_{\delta}$ . En utilisant les problèmes à l'ordre zéro et à l'ordre un satisfaits par  $(u_{\pm}^0, \omega_{\pm}^0)$  et  $(u_{\pm}^1, \omega_{\pm}^1)$  et aussi les problèmes (3.7) – (3.9) pour  $k \in \{0, 1, 2, 3\}$ , on obtient

$$\begin{aligned} L_{\delta}(v_{\pm}, \varphi_{\pm}) &= a_{-3}^+ [(\tilde{u}_+^3, \tilde{\omega}_+^3), (v_+, \varphi_+)] + \delta a_{-1}^+ [(0, \tilde{\omega}_+^2), (v_+, \varphi_+)] \\ &\quad - \delta^2 a_{+1}^+ [(\tilde{u}_+^1, \tilde{\omega}_+^1), (v_+, \varphi_+)] - \delta^2 a_0^+ [(0, \tilde{u}_{+2}^2), (0, 0)], (v_+, \varphi_+)] \\ &\quad + \delta \int_{\Omega_+} (\mu_+ + \alpha_+) D_2 \tilde{u}_{+1}^2 D_2 v_{+1} - \delta \int_{\Omega_+} \begin{bmatrix} (\mu_+ + \alpha_+) D_1 \tilde{u}_{+2}^2 \\ -2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^1 \end{bmatrix} D_1 v_{+2}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} &a^- \left[ \left( \tilde{u}_-^{\delta} - u_-^{(\delta,1)*}, \tilde{\omega}_-^{\delta} - \omega_-^{(\delta,1)*} \right), (v_-, \varphi_-) \right] \\ - &+ a^+ \left( \left[ \left( \tilde{u}_+^{\delta} - u_+^{(\delta,1)*}, \tilde{\omega}_+^{\delta} - \omega_+^{(\delta,1)*} \right), (v_+, \varphi_+) \right] \right) = L_{\delta}(v_{\pm}, \varphi_{\pm}) \end{aligned}$$

et donc

$$|L_{\delta}(v_{\pm}, \varphi_{\pm})| \leq C\delta^{3/2} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}(v_-, \varphi_-) + \sqrt{\delta}\mathbf{b}(v_+, \varphi_+) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\mathbf{c}(v_+, \varphi_+) + \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}}\mathbf{d}(v_+, \varphi_+) \end{array} \right],$$

ce qui implique par le résultat de la stabilité (voir Théorème 3.3.1) l'estimation d'erreur suivante:

$$\left\| \tilde{u}_-^{\delta} - u_-^{(\delta,1)*} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^{\delta} - \omega_-^{(\delta,1)*} \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2}, \quad (3.16)$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\delta$ .

**Remarque 3.3.1** Si  $f_-, g_-$  sont régulières, on peut obtenir tous les termes  $u_{\pm}^k, \omega_{\pm}^k, k \geq 2$  du développement asymptotique et prouver une estimation d'erreur analogue. Par exemple, si on prend  $(u_{\pm}^{\delta} - u_{\pm}^{(\delta,2)*}, \omega_{\pm}^{\delta} - \omega_{\pm}^{(\delta,2)*})$  dans (3.11) avec

$$\begin{aligned} u_-^{(\delta,2)*} &= u_-^0 + \delta u_-^1 + \delta^2 u_-^2, \\ u_+^{(\delta,2)*} &= \tilde{u}_+^0 + \delta\tilde{u}_+^1 + \delta^2\tilde{u}_+^2 + \delta^3(0, \tilde{u}_{+2}^3), \\ \omega_-^{(\delta,2)*} &= \omega_-^0 + \delta\omega_-^1 + \delta^2\omega_-^2, \\ \omega_+^{(\delta,2)*} &= \tilde{\omega}_+^0 + \delta\tilde{\omega}_+^1 + \delta^2\tilde{\omega}_+^2, \end{aligned}$$

on peut montrer de la même manière que la forme linéaire correspondante  $L_\delta$  satisfait l'inégalité suivante:

$$|L_\delta(v_\pm, \varphi_\pm)| \leq C\delta^{5/2} \left[ \begin{array}{c} \mathbf{a}(v_-, \varphi_-) + \sqrt{\delta}\mathbf{b}(v_+, \varphi_+) \\ + \frac{1}{\sqrt{\delta}}\mathbf{c}(v_+, \varphi_+) + \frac{1}{\delta\sqrt{\delta}}\mathbf{d}(v_+, \varphi_+) \end{array} \right],$$

où  $C$  est une constante positive indépendante de  $\delta$  et donc

$$\|u_-^\delta - u_-^{(\delta,2)*}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_-^\delta - \omega_-^{(\delta,2)*}\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{5/2}. \quad (3.17)$$

### 3.4 Etude du problème d'impédance approchée

Ici, on établit un résultat d'existence et d'unicité et on montre un résultat de stabilité pour le problème  $(P_{-*}^\delta)$  dans  $\Omega_-$ , ainsi on détermine les premiers termes du développement asymptotique de sa solution.

#### 3.4.1 Formulation faible

L'espace pour étudier le problème d'impédance  $(P_{-*}^\delta)$  est:

$$V_* = \left\{ \begin{array}{l} (v_-, \varphi_-) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_1 v_{-1}, D_1 v_{-2}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), D_1 \varphi_- \in L^2(\Sigma), \\ v_- = \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}.$$

Soit

$$\begin{aligned} & a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] \\ &= \int_{\Omega_-} \left[ \begin{array}{l} \sigma_{-11}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-11}(v_-, \varphi_-) + \\ \sigma_{-21}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-21}(v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-12}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-12}(v_-, \varphi_-) \\ + \sigma_{-22}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-22}(v_-, \varphi_-) \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1 \omega_{-*}^\delta D_1 \varphi_- + D_2 \omega_{-*}^\delta D_2 \varphi_-) \end{array} \right] d\Omega_- \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & a_{\Sigma} [(u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta}), (v_{-}, \varphi_{-})] \\
 = & \int_{\Sigma} \left[ \begin{aligned} & \frac{4\mu_{+}(\mu_{+}+\lambda_{+})}{2\mu_{+}+\lambda_{+}} D_1 u_{-*1|\Sigma}^{\delta} D_1 v_{-*1|\Sigma}^{\delta} \\ & + \frac{4\mu_{+}\alpha_{+}}{(\mu_{+}+\alpha_{+})} (D_1 u_{-*2|\Sigma}^{\delta} - \omega_{-*|\Sigma}^{\delta}) (D_1 v_{-*2|\Sigma}^{\delta} - \varphi_{-*|\Sigma}) \\ & + (\nu_{+} + \epsilon_{+}) D_1 \omega_{-*|\Sigma}^{\delta} D_1 \varphi_{-*|\Sigma} \end{aligned} \right] d\Sigma.
 \end{aligned}$$

Le problème de l'impédance approchée ( $P_{-*}^{\delta}$ ) a la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta}) \in V_{*}, \text{ telle que } \forall (v_{-}, \varphi_{-}) \in V_{*} \\ a^{-} [(u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta}), (v_{-}, \varphi_{-})] + \delta a_{\Sigma} [(u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta}), (v_{-}, \varphi_{-})] \text{ ,} \\ = \int_{\Omega_{-}} (f_{-} \cdot v_{-} + g_{-} \cdot \varphi_{-}) d\Omega_{-} \end{array} \right. , \quad (3.18)$$

### 3.4.2 Résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée

Les preuves de l'existence et l'unicité du problème ( $P_{-*}^{\delta}$ ) dans l'espace  $V_{*}$  et la stabilité suivent les mêmes étapes que celles du problème de transmission ( $P^{\delta}$ ) comme dans les sections précédentes .

**Théorème 3.4.1** *Soit  $L_{\delta}$  une forme linéaire continue sur  $V_{*}$  telle que*

$$|L_{\delta}(v_{-}, \varphi_{-})| \leq l_{\delta} \left( \begin{aligned} & \|u_{-*}^{\delta}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_{-})} + \|\omega_{-*}^{\delta}\|_{H^1(\Omega_{-})} + \sqrt{\delta} \|D_1 u_{-*1|\Sigma}^{\delta}\|_{L^2(\Sigma)} \\ & + \sqrt{\delta} \|D_1 u_{-*2|\Sigma}^{\delta} - \omega_{-*|\Sigma}^{\delta}\|_{L^2(\Sigma)} + \sqrt{\delta} \|D_1 \omega_{-*|\Sigma}^{\delta}\|_{L^2(\Sigma)} \end{aligned} \right)$$

où  $l_{\delta}$  est une fonction de  $\delta > 0$ , peut-être pas bornée quand  $\delta$  tend vers 0. Alors il existe  $C > 0$  (indépendante de  $\delta$ ) telle que la solution  $(u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta})$  du problème

$$L_{\delta}(v_{-}, \varphi_{-}) = a^{-} [(u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta}), (v_{-}, \varphi_{-})] + \delta a_{\Sigma} [(u_{-*}^{\delta}, \omega_{-*}^{\delta}), (v_{-}, \varphi_{-})] \text{ ,}$$

satisfait les estimations suivantes:

$$\|u_{-*}^{\delta}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_{-})} + \|\omega_{-*}^{\delta}\|_{H^1(\Omega_{-})} \leq Cl_{\delta}, \quad (3.19)$$

$$\left( \begin{aligned} & \|D_1 u_{-*1|\Sigma}^{\delta}\|_{L^2(\Sigma)} + \|D_1 \omega_{-*|\Sigma}^{\delta}\|_{L^2(\Sigma)} \\ & + \|D_1 u_{-*2|\Sigma}^{\delta} - \omega_{-*|\Sigma}^{\delta}\|_{L^2(\Sigma)} \end{aligned} \right) \leq C\delta^{-1/2}l_{\delta}, \quad (3.19)$$

### 3.4.3 Développement asymptotique

On pose

$$\begin{aligned} u_{-*}^\delta &= u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1 + \delta^2 u_{-*}^2 + \dots, \\ \omega_{-*}^\delta &= \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1 + \delta^2 \omega_{-*}^2 + \dots \end{aligned}$$

et on injecte le développement asymptotique dans le problème d'impédance approchée ( $P_{-*}^\delta$ ), on obtient une hiérarchie d'équations et de conditions aux limites. À l'ordre 0, on

a

$$(E_-)_{*0} \begin{cases} D_1 \sigma_{-11}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) + D_2 \sigma_{-21}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = -f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) + D_2 \sigma_{-22}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = -f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu + \epsilon)(D_1^2 + D_2^2)\omega_{-*}^0 \\ \quad + 2\alpha_-(D_1 u_{-*2}^0 - D_2 u_{-*1}^0) - 4\alpha_- \omega_{*-}^0 = -g_- \text{ dans } \Omega_-, \end{cases}$$

$$(CL\Gamma_-)_{*0} \begin{cases} u_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \end{cases}$$

$$(CL\Sigma)_{*0} \begin{cases} \sigma_{-21}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-22}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ D_2 \omega_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

À l'ordre 1 on a

$$(E_-)_{*1} \begin{cases} D_1 \sigma_{-11}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) + D_2 \sigma_{-21}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) + D_2 \sigma_{-22}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2)\omega_{-*}^1 \\ \quad + 2\alpha_-(D_1 u_{-*2}^1 - D_2 u_{-*1}^1) - 4\alpha_- \omega_{*-}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_-, \end{cases}$$

$$(CL\Gamma_-)_{*1} \begin{cases} u_{-*}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_{-*}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \end{cases}$$

$$(CL\Sigma)_{*1} \begin{cases} \sigma_{-21}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = \frac{4\mu(\mu_+ + \lambda_+)}{2\mu_+ + \lambda_+} D_1^2 u_{-*1|\Sigma}^0(x_1) \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-22}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_1 u_{-*2|\Sigma}^0 - \omega_{-*|\Sigma}^0) \text{ sur } \Sigma, \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_2 \omega_{-*}^1 = (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{-*}^0 \\ \quad + \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} [D_1 u_{-*2|\Sigma}^0 - \omega_{-*|\Sigma}^0] \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$



**Remarque 3.4.1** Les termes  $(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)$  et  $(u_-^0, \omega_-^0)$  (respectivement  $(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)$  et  $(u_-^1, \omega_-^1)$ ) des développements asymptotiques de  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  et  $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$  sont des solutions du même problème de limite à l'ordre 0 (respectivement à l'ordre 1). Alors par unicité, on a

$$\begin{aligned} (u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) &= (u_-^0, \omega_-^0), \\ (u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) &= (u_-^1, \omega_-^1). \end{aligned}$$

### 3.4.4 Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approchée

On pose

$$\begin{aligned} u_{-*}^{(\delta,1)} &= u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1, \\ \omega_{-*}^{(\delta,1)} &= \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &a^- \left[ \left( u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)}, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right), (v_-, \varphi_-) \right] \\ &+ \delta a_\Sigma \left[ \left( u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)}, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right), (v_-, \varphi_-) \right] = L_\delta(v_-, \varphi_-) \end{aligned}$$

et on utilise les équations et les conditions aux limites satisfaites par  $(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)$  et  $(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)$ .

On obtient

$$|L_\delta(v_-, \varphi_-)| \leq C\delta^{3/2} \left( \begin{aligned} &\|u_{-*}^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_{-*}^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} + \sqrt{\delta} \|D_1 u_{-*}^{\delta|_{\Sigma}}\|_{L^2(\Sigma)} \\ &+ \sqrt{\delta} \|D_1 u_{-*}^{\delta|_{\Sigma}} - \omega_{-*}^{\delta|_{\Sigma}}\|_{L^2(\Sigma)} + \sqrt{\delta} \|D_1 \omega_{-*}^{\delta|_{\Sigma}}\|_{L^2(\Sigma)} \end{aligned} \right),$$

ce qui implique par le résultat de la stabilité (voir théorème 3.4.1) l'estimation d'erreur suivante:

$$\left\| u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2}. \quad (3.20)$$

Si  $f_-$ ,  $g_-$  sont régulières, tous les termes  $u_{-*}^k, \omega_{-*}^k, k \geq 2$  du développement asymptotique peuvent être déterminés et des estimations d'erreur peuvent être prouvées à n'importe quel ordre. Par exemple, on a

$$\left\| u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,2)} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,2)} \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{5/2}, \quad (3.21)$$

pour

$$\begin{aligned} u_{-*}^{(\delta,2)} &= u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1 + \delta^2 u_{-*}^2, \\ \omega_{-*}^{(\delta,2)} &= \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1 + \delta^2 \omega_{-*}^2. \end{aligned}$$

### 3.5 Estimation d'erreur entre le problème de transmission et le problème d'impédance approchée

Maintenant, on se concentre sur l'estimation d'erreur entre la solution du problème de transmission  $(P^\delta)$  et la solution du problème d'impédance approchée  $(P_{-*}^\delta)$ . Comme à l'ordre un, le développement asymptotique de la solution du problème de transmission dans  $\Omega_-$  est le même que celui du problème d'impédance est le même, on peut écrire

$$\begin{aligned} & \left\| \tilde{u}_-^\delta - u_{-*}^\delta \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_{-*}^\delta \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\ & \leq \left\| \tilde{u}_-^\delta - u_-^0 - \delta u_-^1 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_-^0 - \delta \omega_-^1 \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\ & \quad + \left\| u_{-*}^\delta - u_{-*}^0 - \delta u_{-*}^1 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^0 - \delta \omega_{-*}^1 \right\|_{H^1(\Omega_-)} \end{aligned}$$

Et en vertu de (3.16) et (3.20), on trouve

$$\left\| \tilde{u}_-^\delta - u_{-*}^\delta \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_{-*}^\delta \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2},$$

où  $C > 0$  est une constante positive dépendant uniquement de  $f_-$ ,  $g_-$  et des coefficients d'élasticité.

**Remarque 3.5.1** *En fait, si les données  $f_-$ ,  $g_-$  sont assez régulières pour permettre la détermination de  $(u_-^2, \omega_-^2)$  et  $(u_{-*}^2, \omega_{-*}^2)$ , la dernière estimation d'erreur (qui n'est pas optimale) peut être améliorée comme suit :*

$$\begin{aligned} \left\| \tilde{u}_-^\delta - u_-^0 - \delta u_-^1 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} &\leq \left\| \tilde{u}_-^\delta - u_-^0 - \delta u_-^1 - \delta^2 u_-^2 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \delta^2 \left\| u_-^2 \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} \\ &\leq C_1 \delta^{5/2} + C_2 \delta^2 \leq C \delta^2 \\ \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_-^0 - \delta \omega_-^1 \right\|_{H^1(\Omega_-)} &\leq \left\| \tilde{\omega}_-^\delta - \omega_-^0 - \delta \omega_-^1 - \delta^2 \omega_-^2 \right\|_{H^1(\Omega_-)} + \delta^2 \left\| \omega_-^2 \right\|_{H^1(\Omega_-)} \\ &\leq C_1 \delta^{5/2} + C_2 \delta^2 \leq C \delta^2 \end{aligned}$$

3.5. Estimation d'erreur entre le problème de transmission et le problème d'impédance  
approchée

---

Des estimations similaires pour  $(u_{-*}^\delta - u_{-*}^0 - \delta u_{-*}^1, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^0 - \delta \omega_{-*}^1)$  peuvent être prouvées de la même manière.

---

# Impédance d'une couche mince courbe en élasticité micropolaire

Dans ce chapitre, on modélise de façon approchée l'effet d'une couche mince courbe  $\Omega_+^\delta$  élastique micropolaire linéaire en dimension deux et d'épaisseur  $\delta$  sur un corps  $\Omega_-$ , lorsque  $\delta$  tend vers 0 par les techniques des développements asymptotiques avec changement d'échelle.

## 4.1 Présentation du problème

On a un corps élastique  $\Omega_-$  de bord  $\partial\Omega_-$  de classe  $C^\infty$  (constitué de deux parties disjointes  $\Gamma_-$  et  $\Sigma$ ) recouvert d'une couche mince micropolaire  $\Omega_+^\delta$  d'épaisseur  $\delta$  très petite devant les dimensions de  $\Omega_-$ . Le bord de  $\Omega_+^\delta$  est de classe  $C^\infty$  et constitué de deux parties disjointes  $\Sigma$  et  $\Gamma_+^\delta$ . On note  $n(s)$  la normal de  $\Sigma$  au point de l'abscisse curviligne  $s$ . Pour  $\delta$  assez petit, on paramètre  $\Omega_+^\delta$  par  $\Sigma \times ]0; \delta[$  en considérant, pour  $0 < z < \delta$ , la courbe  $\Gamma^z$  parallèle à  $\Sigma$

$$\Gamma^z = \{m(s) + zn(s); m(s) \in \Sigma\}.$$

On a

$$\partial\Omega_+^\delta = \Sigma \cup \Gamma_+^\delta,$$

$$\partial\Omega_- = \Sigma \cup \Gamma_-,$$

avec

$$\Gamma_+^\delta = \{s + \delta n(s); s \in \Sigma\}.$$

On désigne par  $\Omega^\delta = \Omega_- \cup \Omega_+^\delta \cup \Sigma$  le domaine complet dont le bord est  $\Gamma_- \cup \Gamma_+^\delta$  ( Figure 8)

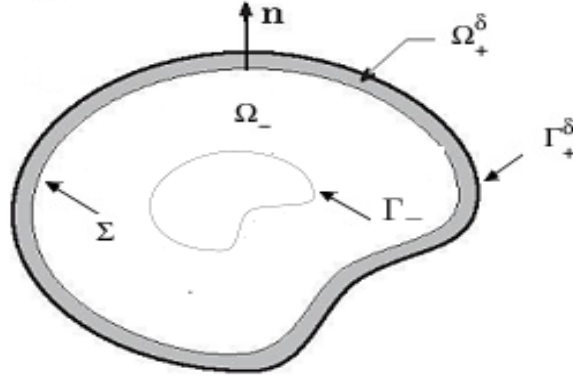


Figure 8. Géométrie du problème.

On s'intéresse au problème de transmission pour l'élasticité micropolaire linéaire, posé dans le domaine  $\Omega^\delta$  :

**Inconnues** :  $u^\delta(x_1, x_2) = (u_1^\delta(x_1, x_2), u_2^\delta(x_1, x_2))$  champ des déplacements,  $\omega^\delta(x_1, x_2)$  champ des rotations.

**Données** :  $f_-(x_1, x_2) = (f_{-1}(x_1, x_2), f_{-2}(x_1, x_2))$  champ des forces de masse,  $g_-(x_1, x_2)$  couple de masse.

**Loi de comportement** :

$$\sigma_{\pm ji} = (\mu_\pm + \alpha_\pm) \gamma_{\pm ji} + (\mu_\pm - \alpha_\pm) \gamma_{\pm ij} + \lambda_\pm \gamma_{\pm kk} \delta_{ij}; i, j, k = 1, 2$$

avec

$$\gamma_{\pm ji} = D_j u_{\pm i}^\delta - \epsilon_{3ji} \omega_\pm^\delta \quad \text{et} \quad \epsilon_{3ji} = \frac{1}{2} (j-3)(i-j)(3-i); i, j = 1, 2$$

$\mu_{\pm}, \alpha_{\pm}, \lambda_{\pm}, \nu_{\pm}, \epsilon_{\pm}$  sont les coefficients définissant les matériaux. Ils vérifient :  $\mu_{\pm} > 0, \alpha_{\pm} > 0, \nu_{\pm} > 0, \epsilon_{\pm} > 0, 3\lambda_{\pm} + 2\mu_{\pm} > 0$ . L'indice + (resp -) désigne la restriction à  $\Omega_+^{\delta}$  (resp  $\Omega_-$ ).

- Equations dans  $\Omega_-$

$$\begin{cases} D_1\sigma_{-11}(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) + D_2\sigma_{-21}(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) = f_{-1}, \\ D_1\sigma_{-12}(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) + D_2\sigma_{-22}(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta}) = f_{-2}, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2)\omega_-^{\delta} + 2\alpha_- (D_1u_{-2}^{\delta} - D_2u_{-1}^{\delta}) - 4\alpha_-\omega_-^{\delta} = g_-. \end{cases}$$

- Equations dans  $\Omega_+^{\delta}$

$$\begin{cases} D_1\sigma_{+11}(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) + D_2\sigma_{+21}(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) = 0, \\ D_1\sigma_{+12}(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) + D_2\sigma_{+22}(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+)(D_1^2 + D_2^2)\omega_+^{\delta} + 2\alpha_+ (D_1u_{+2}^{\delta} - D_2u_{+1}^{\delta}) - 4\alpha_+\omega_+^{\delta} = 0. \end{cases}$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_+^{\delta}$

$$\begin{cases} \sigma(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta})n = 0, \\ (\nu_+ + \epsilon_+)\frac{\partial\omega_+^{\delta}}{\partial n} = 0. \end{cases}$$

- Conditions aux limites sur  $\Gamma_-$

$$\begin{cases} u_-^{\delta} = 0, \\ \omega_-^{\delta} = 0. \end{cases}$$

- Conditions de transmission sur  $\Sigma$

$$\begin{cases} u_-^{\delta} = u_+^{\delta}, \\ \omega_-^{\delta} = \omega_+^{\delta}, \\ \sigma(u_-^{\delta}, \omega_-^{\delta})n = \sigma(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta})n, \\ (\nu_- + \epsilon_-)\frac{\partial\omega_-^{\delta}}{\partial n} = (\nu_+ + \epsilon_+)\frac{\partial\omega_+^{\delta}}{\partial n}. \end{cases}$$

Il est bien connu que ce problème de transmission a une solution unique dans l'espace canonique de Sobolev

$$V = \left\{ \begin{array}{l} (v_{\pm}, \varphi_{\pm}) \in \mathbb{H}^1(\Omega_{\pm}) \times H^1(\Omega_{\pm}); \\ v_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \varphi_- = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ v_{+1} = v_{-1} \text{ sur } \Sigma, v_{+2} = v_{-2} \text{ sur } \Sigma, \\ \varphi_+ = \varphi_- \text{ sur } \Sigma \end{array} \right\}.$$

Mais l'épaisseur  $\delta$  de la couche mince (très petite) génère des instabilités numériques lors du calcul numérique de la solution. On modélise alors l'effet de la couche mince  $\Omega_+^{\delta}$  sur le corps  $\Omega_-$  pour ramener le problème de transmission à un problème aux limites équivalent mais posé sur  $\Omega_-$  seulement, i.e on remplace le système sur  $\Omega_+^{\delta}$ , les conditions de transmission sur  $\Sigma$  et les condition aux limites sur  $\Gamma_+^{\delta}$  par une condition aux limites approchée sur  $\Sigma$ . Cette condition sera établie par une méthode basée sur un changement d'échelle et un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur  $\delta$  de la couche mince.

## 4.2 Problème d'impédance

### 4.2.1 Impédance d'une couche mince

Le paramètre  $\delta$  étant petit, on cherche à approcher le problème de transmission posé sur le domaine  $\Omega_- \cup \Omega_+^{\delta}$  (dépendant de  $\delta$ ) par un problème posé sur le domaine fixe  $\Omega_-$ . Pour cela on résout le problème aux limites suivant.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Equations dans } \Omega_+^{\delta}, \\ \text{Conditions aux limites sur } \Gamma_+^{\delta}, \\ u_+^{\delta} = H \text{ sur } \Sigma, \omega_+^{\delta} = K \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

si  $(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta})$  est solution de ce problème. On pose

$$T_{\delta} \left( (H, K) = (u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta})|_{\Sigma} \right) = \left( \begin{array}{l} [\sigma_{ji}(u_+^{\delta}, \omega_+^{\delta}) n_j]_{|\Sigma} \\ [(\nu_+ + \epsilon_+) \frac{\partial \omega_+^{\delta}}{\partial n}]_{|\Sigma} \end{array} \right),$$

en utilisant les conditions de transmission sur  $\Sigma$ , on obtient

$$T_\delta \left( (u_-^\delta, \omega_-^\delta)_{|\Sigma} \right) = \begin{pmatrix} [\sigma_{ji} (u_-^\delta, \omega_-^\delta) n_j]_{|\Sigma} \\ [(\nu_- + \epsilon_-) \frac{\partial \omega_-^\delta}{\partial n}]_{|\Sigma} \end{pmatrix},$$

et le problème aux limites d'impédance sur  $\Omega_-$  s'écrit

$$\begin{cases} \text{Equations dans } \Omega_-, \\ \text{Conditions aux limites sur } \Gamma_-, \\ \left( \begin{array}{l} [\sigma (u_-^\delta, \omega_-^\delta) n]_{|\Sigma} \\ [(\nu_- + \epsilon_-) \frac{\partial \omega_-^\delta}{\partial n}]_{|\Sigma} \end{array} \right) = T_\delta \left( (u_-^\delta, \omega_-^\delta)_{|\Sigma} \right) \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

### 4.3 Eléments sur la géométrie différentielle des couches minces

Afin de calculer une impédance approchée nous avons besoin d'écrire le système sur la couche mince dans un repère local (repère de Frenet). On va donc introduire un système de coordonnées locales adapté à la construction d'une condition d'impédance approchée. Alors on va écrire le gradient et la divergence d'un champ de vecteurs sur la couche mince dans un système de coordonnées locales ainsi on décompose les tenseurs des déformations et des contraintes dans ce système

#### 4.3.1 Passage aux coordonnées locales

Soit  $\tau(s)$  le vecteur tangent à  $\Sigma$  en  $s$  et  $n(s)$  le vecteur se déduisant de  $\tau(s)$  par une rotation de  $\frac{\pi}{2}$  dans le sens direct, de sorte que  $(s, \tau(s), n(s))$  forme un repère direct. D'après les formules de Frenet on a

$$\begin{aligned} D_s \tau(s) &= -R(s) n(s), \\ D_s n(s) &= R(s) \tau(s). \end{aligned}$$

$R(s)$  étant la courbure de  $\Sigma$  au point  $m$ . On paramètre la couche mince  $\Omega_+^\delta$  par  $\Sigma \times ]0, \delta[$

$$\begin{aligned} \Sigma \times ]0, \delta[ &\rightarrow \Omega^\delta \\ (s, z) &\mapsto m + zn(s) \end{aligned}$$



Pour  $0 < z < \delta$ , la courbe  $\Sigma^z$

$$\Sigma^z = \{m + zn(s); s \in \Sigma\},$$

est parallèle à  $\Sigma$ . Le vecteur tangent à  $\Sigma^z$  en  $s + zn(s)$  est

$$\tau(s, z) = (1 + zR) \tau(s).$$

et le vecteur normal est

$$n(s, z) = n(s).$$

### Décomposition d'un champ de vecteurs

Soit  $M = (s, z)$  un point de  $\Omega_+^\delta$ . Tout champ de vecteurs  $v = (v_1, v_2)$  défini sur  $\Omega_+^\delta$ , s'exprime dans le repère  $(s, \tau(s), n(s))$  de la manière suivante :

$$v(s, z) = v_\tau(s, z) \tau(s) + v_n(s, z) n(s),$$

Les fonctions  $v_s$  et  $v_n$  sont les coordonnées locales de  $v$  dans le repère  $(s, \tau(s), n(s))$ .

### Gradient d'une fonction

Soit  $\phi$  une fonction définie sur  $\Omega_+^\delta$ . On a

$$\nabla \phi = \frac{1}{1 + zR} D_s \phi(s, z) \tau(s) + D_z \phi(s, z) n(s).$$

### Gradient d'un vecteur

Soit  $v$  un champ de vecteurs définis sur  $\Omega_+^\delta$ ,

$$v(s, z) = v_\tau(s, z) \tau(s) + v_n(s, z) n(s).$$

On peut décomposer le gradient de  $v$  dans la base locale  $(\tau(s), n(s))$  sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \nabla v &= \frac{1}{1 + zR} D_s v_\tau \tau \tau - \frac{R}{1 + zR} v_\tau \tau n \\ &+ \frac{1}{1 + zR} D_s v_n \tau n + \frac{R}{1 + zR} v_n \tau \tau \\ &+ D_z v_\tau n \tau + D_z v_n n n. \end{aligned}$$

Dans la base locale on a la représentation matricielle suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{1+zR} [D_s v_\tau + R v_n] & \frac{1}{1+zR} [D_s v_n - R v_\tau] \\ D_z v_\tau & D_z v_n \end{pmatrix}.$$

### Divergence d'un champ de vecteurs.

Soit  $v$  un champ de vecteurs définis sur  $\Omega_+^\delta$ ,

$$v(s, z) = v_\tau(s, z) \tau(s) + v_n(s, z) n(s),$$

On a

$$\operatorname{div} v = \frac{1}{1+zR} D_s v_\tau + \frac{1}{1+zR} D_z [(1+zR) v_n].$$

### Décomposition d'un champ d'endomorphismes sur $\Omega_+^\delta$ .

Soit  $T$  un champ d'endomorphisme  $T : \Omega_+^\delta \longrightarrow \mathcal{L}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  on désigne par  $\bar{\tau}$  (respectivement  $\bar{n}$ ) le transposé de  $\tau$  (respectivement le transposé de  $n$ ).

Pour tout vecteur  $v$  de  $\mathbb{R}^2$ , on a

$$\begin{aligned} T(M)v &= (T(M)v)_s \tau(s) + (T(M)v)_n n(s) \\ &= \bar{\tau}(s) (T(M)v) \tau(s) + \bar{n}(s) (T(M)v) n(s) \\ &= \left[ \begin{array}{l} [\bar{\tau}(s) (T(M)) \tau(s)] \tau(s) \bar{\tau}(s) + [\bar{n}(s) (T(M)) \tau(s)] n(s) \bar{\tau}(s) \\ + [\bar{\tau}(s) (T(M)) n(s)] \tau(s) \bar{n}(s) + [\bar{n}(s) (T(M)) n(s)] n(s) \bar{n}(s) \end{array} \right] v. \end{aligned}$$

Posons

$$T_{ss} = \bar{\tau}(s) (T(M)) \tau(s),$$

$$T_{ns} = \bar{n}(s) (T(M)) \tau(s),$$

$$T_{sn} = \bar{\tau}(s) (T(M)) n(s),$$

$$T_{nn} = \bar{n}(s) (T(M)) n(s).$$

On a alors la décomposition suivante

$$T = T_{\tau\tau} \tau(s) \bar{\tau}(s) + T_{n\tau} n(s) \bar{\tau}(s) + T_{\tau n} \tau(s) \bar{n}(s) + T_{nn} n(s) \bar{n}(s).$$

**Décomposition du tenseur des déformations et des contraintes sur  $\Omega_+^\delta$ .**

Soit  $v$  un champ de vecteurs défini sur  $\Omega_+^\delta$ . Le tenseur  $\gamma(v)$  se décompose dans le repère local sous la forme suivante :

$$\begin{aligned}\gamma &= \gamma_{\tau\tau}\tau\tau. + \gamma_{\tau n}\tau n. + \gamma_{n\tau}n\tau. + \gamma_{nn}nn. \\ &= \begin{pmatrix} \gamma_{\tau\tau}(u, \omega) & \gamma_{n\tau}(u, \omega) \\ \gamma_{\tau n}(u, \omega) & \gamma_{nn}(u, \omega) \end{pmatrix},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\gamma_{\tau\tau}(u, \omega) &= \frac{1}{1+zR(s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} u_\tau(s, z) + u_n(s, z) R(s) \right), \\ \gamma_{n\tau}(u, \omega) &= \frac{1}{1+zR(s)} \left( \frac{\partial}{\partial s} u_n(s, z) - R(s) u_\tau(s, z) \right) - \omega, \\ \gamma_{\tau n}(u, \omega) &= D_z u_\tau(s, z) + \omega, \\ \gamma_{nn}(u, \omega) &= D_z u_n(s, z).\end{aligned}$$

On en déduit alors la décomposition locale du tenseur des contraintes

$$\begin{aligned}\sigma &= \sigma_{\tau\tau}\tau\tau. + \sigma_{n\tau}\tau n. + \sigma_{\tau n}n\tau. + \sigma_{nn}nn. \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_{\tau\tau} & \sigma_{n\tau} \\ \sigma_{\tau n} & \sigma_{nn} \end{pmatrix},\end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\sigma_{\tau\tau}(u, \omega) &= \frac{(2\mu + \lambda)}{1+zR} (D_s u_\tau + u_n R) + \lambda D_z u_n, \\ \sigma_{nn}(u, \omega) &= (2\mu + \lambda) D_z u_n + \frac{\lambda}{1+zR} (D_s u_\tau + u_n R), \\ \sigma_{\tau n}(u, \omega) &= (\mu + \alpha) \left[ \frac{1}{1+zR} (D_s u_n - R u_\tau) - \omega \right] + (\mu - \alpha) (D_z u_\tau + \omega),\end{aligned}$$

et

$$\sigma_{ns}(u, \omega) = (\mu + \alpha) (D_z u_s + \omega) + (\mu - \alpha) \left[ \frac{1}{1+zR} (D_s u_n - R u_s) - \omega \right].$$

**Intégration sur  $\Omega_+^\delta$ .**

Si  $f$  est une fonction scalaire définie sur  $\Omega_+^\delta$ , alors

$$\int_{\Omega_+^\delta} f(M) d\Omega_+^\delta = \int_{\Sigma} \int_0^\delta f(s, z) (1 + zR) ds dz.$$

**Ecriture du système dans la couche mince.**

Le système

$$\begin{cases} D_1\sigma_{+11}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+21}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0 \text{ dans } \Omega_+^\delta, \\ D_1\sigma_{+12}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) + D_2\sigma_{+22}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0 \text{ dans } \Omega_+^\delta, \end{cases}$$

s'écrit dans le système de coordonnées locaux sous la forme:

$$\begin{aligned} D_s\sigma_{+\tau\tau} + R\sigma_{+\tau n} + D_z[(1 + zR)\sigma_{+n\tau}] &= 0 \text{ dans } \Omega_+^\delta, \\ D_s\sigma_{+\tau n} - R\sigma_{+\tau\tau} + D_z[(1 + zR)\sigma_{+nn}] &= 0 \text{ dans } \Omega_+^\delta. \end{aligned}$$

L'équation

$$\operatorname{div}[(\nu_+ + \epsilon_+)\nabla\omega_+^\delta] + \sigma_{+12} - \sigma_{+21} = 0 \text{ dans } \Omega_+^\delta,$$

donne

$$(\nu_+ + \epsilon_+) \left[ \begin{array}{l} \frac{1}{(1+zR)} D_s \left[ \frac{1}{1+zR(s)} D_s \omega_+^\delta \right] \\ + \frac{1}{(1+zR)} D_z [(1 + zR) D_z \omega_+^\delta] \end{array} \right] + \sigma_{+\tau n} - \sigma_{+n\tau} = 0 \text{ dans } \Omega_+^\delta.$$

Conditions aux limites sur  $\Gamma_+$

$$\begin{cases} \sigma_{n\tau}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ \sigma_{nn}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_z \omega_+^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_+. \end{cases}$$

Conditions de transmission sur  $\Sigma$

$$\begin{cases} u_+^\delta = u_-^\delta \text{ sur } \Sigma, \\ \omega_+^\delta = \omega_-^\delta \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{+n\tau}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = \sigma_{-n\tau}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{+nn}(u_+^\delta, \omega_+^\delta) = \sigma_{-nn}(u_-^\delta, \omega_-^\delta) \text{ sur } \Sigma, \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_z \omega_+^\delta = (\nu_- + \epsilon_-) D_z \omega_-^\delta \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

## 4.4 Condition d'impédance approchée par le développement de Taylor

- La première étape pour l'obtention d'une condition d'impédance approchée consiste à écrire les conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$  en utilisant un développement de Taylor par rapport à  $\delta$

$$\sigma_{+n\tau}(\delta) = \sigma_{+n\tau}(0) + \delta D_z \sigma_{+n\tau}(0) + \dots$$

$$\sigma_{+nn}(\delta) = \sigma_{+nn}(0) + \delta D_z \sigma_{+nn}(0) + \dots$$

$$D_z \omega_+(\delta) = D_z \omega_+(0) + \delta D_z^2 \omega_+(0) + \dots$$

- La clé dans l'obtention d'une condition aux limites approchée est le fait que les dérivés normales des  $\sigma_{+n\tau}$ ,  $\sigma_{+nn}$  et  $D_z \omega_+$  sur  $\Sigma$  s'expriment explicitement en fonctions des traces des  $\sigma_{+n\tau}$ ,  $\sigma_{+nn}$  et des traces des déplacements et des rotations sur  $\Sigma$ .

On a

$$\sigma_{+nn} = (2\mu_+ + \lambda_+) D_z u_{+n}^\delta + \frac{\lambda_+}{1 + zR} (D_s u_{+\tau}^\delta + u_{+n}^\delta R),$$

$$\sigma_{+n\tau} = (\mu_+ + \alpha_+) (D_z u_{+\tau}^\delta + \omega_+^\delta) + (\mu_+ - \alpha_+) \left[ \frac{1}{1 + zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta) - \omega_+^\delta \right],$$

d'où l'on tire

$$D_z u_{+n}^\delta = \frac{1}{(2\mu_+ + \lambda_+)} \left[ \sigma_{+nn} - \frac{\lambda_+}{1 + zR} (D_s u_{+\tau}^\delta + u_{+n}^\delta R) \right],$$

$$D_z u_{+\tau}^\delta = \frac{1}{(\mu_+ + \alpha_+)} \sigma_{+n\tau} - \frac{2\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \omega_+^\delta - \frac{(\mu_+ - \alpha_+)}{(\mu_+ + \alpha_+)} \frac{1}{1 + zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} \sigma_{+\tau\tau} &= \frac{(2\mu_+ + \lambda_+)}{1 + zR} (D_s u_{+\tau}^\delta + u_{+n}^\delta R) + \lambda D_z u_{+n}^\delta \\ &= \frac{4\mu_+ (\mu_+ + \lambda_+)}{(2\mu_+ + \lambda_+)} \frac{1}{1 + zR} (D_s u_{+\tau}^\delta + u_{+n}^\delta R) + \frac{\lambda_+}{(2\mu_+ + \lambda_+)} \sigma_{+nn}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_{+\tau n} &= (\mu_+ + \alpha_+) \left[ \frac{1}{1+zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta) - \omega_+^\delta \right] + (\mu_+ - \alpha_+) (D_z u_{+\tau}^\delta + \omega_+^\delta) \\ &= \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \frac{1}{1+zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta - (1+zR)\omega_+^\delta) + \frac{(\mu_+ - \alpha_+)}{(\mu_+ + \alpha_+)} \sigma_{+n\tau},\end{aligned}$$

et donc

$$\sigma_{+\tau n} - \sigma_{+n\tau} = \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \frac{1}{1+zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta - (1+zR)\omega_+^\delta) - \frac{2\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \sigma_{+n\tau}.$$

Des équations d'équilibre dans  $\Omega_+^\delta$ , on tire alors

$$\begin{aligned}D_z \sigma_{+n\tau} &= -\frac{R}{(1+zR)} \left[ \frac{4\alpha_+ \mu_+}{\mu_+ + \alpha_+} \frac{1}{1+zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta) \right. \\ &\quad \left. - \frac{4\alpha_+ \mu_+}{\mu_+ + \alpha_+} \omega_+^\delta + \frac{2\mu_+}{\mu_+ + \alpha_+} \sigma_{+n\tau} \right] \\ &\quad - \frac{1}{(1+zR)} D_s \left[ \frac{4\mu_+ (\lambda_+ + \mu_+)}{\lambda_+ + 2\mu_+} \frac{1}{1+zR} (D_s u_{+\tau}^\delta + u_{+n}^\delta R) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\lambda_+}{\lambda_+ + 2\mu_+} \sigma_{+nn} \right],\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}D_z \sigma_{+nn} &= -\frac{1}{(1+zR)} \frac{4\alpha_+ \mu_+}{\mu_+ + \alpha_+} D_s \left[ \frac{1}{1+zR} (D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta - (1+zR)\omega_+^\delta) \right] \\ &\quad + \frac{R}{(1+zR)^2} \frac{4\mu_+ (\lambda_+ + \mu_+)}{\lambda_+ + 2\mu_+} (D_s u_{+\tau}^\delta + u_{+n}^\delta R) - \frac{2\mu_+}{\lambda_+ + 2\mu_+} \frac{R}{(1+zR)} \sigma_{+nn} \\ &\quad - \frac{1}{(1+zR)} \frac{\mu_+ - \alpha_+}{\mu_+ + \alpha_+} D_s \sigma_{+n\tau},\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}D_z^2 \omega_+^\delta &= -\frac{1}{(1+zR)} \left[ D_s \left( \frac{1}{1+zR} \frac{\partial \omega_+^\delta}{\partial s} \right) + R D_z \omega_+^\delta \right] + \frac{1}{(\nu_+ + \epsilon_+)} \frac{2\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \sigma_{+n\tau} \\ &\quad - \frac{1}{\nu_+ + \epsilon_+} \frac{1}{1+zR} [D_s u_{+n}^\delta - R u_{+\tau}^\delta - (1+zR)\omega_+^\delta].\end{aligned}$$

En utilisant la formule de Taylor et les conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$ , on obtient

$$(T_{*\delta}) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{-n\tau} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = \delta \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} D_s (D_s u_{-*\tau}^\delta + u_{-*n}^\delta R) \\ \quad + \delta \frac{4\alpha\mu}{\mu+\alpha} R (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \quad \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_{-nn} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = -\delta R \frac{4\mu(\lambda+\mu)}{\lambda+2\mu} (D_s u_{-*\tau}^\delta + u_{-*n}^\delta R) \\ \quad + \delta \frac{4\alpha\mu}{\mu+\alpha} D_s (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \quad \text{sur } \Sigma, \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_z \omega_{-*}^\delta = \delta (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) \\ \quad + \delta (\nu_+ + \epsilon_+) D_s^2 \omega_{-*}^\delta \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

#### 4.4.1 Problème d'impédance approchée

Le problème aux limites de transmission peut être approché par le problème aux limites d'impédance suivant :

$$(P_{-*}^\delta) \left\{ \begin{array}{l} D_1 \sigma_{-11} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-21} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1 \sigma_{-12} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) + D_2 \sigma_{-22} (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) = f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-) (D_1^2 + D_2^2) \omega_{-*}^\delta \\ + 2\alpha_- (D_1 u_{-*2}^\delta - D_2 u_{-*1}^\delta) - 4\alpha_- \omega_{-*}^\delta = g_- \text{ dans } \Omega_-, \\ u_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \omega_{-*}^\delta = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ T_{*\delta} \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

### 4.5 Condition d'impédance approchée par le développement asymptotique

Ici, on utilise les techniques de développement asymptotique avec changement d'échelle pour obtenir la même impédance approchée  $T_{*\delta}$  obtenue dans la section 2. L'impédance approchée  $T_{*\delta}$  peut être construite par un développement asymptotique par rapport à l'épaisseur  $\delta$  de la couche mince  $\Omega_+^\delta$  comme suit:

#### 4.5.1 Changement d'échelle

Afin de construire le développement asymptotique de la solution du problème, nous effectuons une dilatation normale de la couche  $\Omega_+^\delta$  de rapport  $\delta^{-1}$ . On pose  $\Omega_+ = \Sigma \times ]0, 1[$ ,  $\Gamma_+ = \{1\} \times ]0, 1[$  et on définit la fonction  $(u_{+\tau}^\delta, u_{+n}^\delta)$  par

$$\begin{aligned} \tilde{u}_+^\delta : \Omega_+ &\rightarrow \mathbb{R}^2 \\ (s, z) &\mapsto (u_{+\tau}^\delta(s, \delta z), \delta u_{+n}^\delta(s, \delta z)) \\ \tilde{\omega}_+^\delta : \Omega_+ &\rightarrow \mathbb{R} \\ (s, z) &\mapsto \omega_+^\delta(s, \delta z). \end{aligned}$$

Comme on a

$$\begin{aligned}\tilde{u}_{+\tau}^\delta(s, z) &= u_{+\tau}^\delta(s, \delta z), \\ \tilde{u}_{+n}^\delta(s, z) &= \delta u_{+n}^\delta(s, \delta z),\end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned}D_s u_{+\tau}^\delta(s, z) &= D_s \tilde{u}_{+\tau}^\delta(s, z), \\ D_z u_{+\tau}^\delta(s, z) &= \frac{1}{\delta} D_z \tilde{u}_{+\tau}^\delta(s, z), \\ D_s u_{+n}^\delta(s, z) &= \frac{1}{\delta} D_s \tilde{u}_{+n}^\delta(s, z), \\ D_z u_{+n}^\delta(s, z) &= \frac{1}{\delta^2} D_z \tilde{u}_{+n}^\delta(s, z), \\ D_z \omega_+^\delta(s, z) &= \frac{1}{\delta} D_z \tilde{\omega}_+^\delta(s, z)\end{aligned}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned}\sigma_{+\tau\tau}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) &= \frac{2\mu_+ + \lambda_+}{1 + \delta z R} \left[ D_s \left( (1 + \delta z R) \tilde{u}_{+\tau}^\delta + \frac{\tilde{u}_{+n}^\delta}{\delta} R \right) + \lambda_+ \frac{1}{\delta^2} D_z \tilde{u}_{+n}^\delta \right], \\ \sigma_{+nn}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) &= \frac{(2\mu_+ + \lambda_+)}{\delta^2} D_z \tilde{u}_{+n}^\delta + \frac{\lambda_+}{1 + \delta z R} \left[ D_s \left( (1 + \delta z R) \tilde{u}_{+\tau}^\delta + \frac{\tilde{u}_{+n}^\delta}{\delta} R \right) \right], \\ \sigma_{+\tau n}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) &= (\mu_+ + \alpha_+) \left[ \frac{1}{\delta(1 + \delta z R)} D_s \tilde{u}_{+n}^\delta - R \tilde{u}_{+\tau}^\delta \right] \\ &\quad + (\mu_+ - \alpha_+) \left[ \frac{1}{\delta} D_z \left( (1 + \delta z R) \tilde{u}_{+\tau}^\delta \right) \right] - 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta,\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_{+n\tau}(\tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta) &= (\mu_+ - \alpha_+) \left[ \frac{1}{\delta(1 + \delta z R)} D_s \tilde{u}_{+n}^\delta - R \tilde{u}_{+\tau}^\delta \right] \\ &\quad + (\mu_+ + \alpha_+) \left[ \frac{1}{\delta} D_z \left( (1 + \delta z R) \tilde{u}_{+\tau}^\delta \right) \right] + 2\alpha_+ \tilde{\omega}_+^\delta.\end{aligned}$$

Alors les équations d'équilibre dans la couche mince  $\Omega_+^\delta$ , les conditions aux limites sur  $\Gamma_+^\delta$  et les conditions de transmission sur  $\Sigma$  deviennent:



a) Les équations dans  $\Omega_+$

$$(E_1) \quad D_s \sigma_{+\tau\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) + R \sigma_{+\tau n} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) + D_z \frac{\partial}{\partial z} \left[ (1 + \delta z R) \sigma_{+n\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) \right] = 0,$$

$$(E_2) \quad D_s \sigma_{+n\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) - R \sigma_{+\tau\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) + \frac{1}{\delta} D_z \left[ (1 + \delta z R) \sigma_{+nn} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) \right] = 0,$$

$$(E_3) \quad (\nu_+ + \epsilon_+) \left[ \begin{array}{c} D_s \left( \frac{1}{1 + \delta y R} D_s \tilde{\omega}_+^\delta \right) \\ + \frac{1}{\delta^2} D_z \left( (1 + \delta z R) D_z \tilde{\omega}_+^\delta \right) \end{array} \right] + (1 + \delta z R) \left[ \sigma_{+n\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) - \sigma_{+n\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) \right] = 0,$$

b) Conditions aux limites sur  $\Gamma_+$

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_{+n\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+, \\ \sigma_{+nn} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+, \\ D_z \tilde{\omega}_+^\delta = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+. \end{array} \right.$$

d) Conditions de transmission sur  $\Sigma$

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{u}_{+\tau}^\delta = \tilde{u}_{-\tau}^\delta \quad \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{u}_{+n}^\delta = \delta \tilde{u}_{-n}^\delta \quad \text{sur } \Sigma, \\ \tilde{\omega}_+^\delta = \tilde{\omega}_-^\delta \quad \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_{+n\tau} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) = \sigma_{-n\tau} \left( \tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta \right) \quad \text{sur } \Sigma, \\ \sigma_{+nn} \left( \tilde{u}_+^\delta, \tilde{\omega}_+^\delta \right) = \sigma_{-nn} \left( \tilde{u}_-^\delta, \tilde{\omega}_-^\delta \right) \quad \text{sur } \Sigma, \\ \frac{(\nu_+ + \epsilon_+)}{\delta} D_z \tilde{\omega}_+^\delta = (\nu_- + \epsilon_-) D_z \tilde{\omega}_-^\delta \quad \text{sur } \Sigma. \end{array} \right.$$

## 4.5.2 Développement asymptotique

On écrit le développement de la solution  $(\tilde{u}^\delta, \tilde{\omega}^\delta)$  du problème de transmission en puissance de  $\delta$  sous la forme

$$\tilde{u}_-^\delta = u_-^\delta = u_-^0 + \delta u_-^1 + \delta^2 u_-^2 + \dots,$$

$$\tilde{\omega}_-^\delta = \omega_-^\delta = \omega_-^0 + \delta \omega_-^1 + \delta^2 \omega_-^2 + \dots,$$

$$\tilde{u}_+^\delta = \tilde{u}_+^0 + \delta \tilde{u}_+^1 + \delta^2 \tilde{u}_+^2 + \dots,$$

$$\tilde{\omega}_+^\delta = \tilde{\omega}_+^0 + \delta \tilde{\omega}_+^1 + \delta^2 \tilde{\omega}_+^2 + \dots,$$

où  $\tilde{u}_+^k, \tilde{\omega}_+^k, u_-^k, \omega_-^k, k \geq 0$  sont indépendants de  $\delta$ . En injectant ce développement asymptotique dans le problème de transmission et en identifiant les coefficients de même

puissance de  $\delta$ , on obtient une hiérarchie de problèmes aux limites qui nous permet de calculer les termes d'ordre 0, d'ordre 1 et d'ordre 2 comme suit :

### Calcul du terme d'ordre 0

\*Détermination de  $\tilde{u}_{+n}^0$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_2)_{-3} \quad 0 = D_z [(2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^0] \text{ dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+2})_{-2} \quad (2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_5)_0 \quad \tilde{u}_{+n}^0 = 0 \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et donc

$$(2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^0 = 0 \text{ dans } \Omega_+,$$

ce qui donne

$$\tilde{u}_{+n}^0 = 0 \text{ dans } \Omega_+.$$

\*Détermination de  $\tilde{u}_{+\tau}^0$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_1)_{-2} \quad 0 = D_z [(\mu_+ + \alpha_+) D_z \tilde{u}_{+\tau}^0] \text{ dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+1})_{-1} \quad (\mu_+ + \alpha_+) D_z \tilde{u}_{+\tau}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_4)_0 \quad \tilde{u}_{+\tau}^0 = \tilde{u}_{-\tau}^0 \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et donc

$$(\mu_+ + \alpha_+) D_z \tilde{u}_{+\tau}^0 = 0 \text{ dans } \Omega_+,$$

ce qui donne

$$\tilde{u}_{+\tau}^0 = u_{-\tau}^0 (s, 0) \text{ dans } \Omega_+.$$

\*Détermination de  $\tilde{\omega}_+^0$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_3)_{-2} \quad 0 = (\nu_+ + \epsilon_+) D_z^2 \tilde{\omega}_+^0 \text{ dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+3})_0 \quad D_z \tilde{\omega}_+^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_6)_0 \quad \tilde{\omega}_+^0 = \omega_-^0 \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et donc

$$\tilde{\omega}_+^0 (s, z) = \omega_-^0 (s, 0) \text{ dans } \Omega_+.$$

### Calcul du terme d'ordre 1

\*Détermination de  $\tilde{u}_{+n}^1$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_2)_{-2} \quad 0 = (2\mu_+ + \lambda_+) D_z^2 \tilde{u}_{+n}^1 \text{ dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+2})_{-1} \quad (2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_5)_1 \quad \tilde{u}_{+n}^1 = u_{-n}^0 \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et donc

$$\tilde{u}_{+n}^1(s, z) = u_{-n}^0(s, 0) \text{ dans } \Omega_+.$$

\*Détermination de  $\tilde{u}_{+\tau}^1$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_1)_{-1} \quad 0 = D_z^2 (\tilde{u}_{+\tau}^1 + zR\tilde{u}_{+\tau}^0) \text{ dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+1})_0 \quad D_z (\tilde{u}_{+\tau}^1 + zR\tilde{u}_{+\tau}^0) \\ = \frac{-2\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} \tilde{\omega}_+^0 - \frac{(\mu_+ - \alpha_+)}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_s \tilde{u}_{-n}^0 - R\tilde{u}_{-\tau}^0) \text{ sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_4)_k \quad \tilde{u}_{+\tau}^1 = u_{-\tau}^1(s, 0) \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

alors

$$\tilde{u}_{+\tau}^1 = z \left[ \frac{-2\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (\omega_-^0 + Ru_{-\tau}^0) - \frac{(\mu_+ - \alpha_+)}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_s u_{-n}^0 \right] + u_{-\tau}^1(s, 0) \text{ dans } \Omega_+.$$

\*Détermination de  $\tilde{\omega}_+^1$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_3)_{-1} \quad 0 = (\nu_+ + \epsilon_+) D_z^2 \tilde{\omega}_+^1 \text{ dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+3})_1 \quad D_z \tilde{\omega}_+^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_6)_1 \quad \tilde{\omega}_+^1 = \omega_-^1 \text{ sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et donc

$$\tilde{\omega}_+^1(s, z) = \omega_-^1(s, 0) \text{ dans } \Omega_+.$$

### Calcul du terme d'ordre 2

\*Détermination de  $\tilde{u}_{+n}^2$

On a

$$\left\{ \begin{array}{l} (DE_2)_{-1} \quad 0 = (D_z^2 \tilde{u}_{+n}^2) = 0 \quad \text{dans } \Omega_+, \\ (DCL\Gamma_{+2})_0 \quad \left( \begin{array}{l} (2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^2 \\ + \lambda_+ (R\tilde{u}_{+n}^1 + D_s \tilde{u}_{+n}^0 - zR^2 \tilde{u}_{+n}^0) \end{array} \right) = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+, \\ (DCT\Sigma_5)_2 \quad \tilde{u}_{+n}^2 = u_{-n}^1(s, 0) \quad \text{sur } \Sigma, \end{array} \right.$$

et donc

$$\tilde{u}_{+n}^2 = -\frac{\lambda_+ z}{(2\mu_+ + \lambda_+)} (Ru_{-n}^0 + D_s u_{-n}^0) + u_{-n}^1(0) \quad \text{dans } \Omega_+.$$

### Calcul de l'impédance

Le développement asymptotique de  $(E_1)$  à l'ordre 0 donne

$$\begin{aligned} & (DE_1)_0 \quad \frac{4\mu_+ (\mu_+ + \lambda_+)}{(2\mu_+ + \lambda_+)} D_s (u_{-n}^0 R + D_s u_{-n}^0(s, 0)) \\ & + R \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_s u_{-n}^0 - Ru_{+n}^0 - \omega_-^0) \\ & + D_z \left\{ \begin{array}{l} (\mu_+ + \alpha_+) [D_z (\tilde{u}_{+n}^2 + zR\tilde{u}_{+n}^1) + \tilde{\omega}_+^1] \\ (\mu_+ - \alpha_+) [D_s \tilde{u}_{+n}^2 - zRD_s \tilde{u}_{+n}^1 - R\tilde{u}_{+n}^1 - \tilde{\omega}_+^1] \end{array} \right\} \\ & = 0, \end{aligned}$$

et on sait que d'après le développement asymptotique de la première condition aux limites sur  $\Gamma_+$  à l'ordre 0 que

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu_+ + \alpha_+) \left[ \frac{\partial}{\partial y} (\tilde{u}_{+n}^2 + yR\tilde{u}_{+n}^1) + \tilde{\omega}_+^1 \right] \\ (\mu_+ - \alpha_+) \left[ \frac{\partial \tilde{u}_{+n}^2}{\partial s} - yR \frac{\partial \tilde{u}_{+n}^1}{\partial s} - R\tilde{u}_{+n}^1 - \tilde{\omega}_+^1 \right] \end{array} \right\} = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+,$$

et d'après la première condition de transmission d'ordre 0 on a

$$\left\{ \begin{array}{l} (\mu_+ + \alpha_+) [D_z (\tilde{u}_{+n}^2 + zR\tilde{u}_{+n}^1) + \tilde{\omega}_+^1] \\ (\mu_+ - \alpha_+) [D_s \tilde{u}_{+n}^2 - zRD_s \tilde{u}_{+n}^1 - R\tilde{u}_{+n}^1 - \tilde{\omega}_+^1] \end{array} \right\} = \sigma_{n\tau} (u_-^1, \omega_-^1) \quad \text{sur } \Sigma,$$

alors en faisant une intégration par partie dans  $(DE_1)_0$ , on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{-n\tau}(u_-^1, \omega_-^1) &= \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{(2\mu_+ + \lambda_+)} D_s (u_{-n}^0 R + D_s u_{-\tau}^0) \\ &\quad + R \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_s u_{-n}^0 - R u_{-\tau}^0(s, 0) - \omega_-^0(s, 0)) \quad \text{sur } \Sigma.\end{aligned}$$

Aussi le développement asymptotique de  $(E_2)$  à l'ordre 0 donne

$$\begin{aligned}(DE_2)_0 & D_s \left[ \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_s u_{-n}^0 - R u_{-\tau}^0 - \omega_-^0) \right] \\ & - R \left[ \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{(2\mu_+ + \lambda_+)} (R u_{-n}^0 + D_s u_{-\tau}^0) \right] \\ & + D_z \left[ \begin{array}{c} (2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^3 + \\ + \lambda_+ (D_s (\tilde{u}_{+\tau}^1 + z R \tilde{u}_{+\tau}^0) + R \tilde{u}_{+n}^2) \\ - \lambda_+ z R [R \tilde{u}_{+n}^1 + D_s \tilde{u}_{+\tau}^0] \end{array} \right] \\ & = 0,\end{aligned}$$

et on sait que d'après le développement asymptotique de la deuxième condition aux limites sur  $\Gamma_+$  à l'ordre 0 que

$$\left[ \begin{array}{c} (2\mu_+ + \lambda_+) \frac{\partial}{\partial z} u_{+n}^3 + \\ + \lambda_+ \left( \frac{\partial}{\partial s} (u_{+\tau}^1 + z R u_{+\tau}^0) + R u_{+n}^2 \right) \\ - \lambda_+ z R (R u_{+n}^1 + D_s u_{+\tau}^0) \end{array} \right] = 0 \quad \text{sur } \Gamma_+,$$

et d'après la deuxième condition de transmission d'ordre 0 on sait que

$$\sigma_{-mn}(u_-^1, \omega_-^1) = \left[ \begin{array}{c} (2\mu_+ + \lambda_+) D_z \tilde{u}_{+n}^3 + \\ + \lambda_+ (D_s (\tilde{u}_{+\tau}^1 + z R \tilde{u}_{+\tau}^0) + R \tilde{u}_{+n}^2) \\ - \lambda_+ z R [R \tilde{u}_{+n}^1 + D_s \tilde{u}_{+\tau}^0] \end{array} \right] \quad \text{sur } \Sigma,$$

alors en faisant une intégration par partie dans  $(DE_2)_0$ , on obtient

$$\begin{aligned}\sigma_{-mn}(u_-^1, \omega_-^1) &= \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} D_s (D_s u_{-n}^0 - R u_{-\tau}^0 - \omega_-^0) \\ &\quad - R \frac{4\mu_+(\mu_+ + \lambda_+)}{(2\mu_+ + \lambda_+)} (R u_{-n}^0 + D_s u_{-\tau}^0) \quad \text{sur } \Sigma.\end{aligned}$$

De même façon, par la troisième équation ( $E_3$ ), on obtient que

$$\begin{aligned} (\nu_- + \epsilon_-) D_z \omega_-^1 &= (\nu_+ + \epsilon_+) D_s^2 \omega_-^0 \\ &+ \frac{4\alpha_+ \mu_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_s u_{-n}^0 - R u_{-\tau}^0 - \omega_-^0) \quad \text{sur } \Sigma. \end{aligned}$$

## 4.6 Etude du problème d'impédance approchée

Ici, on établit un résultat d'existence et d'unicité et on montre un résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée ( $P_{-*}^\delta$ ) dans  $\Omega_-$ , ainsi on détermine les premiers termes du développement asymptotique de sa solution.

### 4.6.1 Formulation faible

L'espace pour étudier le problème d'impédance ( $P_{-*}^\delta$ ) est:

$$V_* = \left\{ \begin{array}{l} (v_{-*}, \varphi_{-*}) \in \mathbb{H}^1(\Omega_-) \times H^1(\Omega_-); \\ (D_s v_{-*\tau}, D_s v_{-*n}) \in \mathbb{L}^2(\Sigma), \quad D_s \varphi_{-*} \in L^2(\Sigma), \\ v_{-*} = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \quad \varphi_{-*} = 0 \text{ sur } \Gamma_- \end{array} \right\}.$$

Soit

$$\begin{aligned} a^-(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_{-*}, \varphi_{-*}) &= \int_{\Omega_-} \left[ \begin{array}{l} \sigma_{-11}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-11}(v_{-*}, \varphi_{-*}) \\ + \sigma_{-21}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-21}(v_{-*}, \varphi_{-*}) \\ + \sigma_{-12}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-12}(v_{-*}, \varphi_{-*}) \\ + \sigma_{-22}(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \gamma_{-22}(v_{-*}, \varphi_{-*}) \\ + (\nu_- + \epsilon_-) \left( \begin{array}{l} D_1 \omega_{-*}^\delta D_1 \varphi_{-*} \\ + D_2 \omega_{-*}^\delta D_2 \varphi_{-*} \end{array} \right) \end{array} \right] d\Omega_- \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_{-*}, \varphi_{-*})] &= \\ &\int_\Sigma \frac{4\mu_+ (\mu_+ + \lambda_+)}{(2\mu_+ + \lambda_+)} (D_s u_{-*\tau}^\delta(s, 0) + u_{-*n}^\delta R) (D_s v_{-*\tau} + R v_{-*n}) d\Sigma \\ &+ \int_\Sigma \frac{4\mu_+ \alpha_+}{(\mu_+ + \alpha_+)} (D_s u_{-*n}^\delta - R u_{-*\tau}^\delta - \omega_{-*}^\delta) (D_s v_{-*n} - R v_{-*\tau} - \varphi_{-*}) d\Sigma \\ &+ \int_\Sigma (\nu_+ + \epsilon_+) D_s \omega_{-*}^\delta D_s \varphi_{-*} d\Sigma \end{aligned}$$

Le problème de l'impédance approchée ( $P_{-*}^\delta$ ) a la formulation faible suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta) \in V_* \text{ tel que } \forall (v_-, \varphi_-) \in V_* : \\ a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] + \delta a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] \\ = \int_{\Omega_-} f_- \cdot v_{-*} + g_- \cdot \varphi_{-*} \end{array} \right.$$

### 4.6.2 Résultat de stabilité pour le problème d'impédance approchée

On a le résultat suivant.

**Théorème 4.6.1** *Soit  $L_\delta$  une forme linéaire continue sur  $V_*$  telle que*

$$|l_\delta(v_{-*}, \varphi_{-*})| \leq l_\delta \left[ \begin{array}{l} \|v_{-*}\|_{H^1(\Omega_-)} + \|\omega_{-*}\|_{H^1(\Omega_-)} + \sqrt{\delta} \|D_s v_{-*\tau} + Rv_{-*n}\|_{L^2(\Sigma)} \\ + \sqrt{\delta} \|D_s v_{-*n} - Rv_{-*\tau} - \varphi_{-*}\|_{L^2(\Sigma)} + \sqrt{\delta} \|D_s \varphi_{-*}\|_{L^2(\Sigma)} \end{array} \right]$$

où  $l_\delta$  est une fonction de  $\delta > 0$ , peut-être pas bornée quand  $\delta$  tend vers 0. Alors il existe  $C > 0$  (indépendante de  $\delta$ ) telle que la solution  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  du problème

$$\left\{ \begin{array}{l} a^- [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] + \delta a_\Sigma [(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta), (v_-, \varphi_-)] \\ = \int_{\Omega_-} f_- \cdot v_{-*} + g_- \cdot \varphi_{-*} \text{ pour tout } (v_-, \varphi_-) \in V_* \end{array} \right.$$

satisfait les estimations suivantes:

$$\begin{aligned} \|u_{-*}^\delta\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \|\omega_{-*}^\delta\|_{H^1(\Omega_-)} &\leq Cl_\delta, \\ \left( \|D_s v_{-*\tau} + Rv_{-*n}\|_{L^2(\Sigma)} + \|D_s v_{-*n} - Rv_{-*\tau} - \varphi_{-*}\|_{L^2(\Sigma)} \right. \\ &\quad \left. + \|D_s \varphi_{-*}\|_{L^2(\Sigma)} \right) \leq C\delta^{-1/2} l_\delta. \end{aligned}$$

### 4.6.3 Développement asymptotique

On pose

$$\begin{aligned} u_{-*}^\delta &= u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1 + \delta^2 u_{-*}^2 + \dots, \\ \omega_{-*}^\delta &= \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1 + \delta^2 \omega_{-*}^2 + \dots \end{aligned}$$

en injectant le développement asymptotique dans le problème  $(P_{-*}^\delta)$ , on obtient une hiérarchie d'équations et de conditions aux limites. À l'ordre 0, on a

$$(E_-)_{*0} \begin{cases} D_1\sigma_{-11}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) + D_2\sigma_{-21}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = -f_{-1} \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1\sigma_{-12}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) + D_2\sigma_{-22}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = -f_{-2} \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2)\omega_{-*}^0 \\ \quad + 2\alpha_-(D_1u_{-*2}^0 - D_2u_{-*1}^0) - 4\alpha_-\omega_{*-*}^0 = -g_- \text{ dans } \Omega_-. \end{cases}$$

$$(CL\Gamma_-)_{*0} \begin{cases} u_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Gamma_-. \end{cases}$$

$$(CL\Sigma)_{*0} \begin{cases} \sigma_{-n\tau}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ \sigma_{-nn}(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0) = 0 \text{ sur } \Sigma, \\ D_z\omega_{-*}^0 = 0 \text{ sur } \Sigma. \end{cases}$$

À l'ordre 1, on a

$$(E_-)_{*1} \begin{cases} D_1\sigma_{-11}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) + D_2\sigma_{-21}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ D_1\sigma_{-12}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) + D_2\sigma_{-22}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = 0 \text{ dans } \Omega_-, \\ (\nu_- + \epsilon_-)(D_1^2 + D_2^2)\omega_{-*}^1 \\ \quad + 2\alpha_-(D_1u_{-*2}^1 - D_2u_{-*1}^1) - 4\alpha_-\omega_{*-*}^1 = 0 \text{ dans } \Omega_-. \end{cases}$$

$$(CL\Gamma_-)_{*1} \begin{cases} u_{-*}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-, \\ \omega_{-*}^1 = 0 \text{ sur } \Gamma_-. \end{cases}$$

$$(CL\Sigma)_{*1} \begin{cases} \sigma_{-n\tau}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) \\ = \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{(2\mu_+\lambda_+)} \frac{\partial}{\partial s} (u_{-*n}^0 R + D_s u_{-*\tau}^0) \\ \quad + R \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_+\alpha_+)} \left( \frac{\partial}{\partial s} u_{-*n}^0 - R u_{-*\tau}^0 - \omega_{-*}^0 \right) \text{ sur } \Sigma. \\ \sigma_{-nn}(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1) = \frac{4\mu_+\alpha_+}{(\mu_+\alpha_+)} D_s (D_s u_{-*n}^0 - R u_{-*\tau}^0 - \omega_{-*}^0) \\ \quad - R \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{(2\mu_+\lambda_+)} (R u_{-*n}^0 + D_s u_{-*\tau}^0) \text{ sur } \Sigma \\ (\nu_- + \epsilon_-) D_z \omega_{-*}^1 = (\nu_+ + \epsilon_+) D_s^2 \omega_{-*}^0 \\ \quad + \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} (D_s u_{-*n}^0 - R u_{-*\tau}^0 - \omega_{-*}^0) \text{ sur } \Sigma \end{cases}$$



#### 4.6.4 Estimation d'erreur pour le problème d'impédance approchée

On pose

$$u_{-*}^{(\delta,1)} = u_{-*}^0 + \delta u_{-*}^1, \quad \omega_{-*}^{(\delta,1)} = \omega_{-*}^0 + \delta \omega_{-*}^1,$$

$$\begin{aligned} & a^- \left[ \left( u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)}, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right), (v_{-*}, \varphi_{-*}) \right] \\ & + \delta a_\Sigma \left[ \left( u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)}, \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right), (v_{-*}, \varphi_{-*}) \right] = L_\delta (v_{-*}, \varphi_{-*}) \end{aligned}$$

et on utilise les équations et les conditions aux limites satisfaites par  $(u_{-*}^0, \omega_{-*}^0)$  et  $(u_{-*}^1, \omega_{-*}^1)$ .

On obtient

$$|L_\delta (v_{-*}, \varphi_{-*})| \leq C\delta^{3/2} \left[ \|v_{-*}\|_{H^1(\Omega_-)} + \|\omega_{-*}\|_{H^1(\Omega_-)} + \sqrt{\delta} \|D_s v_{-*\tau} + Rv_{-*n}\|_{L^2(\Sigma)} \right. \\ \left. + \sqrt{\delta} \|D_s v_{-*n} - Rv_{-*\tau} - \varphi_{-*}\|_{L^2(\Sigma)} + \sqrt{\delta} \|D_s \varphi_{-*}\|_{L^2(\Sigma)} \right],$$

ce qui implique par le résultat de la stabilité (voir théorème 4.6.1) l'estimation d'erreur suivante:

$$\left\| u_{-*}^\delta - u_{-*}^{(\delta,1)} \right\|_{\mathbb{H}^1(\Omega_-)} + \left\| \omega_{-*}^\delta - \omega_{-*}^{(\delta,1)} \right\|_{H^1(\Omega_-)} \leq C\delta^{3/2}.$$

---

# Conclusion

Cette thèse porte sur la modélisation asymptotique de l'impédance d'une couche mince en élasticité asymétrique. La déformation est définie par un champ de déplacements  $u(x)$  et un champ de rotations  $\omega(x)$ . Le tenseur des déformations  $\gamma_{ji}(x)$  n'est pas symétrique (définie à partir de  $u(x)$  et  $\omega(x)$ ). Le tenseur des contraintes de forces  $\sigma_{ji}(x)$  (non symétrique) n'est plus suffisant pour décrire l'équilibre, il faut ajouter le tenseur des couples de forces  $\theta_{ji}(x)$  lié par une loi de comportement au tenseur des couples de torsions-courbures  $\chi_{ji}(x)$  (définie à partir de  $\omega(x)$ ).

Dans cette thèse, on a modélisé de façon approchée l'effet d'une couche mince  $\Omega_+^\delta$  élastique micropolaire linéaire en dimension deux, d'épaisseur  $\delta$  sur un corps  $\Omega_-$ , lorsque tend  $\delta$  vers 0. On a considéré deux cas de géométrie : le cas d'une bande mince et le cas d'une géométrie courbe. Le cas de la bande mince nous a servi de guide dans le cas d'une couche mince courbe.

Dans le cas d'une géométrie plane on a:

$$\begin{aligned}\Omega_- &= \mathbb{R} \times ]-1, 0[, \quad \Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times ]0, \delta[ \\ \Gamma_- &= \mathbb{R} \times \{-1\}, \quad \Sigma = \mathbb{R} \times \{0\}, \quad \Gamma_+^\delta = \mathbb{R} \times \{\delta\} .\end{aligned}$$

et une approximation d'ordre un par rapport à  $\delta$  de l'opérateur d'impédance est donnée par:

$$T_{*\delta} \left( (u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)_{|\Sigma} \right) = \delta \left( \begin{array}{c} \frac{4\mu_+(\mu_+\lambda_+)}{2\mu_+\lambda_+} D_1^2 u_{-*1|\Sigma}^\delta \\ \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} D_1 \left( D_1 u_{-*2|\Sigma}^\delta - \omega_{-*|\Sigma}^\delta \right) \\ (\nu_+ + \epsilon_+) D_1^2 \omega_{-*}^\delta + \frac{4\alpha_+\mu_+}{(\mu_+\alpha_+)} \left( D_1 u_{-*2|\Sigma}^\delta - \omega_{-*|\Sigma}^\delta \right) \end{array} \right)$$

Dans le cas de la géométrie courbe, une formule approchée (d'ordre un par rapport  $\delta$ ) de l'impédance est obtenue par développement asymptotique. Elle fait intervenir des termes dépendant de la courbure du bord  $\Gamma$  (interface entre le milieu  $\Omega_-$  et la couche mince).

Dans la cas d'une couche mince plane on a démontré un résultat d'estimation d'erreur : la norme (dans l'espace naturel d'existence de la solution) de la différence entre la solution  $(u_-^\delta, \omega_-^\delta)$  du problème de transmission et la solution  $(u_{-*}^\delta, \omega_{-*}^\delta)$  du problème d'impédance approchée est en  $O(\delta^2)$ . Mes perspectives sont les suivantes:

**Dimension 2.**

- Estimation d'erreur entre la solution du problème de transmission et la solution du problème d'impédance approchée dans le cas d'une couche mince courbe.
- Géométrie plane et géométrie courbe : chercher des approximations -d'ordre supérieur pour le cas d'une couche mince plane, ainsi pour le cas d'une couche mince courbe.
- Obtention d'une approximation d'ordre trois de l'impédance mécanique par les techniques des équations différentielles abstraites.

**Dimension 3.**

- Obtention d'une approximation d'ordre trois de l'impédance mécanique par les techniques des équations différentielles abstraites.

---

# Bibliographie

- [1] A. Abdallaoui and K. Lemrabet; Mechanical impedance of a thin layer in asymmetric elasticity, *Applied Mathematics and Computation* 316 (2018) 467-479.
- [2] R. Adams; *Sobolev spaces*, Academic press, New York, (1975).
- [3] H. Brezis; *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Masson, Paris, (1983).
- [4] A. Bendali and K. Lemrabet; The effect of a thin coating on the scattering of a time-harmonic wave for the Helmholtz equation, *SIAM J. Appl. Math.* 56 (6) (1996) 1664-1693.
- [5] V. Bonnaillie-Noel, M. Dambrine, F. Hérau and G. Vial; On generalized Ventcel's type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain, *SIAM J. Math. Anal.* 42, n<sup>o</sup>2 (2010) 931–945.
- [6] P.G. Ciarlet; *Mathematical Elasticity, Volume I : Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, (1988).
- [7] E. et F. Cosserat; *Théorie des corps déformables*. Hermann, (1909).
- [8] Ph. Destuynder; *Sur une justification des modèles de plaques minces et de coques par les méthodes asymptotiques*, Thèse de Doctorat d'Etat Es-Sciences, Université Paris VI, Paris, 1980.
- [9] M.P. do Carmo; *Differential Geometry of Curves and Surfaces*, Prentice Hall, 1976.
- [10] Françoise, D. Gilbert; *Espace fonctionnels utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles* 15, rue maleranche, 75005 Paris.
- [11] Y. Kerbrat, J.M. Braemer; *Géométrie des courbes et des surfaces*. Hermann, Paris, 1976.
- [12] W. Kuhnel; *Differential geometry Curves-Surfaces- Manifolds*, Student Math. Library vol. 16, AMS, (2006).
- [13] V. D. Kupradze; *Three-dimensional problems of the mathematical theory of elasticity and thermoelasticity*, Moscow (1975).
- [14] K. Lemrabet; *Etude de divers problèmes aux limites de ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*. Thèse de doctorat d'Etat, U.S.T.H.B, 1987.

- [15] K. Lemrabet and D.E. Teniou; Vibration d'une plaque mince avec raidisseur sur le bord, Maghreb. Math. Rev., vol 2, n<sup>o</sup>1, Juin (1992).
- [16] K. Lemrabet; Probleme aux limites de Ventcel dans un domaine non régulier, C . R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 300 (1985), pp. 531-534.
- [17] K. Lemrabet; Probleme aux limites de Ventcel pour le systeme de l'élasticité dans  $R^3$ , C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I, 304 (1987), pp. 151-154.
- [18] W. Nowacki; Les problèmes dynamiques d'élasticité asymétrique. Académie polonaise des sciences, centre scientifique de Paris, 1970.
- [19] L. Rahmani; Modélisation asymptotique de l'effet dynamique de couche mince en mécanique des structures. Thèse de doctorat, U.S.T.H.B, 2006.
- [20] P.A Raviart, J.M Thomas; Introduction à l'analyse numérique des équations aux dérivées partielles, Masson, Paris, (1988).
- [21] T. B. A Senior; A note on impedance boundary condition, Canad. J. Physics, 40 (1962), pp. 663-665.
- [22] T. B. A. Senior et J. L. Volakis; Derivation and application of a class of generalized boundary conditions, IEEE Trans. Antennas and Propagation, 37 (1989), pp. 1566-1572.
- [23] G. Vial; Analyse multi- échelle et conditions aux limites approchées pour un problème avec couche mince dans un domaine à coin. Thèse de doctorat, Université de Rennes1, juin 2003.