N° d'ordre : 12/2019-D/MT

REPUBLIQUE ALGÉRIENNE DEMOGRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES
Présentée pour l'obtention du grade de Docteur
EN : MATHEMATIQUES
Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : BOUNEBIRAT Fouad

Sujet :

Sur certaines propriétés combinatoires des suites classiques : approche matricielle

Soutenue publiquement, le 25/12/2019, devant le jury composé de :

M. REZAOUI Mohammed Salem	MCA	USTHB	Président
M. RAHMANI Mourad	MCA	USTHB	Directeur de thèse
M. BEHLOUL Djilali	Prof	USTHB	Examinateur
M. AIT-AMRANE Lyes	MCA	ESI	Examinateur
M. AHMIA Moussa	MCA	Univ. Jijel	Examinateur
M. BERKANE Djamel	MCA	Univ. Blida1	Examinateur
M. MIHOUBI Miloud	Prof	USTHB	Invité

Table des matières

Remerciements

Je suis heureux de pouvoir exprimer toute ma reconnaissance à mon Professeur et Directeur de thèse, Monsieur Mourad RAHMANI, pour m'avoir proposé un sujet de recherche captivant et pour avoir patiemment dirigé mes recherches durant ces années. Sa disponibilité, sa précieuse aide scientifique, ses encouragements et son soutien moral sans réserve ont énormément contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie infiniment le professeur Mohammed Salem REZAOUI d'avoir bien voulu présider ce jury de thèse et de s'être intéressé à ce travail.

Je remercie aussi les Professeurs Lyes AIT-AMRANE, Moussa AHMIA, Djilali BEHLOUL, Djamel BERKANE et Miloud MIHOUBI pour s'être intéressé à ce travail et pour l'honneur qu'ils me font en acceptant de faire partie du Jury de soutenance.

Enfin, c'est avec une grande émotion que j'exprime ma profonde gratitude à ma famille, Particulièrement mes chers parents, ma sœur et mes frères.

Notations

1. $\mathbb{N}$: ensemble des nombres entiers naturels.
2. $\mathbb{N}^*$: ensemble des nombres entiers naturels non nuls.
3. $\mathbb{Z}$: ensemble des nombres entiers relatifs .
4. $\mathbb{Q}$: ensemble des nombres rationnels.
5. $\mathbb{R}$: ensemble des nombres réels.
6. $\mathbb{C}$: ensemble des nombres complexes.
7. $:=$ égalité par définition (affectation)
8. $\mathcal{A}[[z]]$: l'ensemble des séries formelles
9. $a^{\underline{n}}$: puissanes factorielles descendantes.
10. $a^{\bar{n}}$: puissances factorielles montantes.
11. $\binom{n}{k}$: coefficient binomial, où n et k sont deux entiers tels que $0 \leq k \leq n$.
12. $\binom{\alpha}{k}$: coefficient binomial généralisé, tel que α un nombre complexe et k un entier.
13. $(a, b) = 1$: désigne le plus grand commun diviseur de a et b i.e. $\text{pgcd}(a, b)$, a et b étant des entiers.
14. $\deg(P(x))$: degré du polynôme $P(x)$.
15. $a \mid b$ où a et b sont deux entiers signifie : " a divise b ".
16. $a \nmid b$ où a et b sont deux entiers signifie : " a ne divise pas b ".
17. Pour $x \in \mathbb{Q}$, $\text{num}(x)$ désigne le numérateur de x.
18. Pour $x \in \mathbb{Q}$, $\text{denom}(x)$ désigne le dénominateur de x.
19. $\mathbb{Z}_{(n)}$: désigne l'anneau des n-entiers, un n-entier étant un nombre rationnel dont le dénominateur de la forme réduite n'est pas divisible par n.

20. ${}_pF_q\left(\begin{smallmatrix} a_1,a_2,\dots,a_p \\ b_1,b_2,\dots,b_q \end{smallmatrix};\ x\right)$: la fonction hypergéométrique

21. $H_n := 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}$ le n-*ième* nombre harmonique.

22. $H_n^{(m)} := 1 + \frac{1}{2^m} + \cdots + \frac{1}{n^m}$ le n-*ième* nombre harmonique généralisé.

23. φ fonction indicatrice d'Euler.

24. Δ : l'opérateur de différence

25. Pour $a, b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $a \equiv b \pmod{n}$ signifie que $a - b \in n\mathbb{Z}_{(n)}$ et se lit : a est congru à b modulo n.

26. Pour $a, b \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$, $a \not\equiv b \pmod{n}$ signifie que $a - b \notin n\mathbb{Z}_{(n)}$ et se lit : a est non congru à b modulo n.

27. $[x]$ désigne la partie entière de x, c'est à dire l'unique nombre entier k vérifiant $1-x < k \leq x$.

28. $s(n, k)$: nombre de Stirling de première espèce (signé).

29. $\left[\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right]$: nombre de Stirling de première espèce (non signé).

30. $\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}$: nombre de Stirling de deuxième espèce.

31. $\left\lfloor\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\rfloor$: nombre de Lah (non signé)

32. $L_{n,k}$: nombre de Lah (signé)

33. $\left\{\begin{smallmatrix} n \\ k \end{smallmatrix}\right\}_r$: nombre de r-Stirling de deuxième espèce.

34. $\mathcal{S}_n^k$: nombre de Stirling de deuxième espèce généralisé.

35. $W_{m,r}(n, k)$: nombres de r-Whitney de deuxième espèce.

36. $\mathbb{B}_n$: nombre de Bernoulli.

37. E_n : nombre d'Euler.

38. $\mathcal{B}_n$: nombre de Bell.

39. $L_n(x)$: polynôme de Lah (signé).

40. $\mathbb{B}_n(x)$: polynôme de Bernoulli.

41. $\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(x)$: polynôme de Bernoulli généralisé.

42. $E_n(x)$: polynôme d'Euler.

43. $\mathcal{B}_n(x)$: polynôme de Bell.

44. $S_p^{(0)}(n) = S_p(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p$.

45. $S_{p,(a,b)}^{(0)}(n) = S_{p,(a,b)}(n) = a^p + (a+b)^p + \cdots + (a+nb)^p$.

46. Convention : $\sum_{k \in \varnothing} = 0$. Dans tout ce mémoire, on adopte la convention classique qu'une somme portant sur un indice parcourant l'ensemble vide vaut zéro.

Introduction

Ce travail consiste en l'étude de certaines propriétés combinatoires des suites classiques par une approche matricielle. Il est organisé en 05 chapitres suivis d'une brève conclusion.

- **Chapitre 1.** Dans ce chapitre, nous rappelons les définitions et les propriétés nécessaires pour une meilleure compréhension de la thèse ;
- **Chapitre 2.** Ce chapitre consiste à étudier un ancien problème concernant les hyper-sommes de puissances d'entiers

  $$S_p^{(r)}(n) = \sum_{k=1}^{n} S_p^{(r-1)}(k), \quad n, r, p \geq 1.$$

  Dans la partie dédiée aux résultats de ce chapitre, trois résultats principaux et originaux sont présentés :

  1. Le premier résultat concerne une relation de récurrence, liant les hyper-sommes de puissances d'entiers et les nombres de Stirling de première espèce $s(n,k)$.

     $$\sum_{k=1}^{m} s(m,k) S_k^{(r)}(n) + S_0^{(r)}(n)\delta_{0,m} = m! \binom{n+r+1}{m+r+1} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,m}.$$

  2. Le deuxième résultat concerne des fonctions génératrices (exponentielle, ordinaire et double). Ces fonctions sont respectivement définies par :

     $$\sum_{p\geqslant 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k}{r} e^{kz},$$

     $$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n) z^r = \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} (1-z)^k k^p,$$

     $$\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} t^r = \frac{e^{(n+1)z}(1-t)^n - e^z}{(1-t)^n(e^z(1-t)-1)}.$$

3. Le troisième résultat concerne deux formules explicites de $S_p^{(r)}(n)$, dont l'une peut s'exprimer en terme de coefficients binomiaux et l'autre faisant intervenir les polynômes de Bernoulli généralisés $\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(x)$, elles sont respectivement définies par :

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k}{r} k^p,$$

$$S_p^{(r)}(n) = \frac{p!}{(p+r+1)!}\mathbb{B}_{p+r+1}^{(r+1)}(n+r+1) - p!\sum_{j=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{\mathbb{B}_{p+j+1}^{(j+1)}(j)}{(p+j+1)!} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,p}.$$

Les résultats obtenus ont fait l'objet d'un article publié dans Miskolc Mathematical Notes [27].

- **Chapitre 3.** Ce chapitre contient deux parties. Dans la première partie, nous étudions les sommes de puissances d'entiers

$$S_{p,(a,b)}^{(0)}(n) = \sum_{k=0}^{n}(a+kb)^p,$$

où a et b sont deux nombres complexes avec $b \neq 0$. Nous établissons quelques représentations explicites de $S_{p,(a,b)}^{(0)}(n)$ comportant les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés $S_p^k\left(\frac{a}{b}\right)$, les nombres de r-Stirling de deuxième espèce $\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r$, les nombres r-Whitney de deuxième espèce $W_{a,b}(p,k)$ et les polynômes de Bernoulli $B_n(x)$, on a

1. Formule explicite des sommes $S_{p,(a,b)}^{(0)}(n)$ à l'aide des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés

$$S_{p,(a,b)}^{(0)}(n) = b^p \sum_{k=0}^{p} k!\binom{n+1}{k+1} S_p^k\left(\frac{a}{b}\right),$$

où $b \neq 0$.

2. Formule explicite des sommes $S_{p,(a,d)}^{(0)}(n)$ à l'aide des nombres de r-Stirling de deuxième espèce,

$$S_{p,(a,b)}^{(0)}(n) = b^p \sum_{k=0}^{p} k!\binom{n+1}{k+1} \left\{ {p+\frac{a}{b} \atop k+\frac{a}{b}} \right\}_{\frac{a}{b}},$$

où $a \mid b$.

3. Formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les nombres r-Whitney de deuxième espèce

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \sum_{k=0}^{p} b^k k! \binom{n+1}{k+1} W_{b,a}(p,k).$$

4. Formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les polynômes de Bernoulli.

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \frac{b^p}{p+1} \sum_{k=0}^{p} \binom{p+1}{k} (n+1)^{p+1-k} B_k \left(\frac{a}{b}\right),$$

où $b \neq 0$.

Ensuite dans la deuxième partie, nous étendons les résultats obtenus au chapitre 2 à l'étude des hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$, définies par :

$$S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) = \sum_{k=0}^{n} S^{(r-1)}_{p,(a,b)}(k), \quad n, r, p \geq 1.$$

où a et b sont deux nombres complexes avec $b \neq 0$.
Dans la partie dédiée aux résultats principaux de cette partie, nous présentons les résultats suivants :

1. Le premier résultat fournit trois fonctions génératrices exponentielles pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+r-k}{r} e^{(a+kb)z},$$

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} = \binom{n+r+1}{r+1} e^{az} {}_2F_1 \left(\begin{matrix} 1, -n \\ r+2 \end{matrix} ; 1 - e^{bz} \right),$$

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} = \frac{e^{(a+b(r+(n+1)))z}}{(e^{bz}-1)^{r+1}} - \sum_{k=0}^{r} \binom{n+k}{k} \frac{e^{(a+(r-k)b)z}}{(e^{bz}-1)^{r-k+1}}.$$

2. Le deuxième résultat fournit une fonction génératrice ordinaire pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) z^r = \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (1-z)^k (a+kb)^p.$$

3. Le troisième résultat fournit une fonction génératrice double pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

$$\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!}t^r = \frac{e^{az}-(1-t)^{n+1}e^{(a+(n+1)b)z}}{(1-t)^{n+1}(1-(1-t)e^{bz})}.$$

4. Le quatrième résultat fournit deux expressions explicites de $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$, dont l'une peut s'exprimer en terme de coefficient binomial et l'autre à l'aide des polynômes de Bernoulli généralisés $\mathbb{B}^{(\alpha)}_n(x)$. Elle sont respectivement définies par :

$$S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}(a+kb)^p,$$

$$\begin{aligned} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) = {} & \frac{p!b^p}{(p+r+1)!}\mathbb{B}^{(r+1)}_{p+r+1}\left(\frac{a}{b}+(r+(n+1))\right) \\ & - p!b^p\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{1}{(p+r+1-k)!}\mathbb{B}^{(r-k+1)}_{p+r+1-k}\left(\frac{a}{b}+(r-k)\right). \end{aligned}$$

Les résultats obtenus ont fait l'objet d'un article publié dans Online Journal of Analytic Combinatorics [5].

- **Chapitre 4.** Ce chapitre est consacré à des applications des théorèmes d'arithmétiques classiques pour l'étude de congruences des hyper-sommes de puissances d'entiers. Il s'agit du petit théorème de Fermat qui affirme, que pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tout entier a, on a

$$n \nmid a \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n},$$

Ceci nous a permis de prouver de nombreuses congruences sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_p(n)$ et $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$, dans l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ modulo n, n étant nombre premier.

Le second théorème d'arithmétique que nous allons utiliser est le théorème d'Euler qui affirme que, pour tout entier $n \geq 2$, et pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $(a, n) = 1$, on a

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n},$$

Ceci nous a permis de généraliser de nombreuses congruences sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$, modulo n^α, α étant un entier naturel supérieur ou égal à deux.
Dans la partie dédiée aux résultats de ce chapitre, quatre théorèmes principaux et originaux sont présentés :

1. Le premier théorème [27] présente une congruence modulo n sur $S_p^{(r)}(n)$:

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \begin{cases} 0 \pmod n & \text{si } \ r \equiv -1 \pmod n, \\ -1 \pmod n & \text{si } \ r \not\equiv -1 \pmod n \ \text{ et } \ n-1 \mid p. \end{cases} \tag{1}$$

2. Le deuxième théorème consiste comme une généralisation du cas $r \equiv -1 \pmod n$, de la première congruence (1) :

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv (i+2)a^p \pmod n, \tag{2}$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^p \nmid n$ et $0 \leq i \leq n-1$.

3. Le troisième théorème présente une généralisation de la congruence (1) modulo n^α sur les sommes $S_p^{(r)}(n)$, pour $\alpha > r+1$ et $\alpha > p$, on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \begin{cases} n^p & \pmod{n^\alpha}, \ \text{pour } \ r \equiv -1 \pmod{n^\alpha}, \\ -1 + \dfrac{1}{(r+1)!}\displaystyle\sum_{k=0}^{r+1} {r+1 \brack k} n^k & \pmod{n^\alpha}, \ \text{pour } \ r \not\equiv -1 \pmod{n^\alpha} \text{ et } n^\alpha - n^{\alpha-1} \mid p. \end{cases}$$

4. Le quatrième théorème donne une généralisation de congruence (2) modulo n^α, pour $\alpha > p$, on a

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv (i+1)n^{\alpha-1}a^p + (a+nb)^p \pmod{n^\alpha}.$$

où $a, b \in \mathbb{Z}$, $a^p \nmid n$ et $a^p \nmid n$ avec $0 \leq i \leq n^\alpha - 1$.

Les congruences obtenues ont fait l'objet d'un article en préparation

- **Chapitre 5.** Nous présentons dans ce chapitres quelques résultats sur certaines suites de nombres et de polynômes de Bell et d'Euler.
Dans la partie dédiée aux résultats de ce chapitre, trois formules principales et originales sont présentées :

1. La première formule sur les polynômes de Bell $\mathcal{B}_n(x)$ fait intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce $\left\{ {n \atop k} \right\}$ et les polynômes de Lah signés $L_n(x)$:

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^n L_k(x). \tag{3}$$

2. La deuxième formule est une autre représentation explicite de $\mathcal{B}_n(x)$ faisant intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce et des fonctions hypergéométriques :

$$\mathcal{B}_n(x) = \frac{x}{e^x} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} n!\,{}_1F_1 \left({n+1 \atop 2} ; x \right). \tag{4}$$

   Les deux formules (3) et (4) peuvent être considérées comme une généralisation de B. Guo et F. Qi [18, 39]

3. La troixième formule est une représentation des nombres d'Euler E_n faisant intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$E_n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2^k} \left\{ {n \atop k} \right\} \mathrm{Re}\left((i-1)^{k+1} \right).$$

   $\mathrm{Re}(z)$ étant la partie réelle du nombre complexe z et $i^2 = -1$.

Les résultats obtenus ont fait l'objet d'un article publié dans Notes on Number Theory and Discrete Mathematics [6].

Enfin, nous terminons ce travail par un petit chapitre présentant quelques perspectives de recherches.

Chapitre 1

Généralités

1.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous rappelons les outils essentiels qui nous seront utiles dans les chapitres qui suivent. Ces outils sont :

1. Certaines propriétés sur les coefficients binomiaux, les fonctions génératrices [12] et les fonctions hypergéométriques [1].
2. Nombres harmoniques [50] et les suites des nombres et des polynômes [9, 10, 40, 43, 42, 8, 47, 46, 11].
3. Théorèmes d'arithmétiques classiques [20] (théorème de Fermat et théorème d'Euler).
4. Quelques techniques combinatoires [41].

Dans ce qui suit, nous allons préciser et adopter quelques notations très utiles dans ce chapitre :

1. A représente un anneaux commutatif unitaire.
2. $\delta_{n,m}$ représente le symbole de Kronecker qui vaut $\delta_{n,m} = 1$ pour $n = m$ et $\delta_{n,m} = 0$ pour $n \neq m$.
3. Δ représente l'opérateur de différence défini sur le polyôme $P(x) = x^n$, par :

$$\Delta(x^n) = (x+1)^n - x^n,$$

plus généralement, si $k \geq 1$, on a :

$$\Delta^k x^n = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-1)^{k-j} (x+j)^n.$$

Pour des notions plus précises et détaillées voir les références [13] et [38].

1.2 Puissances factorielles montantes et puissances factorielles descendantes

Au début, nous commançons par rappeler la définition des puissances factorielles montantes et des puissances factorielles descendantes, ensuite nous présentons quelques-unes de leurs propriétés.

Définition 1.1 *Soit* a *un nombre réel ou complexe. Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}$*, les puissances factorielles montantes et les puissanes factorielles descendantes sont respectivement définies par :*

$$a^{\bar{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(a+i) \quad \textit{et} \qquad a^{\underline{n}} = \prod_{i=0}^{n-1}(a-i).$$

Ainsi, on a

$$\begin{cases} a^{\bar{0}} = 1, \\ a^{\bar{1}} = a, \\ a^{\bar{2}} = a(a+1). \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} a^{\underline{0}} = 1, \\ a^{\underline{1}} = a, \\ a^{\underline{2}} = a(a-1). \end{cases}$$

Plus généralement, si $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$a^{\bar{n}} = a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1) \quad \text{et} \quad a^{\underline{n}} = a(a-1)(a-2)\cdots(a-n+1).$$

Propriétés

1. Relation entre les puissances factorielles descendantes $a^{\underline{n}}$ et les puissances factorielles montantes $a^{\bar{n}}$, donnée par :

$$a^{\underline{n}} = (-1)^n (-a)^{\bar{n}}.$$

2. Pour tout entier $n \in \mathbb{Z}$, la factorielle montante peut s'exprimer par la formule suivante :
$$a^{\bar{n}} = \frac{\Gamma(a+n)}{\Gamma(a)}.$$
où $\Gamma(x)$, est la fonction gamma d'Euler donnée par :
$$\Gamma(x) = \int_{0}^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1.3 Coefficients binomiaux

Définition 1.2 *Pour tout nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout entier $k \geq 0$, on définit le coefficient binomial $\binom{\alpha}{k}$ de la manière suivante :*
$$\binom{\alpha}{k} = \begin{cases} \frac{\alpha^{\underline{k}}}{k!} & \textit{si} \quad k \geq 0, \\ 0 \quad \textit{si} & k < 0. \end{cases}$$
De la définition, il est évident que pour $\alpha \geq 0$ et $k \geq 0$, on a :
$$\binom{\alpha}{0} = 1 \ \text{ et } \ \binom{0}{k} = \delta_{0,k}.$$

Propriétés

1. **Formule de Pascal :** la formule de Pascal qui affirme que pour tout entier $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout entier $k \in \mathbb{N}^*$, on a
$$\binom{\alpha-1}{k-1} + \binom{\alpha-1}{k} = \binom{\alpha}{k}. \tag{1.1}$$
2. **Formule du binôme :** La formule du binôme qui affirme que si a et b sont deux éléments d'un anneau qui commutent, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a
$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{1.2}$$

3. **Formule itérée de Pascal :** La formule itérée de Pascal qui affirme que pour tous entiers naturels n, j et k tel que $n \geq k$, on a
$$\sum_{j=k}^{n} \binom{j}{k} = \binom{n+1}{k+1}. \tag{1.3}$$

4. **Identité remarquable :** Pour tous entiers naturels $n \geq k \geq 0$, le coefficient binômial s'écrit aussi sous la forme :
$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{1.4}$$

1.4 Séries génératrices

Définition 1.3 *On appelle série formelle, à coefficients dans A, et en l'indéterminée z, toute expression formelle du type*
$$f(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!},$$
où les a_n, sont appelés coefficients de f. On note $\mathcal{A}[[z]]$ l'ensemble des séries formelles à valeurs dans A.

Propriétés

1. **Produit de Hadamard :** Le produit de Hadamard de deux séries formelles $f(z) = \sum\limits_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}$, et $g(z) = \sum\limits_{n \geq 0} b_n \frac{z^n}{n!}$, est égal à la série formelle :
$$f(z) \circ g(z) = \sum_{n \geq 0} a_n b_n \frac{z^n}{n!}.$$

2. **Fonctions génératrices (exponentielles et ordinaires) :** On appelle fonctions génératrices (exponentielles et ordinaires), d'une suite $(a_n)_n$ des nombres réels ou complexes, les séries formelles de l'anneau des séries formelles $\mathcal{A}[[z]]$, définies respectivement par :
$$A(z) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{z^n}{n!}, \qquad B(z) = \sum_{n \geq 0} b_n z^n.$$

3. **Fonctions génératrices (doubles) :** On appelle fonctions génératrices doubles (ordinaires et exponentielles) d'une suite $(a_{n,m})_{n,m}$ des nombres réels ou complexes, les séries formelles de l'anneau des séries formelles $\mathcal{A}[[z]]$, définies respectivement par :
$$A(x,z)=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}a_{n,m}x^m z^n,\quad B(x,z)=\sum_{n\geq 0}\sum_{m\geq 0}b_{n,m}\frac{x^m}{m!}\frac{z^n}{n!}.$$
4. **Transformation de séries formelles :** La transformation de Laplace inverse $\mathcal{L}^{-1}$ que l'on définit sur l'algèbre des séries formelles a pour effet d'envoyer toute fonction génératrice ordinaire sur la fonction génératrice exponentielle correspondante :
$$\mathcal{L}^{-1}\left(\sum_{n\geq 0}a_n z^n\right)=\sum_{n\geq 0}a_n\frac{z^n}{n!},$$
où la transformation de Laplace d'une fonction h est définie par : $\mathcal{L}(h)=\int\limits_0^{+\infty}e^{-st}h(t)dt.$

1.5 Fonctions hypergéométriques

Définition 1.4 *Pour tout entier naturel $n\in\mathbb{N}$, on définit la fonction hypergéométrique par son développement en série entière dépendant d'un certain nombre de paramètres :*
$${}_pF_q\left(\begin{matrix}a_1,a_2,\ldots,a_p\\ b_1,b_2,\ldots,b_q\end{matrix};\ x\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{a_1^{\bar{n}}a_2^{\bar{n}},\cdots,a_p^{\bar{n}}}{b_1^{\bar{n}}b_2^{\bar{n}},\cdots,b_q^{\bar{n}}}\frac{x^n}{n!}.$$
On note que, pour p = q = 0, on obtient la série bien connue suivante :
$${}_0F_0\left(;\ x\right)=e^x.$$

Notation 1.5 *Les fonctions hypergéométriques sont notées aussi par :* ${}_pF_q\left(a_1,a_2,...,a_p;b_1,b_2,...,b_q;x\right)$ *quand cela est nécéssaire.*

Propriétés

1. **Fonction hypergeométrique de confluente de Kummer :** Dans le cas où $p=1$ et $q=1$, on définit la fonction hypergeométrique confluente de Kummer par :
$${}_1F_1\left(\begin{matrix}a\\ b\end{matrix};\ x\right)=\sum_{n\geq 0}\frac{a^{\bar{n}}}{b^{\bar{n}}}\frac{x^n}{n!}.$$

2. **Fonction hypergeométrique de Gauss :** Dans le cas où $p = 2$ et $q = 1$, on définit la fonction hypergeométrique de Gauss par :

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{\bar{n}} b^{\bar{n}}}{c^{\bar{n}}} \frac{x^n}{n!}. $$

   Nous donnons quelques fonctions importantes qui peuvent être exprimer en fonction hypergeométrique de Gauss :

$$ \begin{aligned} \frac{\log(1+x)}{x} &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, 1 \\ 1 \end{matrix}; -x\right), \\ \sum_{k\geq 0} \binom{a+k-1}{k} x^k &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, 1 \\ 1 \end{matrix}; x\right), \\ \frac{n!(x-1)^{m-2}}{(m)^{\bar{n}} x^{m-1}} \left[\sum_{k=0}^{m-2} \frac{(n+1)^{\bar{k}}}{k!} \left(\frac{x}{x-1}\right)^k - (1-x)^{n+1} \right] &= {}_2F_1\left(\begin{matrix} -n, 1 \\ m \end{matrix}; x\right). \end{aligned} \tag{1.5} $$

3. **Représentation intégrale d'Euler :** La fonction hypergéométrique vérifie une expression intégrale

   Théorème 1.6 *[1] Pour* $\mathrm{Re}(c) > \mathrm{Re}(b) > 0$*, on a*

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} a, b \\ c \end{matrix}; x\right) = \frac{\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-b)} \int_0^1 t^{b-1}(1-t)^{c-b-1}(1-xt)^{-a} dt. \tag{1.6} $$

   Le relation suivante, donne la représentation intégrale de la fonction hypergéométrique ${}_2F_1\,(1, -n; r+2; 1-e^z)$

$$ {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1, -n \\ r+2 \end{matrix}; 1-e^z\right) = (r+1) \int_0^1 (1-x)^r (1-x+xe^z)^n dx. \tag{1.7} $$

1.6 Nombres harmoniques et généralisations

Définition 1.7 *Pour tout entier naturel* $n \in \mathbb{N}^*$*, le* n*-ième nombre harmonique, noté* H_n*, est défini par :*

$$ H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, $$

on convient de définir H_0*, comme étant égal à* 1.

Définition 1.8 *Pour tous entiers naturels* n *et* m*, le* n*-ième nombre harmonique généralisé, noté* $H_n^{(m)}$*, est défini par :*

$$H_n^{(m)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^m},$$

on vérifie qu'on a : $H_n^{(1)} = H_n$*, et on convient de définir* $H_0^{(m)}$*, comme étant égal à* 0.

1.7 Les suites classiques

1.7.1 Nombres de Stirling de première espèce

Définition 1.9 *Pour tous* $n, k \in \mathbb{N}$*, avec* $n \geq k$*, on appelle nombres de Stirling de première espèce (signés), les nombres entiers* $s(n,k)$ *qui figurent dans le développement du polynôme* $x^{\underline{n}}$*, et on a :*

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} s(n,k) x^k.$$

D'une manière équivalente, on appelle nombres de Stirling de première espèce (non signés), les nombres entiers $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *qui figurent dans le développement du polynôme* $x^{\bar{n}}$*, et on a :*

$$x^{\bar{n}} = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k.$$

Les nombres entiers $s(n,k)$*, sont liés aux nombres naturels* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$*, par la relation :*

$$s(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} (-1)^{n-k}.$$

Propriétés

1. **Relation de récurrence triangulaire :** La relation de récurrence des nombres de Stirling de première espèce est donnée par :

$$\begin{cases} s(n,0) = \delta_{n,0} \ \text{ pour } \ n \geq 0 \ \text{ et } \ s(0,k) = \delta_{0,k} \ \text{ pour } \ k \geq 0, \\ s(n,k) = s(n-1,k-1) - (n-1)s(n-1,k) \ \text{ pour } \ n \geq 1 \ \text{ et } \ n \geq 1. \end{cases}$$

   Voici donc un triangle donnant les premières valeurs des nombres de Stirling de première espèce (en valeurs absolues) obtenu à l'aide de la relation récurrente précédente pour $0 \leq k \leq 5$.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	2	3	1		
4	0	6	11	6	1	
5	0	24	50	35	10	1

2. **Fonctions génératrices :** Les fonctions génératrices exponentielle et double des nombres de Stirling de première espèce sont respectivement définies par :

$$\sum_{n \geq k} s(n,k)\frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(\ln(1+x))^k, \tag{1.8}$$

$$\sum_{n,k \geq 0} s(n,k)\frac{x^n}{n!}t^k = (1+x)^t. \tag{1.9}$$

3. **Relation avec les nombres harmoniques :** Les nombres de Stirling de première espèce (non signés) sont liés aux nombres harmoniques par les relations suivantes :

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} &= (n-1)!H_0, \\
\begin{bmatrix} n \\ 2 \end{bmatrix} &= (n-1)!H_{n-1}, \\
\begin{bmatrix} n \\ 3 \end{bmatrix} &= \frac{(n-1)!}{2}\left[H_{n-1}^2 - H_{n-1}^{(2)}\right], \\
\begin{bmatrix} n \\ 4 \end{bmatrix} &= \frac{(n-1)!}{6}\left[H_{n-1}^3 - 3H_{n-1}H_{n-1}^{(2)} + 2H_{n-1}^{(3)}\right].
\end{aligned}$$

1.7.2 Nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 1.10 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on appelle nombres de Stirling de seconde espèce les nombres entiers $\left\{ n \atop k \right\}$ qui figurent dans le développement du polynôme x^n, et on a :*

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ n \atop k \right\} x^{\underline{k}}.$$

Propriétés

1. **Relation de récurrence triangulaire :** La relation de récurrence des nombres de Stirling de deuxième espèce s'écrit :

$$\left\{ n \atop 0 \right\} = \delta_{n,0} \text{ pour } n \geq 0, \text{ et } \left\{ 0 \atop k \right\} = \delta_{0,k} \text{ pour } k \geq 0,$$
$$\left\{ n \atop k \right\} = \left\{ n-1 \atop k-1 \right\} + k \left\{ n-1 \atop k \right\} \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } n \geq 1,$$

en se servant cette dernière relation récurrente, on peut donner les premières valeurs de ces nombres dans le triangle suivant

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	1	1			
3	0	1	3	1		
4	0	1	7	6	1	
5	0	1	15	25	10	1

2. **Fonctions génératrices :** Les fonctions génératrices exponentielles et ordinaires de ces nombres sont respectivement définies par :

$$\sum_{n \geq k} \left\{ n \atop k \right\} \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!}(e^x - 1)^k,$$
$$\sum_{n \geq k} \left\{ n \atop k \right\} x^{n-k} = \prod_{j=0}^{k} \frac{1}{(1-jx)}.$$

3. **Formule explicite :** La formule explicite des nombres de Stirling de deuxième espèce s'écrit :

$$\left\{ n \atop k \right\} = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{n} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} j^n.$$

1.7.3 Nombres et polynômes de Lah

Définition 1.11 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $n \geq k$, on appelle nombres de Lah (non signés), les nombres entiers $\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor$ qui figurent dans le développement du polynôme $x^{\bar{n}}$, et on a :*

$$x^{\overline{n}} = \sum_{k=0}^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\underline{k}},$$

d'une manière équivalente, on a :

$$x^{\underline{n}} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor x^{\bar{k}}.$$

Les nombres de Lah (signés) sont notés $L_{n,k}$, et sont définies par la relation suivante :

$$L_{n,k} = (-1)^{n} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor.$$

Définition 1.12 *Les polynômes de Lah (signés) que l'on note par $L_n(x)$, sont définies par la relation suivante :*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L_{n,k} x^{k}.$$

Nous allons maintenant examiner les principales propriétés de ces nombres qui seront utiles dans la suite.

Propriétés

1. **Relation de récurrence triangulaire :** En écrivant la relation de récurrence de la suite des nombres de Lah sous la forme :

$$\left\lfloor {n \atop 0} \right\rfloor = \delta_{n,0} \text{ pour } n \geq 0 \text{ et } \left\lfloor {0 \atop k} \right\rfloor = \delta_{0,k} \text{ pour } k \geq 0,$$
$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \left\lfloor {n-1 \atop k-1} \right\rfloor + (n+k-1) \left\lfloor {n-1 \atop k} \right\rfloor \qquad \text{pour } 1 \leq k \leq n.$$

Voici donc un triangle donnant les premières valeurs de Lah obtenu à l'aide de la relation récurrente précédente.

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	0	1				
2	0	2	1			
3	0	6	6	1		
4	0	24	36	12	1	
5	0	120	240	120	20	1

2. **Fonction génératrice :** En écrivant la fonction génératrice exponentielle des nombres de Lah sous la forme :
$$\sum_{n \geq k} \left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{z}{1-z} \right)^k .$$
3. **Formule explicite :** En écrivant la formule explicite des nombres de Lah sous la forme :
$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1} \qquad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n,$$
on peut donner une autre expression explicite à l'aide des nombres de Stirling première et deuxième espèce :
$$\left\lfloor {n \atop k} \right\rfloor = \sum_{j=k}^{n} (-1)^{n-j} s(n,j) \left\{ {j \atop k} \right\}. \tag{1.10}$$

1.7.4 Nombres de r-Stirling de deuxième espèce

Définition 1.13 *Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$ et pour $r \geq 0$, on appelle nombres r-Stirling de deuxième espèce les nombres entiers $\left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r$ qui figurent dans le développement du polynôme $(x+r)^n$, et on a :*
$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^{\underline{k}}.$$

Propriétés

1. **Relation de récurrence triangulaire :** La relation de récurrence de la suite des nombres de r-Stirling de deuxième espèce est donnée par :

$$\left\{ {n \atop k} \right\}_r = \delta_{k,r} \text{ pour } n = r \text{ et } \left\{ {n \atop k} \right\}_r = 0 \quad \text{pour } r > n,$$
$$\left\{ {n \atop k} \right\}_r = \left\{ {n-1 \atop k-1} \right\}_r + k \left\{ {n-1 \atop k} \right\}_r \qquad \text{pour } n > r,$$

les premières valeurs 2-Stirling de seconde espèce :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5
0	1					
1	2	1				
2	4	5	1			
3	8	19	9	1		
4	16	65	55	14	1	
5	32	211	285	215	20	1

2. **Fonction génératrice :**
   – La fonction génératrice exponentielle des nombres r-Stirling de deuxième espèce est donnée par :
   $$\sum_{n \geq k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{rx} (e^x - 1)^k.$$
   – La fonction génératrice ordinaire de la suite des nombres r-Stirling de deuxième espèce est donnée par :
   $$\sum_{n \geq k} \left\{ {n+r \atop k+r} \right\}_r x^n = \frac{x^k}{(1-rx)(1-(r+1)x)\dots(1-(r+k)x)}.$$

3. **Identité remarquable :** La suite des nombres r-Stirling de deuxième espèce vérifie l'identité :
$$\left\{ {n \atop r} \right\}_r = r^{n-r}.$$

1.7.5 Nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés

Définition 1.14 *Pour tout entier* $n, k \in \mathbb{N}$, *on défini les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés par la formule explicite suivante :*

$$\mathcal{S}_n^k(\alpha) = \frac{1}{k!}\Delta\alpha^n.$$

Ce qui équivaut à :

$$\mathcal{S}_n^k(\alpha) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{(k-j)}\binom{k}{j}(\alpha+j)^n. \tag{1.11}$$

De la définition, il est évident que pour $x = 0$, on a

$$\mathcal{S}_n^k(0) = \frac{1}{k!}\Delta 0^n, \tag{1.12}$$

$$= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{1.13}$$

Propriétés

1. **Fonction génératrice exponentielle :** La fonction génératrice exponentielle des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés est donnée par :

$$\sum_{n\geq k}\mathcal{S}_n^k(\alpha)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!}e^{z\alpha}\left(e^z-1\right)^k. \tag{1.14}$$

2. **Formule explicite :** La formule explicite des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés fait intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce :

$$\mathcal{S}_n^k(\alpha) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}\left\{ \begin{matrix} j \\ k \end{matrix} \right\}\alpha^{n-j}. \tag{1.15}$$

3. **Relation de récurrence triangulaire :** La relation de récurrence des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés est donnée par :

$$\mathcal{S}_{n+1}^k(\alpha) = \mathcal{S}_n^{k-1}(\alpha) + (x+k)\mathcal{S}_n^k(\alpha), \quad \text{pour} \quad 1 \leq k \leq n.$$

4. **Identité remarquable :** Dans le cas où $\alpha = r$, une identité reliant les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés et les nombres r-Stirling de deuxième espèce :

$$\mathcal{S}_n^k(r) = \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r. \tag{1.16}$$

1.7.6 Nombres de r-Whitney de deuxième espèce

Définition 1.15 *Pour tous entiers $n \geq k \geq 0$ et $r \in \mathbb{N}$, on appelle nombres de r-Whitney de deuxième espèce, les nombres entiers $W_{m,r}(n,k)$ qui figurent dans le développement du polynôme $(mx+r)^n$, et on a :*

$$(mx+r)^n = \sum_{k=0}^{n} m^k W_{m,r}(n,k) x^{\underline{k}}.$$

Propriétés

1. **Fonction génératrice :** La fonction génératrice exponentielle de la suite des nombres de r-Whitney de deuxième espèce, est donnée par :
$$\sum_{n\geq k} W_{m,r}(n,k)\frac{z^n}{n!} = \frac{1}{m^k k!} e^{rz}(e^{mz}-1)^k. \tag{1.17}$$
2. **Relation de récurrence triangulaire :** La relation de récurrence de la suite des nombres de r-Whitney de deuxième espèce, est donnée par :
$$W_{m,r}(n,k) = W_{m,r}(n-1,k-1) + (km+r)W_{m,r}(n-1,k).$$
3. **Formule explicite :** La formule explicite de la suite des nombres r-Whitney de deuxième espèce fait intervenir les nombres de stirling de seconde espèce généraliser :
$$W_{m,r}(n,k) = m^{(n-k)} S_n^k\left(\frac{r}{m}\right), \tag{1.18}$$
$$= \frac{1}{m^k k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}(-1)^{k-i}(mi+r)^n. \tag{1.19}$$
4. **Quelques identités remarquables :**
   - Dans le cas où $m=1$ et $r=0$, les nombres de r-Whitney de deuxième espèce et les nombres de Stirling de deuxième espèce sont liés par :
$$W_{1,0}(n,k) = \left\{ n \atop k \right\}. \tag{1.20}$$
   - Dans le cas où $m=1$ et $r\in\mathbb{N}^*$, les nombres de r-Whitney de deuxième espèce et les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés sont liés par :
$$W_{1,r}(n,k) = \left\{ n+r \atop k+r \right\}_r. \tag{1.21}$$

– Les nombres de r-Whitney de deuxième espèce et les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés sont liées par :

$$W_{m,r}(n,k) = m^{n-k}\mathcal{S}_n^k\left(\frac{r}{m}\right). \tag{1.22}$$

1.7.7 Nombres et polynômes de Bernoulli

Nous rappelons les définitions et certaines propriétés des nombres et des polynômes de Bernoulli.

Nombres de Bernoulli

Définition 1.16 *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite des nombres de Bernoulli est la suite de nombres rationnels $(\mathbb{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, définie par la relation de récurence :*

$$\begin{cases} \mathbb{B}_0 = 1, \\ \mathbb{B}_n = -\dfrac{1}{n+1}\sum\limits_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\mathbb{B}_k, \ \ n > 0. \end{cases} \tag{1.23}$$

Voici donc une table donnant les premières valeurs des nombres de Bernoulli obtenue à l'aide de Définition 1.16 pour $0 \leq n \leq 12$, on a :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{B}_n$	1	$-1/2$	$-1/6$	0	$-1/30$	0	$-1/42$	0	$-1/30$	0	$5/66$	0	$-691/2736$

À partir de $\mathbb{B}_3$, tous les nombres de Bernoulli de rang impair sont nuls, alors pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$\mathbb{B}_{2n+1} = 0.$$

Polynômes de Bernoulli

Définition 1.17 *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la suite des polynômes de Bernoulli est la suite de polynômes $(\mathbb{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ à coefficients rationnels, définie par :*

$$\mathbb{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathbb{B}_k x^{n-k}. \tag{1.24}$$

On vérifie qu'on a la relation
$$\mathbb{B}_n(0) = \mathbb{B}_n.$$

Voici donc les premières expressions des polynômes de Bernoulli $(\mathbb{B}_n(x))$, obtenue à l'aide de Définition 1.17, on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{B}_0(x) &= 1, \\
\mathbb{B}_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
\mathbb{B}_2(x) &= x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{6}, \\
\mathbb{B}_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
\mathbb{B}_4(x) &= x^4 - 2x^3 - x^2\frac{1}{30}, \\
\mathbb{B}_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{3}x^3 - \frac{1}{6}x.
\end{aligned}$$

Propriétés

Les nombres $(\mathbb{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les polynômes $(\mathbb{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, satisfont plusieurs propriétés, en particulier :

1. **Fonction génératrice exponentielle :**
   - La fonction génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli $(\mathbb{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est donnée par :
   $$\sum_{n\geq 0} \mathbb{B}_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}. \tag{1.25}$$
   - La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bernoulli $(\mathbb{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, est donnée par :
   $$\sum_{n\geq 0} \mathbb{B}_n(x) \frac{z^n}{n!} = \frac{ze^{zx}}{e^z - 1}. \tag{1.26}$$
2. **Formule de Faulhaber :** la formule suivante est connu sous le nom du (Faulhaber) en l'honneur du mathématicien Johann Faulhber :
$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\left(\mathbb{B}_{m+1}(n) - \mathbb{B}_{m+1}(0)\right). \tag{1.27}$$
3. **Formules explicites :**

– Les nombres de Bernoulli peuvent être exprimés à l'aide des nombres de Stirling de deuxième espèce par :

$$\mathbb{B}_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{1.28}$$

– Les polynômes de Bernoulli peuvent être exprimés à l'aide des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés par :

$$\mathbb{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{k!}{k+1} \mathcal{S}_n^k(x). \tag{1.29}$$

1.7.8 Polynômes de Bernoulli généralisés

Récemment en 2017, M. Rahmani, M. A. Boutiche et H. M. Srivastava dans leur article [7] intutilé (Explicit Formulas Associated with Some Families of Generalized Bernoulli and Euler Polynomials) ont établi une formule explicite des polynômes de Bernoulli généralisés qu'on peut s'exprimer à l'aide des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés. Cette formule est donnée dans la définition suivante :

Définition 1.18 *Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$ et pour tout nombre complexe $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit les polynômes de Bernoulli généralisés par leur formule explicite :*

$$\mathbb{B}_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+k}{k}^{-1} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+n-1}{k} \mathcal{S}_{n+k}^k(x). \tag{1.30}$$

Il est évident que

$$B_n^{(1)}(x) = B_n(x).$$

Propriétés

1. On définit la fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bernoulli généralisés par [47, 46] :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{B}_n^{(\alpha)}(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^{\alpha} e^{xz}. \tag{1.31}$$

2. On définit la fonction génératrice exponentielle des nombres de Bernoulli généralisés par :

$$\sum_{n\geq 0} \mathbb{B}_n^{(\alpha)} \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{z}{e^z - 1} \right)^{\alpha}. \tag{1.32}$$

1.7.9 Nombres et polynômes d'Euler

Nous définissons les nombres et les polynômes d'Euler, et nous présentons ensuite quelques-unes de leurs propriétés.

Nombres d'Euler

Définition 1.19 *Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle suite des nombre d'Euler la suite de nombres entiers que l'on note $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$, elle est définie par la relation de récurrence :*

$$\begin{cases} E_0 = 1, \\ E_n = 1 - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} 2^{n-1-k} E_k, \quad n \geq 1. \end{cases} \tag{1.33}$$

À l'aide de la définition des nombres d'Euler nous pouvons donner les premières valeurs de E_n pour $1 \leq n \leq 10$

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	1	0	- 1	0	5	0	- 61	0	1385	0	- 50521

Polynômes d'Euler

Définition 1.20 *Pour tout entier $n \geq 0$, le polynôme d'Euler noté, $E_n(x)$, est défini par la relation de récurrence :*

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{E_k}{2^k} \left(x - \frac{1}{2}\right)^{n-k}, \tag{1.34}$$

avec $E_n = 2^n E_n(\frac{1}{2})$.

À l'aide de la définition des polynômes d'Euler nous pouvons donner les premières valeurs de $E_n(x)$, pour $1 \leq n \leq 5$,

$$\begin{aligned} E_0(x) &= 1, \\ E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\ E_2(x) &= x^2 - x, \\ E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{6}, \\ E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + \frac{2}{3}x. \end{aligned}$$

Propriétés

Les nombres $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les polynômes $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont les fonctions génératrices exponentielles suivantes :

1. La fonction génératrice exponentielle des nombres d'Euler $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} E_n \frac{x^n}{n!} = \frac{1}{\cosh z} = \frac{2e^x}{e^{2x}+1}. \tag{1.35}$$

2. La fonction génératrice exponentielle des polynômes d'Euler $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est donnée par :

$$\sum_{n\geq 0} E_n(x) \frac{x^n}{n!} = \frac{2e^{xz}}{e^z+1}. \tag{1.36}$$

1.7.10 Nombres et polynômes de Bell

De manière similaire, à partir des nombres et polynômes d'Euler, nous définissons les nombres et les polynômes de Bell et nous nous intéressons à leurs propriétés.

Nombres de Bell

Définition 1.21 *Pour tout entier naturel $n, k \in \mathbb{N}$ avec $0 \leq k \leq n$, on définit les nombres de Bell par l'identité suivante :*

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}. \tag{1.37}$$

La suite $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est repertoriée A000110 dans l'encyclopédie en ligne des suites de nombres entiers [44].

À l'aide de définition des nombres de Bell nous pouvons donner les premières valeurs de $\mathcal{B}_n$ pour $0 \leq n \leq 12$,

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathcal{B}_n$	1	1	2	5	15	52	203	877	4141	21147	115975	678570	4213597

Polynômes de Bell

Définition 1.22 *Pour tous entiers* $n, k \in \mathbb{N}$ *avec* $0 \leq k \leq n$*, on définie les polynômes de Bell par la formule :*

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k, \tag{1.38}$$

il est évident que :

$$\mathcal{B}_n(1) = \mathcal{B}_n.$$

À l'aide de la définition des polynômes de Bell nous pouvons donner les premières valeurs de $\mathcal{B}_n$ pour $0 \leq n \leq 4$,

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{B}_1(x) &= x, \\
\mathcal{B}_2(x) &= x^2 + x, \\
\mathcal{B}_3(x) &= x^3 + 3x^2 + x, \\
\mathcal{B}_4(x) &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x.
\end{aligned}$$

Propriétés

Les nombres $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les polynômes $(\mathcal{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ satisfont plusieurs propriétés, en particulier :

1. **Relations de récurrences :**
   - En écrivant la relation de récurrence de la suite des nombres de Bell $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, sous la forme :
   $$\mathcal{B}_{n+1} = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathcal{B}_j.$$
   - En écrivant la relation de récurrence de la suite des polynômes de Bell $(\mathcal{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, sous la forme :
   $$\mathcal{B}_{n+1}(x) = x \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \mathcal{B}_j(x).$$
2. **Fonctions génératrices exponentielles :**

– La fonction génératrice exponentielle des nombres de Bell $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est donnée par la relation :
$$\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_n\frac{z^n}{n!}=\exp(e^x-1).$$
– La fonction génératrice exponentielle des polynômes de Bell $(\mathcal{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, est donnée par la relation :
$$\sum_{n\geq 0}\mathcal{B}_n(x)\frac{z^n}{n!}=\exp(x(e^z-1)).$$

3. **Formules explicites (Dobinski) :**
   – La formule explicite de la suite des nombres de Bell $(\mathcal{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, est donnée par la relation :
$$\mathcal{B}_n=\frac{1}{e}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}.$$
   – La formule explicite de la suite des polynômes de Bell $(\mathcal{B}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, est donnée par la relation :
$$\mathcal{B}_n(x)=\frac{1}{e^x}\sum_{k\geq 0}\frac{k^n}{k!}x^k.$$

1.8 Congruences dans $\mathbb{Z}$

L'étude des congruences sur les entiers remonte aux travaux du mathématicien Gauss en 1801 dans son ouvrage des "Disquisitiones Arithmeticae" [17], selon cet ouvrage on définit les congruences dans $\mathbb{Z}$ modulo le nombre entier $n\geq 2$ de la manière suivante :

Définition 1.23 *Pour tous entiers a et b et pour tout entier $n\geq 2$, on dit que a est congru à b modulo n et on écrit :*
$$a\equiv b \pmod{n}.$$
Remarquons qu'on peut aussi énoncer que les entiers a et b sont congrus modulo n si, et seulement si, a et b ont même reste dans la division euclidienne par n.

Signalons que la définition précédente de congruence présente beaucoup de propriétés intéressantes dans $\mathbb{Z}$. Nous allons maintenant nous intéresser à rappeler les principaux théorèmes d'arithmétiques classiques qui nous seront utiles :

Théorème de Fermat

Le théorème suivant est connu sous le nom du "petit théorème de Fermat" du mathématicien Pierre de Fermat.

Théorème 1.24 *[20] Pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tout entier a premier avec n, on a*

$$a^{n-1} \equiv 1 \pmod n.$$

Remarquons qu'on peut aussi énoncer le petit théorème de Fermat sous la forme équivalente suivante :

$$a^{n} \equiv a \pmod n.$$

Théorème d'Euler

Le théorème d'Euler qui suit est une généralisation du petit théorème de Fermat, ce théorème fait intervenir la fonction indicatrice d'Euler que l'on note par φ, c'est une fonction arithmétique importante. Elle est définie comme suit :

Définition 1.25 *Pour tout entier naturel $k \in \mathbb{N}^*$, la fonction d'indicatrice d'Euler est définie par :*

$$\varphi(n) = Card\{k \in \mathbb{N}^* \ / \ k \leq n \ et \ (k, n) = 1\}.$$

Propriétés

1. Pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$1 \leq \varphi(n) \leq n \quad \text{et} \quad (\varphi(n), n) = 1.$$

2. Pour tous entiers m et $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $(n, m) = 1$, on a

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m).$$

3. Pour tout entier $\alpha \in \mathbb{N}^*$ et n est un nombre premier, on a

$$\begin{aligned}\varphi(n^{\alpha}) &= n^{\alpha} - n^{\alpha-1} \\ &= n^{\alpha}\left(1 - \frac{1}{n}\right).\end{aligned}$$

Théorème 1.26 *[20] Pour tout entier $n \geq 2$, et pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$, tel que $(a, n) = 1$, on a*

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod n.$$

1.9 Congruences dans $\mathbb{Z}_{(n)}$

Pour tout entier $n \geq 2$, on appelle n-entier tout nombre rationnel dont le dénominateur de la forme réduite n'est pas divisible par n. Nous désignons par $\mathbb{Z}_{(n)}$, l'ensemble des n-entiers. Autrement dit :

$$\mathbb{Z}_{(n)} = \{\ x \in \mathbb{Q}\ /\ n \text{ ne divise pas denom}(x)\ \}.$$

On définit la congruence modulo n dans $\mathbb{Z}_{(n)}$ de la manière suivante :

$$x \equiv y \pmod{n} \Leftrightarrow x - y \in n\mathbb{Z}_{(n)}. \tag{1.39}$$

La relation (1.39) permet d'exprimer le numérateur de la forme réduite du nombre rationnel $(x - y)$ est divisible par n. Autrement dit :

$$\text{num}(x - y) \in n\mathbb{Z}. \tag{1.40}$$

Remarque 1.27 *Dans le cas où $n = m^\alpha$, m étant un nombre premier et α un entier naturel non nul, on a*

$$\mathbb{Z}_{(m^\alpha)} = \mathbb{Z}_{(m)}.$$

1.10 Congruences sur le coefficient binomial

Le théorème suivant nous sera utile au chapitre 4 pour établir quelques congruences

Théorème 1.28 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$, on a les congruences suivantes :*

1. *Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n - 1$, on a :*

$$\binom{n}{k} \equiv 0 \pmod{n}.$$

2. *Pour tout entier k tel que $1 \leq k \leq n^\alpha - 1$ où α est un entier $\alpha \geq 2$, on a :*

$$\binom{n^\alpha}{k} \equiv 0 \pmod{n}.$$

1.11 Techniques utilisées dans les preuves

En 2014, M. Rahmani dans son article [41] a donné une application sur la transformation de stirling, qui s'énonce comme suit :

On considère d'abord une suite de nombres $(a_m)_{m\geq 0}$, et on définit une suite double $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$, donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_{0,m} = a_m, \\ a_{n+1,m} = a_{n,m+1} + m a_{n,m}. \end{cases} \tag{1.41}$$

Après, nous construisons une matrice infinie S, associé à cette suite par : $S = (a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$, la suite $(a_{0,m})$, représente la première ligne de la matrice et est appelée la suite initiale, la suite $(a_{n,0})$, donne la première colonne de la matrice et est appelée la suite finale.

Inversement, si nous commençons par la suite finale, on peut encore définir la matrice infinie S associé à la suite double $(a_{n,m})_{n\geq 0,m\geq 0}$ donnée par la relation de récurrence suivante :

$$\begin{cases} a_{n,0} = a_n, \\ a_{n,m+1} = a_{n+1,m} - m a_{n,m}. \end{cases} \tag{1.42}$$

Rahmani [41] a obtenu les résultats suivants :

Théorème 1.29 *[41] Pour tous entiers $n, m \geq 0$, on a*

$$a_{n,m} = \sum_{k=0}^{m} s(m,k) b_{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n+m \\ k+m \end{Bmatrix}_m a_{m+k}. \tag{1.43}$$

Théorème 1.30 *[41] Soit*

$$\mathcal{A}_r(z) = \sum_{k\geq 0} a_{0,k+r} \frac{z^k}{k!},$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale $a_{0,m+r}$. Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite $(a_{n,r})$ de (1.41)

$$\mathcal{B}_r(z) = \sum_{n\geq 0} a_{n,r} \frac{z^n}{n!},$$

est donnée par :

$$\mathcal{B}_r(z) = e^{rz} A_r(e^z - 1). \tag{1.44}$$

Théorème 1.31 *[41] Soit*

$$\mathcal{B}_r(z) = \sum_{k\geq 0} a_{k+r,0}\frac{z^k}{k!},$$

la fonction génératrice exponentielle de la suite finale $a_{n+r,0}$. *Alors la fonction génératrice exponentielle de la suite* $(a_{r,m})$ *de (1.42)*

$$\mathcal{A}_r(z) = \sum_{m\geq 0} a_{r,m}\frac{z^m}{m!},$$

est donnée par :

$$\mathcal{A}_r(z) = \mathcal{B}_r(\ln(1+z)). \tag{1.45}$$

Chapitre 2

Sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$

2.1 Introduction

Pour tous $n, p \in \mathbb{N}^*$, les sommes des puissances d'entiers notées $S_p^{(0)}(n)$, sont définies par la relation suivante :

$$S_p^{(0)}(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p.$$

Historiquement, cette dernière relation a fait l'objet de nombreux travaux de mathématiciens qui ont développé différentes méthodes [34, 4, 15, 26, 21, 23]. Ainsi, d'après N. Nielsen [36], les sommes suivantes étaient déjà connues des Grecs dont Archimède :

$$\begin{aligned} S_1^{(0)}(n) &= \frac{n(n+1)}{2}, \\ S_2^{(0)}(n) &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \\ S_3^{(0)}(n) &= \frac{n^2(n+1)^2}{4} = (S_1^{(0)}(n))^2. \end{aligned}$$

Selon le même auteur, de nombreux mathématiciens ont étudié ce problème. Les rèsultats les plus importants ont été obtenus par Pierre de Fermat, le Français Blaise Pascal et le Suisse Jacques Bernoulli.

Pierre de Fermat a donné l'expression des sommes de puissances d'entiers $S_p^{(0)}(n)$ pour $p = 4$, par la formule :

$$5S_4^{(0)}(n) = S_2^{(0)}(n)\left(6S_1^{(0)}(n) - 1\right).$$

Blaise Pascal [37] a établi une formule de récurrence qui permet de déterminer les sommes des puissances d'entiers $S_p^{(0)}(n)$ connaissant $S_j^{(0)}(n)$, pour $0 \leq j \leq p-1$. Cette formule s'écrit par :

$$S_p^{(0)}(n) = \frac{1}{p+1}\left((n+1)^{p+1} - 1 - \sum_{j=0}^{p-1}\binom{p+1}{j}S_j^{(0)}(n)\right).$$

Enfin, Jacques Bernoulli est le premier mathématicien a avoir établi la formule générale de la détermination des sommes de puissances d'entiers $S_p^{(0)}(n)$, comportant les suites de nombres rationnels :

$$S_p^{(0)}(n) = \frac{1}{p+1}n^{p+1} + \frac{1}{2}n^p + \frac{1}{p+1}\sum_{k=1}^{[\frac{p}{2}]}\binom{p+1}{2k}\mathbb{B}_{2k}n^{p+1-2k}.$$

où $(\mathbb{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ c'est une suite des nombres rationnels "applés les nombres de Bernoulli".

En 1993, Knuth dans son article [25] a signalé les travaux de Johann Faulhaber (1580-1635) [16] sur la détermination des sommes de puissances d'entiers, il présente les expressions de $S_p^{(0)}(n)$ pour $1 \leq p \leq 17$.

Dans l'article [25] de Knuth on retrouve aussi les expressions des hyper-sommes de puissances d'entiers qui ont été introduites pour la première fois par Faulhaber, comme une généralisation des sommes de puissances d'entiers.

Définition 2.1 *Pour tous entiers naturels* n, r *et* p, *les hyper-sommes de puissances d'entiers notés* $S_p^{(r)}(n)$ *sont définies par la relation de récurrence suivante :*

$$S_0^{(r)}(n) = \binom{n+r}{r+1},\ r \geq 0,$$
$$S_p^{(0)}(n) = \sum_{i=1}^{n} i^p,\ \ n \geq 1,$$
$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{j=1}^{n} S_p^{(r-1)}(j),\ \ n, r, p \geq 1.$$

Knuth [25] mentionne que Faulhaber a découvert des formules pour les hyper-sommes de puissances d'entiers. Il a constaté que les hyper-sommes de puissances d'entiers pairs $S_{2m}^{(r)}(n)$ peuvent s'exprimer comme un polynôme en N_r, où $N_r = \frac{(n^2+rn)}{2}$, multiplié par

$S_2^{(r)}(n)$. Nous donnons les formules obtenues :

$$\begin{aligned}
S_4^{(2)}(n) &= \frac{1}{5}\,(4N_2 - 1)\,S_2^{(2)}(n),\\
S_4^{(3)}(n) &= \frac{1}{7}\,(4N_3 - 1)\,S_2^{(3)}(n),\\
S_4^{(4)}(n) &= \frac{1}{14}(6N_4 - 1)S_2^{(4)}(n),\\
S_4^{(6)}(n) &= \frac{1}{15}(4N_6 - 1)S_2^{(6)}(n),\\
S_6^{(2)}(n) &= \frac{1}{7}(6N_2^2 - 5N_2 + 1)S_2^{(2)}(n),\\
S_6^{(3)}(n) &= \frac{1}{21}(10N_3^2 - 10N_3 + 1)S_2^{(3)}(n),\\
S_6^{(4)}(n) &= \frac{1}{14}(4N_4^2 - 4N_4 - 1)S_2^{(4)}(n),\\
S_8^{(2)}(n) &= \frac{1}{15}(16N_2^3 - 28N_2^2 + 18N_2 - 3)S_2^{(2)}(n).
\end{aligned}$$

De la même façon, il a donné des expressions pour les hyper-sommes de puissances d'entiers impairs $S_{2m+1}^{(r)}(n)$, qui peuvent s'exprimer aussi comme un polynôme en $N_r = \frac{(n^2+rn)}{2}$, multiplié par $S_1^{(r)}(n)$. Nous donnons les formules obtenues :

$$\begin{aligned}
S_5^{(2)}(n) &= \frac{1}{14}(8N_2^2 - 2N_2 - 1)S_1^{(2)}(n),\\
S_7^{(2)}(n) &= \frac{1}{60}(16N_2^3 - 40N_2^2 + 6N_2 + 6)S_1^{(2)}(n).
\end{aligned}$$

En 2005, Inaba [24] a exploité les formules remarquables de $S_p^{(0)}(n)$ obtenues par Srivastava, Joshi et Bisht [45]

$$S_p^{(0)}(n) = \sum_{k=1}^{p} k!\binom{n+1}{k+1}\left\{{p \atop k}\right\}, \quad n, p \geq 1. \tag{2.1}$$

Pour établir la formule explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers comportant les nombres de stirling de deuxième espèce

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{k=1}^{p} k!\binom{n+r+1}{r+k+1}\left\{{p \atop k}\right\}, \quad n, p \geq 1. \tag{2.2}$$

Dans ce qui suit, notre travail consiste à étudier un ancien problème concernant les hyper-sommes de puissances d'entiers. On commence par donner une relation de récurrence, liant les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ et les nombres de Stirling de première espèce. Nous énonçons ensuite, certaines fonctions génératrices sur $S_p^{(r)}(n)$ (ordinaire, exponentielle et double). À la fin de ce chapitre, nous présentons, une formule explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers faisant intervenir les polynômes de Bernoulli généralisés.

2.2 Relation de récurrence de $S_p^{(r)}(n)$ comportant les nombres de Stirling de première espèce

Le résultat suivant donne une relation de récurrence sur $p \in \mathbb{N}$, pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ à l'aide des nombres de Stirling de première espèce. La technique employée est basée sur la transformation de Stirling.

Théorème 2.2 *Pour tous entiers* $m \in \mathbb{N}$ *et* $n \geq 1$, *on a*

$$\sum_{k=1}^{m} s(m,k) S_k^{(r)}(n) + S_0^{(r)}(n)\delta_{0,m} = m! \binom{n+r+1}{m+r+1} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,m}. \tag{2.3}$$

Démonstration. Pour tout entier naturel $m \in \mathbb{N}$, et $n \geq m+1$, on considère la suite initiale suivante :

$$a_{0,m} = m! \binom{n+r+1}{m+r+1} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,m}, \tag{2.4}$$

en utilisant la relation de récurrence (1.41), on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} \frac{(n+r)!}{(n-1)!(r+1)!} & \frac{(n+r+1)!}{(n-1)!(r+2)!} & \frac{2(n+r+1)!}{(n-2)!(r+3)!} & \frac{6(n+r+1)!}{(n-3)!(r+4)!} & \cdots \\ \frac{(n+r+1)!}{(n-1)!(r+2)!} & \frac{(n+r+1)!(2n+r+1)}{(n-1)!(r+3)!} & \frac{2(2+2r+3n)(n+r+1)!}{(n-2)!(r+3)!} & \vdots & \\ \frac{(n+r+1)!(2n+r+1)}{(n-1)!(r+3)!} & \frac{(6n^2+6nr+r^2+6n+r)(n+r+1)!}{(n-1)!(r+4)!} & \vdots & & \\ \frac{(6n^2+6nr+r^2+6n+r)(n+r+1)!}{(n-1)!(r+4)!} & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

D'autre part, d'après le théorème (1.29), on obtient :

$$a_{N,m} = \sum_{k=0}^{N} \left\{ {N+m \atop k+m} \right\}_m \left((m+k)! \binom{n+r+1}{m+k+r+1} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,m+k} \right). \tag{2.5}$$

En changeant N en p dans (2.5), on trouve que :

$$a_{p,m} = \sum_{k=0}^{p} \left\{ \begin{matrix} p+m \\ k+m \end{matrix} \right\}_m \left((m+k)! \binom{n+r+1}{m+k+r+1} - \binom{n+r}{r} \delta_{0,m+k} \right).$$

En substituant maintenant 0 à m, il découle

$$a_{p,0} = \sum_{k=0}^{p} \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} \left(k! \binom{n+r+1}{k+r+1} - \binom{n+r}{r} \delta_{0,k} \right).$$

Par suite, nous obtenons :

$$\begin{aligned} a_{p,0} &= \sum_{k=0}^{p} \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} k! \binom{n+r+1}{k+r+1} - \binom{n+r}{r} \delta_{0,p} \\ &= \sum_{k=1}^{p} \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} k! \binom{n+r+1}{k+r+1} + \binom{n+r+1}{r+1} \delta_{0,p} - \binom{n+r}{r+1} \delta_{0,p}. \end{aligned}$$

D'après la propriété

$$\binom{n+r}{r+1} = \binom{n+r+1}{r+1} - \binom{n+r}{r},$$

donc, la suite finale est donnée par

$$\begin{aligned} a_{p,0} &= \sum_{k=1}^{p} \left\{ \begin{matrix} p \\ k \end{matrix} \right\} k! \binom{n+r+1}{k+r+1} + \binom{n+r}{r+1} \delta_{0,p}, \\ &= S_p^{(r)}(n) + S_0^{(r)}(n) \delta_{0,p}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Finalement, en exploitant la suite initiale (2.4) et la suite finale (2.6) dans le Théorème 1.29, on obtient l'égalité suivante :

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k) (S_{p+k}^{(r)}(n) + S_0^{(r)}(n) \delta_{0,p+k}) =$$

$$\sum_{k=0}^{p} \left\{ \begin{matrix} p+m \\ k+m \end{matrix} \right\}_m \left((m+k)! \binom{n+r+1}{m+k+r+1} - \binom{n+r}{r} \delta_{0,m+k} \right). \tag{2.7}$$

Il suffit maintenant de remplacer p par 0 dans la dernière relation (2.7), on obtient le résultat recherché. □

Exemple

D'après le Théorème 2.2, les calculs suivants donnent quelques résultats remarquables des hyper-sommes de puissances d'entiers pour les premières valeurs de $m = 0, 1, 2, 3$.

1. Dans le cas où $m = 0$, nous établissons le résultat suivant

$$S_0^{(r)}(n) = \binom{n+r+1}{r+1} - \binom{n+r}{r},$$

d'après la propriété (1.1), on obtient

$$S_0^{(r)}(n) = \binom{n+r}{r+1}.$$

2. Dans le cas où $m = 1$, nous établissons le résultat suivant

$$s(1,1)S_1^{(r)}(n) = \binom{n+r+1}{r+2},$$

on sait que $s(1,1) = 1$, donc

$$S_1^{(r)}(n) = \binom{n+r+1}{r+2},$$

3. Dans le cas où $m = 2$, nous établissons le résultat suivant

$$s(2,2)S_2^{(r)}(n) + s(2,1)S_1^{(r)}(n) = 2\binom{n+r+1}{r+3},$$

on sait que $s(2,1) = -1$ et $s(2,2) = 1$, donc

$$S_2^{(r)}(n) = 2\binom{n+r+1}{r+3} + S_1^{(r)}(n),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} S_2^{(r)}(n) &= 2\binom{n+r+1}{r+3} + \binom{n+r+1}{r+2}, \\ &= 2\binom{n+r+1}{r+3} + \frac{r+3}{n-1}\binom{n+r+1}{r+3}, \\ &= \frac{2n+r+1}{n-1}\binom{n+r+1}{r+3}, \\ &= \frac{(n+r+1)!(2n+r+1)}{(n-1)!(r+3)!}. \end{aligned}$$

4. Dans le cas où $m = 3$, nous établissons le résultat suivant :
$$S_3^{(r)}(n) + s(3,2)S_2^{(r)}(n) + s(3,1)S_1^{(r)}(n) = 6\binom{n+r+1}{r+4},$$
on sait que $s(3,3) = 1$, $s(3,2) = -3$ et $s(3,1) = 2$, donc :
$$\begin{aligned} S_3^{(r)}(n) &= 6\binom{n+r+1}{r+4} - 2S_1^{(r)}(n) + 3S_2^{(r)}(n), \\ &= 6\binom{n+r+1}{r+4} + 3\frac{2n+r+1}{n-1}\binom{n+r+1}{r+3} - 2\binom{n+r+1}{r+2}, \end{aligned}$$
comme :
$$\begin{aligned} \binom{n+r+1}{r+2} &= \frac{(r+4)(r+3)}{(n-1)(n-2)}\binom{n+r+1}{r+4}, \\ \binom{n+r+1}{r+3} &= \frac{(r+4)}{(n-2)}\binom{n+r+1}{r+4}. \end{aligned}$$
Ce qui implique
$$\begin{aligned} S_3^{(r)}(n) &= 6\binom{n+r+1}{r+4} + 3\frac{2n+r+1}{(n-1)}\frac{(r+4)}{(n-2)}\binom{n+r+1}{r+4} - 2\frac{(r+4)(r+3)}{(n-1)(n-2)}\binom{n+r+1}{r+4}, \\ &= \left[6 + 3\frac{2n+r+1}{(n-1)}\frac{(r+4)}{(n-2)} - 2\frac{(r+4)(r+3)}{(n-1)(n-2)}\right]\binom{n+r+1}{r+4}, \\ &= \left[6 + 3\frac{2n+r+1}{(n-1)}\frac{(r+4)}{(n-2)} - 2\frac{(r+4)(r+3)}{(n-1)(n-2)}\right]\frac{(n+r+1)}{(n-3)!(r+4)!}, \\ &= \frac{(6n^2+6nr+r^2+6n+r)(n+r+1)!}{(n-1)!(r+4)!}. \end{aligned}$$

En remplaçant maintenant $m = 0$, dans la relation (2.7), on établit le corollaire suivant qui donne une formule explicite pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$.

Corollaire 2.3 *Pour tout entier* $p \geq 0$*, on a*
$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{k=0}^{p} \left\{ {p \atop k} \right\} \left(k!\binom{n+r+1}{k+r+1} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,k} \right). \tag{2.8}$$

2.3 Fonctions génératrices pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$

Dans cette section, nous établissons les différentes fonctions génératrices (exponentielle, ordinaire et double) pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$.

2.3.1 Fonctions génératrices exponentielles pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$

Nous allons présenter dans ce paragraphe de nombreuses fonctions génératrices exponentielles de $S_p^{(r)}(n)$, on commence par le résultat suivant qui donne une fonction génératrice exponentielle pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$, en terme de la fonction hypergéométrique de Gauss.

Théorème 2.4 *La fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ est donnée par :*

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \binom{n+r+1}{r+1}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\ r+2\end{matrix};\ 1-e^z\right) - \binom{n+r}{r}. \tag{2.9}$$

Démonstration. D'après Théorème 1.30, on a

$$\sum_{p\geqslant 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = A_0(e^z-1).$$

comme

$$A_0(z) = \sum_{m\geq 0} a_{0,m}\frac{z^m}{m!}.$$

Ce qui permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
A_0(z) &= \sum_{p\geq 0}\left(p!\binom{n+r+1}{p+r+1} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,p}\right)\frac{z^p}{p!}\\
&= \sum_{p\geq 0}\binom{n+r+1}{p+r+1}z^p - \binom{n+r}{r}\\
&= \binom{n+r+1}{r+1}\sum_{p\geq 0}\frac{(1)^{\bar{p}}(-n)^{\bar{p}}}{(r+2)^{\bar{p}}}\frac{(-z)^p}{p!} - \binom{n+r}{r},
\end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration du théorème. □

En simplifiant le Théorème 2.4, nous obtenons le corollaire suivant :

Corollaire 2.5 *La fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ est donnée par :*

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{kz}. \tag{2.10}$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice (2.9) du Théorème 2.4, on a

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \binom{n+r+1}{r+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\ r+2\end{matrix}; 1-e^z\right) - \binom{n+r}{r}.$$

On sait que

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\ r+2\end{matrix}; 1-e^z\right) = (r+1)\int_0^1 (1-x)^r(1-x+xe^z)^n dx,$$

ce qui permet alors d'écrire

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \frac{(n+r+1)!}{n!r!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(n-k)z}\int_0^1 (1-x)^{r+k}x^{n-k}dx - \binom{n+r}{r}.$$

Comme

$$\int_0^1 (1-x)^{r+k}x^{n-k}dx = \frac{(r+k)!(n-k)!}{(n+r+1)!},$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \frac{(n+r+1)!}{n!r!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{(n-k)z}\frac{(r+k)!(n-k)!}{(n+r+1)!} - \binom{n+r}{r} \\ &= \frac{1}{n!r!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(r+k)!(n-k)!e^{(n-k)z} - \binom{n+r}{r},\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{r}e^{(n-k)z} - \binom{n+r}{r} \\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\binom{k+r}{r}e^{(n-k)z} \\ &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{kz}.\end{aligned}$$

ce qui démontre le corollaire. $\square$

Enfin, nous donnons dans le théorème suivant une autre représentation de la fonction génératrice exponentielle pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$.

Théorème 2.6 *La fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ est donnée par*

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \frac{(-1)^r e^{rz}}{(1-e^z)^{r+1}}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}(1-e^{-z})^k - e^{(n+1)z}\right) - \binom{n+r}{r}. \tag{2.11}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule (1.5), qui se trouve dans le chapitre 1. □

Formule explicite de $S_p^{(r)}(n)$

La fonction génératrice exponentielle (2.10) du Corolaire 2.5, permet de déduire une expression explicite pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$.

Corollaire 2.7 *Pour tout entier $p \geq 0$, la formule explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ est donnée par l'expression suivante :*

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}k^p. \tag{2.12}$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice exponentielle (2.10), on a

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{kz}.$$

On sait que

$$e^{kz} = \sum_{p\geq 0}\frac{(kz)^p}{p!},$$

ce qui permet d'écrire :

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}\sum_{p\geq 0}\frac{(kz)^p}{p!}\\ &= \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}k^p\right)\frac{z^p}{p!}.\end{aligned} \tag{2.13}$$

En identifiant le coefficient de $\frac{z^p}{p!}$ dans chacun des deux membres de (2.13), on obtient la formule explicite recherchée (2.12). □

2.3.2 Fonction génératrice ordinaire pour les hyper-smmes $S_p^{(r)}(n)$

Le résutat suivant donne une fonction génératrice ordinaire concernant les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$

Théorème 2.8 *La fonction génératrice ordinaire des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ est donnée par*

$$\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n) z^r = \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} (1-z)^k k^p. \tag{2.14}$$

Démonstration. On sait que

$$\sum_{r\geq 0} \binom{n+r-k}{r} z^r = (1-z)^{k-n-1}. \tag{2.15}$$

D'après la formule explicite du Corollaire 2.7, on a :

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k}{r} k^p. \tag{2.16}$$

En utilisant (2.15) et (2.16), on déduit que l'on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{r\geq 0} S_p^{(r)}(n) z^r &= \sum_{r\geq 0} \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n+r-k}{r} k^p \right) z^r \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{r\geq 0} \binom{n+r-k}{r} z^r \right) k^p \\
&= \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} (1-z)^k k^p,
\end{aligned}$$

ce qui établit la relation du Théorème 2.8. □

2.3.3 Fonction génératrice double pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$

À partir des deux résultats des fonctions génératrices (ordinaire et exponentielle), on peut formuler l'expression d'une fonction génératrice double concernant les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$.

Théorème 2.9 *La fonction génératrice double des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ est donnée par :*

$$\sum_{r\geq 0} \sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n) \frac{z^p}{p!} t^r = \frac{e^{(n+1)z}(1-t)^n - e^z}{(1-t)^n (e^z(1-t)-1)}. \tag{2.17}$$

Démonstration. En exploitant la fonction génératrice exponentielle du Corollaire 2.9, et la fonction génératrice ordinaire du Théorème 2.8, on déduit que

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!}t^r &= \sum_{r\geq 0}\left(\sum_{k=1}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{kz}\right)t^r \\ &= \sum_{k=1}^{n}\sum_{r\geq 0}\binom{n+r-k}{r}t^r e^{kz} \\ &= \frac{1}{(1-t)^{n+1}}\sum_{k=1}^{n}(e^z(1-t))^k. \end{aligned} \tag{2.18}$$

En constatant que la quantité $\sum\limits_{k=1}^{n}(e^z(1-t))^k$ du second membre de (2.18), est une somme d'une suite géométrique qui peut s'écrire comme suit

$$\sum_{k=1}^{n}(e^z(1-t))^k = (1-t)\left(\frac{e^z-(e^{(n+1)z}(1-t)^n)}{1-e^z(1-t)}\right). \tag{2.19}$$

En utilisant (2.18) et (2.19), on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!}t^r &= \frac{(1-t)}{(1-t)^{n+1}}\left(\frac{e^z-(e^{(n+1)z}(1-t)^n)}{1-e^z(1-t)}\right) \\ &= \frac{e^{(n+1)z}(1-t)^n-e^z}{(1-t)^n(e^z(1-t)-1)},\end{aligned}$$

ce qui établit (2.17). □

2.4 Formule explicite pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$ faisant intervenir les polynômes de Bernoulli généralisée

Nous présentons dans ce paragraphe, une nouvelle formule explicite pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$, à l'aide des polynômes de Bernoulli généralisés

Théorème 2.10 *Pour tous entiers naturels n, p et r, la formule explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers est donnée par la relation suivante :*

$$\begin{aligned}S_p^{(r)}(n) = \frac{p!}{(p+r+1)!}\mathbb{B}_{p+r+1}^{(r+1)}(n+r+1) - p!\sum_{j=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{\mathbb{B}_{p+j+1}^{(j+1)}(j)}{(p+j+1)!} \\ -\binom{n+r}{r}\delta_{0,p}.\end{aligned} \tag{2.20}$$

Démonstration. D'après la fonction génératrice exponentielle (2.11) du Théorème 2.6, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \frac{(-1)^r e^{rz}}{(1-e^z)^{r+1}}\left(\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}(1-e^{-z})^k - e^{(n+1)z}\right) - \binom{n+r}{r}\\ &= -\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{e^{(r-k)z}}{(e^z-1)^{r-k+1}} + \frac{e^{(r+n+1)z}}{(e^z-1)^{r+1}} - \binom{n+r}{r}.\end{aligned} \tag{2.21}$$

D'après la relation (1.31), on peut écrire

$$\frac{1}{(e^z-1)^{r-k+1}}e^{(r-k)z} = \frac{1}{z^{r-k+1}}\sum_{p\geq 0}\mathbb{B}_p^{(r-k+1)}(r-k)\frac{z^p}{p!}, \tag{2.22}$$

et

$$\frac{1}{(e^z-1)^{r+1}}e^{(n+r+1)z} = \frac{1}{z^{r+1}}\sum_{p\geq 0}\mathbb{B}_p^{(r+1)}(n+r+1)\frac{z^p}{p!}. \tag{2.23}$$

De (2.22), (2.23) et après quelques réarrangements la relation (2.21), devient :

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S_p^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{p\geq 0}\Bigg(& p!\frac{\mathbb{B}_{p+r+1}^{(r+1)}(n+r+1)}{(p+r+1)!}\\ &- \sum_{k=0}^{r} p!\frac{\mathbb{B}_{p+r-k+1}^{(r-k+1)}(r-k)}{(p+r-k+1)!}\binom{n+k}{k} - \binom{n+r}{r}\delta_{0,p}\Bigg)\frac{z^p}{p!}.\end{aligned} \tag{2.24}$$

En identifiant le coefficient de $\frac{z^p}{p!}$ dans chacun des deux membres de (2.24), on obtient la formule explicite recherchée (2.20). □

Pour $r = 0$, nous obtenons la formule de Faulhaber, qui exprime les sommes de puissances d'entiers $S_p^{(0)}(n)$ en fonction des nombres de Bernoulli.

Corollaire 2.11 *Pour tous entiers* $n, p \geq 0$, *on a*

$$S_p^{(0)}(n) = \frac{1}{(p+1)}(\mathbb{B}_{p+1}(n+1) - \mathbb{B}_{p+1}(0)) - \delta_{0,p}.$$

Chapitre 3

Sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$

3.1 Introduction

Pour tous entiers naturels $n, p \in \mathbb{N}^*$, on définit les sommes des puissances $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ de $(n+1)$-*termes* par la formule :

$$\begin{aligned} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) &= a^p + (a+b)^p + \cdots + (a+nb)^p \\ &= \sum_{i=0}^{n} (a+ib)^p, \end{aligned}$$

où a et b sont deux nombres complexes avec $b \neq 0$.

- Pour $a = 0, b = 1$ et $p = 0$, on trouve que :

$$S^{(0)}_{p,(0,1)}(n) = n + 1.$$

- Pour $a = 0, b = 1$ et $p > 0$, on trouve que :

$$\begin{aligned} S^{(0)}_{p,(0,1)}(n) &= 1^p + 2^p + \cdots + n^p \\ &= S^{(0)}_p(n). \end{aligned}$$

Plusieurs articles ont été publiés, traitant des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ et leurs propriétés [3, 4, 15, 28, 32, 34].

En 1996, C. D. Howard [22] a réussi à déterminer la fonction génératrice exponentielle des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$, à partir de la relation :

$$\sum_{p\geq 0} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n} e^{(a+kb)z}. \tag{3.1}$$

En 2014, M. Merca [32] a réussi à exprimer la formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$, à l'aide des polynôme de Bernoulli, à partir de la formule :

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \frac{b^p}{p+1}\left(B_{p+1}\left(n+\frac{a}{b}+1\right) - B_{p+1}\left(\frac{a}{b}\right)\right). \tag{3.2}$$

Définition 3.1 *Pour tous entiers naturels* n, r *et* p, *les hyper-sommes de puissances des entiers sont notées* $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$, *définies par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{cases} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \sum\limits_{k=0}^{n}(a+kb)^p = S_{p,(a,b)}(n), \\ S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} S^{(r-1)}_{p,(a,b)}(k), \end{cases}$$

où a *et* b *sont deux nombres complexes avec* $b \neq 0$.

Ce chapitre contient deux parties. La première partie est consacrée à une étude sur les sommes de puissances d'entiers $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \sum\limits_{k=0}^{n}(a+kb)^p$, dans lesquelles nous établissons certaines formules explicites comportant les suites des nombres et des polynômes (les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés, r-Stirling de deuxième espèce, r-Whitney de deuxième espèce et les polynômes de Bernoulli).

La deuxième partie est consacrée à une étude sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) = \sum\limits_{k=0}^{n} S^{(r-1)}_{p,(a,b)}(k)$, dans lesquelles nous donnons une expression explicite de $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$, nous établissons ensuite certaines fonctions génératrices de $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$ (exponentielle, ordinaire et double), nous terminons cette partie en donnant une représentation explicite pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$ à l'aide des polynômes de Bernoulli généralisés.

3.2 Formules explicites pour les sommes des puissances d'entiers $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$

Dans la première partie de ce chapitre, nous nous sommes intéréssés à établir de nombreuses expressions explicites pour les sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$.

3.2.1 Formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés

Nous définissons dans le théorème suivant une formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ à l'aide des nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés.

Théorème 3.2 *Pour tous entiers naturels positifs $n, p \geq 0$, la formule explicite de $S^{0}_{p,(a,b)}(n)$, est donnée par :*

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = b^p \sum_{k=0}^{p} k! \binom{n+1}{k+1} \mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{b}\right). \tag{3.3}$$

où a et b sont deux nombres complexes avec $b \neq 0$,

Démonstration. On a

$$\sum_{p\geq 0} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} = \sum_{p\geq 0} \left(b^p \sum_{k=0}^{p} k! \binom{n+1}{k+1} \mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{b}\right)\right) \frac{z^p}{p!}.$$

Ce qui entraîne

$$\sum_{p\geq 0} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} = \sum_{k\geq 0} k! \binom{n+1}{k+1} \sum_{p\geq 0} \mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{b}\right) \frac{(bz)^p}{p!}.$$

En exploitant la relation (1.14), on obtient

$$\sum_{p\geq 0} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} = e^{az} \sum_{k\geq 0} \binom{n+1}{k+1} \left(e^{bz} - 1\right)^k.$$

Ensuite, on aura

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) \frac{z^p}{p!} &= e^{az} \frac{e^{(n+1)bz} - 1}{e^{bz} - 1} \\ &= \sum_{k=0}^{n} e^{(a+kb)z}.\end{aligned}$$

Ce qui finit la démonstration du Théorème 3.2. □

3.2.2 Formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les nombres de r-Stirling de deuxième espèce

Le corollaire qui suit permet d'affirmer que $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ peut s'exprimer à l'aide des nombres de r-Stirling de deuxième espèce :

Corollaire 3.3 *Pour tous entiers naturels* $n \geq 0, p > 0$*, la formule explicite de* $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ *est donnée par la relation suivante :*

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = b^p \sum_{k=0}^{p} k! \binom{n+1}{k+1} \left\{ \begin{matrix} p+\frac{a}{b} \\ k+\frac{a}{b} \end{matrix} \right\}_{\frac{a}{b}}, \tag{3.4}$$

où b *divise* a*.*

Démonstration. Nous exploitons la propriété (1.16) qui permet d'écrire $\mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{d}\right)$ sous la forme suivante

$$\mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{b}\right) = \left\{ \begin{matrix} p+\frac{a}{b} \\ k+\frac{a}{b} \end{matrix} \right\}_{\frac{a}{b}}.$$

Ce qui implique que

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = b^p \sum_{k=0}^{p} k! \binom{n+1}{k+1} \left\{ \begin{matrix} p+\frac{a}{b} \\ k+\frac{a}{b} \end{matrix} \right\}_{\frac{a}{b}}. \tag{3.5}$$

Ce qui fini la démonstration du Corollaire 3.3. □

3.2.3 Formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les nombres r-Whitney de deuxième espèce

Le corollaire qui suit permet d'affirmer que $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ peut s'exprimer à l'aide des nombres de r-Whitney de deuxième espèce.

Corollaire 3.4 *Pour tous entiers naturels* $n \geq 0, p > 0$*, la formule explicite de* $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ *est donnée par :*

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \sum_{k=0}^{p} k! b^k \binom{n+1}{k+1} W_{b,a}(p,k). \tag{3.6}$$

Démonstration. En exploitant la propriété (1.22) qui nous permet d'écrire $\mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{b}\right)$ sous la forme suivante :

$$\mathcal{S}^k_p\left(\frac{a}{b}\right) = b^{k-p}W_{b,a}(p,k),$$

ce qui entraîne

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \sum_{k=0}^{p} k!b^k\binom{n+1}{k+1}W_{b,a}(p,k). \tag{3.7}$$

La démonstration du corollaire est complète. □

3.2.4 Formule explicite des sommes $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les polynômes de Bernoulli

Le théorème qui suit permet d'exprimer des sommes des puissances d'entiers $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$ par une représentation explicite à l'aide des polynômes de Bernoulli.

Théorème 3.5 *Soient* a *et* b *de deux nombres complexe avec* $b \neq 0$*, pour tous entiers naturels positifs* $n, p \geq 0$*, on a*

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \frac{b^p}{p+1}\sum_{s=0}^{p}\binom{p+1}{s}(n+1)^{p+1-s}\mathbb{B}_s\left(\frac{a}{b}\right). \tag{3.8}$$

Démonstration. En utilisant (1.29) et (3.2), on obtient

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \frac{b^p}{p+1}\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left(\mathcal{S}^k_{p+1}\left(n+\frac{a}{b}+1\right) - \mathcal{S}^k_{p+1}\left(\frac{a}{b}\right)\right) \tag{3.9}$$

Puis, en exploitant le résultat suivant

$$\mathcal{S}^k_s(x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^s,$$

donc la relation (3.9) devient

$$\begin{aligned}
S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) &= \frac{b^p}{p+1}\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left[\left(n+\frac{a}{b}+1+j\right)^{p+1} - \left(\frac{a}{b}+j\right)^{p+1}\right]\right)\\
&= \frac{b^p}{p+1}\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left[\sum_{s=0}^{p}\binom{p+1}{s}\left(\frac{a}{b}+j\right)^s(n+1)^{p+1-s}\right]\right)
\end{aligned}$$

Ce qui s'écrit

$$\begin{aligned} S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) &= \frac{b^p}{p+1}\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left(\sum_{s=0}^{p}\binom{p+1}{s}(n+1)^{p+1-s}\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left(\frac{a}{b}+j\right)^s\right)\\ &= \frac{b^p}{p+1}\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\left(\sum_{s=0}^{p}\binom{p+1}{s}(n+1)^{p+1-s}\mathcal{S}_s^k\left(\frac{a}{b}\right)\right)\\ &= \frac{b^p}{p+1}\sum_{s=0}^{p}\binom{p+1}{s}(n+1)^{p+1-s}\left(\sum_{k=0}^{p+1}(-1)^k\frac{k!}{k+1}\mathcal{S}_s^k\left(\frac{a}{b}\right)\right). \end{aligned}$$

En exploitant (1.29), on obtient

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \frac{b^p}{p+1}\sum_{s=0}^{p}\binom{p+1}{s}(n+1)^{p+1-s}\mathbb{B}_s\left(\frac{a}{b}\right).$$

La démonstration du théorème est complète. □

3.3 Formule explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$

Dans la deuxième partie de ce chapitre, nous commençons d'abord par donner une expression explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

Théorème 3.6 *La formule explicite des hyper-sommes $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$ est donnée par :*

$$S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}(a+kb)^p. \tag{3.10}$$

Démonstration. La preuve de ce théorème peut se faire facilement par récurrence sur l'entier $r \in \mathbb{N}$, il suffit d'exploiter la propriété bien connue (1.3), qui permet d'écrire

$$\sum_{k=i}^{n}\binom{k-i+r-1}{r-1} = \binom{n+r-i}{r}.$$

□

3.4 Fonctions génératrices des hyper-sommes des puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$

Dans cette section, nous proposons trois fonctions génératrices (exponentielle, ordinaire et double) pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

3.4.1 Fonctions génératrices exponentielles de $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$

Au début, nous présentons dans le théorème suivant la première fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

Théorème 3.7 *La fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes* $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$ *est donnée par :*

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{(a+kb)z}. \tag{3.11}$$

Démonstration. D'après la formule du Théorème 3.6, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{p\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}(a+kb)^p\right)\frac{z^p}{p!}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}\sum_{p\geq 0}\frac{(z(a+kb))^p}{p!}.\end{aligned}$$

En exploitant :

$$e^z = \sum_{p\geq 0}\frac{z^p}{p!},$$

et, donc

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{z(a+kb)}.$$

Ce qui établit la relation du théorème. □

Ensuite, nous donnons dans le résultat suivant la deuxième fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$.

Théorème 3.8 *La fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes des puissances d'entiers* $S^{(r)}_{p,(a,d)}(n)$ *est donnée par :*

$$\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} = \binom{n+r+1}{r+1}e^{az}{}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\ r+2\end{matrix};\,1-e^{bz}\right). \tag{3.12}$$

Démonstration. En exploitant d'abord la fonction génératrice exponentielle du Théorème 3.7, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}e^{z(a+kb)}\\ &= e^{az}\sum_{k=0}^{n}\binom{k+r}{r}e^{b(n-k)z}\\ &= \frac{e^{az}}{n!r!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(n-k)!(r+k)!e^{b(n-k)z}. \end{aligned} \tag{3.13}$$

En multipliant le second membre de la dernière égalité (3.13) par la quantité $\frac{(n+r+1)!}{(n+r+1)!}$, on obtient

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \frac{(n+r+1)!e^{az}}{n!r!}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!(r+k)!}{(n+r+1)!}e^{b(n-k)z}\\ &= \binom{n+r+1}{r+1}(r+1)e^{az}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(n-k)!(r+k)!}{(n+r+1)!}e^{b(n-k)z}. \end{aligned} \tag{3.14}$$

Puis en exploitant la propriété suivante

$$\int_0^1 (1-x)^{r+k}x^{n-k}dx = \frac{(n-k)!(r+k)!}{(n+r+1)!}$$

La relation (3.14), devient

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \binom{n+r+1}{r+1}(r+1)e^{az}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}e^{b(n-k)z}\int_0^1 (1-x)^{r+k}x^{n-k}dx\\ &= \binom{n+r+1}{r+1}e^{az}(r+1)\int_0^1 (1-x)^r\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(xe^{bz}\right)^{n-k}(1-x)^k\right)dx\\ &= \binom{n+r+1}{r+1}e^{az}(r+1)\int_0^1 (1-x)^r\left(1-x+xe^{bz}\right)^n dx \end{aligned}$$

comme,

$${}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\ r+2\end{matrix};\ 1-e^{bz}\right) = (r+1)\int_0^1 (1-x)^r\left(1-x+xe^{bz}\right)^n dx$$

Finalement, on trouve que

$$\sum_{p\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \binom{n+r+1}{r+1} e^{az} {}_2F_1\left(\begin{matrix}1,-n\\ r+2\end{matrix}; 1-e^{bz}\right).$$

La démonstration est complète. □

Enfin, nous énonçons dans le théorème suivant la dernière fonction génératrice exponentielle des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_{p(a,b)}^{(r)}(n)$.

Théorème 3.9 *La fonction génératrice expenontielle des sommes de puissances d'entiers est donnée par la relation suivante :*

$$\sum_{p\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)\frac{z^p}{p!} = \frac{e^{(a+b(r+(n+1)))z}}{(e^{bz}-1)^{r+1}} - \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{e^{(a+(r-k)b)z}}{(e^{bz}-1)^{r-k+1}} \tag{3.15}$$

Démonstration. Il suffit d'appliquer la formule (1.5), qui se trouve dans le chapitre 1. □

3.4.2 Fonction génératrice ordinaire de $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

Nous donnons maintenant une fonction génératrice ordinaire des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

Théorème 3.10 *La fonction génératrice ordinaire des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$, est donnée par :*

$$\sum_{r\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) z^r = \frac{1}{(1-z)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}(1-z)^k(a+kb)^p. \tag{3.16}$$

Démonstration. D'après la formule explicite des hyper-sommes $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) z^r &= \sum_{r\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n+r-k}{r}(a+kb)^p\right) z^r\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{r\geq 0}\binom{n+r-k}{r} z^r\right)(a+kb)^p\end{aligned}$$

D'après la propriété

$$\sum_{r\geq 0}\binom{n+r-k}{r} z^r = (1-z)^{k-n-1}, \tag{3.17}$$

donc

$$\sum_{r\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) z^r = \sum_{k=0}^{n} \left((1-z)^{k-n-1}\right)(a+kb)^p$$
$$= \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (1-z)^k (a+kb)^p.$$

Ce qui établit la relation du Théorème 3.10. □

3.4.3 Fonction génératrice double de $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

A l'aide des fonctions génératices exponentielle et ordinaire que nous avons obtenues aux Théorème 3.7 et Théorème 3.10, nous établissons une fonction génératrice double des hyper-sommes de puissances d'entiers $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$.

Théorème 3.11 *Pour tous entiers* $n \geq 0, p \geq 0$*, la fonction génératrice double des hyper-sommes* $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$ *est donnée par :*

$$\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \frac{z^p}{p!} t^r = \frac{e^{az} - (1-t)^{n+1} e^{(a+(n+1)b)z}}{(1-t)^{n+1}(1-(1-t)e^{bz})}. \tag{3.18}$$

Démonstration. Corollaire 3.7 fournit la fonction génératrice exponentielle suivante :

$$\sum_{p\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \frac{z^p}{p!} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n+r-k}{r} e^{(a+kb)z}. \tag{3.19}$$

Théorème 3.10 fournit la fonction génératrice ordinaire suivante :

$$\sum_{p\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) z^r = \frac{1}{(1-z)^{n+1}} \sum_{k=1}^{n} (1-z)^k (a+kb)^p. \tag{3.20}$$

En exploitant (3.19) et (3.20), on déduit que

$$\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \frac{z^p}{p!} t^r = \sum_{r\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n+r-k}{r} e^{(a+kb)z}. \right) t^r$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\sum_{r\geq 0} \binom{n+r-k}{r} t^r \right) e^{(a+kb)z}.$$

À l'aide de la propriété suivante :

$$\sum_{r\geq 0}\binom{n+r-k}{r}z^r = (1-z)^{k-n-1},$$

il en résulte que l'on a

$$\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!}t^r = \frac{e^{az}}{(1-t)^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\left((1-t)e^{bz}\right)^k, \tag{3.21}$$

ensuite, en remarquant que la somme $\sum\limits_{k=0}^{n}(e^{bz}(1-t))^k$, du second membre de l'égalité (3.21) est une somme d'une suite géométrique, qui peut s'écrire

$$\sum_{k=0}^{n}(e^{bz}(1-t))^k = \left(\frac{1-(e^{(n+1)bz}(1-t)^{n+1})}{1-e^{bz}(1-t)}\right). \tag{3.22}$$

En utilisant (3.21) et (3.22), il en résulte que l'on a

$$\begin{aligned}\sum_{r\geq 0}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!}t^r &= \frac{e^{az}}{(1-t)^{n+1}}\left(\frac{1-(e^{(n+1)bz}(1-t)^{n})}{1-e^{bz}(1-t)}\right)\\ &= \frac{e^{az}-(1-t)^{n+1}e^{(a+(n+1)b)z}}{(1-t)^{n+1}(1-(1-t)e^{bz})}.\end{aligned}$$

Ce qui établit la relation (3.18) du Théorème 3.11. □

3.5 Formule explicite de $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$ faisant intervenir les polynômes de Bernoulli généralisés

Le théorème ci-dessou montre que les hyper-sommes de puissances d'entiers $S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)$ s'expriment à l'aide des polynômes de Bernoulli généralisés.

Théorème 3.12 *Pour tous entiers naturels n, p et r, la formule explicite des hyper-sommes de puissances d'entiers est donnée par la relation suivante :*

$$\begin{aligned}S^{(r)}_{p,(a,b)}(n) &= \frac{p!b^p}{(p+r+1)!}\mathbb{B}^{(r+1)}_{p+r+1}\left(\frac{a}{b}+(r+(n+1))\right)\\ &\quad - p!b^p\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{1}{(p+r+1-k)!}\mathbb{B}^{(r-k+1)}_{p+r+1-k}\left(\frac{a}{b}+(r-k)\right). \end{aligned}\tag{3.23}$$

Démonstration. On sait d'après la fonction génératrice exponentielle du Corollaire 3.9, on a

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \frac{e^{(a+b(r+(n+1)))z}}{(e^{bz}-1)^{r+1}} - \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{e^{(a+(r-k)b)z}}{(e^{bz}-1)^{r-k+1}}\\ &= \frac{1}{(zb)^{r+1}}\left(\frac{bz}{(e^{bz}-1)}\right)^{r+1} e^{(\frac{a}{b}+(r+(n+1)))bz}\\ &\quad - \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{1}{(zb)^{r-k+1}}\left(\frac{bz}{(e^{bz}-1)}\right)^{r-k+1} e^{(\frac{a}{b}+(r-k))bz} \end{aligned} \tag{3.24}$$

À l'aide de la relation (1.31), on peut écrire :

$$\left(\frac{1}{(e^{bz}-1)}\right)^{r+1} e^{(\frac{a}{b}+(r+(n+1)))bz} = \sum_{p\geq 0}\mathbb{B}^{(r+1)}_{p}\left(\frac{a}{b}+(n+r+1)\right)\frac{(zb)^{p-r-1}}{p!}, \tag{3.25}$$

et

$$\left(\frac{1}{(e^{bz}-1)}\right)^{r-k+1} e^{(\frac{a}{b}+(r-k))bz} = \sum_{p\geq 0}\mathbb{B}^{(r-k+1)}_{p}\left(\frac{a}{b}+r-k\right)\frac{(zb)^{p+k-r-1}}{p!}. \tag{3.26}$$

En exploitant (3.25) et (3.26), donc la relation (3.24) devient :

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{p\geq 0}\mathbb{B}^{(r+1)}_{p}\left(\frac{a}{b}+(n+r+1)\right)\frac{(bz)^{p-r-1}}{p!}\\ &\quad - \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\sum_{p\geq 0}\mathbb{B}^{(r-k+1)}_{p}\left(\frac{a}{b}+(r-k)\right)\frac{(zb)^{p+k-r-1}}{p!}.\end{aligned}$$

Ensuite, on aura

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{p\geq 0} b^{(p-r-1)}\mathbb{B}^{(r+1)}_{p}\left(\frac{a}{b}+(n+r+1)\right)\frac{z^{p-r-1}}{p!}\\ &\quad - \sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\sum_{p\geq 0} b^{p+k-r-1}\mathbb{B}^{(r-k+1)}_{p}\left(\frac{a}{b}+(r-k)\right)\frac{z^{p+k-r-1}}{p!}.\end{aligned}$$

Après quelques réarrangement, nous obtenons

$$\begin{aligned}\sum_{p\geq 0} S^{(r)}_{p,(a,b)}(n)\frac{z^p}{p!} &= \sum_{p\geq 0}\frac{z^p}{p!}\left(\frac{p!b^p}{(p+r+1)!}\mathbb{B}^{(r+1)}_{p+r+1}\left(\frac{a}{b}+(r+(r+1))\right)\right.\\ &\quad \left. - p!b^p\sum_{k=0}^{r}\binom{n+k}{k}\frac{1}{(p+r+1-k)!}\mathbb{B}^{(r-k+1)}_{p+r+1-k}\left(\frac{a}{b}+(r-k)\right)\right).\end{aligned} \tag{3.27}$$

En identifiant le coefficient de $\frac{z^p}{p!}$ dans chacun des deux membres de (3.27), on obtient la formule explicite recherchée (3.23). $\square$

Dans le cas $r = 0$, la formule explicite du Théorème 3.12 permet d'en déduire une expression explicite remarquable pour les sommes de puissances d'entiers $S^{(0)}_{p,(a,b)}(n)$.

Corollaire 3.13 *Pour tous entiers* $n, p \geq 0$ *et* $r = 0$*, la formule explicite des sommes de puissances d'entiers est donnée par :*

$$S^{(0)}_{p,(a,b)}(n) = \frac{b^p}{(p+1)}(\mathbb{B}_{n+1}(n + \frac{a}{b} + 1) - \mathbb{B}_{p+1}(\frac{a}{b})).$$

Chapitre 4

Congruences pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

4.1 Introduction

L'étude des congruences sur les sommes de puissances d'entiers :

$$S_p^{(0)}(n) = 1^p + 2^p + \cdots + n^p, \quad n, p \geq 1,$$

est un problème qui a préoccupé des générations de mathématiciens depuis l'antiquité, ce reste est toujours d'actualité. Parmi les auteurs à s'être particulièrement intéressés à l'étude de ces sommes, nous pouvons citer : Kieren MacMillan et Jonathan Sondow, dans leur article [30], ils ont signalé que la congruence suivante a été donnée par G. H. Hardy et E. M. Wright dans leur livre [20] (An Introduction to the Theory of Number, chapV, p.63).

$$S_p(n) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{n} & \text{si} \quad p-1 \mid n, \\ -1 \pmod{n} & \text{si} \quad p-1 \nmid n. \end{cases} \tag{4.1}$$

Cette congruence a été le point de départ pour établir et généraliser certaines congruences sur les hyper-sommes de puissances d'entiers. Ce chapitre s'appuie sur certains théorèmes d'arithmétiques classiques, il s'agit du petit théorème de Fermat qui affirme que pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tout entier a premier avec n, on a

$$n \nmid a \Rightarrow a^{n-1} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Ceci nous a permis de prouver de nombreuses congruences sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$, dans l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ modulo n, n étant nombre premier.
Le second théorème d'arithmétique que nous allons utiliser est le théorème d'Euler qui affirme que pour tout entier $n \geq 2$, et pour tout entier $a \in \mathbb{Z}$ tel que $(a, n) = 1$, on a

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}.$$

Ceci nous a permis de généraliser de nombreuses congruences sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$, modulo n^α, α étant un entier naturel supérieur ou égal à deux.

4.2 Congruences modulo n pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

Dans cette section, nous prouvons de nombreuses congruences dans l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$ modulo n, sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$, et nous énonçons quelques-unes de leurs conséquences.

4.2.1 Congruences modulo n pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$

Au début, nous commençons par établir un théorème sur les congruences modulo n pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$ définit par la formule explicite suivante :

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} i^p.$$

Théorème 4.1 *Pour tout nombre premier n et $p > 0,\ r \geq 0$, on a*

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \begin{cases} 0 \pmod{n} & \textit{si} \quad r \equiv -1 \pmod{n}, \\ -1 \pmod{n} & \textit{si} \quad r \not\equiv -1 \pmod{n} \ \textit{ et } \ n-1 \mid p. \end{cases} \tag{4.2}$$

Démonstration.

1. Dans le cas où $r \equiv -1 \pmod{n}$, on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} i^p \pmod{n},$$

par suite, on aura

$$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r} i^p \\ &\equiv \binom{n+r-1}{r} 1^p + \binom{n+r-2}{r} 2^p + \cdots + \binom{r+1}{r} (n-1)^p \\ &\equiv 1^p \times \frac{(r+(n-1))\cdots(r+1)}{(n-1)!} + 2^p \times \frac{(r+(n-2))\cdots(r+1)}{(n-2)!} \\ &+ \cdots + (n-1)^p \times \frac{(r+1)}{1!} \pmod{n}, \end{aligned} \tag{4.3}$$

et comme $r \equiv -1 \pmod{n}$, on peut écrire r sous la forme : $r = nq - 1$, tel que $q \in \mathbb{N}$, en remplaçant ensuite $r = nq - 1$, dans la relation (4.3), on obtient

$$\begin{aligned} S_p^r(n) &\equiv 1^p \times \frac{(n(q+1)-2))\cdots(nq)}{(n-1)!} + 2^p \times \frac{(n(q+1)-3))\cdots(nq)}{(n-2)!} + \cdots + (n-1)^p \times \frac{(nq)}{1!} \\ &\equiv n \Bigg(1^p \times \frac{(n(q+1)-2))\cdots q}{(n-1)!} + 2^p \times \frac{(n(q+1)-3)) \times q}{(n-2)!} \\ &+ \cdots + (n-1)^p \times \frac{q}{1!} \Bigg) \pmod{n}. \end{aligned}$$

Ce qui donne la congruence désirée

$$S_p^{(r)}(n) \equiv 0 \pmod{n}. \tag{4.4}$$

Signalons que dans ce cas, on peut prouver le même résultat par une autre méthode, il s'agit de congruence de Lucas [29].

2. Dans le cas où $r \not\equiv -1 \pmod{n}$, la démonstration de ce cas repose essentiellement sur le petit théorème de Fermat et la congruence suivante qui affirme que pour tous entiers $n \geq 2$ et $r \geq 0$, on a

$$S_0^{(r)}(n) \equiv 0 \pmod{n}. \tag{4.5}$$

On sait que $(n-1)$ divise p, ce qui nous permet d'écrire p sous la forme : $p = q(n-1)$ avec $q \in \mathbb{N}$, donc

$$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &= \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} i^{q(n-1)} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r} i^{q(n-1)} \\ &\equiv \binom{n+r-1}{r} 1^{q(n-1)} + \binom{n+r-2}{r} 2^{q(n-1)} + \cdots + \binom{r+1}{r} (n-1)^{q(n-1)} \pmod{n}, \end{aligned}$$

d'après le petit théorème de Fermat que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n-1$, que l'on a bien

$$i^{q(n-1)} \equiv 1 \pmod{n},$$

ce qui donne

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r} \pmod{n},$$

par suite on a bien

$$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &\equiv -1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} \pmod{n} \\ &\equiv -1 + S_0^{(r)}(n) \pmod{n}, \end{aligned}$$

d'après (4.5), il en résulte la congruence désirée

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 \pmod{n}.$$

La congruence (4.2) du Théorème 4.1 est démontrée.

□

4.2.2 Congruences modulo n pour les hyper-sommes $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

Nous allons maintenant nous intéresser à ètablir une extension de la congruence (4.2) du théorème (4.1) dans le cas $r \equiv -1 \pmod{n}$, précisément des congruences modulo n sur les hyper-sommes de puissances d'entiers :

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} (a+ib)^p,$$

où a et b sont des entiers. Pour mener à bien ce travail, on procède de la manière suivante dans le cas où $r \equiv -1 \pmod{n}$, il suffit de constater qu'on peut écrire r sous la forme : $r = n(q+1) - 1,$ avec $q \in \mathbb{N}$.

L'extension de congruence (4.2) dans le cas $r \equiv -1 \pmod{n}$, est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 4.2 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tous entiers $r \geq 0$, $p > 0$. $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a^p \nmid n$, $b^p \nmid n$, on a*

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv (q+2)a^p \pmod{n} \text{ si } r \equiv -1 \pmod{n}. \tag{4.6}$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant

Lemme 4.3 *Pour tout nombre premier n et pour tout entier naturel r, on a*

$$\binom{n+r}{r} \equiv (q+1) \pmod{n}, \tag{4.7}$$

Démonstration. Si $r \equiv -1 \pmod{n}$, d'après la définition du coefficient binomial, on peut écrire

$$\binom{n+r}{r} = \frac{(r+n)(r+(n-1))\cdots(r+1)}{n(n-1)(n-2)\cdots 2.1}. \tag{4.8}$$

En substituant $r = n(q+1) - 1$ dans (4.8), on trouve

$$\begin{aligned}\binom{n+r}{r} &\equiv (q+1)\frac{(n-1)!}{(n-1)!} \\ &\equiv q+1 \pmod{n}.\end{aligned}$$

Ce qui établit la congruence (4.7) du Lemme 4.3. □

La démonstration du Théorème 4.2

Démonstration. Pour $r \equiv -1 \pmod{n}$, on a

$$\begin{aligned}S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+r-i}{r}(a+ib)^p \\ &= \binom{n+r}{r}a^p + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n+r-i}{r}(a+ib)^p + (a+nb)^p \\ &\equiv \binom{n+r}{r}a^p + a^p + \sum_{i=1}^{n-1}\binom{n+r-i}{r}(a+ib)^p \pmod{n}.\end{aligned}$$

D'après la définition du coefficient binomial, on peut écrire

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv (a+b)^p \times \frac{(r+(n-1))\cdots(r+1)}{(n-1)!} + (a+2b)^p \times \frac{(r+(n-2))\cdots(r+1)}{(n-2)!}$$
$$+\cdots+(a+(n-1))^p \times \frac{(r+1)}{1!} + \binom{n+r}{r}a^p + a^p. \tag{4.9}$$

Il suffit maintenant de remplacer $r = n(q+1)-1$, dans la relation (4.9), ce qui donne

$$\begin{aligned}
S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) &\equiv (a+b)^p \times \frac{(n(q+1)-2))...n(q+1)}{(n-1)!} + (a+2b)^p \times \frac{(n(q+1)-3))\cdots n(q+1)}{(n-2)!} \\
&+\cdots+(a+(n-1)b)^p \times \frac{n(q+1)}{1!} + \binom{n+r}{r}a^p + a^p \\
&\equiv n\left((a+b)^p \times \frac{(n(q+1)-2))...(q+1)}{(n-1)!} + (a+2b)^p \times \frac{(n(q+1)-3))...(q+1)}{(n-2)!}\right. \\
&\left.+\cdots+(a+(n-1)b)^p \times \frac{q+1}{1!}\right) + \binom{n+r}{r}a^p + a^p \\
&\equiv \binom{n+r}{r}a^p + a^p \pmod{n}.
\end{aligned}$$

Avec (4.7), cette dernière congruence devient

$$\begin{aligned}
S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) &\equiv (q+1)a^p + a^p \\
&\equiv (q+2)a^p \pmod{n}.
\end{aligned}$$

La démonstration du théorème est complète. □

Quelques conséquences remarquables

Le théorème 4.2 nous permet d'obtenir de manière immédiate, les corollaires suivants.

Corollaire 4.4 *Pour tout nombre premier n, et pour tous entiers $r \geq 0$, $p > 0$, avec $a \setminus n$ et $b \in \mathbb{Z}$, on a la congruence*

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv 0 \pmod{n} \text{ si } r \equiv -1 \pmod{n}. \tag{4.10}$$

Corollaire 4.5 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tous entiers $r \geq 0$, $p > 0$. Si $q = n-2$, on a la congruence suivante :*

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv 0 \pmod{n} \text{ si } r \equiv -1 \pmod{n}.$$

Corollaire 4.6 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tous entiers $r \geq 0$, $p > 0$. Si $q = n-1$, on a la congruence suivante :*

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv a^p \pmod n \ \ si \ \ r \equiv -1 \pmod n.$$

4.3 Congruences modulo n^α pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$ et $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$

Dans cette section, nous généralisons des congruences obtenues précédemment (4.2) et (4.6), particulièrement des congruences modulo n^α, n étant un nombre premier et α est un entier supérieur ou égal à deux.

4.3.1 Congruences modulo n^α pour les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$

Au début, nous commençons par prouver une congruence modulo n^α pour les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_p^{(r)}(n)$, nous distinguons deux cas :

- **Premier cas :** Si $r \equiv -1 (\text{mod } n^\alpha)$, il suffit d'écrire r sous la forme $r = n^\alpha(q+1) - 1$, où $q \in \mathbb{N}$.
- **Deuxième cas :** Si $r \not\equiv -1 (\text{mod } n^\alpha)$, il suffit d'écrire r sous la forme $r = n^\alpha q - j$, où $q \in \mathbb{N}^*$ et $j \in \{2, 3, ..., n^\alpha\}$.

Le théorème ci-dessous montre une congruence modulo n^α reliant les sommes $S_p^{(r)}(n)$ et les nombres de Stirling de première espèce

Théorème 4.7 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tout entier $1 \leq i \leq n-1$ avec $(i, n^\alpha) = 1$ tel que $\alpha > p$, et $\deg(n^\alpha) > \deg(n^{r+1})$, on a*

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \begin{cases} n^p & \pmod{n^\alpha} \ \ si \ \ r \equiv -1 \pmod{n^\alpha}, \\ -1 + \dfrac{1}{(r+1)!} \displaystyle\sum_{k=0}^{r+1} {r+1 \brack k} n^k & \pmod{n^\alpha} \ \ si \ \ r \not\equiv -1 \pmod{n^\alpha} \text{ et } n^\alpha - n^{\alpha-1} \mid p. \end{cases}$$

Démonstration.

1. Dans le cas où $r \equiv -1 (\mathrm{mod}\, n^{\alpha})$, on a

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} i^p$$
$$= 1^p \times \frac{(r+(n-1))\cdots(r+1)}{(n-1)!} + 2^p \times \frac{(r+(n-2))\cdots(r+1)}{(n-2)!}$$
$$+ \cdots + (n-1)^p \times \frac{(r+1)}{1!} + n^p. \tag{4.11}$$

En substituant $r = n^{\alpha}(q+1) - 1$, dans la relation (4.11), ce qui implique que :

$$S_p^{(r)}(n) = 1^p \times \frac{(n^{\alpha}+n-2)\cdots(n^{\alpha}(q+1))}{(n-1)!} + 2^p \times \frac{(n^{\alpha}+n-3)\cdots(n^{\alpha}(q+1))}{(n-2)!}$$
$$+ \cdots + (n-1)^p \times \frac{(n^{\alpha}(q+1))}{1!} + n^p.$$

Par suite, on a

$$S_p^{(r)}(n) = n^{\alpha}\left(1^p \times \frac{(n^{\alpha}+n-2)\cdots(q+1)}{(n-1)!} + 2^p \times \frac{(n^{\alpha}+n-3)\cdots(q+1)}{(n-2)!}\right.$$
$$\left. + \cdots + (n-1)^p \times \frac{(q+1)}{1!}\right) + n^p.$$

Finalement, on trouve que

$$S_p^{(r)}(n) \equiv n^p (\mathrm{mod}\ n^{\alpha}). \tag{4.12}$$

2. Dans le cas où $r \not\equiv -1 (\mathrm{mod}\ n^{\alpha})$, on a

$$S_p^{(r)}(n) = \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} i^p$$
$$\equiv \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r} i^p \pmod{n^{\alpha}}.$$

On sait que $(n^{\alpha} - n^{\alpha-1})$ divisible par p, alors on peut écrire p sous la forme suivante : $p = l(n^{\alpha} - n^{\alpha-1}) = l\varphi(n^{\alpha})$ où $q \in \mathbb{N}$, on en déduit alors que

$$S_p^{(r)}(n) \equiv \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r} i^{l\varphi(n^{\alpha})}$$
$$\equiv \binom{n+r-1}{r} 1^{l\varphi(n^{\alpha})} + \binom{n+r-2}{r} 2^{l\varphi(n^{\alpha})} + \cdots + \binom{r+1}{r} (n-1)^{l\varphi(n^{\alpha})} \pmod{n^{\alpha}}.$$

Le théorème d'Euler nous permet d'affirmer que pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n-1$ avec $(i, n^{\alpha}) = 1$, on a

$$i^{l\varphi(n^{\alpha})} \equiv 1 \pmod{n^{\alpha}}.$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &\equiv \binom{n+r-1}{r} + \binom{n+r-2}{r} + \cdots + \binom{r+1}{r} \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r} \pmod{n^{\alpha}}, \end{aligned}$$

il s'ensuit que l'on a bien

$$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &\equiv -1 + \sum_{i=1}^{n} \binom{n+r-i}{r} \\ &\equiv -1 + S_0^{(r)}(n) \pmod{n^{\alpha}}, \end{aligned}$$

et comme $S_0^{(r)}(n) = \frac{1}{(r+1)!} \sum_{k=0}^{r+1} \left[{r+1 \atop k}\right] n^k \in \mathbb{Z}$ et $deg(n^{\alpha}) > deg(n^{r+1})$, nous permettent d'établir ce qui suit

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)!} \sum_{k=1}^{r+1} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} n^k \pmod{n^{\alpha}}.$$

Ce qui démontre le Théorème 4.7. □

4.3.2 Application

Le théorème 4.7, nous permet d'établir de nombreuses congruences sur $S_p^{(r)}(n)$, modulo n^{α}.

1. Nous donnons une congruence sur les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$, modulo n^{α}, pour $\alpha \leqslant p$, et $r \equiv -1 \pmod{n^{\alpha}}$

   Corollaire 4.8 *Pour tout nombre premier* $n \geq 2$*, on a*

   $$S_p^{(r)}(n) \equiv 0 \pmod{n^{\alpha}}.$$

2. Nous énonçons et prouver certaines congruences sur les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$ modulo n^2, n^3 et n^4, pour $r \in \{0, 1, ..., n-2\}$ et $r \not\equiv -1 \pmod{n^{\alpha}}$

Corollaire 4.9 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$, et pour tous entiers α et r, avec deg$(n^{\overline{r+1}}) \geq 2$, on a*

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{n}{(r+1)} \pmod{n^2}.$$

Démonstration. On a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)!}\left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n + \begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix} n^2 + \cdots + \begin{bmatrix} r+1 \\ r+1 \end{bmatrix} n^{r+1}\right) \pmod{n^\alpha},$$

il est facile de constater que $\frac{1}{(r+1)!} \in \mathbb{Z}_{(n)}$ et $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \begin{bmatrix} r+1 \\ k \end{bmatrix} n^k \equiv \begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n \pmod{n^2}$, il en résulte que l'on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{n}{(r+1)!}\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} \pmod{n^2},$$

et comme $\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} = r!$, on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{n}{(r+1)} \pmod{n^2}.$$

□

Le corollaire ci-dessous donne une congruence modulo n^3, reliant les sommes $S_p^{(r)}(n)$ et les nombres harmoniques.

Corollaire 4.10 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$, et pour tous entiers α et r, avec deg$(n^{\overline{r+1}}) \geq 3$, on a*

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{n}{(r+1)} + \frac{n^2}{(r+1)} H_r \pmod{n^3}. \tag{4.13}$$

Démonstration. On a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)!}\left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n + \begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix} n^2 + \cdots + \begin{bmatrix} r+1 \\ r+1 \end{bmatrix} n^{r+1}\right) \pmod{n^\alpha},$$

il est facile de constater que $\frac{1}{(r+1)!} \in \mathbb{Z}_{(n)}$ et $\sum\limits_{k=1}^{r+1} \begin{bmatrix} r+1 \\ k \end{bmatrix} n^k \equiv \begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n + \begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix} n^2 \pmod{n^3}$, il en résulte que l'on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{n}{(r+1)!}\left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n + \begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix} n^2\right) \pmod{n^3},$$

et comme $\left[{r+1 \atop 2}\right] = r!H_r$, on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)}\left(n + n^2 H_r\right) \pmod{n^3},$$

ce qui établit la congruence (4.13). □

Le corollaire ci-dessous donne une congruence modulo n^4, reliant les sommes $S_p^{(r)}(n)$ et les nombres harmoniques généralisés.

Corollaire 4.11 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$, et pour tous entiers α et r, avec deg$(n^{\overline{r+1}}) \geq 4$, on a*

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)}\left(n + n^2 H_r + n^3\left(H_r^2 - H_r^{(2)}\right)\right) \pmod{n^4}. \tag{4.14}$$

Démonstration. On a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)!}\left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n + \begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix} n^2 + \cdots + \begin{bmatrix} r+1 \\ r+1 \end{bmatrix} n^{r+1}\right) \pmod{n^\alpha},$$

il est facile de constater que $\frac{1}{(r+1)!} \in \mathbb{Z}_{(n)}$ et $\sum_{k=1}^{r+1} \left[{r+1 \atop k}\right] n^k \equiv \left[{r+1 \atop 1}\right] n + \left[{r+1 \atop 2}\right] n^2 + \left[{r+1 \atop 3}\right] n^3 \pmod{n^4}$, il en résulte que l'on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{n}{(r+1)!}\left(\begin{bmatrix} r+1 \\ 1 \end{bmatrix} n + \begin{bmatrix} r+1 \\ 2 \end{bmatrix} n^2 + \begin{bmatrix} r+1 \\ 3 \end{bmatrix} n^3\right) \pmod{n^4},$$

et comme $\left[{r+1 \atop 3}\right] = r!\left(H_r^2 - H_r^{(2)}\right)$, on a

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(r+1)}\left(n + n^2 H_r + n^3\left(H_r^2 - H_r^{(2)}\right)\right) \pmod{n^4},$$

ce qui établit la congruence (4.14). □

3. Nous montrons dans le corollaire suivant une congruence sur les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$, pour le cas $r \in D$, tel que $D = \{n^\alpha - n, n^\alpha - (n-1), ..., n^\alpha - 2\}$.

Corollaire 4.12 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$, et pour tous entier $r \in D$, on a*

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 \pmod{n^\alpha} \textit{ si } r \not\equiv -1 \pmod{n^\alpha}.$$

Démonstration. La congruence du Théorème 4.7 s'écrivant aussi de la manière équivalente

$$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(n-1)!}\prod_{k=2}^{n}(r+k) \pmod{n^\alpha}.$$

il est facile de constater que pour tout $r \in D$, il existe toujours $k \in \{2, 3, ..., n\}$, tel que $r + k = n^\alpha$, ce qui donne

$$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &\equiv -1 + n^\alpha \frac{1}{(n-1)!} \prod_{\substack{k=2 \\ k+r \neq n^\alpha}}^{n} (r+k) \\ &\equiv -1 \pmod{n^\alpha}. \end{aligned}$$

□

4. Nous donnons dans le corollaire suivant une congruence sur les hyper-sommes $S_p^{(r)}(n)$, pour le cas $r = n^\alpha - (n+1)$.

   Corollaire 4.13 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$, et pour tout entier $r = n^\alpha - (n+1)$, on a*

   $$S_p^{(r)}(n) \equiv 0 \pmod{n^\alpha} \text{ si } r \not\equiv -1 \pmod{n^\alpha}.$$

   Démonstration. On a

   $$S_p^{(r)}(n) \equiv -1 + \frac{1}{(n-1)!} \prod_{k=2}^{n} (r+k) \pmod{n^\alpha}.$$

   En substituant $r = n^\alpha - (n+1)$, dans la dernière relation, on obtient

   $$\begin{aligned} S_p^{(r)}(n) &\equiv -1 + (-1)^{n-1} \frac{(n-1)!}{(n-1)!}, \\ &\equiv 0 \pmod{n^\alpha}. \end{aligned}$$

   □

5. En remplaçant $\alpha = 1$, dans le Théorème 4.7, nous obtenons la congruence (4.2) du Théorème 4.1.

6. En remplaçant $r = 0$ et $\alpha = 1$, dans le Théorème 4.7, nous obtenons la congruence (4.1).

4.3.3 Congruences modulo n^α pour les hyper-sommes $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$.

Dans ce dernier paragraphe de cette section, nous établissons une congruence sur les hyper-sommes de puissances d'entiers $S_{p,(a,b)}^{(r)}(n)$ modulo n^α.

Théorème 4.14 *Pour tout nombre premier $n \geq 2$ et pour tout $\alpha > p$, tel que $a^p \nmid n^\alpha$ et $b^p \nmid n^\alpha$, on a*

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv (q+1)n^{\alpha-1}a^p + (a+nb)^p \pmod{n^\alpha} \text{ si } r \equiv -1 \pmod{n^\alpha}.$$

La démonstration de ce théorème repose sur le lemme suivant :

Lemme 4.15 *Pour tout nombre premier n, et pour tout entier naturel $r = n^\alpha(q+1) - 1$, on a*

$$\binom{n+r}{r} \equiv (q+1) \times n^{\alpha-1} (\text{mod } n^\alpha). \tag{4.15}$$

Démonstration. D'après la définition du coefficient binomial, on peut écrire

$$\binom{n+r}{r} = \frac{(r+n)(r+(n-1))\cdots(r+2)(r+1)}{(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1} \tag{4.16}$$

En substituant $r = n^\alpha(q+1) - 1$ dans (4.16), on trouve

$$\begin{aligned}\binom{n+r}{r} &= \frac{(q+1)n^\alpha}{n}\left(\frac{(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1}{(n-1)(n-2)\cdots 3 \times 2 \times 1}\right) \\ &\equiv (q+1) \times n^{\alpha-1} \pmod{n^\alpha}.\end{aligned}$$

Ce qui établit la congruence du Lemme 4.15. □

Démonstration. Si $r \equiv -1 \pmod{n}$, on a

$$\begin{aligned}S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) &= \sum_{i=0}^{n} \binom{n+r-i}{r}(a+ib)^p \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} \binom{n+r-i}{r}(a+ib)^p + \binom{n+r}{r}a^p + (a+nb)^p \\ &= \binom{n+r-1}{r}(a+b)^p + \binom{n+r-2}{r}(a+2b)^p \\ &+ \cdots + \binom{r+1}{r}(a+(n-1)b)^p + \binom{n+r}{r}a^p + (a+nb)^p,\end{aligned}$$

d'après la définition du coefficient binomial, on peut écrire

$$\begin{aligned}S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) = (a+b)^p \times \frac{(r+(n-1))\cdots(r+1)}{(n-1)!} + (a+2b)^p \times \frac{(r+(n-2))\cdots(r+1)}{(n-2)!} \\ + \cdots + (a+(n-1)b)^p \times \frac{(r+1)}{1!} + \binom{n+r}{r}a^p + (a+nb)^p,\end{aligned} \tag{4.17}$$

il suffit maintenant de remplacer $r = n^\alpha(q+1) - 1$ avec $q \in \mathbb{N}$ dans la relation (4.17), ce qui implique que

$$\begin{aligned}
S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) &\equiv (a+b)^p \times \frac{(n(q+1)-2)) \cdots n^\alpha(q+1)}{(n-1)!} + (a+2b)^p \times \frac{(n(q+1)-3)) \cdots n^\alpha(q+1)}{(n-2)!} \\
&\quad + \cdots + (a+(n-1)b)^p \times \frac{n^\alpha(q+1)}{1!} + \binom{n+r}{r} a^p + (a+nb)^p \\
&\equiv n^\alpha \left((a+b)^p \times \frac{(n(q+1)-2)) \cdots (q+1)}{(n-1)!} + (a+2b)^p \times \frac{(n(q+1)-3)) \cdots (q+1)}{(n-2)!} \right. \\
&\quad \left. + \cdots + (a+(n-1)b)^p \times \frac{q+1}{1!} \right) + \binom{n+r}{r} a^p + (a+nb)^p \\
&\equiv \binom{n+r}{r} a^p + (a+nb)^p \pmod{n^\alpha},
\end{aligned}$$

puis en exploitant Lemme 4.15, donc

$$S_{p,(a,b)}^{(r)}(n) \equiv (q+1)a^p \times n^{\alpha-1} + (a+nb)^p \pmod{n^\alpha}.$$

La démonstration du théorème est complète. $\square$

Chapitre 5

Quelques résultats sur les nombres et polynômes de Bell et Euler

5.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons présenter deux parties dont la première, nous donnons quelques résultats sur la suite des nombres et polynômes de Bell, il s'agit de généraliser les identités de Guo-Qi [18, 39], ainsi que certaines relations de récurrences sur les polynômes de Bell. Dans la deuxième partie, nous étudions les nombres d'Euler, dans lesquelles nous établissons une nouvelle formule explicite et une relation de récurrence sur ces nombres.

5.2 Quelques résultats sur les nombres et polynômes de Bell

Les nombres et polynômes de Bell ont été étudiés par plusieurs chercheurs [14, 35, 2, 33]. En 2015, F. Qi [39] a obtenu une identité sur les nombres de Bell à l'aide des nombres de Lah et les nombres de Stirling de deuxième espèce. Cette identité est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 5.1 *[39] Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$\mathcal{B}_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} \sum_{i=1}^{k} \left\lfloor {k \atop i} \right\rfloor. \tag{5.1}$$

En 2014, B. Guo et F. Qi [18] ont prouvé une expression explicite des nombres de Bell en terme de fonction hypergéométrique Confluente de Kummer et les nombres de Stirling de deuxième espèce. Cette expression est donnée dans le théorème suivant :

Théorème 5.2 *[18] Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\mathcal{B}_n = \frac{1}{e} \sum_{k=1}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^{n-k} k! {}_1F_1 \left({k+1 \atop 2}; 1 \right). \tag{5.2}$$

L'objectif principal de cette partie est de généraliser les deux expressions explicites de Bell (5.1) et (5.2). La technique employée est basée sur la transformation de Stirling [41].

Théorème 5.3 *Pour tous entiers* $n, m \geq 0$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)(-1)^{n+k} \mathcal{B}_{n+k}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m L_{m+k}(x). \tag{5.3}$$

Démonstration. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, nous considérons la suite finale $(a_{n,0})_{n\geq 0}$ qui fait intervenir les polynômes de Bell.

$$a_{n,0} = (-1)^n \mathcal{B}_n(x). \tag{5.4}$$

En remplaçant cette dernière relation (5.4) dans la relation de récurrence (1.42), on obtient la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 1 & -x & x^2+2x & -x^3-6x^2-6x & \cdots \\ -x & x^2+x & -x^3-4x^2-2x & x^4+9x^3+18x^2+6x & \cdots \\ x^2+x & -x^3-3x^2-x & x^4+7x^3+10x^2+2x & \vdots & \\ -x^3-3x^2-x & x^4+6x^3+7x^2+x & \vdots & & \\ x^4+6x^3+7x^2+x & \vdots & & & \\ \vdots & & & & \end{pmatrix}$$

D'autre part, on sait que l'on a bien

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(z) &= \sum_{k\geq 0} a_{k,0} \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} (-1)^k B_k(x) \frac{z^k}{k!} \\ &= \sum_{k\geq 0} B_k(x) \frac{(-z)^k}{k!} \\ &= \exp(x(e^{-z}-1)). \end{aligned} \tag{5.5}$$

D'après la relation (1.45) du Théorème 1.31, il en résulte que la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale est donnée par :

$$\mathcal{A}_0(z) = \mathcal{B}_0(\ln(1+z)).$$

En exploitant la relation (5.5), on trouve que :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_0(z) &= \exp\left(x\left(\frac{1}{1+z} - 1\right)\right) \\ &= \sum_{n\geq 0} L_n(x)\frac{z^n}{n!}, \end{aligned} \tag{5.6}$$

or, d'après (5.6), on a

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} L_n(x)\frac{z^n}{n!} &= \exp\left(x\left(\frac{1}{1+z} - 1\right)\right) \\ &= \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^x}\sum_{k\geq 1}\left(\frac{1}{1+z}\right)^k \frac{x^k}{k!} \\ &= \frac{1}{e^x} + \frac{1}{e^x}\left(\sum_{k\geq 1}\left(\sum_{n\geq 0}(-1)^n\frac{(k-1+n)!}{n!(k-1)!}z^n\right)\frac{x^k}{k!}\right) \\ &= \frac{1}{e^x} + \sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{e^x}\sum_{k\geq 0}(-1)^n\frac{(k+n)!}{k!(k+1)!}x^{k+1}\right)\frac{z^n}{n!}. \end{aligned} \tag{5.7}$$

En identifiant le coefficient de $\frac{z^p}{p!}$ dans chacun des deux membres de (5.7), on obtient le n-ième polynôme de Lah signés (formule de Dobinski), pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$L_n(x) = \frac{(-1)^n}{e^x}\sum_{k\geq 0}\frac{(k+n)!}{k!(k+1)!}x^{k+1}. \tag{5.8}$$

En utilisant (5.8) et (5.4) et d'après Théorème 1.29, on obtient

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)(-1)^{n+k}\mathcal{B}_{n+k}(x) = \sum_{k=0}^{n}\left\{\begin{matrix} n+m \\ k+m \end{matrix}\right\}_m L_{m+k}(x). \tag{5.9}$$

ce qui achève la démonstration du théorème. □

5.2.1 Formules généralisés de Guo-Qi sur les nombres de Bell

Nous présentons dans le corollaire suivant la généralisation de la formule explicite (5.1) du Théorèmes 5.1.

Corollaire 5.4 *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^n L_k(x). \tag{5.10}$$

Démonstration. Il suffit de remplacer m par 0, dans la relation (5.3) du Théorème 5.3, on obtient

$$s(0,0)(-1)^n \mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{1}{e^x} \sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{(k+n)!}{(k)!(k+1)!} x^{k+1},$$

comme $s(0,0) = 1$, il en résulte que

$$\mathcal{B}_n(x) = (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{1}{e^x} \sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{(k+n)!}{k!(k+1)!} x^{k+1}, \tag{5.11}$$

puis, en exploitant la relation (5.8), on trouve que

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} (-1)^n L_k(x),$$

ce qui établit la formule désirée (5.10). $\square$

Nous donnons dans le résultat suivant la généralisation de la formule explicite (5.2) du Théorèmes 5.2.

Corollaire 5.5 *Pour tout entier* $n \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\mathcal{B}_n(x) = \frac{x}{e^x} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} n!\, {}_1F_1 \left({n+1 \atop 2} ; x \right). \tag{5.12}$$

Démonstration. D'après la relation (5.11), on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_n(x) &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{1}{e^x} \sum_{k\geq 0} (-1)^n \frac{(k+n)!}{(k)!(k+1)!} x^{k+1} \\ &= (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} \frac{(-1)^n x n!}{e^x} \sum_{k\geq 0} \frac{(n+1)^{\bar{k}} x^k}{2^{\bar{k}} k!} \\ &= \frac{x}{e^x} \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} n!\, {}_1F_1 \left({n+1 \atop 2} ; x \right), \end{aligned}$$

ce qui établit la formule désirée (5.12). $\square$

Remarque 5.6 *Remarquons que les identités de Guo-Qi's sont obtenues en substituant* x *par* 1, *dans les (5.10) et (5.12).*

5.2.2 Relations de récurrences sur les Polynômes de Bell

Nous établissons maintenant certaines relations de récurrences sur les polynômes de Bell faisant intervenir les nombres de Stirling de deuxième espèce et le polynômes de Lah.

Corollaire 5.7 *Pour tout entier* $m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$L_m(x) = \sum_{k=0}^{m} s(m,k)(-1)^k \mathcal{B}_k(x).$$

Démonstration. Il suffit de remplacer n par 0, dans la relation (5.3) du Théorème 5.3. □

Corollaire 5.8 *Pour tout entier* $m \in \mathbb{N}$, *on a*

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)(-1)^{k+1} \mathcal{B}_{k+1}(x) = mL_m(x) + L_{m+1}(x),$$

ce qui équivaut à :

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)(-1)^{k+1} \mathcal{B}_{k+1}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m+1} k! \binom{m}{k}^2 x^{m-k+1}.$$

Démonstration. Il suffit de remplacer n par 1, dans (5.3). □

5.3 Sur certains résultats sur les nombres d'Euler

Les nombres d'Euler ont été étudiés par de nombreux auteurs depuis longtemps jusqu'à nos jours [19, 48, 51, 31]. Parmi les auteurs actuels, qui se sont particulièrement intéressés à la détermination des formules explicites de ces nombres, on peut citer : En 2015, C-F. Wei et F. Qi [49] ont prouvé certaines expressions explicites des nombres d'Euler, nous donnons l'une des formules obtenues :

$$E_{2n} = i \sum_{k=1}^{2n+1} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2^k j^k k} \binom{k}{j} (k-2j)^{2n+1},$$

i, étant la partie imaginaire du nombre complexe avec $i^2 = -1$.

Le but de cette partie est d'établir une expression explicite de la suite des nombres d'Euler ainsi qu'une relation de récurrence. La technique utilisée est basée sur la transformation de Stirling [41].

Théorème 5.9 *Pour tous entiers* $n, m \geq 0$*, on a*

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k)E_{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m R_{m+k}, \tag{5.13}$$

avec E_n*, étant les nombres d'Euler et* R_m*, définie par :*

$$R_m = \frac{m!}{2^m} \sum_{k=0}^{\lfloor (m+1)/2 \rfloor} (-1)^{m-k} \binom{m+1}{2k}.$$

Démonstration. Pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$, nous donnons d'abord une suite finale $(a_{n,0})_{n\geq 0}$, faisant intervenir les nombres d'Euler pour établir une matrice infinie que l'on note par C.

$$a_{n,0} = E_n. \tag{5.14}$$

En remplaçant cette dernière relation (5.14) dans la relation de récurrence (1.42), nous obtenons la matrice suivante :

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 & -6 & \cdots \\ 0 & -1 & 1 & 3 & -24 & \cdots \\ -1 & 0 & 5 & -15 & -6 & \cdots \\ 0 & 5 & -5 & -51 & 336 & \cdots \\ 5 & 0 & -61 & 183 & 714 & \cdots \\ 0 & -61 & 61 & 1263 & -7944 & \cdots \\ -61 & 0 & 1385 & -4155 & -35286 & \cdots \\ 0 & 1385 & -1385 & -47751 & 294816 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

En utilisant la relation (1.45), on obtient la fonction génératrice exponentielle de la suite initiale :

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 0} R_n \frac{z^n}{n!} &= \frac{1}{\cosh(\ln(1+z))} \\ &= \frac{2(1+z)}{2+2z+z^2}. \end{aligned} \tag{5.15}$$

D'apès la propriété :

$$\frac{2(1+z)}{2+2z+z^2} = \frac{1}{z+1-i} + \frac{1}{z+1+i},$$

donc la relation (5.15), devient

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 0} R_n \frac{z^n}{n!} &= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^{n+1}} \left((-1+i)^{n+1} + (-1-i)^{n+1}\right) z^n \\ &= -\sum_{n\geq 0} \frac{1}{2^n} \mathrm{Re}\left((i-1)^{n+1}\right) z^n. \qquad (5.16)\end{aligned}$$

En identifiant le coefficient de z^p dans chacun des deux membres de (5.16), on aura l'expression de R_n

$$R_n = -\frac{n!}{2^n} \mathrm{Re}\left((i-1)^{n+1}\right). \qquad (5.17)$$

On a par définition même la formule du binôme, la relation (5.17) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$R_n = \frac{n!}{2^n} \sum_{k=0}^{\lfloor (n+1)/2 \rfloor} (-1)^{n-k} \binom{n+1}{2k}. \qquad (5.18)$$

$\lfloor (n+1)/2 \rfloor$, désigne la partie entière inférieure du nombre $(n+1)/2$, c'est le plus grand entier inférieure à $(n+1)/2$.
En exploitant (5.18) et (5.14), on obtient

$$\sum_{k=0}^{m} s(m,k) E_{n+k} = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n+m \atop k+m} \right\}_m R_{m+k}.$$

ce qui établit le théorème. □

5.3.1 Formule explicite des nombres d'Euler

Le corollaire suivant montre que les nombres d'Euler E_n peuvent s'exprimer à l'aide des nombres de Stirling de deuxième espèce.

Corollaire 5.10 *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a*

$$E_n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2^k} \left\{ {n \atop k} \right\} \mathrm{Re}\left((i-1)^{k+1}\right),$$

$\mathrm{Re}(z)$, *étant la partie réelle du nombre complexe.*

Démonstration. En remplaçant m par 0 dans l'égalité du Théorème 5.9, on trouve que :

$$s(0,0)E_n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} R_n,$$

ce qui implique que

$$E_n = -\sum_{k=0}^{n} \frac{k!}{2^k} \left\{ {n \atop k} \right\} \mathrm{Re}\left((i-1)^{k+1}\right).$$

□

5.3.2 Relation de récurrence sur les nombres d'Euler

D'après le Théorème 5.9, on peut présenter une relation de récurrence des nombres d'Euler faisant intervenir les nombres de Stirling de premier espèce. Il suffit de remplacer n par 0, dans (5.13), on obtient :

$$\sum_{k=0}^{m} s(2m,2k)E_{2k} = \frac{(2m)!}{2^{2m}} \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{2m+1}{2k},$$

Il en résulte que l'on a

$$\sum_{k=0}^{m} s(2m,2k)E_{2k} = \begin{cases} (-1)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \dfrac{(2m)!}{2^m}, & \text{si } m \text{ pair}, \\ (-1)^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor + 1} \dfrac{(2m)!}{2^m}, & \text{si } m \text{ impair}. \end{cases}$$

Exemple 5.11 *Les calculs suivant résument les résultats pour les premières valeurs de* $m = 0, 1, 2, 3$.

$$\begin{aligned} E_0 &= 1, \\ E_2 &= -1, \\ 11E_2 + E_4 &= -6, \\ 274E_2 + 85E_4 + E_6 &= 90. \end{aligned}$$

Conclusion

Le but de notre travail était d'étudier certaines propriétés combinatoires des suites classiques.

Dans un premier lieu, nous avons traité un ancien problème concernant les hyper-sommes des puissances d'entiers, on a donné plusieurs propriétés combinatoires et arithmétiques.

Dans la deuxième partie, nous avons généralisé des hyper-sommes des puissances d'entiers pour les suites arithmétiques quelconques.

Enfin, dans la dernière partie, nous avons présenté quelques résultats sur la suite des nombres de Bell. Nous avons donné par la suite une nouvelle formule explicite pour la suite des nombres d'Euler. La technique employée est basée sur la transformation de Stirling.

Nous présentons ici quelques directions qui peuvent faire l'objet de travaux de recherche ultérieur ainsi que des idées pouvant faire suite aux résultats obtenus dans ce travail :

- Généraliser les résultats obtenu dans le chapitre deux, en remplaçant

  $$S_n = \sum_{k=0}^{n} i^k$$

  par la somme

  $$T_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k i^k.$$

- Revisiter les hyper-harmoniques avec les outils que nous avons développer dans les chapitres deux, trois et quatre.
- Introduire les q-analogues des hyper-sommes des puissances d'entiers.

Bibliographie

[1] G. E. Andrews, R. Askey, and R. Roy. *Special Functions*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications. Cambridge University Press, 1999.

[2] N. Asai, I. Kubo, and H.-H. Kuo. Bell numbers, log-concavity, and log-convexity. *Acta Applicandae Mathematica*, 63(1-3) :79–87, 2000.

[3] A. Bazsó and I. Mező. On the coefficients of power sums of arithmetic progressions. *Journal of Number Theory*, 153 :117–123, 2015.

[4] A. F. Beardon. Sums of powers of integers. *The American mathematical monthly*, 103(3) :201–213, 1996.

[5] F. Bounebirat, D. Laissaoui, and M. Rahmani. Several explicit formulae of sums and hyper-sums of powers of integers. *Online Journal of Analytic Combinatorics*, (04), 2018.

[6] F. Bounebirat, D. Laissaoui, and M. Rahmani. Some combinatorial identities via stirling transform. *Notes on Nunbre Theory and Discrete Mathematics*, 24(4) :92–98, 2018.

[7] M. Boutiche, M. Rahmani, and H. Srivastava. Explicit formulas associated with some families of generalized bernoulli and euler polynomials. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 14(2) :89, 2017.

[8] A. Z. Broder. The r-stirling numbers. *Discrete Mathematics*, 49(3) :241–259, 1984.

[9] L. Carlitz. Weighted stirling numbers of the first and second kind–i. *Fibonacci Quart*, 18(3) :147–162, 1980.

[10] L. Carlitz. Weighted stirling numbers of the first and second kind–ii. *Fibonacci Quart*, 18(3) :242–257, 1980.

[11] G.-S. Cheon and J.-H. Jung. r-whitney numbers of dowling lattices. *Discrete Mathematics*, 312(15) :2337–2348, 2012.

[12] L. Comtet. *Analyse combinatoire*. Number v. 1 in Sup. Le Mathématicien. Presses Universitaires de France, 1970.

[13] L. Comtet. *Advanced Combinatorics : The Art of Finite and Infinite Expansions*. Springer Netherlands, 1974.

[14] R. B. Corcino and C. B. Corcino. On generalized bell polynomials. *Discrete Dynamics in Nature and Society*, 2011, 2011.

[15] A. W. F. Edwards. Sums of powers of integers : a little of the history. *The Mathematical Gazette*, 66(435) :22–28, 1982.

[16] J. Faulhaber. Algebræ, academia, darinnen die miraculosische inventiones zu den höchsten cossen weiters continuirt und profitiert werden. *Augspurg, bey Johann Ulrich Schönigs*, 1631.

[17] C. F. Gauss. *Recherches arithmétiques*. Courcier, Imprimeur-Libraire pour les Mathématiques, 1807.

[18] B.-N. Guo and F. Qi. An explicit formula for bell numbers in terms of stirling numbers and hypergeometric functions. *Glob. J. Math. Anal*, 2(4) :243–248, 2014.

[19] B.-N. Guo and F. Qi. Explicit formulae for computing euler polynomials in terms of stirling numbers of the second kind. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 272 :251–257, 2014.

[20] G. H. Hardy and E. M. Wright. *An introduction to the theory of numbers*. Oxford university press, 1979.

[21] M. D. Hirschhorn. Evaluating $\sum_{n=1}^{N}(a+nd)^p$. *The Mathematical Gazette*, 90(517) :114–116, 2006.

[22] C. D. Howard. Orthogonality of measures induced by random walks with scenery. *Combinatorics, Probability and Computing*, 5(3) :247–256, 1996.

[23] F. Howard. Sums of powers of integers via generating functions. *Fibonacci Quarterly*, 34 :244–256, 1996.

[24] Y. Inaba. Hyper-sums of powers of integers and the akiyama-tanigawa matrix. *J. Integer Seq*, 8(2), 2005.

[25] D. E. Knuth. Johann faulhaber and sums of powers. *Mathematics of Computation*, 61(203) :277–294, 1993.

[26] T. C. Kotiah. Sums of powers of integers—a review. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, 24(6) :863–874, 1993.

[27] D. Laissaoui, F. Bounebirat, and M. Rahmani. On the hyper-sums of powers of integers. *Miskolc Mathematical Notes*, 18(1) :307–314, 2017.

[28] D. Laissaoui and M. Rahmani. An explicit formula for sums of powers of integers in terms of stirling numbers. *Journal of Integer Sequences*, 20(2) :3, 2017.

[29] E. Lucas. Théorie des fonctions numériques simplement périodiques. *American Journal of Mathematics*, 1(2) :184–196, 1878.

[30] K. MacMillan and J. Sondow. Proofs of power sum and binomial coefficient congruences via pascal's identity. *The American Mathematical Monthly*, 118(6) :549–551, 2011.

[31] J. Malenfant. Finite, closed-form expressions for the partition function and for euler, bernoulli, and stirling numbers. *arXiv preprint arXiv :1103.1585*, 2011.

[32] M. Merca. A new connection between r-whitney numbers and bernoulli polynomials. *Integral Transforms and Special Functions*, 25(12) :937–942, 2014.

[33] I. Mezo. The r-bell numbers. *J. Integer Seq*, 14(1) :1–14, 2011.

[34] I. Mező and J. L. Ramírez. The linear algebra of the r-whitney matrices. *Integral Transforms and Special Functions*, 26(3) :213–225, 2015.

[35] M. Mihoubi. Bell polynomials and binomial type sequences. *Discrete Mathematics*, 308(12) :2450–2459, 2008.

[36] N. Nielsen. *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*. 1923.

[37] B. Pascal. *Traité du triangle arithmétique, avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. G. Desprez, 1665.

[38] O. Patashnik, D. E. Knuth, and R. L. Graham. *Concrete Mathematics : A Foundation for Computer Science, Second Edition*. Addison-Wesley Professional, 1994.

[39] F. Qi. An explicit formula for the bell numbers in terms of the lah and stirling numbers. *Mediterranean Journal of Mathematics*, 13(5) :2795–2800, 2016.

[40] M. Rahmani. Étude combinatoire et analytique des suites et des polynômes, 2013.

[41] M. Rahmani. Generalized stirling transform. *Miskolc Mathematical Notes*, 15(2) :677–690, 2014.

[42] M. Rahmani. Some results on whitney numbers of dowling lattices. *Arab Journal of Mathematical Sciences*, 20(1) :11–27, 2014.

[43] M. Rahmani. On p-bernoulli numbers and polynomials. *Journal of Number Theory*, 157 :350–366, 2015.

[44] N. J. Sloane. The on-line encyclopedia of integer sequences. *Notices of the American Mathematical Society*, 65(9) :1062–1075, 2018.

[45] H. Srivastava, J. Joshi, and C. Bisht. Fractional calculus and the sum of powers of natural numbers. *Studies in Applied Mathematics*, 85(2) :183–193, 1991.

[46] H. Srivastava and P. G. Todorov. An explicit formula for the generalized bernoulli polynomials. *Journal of mathematical analysis and applications*, 130(2) :509–513, 1988.

[47] H. M. Srivastava and J. Choi. *Zeta and q-Zeta functions and associated series and integrals*. Elsevier, 2011.

[48] D. C. Vella. Explicit formulas for bernoulli and euler numbers. *Integers : Electronic Journal of Combinatorial Number Theory*, 8(A01) :A01, 2008.

[49] C.-F. Wei and F. Qi. Several closed expressions for the euler numbers. *Journal of Inequalities and Applications*, 2015(1) :219, 2015.

[50] C. Xu. Euler sums of generalized hyperharmonic numbers. *arXiv preprint arXiv :1701.00391*, 2017.

[51] S. Yakubovich. Certain identities, connection and explicit formulas for the bernoulli and euler numbers and the riemann zeta-values. *Analysis*, 35(1) :59–71, 2015.