Remerciements

Je tiens, en premier lieu à exprimer ma profonde reconaissance et gratitude à mon directeur de thèse Monsieur **Mohamed Saïd Moulay** *professeur à l'USTHB, qui a encadré ce travail de thèse. J'apprécie vivement sa grande disponibilité continue, son encouragement, sa confiance, ses conseils, son soutien précieux avec patience et sagesse.*

Je tiens aussi à remercier infiniment mon co-directeur de thèse le professeur **Abbes Benaissa** *à laboratoire d'analyse et contrôle des EDPs de département de Mathématiques à l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes pour son intérêt, son soutien, son temps qu'il m'a consacré pour diriger ce travail avec beaucoup de dynamique et d'efficacité, par sa compétence et maturité scientifique il a su me guider tout au long de cette thèse de façon pertinente dans mes recherches, La rigueur et la pertinence de ses conseils m'ont été d'une essentielle dans la réalisation de cette thèse. Ce travail n'aurait jamais pu aboutir, si je n'avais pu profiter de ses précieux conseils et de ses compétences. Ce qui m'implique toujours à poursuivre mes recherches avec lui dans ma carrière professionnelle.*

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à Monsieur **Ammar Khemmoudj** *professeur à l'U.S.T.H.B qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance.*

J'adresse mes sincères remerciements aux professeurs, Mme **Naïma Aissa** *professeur à l'USTHB et Mr* **Mahmoud Bousselsal** *Professeur à L'E.N.S de Kouba, Mr* **Ali Hakem** *professeur à l'université de Djillali Liabes de Sidi Bel Abbes et Mr* **Hichem Ramoul** *MCA à l'université de Abbes Laghrour de Khenchela d'avoir accépté de faire partie des membres du jury et aussi d'avoir examiné attentivement le manuscrit et pour l'intérêt qu'ils ont porté à mon travail. Je les remercie très chaleureusement. C'est pour moi un grand honneur d'avoir un tel jury.*

Un grand merci au professeur Mr **kais Ammari** *qui m'a accueilli dans son laboratoire à la faculté de mathématiques de Monastir-Tunisie pour ses précieux conseils.*

DEDICACE : Je dédie ce travail à l'âme de mes chers parents (1932-1985 et 1923-2001), à l'âme de mes frères "Taouata (1954-1973)", "Hocine (1970-1973)" , à tout membre de ma famille et à tous les matheux.

ملخّـــص

نهتـمّ في هذه الأطروحة بدرَاسة وجود ووِحدَانية الحلّ وَالَاستقـرَار التّقَاربي لـمعَـادلة الأَموَاج مع شرط وجود الـمرَاقبة العَامّة علَى الحَافّـة (اَلـمرَاقبة العَامّة الحدودية) من النوع الَانتشَاري التَّالية :

$$
(P)\quad \begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty) \\
u(x,t) = 0, & (x,t) \in \Gamma_D \times (0,+\infty) \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi, & (x,t) \in \Gamma_N \times (0,+\infty) \\
\partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0, & (x,\xi,t) \in \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\
\phi(x,\xi,0) = 0, & (x,\xi) \in \Gamma_N \times (-\infty,\infty)
\end{cases}
$$

أين Ω هو مفتـوح من $\mathbb{R}^n$ ذو الحَافّـة $\partial\Omega$ من الصّنف C^2 . نفرض أنّ $\partial\Omega = \Gamma_D \bigcup \Gamma_N$ ، أين Γ_D و Γ_N همَا مـجموعتَان جـزَئِيتَـان من $\partial\Omega$ مع $\Gamma_D \bigcap \Gamma_N = \emptyset$. بَالإِضَافة إِلَى أنّ $meas(\Gamma_D) \neq 0$ ، حيث $meas$ يرمز إِلَى قيَاس هوسدورف في البعد $n-1$.

نثْبت أن الجملة (P) ليست مستقرّة أسّـيَا في حَالة البعد 1 . بَالإِضَافة إِلَى ذلك نثْبت نتيجة نسبة التنَاقص العَامّة وذلك بَاستعمَال نظرية نصف الزّمر وكذلك تقدير الحَالّة لِلمولّد الـمرفـق بنصف الزّمرة.
من جهة أخرَى نهتـمّ أيضَا بَالدّرَاسة لـمعَادلة زَائِديـة مع وجود مرَاقبة دَاخلية من النّوع الَانتشَاري وَالّتي تنمذج الظَّاهرة الفيـزيَائِية الّتي تـمثل الذّبذبَات الـمحورية لقضيب منتظم،

$$
(P_I)\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi = 0, & (x,t) \in \Omega \times (0,+\infty) \\
u(x,t) = 0, & (x,t) \in \partial\Omega \times (0,+\infty) \\
\partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0, & (\xi,t) \in \Omega \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = u_1(x), & x \in \Omega \\
\phi(x,\xi,0) = 0, & (x,\xi) \in \Omega \times (-\infty,\infty).
\end{cases}
$$

حيث نثْبت وجود ووِحدَانية الـحلّ و كذَا الَاستقرَار القويّ لِلجملة (P_I) .

الـكلمـات الـمفتّاحية

معَادلة الأَموَاج، اَلتّبدّد الحَافّـي العَام من النّوع الَانتشَاري، اَلتّبدّد العَام الدَّاخلـي من النّوع الَانتشَاري، نسبة التّـنَاقـص العَامّـة.

Résumé

On s'intéresse, dans cette thèse, à l'étude de l'existence, l'unicité et la stabilité asymptotique de l'équation des ondes avec condition de contrôle frontière général de type diffusif suivante :

$$(P)\qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty) \\ \partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega \\ \phi(x,\xi,0) = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et on suppose que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, où Γ_D et Γ_N sont des sous-ensembles fermés de $\partial\Omega$ avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. De plus nous supposons que $meas(\Gamma_D) \neq 0$, où $meas$ désigne la mesure de Hausdorff en dimension $n-1$. Nous prouvons que le système (P) n'est pas exponentiellement stable dans le cas 1D. En outre, nous établissons un résultat de taux de décroissance explicite et général, en utilisant la théorie des semi-groupes et une estimation de la résolvante de générateur associé au semi-groupe.
D'une autre part, on s'intéresse aussi, à l'étude d'une équation hyperbolique (P_I) avec un contrôle interne de type diffusif dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2

$$(P_I)\begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ \partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{dans } \Omega \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{dans } \Omega \\ \phi(x,\xi,0) = 0 & \text{dans } \Omega \times (-\infty,\infty) \end{cases}$$

qui modélise le phènomène physique des vibrations axiales d'une nanotige, où $\zeta > 0, \eta \geq 0$ et μ est la densité de mesure générale et les données initiales sont dans des espaces appropriés, telle qu'on établit la stabilisation forte du système (P_I).

Mots clefs :

Equations des ondes, Dissipation frontière générale de type diffusif, Dissipation générale interne de type diffusif, Taux de décroissance général.

Abstract

We are interested, in this thesis, in the study of the well-posedness and asymptotic stability of following wave equation with a general boundary control condition of diffusive type. We prove that the system (P) lacks exponential stability :

$$
(P) \quad \begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\
u(x,t) = 0 & \text{on } \Gamma_D \times (0,+\infty) \\
\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\,d\xi & \text{on } \Gamma_N \times (0,+\infty) \\
\partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{on } \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{in } \Omega \\
\phi(x,\xi,0) = 0 & \text{on } \Gamma_N \times (-\infty,\infty)
\end{cases}
$$

where Ω is an open bounded domain of $\mathbb{R}^n$ with boundary $\partial\Omega$ of class C^2. we assume that $\partial\Omega = \Gamma_D \bigcup \Gamma_N$, where Γ_D and Γ_N are closed subsets of $\partial\Omega$ with $\Gamma_D \bigcap \Gamma_N = \emptyset$. Moreovere $meas(\Gamma_D) \neq 0$ where $meas$ denotes the $n-1$ dimentional Hausdorff measure. Furthermore, we show an explicit and general decay rate result, using the semigroup theory of linear operators and an estimate on the resolvent of the generator associated with the semigroup. In other side, we are interested in the study of the well-posedness and strong stability of a hyperbolic equation (P_I) as follow :

$$
(P_I) \begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\,d\xi = 0 & \text{in } \Omega \times (0,+\infty) \\
u(x,t) = 0 & \text{on } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\
\partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{in } \Omega \\
\phi(x,\xi,0) = 0 & \text{in } \Omega \times (-\infty,\infty)
\end{cases}
$$

with general internal control of diffusive type that modeling the phenomenon physical of axial vibrations of a nanorod, where $\zeta > 0, \eta \geq 0$ and μ is a general measure density.

Keywords :

Wave equation, General boundary dissipation of diffusive type, General internal dissipative of diffusive type, General decay rate.

Table des matières

Notations et symboles

$\mathbb{R} :=$	l'ensemble des nombres réels.
$\mathbb{R}_+ = (0, +\infty) :=$	l'ensemble des nombres réels non négatifs.
$\mathbb{R}^* :=$	l'ensemble des nombres réels non nuls.
$\mathbb{N} :=$	l'ensemble des nombres entiers positifs.
$\mathbb{N}^* :=$	l'ensemble des nombres entiers positifs non nuls.
$\mathbb{Z} :=$	l'ensemble des nombres entiers.
$\mathbb{Z}^* :=$	l'ensemble des nombres entiers non nuls.
$\mathbb{C} :=$	l'ensemble des nombres complexes.
$i :=$	l'unité imaginaire ($i^2 = -1$).
$i\mathbb{R} :=$	le demi plan imaginaire pur.
$\Re :=$	la partie réelle d'un nombre complexe.
$\Im :=$	la partie imaginaire d'un nombre complexe.
$\Omega :=$	un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.
$\partial\Omega :=$	la frontière de Ω.
$\overline{\Omega} :=$	la fermeture de Ω, $\overline{\Omega} = \Omega \bigcup \partial\Omega$.
$\mathring{\mathcal{K}} :=$	l'intérieur de $\mathcal{K}$.
$\Gamma_D :=$	la frontière de Dirichlet de Ω.
$\Gamma_N :=$	la frontière de Neumann de Ω.
$d\Gamma :=$	la mesure surfacique.
$x :=$	la variable du domaine Ω.
$\xi :$	la variable diffusive
$\mathcal{H} :=$	espace de Hilbert.
$t \in (0, +\infty) :=$	la variable de temps.
$L^p :=$	l'espace de Lebesgue.
$H^m :=$	l'espace de Sobolev.
$\mathscr{D}(\Omega) :=$	l'espace de fonctions indéfiniment différentiables sur Ω et à support compact.

$\mathscr{D}'(\Omega) :=$	l'espace des distributions.
$\mathcal{L}(X) :=$	l'espace des applications linéaires continues de X dans X.
$C^{\circ} :=$	l'espace des fonctions continues.
$\mathcal{D}(\mathcal{A}) :=$	domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$.
$\mathcal{A}^{*} :=$	l'opérateur adjoint de $\mathcal{A}$.
$\sigma(\mathcal{A}) :=$	le spectre de $\mathcal{A}$.
$\sigma_r(\mathcal{A}) :=$	le spectre résiduel de $\mathcal{A}$.
$\sigma_c(\mathcal{A}) :=$	le spectre continu de $\mathcal{A}$.
$\rho(\mathcal{A}) :=$	l'ensemble résolvant de $\mathcal{A}$.
$\mathrm{Im} :=$	L'image
$\vert\,.\,\vert :=$	le module.
$\Vert\,.\,\Vert :=$	la norme.
$\max :=$	le maximum.
$\min :=$	le minimum.
$\sup :=$	la borne supérieure.
$\inf :=$	la borne inférieure.
$u_x = \partial_x u :=$	la dérivée partielle de u par rapport à x.
$u_{xx} = \partial_x^2 u :=$	la dérivée seconde partielle de u pa rapport à x.
$u_t :=$	la dérivée première de u par rapport à la variable du temps t.
$u_{tt} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} :=$	la dérivée seconde de u par rapport à la variable du temps t.
$\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n) :=$	le vecteur normal unitaire extérieur à $\partial\Omega$.
$\dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \nabla u.\nu :=$	la dérivée normale extérieure de u à $\partial\Omega$.
$\partial_t^{\alpha,\eta} :=$	la dérivée fractionnaire qui dépend des parametres $0 < \alpha < 1$ et $\eta \geq 0$.
$\Gamma :=$	la fonction Gamma définie par : $\forall x > 0, \Gamma(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t}\, dt$.
$\langle , \rangle_{\mathcal{H}} :=$	produit scalaire sur $\mathcal{H}$.
$p.p :=$	presque partout.
$\blacksquare :=$	fin d'une démonstration.

Introduction

Le but de cette thèse est d'étudier l'existence globale de la solution et la stabilisation de quelques problèmes d'évolution par des contrôles de type diffusif. On est intéressé au premier lieu du problème des ondes linéaire suivant,

$$(P) \quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty) \\ \partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{dans } \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \\ \phi(x,\xi,0) = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 1$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 et on suppose que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$, où Γ_D et Γ_N sont des sous-ensembles fermés de $\partial\Omega$ avec $\Gamma_D \cap \Gamma_N = \emptyset$. De plus nous supposons que $meas(\Gamma_D) \neq 0$, où $meas$ désigne la mesure de **Hausdorff** en dimension $n-1$. ν est le vecteur normal unitaire extérieur standard de Ω et $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}$ est la dérivée normale extérieure de u à $\partial\Omega$. De plus $\zeta > 0, \eta \geq 0$ et μ est une densité générale de mesure et les données initiales sont prises dans des espaces appropriés.

On fait une étude qualitative du problème (P) (existence et unicité de la solution et la stabilisation par un contrôle frontière de type diffusif).

On appelle le système formé par la troixième équation et la quatrième équation du système (P), le système de réalisation diffusive associé à l'équation des ondes.

Lorsque $\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ et $\zeta = \gamma(\pi)^{-1}\sin(\alpha\pi)$ avec $\gamma > 0$ et $0 < \alpha < 1$, on résout ce système de réalisation diffusive , on obtient

$$(CF) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\gamma \partial_t^{\alpha,\eta} u(x,t) & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \end{cases}$$

où $\partial_t^{\alpha,\eta}$ représente la dérivée fractionnaire de **Caputo** généralisée d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ par rapport à la variable de temps (voir [26] et [17]). Elle est définie par

$$\partial_t^{\alpha,\eta} w(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{dw}{ds}(s)\, ds.$$

On est intéressé également du deuxième problème hyperbolique (P_I) suivant, dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 :

$$(P_I) \quad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ \partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2 + \eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{dans } \Omega \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega, \\ \phi(x,\xi,0) = 0 & \text{sur } \Omega \times (-\infty,\infty), \end{cases}$$

Où $\zeta > 0, \eta \geq 0$ et μ est la densité de mesure générale et les données initiales sont dans des espaces appropriés.

Historique :

Le problème de stabilisation du problème aux limites

$$(P') \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0 & \text{sur } \Omega \times (0,+\infty), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + a(x) u_t = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

a été étudié par plusieurs auteurs par exemple **Haraux** [34], **Bardos** , **G. Lebeau** et **J. Rauch** [10], **Lebeau** et **Robbiano** [10], **Burq** [22] et **Xiaoyu Fu** [33].

Tout d'abord **A. Haraux** a montré que si $a \in L^\infty(\Gamma_N), a \not\equiv 0$, alors chaque solution de (P') tend vers 0 dans $H^1_*(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u|_{\Gamma_D} = 0\}$ fortement lorsque $t \to +\infty$.

C. Bardos, G. Lebeau et J. Rauch [10] ont introduit la technique de "condition géométrique du contrôle " qui est une condition nécessaire et suffisante pour le taux de décroissance uniforme exponentielle de l'énergie.

De plus, **Lebeau et Robbiano** (voir [41]) ont montré que dans le cas où la condition de Neumann sur la frontière est appliquée sur la frontière entière est une condition faible sur le feedback (ce qui ne satisfait pas la condition géométrique de contrôle.) a fournit la décroissance logarithmique des solutions régulières. Le résultat optimal sans hypothèse géométrique est donné dans [22]. Nous rappelons également le résultat de **Fu** [33], là où l'auteur a prouvé un résultat semblable à celui de [41] pour des conditions moins régulières en adoptant l'estimation globale de carleman.

Dans [46] **Mbodje** a étudié la décroissance d'énergie de l'équation des ondes avec un contrôle frontière de type dérivée fractionnaire (CF). La difficulté trouvée revient aux opérateurs fractionnaires et le comportement héréditaire. Donc l'utilisation des outils mathématiques d'analyse, tels que l'analyse de stabilité et l'approximation numérique est trés difficile. Une nouvelle approche qui s'appelle " la représntation diffusive" est établie pour réduire ces difficultés. Le modèle original est transformé en système augmenté qui peut plus facilement être abordé par la méthode d'énergie.

Mbodje a établi la stabilité asymptotique forte des solutions du problème quand $\eta = 0$ et que le taux de décroissance plynomiale

$$\mathcal{E}(t) \leq C/t \quad \text{pour} \quad t > 0 \quad \text{où} \quad \eta \neq 0.$$

Récemment dans [13] **Benaissa** et **Benkhedda** ont considéré la stabilisation pour l'équation des ondes suivante avec un contrôle frontière dynamique de type dérivée fractionnaire (CF) :

$$(S) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - u_{xx}(x,t) = 0 & \text{dans }]0, L[\times]0, +\infty[\\ u(0,t) = 0 & \text{dans } (0, +\infty) \\ mu_{tt}(L,t) + u_x(L,t) = -\gamma \partial_t^{\alpha,\eta} u(L,t) & \text{dans } (0, +\infty). \end{cases}$$

Ils ont montré que la décroissance de l'énergie n'est pas exponentielle, mais elle est polynomiale. Ils ont utilisé la méthode spectrale pour le manque de stabilité exponentielle et le théorème de **Borichev-Tomilov** pour établir le taux de décroissance polynomiale $\mathcal{E}(t) \leq c/t^{1/(2-\alpha)}$.

Récemment, l'application du contrôle frontière de type convolution est devenue un outil d'un grand interêt dans des domaines de recherche comme la viscoélasticité, le chaos, la biologie, la propagation des ondes, le flux de fluide, l'electromagnétisme, le contrôle automatique et le traitement des signaux (voir [52], [56]).

L'aspect le plus important de la dérivée fractionnaire pour les applications réelles est que l'étude de l'évolution d'un système possèdant des termes fractionnaires nécessite à priori le stockage en mémoire de tout le passé du processus, et c'est une propriété fortement désirée.

De plus le noyau de convolution qui décrit de tels opérateurs impose un pas de temps très petit et un domaine d'intégration très étendu. En outre, on ne peut pas obtenir un système sous la forme d'état standard, ce qui rend l'application des outils classiques de l'étude et de l'analyse en contrôle très difficile ou impossible et limitée, notamment l'étude de la stabilité.

"La représentation diffusive " est une représentation symbolique qui permet d'avoir une réalisation non héréditaire d'opérateurs pseudo-différentiels. Cette nouvelle approche est basée sur le comportement entrées/sorties particulier d'une équation de diffusion convenable de nature dissipative, dont la dimension infinie de la variable d'état est en quelque sorte utilisée pour résumer l'histoire de l'entrée de telle sorte que la convolution à mémoire longue définie par les opérateurs fractionnaires soit disponible en sortie. Cette représentation permet d'avoir un système augmenté qui peut se mettre sous la forme abstraite $\frac{dX}{dt} = AX$, où A est le générateur infinitésimal d'un semi-groupe, ce qui rend l'application des outils d'étude et d'analyse en contrôle possible : notamment l'étude de la stabilité de **Lyapunov**.

Notre but est de prouver l'existence et l'unicité du problème (P) et d'établir aussi le taux de décroissance explicite et général de l'énergie qui dépend de μ .

Dans le cas $\eta > 0$ et $meas(\Gamma_D) = 0$, **Stahn** a obtenu indépendamment des résultats relatifs dans [58]. Plus précisément il a considéré le problème suivant :

$$(P) \qquad \begin{cases} p_t(t,x) + divv(t,x) = 0, & (t \in \mathbb{R}, x \in \Omega) \\ v_t(t,x) + \nabla p(t,x) = 0, & (t \in \mathbb{R}, x \in \Omega) \\ e * p(t,x) - \nu.\nabla v(t,x) = 0, & (t \in \mathbb{R}, x \in \partial\Omega). \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné de frontière lipschitzienne et $e : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ une fonction intégrable non nulle qui dépend seulement de la variable de temps et s'annule sur $(-\infty, 0)$. On suppose que e est une fonction complètement monotone. C'est à dire qu'il existe une mesure positive de Radon ϑ sur $[0, \infty)$ telle que e soit la transformée de Laplace de cette mesure i.e : $e(t) = \int_{[0,\infty)} e^{-\tau t}\, d\vartheta(\tau), \quad t > 0.$

L'approche utilisée dans son travail, qui est basée sur la transformation de Laplace et la stratégie utilisée dans [28], [29] et [53] est différente de notre approche. En particulier, **Stahn** a prouvé la décroissance optimale dans le cas 1-D comme dans notre travail. D'une manière essentielle les conditions qu'il a utilisé pour obtenir le taux de décroissance sont différentes de celles que nous avons utilisé.

En outre, nos résultats dans le cas multidimensionnel sont différents car nous utilisons seulement la condition géométrique de contrôle des multiplicateurs. Notre méthode s'applique aussi (avec quelques modifications) dans le cas $meas(\Gamma_D) = 0$. De plus, on applique nos résultas pour la classe importante des fonctions à variation régulière.

Plan de la thèse :

Notre thèse est divisée en cinq chapitres. Le premier chapitre est consacré aux rappels et généralités. Le chapitre deux est consacré aux rappels de quelques types de fonctions (fonctions à variation régulière, fonctions à variation lente, fonctions de Stieltjes.)

Pour le chapitre trois, dans la première section on établit l'existence et l'unicité d'une solution globale faible et forte du système (P) dans des espaces de Sobolev appropriés en utilisant la théorie des semi-groupes lié avec le théorème de Hille-Yosida.

La deuxième section de ce chapitre est consacrée à l'étude de la stabilité du système (P) et elle est divisée en cinq parties. Dans la première partie on montre que système (P) n'est pas exponentiellement stable dans le cas 1-D. Dans la deuxième partie on établit la stabilité asymptotique dépendante de la forme de la mesure de diffusion de l'énergie du système (P). La partie trois est consacrée à l'étude du spectre résiduel de l'opérateur $\mathcal{A}$. Dans la partie quatre on établit la décroissance générale pour $\eta \neq 0$. La partie cinq est consacrée à l'étude de la décroissance optimale de l'énergie dans le cas 1-D où on obtient divers types de stabilisation : exponentielle, polynomiale et logarithmique.

Les résultats de ce chapitre ont fait l'objet d'une publication internationale parue dans la revue **Mathematische Nachrichten** intitulée **Well-posedness and energy decay of solutions to a wave equation with a general boundary control of diffusive type.**

DOI : 10.1002/mana.201800224. Mars(2019). Voir [14].

Le chapitre quatre est consacré à l'étude d'un système hyperbolique linéaire en présence des forces d'inertie de rotation et un terme de mémoire interne de type fractionnaire, où on montre l'existence globale de la solution ainsi que la stabilité polynomiale, en utilisant des outils de semi-groupe et l'analyse de la résolvante sur l'axe imaginaire. Les résultats de ce chapitre est une partie d'un travail (en soumis au journal **Mathematische Nachrichten**) sous le titre : **Stabilization of a hyperbolic equation with a general internal control of diffusive type**.

Le chapitre cinq est consacré aux commentaires, conclusion et perspectives.

Chapitre 1

Rappels et généralités

On rappelle dans ce chapitre des notions et des résultats fondamentaux pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

1.1 Notations asymptotiques

Notation de O et o

Les notations O(.) et o(.) sont définies comme suit : pour $s > 0$ et un nombre réel p

(•) $f(s) = O(s^p)$ lorsque $s \to 0 \Leftrightarrow s^{-p} \mid f(s) \mid$ est bornée lorsque $s \to 0$

(•) $f(s) = o(s^p)$ lorsque $s \to 0 \Leftrightarrow s^{-p} \mid f(s) \mid \to 0$ lorsque $s \to 0$

Soient f et g deux fonctions définies sur le mêmes sous-ensemble de $\mathbb{R}$, on définit

(•) $f(s) = O(g(s))$ lorsque $s \to +\infty$ signifie qu'il existe un nombre positif $M > 0$ et un nombre réel s_0 tels que

$$\mid f(s) \mid \leq M \mid g(s) \mid, \quad \forall s \geq s_0$$

(•) $f(s) = o(g(s))$ lorsque $s \to +\infty$ signifie que

$$\lim_{s \to +\infty} \left| \frac{f(s)}{g(s)} \right| = 0.$$

(•) $f \sim g$ lorsque $s \to \infty$ signifie que

$$\lim_{s \to +\infty} \left| \frac{f(s)}{g(s)} \right| = 1.$$

Nous sommes intéressés aux propriétés asymptotiques des fonctions définies sur un intervalle de la forme $[a, +\infty)$ pour un certain $a > 0$, à valeurs dans $[0, +\infty)$.
On dit que f et g sont asymptotiquement équivalentes, et on écrit $f \sim g$, ou $f(s) \sim g(s)$, si

$$\lim_{s \to +\infty} \frac{f(s)}{g(s)} = 1$$

ceci définit une relation d'équivalence sur telles fonctions et nous travaillerons en effet avec les classes d'équivalence des fonctions.
Si f et g sont des fonctions définies sur l'intervalle $(0, a]$, la notation

$$f(s) \sim g(s), \quad s \to 0_+$$

signifie que

$$\lim_{s \to +0_+} \frac{f(s)}{g(s)} = 1.$$

1.2 Quelques rappels de l'analyse complexe

Définition 1.2.1

Soit f une fonction complexe définie dans un ouvert U du plan complexe $\mathbb{C}$. Etant donné un point $a \in U$.

- On dit que f est holomorphe dans U si elle est dérivable en tout point de U.

- On dit que f est holomorphe en a si elle est holomorphe dans un voisinage ouvert de a.

Théorème 1.2.1 *(***Théorème de Rouché***)*

Si les fonctions f et g sont régulières à l'intérieur du contour fermé $\mathcal{C}$ de $\mathbb{C}$, et si elles sont continues sur $\mathcal{C}$, et si

$$|f(z)| > |g(z)|, \quad (z \in \mathcal{C}).$$

Alors les fonctions $z \mapsto f(z)$ et $z \mapsto g(z) + f(z)$ ont le même nombre de zéros à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Voir (Thm 4.3.1 de [32]).

Théorème 1.2.2

Soit $\mathcal{U}$ un sous-ensemble ouvert d'un espace de Banach complexe. Soit $f : \overline{\mathcal{U}} \to E$ et $g : \overline{\mathcal{U}} \to E$ deux applications continues dans $\mathcal{U}$ et holomorphes dans $\mathcal{U}$.

Supposons que $\|g\| < \|f\|$ sur $\partial\mathcal{U}$, et que $(I - f)(\mathcal{U})$ et $[I - (f + g)](\mathcal{U})$ sont contenues dans un sous-ensemble de E. Alors f possède un nombre fini de zéros dans $\mathcal{U}$ et, f et $f + g$ ont le même nombre de zéros dans $\mathcal{U}$.

Preuve : voir ([62]).

1.3 Opérateurs bornés et non bornés

On commence dans ce chapitre par donner quelques résultats qui sont connus sur les opérateurs bornés et non bornés. On n'essaye pas de donner tout, mais de donner les définitions et les théorèmes de base dans la plus part on les présente sans démonstrations que l'on voit nécessaires dans notre travail.
Soient $(E, \| \,.\, \|_E)$ et $(F, \| \,.\, \|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, et $\mathcal{H}$ désigne toujours un espace de Hilbert muni d'un produit scalaire $<,>_{\mathcal{H}}$ et la norme correspondante $\| \,.\, \|_{\mathcal{H}}$.

Définition 1.3.1
Un opérateur linéaire $T : E \to F$ est dit bornée s'il existe $C > 0$ telle que

$$\| Tx \|_F \leq C \| x \|_E, \quad \forall x \in E$$

dans le cas contraire, T est dit non borné.

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans F est noté par $L(E, F)$. De plus, L'ensemble de tout les opérateurs linéaires bornés de E dans E est noté par $L(E)$.

Définition 1.3.2
Un opérateur linéaire non borné de E dans F est un couple $(T, D(T))$, avec $D(T) \subset E$ est un sous-espace de E (dit le domaine de T) et la transformation linéaire

$$T : D(T) \subset E \to F$$

dans le cas où $E = F$, alors on dit que $(T, D(T))$ est un opérateur linéaire non borné sur E.

Définition 1.3.3
Soit $T : (T, D(T)) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné.

(•) *L'image de T est définie par*

$$Im(T) = \{Tx : x \in D(T)\} \subset F.$$

(•) *Le noyau de T est défini par*

$$\ker(T) = \{x(T) : Tx = 0\} \subset E.$$

($\bullet$) *Le graphe de T est défini par*

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\} \subset E \times F$$

Définition 1.3.4

L'opérateur $T \in L(E,F)$ est dit compact si de toute suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de E avec $\| x_n \| = 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ admet une sous-suite convergente dans F.

L'ensemble de tous les opérateurs compacts de E dans F est noté par $\mathcal{K}(E,F)$, et si $E = F$, on écrit $\mathcal{K}(E,E) = \mathcal{K}(E)$.

Théorème 1.3.1 *(alternative de Fredholm)*

Soit $T \in \mathcal{K}(E)$. Alors

($\bullet$) $\ker(I - T)$ *est de dimension finie, (I est l'opérateur identité de E).*

($\bullet$) $Im(I - T)$ *est fermé, et plus précisément*

$Im(I - T) = \ker(I - T^*)^{\perp}$.

($\bullet$) $\ker(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow Im(I - T) = E$

Définition 1.3.5

Un opérateur $T : (T, D(T)) \subset E \to F$ est dit fermé si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.

Un opérateur linéaire non borné fermé est caractérisé par :

T est fermé si et seulement si

$$\begin{pmatrix} \textit{Pour toute suite} \quad (x_n) \quad \textit{telle que} \quad (x_n) \subset D(T), \\ x_n \to x \quad \textit{dans} \quad E \\ \textit{et} \quad Tx_n \to y \quad \textit{dans} \quad F \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x \in D(T) \\ \textit{et} \\ Tx = y \end{pmatrix}.$$

1.4 Outils d'analyse fonctionnelle et espaces de Sobolev

Théorème 1.4.1 *(de convergence dominée)*

Soit Ω un ensemble mesurable et soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables tels que $\lim\limits_{n\to+\infty} f_n(x) = f(x)$ p.p $x \in \Omega$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|\, f_n(x) \,| \leq g(x)$ p.p $x \in \Omega$, où g est une fonction intégrable sur Ω. Alors

$$\lim_{n\to+\infty} \int_\Omega f_n(x)\, dx = \int_\Omega f(x)\, dx$$

1.4.1 Espaces fonctionnels

Ω désigne un ouvert de $\mathbb{R}^n$ muni de la norme de Lebesgue dx.

On désigne par $L^1(\Omega)$ l'espace des fonctions intégrables sur Ω à valeurs dans $\mathbb{R}$.

On pose

$$\|f\|_{L^1(\Omega)} = \int_\Omega |f(x)|\, dx$$

Définition 1.4.1

Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$; on pose

$$L^p(\Omega) = \Big\{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable et } |f|^p \in L^1(\Omega) \Big\}.$$

On note

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_\Omega |f(x)|^p \right]^{\frac{1}{p}}$$

Définition 1.4.2

On pose

$$L^\infty(\Omega) = \{ f : \Omega \to \mathbb{R}; f \text{ mesurable, } \exists \text{ une constante } C \text{telle que } |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}.$$

On note

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ C; |f(x)| \leq C \text{ p.p sur } \Omega \}$$

Remarque 1.4.1

Si $f \in L^\infty(\Omega)$, on a

$$|f(x)| \leq \|f\|_{L^\infty(\Omega)} \text{ p.p sur } \Omega$$

Notation

Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p, c'est à dire $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Théorème 1.4.2 *(**inégalité de Hölder**)([19] p.56)*

Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq \infty$.

Alors $fg \in L^1(\Omega)$ et

$$\int_\Omega |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)}\|g\|_{L^q(\Omega)}$$

Notations :

Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{R}^n$, $\mathcal{K}$ désigne un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^n$, d'intérieur non vide, inclus dans Ω : $\emptyset \neq \mathring{\mathcal{K}} \subset \mathcal{K} \subset \Omega$.

Soit $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ un élément de $\mathbb{N}^n$. On appelle ordre de α et on note $|\alpha|$ l'entier : $|\alpha| = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Soit φ une fonction de $\mathbb{R}^n$ dans $\mathbb{C}$, α un élément de $\mathbb{N}^n$. On note $D^\alpha\varphi$ la dérivée d'ordre α de φ soit

$$D^\alpha\varphi = \frac{\partial^\alpha \varphi}{\partial^{\alpha_1}x_1....\partial^{\alpha_n}x_n}.$$

On note $\mathscr{D}_{\mathcal{K}}(\Omega) = \left\{\varphi \in C^\infty(\Omega)/supp(\varphi) \subset \mathcal{K}\right\}$.

Définition 1.4.3 *(Espace $\mathscr{D}(\Omega)$ des fonctions "test")*

Soit Ω un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$; on appelle **espace des fonctions test** *et on note $\mathscr{D}(\Omega)$ l'ensemble*

$$\mathscr{D}(\Omega) = \left\{\varphi \in C^\infty(\Omega)/\exists\ \mathcal{K}\ compact, \mathcal{K} \subset \Omega, \varphi \in \mathscr{D}_{\mathcal{K}}(\Omega\right\}$$

Définition 1.4.4

Soit Ω un domaine non vide de $\mathbb{R}^n$, et soit $\mathscr{D}(\Omega)$ est comme dans la définition (1.4.3).

$\mathscr{D}'(\Omega)$ est l'espace de toutes les formes linéaires continues sur $\mathscr{D}(\Omega)$, c'est à dire que

$$T : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C},\ T : \varphi \mapsto T(\varphi),\ \varphi \in \mathscr{D}(\Omega),$$

$T(\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2) = \lambda_1 T(\varphi_1) + \lambda_2 T(\varphi_2),\ \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C};\ \varphi_1, \varphi_2 \in \mathscr{D}(\Omega),$

et $T(\varphi_j) \to T(\varphi)$, pour $j \to +\infty$ lorsque $\varphi_j \to \varphi$ dans $\mathscr{D}(\Omega)$.

$T \in \mathscr{D}'(\Omega)$est dite une **distribution***.*

Dérivation d'une distrubution :

Définition 1.4.5

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, T un élément de $\mathscr{D}'(\Omega)$: pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$, on appelle dérivée d'ordre α

de T et on note $D^\alpha T$ l'application

$$D^\alpha : \mathscr{D}(\Omega) \to \mathbb{C}, \varphi \mapsto D^\alpha T(\varphi) = (-1)^{|\alpha|}\langle T, D^\alpha \varphi\rangle$$

1.4.2 Espace de Sobolev, résultats de densité

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.4.6

L'espace de Sobolev $H^1(\Omega)$ est défini par

$$H^1(\Omega) = \left\{ v \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, 2, ..., n \right\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ est prise au sens des distributions.
L'espace $H^1(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$< u, v >_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \left(uv + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial v}{\partial x_i} \right) dx$$

et la norme correspondante

$$||v||_{H^1(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(v^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial v}{\partial x_i} \right)^2 dx \right) \right]^{\frac{1}{2}}.$$

Remarque 1.4.2

par définition de la dérivation dans l'espace des distributions $\mathscr{D}'(\Omega)$, les deux conditions suivantes sont équivalentes

(a) $v \in H^1(\Omega)$

(b) $v \in L^2(\Omega)$ et il existe $g_1, g_2, ..., g_n \in L^2(\Omega)$ tels que

$$\forall \varphi \in \mathscr{D}'(\Omega), \int_\Omega v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\, dx = -\int_\Omega g_i \varphi\, dx.$$

Alors par définition $\dfrac{\partial v}{\partial x_i} = g_i$ au sens des distributions.
La définition ci-dessus peut être prolongée lorsqu'on remplace l'espace $L^2(\Omega)$ par l'espace $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.4.7

Pour tout $1 \leq p \leq +\infty$, *l'espace de Sobolev* $W^{1,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ v \in L^p(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^p(\Omega), i = 1, 2, ..., n \right\}$$

où $\dfrac{\partial v}{\partial x_i}$ *est prise au sens des distributions.*
L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \left[\int_\Omega \left(|v|^p + \sum_{i=1}^n \left| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right|^p \right) dx \right]^{\frac{1}{p}} \quad \textit{pour} \quad 1 \leq p < +\infty,$$
$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \max \left\{ \|v\|_\infty, \left\| \tfrac{\partial v}{\partial x_1} \right\|_\infty, ..., \left\| \tfrac{\partial v}{\partial x_n} \right\|_\infty \right\} \quad \textit{pour} \quad p = +\infty.$$

Lorsque $p = 2$, $W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$.

Définition 1.4.8

On prend $m \in \mathbb{N}$ *et* $1 \leq p \leq +\infty$. *L'espace de Sobolev* $W^{m,p}(\Omega)$ *est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{ v \in L^p(\Omega) : D^\alpha v \in L^p(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N} \quad \textit{avec} \quad |\alpha| \leq m \}$$

où $D^\alpha v$ *est la dérivée de* v *au sens des distributions de symbole* α.
On rappelle que $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n), D^\alpha v = \dfrac{\partial^{|\alpha|} v}{\partial x_1^{\alpha_1} .... \partial x_n^{\alpha_n}}$, *avec* $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$.
L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ *est muni de la norme*

$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \left[\sum_{0 \leq |\alpha| \leq m} \int_\Omega |D^\alpha v|^p \, dx \right]^{\frac{1}{p}}, \textit{pour} \quad 1 \leq p < +\infty,$$
$$\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \max_{0 \leq |\alpha| \leq m} \|D^\alpha v\|_\infty, \qquad \textit{pour} \quad p = +\infty.$$

Lorsque $p = 2, W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega) = \{ v \in L^2(\Omega) : D^\alpha v \in L^2(\Omega), \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, |\alpha| \leq m \}$, on le munit du produit scalaire

$$< u, v >_m = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_\Omega D^\alpha u(x) \overline{D^\alpha v(x)} \, dx \tag{1.1}$$

et la norme associée

$$\|u\|_{m,\Omega} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \int_\Omega |D^\alpha u(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\sum_{|\alpha| \le m} \|D^\alpha u(x)\|^2_{L^2(\Omega)} \right)^{\frac{1}{2}}.$$

L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ peut aussi muni de la norme équivalente

$$\|v\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|\frac{\partial v}{\partial x_i}\|_{L^p(\Omega)}.$$

Théorème 1.4.3 (théorème 5.1.2[5])

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour tout $m \in \mathbb{N}$ et tout nombre réel p avec $1 \le p \le +\infty, W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach. Lorsque $p = 2, W^{m,p}(\Omega) = H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert.

Proposition 1.4.1

(i) Si $m \ge m'(m, m' \in \mathbb{N})$, alors $H^m(\Omega)$ est contenu, avec une injection continue, dans $H^{m'}(\Omega)$.

(ii) $H^m(\Omega)$ muni du produit scalaire 1.1 est un espace de Hilbert.

Preuve : (voir[31] proposition 1 p.93)

Définition 1.4.9

Par définition

$$\begin{aligned}
&H^1_0(\Omega) = \textit{la fermeture de } \mathscr{D}(\Omega) \textit{ dans } H^1(\Omega)\\
&H^1_0(\Omega) = \textit{sous espace de } H^1(\Omega) \textit{ des fonctions nulles sur } \partial\Omega\\
&W^{1,p}_0(\Omega) = \textit{la fermeture de } \mathscr{D}(\Omega) \textit{ dans } W^{1,p}(\Omega)\\
&W^{m,p}_0(\Omega) = \textit{la fermeture de } \mathscr{D}(\Omega) \textit{ dans } \quad W^{m,p}(\Omega).
\end{aligned}$$

Puisque (par définition) $\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $H^1_0(\Omega)$, on peut identifier le dual $H^{-1}(\Omega)$ de $H^1_0(\Omega)$ à un espace de distributions sur Ω.

$$\begin{cases} H^{-1}(\Omega) = (H^1_0(\Omega))' \\ H^1_0(\Omega) \subset L^2(\Omega) \subset H^{-1}(\Omega) \subset \mathcal{D}'(\Omega) \end{cases}$$

Définition 1.4.10

Pour $m \in \mathbb{N}$, on désigne par $H_0^m(\Omega)$ la fermeture de $\mathscr{D}(\Omega)$ dans $H^m(\Omega)$.

De manière évidente, $H_0^m(\Omega)$ est un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$, mais en général $H_0^m(\Omega) \neq H^m(\Omega)$.

Signalons deux cas où on a bien l'égalité

(i) Si $m = 0$, alors $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ et donc $H_0^0(\Omega) = H^0(\Omega)$

(ii) Si $\Omega = \mathbb{R}^n$, alors on peut montrer que $H_0^m(\mathbb{R}^n) = H^m(\mathbb{R}^n)$

Théorème 1.4.4 (inégalité de Poincaré théorème 5.3.1[5])

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$ borné dans une direction. Alors, pour tout $1 \leq p < +\infty$, il existe une constante $C_{p,n}(\Omega)$ qui dépend seulement de Ω, p et n telle que

$$\left(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq C_{p,n}(\Omega) \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |\frac{\partial v}{\partial x_i}|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}, \forall v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Théorème 1.4.5 (inégalité de Poincaré) (théorème 1.4.6 p.11 [45])

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H_0^1(\Omega)$. Alors il existe une constante positive C qui dépend seulement de Ω et n telle que

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}, \quad \forall u \in H_0^1(\Omega).$$

Théorème 1.4.6 ([45] théorème 1.4.7 p.11)

Soit Ω un ouvert borné de classe C^1 de $\mathbb{R}^n$. Il y a une constante positive C qui dépend seulement de Ω et n telle que pour tout $u \in H^1(\Omega)$,

$$\|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C\left(\|\nabla u\|_{L^2(\Omega)} + \left|\int_\Omega u \, dx\right|\right).$$

Définition 1.4.11

Soient deux espaces de Banach E et F tels que $F \subset E$. On dit que F s'injecte de manière continue dans E (en notation $F \hookrightarrow E$) si et seulement si l'opérateur identité

$$Id : \begin{array}{l} F \to E \\ y \mapsto y \end{array}$$

est continu. De même, on dit que F s'injecte de manière compacte dans E (en notation $F \hookrightarrow_c E$)si et seulement si l'opérateur identité de F dans E est compact.

Théorème 1.4.7 *(***de Relliche***)*

Si Ω un ouvert borné et à bord continu, alors

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c H^{m-1}(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*.$$

En particulier,

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow_c L^2(\Omega),\ \forall m \in \mathbb{N}^*$$

Théorème 1.4.8 *(***injection de Sobolev***)*

Si Ω un ouvert borné et à bord lipschitzien, alors on a les deux injections suivantes

$$H^m(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega), \forall m \in \mathbb{N}^*, 1 \le p < \infty \quad \textit{tel que} \quad m - \tfrac{n}{2} \ge -\tfrac{n}{p}$$
$$H^m(\Omega) \hookrightarrow C(\bar{\Omega}), \forall m \in \mathbb{N}^* \quad \textit{tel que} \quad m - \tfrac{n}{2} > 0.$$

Pour les deux théorèmes 1.4.7 et 1.4.8 voir [43], [50] et [2]

Théorème 1.4.9 (théorème de trace) ([45] théorème 1.4.3 p.10)

Soit $\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$ la normale unitaire extérieure sur $\partial\Omega$ et

$$\gamma_j = \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\Big|_{\partial\Omega}, \forall u \in C^m(\bar{\Omega}), \quad j = 0, ...m-1$$

Alors l'opérateur de trace, $\gamma = \{\gamma_0, ..., \gamma_{m-1}\}$, peut être prolongé uniquement à un opérateur de $W^{m,p}(\Omega)$ vers $\prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$

$$\gamma : u \in W^{m,p}(\Omega) \mapsto \gamma u = \{\gamma_0 u, ..., \gamma_{m-1} u\} \in \prod_{j=0}^{m-1} W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega).$$

De plus, elle une application surjective.

Notons que les espaces $W^{m-j-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$ sont des espaces à dérivées d'ordre fractionnaire. (Pour plus de detail voir [43]).

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1. Alors, pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, d'après le théorème de trace, on a $u\Big|_{\partial\Omega} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega) \subset L^2(\partial\Omega)$.

Nous avons maintenant les résultats suivants.

Théorème 1.4.10 **([45] théorème 1.4.4 p.10)**
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^1.
Alors pour toute fonction $u \in H^1(\Omega)$, l'estimation suivante a lieu

$$\|u\|_{L^2(\partial\Omega)} \leq C\|u\|^{\frac{1}{2}}_{H^1(\Omega)}\|u\|^{\frac{1}{2}}_{L^2(\Omega)}$$

avec C une constante positive indépendante de u.

Théorème 1.4.11 *(***formule de Green)(théorème 1.3.2 de [9])**
Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de classe C^1.

(1) Si $u \in C^1(\bar{\Omega}), v \in C^1(\bar{\Omega})$ et $\Delta v \in C(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega u(x)\Delta v(x)\,dx = -\int_\Omega \nabla u(x).\nabla v(x)\,dx + \int_{\partial\Omega} u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x)\,d\Gamma.$$

(2) Si $u, v \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ et $\Delta u, \Delta v \in C(\bar{\Omega})$, alors

$$\int_\Omega \Big[u(x)\Delta v(x) - v(x)\Delta u(x)\Big]\,dx = \int_{\partial\Omega}\left(u(x)\frac{\partial v}{\partial \nu}(x) - v(x)\frac{\partial u}{\partial \nu}\right)\,d\Gamma.$$

Théorème 1.4.12 *(***Lax-Milgram [5])**
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert muni du produit scalaire $<,>_{\mathcal{H}}$ et la norme correspondante $\| \,.\, \|_{\mathcal{H}} = <,>^{\frac{1}{2}}_{\mathcal{H}}$.
Soit $a : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \to \mathbb{R}$ une forme bilinéaire qui satisfait les deux conditions (i) et (ii) suivantes

(i) a est continue, c'est à dire il existe une constante $M > 0$ telle que

$$\forall u, v \in \mathcal{H} : |a(u, v)| \leq M \parallel u \parallel_{\mathcal{H}} \parallel v \parallel_{\mathcal{H}}$$

(i) a est coercive, c'est à dire il existe une constante $\alpha > 0$ telle que

$$\forall v \in \mathcal{H} : a(v, v) \geq \alpha \parallel v \parallel^2_{\mathcal{H}}\ .$$

Alors pour tout $L \in \mathcal{H}'$ (L est une forme linéaire continue sur $\mathcal{H}$), il existe une unique $u \in \mathcal{H}$ telle que

$$a(u, v) = L(v), \quad \forall v \in \mathcal{H}$$

Théorème 1.4.13 *(d'unicité de Holmgren. théorème 1.6 page 17 de [42])*
Soit

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leq m} a_\alpha(x) D_x^\alpha$$

un opérateur linéaire à coéfficients analytiques sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^n$ et soit Σ une hypersurface non caractéristique par rapport à $P(x,D)$, de classe C^1 de sorte que nous avons une partition

$$\Omega = \Omega_- \bigcup \Sigma \bigcup \Omega_+$$

avec Ω_- et Ω_+ sont ouverts.
Soit u une distribution sur Ω telle que $Pu = 0$ et $u\Big|_{\Omega_-} = 0$. Alors $u = 0$ sur un voisinage ouvert de Σ.

1.5 Analyse spectrale

Définition 1.5.1
Soit E un espace de Banach et $\Big(\mathcal{A}, D(\mathcal{A})\Big)$ un opérateur borné ou non borné

1) On appelle ensemble résolvant de $\mathcal{A}$ l'ensemble

$$\rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to E \textit{ est inversible}\}.$$

L'ensemble résolvant est un ouvert de $\mathbb{C}$.
2) Pour $\lambda \in \rho(\mathcal{A})$ on note, $R(\lambda) = (\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$.
La famille d'opérateurs linéaires $\{(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : \lambda \in \rho(\mathcal{A})\}$ est appelée la résolvante de $\mathcal{A}$.
- *La fonction $\lambda \to R(\lambda)$ est analytique de $\rho(\mathcal{A})$ dans $\mathcal{L}(E)$,*
- *D'après le théorème du graphe fermé, il résulte que l'opérateur $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : E \to E$ est continu sur E.*
- *L'application $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : E \to D(\mathcal{A}) \subset E$ est compacte si l'injection : $\Big(D(\mathcal{A}), \|.\|_{D(\mathcal{A})}\Big) \to (E, \|.\|_E)$ est compacte.*
- *On a pour tout $(\lambda, \mu) \in \rho(\mathcal{A}) \times \rho(\mathcal{A})$, L'identité de la résolvante*

$$R(\lambda) - R(\mu) = (\mu - \lambda) R(\lambda) R(\mu)$$

3) On appelle spectre de $\mathcal{A}$ l'ensemble

$$\sigma(\mathcal{A}) = \mathbb{C} \setminus \rho(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A} \quad \textit{non inversible}\}.$$

Un tel λ est appelé une valeur spectrale de $\mathcal{A}$.

• *$\sigma(\mathcal{A})$ est un compact de $\mathbb{C}$.*

4) $\sigma_p(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to E \quad \textit{non injectif} \quad \}$

$\sigma_p(\mathcal{A})$ est lensemble des valeurs propres de $\mathcal{A}$. $\sigma_p(\mathcal{A})$ est l'ensemble des $\lambda \in \mathbb{C}$ tels qu'il existe $u \in E \setminus \{0\}$ tel que

$$\mathcal{A}u = \lambda u$$

5) $\sigma_r(\mathcal{A}) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to E \quad \textit{injectif et} \quad \overline{Im(\lambda I - \mathcal{A})} \neq E\}$

$\sigma_r(\mathcal{A})$ est le spectre résiduel de $\mathcal{A}$.

Et

$$\sigma_c(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} \lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - \mathcal{A} : D(\mathcal{A}) \to E \quad \textit{injectif et} \quad \overline{Im(\lambda I - \mathcal{A})} = E \\ \textit{et} \quad (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} : Im(\lambda I - \mathcal{A}) \to D(\mathcal{A}) \ \textit{non borné} \end{array} \right\}$$

$\sigma_c(\mathcal{A})$ est le spectre continu de $\mathcal{A}$.

6) L'esemble $\sigma(\mathcal{A})$ se décompose en l'union disjointe

$$\sigma(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}) \cup \sigma_r(\mathcal{A}) \cup \sigma_c(\mathcal{A}).$$

1.6 Opérateurs dissipatifs et m-dissipatifs

Définition 1.6.1

Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert réel ou complexe muni d'un produit scalaire $<,>$ et de la norme induite $\| \,.\, \|$. Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire à domaine dense sur $\mathcal{H}$, c'est à dire $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ et $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

- En cas où $\mathcal{H}$ est de Hilbert sur $\mathbb{C}$, on dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si pour tout $x \in D(\mathcal{A})$,

$$\Re\langle \mathcal{A}x, x\rangle \leq 0.$$

- En cas où $\mathcal{H}$ est de Hilbert sur $\mathbb{R}$, on dit que $\mathcal{A}$ est dissipatif si pour tout $x \in D(\mathcal{A})$,

$$\langle \mathcal{A}x, x\rangle \leq 0.$$

Définition 1.6.2

Un opérateur linéaire $\mathcal{A}$ dans un espace de Banach E est dit m-dissipatif si $\mathcal{A}$ et dissipatif et $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif c'est à dire $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = E$, pour tout $\lambda > 0$.

Théorème 1.6.1

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Banach E. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif avec $Im(I - \mathcal{A}) = E$, et E est réflexif, alors $\overline{D(\mathcal{A})} = E$.

Théorème 1.6.2

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur m-dissipatif, alors

($\bullet$) $Im(\lambda I - \mathcal{A}) = E$.

($\bullet$) $]0, +\infty[\subseteq \rho(\mathcal{A})$.

1.7 Semi-groupes, existence et unicité de la solution

1.7.1 Concepts sur les semi-groupes

Dans cette section on va d'introduire quelques notions de base concernant les semi-groupes. On commence par des définitions et théorèmes de base.

Définition 1.7.1

La famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach E (c'est à dire $\forall t \geq 0$, $S(t) \in L(E)$) est dite un semi-groupe fortement continu (en bref C_0- semi-groupe) si

(1) $S(t+s) = S(t)S(s), \quad \forall t, s \geq 0$

(2) S(0)=I

(3) $(S(t))_{t\geq 0}$ *est fortement continue sur* $[0, +\infty[$ *(ce qui est équivalent à*

$\lim\limits_{t\to 0} \|S(t)x - x\|_E = 0, \quad$ *Pour tout* $x \in E$*).*

Pour un tel C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ x \in E : \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t} \text{ existe} \right\}$$

et

$$\mathcal{A}x = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)x - x}{t}, \ \forall x \in D(\mathcal{A})$$

est dit le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ et $D(\mathcal{A})$ est dit le domaine de $\mathcal{A}$. Etant donné un opérateur $\mathcal{A}$, si $\mathcal{A}$ coïnside avec le générateur infinitésimal du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, alors on dit qu'il génére le semi-groupe fortement continu $(S(t))_{t\geq 0}$. Parfois on note également $S(t) = e^{t\mathcal{A}}$.

Théorème 1.7.1 (Hille-Yosida)[[45] Thm 1.2.1 p. 4]

Un opérateur linéaire (non borné) $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ si et seulement si

(i) $\mathcal{A}$ est fermé et $\overline{D(\mathcal{A})} = \mathcal{H}$.

(ii) l'ensemble résolvant $\rho(\mathcal{A})$ de $\mathcal{A}$ contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$

$$\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Proposition 1.7.1 ([51] p.22)

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Banach E. Alors ils existent des constantes

$M \geq 1$ et $\omega \geq 0$ telles que

$$\| S(t) \|_{L(X)} \leq M e^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0.$$

Si $\omega = 0$ alors le semi-groupe correspondant est uniformément borné. De plus, si $M = 1$ alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est dit C_0-semi-groupe de contraction.

Théorème 1.7.2 (théorème 2.19 [39])
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ sur un espace de Banach E.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 = \lim_{t\to+\infty} \frac{\ln \|S(t)\|}{t}.$$

Théorème 1.7.3 (théorème 2.20 [39])
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ sur un espace de Banach E et $\sigma(\mathcal{A})$ le spectre de $\mathcal{A}$.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 \geq \sup\{\Re e(\lambda),\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\},$$

où $\Re e(\lambda)$ désigne la partie réelle de λ et $\sup\{\Re e(\lambda),\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ est la borne spectrale de $\mathcal{A}$.

Théorème 1.7.4 (théorème 2.21 [39])
Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe analytique de générateur infinitésimal $\mathcal{A}$ sur un espace de Banach E et $\sigma(\mathcal{A})$ le spectre de $\mathcal{A}$.
Alors le type ω_0 du semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ satisfait

$$\omega_0 = \sup\{\Re e(\lambda),\ \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}.$$

Théorème 1.7.5 *(***Lumer-Phillips)**

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach E.

Alors $\mathcal{A}$ le est générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si

(i) $\overline{D(\mathcal{A})} = E$.

(ii) $\mathcal{A}$ est m-dissipatif.

Corollaire 1.7.1

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire sur un espace de Banach E. Alors,

$\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E si et seulement si

(i) $\mathcal{A}$ est fermé et $\overline{D(\mathcal{A})} = E$.

(ii) $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ sont dissipatifs.

Corollaire 1.7.2

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction si et seulement si $\mathcal{A}$ est un opérateur m-dissipatif.

Théorème 1.7.6 **([45] théorème 1.2.4 p.3)**

Soit $\mathcal{A}$ un opérateur linéaire à domaine dense $D(\mathcal{A})$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Si $\mathcal{A}$ est dissipatif et $0 \in \rho(\mathcal{A})$ l'esemble résolvant de $\mathcal{A}$, alors $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction sur $\mathcal{H}$.

La majorité des équations d'évolution peuvent être réduites sous la forme d'un problème de Cauchy abstrait suivant

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, & t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{1.2}$$

où $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe $(\mathrm{S(t)})_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.

Théorème 1.7.7 *(***Hille-Yosida)**

Soit $(\mathcal{A}, D(\mathcal{A}))$ un opérateur linéaire non borné sur $\mathcal{H}$. Supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$. Alors,

(1) Pour $U_0 \in D(\mathcal{A})$, le problème (1.2) admet une solution forte unique

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0\Big(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})\Big) \cap C^1\Big(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}\Big).$$

(2) Pour $U_0 \in \mathcal{H}$ le problème (1.2) admet une solution faible unique

$$U(t) \in C^0\Big(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}\Big).$$

1.7.2 Stabilité du semi-groupe

Définition 1.7.2

Soit $\omega(A) = \sup\{\Re e(\lambda), \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\}$ *la borne spectrale de* $\mathcal{A}$.

On dit que le semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *est stable si* $\lim\limits_{t+\infty} S(t)x = 0$, *pour tout* $x \in E$.

Si $\omega(A) < 0$, *alors* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est dit exponentiellement stable.*

Définition 1.7.3

Supposons que $\mathcal{A}$ *est le générateur d'un* C_0*-semi-groupe de contraction* $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur un espace de Banach* E. *On dit que le* C_0*-semi-groupe* $(S(t))_{t\geq 0}$ *est*

(i) fortement stable si

$$\lim_{t\to+\infty} \| S(t)x \|_E = 0, \quad \forall x \in E.$$

(ii) Uniformément stable si

$$\lim_{t\to+\infty} \| S(t) \|_{\mathcal{L}(E)} = 0.$$

(iii) Faiblement stable si

$$\textit{pour tout} \quad x \in E \quad \textit{et} \quad y \in E', < S(t)x, y > \to 0 \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty.$$

(iv) Asymptotiquement stable si

$$\textit{pour tout } x \in E : \| \ S(t)x \| \to 0, \quad \textit{lorsque} \quad t \to \infty.$$

(v) Exponentiellement stable s'ils existent deux constantes $M \geq 1$ *et* $\omega > 0$ *telles que*

$$\| S(t)x \|_E \leq Me^{-\omega t} \| x \|_E \quad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, x \in E.$$

(vi) Polynomialement stable s'ils existent deux constantes positives C *et* α *telles que*

$$\| S(t)x \|_E \leq Ct^{-\alpha} \| x \|_E, \quad \forall t > 0, \forall x \in E.$$

Définition 1.7.4

Un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ *sur* $\mathcal{H}$ *est dit uniformément exponentiellement asymptotiquement stable si et seulement s'il existent deux nombres positifs* $M \geq 1$ *et* ω *tels que,*

$$\|S(t)\| \leq Me^{-\omega t}, \textit{ pour tout} \quad t \geq 0.$$

Définition 1.7.5 *:*

Un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$ est dit fortement L^2-stable si et seulement si,

$$\|S(t)x\| \in L^2([0,+\infty[), \text{ pour tout } \quad x \in \mathcal{H}.$$

Définition 1.7.6

Un C_0-semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$ est dit uniformément stable ou L^∞-stable, ou uniformément borné, si et seulement s'il existe une constante positive M telle que, pour tout $t \geq 0$

$$\|S(t)\| \leq M$$

Théorème 1.7.8 **[[38]. théorème 3.30. p.134]**

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur E de générateur $\mathcal{A}$.

Les assertions suivantes sont équivalentes

(1) $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable. C'est à dire, $\| S(t) \| \leq Me^{-\omega t}$,
pour $M \geq 1, \omega > 0$.

(2) $(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément stable. C'est à dire, $\lim\limits_{t\to+\infty} \| S(t) \|_{\mathcal{L}(E)} = 0$.

(3) Il existe $t_0 > 0$ tel que

$$\| S(t_0) \| < 1$$

Théorème 1.7.9

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné sur un espace de Banach E et soit $\mathcal{A}$ son générateur. Alors

(i) Si $(S(t))_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable, alors $\sigma(\mathcal{A}) \bigcap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(\mathcal{A})$ le spectre continu de $\mathcal{A}$.

(ii) Si $\sigma(\mathcal{A}) \bigcap i\mathbb{R} \subset \sigma_c(\mathcal{A})$, et $\sigma_c(\mathcal{A})$ est dénombrable, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable.

(iii) Si $(\lambda I - \mathcal{A})^{-1}$ est compacte, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est asymptotiquement stable si et seulement si $\Re\lambda < 0$ pour tout $\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$.

Preuve : (voir [38] théorème 3.26 p.130).

Théorème 1.7.10

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de générateur $\mathcal{A}$.

Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si $\{\lambda : \Re\lambda \geq 0\} \subset \rho(\mathcal{A})$ et

$$\| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \| \leq M \quad \textit{pour tout} \quad \lambda \quad \textit{avec} \quad \Re\lambda \geq 0 \quad \textit{et} \quad M > 0 \quad \textit{une constante.}$$

Preuve : (voir [38] théorème 3.35 p.139).

Corollaire 1.7.3

Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$ de générateur $\mathcal{A}$.

Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellemnt stable si et seulement si $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ et

$$M_0 := \sup_{\tau\in\mathbb{R}} \| (i\tau I - \mathcal{A})^{-1} \| < \infty$$

Preuve : voir ([38]), p 140.

On cherche les conditions nécessaires de la stabilité forte d'un C_0-semi-groupe. Le résultat a été obtenu par **Arendt** et **Batty** par le théorème de stabilité d'un C_0-semi-groupe suivant :

Théorème 1.7.11 *(***Arendt et Batty***)*

Supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Banach réflexif E.

Si

(i) $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres imaginaires pures.

(ii) $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable.

Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est fortement stable.

Théorème 1.7.12 *[***[45] théorème 1.3.1 p. 4***]*

Soit $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ un C_0-semi-groupe sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. Alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable si et seulement si

$$\sup\{\Re\lambda, \lambda \in \sigma(\mathcal{A})\} < 0$$

et

$$\sup_{\Re\lambda\geq 0} \| (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \| < \infty$$

ont lieu.

Critère du domaine fréquentiel

Soit $S(t)_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe uniformément borné sur un espace de **Hilbert** $\mathcal{H}$ et de générateur $\mathcal{A}$.
Alors $S(t)_{t\geq 0}$ est exponentialement stable si et seulement si l'axe imaginaire est contenu dans l'esemble résolvant de $\mathcal{A}$ et

$$\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\| < \infty.$$

Théorème 1.7.13 *(***Huang-Pruss)**

Supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$.
$(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément stable si et seulement si
1) $i\mathbb{R}\subset \rho(\mathcal{A})$.
2) $\sup_{\beta\in\mathbb{R}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < +\infty$.
La seconde condition est une méthode classique basée sur l'analyse spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$.

Remarque 1.7.1

Dans le cas où le C_0-semigroupe n'est pas exponentiellement stable nous recherchons qu'il est polynomialement stable.
Les résultats de la stabilité exponentielle sont obtenus en utilisant des méthodes comme par exemple la méthode des multiplicateurs, l'approche du domaine de fréquence , l'approche de **base de Riesz** *et l'analyse de* **Fourier** *ou une combinaison de ces dernières.*
Dans cette thèse on va utiliser seulement deux méthodes, la première s'agit de **l'approche de domaine de fréquence** *qui a été obtenue par* **Huang-Pruss***.*
La deuxieme méthode est une méthode classique basée sur **l'analyse spectrale** *de l'opérateur $\mathcal{A}$.*

Théorème 1.7.14 (Batty, A. Borichov et Y. Tomilov, Z. Liu et B. Rao)

Supposons que $\mathcal{A}$ est le générateur d'un C_0-semi-groupe de contraction $(S(t))_{t\geq 0}$ sur un espace de Hilbert $\mathcal{H}$.
Si $i\mathbb{R}\subset \rho(\mathcal{A})$, alors pour tout $l>0$ fixé, les conditions suivantes sont équivalentes
(1) $\lim_{|\lambda|\to+\infty} \sup \frac{1}{\lambda^l} \parallel (\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \parallel_{L(\mathcal{H})} < +\infty$
(2) $\parallel S(t)U_0 \parallel_{\mathcal{H}} \leq \frac{C}{t^{l-1}} \parallel U_0 \parallel_{D(\mathcal{A})}, \quad \forall t>0, U_0\in D(\mathcal{A}),$ *pour* $C>0$ *quelconque.*

1.8 Condition de contrôle géométrique

Soit Ω un ensemble borné de $\mathbb{R}^n, n \geq 2$, de frontière lipshitzienne $\partial\Omega = \Gamma_0 \bigcup \Gamma_1$ de classe C^2 où Γ_0 et Γ_1 sont des sous-ensembles fermés de Γ tels que $\bar{\Gamma}_0 \bigcap \bar{\Gamma}_1 = \emptyset$ et $\Gamma_1 \neq \emptyset$.

Définition 1.8.1

On dit que $\partial\Omega$ satisfait la Condition de contrôle géométrique (Appelée GCC), si tout rayon du système géométrique optique , démarrant de chaque point $x \in \Omega$ au temps $t = 0$ du temps fini T.

Définition 1.8.2

On dit que la condition de contrôle géométrique de multiplicateur (Appelée MGC) a lieu s'il existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et une constante positive $m_0 > 0$ tels que

$$m.\nu \leq 0 \quad sur \quad \Gamma_0 \quad et \quad m.\nu \geq m_0 \quad sur \quad \Gamma_1.$$

avec $m(x) = x - x_0,$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Pour les définitions (1.8.1) et (1.8.2), voir [3], page 53.

1.9 Contrôle à dérivée fractionnaire

Dans cette section on introduit les éléments nécessaires pour une bonne compréhension de ce travail.

On inclut un bref rappel des éléments de base de la théorie du calcul fractionnaire. Le concept du calcul fractionnaire est une généralisation de dérivation et d'intégration ordinaires pour un ordre arbitraire. Les dérivées d'ordre non entier sont maintenant largement appliquées dans beaucoup de domaines, par exemple dans les sciences économiques, électronique, la mécanique, la biologie, la probabilité et la viscoélasticité. Un intérêt particulier pour la dérivation fractionnaire est lié àla modélisation mécanique des gommes et des caoutchoucs. En bref, toutes les genres de matériaux qui préservent la mémoire des déformations précédentes en particulier viscoélastiques. En effet, la dérivation fractionnaire est présentée naturellement.

Le calcul fractionnaire est un champ important qui se développe dans des mathématiques pures et appliquées. Beaucoup de problèmes réels du monde ont été étudiés dans les dérivées fractionnaires, en particulier la dérivée fractionnaire de Caputo qui est utilisée intensivement et avec succés dans beaucoup de branches des sciences et de la technologie.

1.9.1 Notions sur les dérivées fractionnaires

La fonction Γ est définie par

$$\Gamma(z) = \int_0^{+\infty} t^{z-1} e^{-t}\, dt, \quad \Re(z) > 0$$

où $t^{z-1} = e^{(z-1)\log t}$, cette intégrale est convergente pour tout complexe $z \in \mathbb{C}$ et $\Re(z) > 0$.
La fonction Γ vérifie la formule

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z), \quad \Re(z) > 0$$

En particulier, si $z = n \in \mathbb{N}^*$, alors

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Définition 1.9.1 *:*
L'intégrale fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$, au sens de **Riemann-Liouville** *est donnée par*

$$I_a^{\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_a^t (t-s)^{\alpha-1} f(s)\, ds, \quad t > a$$

Définition 1.9.2
la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ au sens de **Riemann-Liouville** *d'une fonction f définie sur l'intervalle $[a, b]$ est donnée par*

$$D_{RL,a}^{\alpha} f(t) = D^n I_a^{n-\alpha} f(t) = \frac{1}{\Gamma(n-\alpha)} \frac{d^n}{dt^n} \int_0^t (t-s)^{n-\alpha-1} f(s)\, ds, \quad n = [\alpha] + 1, t > a,$$

où $[\alpha]$ désigne la partie entière de α.
En particulier, si $\alpha = 0$, alors

$$D_{RL,a}^{0} f(t) = I_a^0 f(t) = f(t)$$

Si $\alpha = n \in \mathbb{N}$, alors

$$D_{RL,a}^{n} f(t) = f^{(n)}(t)$$

De plus, si $0 < \alpha < 1$*, alors* $n = 1$*, donc*

$$D^{\alpha}_{RL,a} f(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \frac{d}{dt} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} f(s)\, ds, \quad t > a.$$

Exemple 1.1

Soit $\alpha > 0, \gamma > -1$ *et* $f(t) = (t-a)^{\gamma}$*, alors*

$$\begin{aligned} I^{\alpha}_a f(t) &= \frac{\Gamma(\gamma+1)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma+\alpha},, \\ D^{\alpha}_{RL,a} f(t) &= \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha} \end{aligned}$$

En particulier, si $\gamma = 0$ *et* $\alpha > 0$*, alors* $D^{\alpha}_{RL,a}(C) = C \dfrac{(t-a)^{-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}$

Définition 1.9.3 *:*

la dérivée fractionnaire d'ordre $\alpha > 0$ *au sens de Caputo, définie sur l'intervalle* $[a, b]$*, est donnée par*

$$D^{\alpha}_{C,a} f(t) = D^{\alpha}_{RL,a} \left(f(t) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (t-a)^k \right) \tag{1.3}$$

où

$$n = \begin{cases} [\alpha] + 1 & si \quad \alpha \notin \mathbb{N}, \\ \alpha & si \quad \alpha \in \mathbb{N}^*. \end{cases}$$

En particulier, lorsque $0 < \alpha < 1$*, la relation (1.3) prend la forme*

$$\begin{aligned} D^{\alpha}_{C,a} f(t) &= D^{\alpha}_{C,a} \Big(\big[f(t) - f(a) \big] \Big) \\ &= I^{1-\alpha}_a f\prime(t) \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_a^t (t-a)^{-\alpha} f'(s) ds. \end{aligned}$$

Si $\alpha \in \mathbb{N}$*, alors* $f^{(n)}(t)$ *et* $D^{\alpha}_{C,a} f(t) = f^n(t)$ *coïncident, c'est à dire*

$$D^{\alpha}_{Ca} f(t) = f^n(t).$$

Exemple 1.2

Let $\alpha > 0$ *et* $f(t)(t-a)^{\gamma}$ *où* $\gamma > -1$*. alors*

$$D^{\alpha}_{Ca} f(t) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\gamma-\alpha+1)} (t-a)^{\gamma-\alpha}.$$

En particulier, si $\gamma = 0$ *et* $\alpha > 0$*, alors* $D^{\alpha}_{Ca} C = 0$ *.*

Chapitre 2

Rappels sur quelques types de fonctions

• Enonçons des hypothèses précises sur la fonction μ.

μ est une fonction mesurable non négative telle que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\mu(\xi)|^2}{1+\xi^2}\, d\xi < \infty. \tag{2.1}$$

• Nous rappelons maintenant les définitions et quelques propriétés des fonctions suivantes :

1) fonctions à variation lente.

2) Fonctions à variation régulière.

3) Fonctions à croissance positive.

4) Fonctions de **Stieltjes** (voir [**16**]) qui sont nécessaires pour déterminer le comportement asymptotique de $\tilde{S}_g(\lambda)$ (voir le Lemme 2.0.2 ci-dessous) quand μ a une forme générale.

2.0.1 Fonctions à variation lente

Définition 2.0.1

Soit l une fonction strictement positive mesurable définie sur $[a, +\infty)$ pour certain $a \in \mathbb{R}$ et satisfait

$$\lim_{s\to\infty} \frac{l(\lambda s)}{l(s)} = 1,$$

pour tout $\lambda > 0$.

Alors l s'appelle une fonction à variation lente.

Exemple 2.1

a) *Des exemples standards sur des fonctions à variation lente :*

• *logarithme itéré* $log_k(s) = log...logs, \quad k \in \mathbb{N}$.

• $\exp\,(log_1 s)^{\alpha_1}(log_2 s)^{\alpha_2}...(log_k s)^{\alpha_k}, \quad \alpha_i \in (0,1), 1 \leq i \leq k,$

• $\exp\left(\frac{logs}{log(logs)}\right)$.

b) *Une conséquence de la définition 2.0.1 est que la somme et le produit de deux fonctions à variation lente est une fonction à variation lente. De plus, si l est une fonction à variation lente les fonctions suivantes sont aussi à variation lente,*

• $l^\alpha : s \mapsto (l(s))^\alpha, \quad \alpha \in \mathbb{R}$.

• $l_\alpha : s \mapsto l(s^\alpha), \quad \alpha > 0$.

• $l.log : s \mapsto l(s)logs$.

Théorème 2.0.1

La fonction l est à variation lente si et seulement si elle est sous la forme

$$l(s) = c(s)\exp\left\{\int_0^s \frac{\varepsilon(t)}{t}dt\right\}, \quad s \geq a$$

pour $a > 0$ quelconque, où c et ε sont des fonctions mesurables, $c(s) \to c > 0$ et $\varepsilon(s) \to 0$ lorsque $s \to +\infty$.

Preuve : voir ([16], théorème 1.3.1).

Corollaire 2.0.1

Soit l une fonction à variation lente, et $\gamma > 0$.

(a) *Ils existent des constantes positives C, c telles que*

$$c\left(\frac{s}{t}\right)^\gamma \leq \frac{l(t)}{l(s)} \leq C\left(\frac{t}{s}\right)^\gamma$$

pour tout s, t assez grands avec $t \geq s$.

(b) *Lorsque $s \to +\infty$,*

$$s^\gamma l(s) \to \infty, \;\; s^{-\gamma} l(s) \to 0. \tag{2.2}$$

D'autre part, il ya des fonctions à variation lente telle que

$$\liminf_{s\to\infty} l(s) = 0, \; \limsup_{s\to\infty} l(s) = \infty.$$

2.0.2 fonctions à variation régulière

Définition 2.0.2

Une fonction positive f est dite à variation régulière d'indice $\alpha \in \mathbb{R}$ s'il existe une fonction l à variation lente telle que

$$f(s) = s^{\alpha} l(s), \quad s \geq a \quad \text{pour tout} \quad a.$$

Une telle fonction a une représentation

$$f(s) = s^{\alpha} c(s) \exp\Big\{ \int_0^s \frac{\varepsilon(t)}{t} dt \Big\}, \quad s \geq a$$

où c et ε sont définies comme dans le théorème (2.0.1).

Proposition 2.0.1 *Soit l une fonction à variation lente, et soit $\alpha > 0$. Alors*
(a) $l^{\sharp\sharp} \sim l$.
(b) Si $f(s) \sim s^{\alpha} l(s^{\alpha})$, alors $f^{-1}(s) \sim s^{1/\alpha} l^{\sharp}(s)^{1/\alpha}$.
(c) Si $g : (0, a] \to (0, \infty)$ et $g(s) \sim s^{\alpha}/l(s^{-\alpha})$ lorsque $s \to 0^{+}$, alors
$g^{-1}(s) \sim s^{1/\alpha}/l^{\sharp}(1/s)^{1/\alpha}$ lorsque $s \to 0^{+}$.

Preuve : voir ([11]).

2.0.3 fonctions à croissance positive

Définition 2.0.3

Etant donné $a \geq 0$ et une fonction mesurable $M : [a, +\infty) \to (0, +\infty)$.
On dit que M a une croissance positive s'ils existent des constantes positives $\alpha > 0$, $c \in (0, 1]$ et $s_0 \geq a$ telles que

$$\frac{M(\lambda s)}{M(s)} \geq c\lambda^{\alpha}, \quad \lambda \geq 1, \quad s \geq s_0 \tag{2.3}$$

2.0.4 fonctions de Stieltjes

Définition 2.0.4

Soit l une fonction à variation lente sur $\mathbb{R}_+$, $\alpha \geq 0$ et supposons que la fonction g telle que $g(s) = s^\alpha l(s)$ est croissante. La fonction de **Stieltjes** *associée*

$$S_g(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\,g(s)}{\lambda + s} = \int_0^\infty \frac{s^\alpha l(s)}{(\lambda+s)^2}\,ds$$

est définie si l'une des intégrales précédentes est finie (voir ([61] page 7)). Ceci se produit si $\alpha < 1$ d'aprés (2.2), ou si $\alpha = 1$ et $\displaystyle\int_0^\infty \frac{l(s)}{1+s}\,ds$ est finie.

Nous aurons besoin des théorèmes de **Abelian/Tauberian de Karamata**.

Théorème 2.0.2 [Karamata]

Soit g une fonction croissante sur $\mathbb{R}_+$, et soit S_g la fonction de **Stieltjes** *associée. Soit $0 < \sigma \leq 1$, et l une fonction à variation lente sur $\mathbb{R}_+$.*

(a) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $g(s) \sim s^{1-\sigma} l(s)$, $s \to \infty$.

(ii) $S_g(\lambda) \sim \Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)\lambda^{-\sigma} l(\lambda), \quad \lambda \to \infty$.

(b) Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

(i) $g(s) \sim s^{1-\sigma} l(1/s)$, $s \to 0_+$.

(ii) $S_g(\lambda) \sim \Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)\lambda^{-\sigma} l(1/\lambda), \quad \lambda \to 0$.

Preuve :

L'assertion (a) a été demontrée dans ([16], Théorème 1.7.4) (L'implication **Tauberian** a été démontrée dans([57] Théoréme 2.5). La preuve de l'assertion (b) est analogue à la preuve de l'assertion (a), en utilisant quelques résultats préliminaires de ([16], Sections 1.5, 1.7).

■

Lemme 2.0.1

Soit $U(x) = \displaystyle\int_0^x u(y)\,dy$.

Si $u(x) \sim \dfrac{cx^{\rho-1} l(x)}{\Gamma(\rho)}, \quad (x \to \infty)$, où $c \in \mathbb{R}, \rho > 0$ et l est une fonction à variation lente, alors

$$U(x) \sim cx^\rho l(x)/\Gamma(\rho+1), \qquad (x \to \infty).$$

Remarque 2.0.1

Le cas où $\sigma = 0$ dans le théorème 2.0.2 est aussi intéressant. On peut obtenir le résultat d' **Abelian Karamata**.

En effet

si

$$g(s) \sim sl(s) \quad s \to \infty \text{ with } \int_0^{\infty} \frac{l(s)}{1+s}\, ds < \infty.$$

On a

$$S_g(\lambda) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t} V(t)\, dt$$

où

$$V(t) = \int_0^{\infty} e^{-ty} dg(y) = \hat{g}(t).$$

Alors d'après le théorème 1.7.1 de [[16],P. 37], on trouve

$$V(t) \sim t^{-1} l\left(\frac{1}{t}\right) \text{ lorsque } t \to 0.$$

Par conséquent

$$H(x) = \int_0^x V(t)\, dt \sim \int_0^x s^{-1} l\left(\frac{1}{s}\right) ds \sim \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{l(s)}{s}\, ds \text{ lorsque } x \to 0.$$

La fonction l est normalisée différentiable, alors

$$\frac{\left(\frac{l(s)}{s}\right)'}{\frac{l(s)}{s}} \sim -\frac{1}{s} \text{ lorsque } s \to \infty.$$

Ici l est normalisée dans le sens que la fonction $s \to c(s)$ d'après le théorème (2.0.1) est constante. Ceci est un cas critique. En faisant un changement de variable $t = v \ln s$, on obtient

$$H(x) \sim \int_{\ln \frac{1}{x}}^{\infty} l(e^t)\, dt.$$

Maintenant si

$$\frac{(l(e^t))'}{l(e^t)} \sim \frac{\gamma}{t} \text{ quand } t \to \infty \text{ avec } \quad \gamma < -1.$$

On en déduit d'après Dieudonné [**30**] *(Théorème 10.5 (ii)) que*

$$H(x) \sim -\frac{l(\frac{1}{x})\ln\frac{1}{x}}{\gamma+1} \quad \textit{quand} \quad x \to 0.$$

Alors d'après le théorème 1.7.1 de [**16**] $(P.38)$*, on trouve*

$$S_g(\lambda) = \hat{H}(\lambda) = -\frac{1}{\gamma+1}l(\lambda)\ln\lambda \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \to \infty.$$

Si on a

$$\left|\frac{(l(e^t))'}{l(e^t)}\right| \succeq \frac{1}{t} \quad \textit{quand} \quad t \to \infty. \tag{2.4}$$

Utilisons le Théorème $(10.7)(ii)$ *p. 96 dans le livre de* **Dieudonné** [**30**]*, on obtient*

$$H(x) \sim \frac{x\Big(l(\frac{1}{x})\Big)^2}{\Big|(l'(\frac{1}{x}))\Big|} \quad \textit{lorsque} \quad x \to 0$$

et par conséquent

$$S_g(\lambda) = \hat{H}(\lambda) \sim \frac{(l(\lambda))^2}{\lambda|l'(\lambda)|} \quad \textit{quand} \quad \lambda \to \infty.$$

Exemple 2.2

1) Soit $l(s) = (\ln s)^\beta$ *avec* $\beta < -1$*. Alors*

$$V(t) = \hat{g}(t) \sim s^{-1}l\left(\frac{1}{s}\right) \quad (s \to 0)$$

et

$$H(x) = \int_0^x V(t)\,dt = -\frac{1}{\beta+1}(-\ln x)^{\beta+1} \textit{ quand } x \to 0.$$

Donc

$$S_g(\lambda) = \hat{H}(\lambda) \sim -\frac{1}{\beta+1}(\ln\lambda)^{\beta+1} \textit{ quand } \lambda \to \infty.$$

2) De même, on pose

$$l(s) = (\ln s)^{-1}(\ln\ln s)^{-1}\ldots(\ln^{[n-1]} s)^{-1}(\ln^{[n]} s)^\beta, \beta < -1.$$

Ici $\ln^{[n]}$ *désigne l'iteration logharitmique* n *fois .On trouve*

$$S_g(\lambda) \sim -\frac{1}{\beta+1}(\ln^{[n]}\lambda)^{\beta+1} \ \textit{as } \lambda \to \infty.$$

3) On pose

$$l(s) = \frac{e^{-\sqrt{\ln s}}}{\ln s}.$$

Comme l *satisfait (2.4), on obtient*

$$S_g(\lambda) \sim 2\frac{e^{-\sqrt{\ln \lambda}}}{\sqrt{\ln \lambda}} \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \to \infty.$$

Notre résultat principal est le suivant.

Lemme 2.0.2

Soit $D_\eta = \mathbb{C}\backslash]-\infty, -\eta]$*. On définit*

$$g(s) = \int_0^s \frac{\mu^2(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}\, d\xi. \tag{2.5}$$

Supposons que $g(s) \sim s^{1-\sigma}l(s)$ *(lorsque* $s \to \infty$*) où* l *est une fonction à variation lente sur* $\mathbb{R}_+, 0 < \sigma \leq 1$ *ou* $\sigma = 0$ *et* $\int_0^\infty l(s)/(s+1)\, ds$ *est finie. Alors la fonction* $\tilde{S}_g : D_\eta \to \mathbb{C}$ *telle que*

$$\tilde{S}_g(\lambda) = S_g(\lambda+\eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda+\eta+\xi^2}\, d\xi$$

est holomorphe.

De plus

$$\tilde{S}_g(\lambda) \sim \Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)(\lambda+\eta)^{-\sigma} l(\lambda+\eta) \ \textit{quand } |\lambda| \to \infty \quad \textit{si } 0 < \sigma \leq 1.$$

Si $\sigma = 0$*, on obtient un type différent du comportement de* $\tilde{S}_g$ *selon la remarque 2.0.1.*

Remarque 2.0.2

Un résultat similaire du lemme 2.0.2 reste vrai dans le cas Log-periodique régulier (une extention normale et importante de fonction à variation régulière). La preuve marche tout au long comme dans la preuve du théorème 2.0.2, aussi les deux théorèmes de **Tauberian** *pour la transformation de laplace et le théorème de densité monotone sont vrais dans l'étape Log-périodique (pour des details, voir [21] et [35]).*

Preuve (du lemme 2.0.2).

Soit

$$f_\lambda(\xi) = \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}.$$

D'après (2.1) la fonction f_λ est intégrable. De plus, on a

$$\left|\frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}\right| \leq \begin{cases} \dfrac{\mu^2(\xi)}{\eta_0 + \eta + \xi^2} & \text{pour tout } \Re\lambda \geq \eta_0 > -\eta,\ \Im\lambda = 0 \\ \dfrac{\mu^2(\xi)}{\tilde{\eta}_0}\chi_{[0,R[} + c\dfrac{\mu^2(\xi)}{\xi^2}\chi_{[R,\infty[} & \text{pour tout } |\Im\lambda| \geq \tilde{\eta}_0 > 0 \end{cases}$$

pour R est assez grand.

D'après le théorème 1.16.1 dans [60], la fonction $\tilde{S}_g : D_\eta \to \mathbb{C}$ est holomorphe.

Pour un nombre réel $\lambda > -\eta$, on a

$$\begin{aligned} \tilde{S}_g(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}\, d\xi = 2\int_0^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}\, d\xi \quad &= \int_0^{+\infty} \frac{\frac{\mu^2(\sqrt{\xi})}{\sqrt{\xi}}}{\lambda + \eta + \xi}\, d\xi \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{g(s)}{(\lambda + \eta + s)^2}\, ds \end{aligned}$$

et d'après le théorème 2.0.2,

$$\tilde{S}_g(\lambda) \sim \Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)(\lambda+\eta)^{-\sigma} l(\lambda+\eta) \text{ quand } \quad |\lambda| \to \infty \quad \text{si} \quad 0 < \sigma \leq 1.$$

Les deux fonctions holomorphes $\tilde{S}_g$ et $\Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)(\lambda+\eta)^{-\sigma} l(\lambda+\eta)$ sont équivalentes (au voisinage de ∞) sur la demi-droite $]-\eta, +\infty[$, et donc, grâce au principe des zéros isolés, ce résultat reste vrai sur D_η (voir le théorème 1.3.1 et le théorème 1.3.3 de [60]).

En particulier si $\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$, on obtient $\sigma = 1 - \alpha$ et $l(s) = 1/\alpha$.

Alors on applique le lemme 2.0.2, on trouve

$$\tilde{S}_g(\lambda) \sim \frac{\pi}{\sin \alpha\pi}(\lambda+\eta)^{\alpha-1} \text{ lorsque } \quad |\lambda| \to \infty. \tag{2.6}$$

Dans [1],**A. Benaissa , Z. Achouri** et **N. Amroun** ont prouvé que l'équivalence asymptotique dans (2.6) est réelement une égalité stricte.

■

Chapitre 3

Stabilisation d'une équation des ondes par un contrôle frontière de type diffusif

3.1 Existence globale

3.1.1 Existence et unicité de la solution du système (P)

Dans ce chapitre, nous allons faire une étude qualitative du système (P) :

$$
(P) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\, d\xi & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty) \\ \partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{dans } \Gamma_N \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \\ \phi(x,\xi,0) = 0 & \text{sur } \Gamma_N \times (-\infty,\infty). \end{cases}
$$

Dans la première section de ce chapitre, en utilisant la théorie des semi-groupes, on donne le résultat d'existence et d'unicité de la solution faible et forte du problème (P).
On introduit la fonction vectorielle $U = (u,v,\phi)^T$, où $v = u_t$, le système (P) peut être écrit comme une équation d'évolution linéaire sur l'espace $\mathcal{H}$ (précisé ci-dessous) comme suit :

$$
\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \qquad t > 0, \\ U(0) = (u_0,u_1,\phi_0), \end{cases} \tag{3.1}
$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ \Delta u \\ -(\xi^2+\eta)\phi + v(x,t)\mu(\xi) \end{pmatrix}. \tag{3.2}$$

On considère l'espace suivant

$$H^1_*(\Omega) = \Big\{ u \in H^1(\Omega) : u_{|\Gamma_D} = 0 \Big\}$$

et l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H^1_*(\Omega) \times L^2(\Omega) \times L^2\Big(\Gamma_N \times (-\infty,+\infty)\Big),$$

muni du produit scalaire

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (v\bar{\tilde{v}} + \nabla u \nabla \bar{\tilde{u}})\, dx + \zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \bar{\tilde{\phi}}\, d\xi\, d\Gamma.$$

Le domaine de $\mathcal{A}$ est donc

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (u,v,\phi)^T \in \mathcal{H} : u \in H^2(\Omega) \cap H^1_*(\Omega), v \in H^1_*(\Omega), \\ -(\xi^2+\eta)\phi + v(x)\mu(\xi) \in L^2\Big(\Gamma_N \times (-\infty,+\infty)\Big), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)\, d\xi = 0, \quad x \in \Gamma_N, \\ |\xi|\phi \in L^2(\Gamma_N \times (-\infty,+\infty)) \end{array} \right\}. \tag{3.3}$$

La fonction de l'énergie de la solution associée au problème (P) est définie par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{2}\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x,\xi,t)|^2\, d\xi\, d\Gamma. \tag{3.4}$$

Lemme 3.1.1

Soit (u,ϕ) une solution régulière du problème (P).

Alors, l'énergie définie par (3.4) satisfait

$$\mathcal{E}'(t) = -\zeta \int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\, d\xi\, d\Gamma \le 0. \tag{3.5}$$

Preuve.

Multiplions la première équation dans (P) par $\overline{u}_t$, on trouve

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|u_t\|_2^2 - \Re\int_{\Omega}\Delta u\overline{u}_t dx = 0.$$

On utilise l'intégration par parties sur Ω dans cette dernière équation, on obtient,

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right) + \zeta\Re\int_{\Gamma_N}\overline{u}_t(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\,d\xi\,d\Gamma = 0. \tag{3.6}$$

Multiplions la quatrième équation de (P) par $\zeta\overline{\phi}$ et intégrons sur $\Gamma_N \times (-\infty,+\infty)$, on obtient :

$$\begin{aligned}\frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|^2_{L^2(\Gamma_N\times(-\infty,+\infty))} + \zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,d\Gamma&\\ -\zeta\Re\int_{\Gamma_N}u_t(x,t)\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\overline{\phi}(x,\xi,t)\,d\xi\,d\Gamma &= 0.\end{aligned} \tag{3.7}$$

En vertu de (3.4), on a

$$\mathcal{E}'(t) = \frac{d}{dt}\left[\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right] + +\frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,d\Gamma.$$

D'après (3.6), (3.7) et la dernière égalité, on trouve

$$\mathcal{E}'(t) = -\zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,d\Gamma.$$

Ce qui achève la démonstration du lemme 3.1.1.

■

Dans la suite, on va établir le résultat d'existence et d'unicité du problème (3.1).

Théorème 3.1.1 (Existence et unicité)

(1) Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors le système (3.1) admet une unique solution forte

$$U \in C^0\Big(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})\Big) \cap C^1(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}).$$

(2) Si $U_0 \in \mathcal{H}$, alors le système (3.1) admet une unique solution faible

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+,\mathcal{H}).$$

Lemme 3.1.2

1) *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (3.2) et (3.3) est dissipatif et satisfait :*

pour tout $U \in D(\mathcal{A})$,

$$\Re e\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta \int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\, d\xi\, d\Gamma. \tag{3.8}$$

2) *L'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.*

Preuve.

1) Montron que $\mathcal{A}$ est dissipatif.

Soit $U = (u, v, \phi)^T \in D(\mathcal{A})$. On a

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_{\Omega}(\Delta u)\bar{v}(x,t)\, dx + \int_{\Omega}(\nabla \bar{u}\nabla v)\, dx + \zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(-(\xi^2+\eta)\phi + v(x,t)\mu(\xi)\Big)\bar{\phi}\, d\xi d\Gamma\\ &= \int_{\Omega}(\Delta u)\bar{v}\, dx + \int_{\Omega}\nabla\bar{u}\nabla v\, dx - \zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\, d\xi d\Gamma + \zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\bar{\phi}\mu(\xi)\, d\xi d\Gamma.\end{aligned}$$

On intégre le premier terme du deuxième membre par parties, on obtient

$$\begin{aligned}\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} &= -\int_{\Omega}\nabla u\nabla\bar{v}\, dx + \int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial \nu}.\bar{v}(x,t)\, d\Gamma + \int_{\Omega}\nabla\bar{u}\nabla v\, dx\\ &- \zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\, d\xi d\Gamma + \zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x,t)\bar{\phi}\mu(\xi)\, d\xi d\Gamma.\end{aligned}$$

Comme $\nabla\bar{u}\nabla v = \overline{\nabla u\nabla\bar{v}}$. Alors
$\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = \Re\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial\nu}.\bar{v}(x)\, d\Gamma + \zeta\Re\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\bar{\phi}\mu(\xi)\, d\xi d\Gamma - \zeta\Re\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\, d\xi d\Gamma.$
D'où
$\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\, d\xi d\Gamma + \zeta\Re\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\bar{\phi}\mu(\xi)\, d\xi d\Gamma + \Re\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial\nu}.\bar{v}(x)\, d\Gamma.$
D'après l'ensemble $\mathcal{D}(\mathcal{A})$, on a $\frac{\partial u}{\partial\nu} = -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(\xi)\, d\xi$ sur Γ_N. On multiplie cette équation par $\bar{v}$ et on intègre sur Γ_N, on obtient
$\int_{\Gamma_N}\frac{\partial u}{\partial\nu}\bar{v}(x)\, d\Gamma = -\zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\bar{v}(x)\phi(\xi)\, d\xi d\Gamma.$
Alors
$\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\, d\xi d\Gamma + \zeta\Re\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} v(x)\bar{\phi}\mu(\xi)\, d\xi d\Gamma - \zeta\Re\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\bar{v}(x)\phi(\xi)\, d\xi d\Gamma.$
Comme $v(x)\bar{\phi}(\xi) = \overline{\bar{v}(x)\phi(\xi)}$, on conclut que

$$\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\, d\xi d\Gamma \leq 0.$$

Ce qui signifie que l'opérateur $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2)Maintenant, nous prouvons que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$.

On montre qu'il existe $U \in D(\mathcal{A})$ tel que

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{3.9}$$

L'équation (3.9) est équivalente à

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1, \\ \lambda v - \Delta u = f_2, \\ \lambda \phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{3.10}$$

Supposons que u a une régularité appropriée. Alors, la première équation et la troixième équation du système (3.10) nous donnent successivement

$$v = \lambda u - f_1 \in H^1_*(\Omega) \tag{3.11}$$

et

$$\phi = \frac{f_3(x,\xi) + \mu(\xi)v(x)}{\xi^2 + \eta + \lambda}. \tag{3.12}$$

En utilisant la deuxième équation de (3.10) et (3.11), on conclut que u satisfait

$$\lambda^2 u - \Delta u = f_2 + \lambda f_1. \tag{3.13}$$

La résolution du système (3.13) est équivalente à trouver $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_*(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} - \Delta u\overline{w})\, dx = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\, dx, \tag{3.14}$$

pour tout $w \in H^1_*(\Omega)$.

En utilisant (3.14), et la troixième condition aux limites de (3.3) et l'égalité (3.12), alors la fonction u satisfait le système suivant

$$\int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})\, dx + \tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} v\overline{w}\, d\Gamma = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\, dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} \int_{\Gamma_N} f_3(x,\xi)\overline{w}\, d\Gamma\, d\xi, \tag{3.15}$$

où $\tilde{\zeta} = \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda}\, d\xi$.
En utilisant de nouveau (3.11), on en déduit que

$$v(x) = \lambda u(x) - f_1(x), \quad \text{pour tout} \quad x \in \Gamma_N. \tag{3.16}$$

On injecte (3.16) dans (3.15), on trouve

$$\begin{aligned}
&\int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})\, dx + \lambda\tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} u\, \overline{w}\, d\Gamma \\
&= \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\, dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} \int_{\Gamma_N} f_3(x,\xi)\overline{w}\, d\Gamma\, d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} f_1 \overline{w}\, d\Gamma.
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Le problème (3.17) est de la forme

$$\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{L}(w), \tag{3.18}$$

où $\mathcal{B} : [H_*^1(\Omega) \times H_*^1(\Omega)] \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire définie par

$$\mathcal{B}(u,w) = \int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})\, dx + \lambda\tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} u\, \overline{w}\, d\Gamma$$

et $\mathcal{L} : H_*^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme anti-linéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega (f_2 + \lambda f_1)\overline{w}\, dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + \lambda} \int_{\Gamma_N} f_3(x,\xi)\overline{w}\, d\Gamma\, d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} f_1 \overline{w}\, d\Gamma.$$

Il est facile de montrer que $\mathcal{B}$ est continue et est coercive, et $\mathcal{L}$ est continue.

Par conséquent d'après le lemme de **Lax-Milgram**, le système (3.18) admet une unique solution $u \in H_*^1(\Omega)$.

En vertu du théorème de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il vient que $u \in H^2(\Omega)$.

Donc l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

■

Preuve(du théorème (3.1.1)) :

On utilise l'approche des semi-groupes. En vertu du lemme (3.1.2) l'opérateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif. Donc d'après le théorème 1.7.5 de **Lumer-Phillips**, l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un C_0-semi-groupe de contraction $e^{t\mathcal{A}}$. Donc la solution du système (3.1) admet la représentation suivante

$$U(t) = e^{t\mathcal{A}}U_0, \ \forall t \geq 0,$$

ce qui mène que le système (3.1) est bien posé. Par conséquent, en utilisant le théorème d'existence et d'unicité de **Hille-Yosida**, le résultat du théorème 3.1.1 aura lieu.

■

3.2 Etude de la stabilité du système (P)

Préliminaire :

Le but de la stabilisation est de réduire les vibrations par un feedback. Il sagit de garantir la décroissance de l'énergie de la solution vers zéro plus ou moins rapide lorsque $t \to +\infty$.

Plus précisément, on est intéressé de déterminer le comportement asymptotique de l'énergie $\mathcal{E}(t)$ et donner une estimation de taux de décroissance de l'énergie.

Il y'a divers types de stabilisation :

1) Stabilisation forte : $\mathcal{E}(t) \to 0$ lorsque $t \to +\infty$.

2) Stabilisation logarithmique : $\mathcal{E}(t) \leq \dfrac{c}{(\ln t)^{\delta}}, \quad c, \delta > 0.$

3) Stabilisation polynomiale : $\mathcal{E}(t) \leq \dfrac{c}{t^{\delta}}, \quad c, \delta > 0.$

4) Stabilisation exponentielle : $\mathcal{E}(t) \leq ce^{-\delta t}, \quad c, \delta > 0.$

-Dans cette section, on va établir dans la première partie, le manque de la stabilité exponentielle dans le cas 1-D, et dans la deuxième partie on va établir la stabilité asymptotique forte du système (P).

3.2.1 Manque de stabilité exponentielle en cas 1-Dimension

Cette partie est consacrée à l'étude de manque de décroissance exponentielle de la solution associée au système (P) dans le cas mono-dimensionnel, où $\Omega = (0, L)$, $\Gamma_D = \{0\}$. Pour cela, on va utiliser le réultat suivant :

Théorème 3.2.1 **(Huang-Prüss)[[54]- [49]]**
Soit $S(t) = e^{\mathcal{A}t}$ un C_0-semi-groupe de contraction sur un espace de Hilbert.
Alors $\Big(S(t)\Big)_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable, c'est à dire que $(\exists M > 0), (\exists a > 0), \|S(t)\| \leq Me^{-at}$ si et seulement si

$$\rho(\mathcal{A}) \supseteq \{i\beta : \beta \in \mathbb{R}\} \equiv i\mathbb{R} \tag{3.19}$$

et

$$\overline{\lim_{|\beta|\to\infty}} \|(i\beta I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} < \infty. \tag{3.20}$$

Notre but est de montrer que le système (P) n'est pas exponentiellement stable. À cet effet, par une analyse spectrale de l'opérateur $\mathcal{A}$, on va montrer que (3.20) n'a pas lieu.

Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 3.2.2

le semi-groupe associé au système (P) *n'est pas exponentiellement stable.*

Tout d'abord, on va enoncer et prouver un lemme qui sera nécessaire pour la preuve du lemme 3.2.2 ci-dessous de cette section et aussi pour la preuve du théorème 3.2.8 dans la section **(3.2.6)** (Optimalité de décroissance de l'énergie dans le cas de dimension 1).

Lemme 3.2.1

Soit $\lambda \in D_\eta = \mathbb{C}\backslash]-\infty, -\eta] \cap \{\lambda \in \mathbb{C} \backslash -\alpha_0 \leq \Re\lambda \leq 0\}$. *Pour tout* $\eta \geq 0$ *fixé et pour* $\alpha_0 > 0$, *l'intégrale*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)^2}{\xi^2+\eta+\lambda} d\xi \tag{3.21}$$

tend vers 0, *lorsque* $|\lambda|$ *tend vers* $+\infty$.

Preuve :

la preuve est directe et simple grâce à une application du théorème de **convergence dominée de Lebesgue** .

En effet,

On a toutes les conditions du théorème de convergence dominée de Lebesgue sont satisfaites.

En effet,

$$\frac{|\mu(\xi)|^2}{\xi^2+\eta+\lambda} \to 0 \text{ lorsque } |\lambda| \to +\infty, \quad \text{p.p } \xi \in (-\infty, +\infty), \tag{3.22}$$

et

$$\frac{|\mu(\xi)|^2}{\xi^2+\eta+\lambda} \leq c|\mu(\xi)|^2\chi_{[0,R]} + c'\frac{|\mu(\xi)|^2}{\xi^2}\chi_{[R,+\infty)} \in L^1(-\infty, +\infty) \tag{3.23}$$

pour R assez grand.

■

Preuve du théorème 3.2.2 :

On veut prouver qu'il ya un nombre infini de valeurs propres de $\mathcal{A}$ qui sont très proche de l'axe imaginaire, ce qui empêche la stabilité exponentielle du système (P).

En effet,

nous calculons d'abord l'équation caractéristique qui nous permet de calculer les valeurs propres de $\mathcal{A}$.

Soit λ une valeur propre de $\mathcal{A}$ associée au vecteur propre $U = (u, v, \phi)^T \neq 0$.

Alors,

$\mathcal{A}U = \lambda U$ est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda u - v = 0, \\ \lambda v - u_{xx} = 0, \\ \lambda \phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(L)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.24}$$

En vertu de la première équation de (3.24), on aura

$$v = \lambda u. \tag{3.25}$$

On injecte (3.25) dans la deuxième équation de (3.24), on trouve

$$\lambda^2 u - u_{xx} = 0 \tag{3.26}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} u(0) = 0, \\ u_x(L) = -\zeta\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}\, d\xi u(L). \end{cases} \tag{3.27}$$

La solution de (3.26) est donnée par

$$u(x) = \sum_{i=1}^{2} c_i e^{t_i x} \tag{3.28}$$

où $t_1 = \lambda$, $t_2 = -\lambda$.

Donc les conditions aux limites (3.27) sont équivalentes au système

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ h(t_1)e^{t_1 L} & h(t_2)e^{t_2 L} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{3.29}$$

où

$$h(r) = r + \zeta\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}\, d\xi \,.$$

Soit $\tilde{M}(\lambda)$ la matrice du système (3.29) et $C(\lambda) = (c_1, c_2)^T$.

Alors on en déduit que λ est une valeur propre de $\mathcal{A}$ si et seulement si elle est une solution de l'équation caractéristique

$$f(\lambda) = det\tilde{M}(\lambda) = 0. \tag{3.30}$$

Dans la suite, notre but est de prouver grâce au théorème de Rouché, qu'il existe une sous-suite de valeurs propres pour laquelle sa partie réelle tend vers 0.

Dans ce qui suit, comme $\mathcal{A}$ est dissipatif, on étudie le comportement asymptotique des grandes valeurs propres de $\mathcal{A}$ dans la bande $-\alpha_0 \leq \mathcal{R}(\lambda) \leq 0$ pour un certain $\alpha_0 > 0$ assez grand et pour chaque λ, on remarque que $e^{t_i}, i = 1, 2$ reste borné dans $-\alpha_0 \leq \mathcal{R}(\lambda) \leq 0$.

Soit

$$\lambda_k^0 = i\frac{1}{L}\Big(k + \frac{1}{2}\Big)\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \tag{3.31}$$

et

$$S(\lambda) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2} d\xi, \quad \lambda \in \mathbb{C}. \tag{3.32}$$

Par suite nous avons besoin du lemme suivant

Lemme 3.2.2

Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que

$$\{\lambda_k\}_{k \in \mathbb{Z}^*, |k| \geq N} \subset \sigma(\mathcal{A}), \tag{3.33}$$

où

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda_k^0 - \frac{\zeta}{L}\Re e S(\lambda_k^0) - i\frac{\zeta}{L}\Im S(\lambda_k^0) + o(\Re e S(\lambda_k^0)) + io(\Im S(\lambda_k^0)), \quad si \quad k \geq N \\ \lambda_k = \overline{\lambda_{-k}} \quad si \quad k \leq -N. \end{cases} \tag{3.34}$$

De plus pour tout $\mid k \mid \geq N$, les valeurs propres λ_k sont simples.

En particulier, quand μ est choisi de façon que les conditions du lemme (2.0.2) sont satisfaites, on obtient l'extention suivante des valeurs propres de $\mathcal{A}$

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda_k^0 + \frac{\widetilde{\alpha}}{l(k)^{-1}k^{\sigma}} + \frac{\beta}{l(k)^{-1}k^{\sigma}} + o\Big(\frac{1}{l(k)^{-1}k^{\sigma}}\Big), \quad \widetilde{\alpha} \in i\mathbb{R}, \beta \in \mathbb{R}, \beta < 0 \quad si \ k \geq N \ et \ 0 < \sigma \leq 1, \\ \lambda_k = \overline{\lambda_{-k}} \quad si \quad k \leq -N \end{cases} \tag{3.35}$$

et

$$\begin{cases} \lambda_k = \lambda_k^0 + \frac{\beta}{\widetilde{l}(k)^{-1}} + o\Big(\frac{1}{\widetilde{l}(k)^{-1}}\Big), \quad \beta \in \mathbb{R}, \beta < 0 \quad si \ k \geq N \quad et \ \ \sigma = 0 \\ \lambda_k = \overline{\lambda_{-k}} \quad si \quad k \leq -N. \end{cases} \tag{3.36}$$

Preuve.

La preuve du lemme (3.2.2) sera divisée en trois étapes.

Etape 1.

$$f(\lambda) = e^{Lt_2}h(t_2) - e^{Lt_1}h(t_1) = -e^{-\lambda L}h(\lambda)\left(e^{2\lambda L} + \frac{S(\lambda)^{-1} - \zeta}{S(\lambda)^{-1} + \zeta}\right) = -e^{-\lambda L}h(\lambda)\left(e^{2\lambda L} + 1 - \frac{2\zeta}{S(\lambda)^{-1} + \zeta}\right). \tag{3.37}$$

On pose

$$\widetilde{f}(\lambda) = e^{2\lambda L} + 1 - \frac{2\zeta}{S(\lambda)^{-1} + \zeta} = f_0(\lambda) - 2\zeta S(\lambda) + o(S(\lambda)) \tag{3.38}$$

où

$$f_0(\lambda) = e^{2\lambda L} + 1. \tag{3.39}$$

Etape 2.

On cherche les racines de f_0.

En vertu de (3.39), f_0 a une famille de racines qu'on les note λ_k^0.

$$f_0(\lambda) = 0 \Leftrightarrow e^{2\lambda L} = -1.$$

Ainsi

$$2\lambda L = i(2k+1)\pi, \quad k \in \mathbb{Z},$$

i.e.,

$$\lambda_k^0 = \frac{i(2k+1)\pi}{2L}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Maintenant à l'aide du théorème de **Rouché** et le lemme (3.2.1), on va prouver que les racines de $\tilde{f}$ sont proches de celles de f_0.

On commence par la première famille.

On fait un changement d'inconnu dans (3.38), en posant $u = 2\lambda L$. Alors (3.38) devient

$$\tilde{f}(u) = (e^u + 1) + O\left(S(\frac{u}{2L})\right) = f_0(u) + O\left(S(\frac{u}{2L})\right).$$

Les racines de f_0 sont $u_k = \frac{i(k+\frac{1}{2})}{L}\pi, k \in \mathbb{Z}$, et on pose $u = u_k + re^{it}, t \in [0, 2\pi]$. On peut facilement vérifier qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de k telle que $|e^u + 1| \geq Cr$ pour r est assez petit. Ceci nous permet d'appliquer le théorème de **Rouché**. Par conséquent, il existe $N \in \mathbb{N}$ et une sous-suite $\{\lambda_k\}_{|k|\geq N}$ des racines de $f(\lambda)$ telle que $\lambda_k = \lambda_k^0 + o(1)$ qui tend vers les racines $\frac{i(k+\frac{1}{2})}{L}\pi$ de f_0. Finalement, pour $\mid k \mid \geq N, \quad \lambda_k$ est simple car λ_k^0 l'est.

Etape 3.

D'après l'étape 2, on peut écrire

$$\lambda_k = i\frac{1}{L}\left(k+\frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_k. \tag{3.40}$$

En utilisant (3.40), on trouve

$$e^{2\lambda_k L} = -1 - 2L\varepsilon_k - 2L^2\varepsilon_k^2 + o(\varepsilon_k^2). \tag{3.41}$$

On injecte (3.41) dans (3.38) et utilisons le fait que $\tilde{f}(\lambda_k) = 0$, on trouve :

$$\widetilde{f}(\lambda_k) = -2L\varepsilon_k - 2\zeta\Re S(\lambda_k^0) - 2i\zeta\Im S(\lambda_k^0) + o(\varepsilon_k) = 0 \tag{3.42}$$

et ainsi

$$\varepsilon_k = -\frac{\zeta}{L}\Re S(\lambda_k^0) - i\frac{\zeta}{L}\Im S(\lambda_k^0) + o(\Re S(\lambda_k^0)) + io(\Im S(\lambda_k^0)). \tag{3.43}$$

Maintenant, comme une application, si μ est choisi comme dans le lemme 2.0.2, on a

$$\tilde{f}(\lambda) = f_0(\lambda) + \frac{f_1(\lambda)}{l(\lambda)^{-1}\lambda^\sigma} + o\left(\frac{1}{l(\lambda)^{-1}\lambda^\sigma}\right), \tag{3.44}$$

où

$$f_1(\lambda) = -2\zeta\Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma). \tag{3.45}$$

Notons que f_0 et f_1 restent bornées dans la bande $-\alpha_0 \leq \mathcal{R}(\lambda) \leq 0$.

Si on pose $V(z) = z^\rho\tilde{\mathcal{L}}(z)$ où $\tilde{\mathcal{L}}$ est une fonction à variation lente, alors $V(re^{i\theta}) \sim V(r)e^{i\rho\theta}$ lorsque $r \to \infty$. On en déduit que

$$l(\lambda_k^0)^{-1}(\lambda_k^0)^\sigma \sim e^{i\sigma\frac{\pi}{2}} l\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{L}\pi\right)^{-1}\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{L}\pi\right)^\sigma.$$

On injecte (3.41) dans (3.44) et utilisons le fait que $\tilde{f}(\lambda_k) = 0$, on trouve :

$$\tilde{f}(\lambda_k) = -2L\varepsilon_k - \frac{2\zeta\Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)}{e^{i\sigma\frac{\pi}{2}} l\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{L}\pi\right)^{-1}\left(\frac{\left(k+\frac{1}{2}\right)}{L}\pi\right)^\sigma} + o(\varepsilon_k) = 0 \tag{3.46}$$

et ainsi

$$
\begin{aligned}
\varepsilon_k &= -\frac{\zeta\Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)}{e^{i\sigma\frac{\pi}{2}}\, l\left(\frac{(k+\frac{1}{2})}{L}\pi\right)^{-1}\left(\frac{(k+\frac{1}{2})}{L}\pi\right)^{\sigma} L} + o\left(\frac{1}{l(k)^{-1}k^{\sigma}}\right) \\
&= -\frac{\zeta\Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)}{l\left(\frac{(k+\frac{1}{2})}{L}\pi\right)^{-1}\left(\frac{(k+\frac{1}{2})}{L}\pi\right)^{\sigma} L}\left(\cos\sigma\frac{\pi}{2} - i\sin\sigma\frac{\pi}{2}\right) + o\left(\frac{1}{l(k)^{-1}k^{\sigma}}\right) \text{ pour } k \succeq 0.
\end{aligned}
\tag{3.47}
$$

D'après (3.47) on est dans le cas $l(k)^{-1}k^{\sigma}\Re\lambda_k \sim \beta$, avec

$$
\beta = -\frac{\zeta\Gamma(\sigma)\Gamma(2-\sigma)}{L^{1-\sigma}\pi^{\sigma}}\cos\sigma\frac{\pi}{2}.
$$

Si $\sigma = 0$, il existe une fonction à variation lente $\tilde{l}$ telle que $\tilde{l}(k)^{-1}\Re\lambda_k \sim \beta$, avec $\beta < 0$ (voir la remarque 2.0.4).

L' opérateur $\mathcal{A}$ a une branche de valeurs propres qui n'est pas exponentiellement décroissante. Maintenant, en posant :

$$
\tilde{U} = (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})U_k
$$

où U_k est la fonction propre normalisée associée à λ_k. Alors on a

$$
\| (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} = \sup_{U\in\mathcal{H}, U\neq 0} \frac{\| (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1}U \|_{\mathcal{H}}}{\| U \|_{\mathcal{H}}} \geq \frac{\| (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1}\tilde{U}_k \|_{\mathcal{H}}}{\| \tilde{U}_k \|} \geq \frac{\| U_k \|_{\mathcal{H}}}{\| (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})U_k \|_{\mathcal{H}}}.
$$

Ainsi, d'après (3.34), on en déduit que

$$
\| (\lambda_k^0 I - \mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \geq \frac{c}{| S(\lambda_k^0) |},
$$

qui implique que (3.20) n'a pas lieu, est la preuve est achevée.

■

3.2.2 Stabilité asymptotique

Dans cette partie, on va étudier la stabilité asymptotique du système (P). Les résultats pricipaux dans ce sens sont les théorèmes 3.2.4 , 3.2.7 et 3.2.8. Dans le théorème 3.2.7 le taux général de décroissance dépend de la forme de mesure de densité μ. La preuve repose fortement sur la méthode des multiplicateurs.

En raison de fait que le domaine de variable ξ n'est pas borné pour l'équation diffusive, la résolvante de $\mathcal{A}$ n'est pas compacte, alors la méthode classique telle que le principe de l'invariance de LaSalle n'est pas applicable dans ce cas pour montrer la stabilité asymptotique.

On va utiliser donc des résultats de [4] et [44](**Arendt-Batty** et **Lyubich-Vu**).

3.2.3 Stabilité forte du système

Afin d'établir le résultat de la stabilité asymptotique forte du C_0-semi-groupe $e^{t\mathcal{A}}$ associé au système d'ondes (P) dans l'absence de compacité de la résolvante de $\mathcal{A}$, on utilise le critère général du théorème d'**Arendt-Batty** dans [4] et **Lyubich-Vu** dans [44] pour démontrer la stabilité forte.

Notre résultat principal est le théorème suivant.

Théorème 3.2.3

Le C_0-semi-groupe $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$; c'est à dire, pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, la solution de (3.1) satisfait

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\mathcal{A}}U_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour la preuve du théorème 3.2.3, on va utiliser le théorème d'**Arendt-Batty** 1.7.11 (chapitre 1). Pour cet effet, on a besoin des deux lemmes suivants.

Lemme 3.2.3

$\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.

Preuve.

On utilise la démonstration par l'absurde.

Supposons qu'il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U \neq 0$, tels que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U. \tag{3.48}$$

Cas 1 : $\lambda \neq 0$

L'équation (3.48) est équivalente à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0, \\ i\lambda v - \Delta u = 0, \\ i\lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = 0, \quad x \in \Gamma_N. \end{cases} \tag{3.49}$$

En vertu de (3.8), on a

$$\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle = -\zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi)|^2 \, d\xi \, d\Gamma. \tag{3.50}$$

Alors , en utilisant (3.48) et (3.50), on en déduit que

$$\phi = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \times (-\infty, \infty). \tag{3.51}$$

D'après la troixième équation de (3.49), on a

$$v = 0, \quad \text{sur } \Gamma_N. \tag{3.52}$$

Ainsi, d'après la première équation de (3.49) et la troixième condition aux limites de (3.3) on obtient successivement,

$$u(x) = 0 \ \text{ et } \ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N. \tag{3.53}$$

Ainsi , en éliminant v, et en utilisant $u = 0$ sur Γ_D, le système (3.49) implique que

$$\begin{cases} \Delta u + \lambda^2 u = 0 & \text{dans } \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0 & \text{sur } \Gamma_N. \end{cases} \tag{3.54}$$

Donc, en utilisant le théorème de **Holmgren** , on en déduit que $u = 0$. Par conséquent, $U = 0$. Contradiction.

Cas 2 : $\lambda = 0$.

Le système (3.49) devient

$$\begin{cases} v = 0, \\ \Delta u = 0, \\ (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.55}$$

Par une intégration par parties et l'utilisation de la condition au bord $u = 0$ sur Γ_D, on a

$$0 = \int_\Omega \Delta u \bar{u}\, dx = \int_{\Gamma_N} \frac{\partial u}{\partial \nu} \bar{u}\, d\Gamma - \int_\Omega |\nabla u|^2\, dx.$$

Maintenant, d'après la troixième équation de (3.55) et la troixième équation de (3.3), on en déduit que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = 0, \text{ sur } \Gamma_N.$$

Ainsi u est constante dans le domaine Ω tout entier.

Donc, comme Γ_D est non vide, on a

$$u = 0, \text{ sur } \Omega$$

et par conséquent, $U = 0$. Contradiction.

Par suite, on en déduit que, $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

■

Lemme 3.2.4

On a

$$\begin{aligned} &i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad \textit{si} \quad \eta \neq 0, \\ &i\mathbb{R}^* \subset \rho(\mathcal{A}) \quad \textit{si} \quad \eta = 0 \end{aligned}$$

Preuve.

On va démontrer que l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$.

Pour cela, soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$, on cherche $U = (u, v, \phi)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de l'équation suivante

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{3.56}$$

Ce qui est équivalent à,

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1, \\ i\lambda v - \Delta u = f_2, \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{3.57}$$

D'après la première équation de (3.57) et la deuxième équation de (3.57), on a

$$-\lambda^2 u - \Delta u = f_2 + i\lambda f_1 \tag{3.58}$$

avec $u_{|\Gamma_D} = 0$.

La résolution du système (3.58) est équivalente à trouver $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_*(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (-\lambda^2 u\overline{w} - \Delta u\overline{w})\, dx = \int_\Omega (f_2 + i\lambda f_1)\overline{w}\, dx \tag{3.59}$$

pour tout $w \in H^1_*(\Omega)$.

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (-\lambda^2 u\overline{w} + \nabla u \nabla \overline{w})\, dx + i\lambda\tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} u\, \overline{w}\, d\Gamma \\ &= \int_\Omega (f_2 + i\lambda f_1)\overline{w}\, dx - \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)}{\xi^2 + \eta + i\lambda} \int_{\Gamma_N} f_3(x,\xi)\overline{w}\, d\Gamma\, d\xi + \tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} f_1 \overline{w}\, d\Gamma \end{aligned} \tag{3.60}$$

où $\tilde{\zeta} = \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi$.

On peut récrire (3.60) comme suit

$$-(L_\lambda u, w)_{(H^1_*(\Omega),(H^1_*(\Omega))')} + a_{H^1_*(\Omega)}(u,w) = l(w) \tag{3.61}$$

avec la forme sesquilinéaire $a_{H^1_*(\Omega)}$ est définie par

$$a_{H^1_*(\Omega)}(u,w) = \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w}\, dx + i\lambda\tilde{\zeta} \int_{\Gamma_N} u\, \overline{w}\, d\Gamma$$

et

$$(L_\lambda u, w)_{(H^1_*(\Omega),(H^1_*(\Omega))')} = \int_\Omega \lambda^2 u\bar{w} dx.$$

Utilisons les injections compactes de $L^2(\Omega)$ dans $H^{-1}(\Omega)$ et de $H^1_*(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$, on en déduit que l'opérateur L_λ est compact de $L^2(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$.

Par conséquent, en vertu de l'alternative de **Fredholm**, la preuve de l'existence de la solution u de (3.61) nous amène à montrer qu'il n'y a pas une solution non triviale pour (3.61) pour $l = 0$.

En effet,

s'il existe $u \neq 0$, telle que

$$(L_\lambda u, w)_{(H^1_*(\Omega),(H^1_*(\Omega))')} = a_{H^1_*(\Omega)}(u,w) \qquad \text{pour tout} \quad w \in H^1_*(\Omega). \tag{3.62}$$

Alors $i\lambda$ est une valeur propre de $\mathcal{A}$.

Donc en vertu du lemme 3.2.3, on en déduit que $u = 0$.

Maintenant, si $\lambda = 0$ **et** $\eta \neq 0$.

Le système (3.57) se réduit au système suivant

$$\begin{cases} v = -f_1, \\ -\Delta u = f_2, \\ (\xi^2 + \eta)\phi - v(x,t)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{3.63}$$

La résolution du système (3.63) est équivalente à trouver $u \in H^2(\Omega) \cap H^1_*(\Omega)$ telle que

$$\int_\Omega (-\Delta u \overline{w})\, dx = \int_\Omega f_2 \overline{w}\, dx, \quad \textit{pour tout}\, w \in H^1_*(\Omega). \tag{3.64}$$

Alors, on trouve

$$\int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w}\, dx = \int_\Omega f_2 \overline{w}\, dx + \zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta}\, d\xi \int_{\Gamma_N} f_1 \overline{w}\, d\Gamma - \zeta \int_{\Gamma_N} \overline{w} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(x,\xi)}{\xi^2 + \eta}\, d\xi\, d\Gamma. \tag{3.65}$$

Par conséquent, le problème (3.65) est équivalent au problème

$$\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{L}(w), \tag{3.66}$$

où la forme sesquilinéaire $\mathcal{B} : H^1_*(\Omega) \times H^1_*(\Omega) \to \mathbb{C}$ et la forme anti-linéaire $\mathcal{L} : H^1_*(\Omega) \to \mathbb{C}$ sont définies successivement par

$$\mathcal{B}(u,w) = \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w}\, dx \tag{3.67}$$

et

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega f_2 \overline{w}\, dx + \zeta \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2 + \eta}\, d\xi \int_{\Gamma_N} f_1 \overline{w}\, d\Gamma - \zeta \int_{\Gamma_N} \overline{w} \left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(x,\xi)}{\xi^2 + \eta}\, d\xi \right) d\Gamma. \tag{3.68}$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est continue et est coércive, et $\mathcal{L}$ est continue.
Ainsi en appliquant le théorème de **Lax-Milgram**, on déduit que pour tout $w \in H^1_*(\Omega)$, le problème (3.66) admet une solution unique $u \in H^1_*(\Omega)$.
Appliquons la règularité elliptique classique, il vient d'après (3.65) que $u \in H^2(\Omega)$.
D'où $u \in H^2(\Omega) \bigcap H^1_*(\Omega)$.
Donc, l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif.

■

Preuve (du théorème 3.2.3).

D'après le théorème (1.7.11) d'**Arendt** et **Batty**, le C_0-semi-groupe de contraction est fortement stable si $\mathcal{A}$ n'a pas des valeurs propres sur $i\mathbb{R}$ et $\sigma(\mathcal{A}) \bigcap i\mathbb{R}$ est au plus un ensemble dénombrable. D'après le lemme (3.2.3) et le lemme (3.2.4) on conclut le résultat.

■

3.2.4 Spectre résiduel de $\mathcal{A}$

Lemme 3.2.5

Soit l'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (3.2). Alors

$$\mathcal{A}^* \begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -v \\ -\Delta u \\ -(\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) \end{pmatrix} \tag{3.69}$$

de domaine

$$D(\mathcal{A}^*) = \left\{ \begin{array}{l} (u,v,\phi)^T \in \mathcal{H} : u \in H^2(\Omega) \cap H_*^1(\Omega), v \in H_*^1(\Omega), \\ -(\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) \in L^2(\Gamma_N \times (-\infty,+\infty)), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(\xi)\, d\xi = 0, \quad x \in \Gamma_N, \\ |\xi|\phi \in L^2(\Gamma_N \times (-\infty,+\infty)) \end{array} \right\} \tag{3.70}$$

Preuve.

Soient $U = (u,v,\phi)^T$ et $V = (\tilde{u},\tilde{v},\tilde{\phi})^T$. On a

$< \mathcal{A}U, V >_{\mathcal{H}} = < U, \mathcal{A}^*V >_{\mathcal{H}}$.

$$\begin{aligned}
< \mathcal{A}U, V >_{\mathcal{H}} &= \int_\Omega \nabla v \nabla \overline{\tilde{u}}\, dx + \int_\Omega \Delta u \overline{\tilde{v}}\, dx + \zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} [-(\xi^2+\eta)\phi + v(x)\mu(\xi)]\overline{\tilde{\phi}}\, d\xi\, d\Gamma \\
&= -\int_\Omega v \Delta \overline{\tilde{u}}\, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\tilde{v}}\, dx + \int_{\Gamma_N} v \frac{\partial \overline{\tilde{u}}}{\partial \nu}\, d\Gamma + \int_{\Gamma_N} \overline{\tilde{v}} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma \\
&\quad -\zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta)\phi\overline{\tilde{\phi}}\, d\xi\, d\Gamma + \zeta \int_{\Gamma_N} v(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\overline{\tilde{\phi}}\, d\xi\, d\Gamma \\
&= -\int_\Omega v \Delta \overline{\tilde{u}}\, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\tilde{v}}\, dx + \int_{\Gamma_N} v \frac{\partial \overline{\tilde{u}}}{\partial \nu}\, d\Gamma \\
&\quad -\zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} [(\xi^2+\eta)\overline{\tilde{\phi}} + \overline{\tilde{v}}(x)\mu(\xi)]\phi\, d\xi\, d\Gamma + \zeta \int_{\Gamma_N} v(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\overline{\tilde{\phi}}\, d\xi\, d\Gamma.
\end{aligned}$$

Si on pose

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) r \overline{\tilde{\phi}}\, d\xi,$$

on trouve

$$< \mathcal{A}U, V >_{\mathcal{H}} = -\int_\Omega \nabla u \nabla \overline{\tilde{v}}\, dx - \int_\Omega v \Delta \overline{\tilde{u}}\, dx - \zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{[(\xi^2+\eta)\tilde{\phi} + \tilde{v}(x)\mu(\xi)]}\phi\, d\xi\, d\Gamma.$$

Ce qui nous montre que l'ensemble donné dans le membre gauche de (3.70) est contenu dans $D(\mathcal{A}^*)$.

Montrons l'inclusion réciproque : montrons que $D(\mathcal{A}^*)$ est inclus dans l'ensemble donné dans le membre gauche de (3.70).

Soit $V \in D(\mathcal{A}^*) \subset \mathcal{H}$. Alors il existe un unique $W \in \mathcal{H}$ tel que

$$< \mathcal{A}U, V >_{\mathcal{H}} = < U, W >_{\mathcal{H}} \qquad \text{pour tout} \quad U \in D(\mathcal{A}). \tag{3.71}$$

Donc on peut prendre $U \in \mathscr{D}(\Omega) \times \mathscr{D}(\Omega) \times \mathscr{D}\Big(\Gamma_N \times (-\infty, +\infty)\Big)$ comme une fonction test dans (3.71).

D'après la définition de la dérivation au sens des distributions, on a

$$< \mathcal{A}U, V >_{\mathcal{H}} = -\int_\Omega v \Delta \bar{\tilde{u}}\, dx - \int_\Omega \nabla u \nabla \bar{\tilde{v}}\, dx + \int_{\Gamma_N} \bar{\tilde{v}} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma - \zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{[(\xi^2+\eta)\tilde{\phi} + \tilde{v}(x)\mu(\xi)]} \phi \, d\xi \, d\Gamma.$$

Donc, on a

$$W = \begin{pmatrix} -\tilde{v} \\ -\Delta \tilde{u} \\ -(\xi^2+\eta)\tilde{\phi} - \tilde{v}(x)\mu(\xi) \end{pmatrix}$$

dans le sens de $\mathscr{D}'(\Omega) \times \mathscr{D}'(\Omega) \times \mathscr{D}'\Big(\Gamma_N \times (-\infty, +\infty)\Big)$.

Ainsi

$\tilde{u} \in H^2(\Omega) \cap H^1_*(\Omega), \tilde{v} \in H^1_*(\Omega)$ et $-(\xi^2+\eta)\tilde{\phi} - \tilde{v}(x)\mu(\xi) \in L^2(\Gamma_N \times (-\infty, +\infty))$.

Après, on choisit un $U \in D(\mathcal{A})$ et on applique de nouveau la formule de **Green**, nous obtenons

$$\int_{\Gamma_N} v \Big(\frac{\partial \bar{\tilde{u}}}{\partial \nu} + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \bar{\tilde{\phi}}\, d\xi \Big)\, d\Gamma = 0 \qquad \text{pour tout} \quad v \in H^1_*(\Omega). \tag{3.72}$$

On utilise (3.72) et le fait que $\{v\,|_{\Gamma_N} : v \in H^1_*(\Omega)\}$ est dense dans $L^2(\Gamma_N)$, on en déduit que

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu} = -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi) \tilde{\phi}\, d\xi.$$

■

Théorème 3.2.4

$\sigma_r(\mathcal{A}) = \emptyset$, où $\sigma_r(\mathcal{A})$ désigne le spectre résiduel de $\mathcal{A}$. Il est défini par

$$\sigma_r(\mathcal{A}) = \Big\{\lambda \in \mathbb{C} : ker(\lambda I - \mathcal{A}) = \{0\} \text{ et } \overline{Im(\lambda I - \mathcal{A})} \neq \mathcal{H}\Big\}.$$

Preuve.

Comme $\lambda \in \sigma_r(\mathcal{A}), \overline{\lambda} \in \sigma_r(\mathcal{A}^*)$ la preuve sera achevée si on peut montrer que $\sigma_p(\mathcal{A}) = \sigma_p(\mathcal{A}^*)$. Si, car il est évident que les valeurs propres de $\mathcal{A}$ sont symétriques sur l'axe des nombres réels.

D'aprés (3.69), le problème de valeurs propres $\mathcal{A}^*Z = \lambda Z$ pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $0 \neq Z = (u, v, \phi) \in D(\mathcal{A}^*)$ est équivalent à

$$\begin{cases} \lambda u + v = 0, \\ \lambda v + \Delta u = 0, \\ \lambda \phi + (\xi^2 + \eta)\phi + v(x)\mu(\xi) = 0. \end{cases} \tag{3.73}$$

Grâce à la première équation et la deuxième équation de (3.73), on trouve

$$\lambda^2 u - \Delta u = 0. \tag{3.74}$$

Comme $v_{|\Gamma_N} = -\lambda u_{|\Gamma_N}$, on en déduit d'après la condition à la limite dans (3.73) et la troixième équation de (3.70) que

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x) = -\zeta\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda + \eta + \xi^2}\, d\xi u(x), \quad \forall x \in \Gamma_N \tag{3.75}$$

avec la condition suivante

$$u_{|\Gamma_D} = 0. \tag{3.76}$$

Le système (3.73), (3.75) et (3.76) est exactement le problème propre de $\mathcal{A}$.

Ainsi les opérateurs $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}^*$ ont les mêmes valeurs propres.

Par suite la démonstration du théorème 3.2.4 est achevée.

$\blacksquare$

Remarque 3.2.1

Lorsque $\eta = 0$, il est possible que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)^2}{\xi^2} = +\infty$ dans 3.68 et alors $\lambda = 0$ appartient au spectre continu.

3.2.5 Décroissance générale (pour $\eta \neq 0$)

Comme l'énergie du système (P) n'a aucun taux de décroissance uniforme, on recherche le taux de décroissance semi-uniforme pour des données régulières.
Pour cet effet, on va utiliser les deux résultats abstraits suivants reliant l'estimation de la résolvante de générateur du semi-groupe correspondant au taux de décroissance.

Théorème 3.2.5 *([12])*
Soit E un espace de Banach et soit $\mathcal{A}$ le générateur d'un C_0-semi-groupe borné $(S(t))_{t\geq 0}$ sur E. Si

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad et \quad \| (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{L}(X)} \leq M(| \beta |)$$

où $M : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ est une fonction continue non décroissante,
alors il existe deux constantes $C, c > 0$ telles que

$$\| e^{t\mathcal{A}} U_0 \| \leq \frac{C}{M_{\log}^{-1}(ct)} \| U_0 \|_{D(\mathcal{A})}$$

où $M_{\log} : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ est définie par $M_{\log}(s) = M(s)\Big(\log(1 + M(s))\Big), \quad s \geq 0.$

En particulier, on a le théorème important suivant où l'estimation de la résolvante est une fonction à croissance positive (voir la définition 2.0.3).

Théorème 3.2.6 *([55])*
Soit $\mathcal{H}$ un espace de Hilbert et soit $\mathcal{A}$ le générateur d'un C_0-semi-groupe borné $(S(t))_{t\geq 0}$ sur $\mathcal{H}$. Si

$$i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad et \quad \| (i\beta I - \mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M(| \beta |)$$

où $M : \mathbb{R}_+ \to (0, \infty)$ est une fonction continue non décroissante à croissance positive,
alors il existe une constante positive $C > 0$ tel que

$$\| e^{t\mathcal{A}} U_0 \| \leq \frac{C}{M^{-1}(t)} \| U_0 \|_{D(\mathcal{A})}, \qquad t \to \infty$$

Remarque 3.2.2
Le théorème (3.2.6) est une extension de plusieurs théorèmes obtenus par **Batty, Chill** *et* **Tomilov** *dans* [11].

Afin d'établir le taux de décroissance plynomiale de l'énergie, on utilise la condition de contrôle géométrique usuelle : il existe un point $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$m.\nu \leq 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_D \qquad \text{et} \quad m.\nu > 0 \quad \text{sur} \quad \Gamma_N \tag{3.77}$$

où $m = x - x_0$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$.

Théorème 3.2.7

Soit

$$\Lambda(\lambda) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (\mid \lambda \mid + \xi^2 + \eta)^{-1} \mid \mu(\xi) \mid^2 \, d\xi \right)^{-2}, \quad \textit{pour} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Alors le semi-groupe $\left(S_{\mathcal{A}}(t)\right)_{t\geq 0}$ *satisfait l'estimation de décroissance suivante :*

1) si Λ *est une fonction non décroissante à croissance positive, alors*

$$\|e^{\mathcal{A}t}U_0\| \leq \frac{C}{\Lambda^{-1}(t)} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})}, \quad t \to \infty,$$

où Λ^{-1} *est un inverse asymptotique de* Λ.

2) Si

$$\Lambda(\lambda) \sim cl(|\lambda|), \qquad |\lambda| \to \infty,$$

où l *est une fonction non décroissante et à variation lente, alors*

$$\|e^{\mathcal{A}t}U_0\| \leq \frac{1}{l_{\log}^{-1}(ct)} \|U_0\|_{D(\mathcal{A})},$$

où $\quad l_{\log}(s) = l(s)\Big(\log\left(1 + l(s)\right) + \log(1+s)\Big), \quad s \geq 0.$

Preuve.

On aura besoin d'étudier l'équation résolvante $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$, pour $\lambda \in \mathbb{R}$.

On a $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ est équivalente à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1, \\ i\lambda v - \Delta u = f_2, \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3, \end{cases} \tag{3.78}$$

où $F = (f_1, f_2, f_3)^T$ et $U = (u, v, \phi)^T$.

La preuve sera divisée en trois étapes.

Étape 1 :

On prend le produit scalaire dans $\mathcal{H}$ de l'équation $(i\lambda I - \mathcal{A})U = F$ avec U et on utilise (3.8) on trouve

$$|\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle| \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.79}$$

Ceci implique que

$$\zeta \int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi,t)|^2\,d\xi\,d\Gamma \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}. \tag{3.80}$$

En outre, d'après la condition à la limite dans (P) (la troisième équation dans (P)), $\dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\,d\xi$ sur $\Gamma_N\times(0,+\infty)$, on obtient

$$\begin{aligned}\int_{\Gamma_N}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 d\Gamma &= \zeta^2\int_{\Gamma_N}\left|\int_{-\infty}^{+\infty}\mu(\xi)\phi(x,\xi)\,d\xi\right|^2 d\Gamma\\ &\leq \zeta^2\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)|^2\,d\xi\right)\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi)|^2\,d\xi\,d\Gamma\\ &\leq c\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après la troisième équation de (3.78), nous obtenons :

$$v(x)\mu(\xi) = (i\lambda+\xi^2+\eta)\phi(x,\xi) - f_3(x,\xi), \quad \text{pour tout } x\in\Gamma_N. \tag{3.81}$$

En multipliant (3.81) par $(i\lambda+\xi^2+\eta)^{-1}\mu(\xi)$, on trouve

$$(i\lambda+\xi^2+\eta)^{-1}v(x)\mu^2(\xi) = \mu(\xi)\phi - (i\lambda+\xi^2+\eta)^{-1}\mu(\xi)f_3(x,\xi), \quad x\in\Gamma_N. \tag{3.82}$$

Ainsi, En prenant la valeur absolue des deux membres de (3.82), en intégrant sur l'intervalle $]-\infty,+\infty[$ par rapport à la variable ξ, en appliquant l'inégalité de **Cauchy-Schwartz** et en utilisant l'inégalité suivante (voir Proposition 2.4 dans [11] page 865)

Pour $s\in(0,\infty)$ et z$\in\mathbb{C}$, on a $|s+z|^2 \geq \left(\dfrac{1+\cos\varphi}{2}\right)(s+|z|)^2$, où $\varphi = arg(z)$.

$$\begin{aligned}\left.\int_{-\infty}^{+\infty}|(i\lambda+\eta+\xi^2)^{-1}|\mid\mu(\xi)\mid^2\ d\xi\right| &\geq \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mid i\lambda+\eta\mid+\xi^2\right)^{-1}\mid\mu(\xi)\mid^2\ d\xi\\ &\geq \frac{\sqrt{1+\cos\theta}}{\sqrt{2}}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\mid\mid\lambda\mid+\eta\mid+\xi^2\right)^{-1}\mid\mu(\xi)\mid^2\ d\xi\end{aligned}$$

où $\theta = \arg(i\lambda+\eta)$ et donc $\cos\theta = \dfrac{\eta}{\sqrt{\lambda^2+\eta^2}}$.

On obtient,

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\mathcal{S}|v(x)| \leq \mathcal{U}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{2}\mathcal{V}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(x,\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{3.83}$$

où

$$\mathcal{S} = \int_{-\infty}^{+\infty}\Big(|\lambda|+\xi^2+\eta\Big)^{-1}|\mu(\xi)|^2\,d\xi,$$

$$\mathcal{U} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)^{-1}|\mu(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\mathcal{V} = \left(\int_{-\infty}^{+\infty}\Big(|\lambda|+\xi^2+\eta\Big)^{-2}|\mu(\xi)|^2\,d\xi\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Ainsi, on utilise de nouveau l'inégalité $2PQ \leq P^2+Q^2, P\geq 0, Q\geq 0$ dans (3.83) et on intégre sur Γ_N, on trouve

$$\mathcal{S}^2\int_{\Gamma_N}|v(x)|^2\,d\Gamma \leq 4\mathcal{U}^2\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi|^2\,d\xi\,d\Gamma + 8\mathcal{V}^2\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}|f_3(x,\xi)|^2\,d\xi\,d\Gamma. \tag{3.84}$$

On conclut que

$$\int_{\Gamma_N}|v(x)|^2\,d\Gamma \leq c\Lambda(\lambda)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c\frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda)}{|\lambda|}\|F\|^2_{\mathcal{H}}. \tag{3.85}$$

Étape 2 :

On utilise la méthode des multiplicateurs.

On introduit les notations suivantes :

$$\mathcal{I}_u(x) = |v(x)|^2 + |\nabla u(x)|^2 \qquad \text{et}$$

$$\mathcal{E}_u = \int_\Omega \mathcal{I}_u(x)\,dx$$

Lemme 3.2.6

On a l'inégalité suivante

$$\mathcal{E}_u \leq c\|F\|^2_{\mathcal{H}} + c'\int_{\Gamma_N}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2 d\Gamma + c''\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|v|^2\,d\Gamma. \tag{3.86}$$

pour c, c' et c'' sont des constantes positives.

Preuve :

Multiplions la deuxième équation de (3.78) par $(n-1)\bar{u}$ et on intégre sur Ω, on obtient

$$-(n-1)\int_\Omega v(\overline{i\lambda u})\,dx + (n-1)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - (n-1)\int_{\Gamma_N} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = (n-1)\int_\Omega \bar{u} f_2\,dx. \tag{3.87}$$

D'après la première équation de (3.78), on a $i\lambda u = v + f_1$. Alors l'égalité (3.87) devient

$$-(n-1)\int_\Omega |v|^2\,dx + (n-1)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx - (n-1)\int_{\Gamma_N} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\,d\Gamma = (n-1)\Big(\int_\Omega \bar{u} f_2\,dx + \int_\Omega v\bar{f}_1\,dx\Big). \tag{3.88}$$

On multiplie la deuxième équation de (3.78) par $2m\cdot\nabla\bar{u}$ et on intégre sur Ω, on trouve

$$-2\int_\Omega v(m\cdot\overline{i\lambda\nabla u})\,dx - 2\int_\Omega \Delta u(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx = 2\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx. \tag{3.89}$$

D'après la première équation de (3.78), on a $i\lambda\nabla u - \nabla v = \nabla f_1$. Donc l'égalité (3.89) devient

$$-2\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{v})\,dx - 2\int_\Omega \Delta u(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx = 2\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx + 2\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{f}_1)\,dx. \tag{3.90}$$

Pour $u\in H^2(\Omega)$, une régularité suffisante pour utiliser l'identité de **Rellich** suivante :

$$\int_\Omega \Delta u(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx = \int_{\partial\Omega}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma - \int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx. \tag{3.91}$$

En outre, utilisons l'identité suivante

$$2\Re e\nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla\bar{u}) = 2|\nabla u|^2 + m\cdot\nabla(|\nabla u|^2).$$

On intégre sur Ω par parties dans le deuxième membre de la dernière égalité, on trouve

$$2\Re e\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx = (2-n)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_{\partial\Omega} m\cdot\nu|\nabla u|^2\,d\Gamma. \tag{3.92}$$

D'après (3.90), (3.91) et (3.92), on trouve

$$\begin{aligned} n\int_\Omega |v|^2\,dx + (2-n)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx &= 2\Re\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx + 2\Re\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{f}_1)\,dx \\ &+ \int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|v|^2\,d\Gamma + 2\int_{\partial\Omega}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma - \int_{\partial\Omega}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.93}$$

On rappelle que $\nabla u = (\dfrac{\partial u}{\partial \nu})\nu$ sur Γ_D, il vient que,

$$\begin{aligned} & n\int_\Omega |v|^2\,dx + (2-n)\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 2\Re\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx + 2\Re\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{f}_1)\,dx \\ & +\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|v|^2\,d\Gamma + 2\Re\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma - \int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma + \int_{\Gamma_D}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.94}$$

En combinant (3.88) et (3.94) on obtient

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |v|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 2\Re\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx + 2\Re\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{f}_1)\,dx \\ & +(n-1)\Big(\int_\Omega \bar{u}f_2\,dx + \int_\Omega v\bar{f}_1\,dx\Big) + \int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|v|^2\,d\Gamma + 2\Re\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma \\ & +\int_{\Gamma_D}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma - \int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|\nabla u|^2\,d\Gamma + (n-1)\int_{\Gamma_N}\bar{u}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.95}$$

Comme Γ_N est compacte et m,ν sont suffisament régulières, alors il existe $\delta > 0$ tel que $m(x)\cdot\nu(x) \geq \delta > 0$, pour tout $x\in\Gamma_N$ et $m(x).\nu(x) < 0$ pour tout $x\in\Gamma_D$. Donc on en déduit à partir de (3.95) l'estimation suivante :

$$\begin{aligned} & \int_\Omega |v|^2\,dx + \int_\Omega |\nabla u|^2\,dx \leq 2\Re\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx + 2\Re\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{f}_1)\,dx \\ & +(n-1)\Big(\int_\Omega \bar{u}f_2\,dx + \int_\Omega v\bar{f}_1\,dx\Big) + \int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|v|^2\,d\Gamma + 2\Re\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma \\ & -\delta\int_{\Gamma_N}|\nabla u|^2\,d\Gamma + (n-1)\int_{\Gamma_N}\bar{u}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma. \end{aligned} \tag{3.96}$$

D'autre part, on peut estimer le terme $2\displaystyle\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma$ comme suit :

$$2\int_{\Gamma_N}(m\cdot\nabla\bar{u})\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma \leq \frac{\delta}{2}\int_{\Gamma_N}|\nabla u|^2\,d\Gamma + 2\frac{\|m\|_\infty^2}{\delta}\int_{\Gamma_N}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma. \tag{3.97}$$

De plus, en vertu du théorème de **trace** et le théorème de **Poincaré**, on peut estimer aussi le terme $(n-1)\displaystyle\int_{\Gamma_N}\bar{u}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma$ comme suit :

$$\begin{aligned} (n-1)\int_{\Gamma_N}\bar{u}\frac{\partial u}{\partial\nu}\,d\Gamma & \leq \frac{\varepsilon}{2}\int_{\Gamma_N}|u|^2\,d\Gamma + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_N}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma \\ & \leq \frac{\varepsilon}{2}C(P)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\int_{\Gamma_N}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma, \end{aligned} \tag{3.98}$$

Remarque 3.2.3

Dans l'inégalité ci-dessus (3.98), $C(P)$ est la plus petite constante positive telle que

$$\int_{\Gamma_N}|u|^2\,d\Gamma \leq C(P)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx, \quad \textit{pour tout } u\in H^1_*(\Omega).$$

$$2\Re\int_\Omega f_2(m\cdot\nabla\bar{u})\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx + \frac{2}{\varepsilon}\|m\|_\infty^2\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{3.99}$$

$$2\Re\int_\Omega v(m\cdot\nabla\bar{f}_1)\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|v|^2\,dx + \frac{2}{\varepsilon}\|m\|_\infty^2\|\nabla f_1\|_{L^2(\Omega)}^2, \tag{3.100}$$

$$\begin{aligned}(n-1)\int_\Omega f_2\bar{u}\,dx &\le \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|u|^2\,dx + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2\\ &\le \frac{\varepsilon}{2}C(\Omega)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2,\end{aligned} \tag{3.101}$$

$$(n-1)\int_\Omega v\bar{f}_1\,dx \le \frac{\varepsilon}{2}\int_\Omega|v|^2\,dx + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\|f_1\|_{L^2(\Omega)}^2. \tag{3.102}$$

Alors

$$\begin{aligned}&(1-\varepsilon)\int_\Omega|v|^2\,dx + \left(1-\frac{\varepsilon}{2}C(P)-\frac{\varepsilon}{2}-\frac{\varepsilon}{2}C(\Omega)\right)\int_\Omega|\nabla u|^2\,dx \le\\ &\left(\frac{2}{\varepsilon}\|m\|_\infty^2\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{2}{\varepsilon}\|m\|_\infty^2\|\nabla f_1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\|f_2\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\|f_1\|_{L^2(\Omega)}^2\right)\\ &+\left(2\frac{\|m\|_\infty^2}{\delta}+\frac{(n-1)^2}{2\varepsilon}\right)\int_{\Gamma_N}\left|\frac{\partial u}{\partial\nu}\right|^2\,d\Gamma + \int_{\Gamma_N}(m\cdot\nu)|v|^2\,d\Gamma.\end{aligned}$$

On choisit ε assez petit, on conclut (3.86).

Pour $\lambda\neq 0$. on obtient

$$\mathcal{E}_u \le c\|F\|_{\mathcal{H}}^2 + c'\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c''\Lambda(\lambda)\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}} + c'''\frac{\Lambda^{\frac{1}{2}}(\lambda)}{|\lambda|}\|F\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{3.103}$$

Étape 3 : Comme $\eta>0$, il vient d'aprés (3.80) que

$$\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}|\phi(x,\xi)|^2\,d\xi\,d\Gamma \le C\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty}(\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi)|^2\,d\xi\,d\Gamma \le c\parallel U\parallel_{\mathcal{H}}\parallel F\parallel_{\mathcal{H}} \tag{3.104}$$

pour $\lambda\neq 0$.

Finalement, (3.103) et (3.104) impliquent que

$$\|U\|_{\mathcal{H}}^2 \le \Lambda^2(\lambda)\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \qquad \text{pour} \quad |\,\lambda\,|>1.$$

Il vient que

$$\frac{1}{\Lambda(\lambda)}\|(i\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \le C, \quad \text{pour tout } \lambda\in\mathbb{R},$$

pour C une constante positive.

La conclusion donc découle par l'application des théorèmes 3.2.5 et 3.2.6 suivant la forme de Λ.

$\blacksquare$

Exemple 3.1

Soit

$$\mu(\xi) = |\xi|^{\alpha}(\ln|\xi|)^{\beta}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}. \tag{3.105}$$

Alors, d'après (2.5), on a

$$g(s) = (\frac{1}{2})^{2\beta} \int_0^s y^{\alpha-\frac{1}{2}}(\ln y)^{2\beta}\, dy.$$

Utilisons le lemme 2.0.1, on trouve

$$\begin{aligned} g(s) &\sim (\frac{1}{2})^{2\beta}\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}s^{\alpha+\frac{1}{2}}(\ln s)^{2\beta} \qquad \textit{si } \alpha > -\frac{1}{2} \\ g(s) &\sim (\frac{1}{2})^{2\beta}\frac{1}{2\beta+1}(\ln s)^{2\beta+1} \qquad \textit{si } \alpha = -\frac{1}{2},\ 2\beta < -1. \end{aligned}$$

- *Si* $|\alpha| < \frac{1}{2}$, *alors*

$$\tilde{S}_g(\lambda) \sim (\frac{1}{2})^{2\beta}\frac{\pi}{\sin\pi(\frac{1}{2}-\alpha)}\lambda^{\alpha-\frac{1}{2}}(\ln\lambda)^{2\beta} \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \to \infty.$$

Ainsi, en appliquant le théorème 3.2.7 et la proposition (2.0.1), on trouve

$$\mathcal{E}(t) \leq C(\mathcal{E}(0))t^{-\frac{2}{1-2\alpha}}(\ln t)^{-\frac{8\beta}{1-2\alpha}}.$$

- *Si* $\alpha = -\frac{1}{2}$, *alors*

$$\tilde{S}_g(\lambda) \sim (\frac{1}{2})^{2\beta}\frac{1}{2\beta+1}\lambda^{-1}(\ln\lambda)^{2\beta+1} \quad \textit{lorsque } \lambda \to \infty.$$

Ainsi, en appliquant le théorème 3.2.7 et la proposition (2.0.1), on trouve

$$\mathcal{E}(t) \leq C(\mathcal{E}(0))t^{-1}(\ln t)^{-2(2\beta+1)} \quad \textit{si } \ 2\beta < -1.$$

- *Si* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $2\beta < -1$, *alors*

$$\tilde{S}_g(\lambda) \sim -(\frac{1}{2})^{2\beta}\frac{2}{2\beta+1}(\ln\lambda)^{2\beta+1} \quad \textit{lorsque } \lambda \to \infty.$$

Ainsi, on a

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{H}} \leq C(\ln|\lambda|)^{-2(2\beta+1)}$$

alors $l_{log}(s) \sim C(\ln|\lambda|)^{-(4\beta+1)}$.

D'où, en appliquant le théorème 3.2.5, on trouve

$$\mathcal{E}(t) \leq C(\mathcal{E}(0))e^{-\omega t^{-\frac{1}{4\beta+1}}}.$$

Remarque 3.2.4

Quand $\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\varpi-1}{2}}$ *avec* $0 < \varpi < 1, \eta \neq 0$, **B. Mbodje** *a obtenu une estimation de décroissance polynomiale qui est* $\mathcal{E}(t) \leq C/t, t \geq 0$.

Utilisons le théorème 3.2.7, on obtient une meilleure estimation de décroissance sur le paramètre ϖ *qui est* $\mathcal{E}(t) \leq C/t^{1/(1-\varpi)}, t \geq 0$.

3.2.6 Optimalité de décroissance de l'énergie dans le cas 1-Dimension

D'après le lemme 3.2.2, le spectre de $\mathcal{A}$ est contenu dans la partie gauche de l'axe imaginaire, mais il approche de cet axe. Ainsi, la décroissance de l'énergie dépend du comportement asymptotique de la partie réelle des valeurs propres de $\mathcal{A}$, puisque le lemme 3.2.2 exprime un comportement optimal prévu de la résolvante comme suit :

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \equiv \Big(\Re S(i\lambda)\Big)^{-1} \quad \text{lorsque } |\lambda| \to \infty. \tag{3.106}$$

Nous pouvons espérer un taux (optimal) de décroissance de l'énergie suivant la forme de $\Lambda^{1/2}$. Malheureusement nous ne pouvions pas prouver ce taux de décroissance par la méthode fréquentielle du domaine basée sur la méthode des multiplicateurs.
Dans le théorème 3.2.7, on a obtenu une estimation supérieure de la résolvante comme suit

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \left(\int_{-\infty}^{+\infty} (|\lambda| + \xi^2 + \eta)^{-1} |\mu(\xi)|^2 \, d\xi\right)^{-2} \quad \text{lorsque } |\lambda| \to \infty$$

c'est à dire que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \Lambda(\lambda) \ \text{ lorsque } |\lambda| \to \infty$$

ce qui est moins bon que (3.106) . Mais, il est intéressant de remarquer que dans le cas monodimensionnel, il est possible d'utiliser une représentation explicite de la résolvante pour obtenir une estimation optimale.
En effet,

On prend $\Omega = (0, L), \Gamma_D = \{0\}$ et $\Gamma_N = \{L\}$.
Notre résultat principal est le suivant :

Théorème 3.2.8
Soit

$$\Lambda(\lambda) = \frac{1}{(\Re S(i\lambda))}.$$

Supposons que Λ *a une croissance positive. Alors le semi-groupe* $(S_{\mathcal{A}}(t))_{t\geq 0}$ *satisfait l'estimation de décroissance suivante*

$$\| e^{\mathcal{A}t} U_0 \| \leq C \frac{1}{\Lambda^{-1}(t)} \| U_0 \|_{D(\mathcal{A})}, \qquad t \to \infty$$

où Λ^{-1} est un inverse asymptotique de Λ. De plus le taux de décroissance de l'énergie est optimal pout toute donnée initiale dans $D(\mathcal{A})$.

Preuve.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$ est donnée, et soit $U = (u, v, \phi)^T \in D(\mathcal{A})$ tels que

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{3.107}$$

L'èquation (3.107) est équivalent à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1, \\ i\lambda v - u_{xx} = f_2, \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(L)\mu(\xi) = f_3, \end{cases} \tag{3.108}$$

D'après la première équation et la deuxième équation de (3.108), on a

$$\lambda^2 u + u_{xx} = -(f_2 + i\lambda f_1)$$

avec $u(0) = 0$.

Supposons que $\lambda \neq 0$. Alors

$$u(x) = c_1 \sin \lambda x - \frac{1}{\lambda} \int_0^x \Big(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma) \Big) \sin \lambda(x - \sigma)\, d\sigma, \tag{3.109}$$

$$u_x(x) = c_1 \lambda \cos \lambda x - \int_0^x \Big(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma) \Big) \cos \lambda(x - \sigma)\, d\sigma. \tag{3.110}$$

En vertu de la troixième équation de (3.108), on a

$$\phi(\xi) = \frac{v(L)\mu(\xi) + f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}. \tag{3.111}$$

Et d'après la quatrième condition à la limite de (3.3), et l'égalité (3.111), on obtient

$$u_x(L) + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi v(L) + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi = 0. \tag{3.112}$$

De la première équation de (3.108), on a

$$v(L) = i\lambda u(L) - f_1(L),$$

en utilisant (3.109), (3.110) et (3.112), on trouve

$$\begin{aligned} \lambda c_1\left[iJ_1 \sin\lambda L + \cos\lambda L\right] = J_2 + J_1 f_1(L) + iJ_1 \int_0^L \left(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma)\right)\sin\lambda(L-\sigma)\,d\sigma \\ + \int_0^L \left(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma)\right)\cos\lambda(L-\sigma)\,d\sigma, \end{aligned} \tag{3.113}$$

où

$$\begin{aligned} J_1 &= \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\,d\xi = \zeta S(i\lambda), \\ J_2 &= -\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\,d\xi. \end{aligned}$$

On pose

$$\begin{aligned} \Xi(\lambda) &= iJ_1 \sin\lambda L + \cos\lambda L \\ &= \cos\lambda L + i\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\,d\xi \sin\lambda L \\ &= \cos\lambda L + \lambda\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda^2 + (\xi^2+\eta)^2}\,d\xi \sin\lambda L + i\zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{(\xi^2+\eta)\mu^2(\xi)}{\lambda^2 + (\xi^2+\eta)^2}\,d\xi \sin\lambda L. \end{aligned}$$

Il est clair que

$$\Xi(\lambda) \neq 0 \quad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

et

$$\mid \Xi(\lambda) \mid \geq c(\Re S(i\lambda)) \qquad \text{pour}\,\lambda\,\text{assez grand.} \tag{3.114}$$

La constante c_1 dans (3.113) satisfait

$$\begin{aligned} |\lambda||c_1||\Xi(\lambda)| &\leq |J_2| + |J_1||f_1(L)| + |J_1| \left| \int_0^L \left(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma)\right)\sin\lambda(L-\sigma)\,d\sigma \right| \\ &\quad + \left| \int_0^L \Big(f_2(\sigma) + i\lambda f_1(\sigma)\Big)\cos\lambda(L-\sigma)\,d\sigma \right| \\ &\leq o(1) + c\left(\|f_1\|_{H^1(0,L)} + \|f_2\|_{L^2(0,L)}\right), \end{aligned} \tag{3.115}$$

où on a utilisé une intégration par parties et le fait que $f_1 \in H^1_*(0,L)$.

Alors, d'après (3.114) et (3.115)

$$\mid c_1 \mid \leq c\frac{1}{\mid \lambda \mid (\Re S(i\lambda))}.$$

Et en vertu de (3.110), on en déduit que

$$\parallel u_x \parallel_{L^2(0,L)} \leq c\frac{1}{\Re S(i\lambda)}\Big(\parallel f_1 \parallel_{H^1(0,L)} + \parallel f_2 \parallel_{L^2(0,L)} \Big).$$

Et grâce à la première équation de (3.108) et (3.109), on trouve

$$\parallel v \parallel_{L^2(0,L)} \leq c\frac{1}{\Re S(i\lambda)}\Big(\parallel f_1 \parallel_{H^1(0,L)} + \parallel f_2 \parallel_{L^2(0,L)} \Big).$$

De plus, d'après (3.80), on obtient

$$\int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} \mid \phi(x,\xi) \mid^2 \; d\xi d\Gamma \leq C \int_{\Gamma_N}\int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2+\eta) \mid \phi(x,\xi) \mid^2 \; d\xi d\Gamma \leq C \parallel U \parallel_{\mathcal{H}} \parallel F \parallel_{\mathcal{H}} .$$

Ainsi, on conclut que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq c \frac{1}{\Re S(i\lambda)} \quad \text{lorsque } |\lambda| \to \infty.$$

Maintenant, afin de prouver l'inégalité réciproque on utilise la démonstration par l'absurde.

Supposons que $O(\Lambda(\lambda)^{1/2})$ est non optimal.
Ceci signifie qu'il existe une fonction $\tilde{\Lambda}$ telle que

$$\|(i\lambda I - \mathcal{A})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq \tilde{\Lambda}(\lambda) \;\text{ et } \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\tilde{\Lambda}(\lambda)}{(\Re S(i\lambda))^{-1}} = 0, \tag{3.116}$$

ce qui implique que, pour tout $F \in \mathcal{H}$, il existe $c > 0$ telle que

$$\frac{1}{\tilde{\Lambda}(\lambda)}\|U\|_{\mathcal{H}} \leq c\|F\|_{\mathcal{H}}, \qquad \text{pour tout} \quad \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0,$$

où $U \in \mathcal{H}$ est la solution de l'équation résolvante $i\lambda U - \mathcal{A}U = F$.
Qui est une contradiction car, en tenant compte du lemme 3.2.2, λ_k soit une valeur propre de l'opérateur $\mathcal{A}$ et $U_k \in D(\mathcal{A})$ la fonction propre normalisée associée. De plus, on introduit la suite suivante

$$\beta_k = Im\lambda_k, \quad |k| \geq k_1.$$

Après, en utilisant le lemme 3.2.2, on a

$$\|(i\beta_k - \mathcal{A})U_k\|_{\mathcal{H}} = \|(i\beta_k - \lambda_k)U_k\|_{\mathcal{H}} \leq \frac{1}{(\Re S(i\beta_k))^{-1}}\|U_k\|_{\mathcal{H}}.$$

Ce qui contredit l'équation asymptotique (3.116) et ainsi la preuve est achevée.

■

Exemple 3.2

Maintenant, pour μ est donée comme dans (3.105) c'est à dire

$$\mu(\xi) = \mid \xi \mid^{\alpha} (\ln \mid \xi \mid)^{\beta}, \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

On obtient la décroissance de l'énergie optimale suivante

($\bullet$) *Si* $\mid \alpha \mid < \frac{1}{2}$, *alors*

$$\varepsilon(t) \leq C(\varepsilon(0)) t^{-\frac{4}{1-2\alpha}} (\ln t)^{-\frac{8\beta}{1-2\alpha}}.$$

($\bullet$) *Si* $\alpha = -\frac{1}{2}$, *alors*

$$S_{\mu}(\lambda) \sim (\frac{1}{2})^{2\beta} \frac{1}{2\beta + 1} \lambda^{-1} (\ln \lambda)^{2\beta+1} \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \to \infty$$

et donc

$$\varepsilon(t) \leq C(\varepsilon(0)) t^{-2} (\ln t)^{-4(2\beta+1)} \quad \textit{si} \quad 2\beta < -1.$$

($\bullet$) *Si* $\alpha = \frac{1}{2}$ *et* $2\beta < -1$, *alors*

$$S_{\mu}(\lambda) \sim -\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2\beta} \frac{2}{2\beta + 1} (\ln \lambda)^{2\beta+1} \quad \textit{lorsque} \quad \lambda \to \infty$$

et donc

$$\| (i\lambda I - \mathcal{A})^{-1} \|_{\mathcal{H}} \leq C(\ln \mid \lambda \mid)^{-(2\beta+1)}.$$

Alors $l_{\log}(s) \sim C(\ln \mid \lambda \mid)^{-2\beta}$. *Ainsi*

$$\varepsilon(t) \leq C(\varepsilon(0)) e^{-\omega t^{-\frac{1}{2\beta}}}$$

Remarque 3.2.5

D'après la quatrième équation de (P)*, on a*

$$\phi(s,\xi,t)=\int_0^t \mu(\xi)e^{-(\xi^2+\eta)(t-\tau)}u_t(x,\tau)\,d\tau, \qquad x\in\Gamma_N. \tag{3.117}$$

Ainsi, en utilisant la troixième équation de (P)*, on trouve*

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)=-\zeta\int_0^t\Big[2\int_0^t \mu^2(\xi)e^{-\xi^2(t-s)}\,d\xi\Big]e^{-\eta(t-\tau)}u_t(x,\tau)\,d\tau, \qquad x\in\Gamma_N. \tag{3.118}$$

Pour μ *donnée comme dans (3.105), en utilisant une variante de lemme de* **Watson** $\Big($*voir ([16], p. 37), ([30], p p. 137-138]*$\Big)$*, on obtient*

(•) *Si* $\alpha>-\frac{1}{2}$*, alors*

$$I=\int_0^{+\infty}\mu^2(\xi)e^{-\xi^2(t-s)}\,d\xi\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{2\beta+1}\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}\Gamma(1+\alpha+\frac{1}{2})\frac{1}{(t-s)^{\alpha+\frac{1}{2}}}\Big(\ln\frac{1}{(t-s)}\Big)^{2\beta}.$$

(•) *Si* $\alpha=-\frac{1}{2}$ *et* $2\beta<-1$*, alors*

$$I=\int_0^{+\infty}\mu^2(\xi)e^{-\xi^2(t-s)}\,d\xi\sim\left(\frac{1}{2}\right)^{2\beta+1}\frac{1}{\alpha+\frac{1}{2}}\Big(\ln\frac{1}{(t-s)}\Big)^{2\beta+1}.$$

Ainsi, si on écrit

$$\frac{\partial u}{\partial \nu}(x,t)=-\zeta\int_0^t h(t-s)u_t(x,\tau)\,d\tau, \qquad x\in\Gamma_N.$$

Le terme mémoire h *admet le développement asymptotique :*

$$h(t)\sim c\frac{1}{t^{\alpha+1/2}}\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{2\beta}e^{-\eta t}\ \textit{lorsque}\ t\to\infty,\quad \textit{si}\ \alpha>-\frac{1}{2}.$$

$$h(t)\sim c\left(\ln\frac{1}{t}\right)^{2\beta+1}e^{-\eta t}\qquad \textit{lorsque}\ t\to\infty,\quad \textit{si}\ \alpha=-\frac{1}{2},\ 2\beta<-1.$$

Chapitre 4

Stabilisation d'une équation hyperbolique par un contrôle interne de type diffusif

4.1 Introduction

On considère le système hyperbolique (P_I) dans un domaine ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$ de frontière $\partial\Omega$ de classe C^2 :

$$
(P_I)\begin{cases}
u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi,t)\,d\xi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\
u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\
\partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{dans } \Omega \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\
u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \\
\phi(x,\xi,0) = 0 & \text{sur } \Omega \times (-\infty,\infty)
\end{cases}
$$

où $\zeta > 0, \eta \geq 0$ et μ est la densité de mesure générale et les données initiales sont dans des espaces appropriés.

On appelle le système $\{(P_I)_1, (P_I)_3\}$ formé par la première équation et la troixième équation du système (P_I) la réalisation diffusive associée à l'équation hyperbolique.

Quand $\mu(\xi) = |\xi|^{\frac{2\alpha-1}{2}}$ et $\zeta = \gamma\pi^{-1}\sin(\alpha\pi)$ avec $\gamma > 0$ et $0 < \alpha < 1$, on résout ce système de réalisation diffusive $\{(P_I)_1, (P_I)_3\}$, obtient :

$$(WF) \qquad u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) - \Delta u_{tt}(x,t) + \gamma\partial_t^{\alpha,\eta} u = 0 \quad \text{dans } \Omega \times (0,+\infty)$$

où $\partial_t^{\alpha,\eta}$ représente la dérivée fractionnaire généralisée de **Caputo** d'ordre α $(0 < \alpha < 1)$ par rapport à la variable de temps définie par

$$\partial_t^{\alpha,\eta} w(t) = \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-s)^{-\alpha} e^{-\eta(t-s)} \frac{dw}{ds}(s)\, ds.$$

Ce système modélise les vibrations axiales d'une nanotige uniforme. En faisant une analyse exécutée qui décrit le modèle comme un système en dimension infinie de l'espace d'état avec l'opérateur linéaire du contrôle de type diffusif.

Dans [15] Berbiche a étudié la décroissance de l'énergie de l'équation hyperbolique (WF). L'inconvénient principal associé aux opérateurs fractionnaire est le comportement héréditaire. De plus, l'utilisation des outils pour l'analyse mathématique, telle que l'analyse de stabilité et l'approximation numérique sont très difficiles. Il a utilisé la méthode de l'énergie combinée avec la procédure de **Faedo-Galerkin** pour prouver l'existence globale. En outre, il a étudié le comportement asymptotique de la solution en utilisant la méthode des **multiplicateurs** par la construction d'une nouvelle fonction de **Lyapunov** appropriée, où il a utilisé aussi des idées de **Komornik et Zuazua**. L'auteur a établit le taux de décroissance de type polynomiale $\mathcal{E}(t) \leq C/t$ pour $t > 0$ où $\eta \neq 0$.

Dans la première section de ce chapitre, on va étudier l'existence globale de la solution du système (P_I), où on établit l'existence et l'unicité de la solution forte et faible en utilisant la théorie des semi-groupes liée avec le théorème de **Hille-Yosida**.

Dans la deuxième section de ce chapitre, on va établir la stabilité forte dans le cas $\eta > 0$ et $\eta = 0$.

4.2 Existence globale

4.2.1 Existence et unicité de la solution du système (P_I)

Dans cette section, on donne le résultat de l'existence et l'unicité du probleme (P_I) en utilisant la théorie des semi-groupes. On considère l'espace suivant

$$H_0^1(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u_{|\Gamma} = 0\}.$$

Tout d'abord, on remarque que l'opérateur $I - \Delta$ est isomorphisme de $H_0^1(\Omega)$ dans son dual $H^{-1}(\Omega)$. Donc le système (P_I) est équivalent au système $(P_I^{'})$ suivant :

$$(P_I^{'}) \begin{cases} u_{tt}(x,t) - (I-\Delta)^{-1}\Delta u(x,t) + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)(I-\Delta)^{-1}\phi(x,\xi,t)\, d\xi = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty) \\ u(x,t) = 0 & \text{sur } \partial\Omega \times (0,+\infty) \\ \partial_t \phi(x,\xi,t) + (\xi^2+\eta)\phi(x,\xi,t) - u_t(x,t)\mu(\xi) = 0 & \text{dans } \Omega \times (-\infty,\infty) \times (0,+\infty) \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega \\ \phi(x,\xi,0) = 0 & \text{sur } \Omega \times (-\infty,\infty). \end{cases}$$

On introduit la fonction vectorielle $U = (u, v, \phi)^T$, où $v = u_t$, le système (P_I) est équivalent au système

$$\begin{cases} U' = \mathcal{A}U, \qquad t > 0, \\ U(0) = (u_0, u_1, \phi_0), \end{cases} \tag{4.1}$$

où l'opérateur $\mathcal{A}$ est défini par

$$\mathcal{A}\begin{pmatrix} u \\ v \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ (I-\Delta)^{-1}\Delta u - \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)(I-\Delta)^{-1}\phi(x,\xi)\, d\xi \\ -(\xi^2+\eta)\phi + v(x)\mu(\xi) \end{pmatrix}. \tag{4.2}$$

On considère l'espace de **Hilbert** suivant :

$$\mathcal{H} = H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega) \times L^2\Big(\Omega \times (-\infty,+\infty)\Big),$$

muni du produit scalaire

$$\langle U, \tilde{U} \rangle_{\mathcal{H}} = \int_\Omega (v\bar{\tilde{v}} + \nabla u \nabla \bar{\tilde{u}} + + \nabla v \nabla \bar{\tilde{v}})\, dx + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} \phi \bar{\tilde{\phi}}\, d\xi\, dx.$$

Le domaine de l'opérateur $\mathcal{A}$ est donc

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{l} (u, v, \phi)^T \;\; \in \mathcal{H} : u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), v \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega), \\ -(\xi^2 + \eta)\phi + v(x)\mu(\xi) \in L^2(\Omega \times (-\infty, +\infty)), \\ |\xi|\phi \in L^2(\Omega \times (-\infty, +\infty)) \end{array} \right\}. \tag{4.3}$$

La fonction d'énergie associée au problème (P_I) est donnée par

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2 + \frac{\zeta}{2}\int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} |\phi(x, \xi, t)|^2 \, d\xi \, dx. \tag{4.4}$$

Lemme 4.2.1

Soit (u, ϕ) la solution régulière du problème (P_I). Alors, La fonction d'énergie définie par (4.4) satisfait

$$\mathcal{E}'(t) = -\zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(x, \xi, t)|^2 \, d\xi \, dx \leq 0. \tag{4.5}$$

Preuve.

Muliplions la première équation de (P_I) par $\overline{u}_t$ et on intégre sur Ω par parties, on trouve

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\|u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u_t\|_2^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|_2^2\right) + \zeta\Re \int_\Omega \overline{u}_t(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x, \xi, t) \, d\xi \, dx = 0. \tag{4.6}$$

Multiplions la troixième équation dans (P_I) par $\zeta\overline{\phi}$ et on intégre sur $\Omega \times (-\infty, +\infty)$ on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{\zeta}{2}\frac{d}{dt}\|\phi\|_{L^2(\Omega\times(-\infty,+\infty))}^2 + \zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(x, \xi, t)|^2 \, d\xi \, dx & \\ -\zeta\Re \int_\Omega u_t(x, t) \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\overline{\phi}(x, \xi, t) \, d\xi \, dx = 0. & \end{aligned} \tag{4.7}$$

En vertu de (4.4), (4.6) et (4.7) on trouve

$$\mathcal{E}'(t) = -\zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(x, \xi, t)|^2 \, d\xi \, dx \leq 0.$$

■

On a le résultat d'existence et d'unicité suivant :

Théorème 4.2.1 (Existence et unicité)

(1) Si $U_0 \in D(\mathcal{A})$, alors le système (4.1) admet une solution forte unique

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, D(\mathcal{A})) \cap C^1(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

(2) Si $U_0 \in \mathcal{H}$, alors le système (4.1) admet une solution faible unique

$$U \in C^0(\mathbb{R}_+, \mathcal{H}).$$

Preuve.

On utilise l'approche des semi-groupes. Appliquons le théorème 1.7.5 de **Lumer-Phillips**

Lemme 4.2.2

1) *L'opérateur $\mathcal{A}$ défini par (4.3) et (3.3) est dissipatif et satisfait, pour tout $U \in D(\mathcal{A})$*

$$\Re e\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta \int_{\Gamma_N} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(x,\xi,t)|^2 \, d\xi \, d\Gamma. \tag{4.8}$$

2) *L'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.*

Preuve :

1) Montrons que $\mathcal{A}$ est dissipatif.

Soit $U \in D(\mathcal{A})$.

Utilisons (4.1), (4.5) et le fait que

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}\|U\|^2_{\mathcal{H}}, \tag{4.9}$$

on obtient

$$\Re\langle \mathcal{A}U, U\rangle_{\mathcal{H}} = -\zeta \int_{\Omega} \int_{-\infty}^{+\infty} (\xi^2 + \eta)|\phi(x,\xi,t)|^2 \, d\xi \, dx \leq 0. \tag{4.10}$$

Ainsi, $\mathcal{A}$ est dissipatif.

2) Montrons que l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$, on montre qu'il existe $U \in D(\mathcal{A})$ satisfait

$$(\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{4.11}$$

L'équation (4.11) est équivalente à

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1, \\ \lambda v - (I-\Delta)^{-1}\Delta u + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)(I-\Delta)^{-1}\phi(x,\xi)\, d\xi = f_2, \\ \lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{4.12}$$

Alors

$$\begin{cases} \lambda u - v = f_1, \\ \lambda(I-\Delta)v - \Delta u + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x,\xi)\, d\xi = (I-\Delta)f_2, \\ \lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3. \end{cases} \tag{4.13}$$

On suppose que u a une régularité appropriée. Alors, la première équation et la troixième équation de (4.13) nous donnent successivement

$$v = \lambda u - f_1 \in H_0^1(\Omega) \tag{4.14}$$

et

$$\phi = \frac{f_3(\xi) + \mu(\xi)v(x)}{\xi^2+\eta+\lambda}. \tag{4.15}$$

Grâce à la deuxième équation de (4.13) et l'égalité (4.14), il est facile de montrer que u satisfait

$$\begin{aligned} \lambda^2(I-\Delta)u - \Delta u + \zeta\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}\, d\xi \right) u &= (I-\Delta)f_2 + \lambda(I-\Delta)f_1 \\ +\zeta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}\, d\xi \right) f_1 &- \zeta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(x,\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}\, d\xi \right). \end{aligned} \tag{4.16}$$

La résolution du système (4.16) est équivalente à trouver $u \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} (\lambda^2+\zeta\lambda J) \int_\Omega u\overline{w}\, dx + (\lambda^2+1) \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w}\, dx &= \int_\Omega \Big[(I-\Delta)f_2 + \Big(\lambda(I-\Delta)+\zeta J\Big) f_1 \Big] \overline{w}\, dx \\ &- \zeta \int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(x,\xi)}{\lambda+\xi^2+\eta}\, d\xi \right) \overline{w}\, dx \end{aligned} \tag{4.17}$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$ et $J = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{\xi^2+\eta+\lambda}\, d\xi$.

Le problème (4.17) est sous la forme

$$\mathcal{B}(u,w) = \mathcal{L}(w), \tag{4.18}$$

où $\mathcal{B} : [H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)] \to \mathbb{C}$ est une forme sesquilinéaire définie par

$$\mathcal{B}(u,w) = (\lambda^2+\zeta\lambda J) \int_\Omega u\overline{w}\, dx + (\lambda^2+1) \int_\Omega \nabla u \nabla \overline{w}\, dx$$

et $\mathcal{L} : H_0^1(\Omega) \to \mathbb{C}$ est une forme antilinéaire donnée par

$$\mathcal{L}(w) = \int_\Omega \Big[(I-\Delta)f_2 + \Big(\lambda(I-\Delta) + \zeta J\Big) f_1\Big]\overline{w} - \zeta \int_\Omega \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi) f_3(x,\xi)}{\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi\right) \overline{w}\, dx.$$

Il est facile de vérifier que $\mathcal{B}$ est continue et coércive, et $\mathcal{L}$ est continue.

Par conséquent, d'après le lemme de **Lax-Milgram**, le système (4.18) admet une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

En vertu du théorème de la régularité pour les équations linéaires elliptiques, il vient que $u \in H^2(\Omega)$. Donc, l'opérateur $\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour tout $\lambda > 0$.

■

Preuve (du théorème (4.2.1)).

On utilise l'approche des semi-groupes. En vertu du lemme (4.2.2) l'opérateur $\mathcal{A}$ est m-dissipatif. Donc d'après le théorème 1.7.5 de **Lumer-Phillips**, l'opérateur $\mathcal{A}$ engendre un C_0-semi-groupe de contraction $e^{t\mathcal{A}}$. Donc la solution du système (4.1) admet la représentation suivante

$$U(t) = e^{t\mathcal{A}} U_0, \ \forall t \geq 0,$$

ce qui mène que le système (4.1) est bien posé. Par conséquent, en utilisant le théorème d'existence et d'unicité de **Hille-Yosida**, le résultat du théorème 3.1.1 aura lieu.

■

4.2.2 Stabilité forte du système (P_I)

Dans cette section, on utilise le théorème général d'**Arendt-Batty** 1.7.11 (du chapitre 1) pour montrer la stabilité forte du C_0-semi-groupe $e^{t\mathcal{A}}$ associé au système (P_I) dans l'abscence de la compacité de la résolvante de $\mathcal{A}$.

Notre résultat principal est le théorème suivant :

Théorème 4.2.2

Le C_0-semi-groupe $e^{t\mathcal{A}}$ est fortement stable dans $\mathcal{H}$; c'est à dire que, pour tout $U_0 \in \mathcal{H}$, la solution de (4.1) satisfait

$$\lim_{t\to\infty} \|e^{t\mathcal{A}} U_0\|_{\mathcal{H}} = 0.$$

Pour la preuve du théorème 4.2.2, on aura besoin du lemme suivant :

Lemme 4.2.3

$\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres dans $i\mathbb{R}$.

Preuve.

On démontre par l'absurde. Supposons qu'il exixte $\lambda \in \mathbb{R}$ et $U \neq 0$, telles que

$$\mathcal{A}U = i\lambda U. \tag{4.19}$$

1^{er} cas : $\lambda \neq 0$:

L'égalité (4.19) est équivalente à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = 0, \\ i\lambda v - (I-\Delta)^{-1}\Delta u + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)(I-\Delta)^{-1}\phi(x,\xi)\, d\xi = 0, \\ i\lambda\phi + (\xi^2+\eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = 0, \quad x \in \Omega. \end{cases} \tag{4.20}$$

Ensuite, d'après (4.8), on a

$$\Re(\mathcal{A}U, U) = -\zeta \int_\Omega \int_{-\infty}^{\infty} (\xi^2+\eta)|\phi(x,\xi)|^2\, d\xi\, dx. \tag{4.21}$$

Alors, en utilisant (4.19) et (4.21) on en déduit que

$$\phi = 0 \quad \text{sur} \;\; \Omega \times (-\infty, \infty). \tag{4.22}$$

D'après la troixième équation de (4.20), on a

$$v(x) = 0, \quad \text{sur} \;\; \Omega. \tag{4.23}$$

Ainsi, en vertu de la première équation de (4.20) on obtient

$$u(x) = 0 \quad \text{sur} \;\; \Omega. \tag{4.24}$$

Par conséquent,

$$U = 0.$$

Contradiction.

2^{eme} **cas :** $\lambda = 0$**.**

Le système (4.20) devient

$$\begin{cases} v = 0, \\ \phi = 0, \\ \Delta u = 0. \end{cases} \tag{4.25}$$

Par une intégration par parties sur Ω dans la troixième équation de (4.25) et utilisons la condition au bord $u = 0$ sur Γ_D, on obtient

$$0 = \int_\Omega \Delta u \bar{u} \, dx = -\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx.$$

Ainsi u est constante dans Ω tout entier. Donc comme Γ_D est non vide, on a

$$u = 0, \;\text{sur}\; \Omega.$$

Par conséquent,

$$U = 0.$$

On en déduit que, $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres sur l'axe imaginaire.

$\blacksquare$

Lemme 4.2.4

On a

$$i\mathbb{R} - \{-i, i\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad si \;\; \eta \neq 0,$$
$$i\mathbb{R} - \{0, -i, i\} \subset \rho(\mathcal{A}) \quad si \;\; \eta = 0.$$

Preuve :

On va prouver que l'opérateur $i\lambda I - \mathcal{A}$ est surjectif pour $\lambda \neq 0$.

Soit $F = (f_1, f_2, f_3)^T \in \mathcal{H}$. On cherche $U = (u, v, \phi)^T \in D(\mathcal{A})$ solution de l'équation suivante

$$(i\lambda I - \mathcal{A})U = F. \tag{4.26}$$

(4.26) est équivalente à

$$\begin{cases} i\lambda u - v = f_1, \\ i\lambda v - (I - \Delta)^{-1}\Delta u + \zeta \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)(I - \Delta)^{-1}\phi(x, \xi)\, d\xi = f_2, \\ i\lambda\phi + (\xi^2 + \eta)\phi - v(x)\mu(\xi) = f_3, \end{cases} \tag{4.27}$$

En vertu de la première équation de (4.27), on a

$$v = i\lambda u - f_1.$$

Et d'après la troixième équation de (4.27), on a

$$\phi = \frac{\mu(\xi)v(x) + f_3}{i\lambda + \xi^2 + \eta}.$$

La deuxième équation de (4.27) est équivalente à :

$$i\lambda(I - \Delta)v - \Delta u + \zeta \int_{-\infty}^{+\infty} \mu(\xi)\phi(x, \xi)\, d\xi = (I - \Delta)f_2.$$

En remplace la valeur de v et de ϕ dans la dernière équation, on obtient :

$$\begin{aligned} -\lambda^2 u + (\lambda^2 - 1)\Delta u + i\zeta\lambda \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi \right) u &= (I - \Delta)f_2 + i\lambda(I - \Delta)f_1 \\ +\zeta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi \right) f_1 &- \zeta \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mu(\xi)f_3(x, \xi)}{i\lambda + \xi^2 + \eta}\, d\xi \right). \end{aligned} \tag{4.28}$$

La résolution du système (4.28) est équivalente à trouver $u \in H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ telle que

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (-\lambda^2 u\overline{w} + (\lambda^2-1)\Delta u\overline{w})\,dx + i\zeta\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega u\overline{w}\,dx \\ &= \int_\Omega \Big[(I-\Delta)f_2 + i\lambda(I-\Delta)f_1\Big]\overline{w}\,dx + \zeta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega f_1\overline{w}\,dx \\ &\quad -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}\,dx\,d\xi \end{aligned} \tag{4.29}$$

pour tout $w \in H_0^1(\Omega)$.

Alors, on trouve

$$\begin{aligned} &\int_\Omega (-\lambda^2 u\overline{w} - (\lambda^2-1)\nabla u\nabla\overline{w})\,dx + i\zeta\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega u\overline{w}\,dx \\ &= \int_\Omega \Big[(I-\Delta)f_2 + i\lambda(I-\Delta)f_1\Big]\overline{w}\,dx + \zeta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega f_1\overline{w}\,dx \\ &\quad -\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}\,dx\,d\xi. \end{aligned} \tag{4.30}$$

Le problème (4.30) s'écrit sous la forme

$$L_\lambda(u,w) = l_\lambda(w) \tag{4.31}$$

où

$$L_\lambda(u,w) = \int_\Omega \Big(\lambda^2 u\overline{w} + (\lambda^2-1)\nabla u\nabla\overline{w}\Big)\,dx - i\zeta\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega u\overline{w}\,dx$$

et

$$\begin{aligned} l_\lambda(w) &= \int_\Omega \Big[(I-\Delta)f_2 + i\lambda(I-\Delta)f_1\Big]\overline{w}\,dx + \zeta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega f_1\overline{w}\,dx \\ &-\zeta\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\int_\Omega f_3(x,\xi)\overline{w}\,dx\,d\xi. \end{aligned}$$

Tout d'abord on montre que ce problème admet une solution unique si $\lambda^2 > 1$.

En effet,

il est clair que la forme sesquilinéaire

$$(u,w) \mapsto L_\lambda(u,w) = \int_\Omega (\lambda^2 u\overline{w} + (\lambda^2-1)\nabla u\nabla\overline{w})\,dx - i\zeta\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega u\overline{w}\,dx \tag{4.32}$$

est continue sur $H_0^1(\Omega) \times H_0^1(\Omega)$ et coércive. La forme antilinéaire $w \mapsto l_\lambda(w)$ est continue sur $H_0^1(\Omega)$.

D'après le lemme de **Lax-Milgram**, le problème (4.31) possède une unique solution $u \in H_0^1(\Omega)$.

Le cas $\lambda^2 - 1 = 0$ ne peut pas nous mener à un résultat positif puisque le facteur qui est devant l'opérateur Δ vaut zéro.

Si $\lambda^2-1<0$ et $\lambda\neq 0$, alors la situation est plus délicate car les termes $-\lambda^2 I$ et $(\lambda^2-1)\Delta$ sont en concurrence dans (4.28).

En divisant (4.28) par $1-\lambda^2$ et en posant $\tau=\dfrac{\lambda}{\sqrt{1-\lambda^2}}$, on obtient d'une manière équivalente

$$\begin{aligned}-\tau^2 u-\Delta u+i\zeta\frac{\tau}{\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)u=\frac{1}{1-\lambda^2}\Bigg[&(I-\Delta)f_2+i\lambda(I-\Delta)f_1\\ +\zeta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)f_1-\zeta\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu(\xi)f_3(x,\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)&\Bigg].\end{aligned}\tag{4.33}$$

L'opérateur :

$-\tau^2 I-\Delta+i\zeta\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)I=\left[-\tau^2+i\zeta\dfrac{\tau}{\sqrt{1-\lambda^2}}\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\right]I-\Delta$ est un isomorphisme de H_0^1 dans H^{-1} et donc il est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

Comme le facteur $1-\lambda^2$ est différent de zéro, on trouve de manière équivalente que $-\lambda^2 I+(\lambda^2-1)\Delta+i\zeta\lambda\left(\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)I$ est un isomorphisme de H_0^1 dans H^{-1}. Par conséquent, il est un opérateur de **Fredholm** d'indice 0.

Ainsi, la preuve de l'existence d'une solution u de (4.30) se réduit à montrer qu'il n'y a pas une solution non triviale pour (4.30) avec $f_1=f_2\equiv 0$ et $f_3\equiv 0$.

En effet,

s'il existe $u\neq 0$, tel que

$$\int_\Omega(-\lambda^2 u\overline{w}-(\lambda^2-1)\nabla u\nabla\overline{w})\,dx+i\zeta\lambda\left(\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\mu^2(\xi)}{i\lambda+\xi^2+\eta}\,d\xi\right)\int_\Omega u\overline{w}\,dx=0,$$

alors $i\lambda$ est une valeur propre de $\mathcal{A}$. Par conséquent, d'après le Lemme 4.2.3 on en déduit que $u=0$. De la même manière, on obtient le même résultat si $\lambda=0$ et $\eta\neq 0$.

■

Preuve du théorème 4.2.2 :

D'après le théorème d'Arendt-Batty 1.7.11, le C_0-semi-groupe de contraction est fortement stable si $\mathcal{A}$ n'a pas de valeurs propres sur $i\mathbb{R}$ et $\sigma(\mathcal{A})\cap i\mathbb{R}$ est un ensemble au plus dénombrable. D'après le lemme 4.2.3 et le lemme 4.2.4, on conclut le résultat.

■

Conclusions

On a considéré le système d'ondes (P) et la stabilisation de ce système par un contrôle frontière de type diffusif. On a prouvé que la décroissance de l'énergie de la solution du système (P) n'est pas exponentielle, mais elle est polynomiale. On a utilisé la méthode spectrale pour établir le manque de stabilité exponentielle . D'un autre côté, on a utilisé le théorème d'Arend-Batty et et Lyubich-Vu pour établir la stabilité asymptotique forte et le théorème généralisé de Borichov-Tomilov pour réaliser les estimations de décroissance.

On a considéré aussi un système hyperbolique (P_I) et la stabilisation de ce système par un contrôle interne de type diffusif , où on a fait une étude qualitative de ce système telle qu'on a établi l'existence et l'unicité de la solution et la stabilisation asymptotique forte, telle que on a utilisé le théorème d'Arendt-Batty et Lyubich-Vu.

Chapitre 5

Commentaires et perspectives

5.0.1 Commentaires

1) le contenu de notre travail est très proche de ceux de $\Big($[28], [58]$\Big)$.

   En tenant compte de la remarque 3.2.5, le problème (P) devient

$$(PV) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ u(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_0^t h(t-s)u_t(x,s)ds, & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{sur } \Omega, \end{cases} ,$$

   où h est un noyau positif vérifiant certaines hypothèses supplémentaires. Pour des choix spéciaux de h, la troixième équation de (PV) est une condition qui implique la dérivée fractionnaire. Stahn [58] a considéré le taux de décroissance d'énergie pour un problème semblable au problème (PV) dans le cas $\Gamma_D = \emptyset$. La meilleure estimation $\| \; (i\lambda - \mathcal{A})^{-1} \; \| \leq C\Big(\Re e\hat{h}(i\lambda)\Big)^{-1}, \; \lambda > 0$, a été obtenue sous une hypothèse jointe sur $\hat{h}$ et les valeurs propres Neumann-Laplacien de Ω et est optimale dans le meilleur cas 1-D (pour $\Gamma_D, \Gamma_N \neq \emptyset$ qui est prouvée dans notre travail). cependant, ceci ne signifie pas nécessairement que notre résultat est superoptimal dans le cas de multidimension. En fait, les contraintes sur Ω de [58] sont différentes de notre cas, ainsi il est difficile de dire que la meilleure estimation de la resolvante est toujours atteinte dans le cas de notre travail.

   Notons également l'observation intéressante suivante : pour quelques choix très spéciaux de μ (par exemple support compact) les taux de décroissance obtenus dans notre travail et dans [58] sont réellement les mêmes, le taux obtenu dans [58] est plus rapide.

   Pour la preuve de notre résultat principal sur le taux de décroissance de l'énergie (Théorème

(3.2.7)) nous utilisons des techniques complètement différentes par rapport à [58]. Il est intéressant de noter que la meilleure estimation de la résolvante dans [58] est seulement obtenue sous une condition sur "l'impédance acoustique" $\hat{h}$ qui exclut certains choix de h (dépend de Ω) pour lequel [58] ne prouve aucun résultat.

Par Contre, l'estimation est légèrement plus mauvaise de notre travail pour n'importe quelle impédance acoustique.

2) Notre méthode également marche facilement (avec une certaine modification) dans le cas $meas(\Gamma_D) = 0$ pour les situations suivantes :

- La première équation de (PV) implique aussi le terme de deplacement u.
- La loi de feedback de stabilisation contient non seulement une dissipation viscoélastique frontière $\int_0^t h(t-s)u_t(x,s)\,ds$ mais également un déplacement frontière u.
- Lorsque $meas(\Gamma_D) \neq 0$ la première condition aux limites dans (PV) implique le terme de deplacement u (la condition aux limites $(PV)_2$ est remplacée, par exemple, par $\frac{\partial u}{\partial \nu} + u = 0$ sur $\Gamma_D \times (0, +\infty)$.

De plus notre méthode marche aussi pour le problème suivant

$$(\tilde{P}V) \qquad \begin{cases} u_{tt}(x,t) - \Delta u(x,t) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty) \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu}(x,t) = -\zeta \displaystyle\int_0^t h(t-s)u_t(x,s)ds, & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x) & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

avec $meas(\Gamma_N) \neq 0$ $\Big(meas(\Gamma_D) = 0$ est autorisée$\Big)$.

Pour ce problème la fonction d'énergie classique est seulement une semi-norme. Nous pouvons prouver que la solution du système ci-dessus tend asymptotiquement vers une constante qui dépend des données initiales avec une estimation de convergence qui dépend de h.

5.0.2 Perspectives

1) Il est intéressant d'étendre les résultats de ce travail au problème suivant

$$(P1) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,+\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0,+\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + m \cdot \nu \, \partial_t^{\alpha,\eta} u = 0, & \text{sur } \Gamma_N \times (0,+\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{sur } \Omega, \end{cases}$$

pour $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\begin{cases} m(x) = x - x_0, \\ \Gamma_D = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu \leq 0\}, \\ \Gamma_N = \{x \in \Gamma : m \cdot \nu > 0\} \end{cases}$$

et $\overline{\Gamma}_D \cap \overline{\Gamma}_N \neq \emptyset$ (voir [27]).

2)Il est intéressant d'obtenir une condition nécessaire et suffisante (GCC) comme dans l'article de Bardos et d'avoir (voir [10]) le taux optimal de décroissance semblable au cas 1-dimension du problème

$$(P2) \qquad \begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} + a(x)\partial_t^{\alpha,\eta} u = 0, & \text{sur } \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \quad u_t(x,0) = u_1(x), & \text{sur } \Omega. \end{cases}$$

Un autre problème intéressant est d'obtenir une certaine estimation de l'énergie (peut être de type logarithmique) sous une condition faible sur le feedback (ce qui ne satisfait pas la condition du contrôle géométrique) comme dans [22, 33, 41].

Bibliographie

[1] Z. Achouri, N. Amroun and A. Benaissa, *The Euler-Bernoulli beam equation with boundary dissipation of fractional derivative type,* Math. Methods Appl. Sci **40**(11), (2017), 3837-3854.

[2] R.A. Adams, *Sobolev spaces,*, Academic Press, New-York, 1975.

[3] M. Akil, *Some problems of direct and indirect stabilization of wave equations with locally boundary fractional damping or with localised Kelvin-Voigh,*, General Mathematics [Math.GM]. Université de limoges, 2017. English.<NNT : 2017LIMO0043>. <tel-01619455>.

[4] W. Arendt and C. J. K. Batty, *Tauberian theorems and stability of one-parameter semigroups,* Trans. Am. Math. Soc., **306**, (1988), pp. 837-852.

[5] H. Attouch, Giuseppe Buttazzo, Gérard Michaille, *Analysis in Sobolev and BV Spaces Applications to PDEs and Optimization,*,

[6] R. L. Bagley and P. J. Torvik, Fractional calculus-*A different approach to the analysis of viscoelastically damped structures, AIAA J.* **21**, (1983), 741-748.

[7] R. L. Bagley and P. J. Torvik, *On the appearance of the fractional derivative in the behavior of real material, J. Appl. Mech.* **51**, (1983), 294-298.

[8] R. L. Bagley and P. J. Torvik, *A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity, J. Rheology.* **27**, (1983), 201-210

[9] V. Barbu, *Partial Differential Equations and Boundary Value Problems,*, Springer- Science+ Business Media, B.V 1998.

[10] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, *Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary,* SIAM J. Control Optimization **30**(5), (1992), 1024-1065.

[11] C. J. K. Batty, R. Chill and Y. Tomilov, *Fine scales of decay of operator semigroups,* J. Eur. Math. Soc. (JEMS) **18**(4), (2016), 853-929.

[12] C.J.K. Batty and T. Duyckaerts, *Non-uniform stability for bounded semigroups on Banach spaces,*, J. Evol. Equ. **8**(4), (2008), 765-780.

[13] A. Benaissa and H. Benkhedda, *Global existence and energy decay of solutions to a wave equation with a dynamic boundary dissipation of fractional derivative type,* Submitted.

[14] A. Benaissa and S. Rafa, *Well-posedness and energy decay of solutions to a wave equation with a general boundary control of diffusive type,* Math. Nachr. **292**(8), (2019), 1644-1673.

[15] M. Berbiche, *asymptotic behavior of solutions for linear evolutionary boundary value problem of viscoelastic damped wave equation,* Mathematica Bohemica, In Press, doi : 10.21136/MB.2019,0054-18.

[16] N. H. Bingham, C. M. Goldie and J. L. Teugels, *Regular variation,* Encyclopedia of Mathematics and its Applications **27**, Cambridge University Press, Cambridge, (1987).

[17] E. Blanc, G. Chiavassa and B. Lombard, *Biot-JKD model : Simulation of 1D transient poroelastic waves with fractional derivatives,* J. Comput. Phys., **237**, (2013), 1-20.

[18] A. Borichev and Y. Tomilov, *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups,* Math. Ann **347**(2), (2010), 455-478.

[19] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Théorie et Applications,*, Masson Paris New-York 1987

[20] H. Brézis, *Operateurs Maximaux Monotones et semi-groupes de contractions dans les espaces de Hilbert,* Notas de Matemàtica (50), Universidade Federal do Rio de Janeiro and University of Rochester, North-Holland, Amsterdam, (1973).

[21] V. V. Buldygin and V. V. Pavlenkov, *Karamata theorem for regularly log-periodic functions,* Ukrainian Math. J., **64**(11), (2013) :1635-1657.

[22] N. Burq, *Décroissance de l'énergie locale de l'équation des ondes pour le problème extérieur et absence de résonance au voisinagage du réel,* Acta Math., **180**, (1998), 1-29 (France).

[23] M. M. Cavalcanti, V. D. Cavalcanti and M. L. Santos, *Existence and uniform decay rates of solutions to a degenerate system with memory conditions at the boundary,* Appl. Math. Comput. **150**(2), (2004), 439-465.

[24] G. Chen, *Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain, Part I,* SIAM J. Control Optim., **17**, (1979), 66-81.

[25] G. Chen, *Control and stabilization for the wave equation in a bounded domain, Part II,* SIAM J. Control Optim., **19**, (1981),114-122.

[26] J. U. Choi and R. C. Maccamy, *Fractional order Volterra equations with applications to elasticity,* J. Math. Anal. Appl., **139**, (1989), 448-464.

[27] P. Cornilleau, *Inégalités de Rellich et de Carleman ; applications à la stabilisation et au contrôle des équations aux dérivées partielles,* Ph.D Thesis, (2009).

[28] W. Desch, E. Fašangová, J. Milota and G. Propst, *Stabilization through viscoelastic boundary damping : a semigroup approach,* Semigroup Forum, **80**(3), (2010), 405-415.

[29] W. Desch, E. Fašangová, J. Milota and G. Propst, *Spectrum of a viscoelastic boundary damping model,* J. Integral Equations Appl., **23**(4), (2011), 521-539.

[30] J. Dieudonné, *Calcul infinitésimal, Collection Méthodes,* Herman, Paris, (1968).

[31] R. Dautray, Jacques-Louis Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Tehnology,*, Volume 2 Functional and variational methods, Springer.2000.

[32] S. Dragoslav. Mitrinovic, J. D. KecKic, *The Cauchy Method of Residues, Theory and Applications,*,Mathematics and its Applications. Springer 1984.

[33] X. Fu, *Logarithmic decay of hyperbolic equations with arbitrary small boundary damping,* Communications in PDEs, **34**, (2009), 957-975.

[34] A. Haraux, *Stabilization of trajectories for sonie weakly damped hyperbolic equations,* J. Differential Equations **59**, (1985),145-154.

[35] P. Kevei, *Regularly log-periodic functions and some applications,* arXiv : 1709.01996v1.

[36] V. Komornik, *Exact Controllability and Stabilization. The Multiplier Method*, Masson-John Wiley, Paris, 1994.

[37] V. Komornik, Zuazua, *A constructive approach for the observability of coupled linear systems,* ESAIM Procedings volume : 4 .issues : 171-179, EDP Sciences.1998.

[38] Z.-Hua Luo, Bao-Zhu Guo and O. Morgul,*Stability and Stabilization of infinite Dimentional Systems with Applications,*, 629.836 ,Springer-Verlag London 1999

[39] W. Liu, *Elementary feedback stabilization of the linear reaction-convection-diffusion equation and the wave equation,*, 2010 Springer Heidelberg Dordrecht London New-York.

[40] G. Lebeau, *Equations des ondes amorties,* Algebraic Geometric Methods dans Maths. Physics, (1996), 73-109.

[41] G. Lebeau and L. Robbiano, *Stabilisation de l'équation des ondes par le bord,* Duke Math. J. **86**(3), (1997), 465-491.

[42] N. Lerner, *Carleman Inequalities An introduction and more ,* Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 353.

[43] J.L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et Applications,*, Tome 1,Dunod 1968.

[44] I. Lyubich Yu and Q.P. Vu, *Asymptotic stability of linear differential equations in Banach spaces, Studia Mathematica,* **88**(1), (1988), 37-42.

[45] Z. Lu, S. Zheng, *Semigroups associated with dissipative systems,*, Direct all inquiries to CRC press LLC, 2000 Corporate Blvd., N.W., Boca Raton, Florida 33431.

[46] B. Mbodje, *Wave energy decay under fractional derivative controls,* IMA J. Math. Control Inform. **23**, (2006), 237-257.

[47] B. Mbodje, G. Montseny, *Boundary fractional derivative control of the wave equation,*, IEEE Trans. on Automa. Control **40**, (1995), 368-382.

[48] F. Mainardi and E. Bonetti, *The applications of real order derivatives in linear viscoelasticity,*, Rheol. Acta **26**, (1988), 64-67.

[49] F. Huang, *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces,* Ann. Differ. Equ., **1**, (1985), 43-55.

[50] J.Necas, *Les méthodes directes en théorie des équations elliptiques,*, Masson, Paris, 1967

[51] J.R. Partington - *Linear operators and linear systems An analytical approach to control theory,* (2004, CUP)- London Mathematical Society student Texts 60

[52] I. Podlubny, *Fractional differential equations, Mathematics in Science and Engineering,* **198**, (1999), Academic Press.

[53] G. Propst and J. Prüss, *On wave equations with boundary dissipation of memory type,* J. Integral Equations Appl., **8**(1), (1996), 99-123.

[54] J. Prüss, *On the spectrum of C_0-semigroups,*, Trans. Amer. Math. Soc. **284**(2), (1984), 847-857.

[55] J. Rozendaal, D. Seifert et R. Stahn, *Optimal rates of decay for operator semigroups on Hilbert spaces,* arXiv :1709.08895.

[56] S.G. Samko, A.A. Kilbas, O.I. Marichev, *Fractional integrals andderivatives,* Amsterdam : Gordon and Breach (1993) [Engl. Trans. from the Russian (1987)].

[57] E. Seneta, Regularly Varying Functions. Lecture Notes in Math. 508, Springer, Berlin (1976) Zbl 0324.26002 MR 0453936.

[58] R. Stahn, *On the decay rate for the wave equation with viscoelastic boundary damping,* arXiv : 1701.01013v1.

[59] M. Vuilleumier, *Slowly varying functions in the complex plane,*, Trans. Amer. Math. Soc. **218**,(1976), 343-348.

[60] C. Wagschal, *Fonctions holomorphes - Equations différentielles : Exercices corrigés,* Herman, Paris, 2003.

[61] D.V. Widder, The laplace Transform. Princeton Math. Ser. 6, Princeton Univ. Press, Princeton (1941) Zbl 0063.08245 MR 0005923.

[62] K. Wodarczyk, *The Rouché theorem for holomorphlc maps in complex Banach spaces,*, complex variables, theory and application : An international journal, 20 : 1-4, 71-73.