N° d'ordre : **08/2020-D/MT**

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

THESE de Doctorat en Sciences
Présentée pour l'obtention du grade de Docteur
En Mathématiques

Spécialité : Arithmétique, codage et combinatoire :
Théorie des Nombres

Par

MESSAHEL Abdelkader

Etude de certaines propriétés des polynômes de Bernoulli et d'Euler

Soutenue publiquement le 31 / 10 / 2020 devant le Jury

M. RAHMANI Mourad	**Maitre de conférences A**	**à l'USTHB**	**Président**
M. MIHOUBI Miloud	**Professeur**	**à l'USTHB**	**Directeur de thèse**
M. DERBAL Abdellah	**Professeur**	**ENS Kouba**	**Examinateur**
M. LAISSAOUI Diffalah	**Maitre de conférences A**	**UYFMédéea**	**Examinateur**
Mme ZERROUKHAT Scheherazade	**Maitre de conférences B**	**à l'USTHB**	**Invitée**

ETUDE DE CERTAINES PROPRIETES DES POLYNOMES DE BERNOULLI ET D'EULER

Abdelkader MESSAHEL

31 Octobre 2020

Table des matières

Remerciements

Bien évidemment, c'est à mon Directeur de thèse : Monsieur Miloud Mihoubi que vont mes premiers remerciements. Il a été pour moi, depuis le début de mon doctorat, et tout au long de ma thèse, un mentor remarquable. Il m'a montré comment construire mon intuition mathématique, comment prendre du recul, comment rédiger de manière lisible. Mais au-delà de ses indéniables qualités mathématiques, c'est par ses qualités humaines qu'il a su rendre ces années agréables et enrichissantes. Il a toujours été très attentif à ce que je ressentais, et pas seulement aux maths qui nous liaient formellement. Il m'est parfois arrivé au cours de ma thèse d'être démotivé mais, invariablement, en sortant de son bureau, j'étais de nouveau confiant et prêt à attaquer avec le sourire des questions passionnantes. Je souhaite lui exprimer ma très grande reconnaissance pour la finesse de sa maïeutique, sa capacité à comprendre la recherche de l'autre et l'enthousiasme dont il fait part, sa clairvoyance à déceler l'essentiel et le mineur, son habilité à dénouer les fils pour tirer le meilleur. L'introduction de ce manuscrit doit beaucoup à sa thèse sur les polynômes : c'est ici l'occasion de le remercier d'avoir écrit une centaine de pages qui se lisent presque comme un roman. Son amour pour la recherche est contagieux et fut déterminant pour l'avancement de mes travaux. Ma gratitude va en tout premier lieu vers lui, il m'a fait découvrir le monde de la recherche à travers des sujets originaux et intéressants. Je dois beaucoup à sa patience, au temps qu'il a pu me consacrer et aux conseils judicieux qu'il a su me procurer. Son encadrement sans faille m'aura permis de m'épanouir pleinement et je l'en remercie mille fois. Je lui suis aussi reconnaissant d'avoir su rester très disponible jusqu'à la fin de ma thèse, malgré une vie professionnelle chargée. Bref, un énorme merci !

Messieurs Mourad Rahmani, Abdellah Derbal, Diffalah Laissaoui et Mme Zerroukat Chahrazed ont accepté d'être rapporteurs de cette thèse. Je souhaite les remercier vivement ici pour le temps passé, pour leur enthousiasme. C'est pour moi un réel honneur qu'ils aient accepté cette tâche. La qualité de leur rélecture et leurs approches originales vis-à-vis de mes travaux m'ont donné de nouvelles perspectives dans mes recherches pour les années à venir. Je remercie aussi Monsieur Farid Bencherif, Melle Mora Mahloul pour leur soutien tout au long de cette année. Merci à toute l'équipe du laboratoire Récits, qui a été ma maison mathématique pendant ces années de thèse.

Je remercie tous mes amis matheux, qui m'ont aidé chacun à leur manière, dans un cadre mathématique ou non, qui m'ont soutenu de près ou de loin ; je le ferai de vive voix, et ce n'est pas ici le cadre adapté pour détailler tout ce qu'ils ont été pour moi, mais il est certain que leur amitié a été déterminante pendant ces années de thèse.

Je tiens à remercier également toute ma famille et en particulier ma chère épouse qui m'a beaucoup soutenu ainsi que mes enfants.

Notations

1. $\mathbb{N}$: l'ensemble des nombres entiers naturels,
2. $\mathbb{Z}$: l'ensemble des nombres entiers relatifs,
3. $\mathbb{Q}$: l'ensemble des nombres rationnels,
4. $\mathbb{R}$: l'ensemble des nombres réels,
5. $\mathbb{A}^*$: l'ensemble des éléments non nuls de $\mathbb{A}$,
6. $A[x]$: l'anneau des polynômes à une indéterminée x et à coefficients dans l'anneau A,
7. $\deg P$: le degré du polynôme P,
8. $B_n(.)$: le n-ième polynôme de Bernoulli,
9. $B_n^{(\alpha)}(.)$: le n-ième polynôme de Bernoulli d'ordre α,
10. $E_n(.)$: le n-ième polynôme d'Euler,
11. $E_n^{(\alpha)}(.)$: le n-ième polynôme d'Euler d'ordre α,
12. $B_n := B_n(0)$: le n-ième nombre de Bernoulli,
13. $E_n := 2^n E_n(\frac{1}{2})$: le n-ième nombre d'Euler,
14. $G_n(.)$: le n-ième polynôme de Génocchi,
15. $H_n(.)$: le n-ième polynôme d'Hermite,
16. $L_n(.)$: le n-ième polynôme de Laguerre,
17. $L_n^{(\alpha)}(.)$: le n-ième polynôme de Laguerre généralisé,
18. $T_n(.)$: le n-ième polynôme de Tchébychev de première espèce,
19. $U_n(.)$: le n-ième polynôme de Tchébychev de deuxième espèce,
20. $\mathcal{B}_{n,r}$: le n-ème nombre r-Bell,
21. $\left[{n \atop k}\right]$: nombres de Stirling non signés de première espèce,
22. $\left[{n \atop k}\right]_r$: nombres r-Stirling non signés de première espèce,
23. $\left\{{n \atop k}\right\}$: nombres de Stirling de deuxième espèce,

24. $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$: nombres r-Stirling de deuxième espèce,
25. $L\left(n,k\right)$: nombres de Lah,
26. $L_r\left(n,k\right)$: nombres r-Lah,
27. $\left\{A_n\left(.\right)\right\}_{n\geq 0}$: suite de polynômes d'Appell,
28. $L_n\left(.\right)$: polynômes de Laguerre,
29. $P_n\left(.\right)$: polynômes de Legendre,
30. $\mathcal{L}_m\left(z\right)=\sum_{k=0}^{m} L\left(m,k\right)z^k$: polynômes de Lah,
31. $\left(x\right)_n = x\left(x-1\right)\ldots\left(x-n+1\right)$ pour $n\geq 1$ et $\left(x\right)_0 = 1$,
32. $\left\langle x\right\rangle_n = x\left(x+1\right)\ldots\left(x+n-1\right)$ pour $n\geq 1$ et $\left\langle x\right\rangle_0 = 1$,
33. $B_{n,k}(x_1,x_{2,\ldots},x_{n-k+1})$: polynôme partiel de Bell,
34. $Y_n(x_1,x_{2,\ldots},x_n)$: polynôme complet de Bell,
35. $\mathcal{B}_{n,r}\left(.\right)$: polynômes r-Bell,
36. $[n]$: l'ensemble $\left\{1,2,\ldots,n\right\}$,
37. $\delta_{(i,j)} = \begin{cases} 1 & \text{si } i=j, \\ 0 & \text{si } i\neq j, \end{cases}$
38. $\lfloor x\rfloor$: le plus grand entier inférieur ou égal à x,
39. $D=\frac{d}{dx}$ est l'opérateur de dérivation,
40. $D_{x=a}f\left(x\right)=\frac{d}{dx}f\left(x\right)\big|_{x=a}$ est la valeur de la dérivée de $Df\left(x\right)$ au point $x=a$,
41. $D^n=\frac{d^n}{dx^n}$ est la n-ème dérivée,
42. $D^n_{x=a}f\left(x\right)=\frac{d^n}{dx^n}f\left(x\right)\big|_{x=a}$ est la valeur de la dérivée de $D^nf\left(x\right)$ au point $x=a$.

Introduction

Les fonctions génératrices sont un outil puissant pour résoudre des problèmes en théorie des nombres, en combinatoire, en algèbre, en théorie des probabilités et autres domaines des mathématiques. Un de ces avantages des fonctions génératrices est qu'une suite de nombres infinis peut être représentée sous la forme d'une seule expression. De nombreux auteurs ont étudié les fonctions génératrices et leurs propriétés et trouver des applications pour celles-ci, voir par exemple [16, 51]. Les fonctions génératrices ont un rôle important dans l'étude des polynômes. Plusieurs études liées aux fonctions génératrices de nombreux polynômes peuvent être trouvés dans plusieurs livres et articles. Une place particulière dans ce domaine est occupée par la recherche dans le domaine des identités pour les polynômes et les nombres spéciaux avec l'utilisation de leurs fonctions génératrices. Des résultats intéressants dans le domaine de l'obtention de nouvelles identités pour les polynômes peuvent se trouver dans plusieurs travaux.Une autre tendance dans l'étude des polynômes est d'obtenir une nouvelle représentation de formules explicites pour ces polynômes.

Les fonctions génératrices de suites spécifiées de polynômes comme ceux d'Hermite, Laguerre, Bell, Tchébychev, Jacobi et d'autres ont été étudiés par un grand nombre d'auteurs. Differentes méthodes et techniques ont été utilisées pour développer des relations, des identités ou des formules. Une des techniques, est basée sur la formule de Taylor Mac-Laurin d'une fonction f indéfiniment dérivable dans un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{(t-a)^n}{n!} D_{u=a}^n f(u).$$

Une deuxième technique est basée sur la formule d'inversion de Lagrange définie, pour la donnée des fonctions f, F analytiques dans un voisinage de zéro et de l'équation $z = tf(z)$, par

$$F(z) = F(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} D_{u=a}^{n-1} \left\{ F'(u) (f(u))^n \right\}.$$

Dans cette thèse, basée sur l'identité polynômiale établie ci-dessous, nous essayons de donner quelques formules pour les fonctions génératrices de polynômes. En effet soient n et m deux entiers naturels et z un nombre complexe, soit P_m un polynôme de degré $\leq m$, nous prouverons l'identité suivante :

$$P_m(z)=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^{n+k}k^n\binom{n+m+1}{k+1}P_m(-kz). \tag{1}$$

Nous utilisons cette identité pour établir une première formule sur les fonctions génératrices pour toute suite de polynômes et une autre formule établie en utilisant la formule de Melzak [26, 27] donnée, pour tout polynôme f de degré $\leq p$, par

$$f(x+\alpha)=\alpha\binom{\alpha+p}{p}\sum_{j=0}^{p}(-1)^j\binom{p}{j}\frac{f(x-j)}{\alpha+j}$$

où x et α sont des nombres complexes, avec $\alpha\neq -j,\;\; j=0,1,2,...,p.$

De nombreux articles sont consacrés à ces suites polynomiales ainsi qu'à leurs fonctions génératrices. Cette thèse est consacrée à une étude approfondie sur certains nombres et polynômes bien connus comme ceux d'Appell, Bernoulli, Euler, Génocchi, Hermite, Jacobi, Laguerre, Legendre et d'autres.

Dans le premier chapitre nous commençons par définir les polynômes d'Appell suivi d'une classe de ses polynômes. Nous entamerons ensuite les nombres et les polynômes de Bernoulli, d'Euler, ainsi que ceux de Génocchi et certains polynômes liés à la formule de Rodrigues comme ceux de Tchébychev, d'Hermite, de Jacobi, de Laguerre. Nous terminerons ce chapitre par des nombres et des polynômes de partitions tels que les nombres de stirling de première et seconde espèce, les r- Stirling, les Bell et r-Bell et les nombres de Lah.

Le deuxième chapitre portera essentiellement sur une étude des identités polynômiales préliminaires et secondaires. Il est dédié à l'énoncé des premiers résultats originaux ayant fait l'objet d'une publication. On commence par donner une identité polynômiale originaire et son rôle pour établir de nouvelles identités algébriques, analytiques et combinatoires. L'identité polynômiale principale est, pour tout polynôme P_m de degré $\leq m$, donnée par :

$$P_m(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^{n+k}k^n\binom{n+m+1}{k+1}P_m(x-(k+1)z).$$

Cette identité est enrichie par de nombreuses applications sur des différentes suites de nombres et de polynômes telles que

$$(B_{m,k}(\mathbf{a}))^r=\left(\frac{m!}{k!}\right)^r\sum_{j=0}^{(m-k)r}(-1)^j\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{(m-k)r+1}{j+1}\left(B_{m+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a})\right)^r$$

et

$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r}\frac{B_{m_i+k,k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k}{k}} &= \sum_{j=0}^{n}(-1)^j\binom{n+1}{j+1}\prod_{i=1}^{r}\frac{B_{m_i+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k+s(j+1)}{k+s(j+1)}},\\ n &= m_1+\cdots+m_r,\end{aligned}$$

où $B_{m,k}\left(\mathbf{a}\right)$ est le (m,k)-ème polynôme partiel de Bell.

Dans le troisième chapitre nous montrons deux formules sur les fonctions analytiques, dont la première formule est basée sur l'identité principale obtenue dans le deuxième chapitre et la deuxième est basée sur la formule de Melzak. On montre que pour toutes fonctions analytiques $E\left(.\right)$ et $F\left(.\right)$ définies par

$$E\left(t\right)=\sum_{n\geq0}a_{n}t^{n},\quad F\left(t;z\right)=\sum_{n\geq0}P_{n}\left(z\right)t^{n},\quad\left|t\right|<\mu,\quad\mu>0,$$

la première formule en question est donnée par :

$$\sum_{k\geq1}\frac{\left(-t\right)^{k}}{k!}D^{k}\left\{tE\left(-\left(k-1\right)t\right)F\left(t;-\left(k-1\right)z\right)\right\}=-tE\left(t\right)F\left(t;z\right).$$

On exploite ensuite la formule de Melzak pour établir une deuxième formule, donnée par :

$$\sum_{k\geq0}\frac{\left(-t\right)^{k}}{k!\left(k+s\right)}D^{k+s}\left\{t^{s}E\left(t\right)F\left(t;z-s-k\right)\right\}=E\left(t\right)F\left(t;z\right).$$

De nombreuses applications sur des choix de différentes fonctions analytiques complètent le chapitre trois, telles que les identités

$$\begin{aligned}
\sum_{k\geq0}\binom{\alpha}{k}\left(1-\binom{\alpha+1}{k+1}kt\right)\left(kt\right)^{k}\left(1-kt\right)^{\alpha-k} &= \left(1+t\right)^{\alpha},\quad t\in\left]-1,1\right[,\\
\sum_{k\geq1}\left(\left(\beta-\alpha(k-1)\right)t+k\right)\left(\beta-\alpha(k-1)\right)^{k-1}\frac{\left(-te^{-\alpha t}\right)^{k}}{k!} &= -t,\quad t\neq\frac{1}{\alpha}\\
\sum_{k\geq1}\left(k-1\right)^{k-1}\sin\left(\left(k-1\right)t-k\frac{\pi}{2}\right)\frac{t^{k}}{k!} &= -\sin t,\quad t\in\left]-e^{-1},e^{-1}\right[,\\
\sum_{k\geq0}\frac{\left(-t\right)^{k}}{k!}D^{k}\left\{t\cos\left(-\left(k-1\right)t\right)\right\} &= -t\cos t,
\end{aligned}$$

On terminera cette thèse par une conclusion.

Chapitre 1

Nombres et polynômes remarquables

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré à des définitions et propriétés de familles de nombres et polynômes remarquables. Il s'agit de préciser des définitions et de rappeler certaines propriétés qui nous seront utiles. C'est ainsi que nous examinerons des propriétés de nombreuses familles de nombres et de polynômes. Nous définirons tout d'abord la grande famille des suites de polynômes d'Appell. Parmi ces suites, on trouve la suite des polynômes de Bernoulli et d'Euler classiques ou généralisés, en précisant à ce propos leurs définitions ainsi que leurs propriétés. Notre étude portera ensuite sur les nombres et polynômes de Génocchi, de Tchébychev, d'Hermite, de Legendre, de Jacobi, de Laguerre, les nombres de Stirling de première et seconde espèce, les r-Stirling, les nombres et polynômes de Bell, de Lah ainsi que les polynômes partiels de Bell, et les polynômes partiels r-Bell.

1.2 Polynômes d'Appell

Appell Paul Emilie (1855-1930) est un mathématicien français qui s'est intéréssé aux suites de polynômes $(A_n(x)\,; n \in \mathbb{N})$ vérifiant les deux conditions suivantes :

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, le degré du polynôme $A_n(x)$ est égal à n.
2. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on a la relation

$$DA_n = nA_{n-1}.$$

Sa recherche a fait l'objet d'un article [3] publiée en 1880 et intitulée "*Sur une classe de polynômes*". En son honneur, de telles suites de polynômes sont appelées suites de polynômes d'Appell ou suite d'Appell. On peut donner de nombreuses formulations équivalentes à cette définition. Une suite d'Appell est une suite polynomiale $(A_n(x); n \in \mathbb{N})$ qui satisfait l'identité suivante :

$$DA_n(x) = nA_{n-1}(x), \quad n \in \mathbb{N}^* \text{ et } \; A_0(x) \neq 0. \tag{1.1}$$

La suite $(A_n(x); n \in \mathbb{N})$ des polynômes d'Appell a la fonction génératrice exponentielle de la forme

$$A(t)\exp(xt) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{1.2}$$

Les conditions suivantes sur les suites polynomiales peuvent être facilement vérifées, elles sont équivalentes :

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$,
$$DA_n(x) = nA_{n-1}(x) \quad \text{et} \quad A_0(x) \neq 0.$$
- Il existe une suite $(a_k; k \in \mathbb{N})$ de scalaires telle que $a_0 \neq 0$. et telle que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :
$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}. \tag{1.3}$$
- Il existe une suite $(a_k; k \in \mathbb{N})$ de scalaires telle que l'on ait
$$A_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!} D^k\right) x^n. \tag{1.4}$$

Pour $n \in \mathbb{N}$, on a $A_0(x) \neq 0$ et

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(x)\, y^{n-k}. \tag{1.5}$$

Notons que si $A(0) \neq 0$, le n-ème polynôme d'Appell $A_n(x)$ est de degré n.
Suivant la fonction $A(.)$, plusieurs polynômes connues dans la littérature sont de type Appell dont on cite :

- pour $A(t) = \frac{t}{e^t-1}$ on retrouve la suite $(B_n(x); n \in \mathbb{N})$ des polynômes de Bernoulli de première espèce,
- pour $A(t) = \frac{2}{e^t+1}$ on retrouve la suite $(E_n(x); n \in \mathbb{N})$ des polynômes d'Euler,
- pour $A(t) = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}$ on retrouve la suite $\left(B_n^{(\alpha)}(x); n \in \mathbb{N}\right)$ des polynômes de Bernoulli d'odre α,
- pour $A(t) = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha}$ on retrouve la suite $\left(E_n^{(\alpha)}(x); n \in \mathbb{N}\right)$ des polynômes d'Euler d'odre α,
- pour $A(t) = \frac{2t}{e^t+1}$ on retrouve la suite $(G_n(x); n \in \mathbb{N})$ des polynômes de Génocchi,
- pour $A(t) = 1$ on retrouve la suite (x^n).

1.3 Nombres et polynômes de Bernoulli

Les nombres et les polynômes de Bernoulli de première espèce ont fait l'objet d'études approfondies au cours des deux derniers siècles, tous deux pour leurs nombreuses applications importantes en théorie des nombres, en combinatoire et en analyse numérique, et d'autres domaines des mathématiques pures et appliquées, et de leurs riches structures en tant qu'objets mathématiques très fréquentés, voir par exemple [9, 16].

Définition 1 *La suite* $(B_n; n \in \mathbb{N})$ *des nombres de Bernoulli est définie par sa fonction génératrice exponentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}. \tag{1.6}$$

Les nombres de Bernoulli sont rationnels et ses premiers nombres sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
B_n	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$

et par le fait que

$$(e^z - 1) \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = z \tag{1.7}$$

il s'ensuit que la suite des nombres de Bernoulli vérifie la relation

$$B_0 = 1 \text{ et } B_n = -\frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.8}$$

Aussi, il est simple de vérifier que la fonction

$$F(z) = 1 + \sum_{n=2}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = z \left(\frac{e^z + 1}{e^z - 1} \right)$$

est une fonction paire, duquelle il résulte

$$B_n = (-1)^n B_n, \quad n \in \mathbb{N} - \{1\}, \tag{1.9}$$

ou encore

$$B_{2k+1} = 0, \quad k \in \mathbb{N}^*. \tag{1.10}$$

Il est à noter que la relation (1.9) puisse ainsi être mise sous forme

$$(-1)^n B_n = B_n + \delta_{(n,1)}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.11}$$

Définition 2 *La suite* $(B_n(x)\,; n \in \mathbb{N})$ *des polynômes de Bernoulli est définie par sa fonction génératrice exponentielle*

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{z^n}{n!} = \frac{e^z}{e^z-1}e^{xz}. \tag{1.12}$$

Cette définition nous permet de déduire que l'écriture du n-ème polynôme de Bernoulli dans la base

$$\{1, x, \ldots, x^n\}$$

est

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}x^k$$

et que le n-ème nombre de Bernoulli B_n est tel que

$$B_n = B_n(0), \quad n \in \mathbb{N}.$$

De plus, la fonction génératrice ou la relation de récurrence nous permettent de déduire que le n-ème polynôme de Bernoulli est de degré n et que les premiers polynômes de Bernoulli pour les indices $n \leq 8$:

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1,\\
B_1(x) &= x-\frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2-x+\frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{x}{2},\\
B_4(x) &= x^4-2x^3+x^2-\frac{1}{30},\\
B_5(x) &= x^5-\frac{5}{2}x^4+\frac{5}{3}x^3-\frac{1}{6}x,\\
B_6(x) &= x^6-3x^5+\frac{5}{2}x^4-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{42},\\
B_7(x) &= x^7-\frac{7}{2}x^6+\frac{7}{2}x^5-\frac{7}{6}x^3+\frac{1}{6}x,\\
B_8(x) &= x^8-4x^7+\frac{14}{3}x^6-\frac{7}{3}x^4+\frac{2}{3}x^2-\frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

A l'aide de la fonction génératrice des polynômes de Bernoulli, on déduit aussi les propriétés suivantes :

$$B_n(x) = (-1)^n B_n(1-x), \; n \in \mathbb{N}, \quad \text{et} \quad B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}, \quad n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.13}$$

1.4 Nombres et polynômes d'Euler

Définition 3 *La suite $(E_n; n \in \mathbb{N})$ des nombres d'Euler est définie par sa fonction génératrice exponentielle donnée par :*

$$\frac{1}{\cosh z} = \frac{2e^z}{e^{2z}+1} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!}.$$

Les nombres d'Euler sont aussi rationnels positifs et dont les premières valeurs sont :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
E_n	1	0	-1	0	5	0	-61	0	1385	0	-50521

Les nombres d'Euler d'indice impair sont tous nuls et ceci par le fait que la fonction $1/\cosh z$ est paire.

Définition 4 *La suite $(E_n(x); n \in \mathbb{N})$ des polynômes d'Euler est définie par sa fonction génératrice exponentielle*

$$\frac{2}{e^z+1} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!}, \qquad |z| < 1.$$

De cette définition, il s'en suit que la suite des polynômes d'Euler obeit à la relation de récurrence :

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(0) x^{n-k},$$

et du fait que

$$\frac{2}{e^z+1} = 1 - \frac{e^z-1}{e^z+1} = 1 - \tanh \frac{z}{2},$$

il découle que

$$E_{2n}(0) = 0, \quad n \geq 1.$$

De plus, par le fait que

$$(e^z+1) \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = 2e^{xz}, \tag{1.14}$$

on déduit que pour tout entier naturel n on a

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x) + E_n(x) = 2x^n. \tag{1.15}$$

Cette dernière relation de récurrence nous fournit l'identité suivante :

$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x), \quad n \geq 0. \tag{1.16}$$

Les premiers polynômes d'Euler pour les indices $n \leq 7$:

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= 1, \\
E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
E_2(x) &= x^2 - x, \\
E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\
E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x\ , \\
E_5(x) &= x^5 - \frac{5}{2}x^4 + \frac{5}{2}x^2 + \frac{1}{2}, \\
E_6(x) &= x^6 - 3x^5 + 5x^3 - 3x, \\
E_7(x) &= x^7 - \frac{7}{2}x^6 + \frac{35}{4}x^4 - \frac{21}{2}x^2 + \frac{17}{8}.
\end{aligned}$$

On remarque que les dénominateurs des coefficients de $E_{2k+1}(x)$ sont des puissances de 2, et les coefficients des polynômes $E_{2k}(x)$ sont entiers. De plus, pour tout entier naturel n on a

$$E_n(t+1) + E_n(t) = 2t^n. \tag{1.17}$$

qui découlent du développement dans les égalités

$$\frac{2}{e^x+1}e^{x(t+1)} + \frac{2}{e^x+1}e^{xt} = 2e^{xt} \quad \text{et} \quad \frac{2}{e^{-x}+1}e^{-xt} = \frac{2}{e^x+1}e^{x(1-t)}. \tag{1.18}$$

1.5 Nombres et polynômes de Génocchi

Définition 5 *Les nombres de Génocchi sont définis par la série génératrice*

$$G(z) := \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2z}{e^z+1} = z - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - 3\frac{z^6}{6!} + 17\frac{z^8}{8!} - 155\frac{z^{10}}{10!} + \cdots .$$

Les nombres de Génocchi satisfont

$$G_0 = 0, \quad G_1 = 1 \text{ et } G_{2n+1} = 0 \quad \text{pour} \quad n \geq 1,$$

et s'expriment à l'aide des nombres et les polynômes d'Euler par

$$G_n = 2(1-2^n)B_n = nE_{n-1}(0) \quad \text{pour } n \geq 1,$$

qui découlent, du développement :

$$G(z) = z - z\tanh\left(\frac{z}{2}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} 2\left(2^{2n}-1\right)B_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}.$$

Définition 6 *Les polynômes de Génocchi sont définis par la fonction génératrice :*

$$G(z) = \frac{2z}{e^z + 1} e^{xz} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!},$$

ou par la relation de récurrence

$$G_n = G_n(0) \quad et \quad G_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_k x^{n-k}.$$

Les polynômes de Génocchi pour les indices $n \leq 6$ sont donnés comme suit

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= 0, \\
G_1(x) &= 1, \\
G_2(x) &= 2x - 1, \\
G_3(x) &= 3x^2 - 3x, \\
G_4(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 1, \\
G_5(x) &= 5x^4 - 10x^3 + 5x, \\
G_6(x) &= 6x^5 - 15x^4 + 15x^2 - 3.
\end{aligned}$$

Les coefficients de $G_n(x)$ sont entiers puisque les nombres de Génocchi sont entiers et le polynôme $G_n(x)$ est de degré $(n-1)$. Aussi, par définition, on peut vérifier que

$$G_n(x) = nE_{n-1}(x) = DE_n(x), \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.6 Polynômes liés à la formule de Rodrigues

1.6.1 Polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce

Introduction

"Isoler les mathématiques des demandes pratiques des autres sciences revient à provoquer la stérilité d'une vache en l'éloignant des taureaux."

Pafnouti Lvovitch Tchébychev.

(Okatovo 1821- Saint Petersbourg 1894)

Définition 7 *On appelle polynôme de Tchébychev de première espèce de degré n l'application :*

$$\begin{aligned}
T_n \quad &: \quad [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}, \\
x \quad &\longmapsto \quad \cos(n \arccos x), \qquad n \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

Cette définition montre que ces polynômes obéissent à la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_{n+1}(x) &= 2xT_n(x) - T_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

En utilisant cette relation de récurrence, il s'ensuit que les premiers polynômes de Tchébychev de première espèce pour les indices $n \leq 5$:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1, \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x, \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1, \\ T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x, \end{aligned}$$

Cette suite de polynômes est de série génératrice ordinaire donnée par :

$$\sum_{k=0}^{\infty} T_k(x)\, t^k = \frac{1 - tx}{1 - 2tx + t^2}.$$

Définition 8 *Les polynômes de Tchébychev de seconde espèce sont définis par la même relation que ceux du première espèce, avec des termes differents c'est-à-dire*

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_{n+1}(x) &= 2xU_n(x) - U_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Par récurrence sur n, il résulte que U_n est un polynôme de degré n. Les premiers polynômes de Tchébychev de deuxième espèce pour les indices $n \leq 5$:

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_4(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1, \\ U_5(x) &= 32x^5 - 32x^3 + 6x. \end{aligned}$$

Cette suite de polynômes est de série génératrice ordinaire donnée par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} U_n(x)\, t^n = \frac{1}{1 - 2xt + t^2}.$$

1.6.2 Nombres et polynômes d'Hermite

Définition 9 *Les polynômes d'Hermite $H_n(x)$ sont définis par la fonction génératrice suivante*

$$H(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} H_n(x)\, t^n = e^{-2xt-t^2} \tag{1.19}$$

et le n-ème nombre d'Hermite H_n est défini par

$$H_n = H_n(0).$$

Les premiers nombres d'Hermite pour les indices $n \leq 7$:

n	0	1	2	3	4	5	6	7
H_n	1	0	-2	0	12	0	-1	0

Les polynômes d'Hermite, du nom de Charles Hermite satisfont la formule de Rodrigues.

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} D^n \left(e^{-x^2}\right), \quad n \in \mathbb{N} \tag{1.20}$$

et la relation de récurrence

$$H_{n+1}(x) + nH_{n-1}(x) = xH_n(x), \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Ils admettent comme expression explicite

$$H_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^n\, n!}{k!\,(n-2k)!} (2x)^{n-2k}. \tag{1.21}$$

Les premiers polynômes d'Hermite pour les indices $n \leq 6$:

$$\begin{aligned}
H_0(x) &= 1, \\
H_1(x) &= 2x, \\
H_2(x) &= 4x^2 - 2, \\
H_3(x) &= 8x^3 - 12x, \\
H_4(x) &= 16x^4 - 48x^2 + 12, \\
H_5(x) &= 32x^5 - 160x^3 + 120x, \\
H_6(x) &= 64x^6 - 480x^4 + 720x^2 - 120.
\end{aligned}$$

1.6.3 Nombres et polynômes de Jacobi

Les polynômes de Jacobi $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ font partis également d'une classe de polynômes orthogonaux. Ils sont obtenus à partir des séries hypergéométriques.

Soit $\left(P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,; n \in \mathbb{N}\right)$ la suite des polynômes de Jacobi définis par

$$P_n^{(\alpha,.\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!\,(1-x)^{\alpha}(1+x)} D^n\left[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}\right] \tag{1.22}$$

tels que α, β sont deux paramétres vérifient des conditions d'orthogonalité $\alpha > -1$, $\beta > -1$. Le polynôme $P_n^{(\alpha,.\beta)}(x)$ satisfont l'équation differentielle linéaire homogéne de deuxiéme ordre suivante :

$$\left(1-x^2\right)y'' + (\beta - \alpha - (\alpha+\beta+2)\,x)\,y' + n\,(n+\alpha+\beta+1)\,y = 0$$

et que toute solution polynomiale y de cette équation est un multiple de $P_n^{(\alpha,.\beta)}(x)$.

Pour $\alpha = \beta = 0$ on obtient les polynômes de Legendre.

Pour $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ on obtient les polynômes de Tchébychev.

Posons

$$R = \left(1 - 2xu + u^2\right)^{1/2}, \tag{1.23}$$

La fonction génératrice ordinaire des polynômes de Jacobi est donnée par

$$\sum P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,u^n = 2^{\alpha+\beta}R^{-1}(1-u+R)^{-\alpha}(1+u+R)^{-\beta}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{1.24}$$

Plusieurs démonstrations de la fonction génératrice ordinaire sont connues dans la littérature, voir par exemple [5, 13, 43, 45, 48]. En outre, on a

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \sum_{n-j \geq 0} \binom{n+\alpha}{n-j}\binom{n+\beta}{j}\left(\frac{x-1}{2}\right)^j\left(\frac{x+1}{2}\right)^{n-j}, \quad 0 \leq j \leq n. \tag{1.25}$$

Cas particulier : Nombres et polynômes de Legendre

Les polynômes $P_n(x)$ de Legendre constituent la suite la plus simple des polynômes orthogonaux sur l'intervalle $[-1;1]$. Ils sont définis par leur fonction génératrice ordinaire :

$$\sum_{n=0}^{\infty} P_n(x)\,t^n = \frac{1}{\sqrt{(1-2xt+t^2)}}, \qquad |t| < 1, \quad |x| \leq 1. \tag{1.26}$$

Ces polynômes sont donnés explicitement par la formule de Rodrigues suivante.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} D^n\left(\left(x^2-1\right)^n\right),$$

ou encore par l'expression suivante :

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \frac{(-1)^k (2n-2k)!}{2^n k! (n-k)! (n-2k)!} (x)^{n-2k}.$$

Ceci montre que $\deg P_n = n$. En outre on peut utiliser la formule de Leibnitz :

$$\begin{aligned} P_n(x) &= \frac{1}{2^n n!} D^n \left((x-1)^n (x+1)^n \right) \\ &= \frac{1}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (x)_k (x-1)^{n-k} (x)_{n-k} (x+1)^k \\ &= \frac{(x-1)^n}{2^n n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \frac{n!}{(n-k)!} \frac{n!}{k!} \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k \\ &= \frac{(x-1)^n}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 \left(\frac{x+1}{x-1} \right)^k \end{aligned}$$

Comme toute famille de polynômes orthogonaux, les polynômes de Legendre vérifient certaines propriétés :

$$\begin{aligned} (n+1) P_{n+1}(x) - (2n+1) x P_n(x) + n P_{n-1}(x) &= 0 \\ P_n(-x) &= (-1)^n P_n(x) \end{aligned}$$

En particulier

$$P_n(-1) = (-1)^n$$

Par ailleurs $P_n(x)$ est solution de l'équation differentielle de Legendre

$$\left(1 - x^2\right) y'' - 2xy' + n(n+1) y = 0.$$

Les premiers polynômes de Legendre pour les indices $n \leq 5$:

$$\begin{aligned} P_0(x) &= 1, \\ P_1(x) &= x, \\ P_2(x) &= \frac{1}{2}\left(3x^2 - 1\right), \\ P_3(x) &= \frac{1}{2}\left(5x^3 - 3x\right), \\ P_4(x) &= \frac{1}{8}\left(35x^4 - 30x^2 + 3\right), \\ P_5(x) &= \frac{1}{8}\left(63x^5 - 70x3 + 15x\right). \end{aligned}$$

1.6.4 Nombres et polynômes de Laguerre

Le n-ème polynôme de Laguerre $L_n(x)$, nommé d'aprés Edmond Laguerre (1834-1886), est la solution polynômiale de l'équation différentielle linéaire du second ordre

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0.$$

Parfois, le nom de polynômes de Laguerre ou Laguerre généralisé, est utilisé pour la solution polynomiale de l'équation différentielle

$$xy'' + (\alpha + 1 - x)y' + ny = 0,$$

où α est un réel donné.
Le n-ème polynôme de Laguerre peut être ainsi défini par la formule de Rodrigues,

$$L_n(x) = \frac{e^x}{n!} D^n \left(e^{-x} x^n\right)$$

dont on tire son expression exacte

$$L_n(x) = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n)_k \, x^k$$

Les premiers polynômes de Laguerre pour les indices $n \leq 3$:

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= -x + 1, \\ L_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2 - 4x + 2\right), \\ L_3(x) &= \frac{1}{6}\left(-x^3 + 9x^2 - 18x + 6\right). \end{aligned}$$

Ces polynômes obeissent à la relation de récurrence suivante

$$\begin{aligned} L_0(x) &= 1, \\ L_1(x) &= 1 - x, \\ L_{n+1}(x) &= (2n + 1 - x) L_n(x) - n^2 L_{n-1}(x), \quad n \geq 1. \end{aligned}$$

Les polynômes de Laguerre généralisés sont définis par la fonction génératrice suivante [4, 14, 25]

$$\sum_{n=0}^{\infty} L_n^{(\alpha)}(x) \, t^n = \frac{1}{(1-t)^{\alpha+1}} e^{\frac{tx}{t-1}}, \quad [t] < 1. \tag{1.27}$$

Les premiers polynômes de Laguerre généralisés sont :

$$
\begin{aligned}
L_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
L_1^{(\alpha)}(x) &= -x+\alpha+1, \\
L_2^{(\alpha)}(x) &= \frac{x^2}{2}-(\alpha+2)\,x+\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)}{2}, \\
L_3^{(\alpha)}(x) &= -\frac{x^3}{6}+\frac{(\alpha+3)}{2}x^2-\frac{(\alpha+2)(\alpha+3)\,x}{2}+\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{6}.
\end{aligned}
$$

Les polynômes de Laguerre généralisés satisfont les relations suivantes

$$
\begin{aligned}
L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n+\alpha}{n-k}\frac{(-x)^k}{k!}, \\
L_n^{(\alpha+\beta+1)}(x+y) &= \sum_{k=0}^{n} L_k^{(\alpha)}(x)\,L_{n-k}^{(\beta)}(y), \\
L_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} L_{n-k}^{(\alpha)}(x)\,\frac{(y-x)^k}{k!}.
\end{aligned}
$$

1.7 Nombres et polynômes de partitions

1.7.1 Nombres de Stirling de première espèce

Définition 10 *Le nombre de Stirling de première espèce, noté* $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ *compte le nombre de permutations de l'ensemble* $[n]$ *ayant exactement* k *cycles,* $0 \leq k \leq n$

Définition 11 *Les nombres de Stirling (non signés) de première espèce sont, par définition, les nombres entiers*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad n \geq k \geq 0.$$

qui figurent dans le développement du polynôme $(x)_n$. *On a précisément pour tout* $n \in \mathbb{N}$:

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k. \tag{1.28}$$

Pour tous $n, k \in \mathbb{N}$, avec $k \leq n$, on a

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix} &= 0, \quad n \geq 1 \\ \begin{bmatrix} n \\ n \end{bmatrix} &= 1, \quad n \geq 0 \\ \begin{bmatrix} n \\ 1 \end{bmatrix} &= (n-1)!, \ \ n \geq 1 \\ \sum_{k=1}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} &= n!, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

Cette suite de nombres obeit à la relation de recurrence [16]

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix} + n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \quad n \geq k \geq 0 \tag{1.29}$$

et de fonction génératrice exponentielle :

$$\sum_{n=k}^{\infty} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(-\log\left(1-t\right)\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1.30}$$

Les nombres r-Stirling représentent une certaine généralisation des nombres de Stirling qui, selon Lo Tweedic [49], ont été ainsi nommés par Nielsen [39] en l'honneur de James Stirling, qui les a calculés dans son livre édité en 1730 et intitulé "Methodus Differentialis", [46]. De bonnes expositions des propriétés des nombres de Stirling se trouvent par exemple dans [16, chap5], [22, ch 4], et [44]. Les nombres r-Stirling introduit par Broder [12], représentent une extension des nombres de Stirling, dont on distingue deux espèces. Les propriétés combinatoires et algébriques de ces nombres, qui génèrent dans la plupart des cas des propriétés similaires aux nombres de Stirling.

Définition 12 *Les nombres r-Stirling de première espèce non signés notés $\begin{bmatrix} n \\ m \end{bmatrix}_r$, sont les coefficients de l'expression $(-1)^n \left(-x\right)_n$ dans la base*

$$\{1-r, x-r, ..., (x-r)^n\}$$

c'est à dire :

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r (x+r)^k$$

où le nombre $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ compte le nombre de permutations ayant k cycles de l'ensemble $[n]$ tels que les nombres $1, 2, ..., r$ soient dans des cycles distincts. Les nombres r-Stirling de première *espèce satisfont la relation de récurrence suivante*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r = 0, \; n < r \; ou \; n < k \; ou \; k < r,$$

$$\begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix}_r = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r + n \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix}_r, \quad n \geq k \geq r \geq 0.$$

et admettent la fonction génératrice suivante :

$$\sum_{n \geq k} \begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\frac{1}{1-t} \right)^r \left(\ln \left(\frac{1}{1-t} \right) \right)^k, \quad k \geq 0.$$

1.7.2 Nombres de Stirling de seconde espèce

Définition 13 *Le nombre de Stirling de seconde espèce, noté* $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}$ *compte le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *sous ensembles non vides,* $0 \leq k \leq n$.

Les nombres de Stirling de deuxième espèce sont, par définition, les nombres naturels

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}, \quad k \in \{0, 1, \ldots, n\},$$

qui figurent dans l'écriture de x^n dans la base polynomiale

$$\{1, x, \; (x)_2, \ldots, (x)_n\},$$

i.e.

$$x^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} (x)_k . \tag{1.31}$$

On a

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 0 \end{matrix} \right\} = \delta_{(n,0)}, \quad n \geq 0,$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n \\ n \end{matrix} \right\} = 1, \quad n \geq 1,$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ 2 \end{matrix} \right\} = 2^{n-1} - 1, \quad n \geq 2,$$

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ n-1 \end{matrix} \right\} = \binom{n}{2}, \quad n \geq 2.$$

Ces nombres obéissent à la relation de recurrence [16]

$$\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k-1 \end{matrix} \right\} + k \left\{ \begin{matrix} n-1 \\ k \end{matrix} \right\}, \quad n \geq k \geq 1 \tag{1.32}$$

et admettent comme fonction génératrice exponentielle [16]

$$\sum_{n=k}^{\infty} \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\} \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(e^t - 1\right)^k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Définition 14 *Les nombres r-Stirling du deuxième espèce, notés* $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$, *les coefficients du polynôme* $(x+r)^n$ *dans la base*

$$\{1, x, ..., (x)_n\}$$

c'est à dire

$$(x+r)^n = \sum_{k=0}^{n} \left\{ \begin{matrix} n+r \\ k+r \end{matrix} \right\}_r (x)_k$$

Le nombre $\left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r$ *compte le nombre de partitions de l'ensemble* $[n]$ *en* k *sous ensembles non vides, tels que les nombres* $1, 2, ..., r$ *soient dans des sous ensembles distincts. Ces nombres satisfont la relation récursive suivante :*

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r &= \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r + (k+1) \left\{ \begin{matrix} n \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r, \quad n \geq k \geq r \geq 0, \\ \left\{ \begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right\}_r &= 0 \text{ si } n < r \text{ ou } n < k \text{ ou } k < r. \end{aligned}$$

Corollaire 15 *Les nombres r-Stirling de seconde espèce ont pour fonction génératrice :*

$$\sum_{n \geq k} \left\{ \begin{matrix} n+1 \\ k+1 \end{matrix} \right\}_r \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{rt}\left(e^t - 1\right)}{k!}, \ k \geq 0$$

1.7.3 Nombres et polynômes de Lah

Les nombres de Lah $L(n,k)$ (nommé Ivo Lah, un mathématicien slovénien) sont définis par la formule :

$$\begin{aligned} L(0,0) &= 1, \\ L(n,k) &= \frac{n!}{k!} \binom{n-1}{k-1}, \quad n \geq k \geq 1, \end{aligned}$$

où, par la fonction génératrice

$$\frac{1}{k!} \left(\frac{t}{1-t}\right)^k = \sum_{n=k}^{\infty} L(n,k) \frac{t^n}{n!}.$$

Quelques propriétés :

$$\begin{aligned} L(n,0) &= 0, \\ L(n,k) &= 0,\ \ k>n, \\ L(n,k+1) &= \frac{n-k}{k(k+1)} L(n,k), \\ L(n+1,k) &= (n+k)L(n,k) + L(n,k-1), \\ L(n,k) &= \sum_j \begin{bmatrix} n \\ j \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} j \\ k \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Les nombres de Lah convertissent la factorielle en baisse en la factorielle en hausse et inversement

$$\begin{aligned} \langle x\rangle_n &= \sum_{k=0}^{n} L(n,k)(x)_k, \\ (x)_n &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} L(n,k)\langle x\rangle_k. \end{aligned}$$

Les nombres de Lah ont de nombreuses autres applications intéressantes en analyse et en combinatoire voir [2, 6, 7, 16, 41]. Les premiers nombres de Lah sont :

$k \backslash n$	1	2	3	4	5
1	1				
2	2	1			
3	6	6	1		
4	24	36	12	1	
5	120	240	120	20	1

Ils sont récemment apparus dans plusieurs articles concernant les dérivées consécutives de la fonction $\exp\left(\frac{1}{x}\right)$. Dans [17] cinq preuves ont été données de la formule suivante :

$$D^n\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n e^{\frac{1}{x}} x^{-n} \sum_{k=1}^{n} L(n,k) x^{-k},\ \ n \in \mathbb{N}^*. \tag{1.33}$$

Cette formule est une application importante des nombres de Lah appliquée à un problème d'analyse. Voir dans le manuel [11, p 4] dit que

$$D^n\left(x^{\lambda} e^{\frac{-\alpha}{x}}\right) = (-1)^n n! x^{\lambda-n} e^{\frac{-\alpha}{x}} L_n^{-\lambda-1}\left(\frac{\alpha}{x}\right),$$

où $L_n^{(\alpha)}(x)$ sont les polymômes de Laguerre généralisés d'ordre α voir [24, 41]. La même identité apparait dans le manuel [40, p 446] avec $\lambda = 0$ et $\alpha = -1$, c-à-d

$$D^n\left(e^{\frac{1}{x}}\right) = (-1)^n n! x^{-n} e^{\frac{1}{x}} L_n^{-1}\left(\frac{-1}{x}\right).$$

Les polynômes de Lah sont définis par :

$$\mathcal{L}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} L(n,k)\, x^k.$$

Les premiers polynômes de Lah pour les indices $n \leq 4$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{L}_1(x) &= x, \\
\mathcal{L}_2(x) &= 2x + x^2, \\
\mathcal{L}_3(x) &= 12x + 6x^2 + x^3, \\
\mathcal{L}_4(x) &= 24x + 48x^2 + 13x^3 + x^4.
\end{aligned}$$

1.7.4 Nombres et polynômes de Bell à une variable

Définition 16 *Pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme Bell, noté $\mathcal{B}_n(x)$, est défini par*

$$\mathcal{B}_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ {n \atop k} \right\} x^k$$

et le nombre de Bell est défini par

$$\mathcal{B}_n = \mathcal{B}_n(1)$$

qui compte le nombre de partitions de l'ensemble $[n]$.

Les premiers polynômes de Bell pour les indices $n \leq 5$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_0(x) &= 1, \\
\mathcal{B}_1(x) &= x, \\
\mathcal{B}_2(x) &= x^2 + x, \\
\mathcal{B}_3(x) &= x^3 + 3x^2 + x, \\
\mathcal{B}_4(x) &= x^4 + 6x^3 + 7x^2 + x, \\
\mathcal{B}_5(x) &= x^5 + 10x^4 + 25x^3 + 15x^2 + x,
\end{aligned}$$

et les premiers nombres de Bell pour les indices $n \leq 6$:

n	0	1	2	3	4	5	6
$\mathcal{B}_n$	1	1	2	5	15	52	203

Les polynômes de Bell sont caractérisés par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_0(x) &= 1, \\ \mathcal{B}_{n+1}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{B}_k(x), \ n \geq 0, \end{aligned}$$

ou par leurs fonctions génératrices ordinaire et exponentielle données comme suit :

$$\sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_n(x) t^n = \sum_{n\geq 0} \frac{t^n}{(1-t)\dots(1-nt)}, \qquad \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(x\left(e^t-1\right)\right).$$

Dans ce paragraphe, nous rappelons les nombres et les polynômes r-Bell et nous en présentons quelques propriétés. De manière similaire à la définition des nombres et polynômes de Bell, Mező [29] a introduit les nombres et polynômes r-Bell de la façon suivante :

Pour tout entier $n \geq 0$, on appelle n-ème nombre r-Bell, noté $\mathcal{B}_{n,r}$, le nombre de toutes les partitions de l'ensemble $[n+r]$ telles que les r premiers éléments appartiennent à des blocs différents, avec la convention $\mathcal{B}_{0,r} = 1$, i.e.

$$\mathcal{B}_{n,r} = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_r.$$

Le tableau suivant donne les valeurs des nombres $\mathcal{B}_{n,r}$ pour $n, r \in \{1,2,3,4\}$:

$r \diagdown n$	0	1	2	3	4
0	1	1	2	5	15
1	1	2	5	15	52
2	1	3	10	37	151
3	1	4	17	77	372
4	1	5	26	141	799

la suite $(\mathcal{B}_{n,r}; n \in \mathbb{N})$ vérifie les relations ci-dessous :

La formule de Dobinski de la suite $(\mathcal{B}_{n,r}; n \in \mathbb{N})$ est donnée par :

$$\mathcal{B}_{n,r} = e^{-1} \sum_{k\geq 0} \frac{(k+r)^n}{k!}.$$

La suite de polynômes $(\mathcal{B}_{n,r}(x); n \in \mathbb{N})$ est définie par

$$\mathcal{B}_{n,r}(x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_r x^k. \tag{1.34}$$

Les premiers polynômes r-Bell pour les indices $n \leq 4$:

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}_{0,r}(x) &= 1, \\
\mathcal{B}_{1,r}(x) &= x + r, \\
\mathcal{B}_{2,r}(x) &= x^2 + (2r+1)x + r^2, \\
\mathcal{B}_{3,r}(x) &= x^3 + (3r+3)x^2 + \left(3r^2 + 3r + 1\right)x + r^3, \\
\mathcal{B}_{4,r}(x) &= x^4 + (4r+6)x^3 + \left(6r^2 + 12r + 7\right)x^2 + \left(4r^3 + 6r^2 + 4r + 1\right)x + r^4.
\end{aligned}$$

1.7.5 Polynômes partiels de Bell

Définition 17 *Les polynômes partiels (exponentiels) de Bell sont les polynômes $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$ de nombre infini de variables $a_1, a_2, ...$, définis par leur fontion génératrice (exponentielle) :*

$$\sum_{n=k}^{\infty} B_{n,k}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!} \left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!} \right)^k. \tag{1.35}$$

Les polynômes complets (exponentiels) de Bell sont les polynômes $A_n(a_1, a_2, ...)$ définis par leur fonction génératrice (exponentielle) par :

$$\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!} \right) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!}. \tag{1.36}$$

où, en d'autre terme, sont définis par

$$A_n(a_1, a_2, ..) := \sum_{k=1}^{n} B_{n,k}(a_1, a_2, ...), \ n \geq 1, \quad \text{et} \quad A_0(a_1, a_2, ..) := 1. \tag{1.37}$$

Théorème 18 *[16] Les polynômes partiels de Bell, $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$, admettent l'expression exacte :*

$$\begin{aligned}
B_{n,k}(a_1, a_2, ...) &= \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! k_2! ...} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} ... \qquad (1.38) \\
&= \sum_{\pi(n,k)} \frac{n!}{k_1! ... k_{n-k+1}!} \left(\frac{x_1}{1!}\right)^{k_1} ... \left(\frac{x_{n-k+1}}{(n-k+1)!}\right)^{k_{n-k+1}}.
\end{aligned}$$

où $\pi(n,k)$ est l'ensemble de toutes les solutions $(k_1, k_2, ...)$ des entiers naturels tels que :

$$k_1 + k_2 + k_3 + ... = k \quad \text{et} \quad k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n, \tag{1.39}$$

et

$$A_n(a_1, a_2, ..) = \sum_{k_1 + 2k_2 + 3k_3 + ... = n} \frac{n!}{k_1! k_2! ...} \left(\frac{a_1}{1!}\right)^{k_1} \left(\frac{a_2}{2!}\right)^{k_2} .... \tag{1.40}$$

Il résulte du Théorème 18 que $B_{n,k}$ contient $p(n-k,k)$ monômes, où $p(n,k)$ est le nombre de partitions de n en k (≥ 1) parts sans tenir compte de leur ordre.

En particulier, les nombres de Lah $L(n,k)$, les nombres de Stirling absolus de première espèce $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ et les nombres de Stirling de deuxième espèce $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}$ font partis des polynômes partiels de Bell car

$$\begin{aligned} B_{n,k}(1!, 2!, ..., i!, ...) &= L(n,k), \\ B_{n,k}(0!, 1!, 2!, ...) &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}, \\ B_{n,k}(1, 1, 1, ...) &= \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Pour plus de détails sur ces nombres, voir [1, 8, 16, 30, 31, 50].

Proposition 19 *[16]Pour toute suite réelle* $(a_n; n \in \mathbb{N}^*)$ *on a*

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} a_j B_{n-j,k-1}(a_1, a_2, ...) &= k B_{n,k}(a_1, a_2, ...), \\ \sum_{j=1}^{n-k+1} \binom{n}{j} j a_j B_{n-j,k-1}(a_1, a_2, ...) &= n B_{n,k}(a_1, a_2, ...). \end{aligned} \tag{1.41}$$

et

$$\sum_{j=1}^{n} \binom{n}{j} j a_j A_{n-j}(a_1, a_2, ...) = n A_n(a_1, a_2, ...). \tag{1.42}$$

Proposition 20 *[16] on a*

$$B_{n,k}(a_1, a_2, ...) = \frac{n!}{(n-k)!} \sum_{j=0}^{k} B_{n-k,k-j}\left(\frac{a_2}{2}, \frac{a_3}{3}, ...\right) \frac{a_1^j}{j!}, \quad n \geq k \geq 1. \tag{1.43}$$

1.7.6 Polynômes partiels r-Bell

Tout d'abord, pour introduire les polynômes partiels r-Bell, nous pouvons donner quelques interprétations combinatoires des polynômes partiels de Bell. Ci-dessous, pour $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$, nous utilisons $B_{n,k}(a_l)$ ou $B_{n,k}(a_1, a_2, ...)$ et pour $B_{n,k}^r(a_1, a_2, ...; b_1, b_2 ...)$, on utilise $B_{n,k}^r(a_l, b_l)$ ou $B_{n,k}^r(a_1, a_2, ...; b_1, b_2 ...)$.

Théorème 21 *[33] Soit* $(a_n; n \in \mathbb{N}^*)$ *une séquence d'entiers positifs. Alors, on a :*

• *Le nombre $B_{n,k}(a_l)$ compte le nombre de partitions de n-ensembles et en k blocs tels que les blocs de même cardinalité i peut être colorés avec $a_i$couleurs.*

• *Le nombre $B_{n,k}((l-1)!a_l)$ compte le nombre de permutations de n-ensembles et dans k cycles tels que n'importe quel cycle de longueur i peut être colorés avec a_i couleurs.*

•*Le nombre $B_{n,k}(l!a_l)$ compte le nombre de partitions de n-ensembles dans k blocs ordonnés de telle sorte que les blocs de même cardinalité i peuvent être colorés avec a_i couleurs.*

Définition 22 *[33] Soient $(a_n; n \in \mathbb{N}^*)$ et $(b_n; n \in \mathbb{N}^*)$ deux séquences d'entiers naturels. Le nombre $B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_l; b_l)$ compte le nombre de partitions d'un ensemble de $(n+r)$ en $(k+r)$ blocs tel que*

- *les r premiers éléments sont dans des blocs différents,*
- *tout bloc de longueur i sans éléments des r premiers éléments, peut être coloré avec a_i couleurs,*
- *tout bloc de longueur i avec un élément des r premiers éléments, peut être coloré avec des couleurs b_i.*
  Nous supposons que tout bloc avec 0 couleur n'apparaît pas dans les partitions.

Théorème 23 *[33] On a*

$$\begin{aligned} \sum_{n=k}^{\infty} B_{n+r,k+r}^{(r)}(a_1, a_2, ...) \frac{t^n}{n!} &= \frac{1}{k!}(\varphi(t))^k (D\varphi(t))^r, \\ \varphi(t) &= \sum_{m=1}^{\infty} a_m \frac{t^m}{m!}. \end{aligned}$$

En particulier, les nombres r-Stirling de première $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r$ et seconde espèce $\begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_r$, les nombres r-Lah $L_r(n,k)$ font partis des polynômes partiels r-Bell car

$$\begin{aligned} B_{n,k}^{(r)}(0!, 1!, 2!, ...) &= \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_r, \\ B_{n,k}^{(r)}(1, 1, 1, ...) &= \begin{Bmatrix} n \\ k \end{Bmatrix}_r, \\ B_{n,k}^{(r)}(1!, 2!, ..., i!, ...) &= L_r(n,k). \end{aligned}$$

Chapitre 2

Identité polynômiale et ses applications

2.1 Introduction

L'étude algébrique, analytique, combinatoire et probabiliste des suites polynômiales attirent l'attention de nombreux chercheurs, vu leurs applications dans différentes disciplines mathématiques, physiques et autres. Plusieurs classes de polynômes figurent parmi les plus utilisés tels que ceux de Bell, Laguerre, Legendre, Hermite, Gessel et les polynômes d'Appell qui engendrent les polynômes de Bernoulli, Euler et leurs extensions. La connaissance d'une telle propriété peut aider à résoudre un tel problème posé, ceci encourage les chercheurs à donner de l'importance à une telle étude.

Dans ce chapitre, nous nous intéresserons davantage à des identités concernant les suites polynomiales et dont l'étude a fait l'objet d'une récente publication.
Le résultat principal dans ce chapitre est l'identité polynomiale

$$P_m(x) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} P_m(x-(k+1)z),$$

qui reste vraie pour tout polynôme P_m de degré inférieur ou égal à m.
De nombreux résultats secondaires découlent de l'identité ci-dessus. Elle sert à déduire de nombreuses identités sur les polynômes d'Appell, Bell, Tchébychev, sur les nombre de Stirling, Lah, et les polynômes partiels de Bell.

2.2 Identités polynomiales

La clé de l'identité ci-dessus est la proposition suivante :

Proposition 24 *Soit m un entier naturel et H, G deux séries formelles telle que $H(0) = 1$. Alors on a :*

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\, G(t)\right), \tag{2.1}$$

et si $G(0) = 1$ on a aussi

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\, G^{-k}(t)\right). \tag{2.2}$$

Preuve. *Puisque $H(0) = 1$,suit*

$$\frac{G(t)}{H(t)}\left(H(t) - 1\right)^{n+m+1} = t^{n+m+1} M(t).$$

pour des series formelles M. Alors

$$\begin{aligned}
0 &= D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\left(H(t)-1\right)^{n+m+1}\right), \\
&= (-1)^{n+m} \sum_{k=0}^{n+m+1} (-1)^{k-1} \binom{n+m+1}{k} D_{t=0}^{n}\left(H^{k-1}(t)\, G(t)\right), \\
&= (-1)^{n+m} \left[-D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) + \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\, G(t)\right)\right].
\end{aligned}$$

Alors, la première identité suit. En fixant $G(t) = 1$ cette identité devient :

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{1}{H(t)}\right) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\right).$$

Puis, en remplaçant H par H/G pour de telles séries formelles G avec $G(0) = 1$, la seconde identité suit.

Exemple 25 *Soit $\left(L_n^{(\alpha,\beta)}(x)\,; n \in \mathbb{N}\right)$ une suite polynomiale definie par*

$$\sum_{n \geq 0} L_n^{(\alpha,\beta)}(x) \frac{t^n}{n!} = (1-t)^{\alpha} \exp\left(x\,(1-t)^{\beta} - 1\right),$$

pour plus d'information sur ces classes polynomiales, voir [34, 35].

$$\textit{Pour } \alpha = -(c+1)k \textit{ et } \beta = -\frac{1}{k}, \quad k \in \mathbb{N}^*, \quad c > 0,$$

ces polynômes sont appelés polynômes de Konhauser (biorthogonaux) et peuvent également être considérés comme une généralisation des polynômes de Laguerre, voir [23]. Pour

$$G(t) = (1-t)^{\alpha}, H(t) = \exp\left(-z(1-t)^{\beta} - 1\right).$$

dans les formules (2.1) et (2.2) on obtient respectivement :

$$\begin{aligned} L_n^{(\alpha,\beta)}(z) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} L_n^{(\alpha,\beta)}(-kz), \\ L_n^{(\alpha,\beta)}(z) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} L_n^{(-k\alpha,\beta)}(-kz), \end{aligned}$$

pour

$$G(t) = \exp\left(z(1-t)^{\beta} - 1\right), \; H(t) = (1-t)^{-\alpha},$$

dans la formule (2.1) on obtient :

$$L_n^{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} L_n^{(-k\alpha,\beta)}(z),$$

En particulier, les polynômes de Lah $\mathcal{L}_n(z) = L_n^{(0,-1)}(z)$ *satisfont*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_m(z) &= \sum_{k=0}^{m} L(m,k) z^k, \\ \mathcal{L}_m(z) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} \mathcal{L}_m(-kz). \end{aligned}$$

où $L(n,k)$ *designent les nombres de Lah .*

□

Par application de l'identité (2.1) aux polynômes d'Appell, nous dérivons une identité sur des polynômes sur lesquels est basé le reste de cet article. Rappelons qu'une suite d'Appell est une suite $\left(f_n^{(\alpha)}; n \in \mathbb{N}\right)$ de polynômes satisfaisant [3]

$$Df_n(x) = nf_{n-1}(x), \; \deg f_0 = 0.$$

Proposition 26 *Soient α, β deux nombres réels et soit $\left(f_n^{(\alpha)}(x) ; n \in \mathbb{N}\right)$ une suite polynomiale d'Appell ayant la fonction génératrice exponentielle suivante :*

$$\sum_{n \geq 0} f_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = (F(t))^\alpha e^{xt}, \qquad F(0) = 1. \tag{2.3}$$

Alors on a

$$f_n^{(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} f_n^{(\beta-\alpha k)}(x), \tag{2.4}$$

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} f_n^{(-\alpha k)}(-kx). \tag{2.5}$$

Preuve. On fixe $G(t) = e^{xt}(F(t))^\beta$ ou e^{xt} et on choisit $H(t) = (F(t))^{-\alpha}$ dans la formule (2.1) on obtient l'identité (2.4), et quand on choisit $G(t) = e^{xt}$ et $H(t) = (F(t))^{-\alpha}$ dans la formule (2.2), on obtient l'identité (2.5). □

L'identité (2.5) peut être généralisée comme suit :

Proposition 27 *Soit α un nombre réel et soit $\left(f_n^{(\alpha)}(x) ; n \in \mathbb{N}^*\right)$ la suite définie ci-dessus et P_m un polynôme de degré $\leq m$. Alors, pour tout nombre complexe z, on a*

$$f_n^{(\alpha)}(x) P_m(z) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} f_n^{(-\alpha k)}(-kx) P_m(-kz). \tag{2.6}$$

Preuve. Puisque

$$D^h f_n^{(\alpha)}(x) = (n)_h f_{n-h}^{(\alpha)}(x),$$

alors par dérivation h fois les deux membres de l'identité (2.5), on a

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n+m+h} (-1)^k (-k)^h \binom{n+m+h+1}{k+1} f_n^{(-\alpha k)}(-kx). \tag{2.7}$$

Sachant que

$$P_m(z) = \sum_{j=0}^{m} a_j z^j.$$

Donc, en remplaçant (m, h) par $(m+h-j, j)$ dans (2.7) on obtient

$$f_n^{(\alpha)}(x) z^j = \sum_{k=0}^{n+m+h} (-1)^k (-kz)^j \binom{n+m+h+1}{k+1} f_n^{(-\alpha k)}(-kz).$$

Multiplions cette identité par a_j et par addition pour $j = 0, ..., m+h$ on obtient

$$f_n^{(\alpha)}(x) P_{m+h}(z) = \sum_{k=0}^{n+m+h} (-1)^k \binom{n+m+h+1}{k+1} f_n^{(-\alpha k)}(-kx) P_{m+h}(-kz),$$

qui est équivalent, quand on remplace $m+h$ par m, d'où l'identité désirée. $\square$

Corollaire 28 *Soit α un nombre réel m un entier naturel et soit $\left(f_n^{(\alpha)}(x); n \in \mathbb{N}^*\right)$ la suite définie ci-dessus, on a*

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{k+m}{m} \binom{n+m+1}{k+m+1} f_n^{(-\alpha(k+m))}(-(k+m)x). \tag{2.8}$$

Preuve. Pour

$$P_m(z) = z(z+1)...(z+m-1) \text{ avec } z = 1$$

on obtient

$$\begin{aligned} P_m(1) &= m!, \\ P_m(-k) &= (-1)^m \frac{k!}{(k-m)!}, \quad k \geq m \end{aligned}$$

et par l'identité (2.6), il résulte

$$f_n^{(\alpha)}(x) m! = \sum_{k=m}^{n+m} (-1)^{k+m} \binom{n+m+1}{k+1} f_n^{(-k\alpha)}(-kx) \frac{k!}{(k-m)!}$$

et en posant $l = k-m$, cette dernière identité s'écrit ainsi

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{l=0}^{n} (-1)^l \binom{l+m}{m} \binom{n+m+1}{l+m+1} f_n^{(-\alpha(k+m))}(-x(l+m))$$

qui est l'identité recherchée. $\square$

En particulier, pour $f_n^{(\alpha)}(x) = x^n$ dans l'identité (2.6), on a

Corollaire 29 *Soit m un nombre naturel et soit P_m un polynôme de degré $\leq m$. Alors, pour tout nombre complexe z, on a*

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} P_m(-kz). \tag{2.9}$$

En particulier, pour $n = 0$, on a

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m+1}{k+1} P_m(-kz). \tag{2.10}$$

Remarque 30 *En remplaçanr $P_m(z)$ par $P_m(x+z)$ dans l'identité polynomiale (2.9) on obtient l'identité*

$$P_m(x+z)=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^{n+k}k^n\binom{n+m+1}{k+1}P_m(x-kz),$$

et en remplaçant x par $x-z$, cette dernière identité devient

$$P_m(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^{n+k}k^n\binom{n+m+1}{k+1}P_m(x-(k+1)z). \tag{2.11}$$

Remarque 31 *On note que l'identité (2.9) peut être dérivée de la façon suivante. En effet, elle peut s'écrire*

$$\sum_{k=0}^{n+m+1}(-1)^{k-1}(1-k)^n\binom{n+m+1}{k}P_m((1-k)z)=0. \tag{2.12}$$

Par linéarité il suffit de prouver la formule (2.12) pour $P_m(z)=z^m$. Par conséquent, le facteur z^m est commun à tous les termes de la somme et peut donc être omis. En développant $(1-k)^n$ et en réorganisant la somme, nous constatons que la formule (2.12) est équivalente à :

$$\sum_{i=0}^{n+m}(-1)^i\binom{n+m}{i}\sum_{k=0}^{n+m+1}(-1)^k\binom{n+m+1}{k}k^{n+m-i}=0. \tag{2.13}$$

Pour prouver cette identité on utilise les relations suivantes :

$$\sum_{k=0}^{n+m+1}(-1)^k\binom{n+m+1}{k}(k)_s=D^s_{x=1}(1-x)^{n+m+1}, \quad s\in\mathbb{N},$$

et la formule

$$k^{n+m-i}=\sum_{s=0}^{n+m-i}\left\{{n+m-i \atop s}\right\}(k)_s. \tag{2.14}$$

pour prouver que le côté gauche de (2.13) doit être

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=0}^{n+m}(-1)^i\binom{n+m}{i}\sum_{s=0}^{n+m-i}\left\{{n+m-i \atop s}\right\}\sum_{k=0}^{n+m+1}(-1)^k\left\{{n+m+1 \atop k}\right\}(k)_s\\
=\;&\sum_{i=0}^{n+m}(-1)^i\binom{n+m}{i}\sum_{s=0}^{n+m-i}\left\{{n+m-i \atop s}\right\}D^s_{x=1}(1-x)^{n+m+1}.\\
=\;&0.
\end{aligned}$$

2.3 Identités secondaires

Proposition 32 *Soit m un entier non-negatif et soit H, G deux series formelles telle que $H(0) = G(0) = 1$. On a alors :*

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\,G(t)\right) + n!\left(-H'(0)\right)^n, \tag{2.15}$$

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(\left(\frac{H(t)}{G(t)}\right)^k\right) + n!\left(G'(0) - H'(0)\right)^n. \tag{2.16}$$

En particulier, on a

$$D_{t=0}^{n}(G(t)) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{k+1}(t)\,G(t)\right) + n!\left(-H'(0)\right)^n,$$

$$D_{t=0}^{n}\left(H(t)^{-1}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\right) + n!\left(-H'(0)\right)^n. \tag{2.17}$$

et

$$D_{t=0}^{n}\left(H^{\alpha}(t)\,G(t)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{\beta(k+1)+\alpha}(t)\,G(t)\right) + n!\left(-\beta H'(0)\right)^n, \tag{2.18}$$

$$D_{t=0}^{n}\left(H^{\alpha}(t)\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{\beta(k+1)+\alpha}(t)\right) + n!\left(-\beta H'(0)\right)^n. \tag{2.19}$$

Preuve. Puisque $H(0) = 1$, il s'ensuit que

$$\frac{G(t)}{H(t)}\left(H(t) - 1\right)^n = t^n\left(H'(0)\right)^n + t^{n+1}M(t)$$

pour certaines series formelles M. Alors :

$$\begin{aligned} n!\left(H'(0)\right)^n &= D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\left(H(t) - 1\right)^n\right), \\ &= \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}D_{t=0}^{n}\left(H^{k-1}(t)\,G(t)\right), \\ &= -\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{n-k}\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\,G(t)\right) + (-1)^n D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right). \end{aligned}$$

Ainsi, la première identité suit. En posant $G(t) = 1$, cette identité devient

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{1}{H(t)}\right) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^k(t)\right) + n!\left(-H'(0)\right)^n.$$

Alors, en remplaçant H par H/G pour une serie formelle G avec $G(0) = 1$, la deuxieme identité suit. En particulier, en changeant $H(t)$ par $G(t)H(t)$ dans (2.13) on obtient (2.16). En remplaçant aussi $H(t)$ par $H^{\beta}(t)$ et $G(t)$ par $H^{\alpha}(t)G(t)$ dans (2.16) on obtient (2.18), aprés cela, pour obtenir (2.19), en prenant $G(t) = 1$ dans (2.18). □

Corollaire 33 *Soit α, β deux nombres réels, H, g deux séries formelles avec $H(0) = 1$, $g(0) = 0$ et soit $\left(P_n^{(\alpha)}(x)\right)$ une suite polynomiale definie par :*

$$H^{\alpha}(t)\exp(xg(t)) = \sum_{n\geq 0} P_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}. \tag{2.20}$$

Alors

$$P_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}P_n^{(\beta(k+1)+\alpha)}(x) + n!\left(-\beta P_1^{(1)}(0)\right)^n. \tag{2.21}$$

Preuve. Remplaçant $D_{t=0}^{n}(H^{\alpha}(t)\exp(xg(t)))$ par $P_n^{(\alpha)}(x)$ dans (2.18) on constate que

$$H(t) = \sum_{n\geq 0} P_n^{(1)}(0)\frac{t^n}{n!}.$$

ce qui donne $H'(0) = P_1^{(1)}(0)$. □

Exemple 34 *Soit $\left(f_n^{(\alpha)}(x); n \in \mathbb{N}\right)$ une suite polynomiale d'Appell definie par :*

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = H^{\alpha}(t)\exp(xt). \tag{2.22}$$

Ces polynômes satisfont l'identité suivante :

$$f_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\binom{n}{k+1}f_n^{(\beta(k+1)+\alpha)}(x) + n!\left(-\beta f_1^{(1)}(0)\right)^n. \tag{2.23}$$

Soient $\left(B_n^{(\alpha)}(x); n \in \mathbb{N}\right)$ et $\left(E_n^{(\alpha)}(x); n \in \mathbb{N}\right)$ deux suites polynômiales respectivement de Bernoulli et d'Euler. Alors, ces polynômes satisfont les identités suivantes :

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+s-1}(-1)^k\binom{n+s}{k+1}B_n^{(\beta(k+1)+\alpha)}(x) + n!\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\delta_{(s=0)}, \\ E_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+s-1}(-1)^k\binom{n+s}{k+1}E_n^{(\beta(k+1)+\alpha)}(x) + n!\left(\frac{\beta}{2}\right)^n\delta_{(s=0)}. \end{aligned}$$

Deuxiéme preuve de l'identité (2.1):. De la proposition 32, on a

$$D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{k}(t)\,G(t)\right)+n!\left(-H'(0)\right)^{n},$$

en remplaçant $G(t)$ par $G(t)\,e^{xt}$ afin d'avoir

$$\begin{array}{rcl} D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) & = & \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{k}(t)\,G(t)\right)+n!\left(-H'(0)\right)^{n}, \\ & \downarrow & \\ D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}e^{xt}\right) & = & \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{k}(t)\,G(t)\,e^{xt}\right)+n!\left(-H'(0)\right)^{n}, \end{array}$$

en prenant la dérivée d'ordre s par rapport à x au point $x=0$:

$$D_{t=0}^{n}\left(t^{s}\frac{G(t)}{H(t)}\right)=\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(t^{s}H^{k}(t)\,G(t)\right)+n!\left(-H'(0)\right)^{n}\delta_{(s=0)},$$

or $D_{t=0}^{n}\left(t^{s}F(t)\right)=(n)_{s}\,D_{t=0}^{n-s}\left(F(t)\right)$, donc

$$\begin{array}{rcl} D_{t=0}^{n-s}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) & = & \sum_{k=0}^{n-1}(-1)^{k}\binom{n}{k+1}D_{t=0}^{n-s}\left(H^{k}(t)\,G(t)\right)+n!\left(-H'(0)\right)^{n}\delta_{(s=0)} \\ n & \rightarrow & n+s: \\ D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) & = & \sum_{k=0}^{n+s-1}(-1)^{k}\binom{n+s}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{k}(t)\,G(t)\right)+n!\left(-H'(0)\right)^{n}\delta_{(s=0)} \\ & \downarrow & s=m+1: \\ D_{t=0}^{n}\left(\frac{G(t)}{H(t)}\right) & = & \sum_{k=0}^{n+m}(-1)^{k}\binom{n+m+1}{k+1}D_{t=0}^{n}\left(H^{k}(t)\,G(t)\right). \end{array}$$

□

2.3.1 Applications sur les polynômes $L_{n}^{(\alpha,\beta)}(.)$

Soit $\left(L_{n}^{(\alpha,\beta)}(z)\,;n\in\mathbb{N}\right)$ une suite polynomiale definie par

$$L_{\alpha,\beta}(t;z):=\sum_{n\geq0}L_{n}^{(\alpha,\beta)}(z)\,\frac{t^{n}}{n!}=(1-t)^{\alpha}\exp\left(z\left((1-t)^{\beta}-1\right)\right),$$

Pour plus d'informations sur ces classes de polynômes, voir [31, 34].
Pour $G(t)=(1-t)^{\alpha}$ et $H(t)=\exp\left(-z\left((1-t)^{\beta}-1\right)\right)$, ou $G(t)=\exp\left(z\left((1-t)^{\beta}-1\right)\right)$

et $H(t) = (1-t)^{-\alpha}$ dans la Proposition 32 on obtient

$$\begin{aligned}
L_m^{(\alpha,\beta)}(z) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} L_m^{(\alpha,\beta)}(-kz), \\
L_m^{(\alpha,\beta)}(z) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} L_m^{(-k\alpha,\beta)}(z), \\
L_m^{(\alpha,\beta)}(z) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} L_m^{(-k\alpha,\beta)}(-kz).
\end{aligned}$$

et par l'identité (2.9) on donne

$$L_m^{(\alpha,\beta)}(z) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} L_m^{(\alpha,\beta)}(-kz),$$

En particulier, les polynômes de Lah $\mathcal{L}_n(z) = L_n^{(0,-1)}(z)$ satisfont

$$\mathcal{L}_m(z) = \sum_{k=0}^{m} L(m,k) z^k = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} \mathcal{L}_m(-kz).$$

Aussi, les polynômes de Laguerre généralisés $\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) = L_n^{(-\lambda-1,-1)}(x)$ satisfont

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} \mathbb{L}_n^{(\lambda)}(-kx), \\
\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} \mathbb{L}_n^{(-k(\lambda+1)-1,-1)}(x), \\
\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) &= \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m+1}{k+1} \mathbb{L}_n^{(-k(\lambda+1)-1,-1)}(-kx).
\end{aligned}$$

Pour $m = 0$ on a :

$$\begin{aligned}
\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \mathbb{L}_n^{(\lambda)}(-kx), \\
\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \mathbb{L}_n^{(-k(\lambda+1)-1,-1)}(x), \\
\mathbb{L}_n^{(\lambda)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \mathbb{L}_n^{(-k(\lambda+1)-1,-1)}(-kx).
\end{aligned}$$

2.3.2 Applications sur les polynômes de Bernoulli d'ordre α

Les nombres r-Whitney ont été introduits par Mezo [29] et sont divisés en deux espèces Les nombres r- Whitney de première espèce, notés $w_{m,r}(n,k)$ sont définis par

$$m^n (x)_n = \sum_{n\geq 0} w_{m,r}(n,k)(mx+r)^k, \ \ r,m\in\mathbb{N}$$

où les $w_{m,r}(n,k)$ représentent les coefficients du polynôme $m^n (x)_n$ dans la base

$$\{1,(mx+r),...,(mx+r)^n\}.$$

Ces nombres satisfont la relation de récurrence

$$w_{m,r}(n,k) = w_{m,r}(n-1,k-1) + w_{m,r}(n-1,k)(r+(n-1)m), \ \ r,m\in\mathbb{N},$$

et de fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq k} w_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\ln(1+mt)}{m}\right)^k (1+mt)^{\frac{-r}{m}}$$

Les nombres r-Whitney de seconde espèce, notés $W_{m,r}(n,k)$ sont définis par

$$(mx+r)^n = \sum_{n\geq 0} m^k W_{m,r}(n,k)(x)_k, \ \ r,m\in\mathbb{N},$$

où les $W_{m,r}(n,k)$ représentent les coefficients du polynôme $(mx+r)^n$ dans la base

$$\{1,x,x(x-1),...,(x)_n\}.$$

Ces nombres satisfont la relation de récurrence

$$W_{m,r}(n,k) = W_{m,r}(n-1,k-1) + (r+km)W_{m,r}(n-1,k), \ \ r,m\in\mathbb{N}$$

et de fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq k} w_{m,r}(n,k)\frac{t^n}{n!} = \frac{1}{k!}\left(\frac{\exp(mt)-1}{m}\right)^k \exp(rt), \ \ r,m\in\mathbb{N}$$

Enn particulier, pour $m=1$ on a

$$w_{1,r}(n,k) = (-1)^{n-k}\begin{bmatrix} n+r \\ k+r \end{bmatrix}_r \quad \text{et} \quad W_{1,r}(n,k) = \begin{Bmatrix} n+r \\ k+r \end{Bmatrix}_r.$$

Pour plus de détails, voir [10, 12, 15, 29].

Pour la suite des polynômes de Bernoulli $\left(B_n^{(\alpha)}(x)\,;n\in\mathbb{N}\right)$ d'ordre α,les identités (2.4) et (2.8) impliquent

$$B_n^{(\alpha+\beta)}(x) = \sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\binom{n+m+1}{k+1}B_n^{(\beta-\alpha k)}(x), \tag{2.24}$$

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{k+m}{m}\binom{n+m+1}{k+m+1}B_n^{(-\alpha(k+m))}(-(k+m)x). \tag{2.25}$$

Pour $x=\frac{r}{s}$, $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha=p\in\mathbb{N}$ et $-\beta=q\in\mathbb{N}$ dans (2.24), l'identité connue [32, Id. 8]

$$B_n^{(-k)}\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\binom{n+k}{k}^{-1}W_{s,r}(n+k,k).$$

montre que :

Corollaire 35 *On a*

$$B_n^{(p-q)}\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\frac{\binom{n+m+1}{k+1}}{\binom{n+q+kp}{q+kp}}W_{s,r}(n+q+kp,q+kp).$$

En particulier, pour $m=0$, on obtient :

$$B_n^{(p-q)}\left(\frac{r}{s}\right) = \frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+q+kp}{q+kp}}W_{s,r}(n+q+kp,q+kp),$$

$$q = 0: B_n^{(p)}\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+kp}{kp}}W_{s,r}(n+kp,kp),$$

$$p = 1: B_n\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+k}{k}}W_{s,r}(n+k,k).$$

Aussi, pour $x=-\frac{r}{s}$, $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha=p\in\mathbb{N}$ dans (2.25) on obtient

Corollaire 36 *On a*

$$B_n^{(p)}\left(-\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{k+m}{m}\binom{n+m+1}{k+m+1}}{\binom{n+p(k+m)}{p(k+m)}}W_{s,r(k+m)}(n+p(k+m),p(k+m)).$$

En particulier, pour $m=0$, on a :

$$B_n^{(p)}\left(-\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+pk}{pk}}W_{s,rk}\left(n+pk,pk\right).$$

Soit $\left(b_n^{(\alpha)}(x);n\in\mathbb{N}\right)$ la suite de Bernoulli d'ordre α de seconde espèce, définie par

$$\sum_{n\geq 0}b_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\alpha}(1+t)^x.$$

Pour le choix de $G(t)=(1+t)^x\left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{\beta}$ ou $(1+t)^x$ et $H(t)=\left(\frac{t}{\ln(1+t)}\right)^{-\alpha}(1+t)^x$ dans la Proposition (24) on obtient :

$$b_n^{(\alpha+\beta)}(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\binom{n+m+1}{k+1}b_n^{(\beta-k\alpha)}(x),\tag{2.26}$$

$$b_n^{(\alpha)}(x)=\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\binom{n+m+1}{k+1}b_n^{(-k\alpha)}(-kx).\tag{2.27}$$

Pour $x=-\frac{r}{s}$, $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha=p\in\mathbb{N}$ et $-\beta=q\in\mathbb{N}$ dans (2.26), l'identité connue [32, Id. 9]

$$b_n^{(-k)}\left(-\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\binom{n+k}{k}^{-1}w_{s,r}\left(n+k,k\right).$$

montre que :

Corollaire 37 *On a*

$$b_n^{(p-q)}\left(-\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\frac{\binom{n+m+1}{k+1}}{\binom{n+q+kp}{q+kp}}w_{s,r}\left(n+q+kp,q+kp\right).$$

On particulier, pour $m=0$, on obtient :

$$b_n^{(p-q)}\left(-\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+q+kp}{q+kp}}w_{s,r}\left(n+q+kp,q+kp\right).$$

Aussi, pour $x=\frac{r}{s}$, $r\in\mathbb{N}$, $s\in\mathbb{N}^*$ et $\alpha=p\in\mathbb{N}$ dans (2.27) on donne :

Corollaire 38 *On a*

$$b_n^{(p)}\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^k\,\frac{\dbinom{n+m+1}{k+1}}{\binom{n+kp}{kp}}w_{s,r}\left(n+kp,kp\right).$$

En particulier, pour $m=0$, on donne

$$b_n^{(p)}\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{\dbinom{n+1}{k+1}}{\binom{n+kp}{kp}}w_{s,r}\left(n+kp,kp\right)$$

et $m=0$, $p=1$ on a

$$b_n\left(\frac{r}{s}\right)=\frac{1}{s^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\,\frac{\dbinom{n+1}{k+1}}{\binom{n+k}{k}}w_{s,r}\left(n+k,k\right).$$

Des résultats similaires peuvent être lus dans [36, 37].

2.3.3 Applications aux nombres de Striling

De l'identité (2.9), on obtient :

$$\begin{aligned}P_m\left(z\right) &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m+1}{i+1}P_m\left(-iz\right),\\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m+1}{i+1}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j+1}P_m\left(-j\left(-iz\right)\right),\\ &= \sum_{i=0}^{m}(-1)^i\binom{m+1}{i+1}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m+1}{j+1}P_m\left(ijz\right),\end{aligned}$$

i.e.

$$P_m\left(z\right)=\sum_{i,j=0}^{m}(-1)^{i+j}\binom{m+1}{i+1}\binom{m+1}{j+1}P_m\left(ijz\right).$$

Ainsi, pour r,s deux entiers positifs et

$$P_m\left(z\right)=\left(\frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\left(j+z\right)^m\right)^s,$$

On donne $P_m\left(r\right)=\left(\left\{ {m+r \atop k+r} \right\}_r\right)^s$ et

$$\left(\left\{ {m+r \atop k+r} \right\}_r\right)^s=\sum_{i,j=0}^{ms}(-1)^{i+j}\binom{ms+1}{i+1}\binom{ms+1}{j+1}\left(\left\{ {m+ijr \atop k+ijr} \right\}_{ijr}\right)^s. \tag{2.28}$$

2.3.4 Applications aux polynômes partiels de Bell

Soit $(f_n(x)\,; n \in \mathbb{N})$ une suite binomiale définie par sa fonction génératrice

$$\sum_{n\geq 0} f_n(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(x \sum_{j\geq 1} a_j \frac{t^j}{j!}\right), \quad a_k \in \mathbb{C},\ k \in \mathbb{N}^*.$$

Proposition 39 *Soient m, n, k, s des entiers naturels et $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$. Alors*

$$\begin{aligned} B_{m+k,k}(\mathbf{a}) &= \frac{(m+k)!}{k!} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{n+m} (-1)^{n+j} j^n \frac{(s(j+1)+k)!}{(m+s(j+1)+k)!} \binom{n+m+1}{j+1} B_{m+s(j+1)+k,s(j+1)+k}(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

et pour $m \geq k \geq s(n+1)$ on a

$$B_{m,k}(\mathbf{a}) = \frac{m!}{k!} \sum_{j=0}^{n+m-k} (-1)^{n+j} j^n \frac{(k-s(j+1))!}{(m-s(j+1))!} \binom{n+m-k+1}{j+1} B_{m-s(j+1),k-s(j+1)}(\mathbf{a}).$$

Preuve. Alors, à partir de l'identité (2.11) on a

$$f_m(x) = \sum_{j=0}^{n+m} (-1)^{n+j} j^n \binom{n+m+1}{j+1} f_m(x-(j+1)z),$$

et par la relation voir [32]

$$B_{n+k,k}(\mathbf{a}) = \binom{n+k}{k} f_n(k)$$

il s'ensuit, en posant $x = k$ et $z = s$:

$$\begin{aligned} B_{m+k,k}(\mathbf{a}) &= \frac{(m+k)!}{k!} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{n+m} (-1)^{n+j} j^n \frac{(s(j+1)+k)!}{(m+s(j+1)+k)!} \binom{n+m+1}{j+1} B_{m+s(j+1)+k,s(j+1)+k}(\mathbf{a}). \end{aligned}$$

En posant $x = k$ et $z = -s$, pour $k \geq s(n+m+1)$ on obtient

$$\begin{aligned} B_{m+k,k}(\mathbf{a}) &= \frac{(m+k)!}{k!} \\ &\quad \times \sum_{j=0}^{n+m} (-1)^{n+j} j^n \frac{(k-s(j+1))!}{(m+k-s(j+1))!} \binom{n+m+1}{j+1} B_{m+k-s(j+1),k-s(j+1)}(\mathbf{a}), \end{aligned}$$

qui devient en remplaçant m par $m-k$:

$$B_{m,k}(\mathbf{a})=\frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{n+m-k}(-1)^{n+j}j^{n}\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{n+m-k+1}{j+1}B_{m+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}),$$

et pour $m\geq k\geq s(n+m-k+1)$ on obtient $m\geq k\geq\frac{s}{s+1}(n+m+1)$, $m\geq k\geq s(n+1)$ et

$$B_{m,k}(\mathbf{a})=\frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{n+m-k}(-1)^{n+j}j^{n}\frac{(k-s(j+1))!}{(m-s(j+1))!}\binom{n+m-k+1}{j+1}B_{m-s(j+1),k-s(j+1)}(\mathbf{a}).$$

$\square$

En particulier, pour $n=0$ dans la première identité et $n=0$, $s=1$ dans la seconde identité on obtient :

Corollaire 40 *Soient m,k,s des entiers naturels et $\mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots)$. Alors*

$$\begin{aligned}
B_{m,k}(\mathbf{a}) &= \frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^{j}\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{m-k+1}{j+1}B_{m+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}).\\
B_{m,k}(\mathbf{a}) &= \frac{m!}{k!}\sum_{j=1}^{m-k+1}(-1)^{j-1}\frac{(k-j)!}{(m-j)!}\binom{m-k+1}{j}B_{m-j,k-j}(\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}
\left\{ {m \atop k} \right\} &= \frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^{j}\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{m-k+1}{j+1}\left\{ {m+s(j+1) \atop k+s(j+1)} \right\},\\
\left\{ {m \atop k} \right\}_{\leq m} &= \frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^{j}\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{m-k+1}{j+1}\left\{ {m+s(j+1) \atop k+s(j+1)} \right\}_{\leq m},\\
\left[{m \atop k} \right] &= \frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^{j}\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{m-k+1}{j+1}\left[{m+s(j+1) \atop k+s(j+1)} \right],\\
L(m,k) &= \frac{m!}{k!}\sum_{j=0}^{m-k}(-1)^{j}\frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!}\binom{m-k+1}{j+1}L(m+s(j+1),k+s(j+1))\\
&\Downarrow\\
\binom{m-1}{k-1} &= \sum_{j=0}^{m-k}(-1)^{j}\binom{m-k+1}{j+1}\binom{m+s(j+1)-1}{k+s(j+1)-1}.
\end{aligned}$$

Puis, du corollaire (2.11) on a

$$(f_m(x))^r = \sum_{j=0}^{n+mr} (-1)^{n+j} j^n \binom{n+mr+1}{j+1} (f_m(x-(j+1)z))^r,$$

et par la relation

$$B_{m+k,k}(\mathbf{a}) = \binom{m+k}{k} f_m(k), \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots),$$

il s'ensuit, en posant $x = k$ et $z = -s$:

$$\begin{aligned}(B_{m+k,k}(\mathbf{a}))^r &= \left(\frac{(m+k)!}{k!}\right)^r \sum_{j=0}^{n+mr} (-1)^{n+j} j^n \frac{(s(j+1)+k)!}{(m+s(j+1)+k)!} \\ &\quad \times \binom{n+mr+1}{j+1} \left(B_{m+s(j+1)+k,s(j+1)+k}(\mathbf{a})\right)^r\end{aligned}$$

qui devient quand on remplace m par $m-k$:

$$\begin{aligned}(B_{m,k}(\mathbf{a}))^r &= \left(\frac{m!}{k!}\right)^r \sum_{j=0}^{(m-k)r} (-1)^j \frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!} \\ &\quad \times \binom{(m-k)r+1}{j+1} \left(B_{m+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a})\right)^r.\end{aligned}$$

En particulier, on a

$$\begin{aligned}\left(\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}\right)^r &= \left(\frac{m!}{k!}\right)^r \sum_{j=0}^{(m-k)r} (-1)^j \frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!} \binom{(m-k)r+1}{j+1} \left(\left\{\begin{matrix} m+s(j+1) \\ k+s(j+1) \end{matrix}\right\}\right)^r, \\ \left(\left\{\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right\}_{\leq m}\right)^r &= \left(\frac{m!}{k!}\right)^r \sum_{j=0}^{(m-k)r} (-1)^j \frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!} \binom{(m-k)r+1}{j+1} \left(\left\{\begin{matrix} m+s(j+1) \\ k+s(j+1) \end{matrix}\right\}_{\leq m}\right)^r, \\ \left(\left[\begin{matrix} m \\ k \end{matrix}\right]\right)^r &= \left(\frac{m!}{k!}\right)^r \sum_{j=0}^{(m-k)r} (-1)^j \frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!} \binom{(m-k)r+1}{j+1} \left(\left[\begin{matrix} m+s(j+1) \\ k+s(j+1) \end{matrix}\right]\right)^r, \\ (L(m,k))^r &= \left(\frac{m!}{k!}\right)^r \sum_{j=0}^{(m-k)r} (-1)^j \frac{(k+s(j+1))!}{(m+s(j+1))!} \binom{(m-k)r+1}{j+1} \times \\ &\qquad (L(m+s(j+1), k+s(j+1)))^r.\end{aligned}$$

Une extension. Soit $(f_n(x))$ une suite du type binomiale de fonction génératrice exponentielle

$$\sum_{n\geq 0} f_n^{(i)}(x) \frac{t^n}{n!} = \exp\left(x \sum_{j\geq 1} a_{ij} \frac{t^j}{j!}\right), \quad i = 1, \ldots, r.$$

Puis, de l'identité (2.11) on a

$$\begin{aligned} f_{m_1}^{(1)}(x)\cdots f_{m_r}^{(r)}(x) &= \sum_{j=0}^{m_1+\cdots+m_r} (-1)^j \binom{m_1+\cdots+m_r+1}{j+1} \\ &\quad \times f_{m_1}^{(1)}(x-(j+1)z)\cdots f_{m_r}^{(r)}(x-(j+1)z), \end{aligned}$$

et par la relation

$$B_{n+k,k}(\mathbf{a}) = \binom{n+k}{n} f_n(k),$$

en posant $x=k$ et $z=-s$ et $\mathbf{a}_i = (\mathbf{a}_{i1}, \mathbf{a}_{i2}, \ldots)$, il s'ensuit

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+k,k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k}{k}} &= \sum_{j=0}^{n+m_1+\cdots+m_s} (-1)^{j+n} j^n \binom{n+m_1+\cdots+m_s+1}{j+1} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+s(j+1)+k,s(j+1)+k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+s(j+1)+k}{s(j+1)+k}}, \\ \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i,k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i}{k}} &= \sum_{j=0}^{n+m_1+\cdots+m_r-rk} (-1)^{j+n} j^n \binom{n+m_1+\cdots+m_r-rk+1}{j+1} \\ &\quad \times \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+s(j+1),s(j+1)+k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+s(j+1)}{s(j+1)+k}}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+k,k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k}{k}} &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k+s(j+1)}{k+s(j+1)}}, \\ n &= m_1+\cdots+m_r. \\ \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+k,k}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k}{k}} &= \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \prod_{i=1}^{r} \frac{B_{m_i+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}_i)}{\binom{m_i+k+s(j+1)}{k+s(j+1)}}, \\ \prod_{i=1}^{r} B_{m_i+k,k}(\mathbf{a}_i) &= \sum_{j=0}^{n-2r} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \prod_{i=1}^{r} B_{m_i+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}_i), \\ n &= m_1+\cdots+m_r, \quad m_1 \geq 2, \ldots, m_r \geq 2. \end{aligned}$$

On a aussi

$$\begin{aligned}
w &\in \{-1,0,1,2,\ldots\}, \quad \mathbf{a}_i=(a_{i1},a_{i2},a_{i3},\cdots), \ \mathbf{a}=(a_1,a_2,\ldots): \\
&\prod_{i=1}^{r}\left[\binom{m_i+k}{k}^{w} B_{m_i+k,k}(\mathbf{a}_i)\right] \\
&= \sum_{j=0}^{n-(w+1)r} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \prod_{i=1}^{r}\left[\binom{m_i+k+s(j+1)}{k+s(j+1)}^{w} B_{m_i+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}_i)\right], \\
&\left[\binom{m+k}{k}^{w} B_{m+k,k}(\mathbf{a})\right]^{r} \\
&= \sum_{j=0}^{(m-w-1)r} (-1)^j \binom{mr+1}{j+1} \left[\binom{m+k+s(j+1)}{k+s(j+1)}^{w} B_{m+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a})\right]^{r}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=1}^{w-1}\binom{m+k-k_i}{k-i-1}\right) B_{m+k-k_w,k-w}(\mathbf{a}) \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n+1}{j+1}\left(\prod_{i=1}^{w-1}\binom{m+k+s(j+1)-k_i}{k+s(j+1)-i-1}\right) B_{m+k+s(j+1)-k_w,k+s(j+1)-w}(\mathbf{a}) \\
k_i &= l_1+\cdots+l_i \geq i, \\
&\left(\prod_{i=1}^{w-1}\binom{m+k+w-k_i}{k+w-i-1}\right) B_{m+k+w-k_w,k}(\mathbf{a}) \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{n+1}{j+1}\left(\prod_{i=1}^{w-1}\binom{m+k+w+s(j+1)-k_i}{k+w+s(j+1)-i-1}\right) B_{m+k+w+s(j+1)-k_w,k+s(j+1)}(\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

D'où l'identité

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=k}^{k+w}\binom{m+i+1}{m+1}\right) B_{m+k,k}(\mathbf{a}). \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+1}{j+1}\left(\prod_{i=k}^{k+w}\binom{m+i+s(j+1)+1}{m+1}\right) B_{m+k+s(j+1),k+s(j+1)}(\mathbf{a}).
\end{aligned}$$

Par exemple, pour $\mathbf{a}=(1,1,1,\ldots)$ on aura $B_{n,k}(\mathbf{a})=\left\{ n \atop k \right\}$ et par suite

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=k}^{k+w}\binom{m+i+1}{m+1}\right) \left\{ m+k \atop k \right\}. \\
&= \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+1}{j+1}\left(\prod_{i=k}^{k+w}\binom{m+i+s(j+1)+1}{m+1}\right) \left\{ m+k+s(j+1) \atop k+s(j+1) \right\}.
\end{aligned}$$

pour $\mathbf{a} = (0!, 1!, 2!, \ldots)$ on aura $B_{n,k}(\mathbf{a}) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ et par suite

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=k}^{k+w} \binom{m+i+1}{m+1}\right) \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} \\
= & \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+1}{j+1} \left(\prod_{i=k}^{k+w} \binom{m+i+s(j+1)+1}{m+1}\right) \begin{bmatrix} m+k+s(j+1) \\ k+s(j+1) \end{bmatrix}.
\end{aligned}$$

pour $\mathbf{a} = (1!, 2!, \ldots)$ on aura $B_{n,k}(\mathbf{a}) = L(n,k)$ et par suite

$$\begin{aligned}
&\left(\prod_{i=k}^{k+w} \binom{m+i+1}{m+1}\right) L(n+k,k) \\
= & \sum_{j=0}^{m} (-1)^j \binom{m+1}{j+1} \left(\prod_{i=k}^{k+w} \binom{m+i+s(j+1)+1}{m+1}\right) L(m+k+s(j+1), k+s(j+1)).
\end{aligned}$$

Chapitre 3

Deux formules fonctionnelles et leurs applications

3.1 Introduction

Une des techniques, est basée sur la formule de Taylor Mac-Laurin d'une fonction f indéfiniment dérivable dans un voisinage d'un point $a \in \mathbb{R}$ donnée par

$$f(t) = \sum_{n \geq 1} \frac{(t-a)^n}{n!} D_{u=a}^n f(u).$$

Une deuxième technique est basée sur la formule d'inversion de Lagrange définie, pour la donnée des fonctions f, F analytiques dans un voisinage de zéro et de l'équation $z = tf(z)$, par

$$F(z) = F(0) + \sum_{n \geq 1} \frac{t^n}{n!} D_{u=a}^{n-1} \left(F'(u) (f(u))^n \right).$$

Dans cette thèse, basée sur l'identité polynômiale (2.9), nous essayons de donner quelques formules pour les fonctions génératrices de polynômes.
Nous établirons dans cette section une formule pour les fonctions génératrices de polynômes basée sur l'identité (2.9) et une autre formule basée sur la formule de Melzak. Effectivement, soit $(a_n; n \in \mathbb{N})$ une suite de nombres réels, $(P_n(z); n \in \mathbb{N})$ une suite de polynômes et soit $E(.)$ et $F(.)$ leurs fonctions génératrices définies par

$$E(t) = \sum_{n \geq 0} a_n t^n, \qquad F(t) = \sum_{n \geq 0} P_n(z) t^n, \qquad |t| < \mu, \quad \mu > 0$$

L'outil utilisé ici est le théorème suivant :

Théorème 41 *[47] Supposons que $c_{n,m} \in \mathbb{C}$ pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ et que ϕ une application de $\mathbb{N}$ sur $\mathbb{N}^2$.Si l'une des trois sommes.*

$$i)\quad \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\left|c_{m,n}\right|\right),\quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty}\left|c_{m,n}\right|\right),\quad \sum_{k=1}^{\infty}\left|c_{\phi(k)}\right| \tag{3.1}$$

est finie, alors toutes les séries

$$ii)\ \sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n} \quad m \in \mathbb{N}^*,$$
$$iii)\ \sum_{m=1}^{\infty} c_{m,n} \quad m \in \mathbb{N}^*,$$
$$iv)\ \sum_{m=1}^{\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_{m,n}\right),\ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{m=1}^{\infty} c_{m,n}\right),\ \sum_{k=1}^{\infty} c_{\phi(k)}$$

sont absolument convergentes et les trois séries de (iv) ont toute la même somme.

3.2 Deux formules fonctionnelles

Une première formule est basée sur l'identité (2.9) établie ci-dessus et est donnée par le théorème suivant :

Théorème 42 *[28]Si pour tout entier naturel m les séries*

$$\sum_{n\geq 0}\left(\sum_{k\geq 1}\left|a_n \frac{(-t)^k}{k!} D^k\left\{t\left(-(k-1)\,t\right)^n F\left(t;-(k-1)\,z\right)\right\}\right|\right),$$

convergent sur $\mathcal{D} \subset \left]-\mu,\mu\right[$, alors, on a

$$\sum_{k\geq 1}\frac{(-t)^k}{k!} D^k\left\{tE\left(-(k-1)\,t\right) F\left(t;-(k-1)\,z\right)\right\} = -tE(t)\,F(t,z)\,,\quad t\in\mathcal{D} \tag{3.2}$$

Preuve. Par l'identité (2.9) on peut écrire

$$\begin{aligned}
F(t,z) &= \sum_{m\geq 0} P_m(z)\,t^m \\
&= \sum_{m\geq 0}\left(\sum_{k=0}^{n+m}(-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} P_m(-kz)\right) t^m \\
&= -\sum_{k\geq 0}(-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!}\sum_{m\geq \max(k-n,0)} \frac{(n+m+1)!}{(n+m-k)!} P_m(-kz)\,t^m
\end{aligned}$$

$$= -\sum_{k=0}^{n} (-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{m\geq 0} \frac{(n+m+1)!}{(n+m-k)!} P_m(-kz)\, t^m$$
$$- \sum_{k\geq n+1}^{n} (-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} \sum_{m\geq k-n} \frac{(n+m+1)!}{(n+m-k)!} P_m(-kz)\, t^m.$$

Alors, on a

$$\begin{aligned} t^{n+1}F(t,z) &= -\sum_{k=0}^{n} (-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} D^{k+1}\left(t^{n+1}\sum_{m\geq 0} P_m(-kz)\, t^m\right) \\ &\quad - \sum_{k\geq n+1}^{n} (-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} D^{k+1}\left(t^{n+1}\sum_{m\geq k-n} P_m(-kz)\, t^m\right) \\ &= -\sum_{k=0}^{n} (-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} D^{k+1}\left\{t^{n+1}F(t,-kz)\right\} \\ &\quad - \sum_{k\geq n+1}^{n} (-k)^n \frac{(-1)^{k+1}}{(k+1)!} D^{k+1}\left\{t^{n+1}F(t,-kz)\right\} - T_k(t)), \end{aligned}$$

où

$$T_k(t) = t^{n+1}\sum_{m=0}^{k-n-1} P_m(-kz)\, t^m$$

est un polynôme de degré inférieur où égal à k. Donc $T_k(t)$ disparait sous l'action de D^{k+1}. Par conséquent, on peut écrire

$$\begin{aligned} t^{n+1}F(t,z) &= -\sum_{k\geq 0} (-k)^n \frac{(-t)^{k+1}}{(k+1)!} D^{k+1}\left\{t^{n+1}F(t;-kz)\right\} \\ &= -\sum_{k\geq 1}^{n} (-1)^{n+k}(k-1)^n \frac{t^k}{k!} D^k\left\{t^{n+1}F(t;-(k-1)z)\right\} \\ &= -\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^k\left\{t(-(k-1)t)^n F(t;-(k-1)z)\right\}. \end{aligned}$$

Cette identité implique

$$\begin{aligned} tE(t)F(t;z) &= \sum_{n\geq 0} a_n t^{n+1}F(t;z) \\ &= -\sum_{n\geq 0} a_n\left(\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^k\left(t(-(k-1)t)^n F(t;-(k-1)z)\right)\right) \\ &= -\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^k\left(t\sum_{n\geq 0} a_n(-(k-1)t)^n F(t;-(k-1)z)\right) \end{aligned}$$

$$= -\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^k \left\{ tE\left(-(k-1)t\right) F\left(t; -(k-1)z\right) \right\}.$$

Pour $t \in \mathbb{C}$. Par le théoreme 41, une condition suffisante pour que l'identité principale soit telle que la série $\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k\geq 1} |c_{n,k}| \right)$ soit finie, où

$$c_{n,k} = \frac{(-t)^k}{k!} D^k \left\{ t\left(-(k-1)t\right)^n F\left(t; -(k-1)z\right) \right\} a_n.$$

□

Remarque 43 *Quand on utilise l'identité (2.11) au lieu de l'identité (2.9), dans le théorème 42, $F(t;z)$ sera remplacée par $F(t; y+z)$ et le théorème s'énonce comme suit :*
Si pour tout entier naturel m les séries

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^k \left\{ tE\left(-(k-1)t\right) F\left(t; y-(k-1)z\right) \right\} = -tE(t) F(t; y+z),$$

ou equivalent

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^k \left\{ tE\left(-(k-1)t\right) F\left(t; x-kz\right) \right\} = -tE(t) F(t; x). \tag{3.3}$$

Formule de Melzak

Soit $n \geq 0$ un entier naturel et $f(x)$ un polynôme de degré $\leq n$. Rappelons que la formule de Melzak est donnée par

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k \frac{f(x-k)}{y+k} = \frac{n! f(x+y)}{y(y+1)\ldots(y+n)}, \quad y \neq 0, -1, -2, \ldots, -n. \tag{3.4}$$

Cette formule a été tirée de [26, 27], bien qu'elle soit apparue beaucoup plus tôt dans l'étude fondamentale de Nielsen [38]. Après la publication de [26], la formule de Melzak a beaucoup attiré l'attention des chercheurs et a été étudiée et discutée par plusieurs auteurs, voir [18, 19, 20, 21, 42] .

Une deuxième formule est basée sur la formule de Melzak et est donnée par le théorème suivant :

Théorème 44 *[28] Soit s un entier positif. Si pour tout entier naturel n les séries*

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k\geq 1} \left| \frac{a_n}{(s-1)!} \frac{(-t)^k}{k!(k+s)} D^{k+s} \left\{ t^{n+s} F(t; z-s-k) \right\} \right| \right)$$

convergent pour $\mathcal{D} \subset \left]-\mu, \mu\right[$, *alors on a*

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s}\left\{t^s E(t)\, F(t; z-s-k)\right\} = E(t)\, F(t;z)\,, \quad t \in \mathcal{D} \tag{3.5}$$

$$\sum_{k\geq 1} \frac{(-t)^k}{k!} D^{k}\left\{t E(t)\, F(t; z-k)\right\} = -tE(t)\, F(t;z)\,, \quad t \in \mathcal{D}. \tag{3.6}$$

Preuve. De la formule de Melzak, on peut écrire

$$P_m(z) = \alpha \binom{\alpha+n+m}{n+m} \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{n+m}{k} \frac{P_m(z-\alpha-k)}{\alpha+k}, \quad m, n \in \mathbb{N}^*,$$

et pour $\alpha = s \geq 1$, il s'ensuit

$$P_m(z) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{k+s-1}{s-1} \binom{n+m+s}{k+s} P_m(z-k-s)\,. \tag{3.7}$$

Alors, de l'identité (3.7) et le théorème (41) on obtient

$$\begin{aligned}
F(t;z) &= \sum_{m\geq 0} P_m(z)\, t^m \\
&= \sum_{m\geq 0} \left(\sum_{k=0}^{n+m} (-1)^k \binom{k+s-1}{s-1} \binom{n+m+s}{k+s} P_m(z-k-s) \right) t^m \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+s)} \sum_{m\geq \max(0,k-n)} \frac{(n+m+s)!}{(n+m-k)!} P_m(z-k-s)\, t^m \\
&= \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+s)} \sum_{m\geq 0} \frac{(n+m+s)!}{(n+m-k)!} P_m(z-k-s)\, t^m \\
&\quad + \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq n} \frac{(-1)^k}{k!\,(k+s)} \sum_{m\geq k-n} \frac{(n+m+s)!}{(n+m-k)!} P_m(z-k-s)\, t^m,
\end{aligned}$$

ou encore

$$\begin{aligned}
t^n F(t;z) &= \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left(t^{n+s} \sum_{m\geq 0} P_m(z-k-s)\, t^m \right) \\
&\quad + \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq n} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left(t^{n+s} \sum_{m\geq 0} P_m(z-k-s)\, t^m \right) \\
&\quad - \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq n} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left(t^{n+s} \sum_{m=0}^{k-n-1} P_m(z-k-s)\, t^m \right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left\{ t^{n+s} F(t; z-s-k \right\}.$$

Cette dernière identité montre qu'on a

$$\begin{aligned} E(t)\,F(t;z) &= \sum_{n\geq 0} a_n t^{n+1} F(t;z) \\ &= \sum_{n\geq 0} a_n \left(\frac{1}{(s-1)!} \sum_{k\geq 0} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left\{ t^{n+s} F(t; z-s-k \right\} \right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left(t^s \sum_{n\geq 0} a_n t^n F(t; z-s-k \right) \\ &= \sum_{k\geq 0} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left\{ t^s E(t)\,F(t; z-s-k) \right\}. \end{aligned}$$

Pour $t \in \mathbb{C}$. Par le théorème (41), une condition suffisante pour que l'identité principale soit telle que la série

$$\sum_{n\geq 0} \left(\sum_{k\geq 1} |c_{n,k}| \right)$$

soit finie, où

$$c_{n,k} = \frac{a_n}{(s-1)!} \frac{(-t)^k}{k!\,(k+s)} D^{k+s} \left\{ t^{n+s} F(t; z-s-k) \right\}. \tag{3.8}$$

□

Exemple 45 *Pour*

$$E(t) = e^{\alpha t} \quad et \quad F(t;z) = e^{\beta t}$$

dans le théorème (42) on obtient pour $\alpha \neq 0$

$$\sum_{k\geq 1} \left((\beta - \alpha(k-1))\,t + k \right) (\beta - \alpha(k-1))^{k-1} \frac{\left(-te^{-\alpha t}\right)^k}{k!} = -t, \quad t \neq \frac{1}{\alpha}, \tag{3.9}$$

et pour $\alpha = 0$

$$\sum_{k\geq 1} (\beta t + k) \frac{(-\beta t)^k}{k!} = -\beta t.$$

En particulier, pour $\beta = 0$, $\alpha = 1$ *on obtient*

$$\sum_{k\geq 1} (-1)^k \left((k-1)t + k \right) (k-1)^{k-1} \frac{\left(te^{-t}\right)^k}{k!} = -t.$$

Pour les choix

$$\begin{aligned} E(t) &= (1+t)^{\alpha} \quad \text{et} \quad F(t;z)=1, \quad \alpha\in\mathbb{C}, \\ E(t) &= (1+t)^{m} \quad \text{et} \quad F(t;z)=1, \quad m\in\mathbb{N}, \end{aligned}$$

dans le théorème 42 on obtient :

Théorème 46 *Pour $t \in \left]-1,1\right[$ et $\alpha \in \mathbb{C}$ on a*

$$\sum_{k\geq 0}\binom{\alpha}{k}\left(1-\binom{\alpha+1}{k+1}kt\right)(kt)^{k}(1-kt)^{\alpha-k-1}=(1+t)^{\alpha}, \tag{3.10}$$

et pour $t\in\mathbb{C}$ et $m\in\mathbb{N}$ on a

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(1-\binom{m+1}{k+1}kt\right)(kt)^{k}(1-kt)^{m-k-1}=(1+t)^{m}, \quad t\in\mathbb{C}. \tag{3.11}$$

En particulier, pour $\alpha=-1$ dans (3.10) on obtient

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(-1)^{k}}{(1-kt)^{k+2}}k!\,(kt)^{k}=\frac{1}{(1+t)}, \quad t\in\left]-1,1\right[,$$

pour $\alpha=-m$ dans (3.10) on obtient

$$\sum_{k\geq 0}\binom{-m}{k}\left(1-\binom{-m+1}{k+1}kt\right)(kt)^{k}(1-kt)^{-m-k-1}=\frac{1}{(1+t)^{m}}, \quad t\in\left]-1,1\right[,$$

pour $t=1$ dans (3.11) on obtient

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(1-\binom{m+1}{k+1}k\right)(k)^{k}(1-k)^{m-k-1}=2^{m},$$

et pour $t=-1$ dans (3.11) on obtient

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^{k}\binom{m}{k}\left(\frac{(m+2)k+1}{k+1}\right)(k)^{k}(1+k)^{m-k-1}=0.$$

Exemple 47 *Pour*

$$E(t)=\frac{\sin t}{t} \quad \text{et} \quad F(t;z)=1$$

dans le théorème 42 on obtient

$$\sum_{k\geq 1}(k-1)^{k-1}\sin\left((k-1)t-k\frac{\pi}{2}\right)\frac{t^{k}}{k!}=-\sin t, \quad t\in\left]-e^{-1},e^{-1}\right[. \tag{3.12}$$

Exemple 48 *Pour*

$$E(t) = \cos t \quad et \quad F(t;x) = 1,$$

dans le théorème 42 on obtient

$$\sum_{k\geq 0} \frac{(-t)^k}{k!} D^k \{t\cos(-(k-1)t)\} = -t\cos t. \tag{3.13}$$

Exemple 49 *Pour*

$$E(t) = 1 \quad et \quad F(t;z) = e^{z\left(e^t-1\right)+rt},$$

dans le théorème 42 on obtient [30, Th. 9]

$$D^k F(t;z) = B_{k,r}\left(ze^t\right) e^{z\left(e^t-1\right)+rt}. \tag{3.14}$$

puis la formule (3.2) donne

$$\sum_{k\geq 0} \left(B_{k,r}\left(-kze^t\right) + \frac{t}{k+1} B_{k+1,r}\left(-kze^t\right)\right) \frac{\left(-te^{-z\left(e^t-1\right)}\right)^k}{k!} = e^{z\left(e^t-1\right)}. \tag{3.15}$$

Exemple 50 *Pour*

$$s = 1,\ E(t) = e^{\alpha t} \quad et \quad F(t;z) = e^{zt}, \quad \alpha \neq 0,$$

théorème 44 on obtient

$$\sum_{k\geq 0} (k - (\lambda - k)t)(k-\lambda)^{k-1} \frac{\left(te^{-t}\right)^k}{k!} = -t, \quad t \neq 1, \quad \lambda = \alpha + z.$$

Exemple 51 *Pour*

$$s = 1,\ E(t) = 1 \quad et \quad F(t;z) = e^{z\left(e^t-1\right)+rt},$$

théorème 44 on obtient

$$\sum_{k\geq 0} \left(B_{k,r}\left(-kze^t\right) + \frac{1}{k+1} B_{k+1,r}\left(-kze^t\right)\right) \frac{\left(-te^{-z\left(e^t-1\right)}\right)^k}{k!} = e^{z\left(e^t-1\right)}. \tag{3.16}$$

3.2.1 Applications aux polynômes r-Bell

Soit $(\mathcal{B}_{n,r}(z)\,; n \in \mathbb{N})$ une suiteé polynomiale de r-Bell et soit

$$\begin{aligned} B_r(t;z) &= e^{z\left(e^t-1\right)+rt} := \sum_{n\geq 0} \mathcal{B}_{n,r}(z)\frac{t^n}{n!}, \\ F_j(t;z) &= \sum_{n\geq j} \mathcal{B}_{n-j,r}(z)\frac{t^n}{n!}, \quad j \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

De l'identité (2.9), il s'ensuit que la suite $(\mathcal{B}_{n,r}(z)\,; n \in \mathbb{N})$ admet la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{B}_{m,r}(z) = \sum_{k=0}^{n+m} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+m+1}{k+1} \mathcal{B}_{m,r}(-kz).$$

Puisque $D^k B_r(t;z) = \mathcal{B}_{k,r}(ze^t)\, e^{z\left(e^t-1\right)+rt}$ [32, Th. 9] et $B_r(t;z) = D^j F_j(t;z)$, alors

$$D^{k+j} F_j(t;z) = \mathcal{B}_{k,r}\left(ze^t\right) e^{z\left(e^t-1\right)+rt}.$$

Pour $E(t) = t^{j-1}$ et $F_j(t;z) = t^{-j} B_j(t;z)$, $j \geq 1$, dans la formule (3.2) on obtient :

$$\begin{aligned} &\sum_{k\geq j+1} (k-1)^{j-1} \mathcal{B}_{k-j,r}\left(-(k-1)\, ze^t\right) \frac{(w(t))^k}{k!}, \\ &= -e^{-z\left(e^t-1\right)-rt} \sum_{k=0}^{j} (k-1)^{j-1} F_{j+k}(t; -(k-1)\, z) \frac{(-t)^k}{k!}. \end{aligned} \tag{3.17}$$

où $w(t) = -te^{-z\left(e^t-1\right)}$.
En particulier, pour $j = 1$ dans l'identité 3.17, on trouve

$$\begin{aligned} t\sum_{k\geq 2} \mathcal{B}_{k-1,r}\left(-(k-1)\, ze^t\right) \frac{w^k}{k!} &= e^{-rt} w(t) \left(F_1(t;z) - tF_2(t;0)\right), \\ &= e^{-rt} w(t) \left(\int_0^t e^{z(e^x-1)+rx} dx - \frac{t}{r^2}\left(e^{rt} - 1 - rt\right)\right), \end{aligned}$$

et pour $j = 0$ dans l'identité 3.17, on trouve

$$\begin{aligned} \sum_{k\geq 1} \mathcal{B}_{k-1,r}\left((z-k)\, e^t\right) \frac{(w(t))^k}{k!} &= -e^{-z\left(e^t-1\right)-rt} F_1(t;z), \\ &= -e^{-ze^t-rt} \int_0^t e^{ze^x+rx} dx. \end{aligned}$$

3.2.2 Applications à une classe de polynômes

Ou $L(n,k)$ désignent les nombres de Lah. Soit

$$F_j(t;z)=\sum_{n\geq 1}\mathbf{L}_{n-j}^{(\alpha,\beta)}(z)\frac{t^n}{n!},\quad j=0,1,2,\ldots.$$

On sait qu'on a [34, 35]

$$(1-t)^k D^k L_{\alpha,\beta}(t;z)=\mathbf{L}_k^{(\alpha,\beta)}\left(z(1-t)^{\beta}\right)L_{\alpha,\beta}(t;z).$$

Puis, de

$$L_{\alpha,\beta}(t;z)=D^jF_j(t;z),$$

on donne

$$D^{k+j}F_j(t;z)=\mathbf{L}_k^{(\alpha,\beta)}\left(z(1-t)^{\beta}\right)(1-t)^{-k}L_{\alpha,\beta}(t;z),$$

Pour $E(t)=t^{j-1}$ et $F(t;z)=t^{-j}F_j(t;z)$, $j\geq 1$, dans la formule (3.2) on obtient

$$\begin{aligned}&t(1-t)^{\alpha+j-1}\sum_{k\geq j+1}(-(k-1))^{j-1}\mathbf{L}_k^{(\alpha,\beta)}\left(-(k-1)z(1-t)^{\beta}\right)\frac{(w(t))^k}{k!}\\
=\ &w(t)\sum_{k=0}^{j}(-(k-1))^{j-1}F_{j+k}(t;-(k-1)z)\frac{(-t)^k}{k!},\end{aligned}$$

ou $w(t)=-\frac{t}{1-t}\exp\left(-z\left((1-t)^{\beta}-1\right)\right)$. Ceci donne pour $j=1$:

$$t(1-t)^{\alpha}\sum_{k\geq 2}\mathbf{L}_k^{(\alpha,\beta)}\left(-(k-1)z(1-t)^{\beta}\right)\frac{(w(t))^k}{k!}=w(t)\left(F_1(t;z)-tF_2(t;0)\right),$$

et pour $j=0$, donne

$$t\sum_{k\geq 1}\mathbf{L}_{k-1}^{(\alpha,\beta)}\left((z-k)(1-t)^{\beta}\right)\frac{w^k}{k!}=-(1-t)^{-\alpha}wF_1(t;z).$$

3.2.3 Applications aux polynômes $\langle z\rangle_m$ et $(z)_m$

Pour $F_j(t;z)=\sum_{m\geq j}z^{m-j}\frac{t^m}{m!}$ on donne

$$F_1(t;z)=\frac{e^{zt}-1}{z}\quad\text{et}\quad D^kF_1(t;z)=z^{k-1}e^{zt}.$$

Puis, par la formule (3.2) avec

$$E(t)=1 \quad \text{et} \quad F(t;z)=t^{-1}F_1(t;z),$$

on obtient

$$\sum_{k\geq 0}\frac{(kw(t))^k}{k!}=-\frac{d}{dw(t)}\left(e^{-u(t)}\right)=\frac{e^{u(t)}}{1-u(t)}, \quad w(t)=u(t)\,e^{-u(t)}, \tag{3.18}$$

et par la formule (3.5) avec

$$s=1,\; E(t)=1 \quad \text{et} \quad F(t;z)=t^{-1}F_1(t;z),$$

on obtient

$$z\sum_{k\geq 0}(k+1-z)^k\frac{(w(t))^k}{k!}=-\frac{d}{dw(t)}\left(e^{-zu(t)}\right)=ze^{-zu(t)}\frac{du}{dw}, \quad w(t)=u(t)\,e^{-u(t)}.$$

Cette dernière identité montre que $\frac{du}{dw}$ est indépendante de z. Donc $\frac{d}{dz}\left(\frac{du}{dw}\right)=0$, i.e.

$$\sum_{k\geq 0}(k+1-z)^k\frac{(w(t))^k}{k!}=e^{-u(t)}\sum_{k\geq 0}(k+2-z)^k\frac{(w(t))^k}{k!}.$$

si on pose

$$M_s:=\sum_{k\geq 0}(k-s)^k\frac{(w(t))^k}{k!},$$

il résulte que

$$M_s=e^{-u(t)}M_{s-1}\rightarrow M_s=e^{-su(t)}M_0=\sum_{k\geq 0}\frac{(kw(t))^k}{k!},$$

qui donne à l'aide de l'dentité (3.18)

$$\sum_{k\geq 0}(k-s)^k\frac{(w(t))^k}{k!}=e^{-su(t)}\sum_{k\geq 0}\frac{(kw(t))^k}{k!}=\frac{e^{-(s-1)u(t)}}{1-u(t)}, \quad w(t)=u(t)\,e^{-u(t)}$$

qui peut être étendue à

$$\sum_{k\geq 0}(k+\alpha)^k\frac{(w(t))^k}{k!}=\frac{e^{(\alpha+1)u(t)}}{1-u(t)}, \quad \alpha\in\mathbb{C}.$$

Posons

$$(z)_m:=z(z-1)\cdots(z-m+1) \text{ si } m\geq 1 \quad \text{et} \quad (z)_0:=1$$

et
$$\binom{z}{m} := \frac{(z)_m}{m!}.$$
Pour $P_m(z) = \binom{-z}{m}^r$, l'identité (2.9) implique
$$\sum_{k=0}^{n+mr} (-1)^{n+k} k^n \binom{n+mr+1}{k+1} \binom{kz}{m}^r = \binom{-z}{m}^r, \quad m \geq 0,\ n \geq 0.$$
Pour $F_j(t;z) = \sum_{m\geq 1} (-z)_{m-j} \frac{t^m}{m!}$ on donne
$$F_1(t;z) = \frac{1}{1-z}\left((1+t)^{1-z} - 1\right) \quad \text{et} \quad D^k F_1(t;z) = (-z)_{k-1}(1+t)^{1-z-k}.$$
Puis, par (3.2) avec
$$E(t) = 1 \quad \text{et} \quad F(t;z) = t^{-1} F_1(t;z)$$
on obtient
$$\sum_{k\geq 0} (-1)^k \binom{kz}{k} w^k = \frac{1}{1-z} \frac{d}{dw} (1+t)^{1-z}, \quad w = t(1+t)^{z-1},$$
et de (3.5) avec
$$s = 1,\ j = 0,\ E(t) = 1 \quad \text{et} \quad F(t;z) = t^{-1} F_1(t;z),$$
on obtient l'identité connue
$$\sum_{k\geq 0} \binom{z-2}{k} t^k = (1+t)^{z-2}.$$

Conclusion

L'étude des propriétés d'une suite polynomiale est grandement simplifiée par l'étude de la série génératrice ou fonction génératrice (exponentielle) formelle associée. L'étude de propriétés des séries formelles et la découverte d'identités vérifiées par des séries formelles particulières peut aboutir à l'obtention d'identités remarquables et surprenantes vérifiées pour certaines suites polynomiales. Les résultats que l'on a obtenus pourraient avoir des applications en combinatoire, en algèbre et en analyse.

Par exemple, à partir du lien entre les polynômes binomiaux et les polynômes partiels de Bell [32, Prop. 1], l'identité principale de cette thèse

$$P_m\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n+m}\left(-1\right)^{n+k}k^n\binom{n+m+1}{k+1}P_m\left(x-\left(k+1\right)z\right)$$

peut être exploitée pour établir de nouvelles identités sur les polynômes partiels de Bell, les polynômes partiels r-Bell introduits par Mihoubi et Rahmani [33] ainsi que sur de nombreux polynômes ayant des applications connues en combinatoire, en algèbre, etc. Les exemples donnés dans le chapitre deux donnent un impact important sur cette identité.

De plus, les théorèmes 42 et 44 peuvent être exploités pour développer plusieurs fonctions génératrices comme il est montré dans le chapitre trois. Ils peuvent également être considérés comme de nouvelles formules jouant un rôle assez important que d'autres formules célèbres. Les exemples donnés dans le chapitre trois prouvent une importance capitale.

L'identité ci-dessus et les deux théôrèmes 42 et 44 avec leurs applications ont fait l'objet d'une publication internationnale, qui pourra être exploitée pour réaliser d'autres résultats plus généraux.

En effet, l'identité polynomiale ainsi obtenue peut nous révéler d'autres applications sur des polynômes de partitions tels que les partiels r-Bell. Il s'agit de la recherche de nouvelles identités sur les nombres r-Stirling, r-Whitney et r-Lah ainsi que leurs exploitations en congruence.

Aussi, la recherche d'autres identités polynomiales de même type est un projet à entamer plus tard. Des applications sur les séries hypergéométriques des théôrèmes 42 et 44 peuvent être vues comme un travail ultérieur.

Bibliographie

[1] M. Abbas, S. Bouroubi, On new identities for Bell's polynomials, *Discrete Math.,* 293 (2005) 5–10.

[2] J.C. Ahuja and E.A. Enneking, Concavity property and a recurrence relation for associated Lah numbers, *Fibonacci Quart.,* 17 (2) (1979) 158-161.

[3] P. Appell, Sur une classe de polynômes, *Ann. Sci. Ecole Norm. Sup.*, 9 (1880) 119-144.

[4] G.B. Arfken, H.J. Weber and F.E. Harris, *Mathematical Methods for Physics, Comprehensive Guide,* Academic Press, Oxford, 2011.

[5] R. Askey. Jacobi's generating function for Jacobi polynomials, *Proc. Amer. Math. Soc.,* 71 (1978) 243-246.

[6] B-N. Guo and F. Qi, Six proofs for an identity of the Lah numbers, *OJAC : Online Journal of Analytic Combinatorics,* 10 (2015).

[7] P. Barry, Some observations on the Lah and Laguerre transforms of integers sequences, *J. Integer Seq.,* 10 (2007) Art. 07.4.6.

[8] E.T. Bell, Exponential polynomials, *Ann. Math.,* 35 (1934) 258-277.

[9] F. Bencherif, A new recursion relationship for Bernoulli Numbers, *Annales Mathematicae and Informaticae*, 38 (2011) 123-126.

[10] M. Benoumhani, On Whitney numbers of Dowling lattices, *Discrete Math.,* 159 (1996) 13-33.

[11] Y.A. Brychkov, *Handbook of Special Functions : Derivatives, Integrals, Series and Other Formulas,* Chapman and Hall/CRC, 2008.

[12] A.Z. Broder, The r-Stirling numbers, *Discrete Math.,* 49 (1984) 241-259.

[13] L. Carlitz, The generating functions for the Jacobi polynomials, *Rend. Sem. Math. Univ. Padova*, 38 (1967) 86-88.

[14] L. Carlitz, Some generating functions for Laguerre polynomials, *Duke Math. J.,* 35 (1968) 826-827.

[15] G-S. Cheo, J-H. Jung, The r-Whitney numbers of Dowling Lattices, *Discète Math.,* 312 (15) (2012) 2337-2348.

[16] Comtet, *Advanced Combinatorics,* D. Reidel Publishing Company,. Dordrecht-Holland / Boston-U.S.A, (1974).

[17] S. Daboul, J. Mangaldan, M.Z. Spivey, P.J. Taylor, The Lah Numbers and the nth Derivative of exp(1/x), *Math. Magazine,* 86 (1) (2013) 39–47.

[18] Henry. W. Gould, Higher extensions of Melza's formula, *Util. Math.,* 72 (2007), 23-32.

[19] Henry. W. Gould, A note on combinatorial identities arising from the Lagrange-Waring interpolation formula, *Ars Comb.,* 86 (2008) 281-288.

[20] Henry. W. Gould, *Combinatorial identities,* Published by the author, 1972.

[21] Henry. W. Gould, *Jocelyn Quaintance, Combinatorial Identities for Stirling Numbers : The Unpublished Notes of H. W. Gould,* World Scientific, 2015.

[22] C. Jordan, *Calculus of Finite Difference,* Chelsea, New York, 1947.

[23] J.D.E. Konhauser, Biorthogonal polynomials suggested by the Laguerre polynomials. *Pacific. J. Math.,* 21 (1967) 303-314.

[24] N.N. Lebedev, *Special functions & their applications,* Dover,1972.

[25] W. Magnus, F. Oberhetting, R.P. Soni, *Formulas and theorems for the special functions of Mathematical Physics*, Springer-Verlag, New York, 1966.

[26] Z.A. Melzak, V.D. Gokhale and W.V. Parker, Advanced problems and solutions : 4458, *Amer. Math. Monthly,* 60 (1) (1953) 53-54.

[27] Z.A. Melzak. D.J. Newman, P. Erdos, G. Grossman and M.R. Spiegel, Advanced problems and solutions : 4458, *Amer. Math. Monthly,* 58 (9) (1951) p. 636.

[28] A. Messahel and M. Mihoubi, On the sequences of polynomials and their generating functions, *Bol. Soc. Paran. Mat.,* in press.

[29] I. Mező, On the maximum of r-stirling numbers, *Adv. Appl. Math.,* 41(2008) 293-306.

[30] M. Mihoubi, Bell polynômials and binomial type sequences, *Discrète Math.,* 308 (2008) 2450-2459.

[31] M. Mihoubi, Partial Bell Polynomials and Inverse Relations, *J. Integer Seq.,* 13 (2010) Art. 10.4.5.

[32] M. Mihoubi and M.S. Maamra, The $(r_1, ..., r_p)$-Bell polynomials, *Integers,* 14 (2014) Art. A34.

[33] M. Mihoubi and M. Rahmani, The partial r-Bell polynomials, *Afr. Mat.,* 28(7-8) (2017) 1167-1183.

[34] Miboubi and M. Sahari, On some polynomials applied to the theory of hyperbolic differential equations, *OJAC : Online Journal of Analytic Combinatorics,* 15 (2020) Art. 2.

[35] M. Mihoubi and M. Sahari, On a class of polynomials connected to Bell polynomials, Arxiv (2018), avalaible at : http ://arxiv.org/abs/1801.01588v2.

[36] M. Mihoubi and Y. Saidi, An application of the partial r-Bell polynomials on some family of bivariate polynomials, (2018), avalaible at : https ://arxiv.org/abs/1801.01915v3

[37] M. Mihoubi and M. Tiachachat, Some applications of the r-Whitney numbers, *C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I,* 352 (2014) 965–969.

[38] N. Nielsen, *Traité élémentaire des nombres de Bernoulli,* Gauthier-villars, Paris,1923.

[39] N. Nielsen, *Hundbuch der Theorie der Gammafunktion,* B.G. teubner, Leipzig, 1906 ; reprinted under the title : Die Gammafunktion, (Chelsea, New York, 1965).

[40] F.W.J. Olver, D.W. Lozier, R.F. Boisvert and C.W. Clark, *NIST Handbook of Mathematical Functions,* Cambridge University Press, 2010.

[41] M. Petkovsek and T. Pisanski, Combinatorial interpretation of unsigned Stirling and Lah numbers, *Univ. of Ljubljana,* Preprint 40 (2002).

[42] H. Prodinger, Identities involving harmonic numbers that can be of interest to physicists, *Util. Math.,* 83 (2010) 291-299.

[43] E.D. Rainville, *Spécial functions,* Chelsea, New York, 1958.

[44] J. Riordan, *An Introduction to Combinatorial Analysis,* John Wiley, New York, 1958.

[45] H.M. Sristava and J.P. Singhal, New generating functions for Jacobi and related polynomials, *J. Math. Anal. Appl.,* 41 (1973) 748-752.

[46] J. Stirling, *Methodus Differentialis,* Sive Tractatus De Summatione et Interpolazione Serierum Infinitorum, London, 1730.

[47] K.R. Stromberg, *Introduction to classical real analysis,* Wadsworth, (1981).

[48] G. Szegô, *Orthogonal polynomials,* Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1939 (second printing of the fourth edition : 1978).

[49] C. Tweedie, James Stirling, *A Sketch of his Life and Works,* Clarcndon Press, Oxford, 1922.

[50] W. Wang and T. Wang, General identities on Bell polynomials, *Comput. Math. Appl.,* 58 (1) (2009), 104–118.

[51] H.S. Wilf, *Generating functionology, 2nd edition,* Academic Press, San Diego, 1994.