

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTE DE MATHEMATIQUES



THESE de Doctorat
Présentée pour l'obtention du grade de docteur

EN : MATHEMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : Amrouche Said

Sujet

Modélisation de suites récurrentes linéaires par des triangles arithmétiques

Soutenue Publiquement le 07/01/2021, devant le jury composé de :

M. M. BOUDHAR,	Professeur à l'U.S.T.H.B,	Président
M. H. BELBACHIR,	Professeur à l'U.S.T.H.B,	Directeur de thèse
M. M. MIHOUBI,	Professeur à l'U.S.T.H.B,	Examinateur
M. M. A. BOUTICHE,	Maitre de conférence/A à l'U.S.T.H.B,	Examinateur
M. M. AHMIA,	Maitre de conférence/A à l'U.M.S.B.Y, Jijel,	Examinateur
M. N. IRMAK,	Maitre de conférence/A à l'U.O.H, Turquie,	Examinateur

Remerciements

*Je remercie, tout d'abord **ALLAH**, le tout puissant, qui m'a donné le courage et la patience pour réaliser ce travail.*

Je tiens à exprimer ma gratitude et ma reconnaissance à Monsieur Hacène Belbachir, mon directeur de thèse, Professeur à l'U.S.T.H.B pour m'avoir proposé ce sujet, guidé dans mes recherches et dirigé cette thèse. Je le remercie également pour, sa patience, sa disponibilité, son soutien continu et pour son aide précieuse. Je lui suis redevable de m'avoir aidé à mieux comprendre les problèmes de la combinatoire et de la Théorie des nombres.

Mes sincères remerciements s'adressent aux personnes qui m'ont fait l'honneur de faire partie du Jury de ma thèse.

à Monsieur Mourad Boudhar, Professeur à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur de présider ce Jury. à Messieurs Miloud Mihoubi (Professeur à l'USTHB), Nurettin Irmak (Maitre de conférence à l'université de Omer Halisdemir, Nigde, Turquie), Mohamed Amine Boutiche (Maitre de conférence à l'USTHB) et Moussa Ahmia (Maitre de conférence à l'université Mohamed Seddik Ben Yahia, Jijel)

Je remercie mes collègues de l'USTHB : Ahmia Moussa, Abdelghani Mehdaoui, Yahia Djemmada, Amine Belkhir, Imène Touaibia pour leur disponibilité et leur aide

Enfin, je remercie bien sûr ceux qui ont fait de moi ce que je suis, ceux grâce à eux tant d'années d'études ont été possibles, ceux envers qui j'ai une dette imprescriptible : ma Mère et mon père. Un grand merci à mon frère Karim et ma sœur Amina.

Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le Domaine de la combinatoire énumérative, une partie de cette thèse est consacrée pour l'étude de quelques problèmes qui ont une relation avec la théorie des nombres.

Dans la première partie, nous étudions quelques propriétés liées aux triangles de Delannoy et Delannoy généralisé. Nous commençons par l'étude de l'unimodalité des suites parcourant les transversales infinies de ces triangles, nous montrons que la suite centrale du triangle de Delannoy inversé est log-convexe, nous déterminons l'expression des suites obtenues en sommant les éléments situés sur les transversales finies des triangles de Delannoy et Delannoy généralisé, ainsi que la fonction génératrice de cette somme. Finalement nous discutons le phénomène de Morgan-Voyce et nous proposons un q -analogue aux nombres de Delannoy.

Dans une seconde partie nous définissons le problème d'équilibre avec les coefficients situés sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy, nous donnons la solution complète pour les quatre premières transversales et nous montrons l'existence d'une solution dans le cas général. Puis nous proposons une extension du problème d'équilibre, appelé problème s -équilibre, nous montrons que la résolution de ce problème conduit à la résolution d'une équation de Pell généralisée, nous établissons trois relations de récurrence pour résoudre le problème s -équilibre, les fonctions génératrices et les formules explicites de ces récurrences sont aussi établies.

Dans la troisième partie nous introduisant une nouvelle famille de chemins de treilles pour définir une généralisation des triangles de Pascal et de Delannoy, ce triangle est appelé triangle quasi s -Pascal, nous proposons une formule explicite à ce triangle et nous donnons le liens entre le triangle quasi s -Pascal, le triangle des binomiaux et le triangle de Delannoy généralisé défini par Ramirez et Sirvent [53]. Nous établissons aussi l'expression des suite récurrentes obtenues en sommant les éléments situés sur les directions finies de ce triangle, particulièrement nous obtenons les termes de la suite s -bonacci. Nous donnons également quelques identités dont une est équivalente à la somme de De-Moivre et nous proposons un q -analogue au triangle quasi s -Pascal.

Dans la dernière partie, nous proposons une généralisation des triangle de Lucas et Tibonacci-Lucas appelée quasi s -Lucas.

Mots clés : Triangle de Pascal, triangle de Delannoy, Unimodality, log-convexity, suites récurrentes, Morgan-Voyce, q -analogue, nombres d'équilibre, équation de Pell, chemin de treillis, triangle de quasi s -Pascal, triangle quasi s -Lucas.

Abstract

This thesis comes within the scope of enumerative combinatorics, a part of this thesis is devoted to the study of some problems in relation with number theory.

In the first part, we study some properties related to Delannoy and generalized Delannoy triangles. We start with the study of the unimodality of the sequences located along the infinite transversals of these triangles, we show that the central sequence of the inverse Delannoy triangle is log-convex, we also determine the expression of the sequences obtained by summing the elements located on the finite transversals of Delannoy and generalized Delannoy triangles, the generating function of this sum is also established. Finally we discuss the Morgan-Voyce phenomenon and we propose a q -analogue to the Delannoy numbers.

In a second part we define the balancing problem with the coefficients located on the direction $(1, -1)$ of the Delannoy triangle, we give the complete solution for the first four transversals and we show that there exists a solution in the general case. Then we propose a generalization of the balancing problem, called s -balancing problem, we show that the resolution of this problem leads to the resolution of a generalized Pell equation, we establish three recurrence relations to solve the s -balancing problem, the generating functions and the explicit formulas of these recurrences are also established.

In the third part, we introduce a new family of lattice paths to define a generalization of the Pascal and Delannoy triangles, this triangle is called quasi s -Pascal, we propose an explicit formula to this triangle and we give the links between the quasi s -Pascal triangle, the binomial triangle and the generalized Delannoy triangle defined by Ramirez and Sirvent [53]. We also establish the expression of the recurrence sequences obtained by summing the elements located on the finite directions of this triangle, particularly we obtain the terms of the s -bonacci sequence. We also give some identities, one of them is equivalent to the sum of de-Moivre and we propose a q -analogue to the quasi s -Pascal triangle.

In the last part, we propose a generalization of Lucas and Fibonacci-Lucas triangles called quasi s -Lucas triangle

Keywords : Pascal triangle, Delannoy triangle, Unimodality, log-convexity, recurrence sequences, Morgan-Voyce sequences, q -analogue, balancing numbers, Pell equation, lattice paths, quasi s -Pascal triangle, quasi s -Lucas triangle

Table des matières

Introduction	11
1 Préliminaire	15
1.1 Coefficient binomial	15
1.2 Suites récurrentes linéaires	16
1.3 Suite de Fibonacci	17
1.4 Suite de Lucas	18
1.5 Suite de Fibonacci généralisée	20
1.6 Direction (r, α) sur le triangle de Pascal	20
1.7 Suite m -Fibonacci généralisée	21
1.8 Les nombres de Delannoy et chemin de treillis	22
1.9 Les nombres de Delannoy généralisés	24
1.10 Triangle Tribonacci-Lucas	25
1.11 Suite s -Lucas	26
1.12 Les coefficients binomiaux	27
1.13 Les coefficients q -binomiaux	28

1.14	Un q -analogues de la suite de Fibonacci généralisée	30
1.15	Coefficients q -binomiaux	31
1.16	Unimodalité	31
1.17	Les nombres d'équilibre	32
1.18	Nombre co-équilibre	34
1.19	Equation de Pell généralisée	36
2	Triangle de Delannoy	38
2.1	Introduction	38
2.2	Unimodalité des suites parcourant les directions infinies du triangle de Delannoy	38
2.3	Relations de récurrence	40
2.3.1	Fonction génératrice	44
2.4	Les nombres q -Delannoy	45
3	Triangle de Delannoy généralisé	48
3.1	Introduction	48
3.2	Suites récurrentes linéaires	48
3.2.1	Fonction génératrice	50
3.3	Unimodalité des suites situées sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy généralisé	51
3.4	Le triangle de Delannoy et la suite de Fibonacci généralisé	53
3.5	Le phénomène Morgan-Voyce	54
3.6	Le triangle de Delannoy inversé et log-convexité	56

4	Problèmes d'équilibre et triangle de Delannoy	59
4.1	Introduction	59
4.2	Problème d'équilibre et de co-équilibre sur le triangle de Delannoy	59
4.2.1	Le cas $n = 1$	62
4.2.2	Le cas $n = 2$	62
4.2.3	Le cas $n = 3$	65
4.2.4	Cas où n est quelconque	67
5	Problème s-équilibre	68
5.1	Introduction	68
5.2	Problème s -équilibre et l'équation de Pell généralisée	68
5.3	Relations de récurrence	70
5.3.1	Fonctions génératrices	72
5.3.2	Relations entre les nombres s -équilibre et les nombres d'équilibre	73
5.3.3	Formules de Binet et formules explicites	74
6	Triangle quasi s-Pascal	76
6.1	Introduction	76
6.2	Le triangle quasi s -Pascal	76
6.2.1	Formule explicite et coefficient Multinomial	78
6.2.2	Coefficients quasi-binomiaux et matrice de Delannoy généralisée	79
6.2.3	La suite s -Fibonacci	80
6.2.4	Triangle s -Pascal et triangle quasi- s -Pascal	82

6.2.5	Relation de récurrence linéaire associée aux transversales finies du triangle quasi s -Pascal	82
6.3	La somme De-Moivre et quelques sommes imbriquées	85
6.4	Le q -analogue du triangle quasi s -Pascal	88
7	Triangle quasi s-Lucas	92
7.1	Introduction	92
7.2	Triangle quasi s -Lucas	92
7.2.1	Formule explicite	93
7.2.2	Triangle quasi s -Lucas et coefficients binominaux	95
7.2.3	Relations de récurrence	96
8	Conclusion	98
	Bibliographie	99

Liste des tableaux

1.1	Triangle de Pascal.	16
1.2	Le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci.	18
1.3	Le triangle associé à la suite de Lucas.	19
1.4	Triangle de Delannoy.	22
1.5	Triangle de Tribonacci-Lucas.	26
1.6	Triangle bitrinomial ($s = 2$).	28
1.7	Triangle biquadrinomial ($s = 3$).	28
1.8	Le q -analogue du triangle de Pascal.	29
3.1	Le triangle de Delannoy inversé.	57
4.1	Nombres d'équilibre sur le triangle de Delannoy.	66
6.1	Le triangle quadrabonacci.	81

Table des figures

1.1	Illustration des chemins possibles du coefficient $\binom{3}{2}_{[2]}$	23
6.1	Illustration des pas possibles du coefficient $\binom{n}{k}_{[s]}$	77
6.2	Illustration des chemins possibles du coefficient $\binom{3}{1}_{[3]}$	81

Introduction

Cette thèse intitulée *Modélisation de suites récurrentes linéaires par des triangles arithmétiques* traite deux types de problèmes. Des problèmes de la combinatoire énumérative et d'autres de la théorie des nombres.

La combinatoire énumérative est une branche des mathématiques qui s'intéresse au dénombrement de certains objets combinatoires, par exemple le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est le nombre de parties de k éléments dans un ensemble de n éléments, ce coefficient intervient dans de nombreux domaines de mathématiques : l'algèbre, le développement en série, probabilité etc... Les coefficients binomiaux peuvent aussi être présentés sur une matrice triangulaire inférieure, cette matrice est appelée le triangle de Pascal. Plusieurs travaux de recherche ont été consacrés pour l'étude des propriétés arithmétiques et combinatoires liées à ce triangle, à titre d'exemple on peut récupérer les termes de la suite célèbre de Fibonacci F_n en sommant les éléments parcourant les transversales principales de ce triangle. La suite de Fibonacci est aussi un exemple de base d'un problème de combinatoire énumérative.

Concernant les problèmes qui ont une relation avec la théorie des nombres, Behera et Panda [14] ont défini les nombres d'équilibre n comme solution de l'équation diophantienne $1 + 2 + \dots + n - 1 = n + 1 + \dots + n + r$, le problème de détermination de tous les nombres d'équilibres conduit à la résolution de l'équation de Pell $t^2 - 2u^2 = 1$ en introduisant de nouvelles variables.

Notre travail consiste à établir des généralisations des coefficients binomiaux, de présenter ces coefficients sur des triangles arithmétiques, ensuite, d'étudier les différentes propriétés liées à ces triangles. Nous proposons également d'autres généralisations au problème d'équilibre.

Cette thèse est constituée de sept chapitres et elle est organisée comme suit.

Chapitre 1 : Préliminaire

Dans le premier chapitre nous présentons les principaux concepts utilisés tout au long de cette thèse. Nous donnons quelques notions de base de la combinatoire énumérative et de la théorie des nombres.

Chapitre 2 : Triangle de Delannoy

Ce chapitre est consacré à l'étude de quelques propriétés liées au triangle de Delannoy, nous commençons par l'étude de l'unimodalité des suites parcourant les directions infinies de ce triangle, ensuite, nous établissons l'expression des suites récurrentes obtenues par la somme des éléments situés sur les directions finies du triangle de Delannoy et nous donnons la fonction génératrice pour cette somme. Nous proposons aussi une nouvelle identité pour les nombres pairs et impairs de la suite Tribonacci. A la fin de ce chapitre nous définissons un q -analogue pour les nombres de Delannoy et nous proposons une q -déformation pour la suite Tribonacci.

Chapitre 3 : Triangle de Delannoy généralisé

Le triangle de Delannoy généralisé fera l'objet de ce chapitre. Nous commençons par donner des extensions des résultats obtenus dans le chapitre précédent tels que : l'unimodalité, les suites récurrentes et la fonction génératrice, ensuite, nous étudions le phénomène du Morgan-Voyce, nous concluons ce chapitre par l'étude de la log-convexité de la suite centrale du triangle de Delannoy inversé.

Chapitre 4 : Problème d'équilibre et triangle de Delannoy

Le quatrième chapitre est consacré à la résolution du problème d'équilibre et co-équilibre définis avec les coefficients situés sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy. Nous établissons la solution complète pour les quatre premières transversales. Nous montrons l'existence d'une solution pour le cas général, ce résultat nous a permis d'établir une nouvelle identité sur le triangle de Delannoy.

Chapitre 5 : Problème de s -équilibre

Dans ce chapitre, nous définissons le problème s -équilibre. Nous montrons que la résolution de ce problème conduit à la résolution d'une équation de Pell généralisée, en résolvant cette équation nous montrons que les nombres s -équilibre sont obtenus par trois relations de récurrence, nous établissons les fonctions génératrices pour ces suites, ensuite, nous donnons quelques identités entre les nombres s -équilibre et les nombre d'équilibre. A la fin de ce chapitre, nous établissons les formules explicites pour les nombres s -équilibre.

Chapitre 6 : Triangle quasi s -Pascal

Nous proposons dans le sixième chapitre, une nouvelle famille des chemins de treillis dont les pas possibles sont $\{L = (1, 0), L_1 = (1, 1), L_2 = (2, 1), \dots, L_s = (s, 1)\}$. Par cette fa-

mille de chemins de treillis, nous définissons une généralisation des triangles de Pascal et de Delannoy qui sera appelée triangle quasi s -Pascal. Nous commençons par montrer que la somme des éléments parcourant la direction $(1, 1)$ de ce triangle donne les termes de la suite s -Fibonacci, puis, nous établissons la formule explicite pour les coefficients du triangle quasi s -Pascal et nous établissons une relation entre ces coefficients et les coefficients binomiaux, ainsi que le lien entre le triangle quasi s -Pascal et le triangle de Delannoy généralisé défini par Ramirez et Sirvent [53]. Nous donnons par la suite, la relation de récurrence pour la somme des éléments situés sur les directions finies du triangle quasi s -Pascal ainsi que la fonction génératrice de la somme citée. Nous donnons également quelques identités dont une est équivalente à la somme de De-Moivre. A la fin de ce chapitre nous définissons un q -analogue au triangle quasi s -Pascal.

Chapitre 7 : Triangle quasi s -Lucas

L'objet du dernier chapitre est l'introduction d'un triangle arithmétique associé à la suite s -Lucas, appelé le triangle quasi s -Lucas, dont, la somme des éléments situés sur la direction $(1, 1)$ donne les termes de la suite s -Lucas, nous établissons une formule explicite pour les coefficients du triangle quasi s -Lucas et nous donnons la relation entre les coefficients de ce triangle et les coefficients binomiaux. Nous donnons aussi l'expression de la suite récurrente obtenue par la somme des éléments situés sur les directions finies du triangle quasi s -Lucas.

Nous terminons ce travail par une conclusion, dont laquelle, nous récapitulons les principaux résultats présentés dans les différents chapitres et nous proposons quelques perspectives.

Publications Scientifiques

Articles publiés :

- **S. Amrouche** and H. Belbachir. Unimodality and linear recurrences associated with rays in the Delannoy triangle. Turkish Journal of Mathematics 44.1 (2020) : 118-130.
- **S. Amrouche**, H. Belbachir and J. L. Ramírez, . Unimodality, linear recurrences and combinatorial properties associated to rays in the generalized Delannoy matrix. Journal of Difference Equations and Applications, 25(8) (2019) : 1200-1215.

Articles soumis :

- A. Açıkel, **S. Amrouche**, H. Belbachir and N. Irmak. quasi s -Lucas triangle. Soumis.
- **S. Amrouche** and H. Belbachir. Asymmetric extension of Pascal-Delannoy triangles. Soumis.
- **S. Amrouche**, H. Belbachir and N. Irmak. Balancing problem in the transversal $(1, -1)$ of Delannoy triangle. Soumis.
- **S. Amrouche**, H. Belbachir and N. Irmak. On s -balancing numbers. Soumis.

Chapitre 1

Préliminaire

Nous rappelons dans ce chapitre quelques définitions et résultats connus sur les suites récurrentes, les triangles arithmétiques, l'unimodalité, les coefficients binomiaux, les coefficients q -binomiaux, les nombres d'équilibre, les équations diophantiennes et l'équation de Pell. Ce chapitre sert de base et contexte pour l'assimilation des chapitres suivants.

1.1 Coefficient binomial

Soient n et k des entiers fixés, le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ est défini comme suit :

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{pour } n \geq k,$$

on utilise la convention $\binom{n}{k} = 0$ pour $k \notin \{0, \dots, n\}$.

Les fonctions génératrices $\mathcal{F}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k$ et $\mathcal{G}(x) = \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n$ sont données respectivement par :

$$\mathcal{F}(x) = (1+x)^n \tag{1.1}$$

et

$$\mathcal{G}(x) = \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}. \tag{1.2}$$

Il est bien connu que le triangle de Pascal est une présentation des coefficients binomiaux dans un triangle voir le tableau suivant

n \ k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	2	1							
3	1	3	3	1						
4	1	4	6	4	1					
5	1	5	10	10	5	1				
6	1	6	15	20	15	6	1			
7	1	7	21	35	35	21	7	1		
8	1	8	28	56	70	56	28	8	1	
9	1	9	36	84	126	126	84	36	9	1

TABLE 1.1 – Triangle de Pascal.

Le triangle de Pascal est construit par la relation suivante

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1},$$

avec $\binom{0}{0} = 1$.

1.2 Suites récurrentes linéaires

Plusieurs travaux de recherche ont été établis pour étudier les propriétés des suites récurrentes linéaires, Nous présentons quelques propriétés et résultats bien connus sur les suites d'ordres deux tels que la suite de Fibonacci, la suite Lucas et leurs généralisations. Nous commençons par donner la définition d'une direction sur un triangle arithmétique. Soit $\{a(n, k)\}_{0 \leq k \leq n}$ un triangle arithmétique d'entiers positifs.

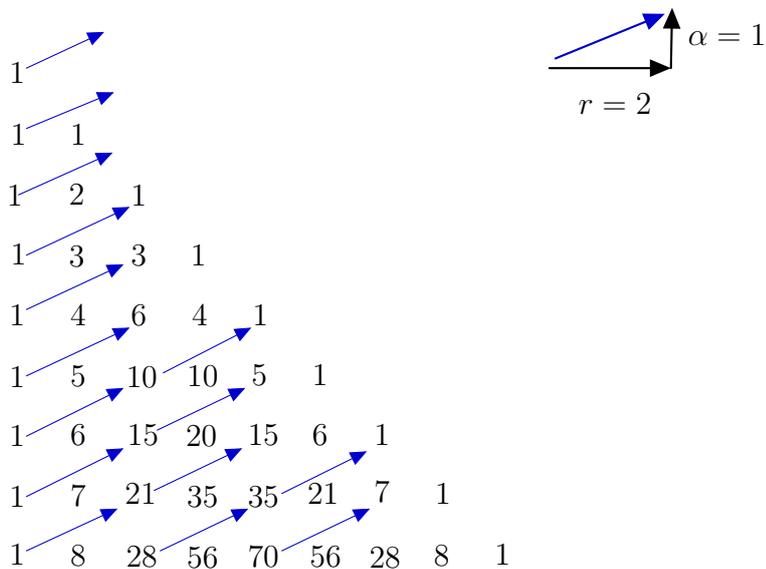
Définition 1.2.1. Pour un entier n fixe, $r, p \in \mathbb{N}$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$, les éléments situés sur la direction (r, α) avec paramètre $0 \leq p \leq r - 1$ sur le triangle $a(n, k)$ sont les éléments obtenus par l'expression

$$\{a(n - \alpha k, p + rk)\}_{k \geq 0}$$

Si $r + \alpha > 0$, alors $k \in \{0, \dots, \lfloor \frac{n - \alpha k}{p + \beta k} \rfloor\}$, le nombre des éléments est fini et dans ce cas on dit que la direction est finie.

Si $r + \alpha \leq 0$ alors $k \in \mathbb{N}$, le nombre des éléments est infini et on dit que la direction est infinie.

dans la tableau suivant est illustré la direction $(2, 1)$ sur le triangle de Pascal



Direction $(2, 1)$ sur le triangle de Pascal.

1.3 Suite de Fibonacci

Il est bien connu que les nombres de la suite de Fibonacci $(F_n)_{n \geq 0}$ satisfont la relation de récurrence suivante

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1} \quad n \geq 1, \tag{1.3}$$

avec $F_0 = 0, F_1 = 1$.

Les premiers termes de la suite de Fibonacci sont $0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \dots$ voir Sloane [57] A000045,

Les termes de la suite de Fibonacci peuvent être récupérés en sommant les éléments situés sur la direction $(1, 1)$ du triangle de Pascal, donc, les nombres de Fibonacci vérifient la relation suivante

$$F_{n+1} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}.$$

Le tableau suivant montre la relation entre le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci.

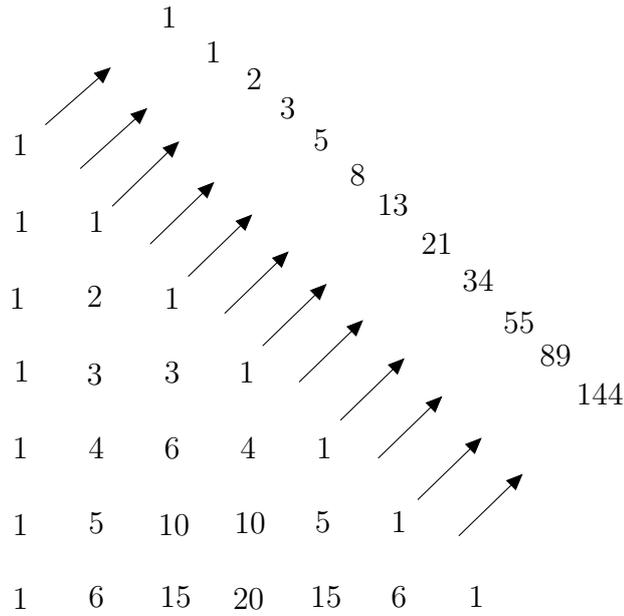


TABLE 1.2 – Le triangle de Pascal et la suite de Fibonacci.

1.4 Suite de Lucas

La suite de Lucas $(L_n)_{n \geq 0}$, est définie par la relation de récurrence suivante :

$$L_{n+1} = L_n + L_{n-1} \quad n \geq 1, \quad (1.4)$$

avec $L_0 = 2, L_1 = 1$.

Les premiers termes de la suite de Lucas sont 2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, ... voir Sloane [57] A000032

La suite de Lucas s'exprime en fonction de la suite de Fibonacci par la relation suivante :

$$L_n = F_{n+1} + F_{n-1}. \quad (1.5)$$

Les termes de la suites de Lucas peuvent aussi être obtenus en sommant les éléments situés sur la direction $(1, 1)$ du triangle associé à cette suite, cela s'exprime dans la relation suivante

$$L_n = \sum_k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

La relation entre la suite de Lucas et son triangle associé est illustrée dans le tableau suivant

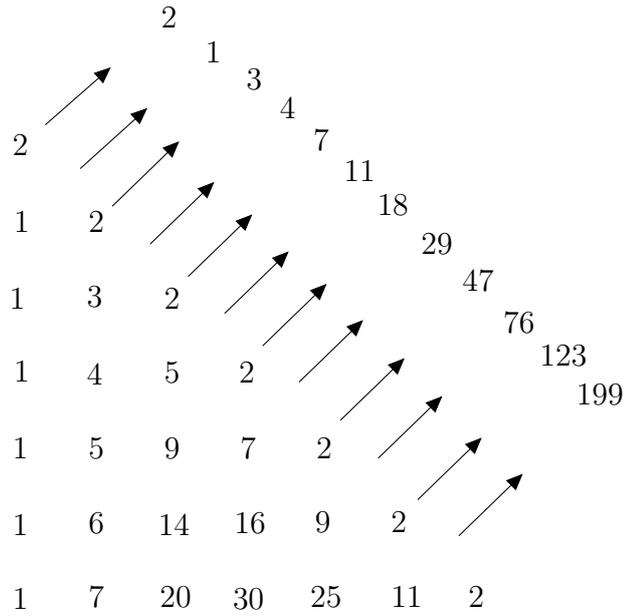


TABLE 1.3 – Le triangle associé à la suite de Lucas.

Il existe d'autres suites célèbres d'ordre deux, on cite par exemple la suite de Pell, Pell-Lucas, Jacobsthal et Jacobsthal-Lucas qui sont données respectivement par les relations suivantes :

$$P_{n+1} = \sum_k 2^{n-2k} \binom{n-k}{k} \quad n \geq 0 \text{ et } Q_n = \sum_k 2^{n-2k} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \quad n \geq 1,$$

$$J_{n+1} = \sum_k 2^k \binom{n-k}{k} \quad n \geq 0 \text{ et } j_n = \sum_k 2^k \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k} \quad n \geq 1,$$

Les premiers termes de ces suites sont donnés respectivement par :

- $\{P_n\}_{n \geq 0} = (0, 1, 2, 5, 12, 29, 70, \dots)$ est la suite de Pell, Sloane A000129,
- $\{Q_n\}_{n \geq 0} = (2, 2, 6, 14, 34, 82, \dots)$ est la suite de Pell-Lucas, Sloane A002203,
- $\{J_n\}_{n \geq 0} = (0, 1, 1, 3, 5, 11, 21, \dots)$ est la suite de Jacobsthal, Sloane A001045,
- $\{j_n\}_{n \geq 0} = (2, 1, 5, 7, 17, 31, \dots)$ est la suite de Jacobsthal-Lucas, Sloane A014551.

1.5 Suite de Fibonacci généralisée

Pour tous entiers positifs a et b , La suite de Fibonacci généralisée est définie par la relation de récurrence suivante

$$\mathcal{F}_{n+1} = a\mathcal{F}_n + b\mathcal{F}_{n-1} \quad n \geq 1, \quad (1.6)$$

avec $\mathcal{F}_0 = 0, \mathcal{F}_1 = 1$.

Les termes de la suite $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ s'obtiennent en sommant les éléments situés sur la direction $(1, 1)$ du triangle de Pascal généralisé $[P(n, k)]_{n, k \in \mathbb{N}}$ tel que :

$$P(n, k) = \binom{n}{k} a^{n-k} b^k,$$

donc la suite $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ vérifie la relation suivante :

$$\mathcal{F}_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k} a^{n-2k} b^k.$$

Pour $x = 1, y = 1$, on obtient les termes de la suite de Fibonacci classique F_{n+1} .

1.6 Direction (r, α) sur le triangle de Pascal

Belbachir et al [21], ont considéré la somme des éléments situés sur toutes les directions finies du triangle de Pascal généralisé. Soit $\mathcal{F}_n^{(r,p,\alpha)}$ le terme général de cette somme donnée par

$$\mathcal{F}_{n+1}^{(r,p,\alpha)} = \sum_k \binom{n-\alpha k}{p+rk} x^{n-p-(q+r)k} y^{p+rk}, \text{ avec } \mathcal{F}_0 = 0.$$

$\mathcal{F}_{n+1}^{(r,p,\alpha)}$ vérifie la relation de récurrence suivante.

Théorème 1.6.1. [21] Pour $n \geq r + \alpha$ et p fixé, la suite $(\mathcal{F}_{n+1}^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ satisfait relation de récurrence suivante :

$$\sum_{j=0}^r (-x)^j \binom{r}{j} \mathcal{F}_{n-j}^{(r,p,\alpha)} = y^r \mathcal{F}_{n-r-\alpha}^{(r,p,\alpha)}, \quad (1.7)$$

avec $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2 = \dots = \mathcal{F}_p = 0$ et $\mathcal{F}_j = \binom{j-1}{p} x^{j-p-1} y^p$ pour $p+1 \geq j \geq r + \alpha + p - 1$.

Pour prouver ce théorème les auteurs ont utilisé le lemme suivant :

Lemme 1.6.2. [21] Pour a, b et r des entiers positifs, avec $r \leq a$, alors

$$\sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \binom{a-s}{b} = \binom{a-r}{b-r}.$$

Pour plus de détails sur les directions voir [22]

1.7 Suite m -Fibonacci généralisée

Soient m un entier ≥ 2 , a_1, a_2, \dots, a_m et $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ des éléments d'un anneau commutatif unitaire A .

La suite m -Fibonacci généralisée $(u_n)_{n > -m}$ est définie comme suit :

$$\begin{cases} u_j = \alpha_{m-j-1}, & (0 \leq j \leq m-1); \\ u_n = a_1 u_{n-1} + a_2 u_{n-2} + \dots + a_m u_{n-m}, & n \geq m. \end{cases}$$

La formule explicite de u_n a été établie par Belbachir et Bencherif (voir [16]), et elle est donnée dans le résultat suivant

Théorème 1.7.1. [16] La formule explicite de u_n est

$$u_n = \lambda_0 y_{n-m+1} + \lambda_1 y_{n-m+2} + \dots + \lambda_{m-1} y_n.$$

Avec $(\lambda_j)_{0 \leq j \leq m-1}$ et $(y_n)_{n > -m}$ des suites données par

$$y_n = \sum_{k_1 + 2k_2 + \dots + mk_m = n} \binom{k_1 + k_2 + \dots + k_m}{k_1, k_2, \dots, k_m} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m},$$

$$\lambda_j = - \sum_{k=j}^{m-1} a_{k-j} \alpha_k \text{ pour } (0 \leq j \leq m-1), \text{ avec } a_0 = -1. \quad (1.8)$$

Pour le cas particulier $m = s + 1$, $u_{-j} = 0$ pour $-(s-1) \leq j \leq 0$, $u_1 = 1$ et $a_i = 1$ pour $(1 \leq i \leq m)$, la suite s -Fibonacci $F_{n+1,s} \equiv u_n$, est définie par la récurrence suivante

$$F_{n+1,s} = F_{n,s} + F_{n-1,s} + \dots + F_{n-s,s}.$$

1.8 Les nombres de Delannoy et chemin de treillis

Les chemins de treillis apparaissent de manière naturelle dans divers problèmes, on cite par exemple : les problèmes de vote, les problèmes de composition, les problèmes de marches aléatoires, les files d'attente, etc...

On commence par donner la définition des chemins de treillis sur une grille.

Définition 1.8.1. Soit $\{p_0, p_1, \dots, p_n\} \in \mathbb{Z}^n$ un ensemble de sommets sur une grille tels que deux sommets consécutifs p_i et p_{i+1} sont reliés par une seule arête, l'ensemble des arêtes qui relient p_0 à p_n est appelé un chemin de treillis sur une grille. L'orsqu'on affecte des poids aux arêtes on l'appelle chemin de treillis pondéré.

Plusieurs auteurs ont étudié et énuméré les chemins de treillis voir par exemples [37, 38, 46, 55]. Dans le triangle de Pascal le coefficient binomial $\binom{n}{k}$ compte le nombre de chemin parcourant une grille du point $(0, 0)$ au point (n, k) en utilisant des pas unité de direction horizontale et diagonale $\{H = (1, 0) \rightarrow, D = (1, 1) \nearrow\}$, voir SLOANE [57] A007318.

Il est bien connu que le nombre de Delannoy $D(n, k)$ est, dans une grille, le nombre de chemins allant du point $(0, 0)$ au point (n, k) en utilisant des pas unité de direction horizontale, verticale et diagonale $\{H = (1, 0) \rightarrow, V = (0, 1) \uparrow, D = (1, 1) \nearrow\}$, et que $D(n, k)$ satisfait la relation de récurrence suivante (voir [11, 61])

$$D(n, k) = D(n - 1, k) + D(n, k - 1) + D(n - 1, k - 1), \quad (1.9)$$

avec $D(n, 0) = D(0, k) = 1$.

Alladi et Hoggat [3] ont représenté ces nombres sur une matrice triangulaire comme le montre le tableau suivant.

$n \backslash k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	3	1							
3	1	5	5	1						
4	1	7	13	7	1					
5	1	9	25	25	9	1				
6	1	11	41	63	41	11	1			
7	1	13	61	129	129	61	13	1		
8	1	15	85	231	321	231	85	15	1	
9	1	17	113	377	681	681	377	113	17	1

TABLE 1.4 – Triangle de Delannoy.

Si on note par $\binom{n}{k}_{[2]}$ l'élément de la $n^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne du triangle de Delannoy. Ce triangle est obtenu par la relation de récurrence suivante

$$\binom{n}{k}_{[2]} = \binom{n-1}{k}_{[2]} + \binom{n-1}{k-1}_{[2]} + \binom{n-2}{k-1}_{[2]}, \quad (1.10)$$

avec $\binom{n}{0}_{[2]} = \binom{n}{n}_{[2]} = 1$. On utilise la convention $\binom{n}{k}_{[2]} = 0$ pour $k \notin \{0, \dots, n\}$.

$\binom{n}{k}_{[2]}$ compte le nombre de chemins allant du point $(0, 0)$ au point (n, k) en utilisant les pas $\{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$.

Exemple 1.8.2. $\binom{3}{2}_{[2]} = 5$, compte le nombre de chemins allant du point $(0, 0)$ au point $(3, 2)$ en utilisant les pas $\{(1, 0), (1, 1), (2, 1)\}$.

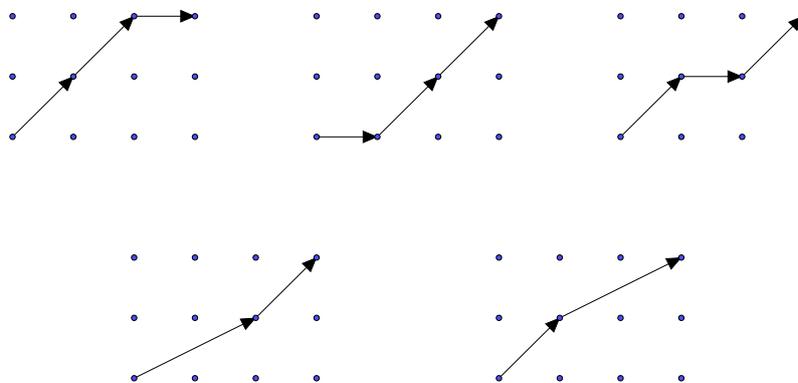


FIGURE 1.1 – Illustration des chemins possibles du coefficient $\binom{3}{2}_{[2]}$.

La relation entre les nombres de Delannoy $D(n, k)$ et les coefficients du triangle de Delannoy $\binom{n}{k}_{[2]}$ est donnée par

$$\binom{n}{k}_{[2]} = D(n-k, k). \quad (1.11)$$

La fonction génératrice des coefficients du triangle de Delannoy est

$$F_k(x) := \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k}_{[2]} x^n = \frac{(x + x^2)^k}{(1-x)^{k+1}}. \quad (1.12)$$

Barry [12], a donné une formule explicite pour les nombres du triangle de Delannoy via les coefficients binomiaux par la relation suivante :

$$\binom{n}{k}_{[2]} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n-j}{k}. \quad (1.13)$$

La relation (1.13) est équivalente à

$$\binom{n}{k}_{[2]} = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} 2^j. \quad (1.14)$$

Le triangle de Delannoy est appelé aussi triangle de Tribonacci, car la somme des éléments situés sur la direction $(1, 1)$ dans ce triangle donnent les termes de la suite de Tribonacci $(T_n)_{n \geq 0}$, donc

$$T_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k}_{[2]}.$$

Théorème 1.8.3. [3] La suite $(T_n)_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante

$$T_{n+1} = T_n + T_{n-1} + T_{n-2},$$

avec $T_0 = 0, T_1 = 1$ et $T_2 = 1$.

Les premiers termes de la suite de Tribonacci sont $(0, 1, 1, 2, 4, 7, 13, 24, \dots)$ voir Sloane [57] A000073.

1.9 Les nombres de Delannoy généralisés

Les nombres de Delannoy généralisés sont définis par la formule suivante (voir [38]) :

$$\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n+k-i}{k} b^{k-i} a^{n-i} c^i. \quad (1.15)$$

Le nombre $\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n, k)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n, k) = a\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n-1, k) + b\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n, k-1) + c\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n-1, k-1), \quad (1.16)$$

avec $k \geq 2, n \geq 1$ et les conditions initiales $\mathcal{D}_{(a,b,c)}(0, k) = b^k$ et $\mathcal{D}_{(a,b,c)}(n, 0) = a^n$.

Cheon et al. [30] ont défini le triangle de Delannoy généralisé $\mathcal{H}(a, b, c) = [d(n, k)]_{n, k \in \mathbb{N}}$, avec

$$d(n, k) = \begin{cases} \mathcal{D}_{(a,b,c)}(k, n-k), & \text{pour } n \geq k; \\ 0, & \text{pour } n < k; \end{cases} \quad (1.17)$$

on obtient la relation de récurrence suivante

$$d(n, k) = bd(n-1, k) + ad(n-1, k-1) + cd(n-2, k-1), \quad (1.18)$$

Selon la relation (1.17), la formule explicite de $d(n, k)$ est donnée par

$$d(n, k) = \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n-j}{k} a^{k-j} b^{n-k-j} c^j. \quad (1.19)$$

Ramirez et Sirvent [53] ont défini une matrice qui est une extension du triangle de Delanoy généralisé, on note par $\mathcal{D}_m(n, k)$ l'élément de la n^{ime} ligne et de la k^{ime} colonne de cette matrice, alors, $\mathcal{D}_m(n, k)$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{D}_m(n+1, k) = a\mathcal{D}_m(n+1, k-1) + \sum_{i=0}^{m-1} a_{i+1}\mathcal{D}_m(n, k-i),$$

avec $k \geq m-1, n \geq 1$ et les conditions initiales $\mathcal{D}_m(0, k) = a^k$ et $\mathcal{D}_m(n, 0) = a_1^n$.

Ils ont aussi établi une formule explicite pour $\mathcal{D}_m(n, k)$ donné dans le résultat suivant :

Théorème 1.9.1. [53] *La formule explicite de $\mathcal{D}_m(n, k)$ est donnée par*

$$\begin{aligned} \mathcal{D}_m(n, k) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{m-1}} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \dots \binom{n-j_1-\dots-j_{m-2}}{j_{m-1}} \binom{n+k-u}{n} \times \\ \times a_1^{j_1} a_2^{j_2} \dots a_{m-1}^{j_{m-1}} a_m^{n-\sum_{i=1}^{m-1} j_i} a^{k-u}, \end{aligned}$$

avec $u = (m-1)(n-j_1) + \sum_{i=2}^{m-1} (i-m)j_i$.

1.10 Triangle Tribonacci-Lucas

Yilmaz et Taskara [66] ont défini le triangle Tribonacci-Lucas par la relation de récurrence suivante :

$$L^{(2)}(n, k) = L^{(2)}(n-1, k) + L^{(2)}(n-1, k-1) + L^{(2)}(n-2, k-1),$$

avec $L^{(2)}(0, 0) = 3, L^{(2)}(n, 0) = 1$ et $L^{(2)}(n, n) = 2$ pour $n \geq 1$.

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7
0	3							
1	1	2						
2	1	6	2					
3	1	8	10	2				
4	1	10	24	14	2			
5	1	12	42	48	18	2		
6	1	14	64	114	80	22	2	
7	1	16	90	220	242	120	26	2

TABLE 1.5 – Triangle de Tribonacci-Lucas.

La somme des éléments situés sur la direction $(1, 1)$ dans le triangle Tribonacci-Lucas donne les termes de la suite Tribonacci-Lucas.

Soit $L_{n,2} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} L^{(2)}(n-k, k)$.

Le théorème suivant donne la récurrence linéaire de la suite $(L_{n,2})_{n \geq 0}$

Théorème 1.10.1. [66] *La suite $(L_{n,2})_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$L_{n,2} = L_{n-1,2} + L_{n-2,2} + L_{n-3,2},$$

avec $L_{0,2} = 3, L_{1,2} = 1$ et $L_{2,2} = 3$.

Les premiers termes de la suite Tribonacci-Lucas sont $(3, 1, 3, 7, 11, 21, 39, \dots)$.

Yilmaz et Taskara [66] ont proposé aussi une formule explicite pour les coefficients $L^{(2)}(n, k)$ via les coefficients binomiaux

Théorème 1.10.2. [66] *La formule explicite de $L^{(2)}(n, k)$ est donnée par :*

$$L^{(2)}(n, k) = \sum_{j=0}^k \frac{n}{n-j-k} \binom{k}{j} \binom{n-j}{k}.$$

1.11 Suite s -Lucas

Soit s un entier fixé, la suite s -Lucas $(L_{n,s})_{n \geq 0}$ est définie par la relation de récurrence suivante, (voir [55]) :

$$L_{n,s} = L_{n-1,s} + L_{n-2,s} + \dots + L_{n-(s+1),s} \quad (1.20)$$

avec $L_{0,s} = s + 1, L_{1,s} = 1, L_{2,s} = 2^2 - 1, \dots, L_{s,s} = 2^s - 1$.

La relation entre la suite s -Lucas et la suite s -Fibonacci est donnée par (voir [55]) :

$$L_{n,s} = F_{n+1,s} + F_{n-1,s} + 2F_{n-2,s} + \dots + sF_{n-s,s}, \quad (1.21)$$

Pour les cas particuliers $s = 1$ et $s = 2$, on obtient les suites de Lucas et Tribonacci-Lucas respectivement.

1.12 Les coefficients bi^snomiaux

Le coefficient bi^snomial $\binom{n}{k}_s$ est une extension naturelle du coefficient binomial. Ce coefficient est défini par la relation de récurrence suivante

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n-1}{k}_s + \binom{n-1}{k-1}_s + \dots + \binom{n-1}{k-s}_s,$$

avec $\binom{0}{0}_s = 1$ et $\binom{n}{k}_s = 0$ pour $k > sn$ ou bien $k < 0$.

Le coefficient $\binom{n}{k}_s$ satisfait les identités bien connues suivantes (voir [9, 13, 20, 26]) :

Propriétés :

Une expression via les coefficients binomiaux :

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=k} \binom{n}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-1}}{j_s}. \quad (1.22)$$

La relation symétrique :

$$\binom{n}{k}_s = \binom{n}{sn-k}_s, \quad (1.23)$$

la relation de récurrence diagonale :

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} \binom{j}{k-j}_{s-1}, \quad (1.24)$$

l'expression de De Moivre (voir [35, 36])

$$\binom{n}{k}_s = \sum_{j=0}^n (-1)^j \binom{n}{j} \binom{k-j(s+1)+n-1}{n-1}. \quad (1.25)$$

Récemment, Belbachir et Benmezai [19] ont établi la relation suivante :

$$\binom{n}{k}_s = (-1)^k \sum_{j_1+j_2+\dots+j_s=k} \binom{n}{j_1} \binom{n}{j_2} \dots \binom{n}{j_s} a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}, \quad (1.26)$$

avec $a = \exp(2i\pi/(s+1))$.

Les coefficients bitrinomiaux $\binom{n}{k}_2$ et biquadranomiaux $\binom{n}{k}_3$ sont illustrés respectivement dans les deux tableaux suivants :

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1	1											
2	1	2	3	2	1									
3	1	3	6	7	6	3	1							
4	1	4	10	16	19	16	10	4	1					1
5	1	5	15	30	45	51	45	30	15	5	1			

TABLE 1.6 – Triangle bitrinomial ($s = 2$).

$n \setminus k$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
0	1													
1	1	1	1	1										
2	1	2	3	4	3	2	1							
3	1	3	6	10	12	12	10	6	3	1				
4	1	4	10	20	31	40	44	40	31	20	10	4	1	
5	1	5	15	35	65	101	135	155	155	135	101	65	35	15

TABLE 1.7 – Triangle biquadranomial ($s = 3$).

La fonction génératrice des coefficients bi^snomiaux est donnée par :

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} \binom{n}{k}_s x^k = (1 + x + x^2 + \dots + x^s)^n.$$

1.13 Les coefficients q -binomiaux

Les nombres de Gauss, qui sont appelés aussi les coefficients q -binomiaux $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$, généralisent les coefficients binomiaux, et ils sont définis par la relation suivante :

Soit q une indéterminé

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \frac{[n]_q!}{[k]_q! [n-k]_q!},$$

avec $[n]_q = 1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}$ et $[n]_q! = [1]_q [2]_q \dots [n]_q$, on utilise la convention $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = 0$ pour $k \notin \{0, \dots, n\}$.

Le coefficient q -binomial satisfait les deux récurrences équivalentes suivantes

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + q^{n-k} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q \quad (1.27)$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q. \quad (1.28)$$

Dans le tableau suivant on représente quelques valeurs des coefficients q -binomiaux

1										
1	1									
1	$[2]_q$	1								
1	$[3]_q$	$[3]_q$	1							
1	$[4]_q$	$q^2 + [5]_q$	$[4]_q$	1						
1	$[5]_q$	$q^2 [2]_q + [5]_q$	$q^2 [2]_q + [5]_q$	$[5]_q$	1					
1	$[6]_q$	$q^4 + q^2 [4]_q + [9]_q$	$q^3 + q^5 + q^6 + q^2 [7]_q + [10]_q$	$q^4 + q^2 [4]_q + [9]_q$	$[6]_q$	1				
1	$[7]_q$	$[7]_q + q^4 [4]_q + q^2 [9]_q$	$q^4 + q^8 + q^9 + q^2 [5]_q + q^2 [7]_q + [13]_q$	$q^4 + q^8 + q^9 + q^2 [5]_q + q^2 [7]_q + [13]_q$	$[7]_q + q^4 [4]_q + q^2 [9]_q$	$[7]_q$	1			

TABLE 1.8 – Le q -analogue du triangle de Pascal.

Le coefficient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k}{2}}$ est aussi considéré comme un q -analogue du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ voir [24, 32], donc si on note par $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)}$ ce coefficient, alors, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)}$ satisfait les deux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} + q^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(1)} \quad (1.29)$$

et

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} + \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_q^{(1)}. \quad (1.30)$$

Les fonctions génératrices $F(x) = \sum_{k=0}^n \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} x^k$ et $G(x) = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} x^n$ sont données

respectivement par (voir [24, 32]) :

$$F(x) = (-x; q)_n \quad (1.31)$$

et

$$G(x) = \frac{x^k q^{\binom{k}{2}}}{(x; q)_{k+1}}. \quad (1.32)$$

$(-x; q)_n$ est le symbole q -Pochhammer défini come suit :

$$(x; q)_n = (1 - x)(1 - qx) \cdots (1 - q^{n-1}x).$$

1.14 Un q -analogues de la suite de Fibonacci généralisée

Soit la suite de Fibonacci généralisée $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ donnée dans la relation (1.6), Carlitz [29] a défini un q -analogue pour cette suite comme suit :

$$\mathcal{F}_{n+1,q}(x, y) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{k^2} y^k x^{n-2k}, \text{ avec } \mathcal{F}_{0,q}(x, y) = 0.$$

La suite $(\mathcal{F}_{n,q}(x, y))_{n \geq 0}$ satisfait les deux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+1,q}(x, y) &= x\mathcal{F}_{n,q}(x, qy) + qy\mathcal{F}_{n-1,q}(x, q^2y), \\ \mathcal{F}_{n+1,q}(x, y) &= x\mathcal{F}_{n,q}(x, y) + q^{n-1}y\mathcal{F}_{n-1,q}(x, y). \end{aligned}$$

avec $\mathcal{F}_{0,q}(x, y) = 0$ et $\mathcal{F}_{1,q}(x, y) = 1$.

Cigle [33] suggère aussi un q -analogue pour la suite de Fibonacci généralisé définie par :

$$\mathcal{F}_{n+1}(x, y, q) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_q q^{\binom{k+1}{2}} y^k x^{n-2k}, \text{ avec } \mathcal{F}_0(x, y, q) = 0.$$

La suite $(\mathcal{F}_n(x, y, q))_{n \geq 0}$ satisfait les deux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{n+1}(x, y, q) &= x\mathcal{F}_n(x, y, q) + q^{n-1}y\mathcal{F}_{n-1}(x, y/q, q), \\ \mathcal{F}_{n+1}(x, y, q) &= x\mathcal{F}_n(x, y, q) + qy\mathcal{F}_{n-1}(x, qy, q). \end{aligned}$$

avec $\mathcal{F}_0(x, y, q) = 0$ et $\mathcal{F}_1(x, y, q) = 1$.

On trouve dans la littérature plusieurs définitions des q -analogues de la suite de Fibonacci généralisée (voir [47, 48, 49]).

1.15 Coefficients q -bi^snomiaux

Belbachir et Benmezai [19] ont défini le coefficient q -bi^snomial comme un q -analogue du coefficient bi^snomial, ce coefficient est noté par $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$.

La formule explicite du coefficient q -bi^snomial est la suivante :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} := (-1)^k \sum_{j_1 + j_2 + \dots + j_s = k} \begin{bmatrix} n \\ j_1 \end{bmatrix}_q^{(1)} \begin{bmatrix} n \\ j_2 \end{bmatrix}_q^{(1)} \dots \begin{bmatrix} n \\ j_s \end{bmatrix}_q^{(1)} a^{-\sum_{r=1}^s r j_r}. \quad (1.33)$$

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$ satisfait les deux relations de récurrence suivantes :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^s q^{k-j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}, \quad (1.34)$$

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} = \sum_{j=0}^s q^{(n-1)j} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-j \end{bmatrix}_q^{(s)}. \quad (1.35)$$

La fonction génératrice de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)}$ est donnée par :

$$\sum_{k=0}^{ns} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q^{(s)} x^k = \prod_{j=0}^{n-1} (1 + q^j x + (q^j x)^2 + \dots + (q^j x)^s). \quad (1.36)$$

1.16 Unimodalité

Les problèmes d'unimodalité et de log-concavité des suites, surviennent naturellement dans la combinatoire et d'autres branches des mathématiques (voir [32]).

En particulier, de nombreuses suites de coefficients binomiaux satisfont de diverses propriétés d'unimodalité.

Définition 1.16.1. Une suite a_0, a_1, \dots, a_n de nombres réels positifs est unimodale si pour un certain $0 \leq j \leq n$ on a

$$a_0 \leq a_1 \leq \dots \leq a_j \geq a_{j+1} \geq \dots \geq a_n.$$

La suite $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$ est log-concave (resp. log-convexe) pour $(1 \leq k \leq n-1)$

$$a_k^2 \geq a_{k-1}a_{k+1} \quad (\text{resp. } a_k^2 \leq a_{k-1}a_{k+1}).$$

Il est facile de constater que, si la suite $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$ est log-concave alors elle est unimodale.

Quelques exemples des suites unimodales

- La suite liée aux nombres de Fibonacci $\left\{\binom{n-k}{k}\right\}_k$ [62].
- La suite liée aux nombres de Lucas $\left\{\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}\right\}_k$ [25, 19].
- La suite liée aux nombres de Pell et Pell Lucas $\left\{2^{n-2k}\binom{n-k}{k}\right\}_k, \left\{2^{n-2k}\frac{n}{n-k}\binom{n-k}{k}\right\}_k$ [17].
- La suites combinatoire suivante correspondants à des transversales dans le triangle de Pascal $\left\{\binom{n-\alpha k}{k}\right\}_k$ [63].

Le lecteur peut se référer à [27, 28, 56, 58, 60, 67] pour voir d'autres exemples de suites unimodales.

Le résultat suivant montre que le coefficient binomial préserve la propriété de la log-concavité.

Théorème 1.16.2. [64] Si la suite $\{a_k\}_{0 \leq k \leq n}$ est log-concave, alors la transformation linéaire

$$y_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x_k, \tag{1.37}$$

préserve la propriété de la log-concavité.

1.17 Les nombres d'équilibre

Le nombre d'équilibre n (n entier positif) est défini comme solution de l'équation diophantienne suivante voir [14]

$$1 + 2 + \dots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \dots + (n+r), \tag{1.38}$$

pour un certain $r \in \mathbb{N}$.

Par exemple les nombres d'équilibre 6, 35, 204, avec r égale à 2, 14, 84 respectivement sont des solution de l'équation (1.38).

Si n et r sont une solution de l'équation (1.38) alors :

$$n^2 = \frac{(n+r)(n+r+1)}{2} \tag{1.39}$$

et

$$r = \frac{-(2n+1) + \sqrt{8n^2+1}}{2}. \quad (1.40)$$

Par la relation (1.40), il est clair que si n est un nombre d'équilibre alors $8n^2 + 1$ est un carré parfait.

Il est facile de voir que l'équation (1.38) est équivalente à

$$1 + 2 + \cdots + (n-1) = (n+1) + (n+2) + \cdots + (y-1), \text{ avec } y \geq n+2. \quad (1.41)$$

Le problème de détermination de tous les nombres d'équilibre conduit à la résolution de l'équation de Pell suivante :

Lemme 1.17.1. [14] *L'équation (1.41) est équivalente à l'équation de Pell suivante :*

$$t^2 - 2u^2 = 1, \quad (1.42)$$

avec $t = 2y - 1$ et $u = 2n$.

Soit B_n le n^{ime} nombre d'équilibre alors :

Théorème 1.17.2. [14] *B_n satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$B_n = 6B_{n-1} - B_{n-2},$$

avec $B_0 = 0$ et $B_1 = 1$.

Behera et Panda [14] admettent que $B_0 = 0$ et $B_1 = 1$ sont des nombres d'équilibre.

Théorème 1.17.3. [14] *La formule explicite des nombres d'équilibre est donnée par la formule suivante :*

$$B_{n+1} = \sum_k \binom{n-k}{k} (-1)^k 6^{n-2k}.$$

Irmak [39] a établi la formule suivante pour les nombres d'équilibre.

Théorème 1.17.4. [39] *La somme des nombres d'équilibre satisfait la relation suivante :*

$$\sum_{i=0}^n B_i = \frac{B_{n+1} - B_n - 1}{4}.$$

La fonction génératrice des nombres d'équilibre $F(x) = \sum_{n \geq 0} B_n x^n$ est donnée par :

$$F(x) = \frac{x}{1 - 6x + x^2}.$$

de manière similaire, Panda et Ray [52] ont défini les nombres co-équilibre.

1.18 Nombre co-équilibre

Le nombre co-équilibre n (n entier positif) est défini comme solution de l'équation diophantienne suivante (voir [52]) :

$$1 + 2 + \cdots + n = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (n + r), \quad (1.43)$$

pour un certain $r \in \mathbb{N}$.

Par exemple les nombres co-équilibre 2, 14, 84, avec r égal à 1, 6, 35 respectivement sont des solutions de l'équation (1.43).

Si n et r sont la solution de l'équation (1.43) alors,

$$n(n + 1) = \frac{(n + r)(n + r + 1)}{2}, \quad (1.44)$$

et

$$r = \frac{-(2n + 1) + \sqrt{8n^2 + 8n + 1}}{2}. \quad (1.45)$$

L'équation (1.43) est équivalente à l'égalité suivante :

$$1 + 2 + \cdots + (n - 1) = (n + 1) + (n + 2) + \cdots + (y - 1), \text{ avec } y \geq n + 2. \quad (1.46)$$

Le problème de détermination de tous les nombres co-équilibre conduit à la résolution de l'équation de Pell suivante :

Lemme 1.18.1. [52] *L'équation (1.46) est équivalente à l'équation de Pell suivante :*

$$t^2 - 2u^2 = -1, \quad (1.47)$$

avec $t = 2y - 1$ et $u = 2n + 1$.

Soit b_n le $n^{i\text{me}}$ nombre co-équilibre alors,

Théorème 1.18.2. [52] la suite $(b_n)_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$b_n = 6b_{n-1} - b_{n-2} + 2,$$

avec $b_1 = 0, b_2 = 2$.

Panda et Ray [52] admettent que $B_1 = 0$ est un nombre co-équilibre, et ils ont établi aussi le résultat suivant :

Théorème 1.18.3. [52] Les nombres co-équilibre $\{b_n\}_{n \geq 0}$ sont pairs.

La fonction génératrice des nombres co-équilibre $G(x) = \sum_{n \geq 0} b_n x^n$ est donnée par :

$$G(x) = \frac{2x^2}{(1-x)(1-6x+x^2)}.$$

Le résultat suivant donne la relation entre les nombres d'équilibre et les nombres co-équilibres.

Théorème 1.18.4. [52] Pour $n \geq 2$

$$b_n = 2(B_1 + B_2 + \cdots + B_{n-1}).$$

Panda [51] a remplacé les nombres de l'équation (1.38) et de l'équation (1.43) respectivement par des nombres impairs, donc il a proposé les deux équations diophantiennes suivantes :

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 3) = (2n + 1)(2n + 3) \cdots (2(n + s) - 1) \quad (1.48)$$

et

$$1 + 3 + \cdots + (2n - 1) = (2n + 1)(2n + 3) \cdots (2(n + s) - 1), \quad (1.49)$$

avec $s \geq 1$.

Soit $B_n^{(1)}$ la solution de l'équation (1.48)

Théorème 1.18.5. [51] $B_n^{(1)}$ satisfait la relation de récurrence suivante :

$$B_n^{(1)} = B_n + B_{n+1}.$$

L'équation (1.49) n'a pas de solution.

Une des extensions des nombres d'équilibre est lorsque (1.38) est remplacé par (voir [44])

$$1^k + 2^k + \cdots + (n-1)^k = (n+1)^l + (n+2)^l + \cdots + (n+r)^l,$$

avec k et l des entiers positifs.

Belbachir et Szalay [23] ont étudié les nombres d'équilibre et co-équilibre lorsque les relations (1.41) et (1.46) sont remplacées par les coefficients binomiaux situés sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Pascal, les auteurs ont alors défini respectivement les deux équations diophantiennes suivantes :

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x}^{y-1} \binom{n+k}{k}$$

et

$$\sum_{k=0}^x \binom{n+k}{k} = \sum_{k=x}^{y-1} \binom{n+k}{k},$$

Belbachir et Szalay [23] ont donné la solution complète pour les quatre première valeurs de n ($n = 0, 1, 2, 3$).

Pour d'autres extensions des nombres d'équilibre voir [15, 31, 42] .

1.19 Equation de Pell généralisée

Il est bien connu que l'équation de Pell généralisée est définie par l'équation diophantienne suivante :

$$x^2 - Dy^2 = N. \tag{1.50}$$

Nous présentons quelques résultats bien établis sur les équations de Pell.

Lemme 1.19.1. *La résolution de l'équation de Pell suivante*

$$x^2 - 2y^2 = -1 \tag{1.51}$$

implique y est impair.

Nous avons aussi les deux résultats suivants.

Si (x_0, y_0) est la solution fondamentale de l'équation (1.50) et (u, v) est la solution fondamentale de $u^2 - Dv^2 = 1$, alors on a les résultats suivants

Théorème 1.19.2. [10] *La solution générale de l'équation (1.50) est donnée par*

$$(x_n + \sqrt{D}y_n) = (x_0 + \sqrt{D}y_0)(u + \sqrt{D}v)^n. \quad (1.52)$$

Théorème 1.19.3. [10] *Les inégalités suivantes sont vérifiées*

$$0 \leq |x_0| \leq \sqrt{\frac{(u+1)N}{2}}, \quad (1.53)$$

$$0 \leq y_0 \leq \frac{v\sqrt{N}}{\sqrt{2(u+1)}}. \quad (1.54)$$

Chapitre 2

Triangle de Delannoy

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous montrons que les suites situées sur les transversales infinies du triangle de Delannoy $\left\{ \binom{n-\alpha k}{p+rk}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ sont croissantes, et donc unimodales, pour le cas particulier $\alpha = -1, r = 1, p = 0$, nous utilisons le résultat de Wang et Yeh [64] pour montrer que les suites $\left\{ \binom{n+k}{k}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ sont log-concaves pour tout $n \in \mathbb{N}$. Nous établissons des relations de récurrence associées à la somme des éléments situés sur les transversales finies du triangle de Delannoy et nous donnons la fonction génératrice de la somme obtenue, ce travail est une généralisation des résultats obtenus par Belbachir et al [21]. Nous proposons aussi une nouvelle identité pour les termes pairs et impairs de la suite Tribonacci. A la fin du chapitre, nous définissons un q -analogue pour les coefficients de Delannoy, nous donnons ensuite, une formule explicite ainsi que la fonction génératrice de ces coefficients, et nous proposons une q -déformation de la suite Tribonnacci.

2.2 Unimodalité des suites parcourant les directions infinies du triangle de Delannoy

Afin de prouver le résultat suivant, nous allons utiliser le théorème 1.16.2.

Théorème 2.2.1. *Pour un entier n fixé, la suite $\left\{ \binom{n+k}{k}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ est log-concave, donc unimodale.*

Démonstration. Par la relation (1.14), on a pour n fixé, $\binom{n+k}{k}_{[2]} = \sum_j \binom{k}{j} \binom{n}{j} 2^j$.

Comme la suite $x_j := \binom{n}{j} 2^j$ est trivialement log-concave, alors, par le théorème 1.16.2, la suite $\left\{ \binom{n+k}{k}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ est log-concave, donc unimodale. \square

Nous considérons dans le résultat suivant toutes les suites situées sur les transversales infinies du triangle de Delannoy, donc $\alpha + r \leq 0$.

Théorème 2.2.2. *Soient n, p, r des entiers et $\alpha \in \mathbb{Z}$ avec $n \geq p, 0 \leq p < r$ et $\alpha + r \leq 0$, la suite $\left\{ \binom{n-\alpha k}{p+rk}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ est croissante, donc unimodale.*

Démonstration. Afin de prouver que les suites $\left\{ \binom{n-\alpha k}{p+rk}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ sont croissantes, on doit prouver que la relation (2.1) est satisfaite

$$\binom{n - \alpha(k+1)}{p + r(k+1)}_{[2]} = \binom{n - \alpha k}{p + rk}_{[2]} + \sigma, \quad (2.1)$$

avec $\sigma \geq 0$.

Considérons $\binom{n-\alpha(k+1)}{p+r(k+1)}_{[2]} = \binom{n+ak+a}{p+rk+r}_{[2]}$, avec $a = -\alpha$ ($a \geq r$), en utilisant la relation (1.10) on a

$$\begin{aligned} \binom{n + ak + a}{p + rk + r}_{[2]} &= \binom{n + ak + a - 1}{p + rk + r}_{[2]} + \binom{n + ak + a - 1}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \binom{n + ak + a - 2}{p + rk + r - 1}_{[2]} \\ &= \binom{n + ak + a - 2}{p + rk + r}_{[2]} + \binom{n + ak + a - 2}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \binom{n + ak + a - 3}{p + rk + r - 1}_{[2]} \\ &\quad + \binom{n + ak + a - 1}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \binom{n + ak + a - 2}{p + rk + r - 1}_{[2]}. \end{aligned}$$

En utilisant la relation (1.10) $(a - r)$ fois, on obtient une relation de la forme suivante :

$$\binom{n + ak + a}{p + rk + r}_{[2]} = \binom{n + ak + r}{p + rk + r}_{[2]} + \sigma', \quad (2.2)$$

avec $\sigma' > 0$.

Et en réutilisant la relation (1.10) à nouveau, la relation (2.2) peut être écrite sous la forme suivante :

$$\begin{aligned} \binom{n + ak + a}{p + rk + r}_{[2]} &= \binom{n + ak + r - 1}{p + rk + r}_{[2]} + \binom{n + ak + r - 1}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \binom{n + ak + r - 2}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \sigma' \\ &= \binom{n + ak + r - 1}{p + rk + r}_{[2]} + \binom{n + ak + r - 2}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \binom{n + ak + r - 2}{p + rk + r - 2}_{[2]} \\ &\quad + \binom{n + ak + r - 3}{p + rk + r - 2}_{[2]} + \binom{n + ak + r - 2}{p + rk + r - 1}_{[2]} + \sigma'. \end{aligned}$$

En répétant ce processus r fois nous obtenons le résultat souhaité

$$\binom{n + ak + a}{p + rk + r}_{[2]} = \binom{n + ak}{p + rk}_{[2]} + \sigma, \quad (2.3)$$

avec $\sigma \geq 0$. Par conséquent, les suites $\left\{ \binom{n - \alpha k}{p + rk}_{[2]} \right\}_{k \geq 0}$ sont croissantes. \square

2.3 Relations de récurrence

Nous nous intéressons maintenant, à la somme des éléments parcourant les directions $(1, \alpha)$ du triangle de Delannoy.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}$, considérons la suite $(T_n^{(\alpha)})_{n \geq 0}$ donnée par :

$$T_{n+1}^{(\alpha)} := \sum_k \binom{n - \alpha k}{k}_{[2]}, \text{ avec } T_0^{(\alpha)} = 0.$$

Théorème 2.3.1. *La suite $(T_n^{(\alpha)})_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$T_{n+1}^{(\alpha)} = T_n^{(\alpha)} + \mathcal{T}_{n-\alpha}^{(\alpha)} + \mathcal{T}_{n-\alpha-1}^{(\alpha)},$$

avec $T_i^{(\alpha)} = 1$, pour $i \in \{1, \dots, \alpha\}$.

Démonstration. En utilisant la relation (1.10), on a :

$$\begin{aligned} T_{n+1}^{(\alpha)} &= \sum_k \binom{n - \alpha k - 1}{k}_{[2]} + \sum_k \binom{n - \alpha k - 1}{k-1}_{[2]} + \sum_k \binom{n - \alpha k - 2}{k-1}_{[2]} \\ &\quad k' \rightarrow k-1 \\ &= \sum_k \binom{n - \alpha k - 1}{k}_{[2]} + \sum_{k'} \binom{n - \alpha k' - \alpha - 1}{k'}_{[2]} + \sum_{k'} \binom{n - \alpha k' - \alpha - 2}{k'}_{[2]} \\ &= T_n^{(\alpha)} + \mathcal{T}_{n-\alpha}^{(\alpha)} + \mathcal{T}_{n-\alpha-1}^{(\alpha)}. \end{aligned}$$

\square

Remarque 2.3.2. *Pour $\alpha = 1$, on obtient les termes de la suite Tribonacci.*

Exemple 2.3.3. *Pour $\alpha = 2$, la suite $(T_n^{(2)})_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$T_n^{(2)} = T_{n-1}^{(2)} + T_{n-3}^{(2)} + T_{n-4}^{(2)},$$

avec $T_0^{(2)} = 0, T_1^{(2)} = T_2^{(2)} = T_3^{(2)} = 1$.

Les premiers termes de cette suite sont $(0, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 9, 15, 25, \dots)$, voir Sloane A006498.

Pour les autres valeurs de α , on trouve aussi ces suites sur Sloane, voir par exemples :

$\alpha = 3$	$(1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 11, 17, 27, 41, \dots)$ Sloan A079972
$\alpha = 4$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 13, 19, 29, \dots)$ Sloan A121832
$\alpha = 5$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 15, 21, \dots)$ Sloan A259278
$\alpha = 6$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 17, \dots)$ Sloan A276106
$\alpha = 7$	$(1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 1, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, \dots)$ Sloan A322405

Le résultat précédent peut être étendu pour toutes les transversales finies ($r + \alpha > 0$), avec $r \in \mathbb{N}$, $0 \leq p < r$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$.

Considérons la suite $(T_n^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ donnée par

$$\mathcal{T}_{n+1}^{(r,p,\alpha)} = \sum_k \binom{n - \alpha k}{p + rk}_{[2]}, \text{ avec } \mathcal{T}_0^{(r,p,\alpha)} = 0.$$

Théorème 2.3.4. Pour $n \geq 2r + \alpha$, la suite $(\mathcal{T}_n^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence linéaire suivante :

$$\sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-s}^{(r,p,\alpha)} = \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-r-\alpha-s}^{(r,p,\alpha)}. \quad (2.4)$$

Pour prouver ce théorème, on utilise le lemme 1.6.2.

Démonstration. Par le lemme 1.6.2, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-s}^{(r,p,\alpha)} &= \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \sum_k \sum_j \binom{p + rk}{j} \binom{n - \alpha k - j - s - 1}{p + rk} \\ &= \sum_k \sum_j \binom{p + rk}{j} \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \binom{n - \alpha k - j - s - 1}{p + rk} \\ &= \sum_k \sum_j \binom{p + rk}{j} \binom{n - \alpha k - j - r - 1}{p + r(k-1)} \\ &\quad (k' \rightarrow k - 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k'} \sum_j \binom{p + rk' + r}{j} \binom{n - \alpha k' - j - r - \alpha - 1}{p + rk'} \\
&= \sum_{k'} \sum_j \sum_s \binom{r}{s} \binom{p + rk'}{j - s} \binom{n - \alpha k' - j - r - \alpha - 1}{p + rk'} \\
&\quad (j' \rightarrow j - s) \\
&= \sum_{k'} \sum_{j'} \sum_s \binom{r}{s} \binom{p + rk'}{j'} \binom{n - \alpha k' - j' - s - r - \alpha - 1}{p + rk'} \\
&= \sum_{s=0}^r \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-r-\alpha-s}^{(r,p,\alpha)}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 2.3.5. Pour $r = \alpha = 1$ et $p = 0$, on obtient le résultat du théorème 1.8.3.

Exemple 2.3.6. Pour $r = 2, \alpha = 1$ et $p = 0$, la suite $(\mathcal{T}_n^{(2,0,1)})_{n \geq 0}$ est donnée par :

$$\mathcal{T}_{n+1}^{(2,0,1)} = \sum_k \sum_j \binom{2k}{j} \binom{n - j - k}{2k}, \text{ avec } \mathcal{T}_0^{(2,0,1)} = 0.$$

Cette suite satisfait la relation de récurrence suivante :

$$\mathcal{T}_n^{(2,0,1)} = 2\mathcal{T}_{n-1}^{(2,0,1)} - \mathcal{T}_{n-2}^{(2,0,1)} + \mathcal{T}_{n-3}^{(2,0,1)} + 2\mathcal{T}_{n-4}^{(2,0,1)} + \mathcal{T}_{n-5}^{(2,0,1)} \quad (n > 5),$$

avec $\mathcal{T}_1^{(2,0,1)} = \mathcal{T}_2^{(2,0,1)} = \mathcal{T}_3^{(2,0,1)} = 1$ and $\mathcal{T}_4^{(2,0,1)} = 2$.

Si on considère le cas particulier, $r = 2, \alpha = -1, p = 0$ et $p = 1$ du théorème 2.3.4, on obtient une nouvelle identité pour les termes pairs et impairs de la suite de Tribonacci $(T_n)_{n \geq 0}$ donnée dans le théorème 1.8.3.

Le lemme suivant est utilisé pour prouver le théorème 4.8.

Lemme 2.3.7. Les termes impairs et pairs de la suite Tribonacci $(T_n)_{n \geq 0}$ satisfont les deux relations de récurrence suivantes :

$$T_{2n+1} = 3T_{2n-1} + T_{2n-3} + T_{2n-5}, \text{ avec } T_1 = 1, T_3 = 2 \text{ et } T_5 = 7 \quad (2.5)$$

et

$$T_{2n} = 3T_{2n-2} + T_{2n-4} + T_{2n-6}, \text{ avec } T_0 = 0, T_2 = 1 \text{ et } T_4 = 4. \quad (2.6)$$

Démonstration. Les relations de récurrence (2.5) et (2.6) des termes impairs et pairs res-

pectivement de la suite Tribonacci sont obtenues en utilisant la transformation suivante :

$$\begin{aligned}
T_{2n+1} &= T_{2n} + T_{2n-1} + T_{2n-2} \\
&= T_{2n-1} + T_{2n-2} + T_{2n-3} + T_{2n-1} + T_{2n-2} \\
&= 2T_{2n-1} + T_{2n-1} - T_{2n-3} - T_{2n-4} + T_{2n-3} + T_{2n-3} + T_{2n-4} + T_{2n-5} \\
&= 3T_{2n-1} + T_{2n-3} + T_{2n-5}.
\end{aligned}$$

De la même façon, on établit la relation (2.6) :

$$\begin{aligned}
T_{2n} &= T_{2n-1} + T_{2n-2} + T_{2n-3} \\
&= T_{2n-2} + T_{2n-3} + T_{2n-4} + T_{2n-2} + T_{2n-3} \\
&= 2T_{2n-2} + T_{2n-2} - T_{2n-4} - T_{2n-5} + T_{2n-3} + T_{2n-3} + T_{2n-4} + T_{2n-5} \\
&= 3T_{2n-2} + T_{2n-4} + T_{2n-6}.
\end{aligned}$$

□

On note par V_n et U_n les termes impairs et pairs respectivement de la suite Tribonacci ($V_n = T_{2n+1}$ et $U_n = T_{2n}$), alors :

$$V_n = 3V_{n-1} + V_{n-2} + V_{n-3}, \text{ avec } V_1 = 1, V_2 = 2, V_3 = 7 \quad (2.7)$$

et

$$U_n = 3U_{n-1} + U_{n-2} + U_{n-3}, \text{ avec } U_0 = 0, U_1 = 1, U_2 = 4. \quad (2.8)$$

D'autre part, si on pose $r = 2, \alpha = -1$ et $p = 0$ dans la relation (2.4) on obtient :

$$\mathcal{T}_n^{(2,0,-1)} = 3\mathcal{T}_{n-1}^{(2,0,-1)} + \mathcal{T}_{n-2}^{(2,0,-1)} + \mathcal{T}_{n-3}^{(2,0,-1)}, \text{ avec } \mathcal{T}_1^{(2,0,-1)} = 1, \mathcal{T}_2^{(2,0,-1)} = 2, \mathcal{T}_3^{(2,0,-1)} = 7, \quad (2.9)$$

et si on pose $r = 2, \alpha = -1$ et $p = 1$, dans la même relation on obtient :

$$\mathcal{T}_n^{(2,1,-1)} = 3\mathcal{T}_{n-1}^{(2,1,-1)} + \mathcal{T}_{n-2}^{(2,1,-1)} + \mathcal{T}_{n-3}^{(2,1,-1)}, \text{ avec } \mathcal{T}_0^{(2,1,-1)} = 0, \mathcal{T}_1^{(2,1,-1)} = 1, \mathcal{T}_2^{(2,1,-1)} = 4. \quad (2.10)$$

Notons que $\mathcal{T}_n^{(2,0,-1)}$ et $\mathcal{T}_n^{(2,1,-1)}$ sont respectivement les termes pairs et impairs de la suite de Tribonacci ($\mathcal{T}_n^{(2,0,-1)} = V_n, \mathcal{T}_n^{(2,1,-1)} = U_n$), Ce qui nous a permis d'établir le résultat suivant :

Théorème 2.3.8. *Les termes pairs et impairs de la suite Tribonacci satisfont les relations*

suivante :

$$T_{2n+1} = \sum_k \binom{n+k}{2k}_{[2]},$$

$$T_{2n} = \sum_k \binom{n+k}{2k+1}_{[2]}.$$

2.3.1 Fonction génératrice

Nous établissons dans le résultat suivant la fonction génératrice de la suite $(\mathcal{T}_n^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$

Théorème 2.3.9. *La fonction génératrice de la suite $(\mathcal{T}_n^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ est donnée par :*

$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1}^{(r,p,\alpha)} x^n = \frac{(1-x)^{r-p-1} (x+x^2)^p}{(1-x)^r - x^{\alpha+r} (1+x)^r}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1}^{(r,p,\alpha)} x^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_k \binom{n-\alpha k}{p+r k}_{[2]} x^n \\ &= \sum_k \sum_{n \geq \alpha k} \binom{n-\alpha k}{p+r k}_{[2]} x^{n-\alpha k} x^{\alpha k}, \end{aligned}$$

et par la fonction génératrice donnée dans la relation (1.12), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1}^{(r,p,\alpha)} x^n &= \sum_k \frac{(x+x^2)^{p+r k} x^{\alpha k}}{(1-x)^{p+r k+1}} \\ &= \frac{(x+x^2)^p}{(1-x)^{p+1}} \sum_k \left(\frac{(x+x^2)^r x^\alpha}{(1-x)^r} \right)^k \\ &= \frac{(x+x^2)^p}{(1-x)^{p+1}} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^\alpha (x+x^2)^r}{(1-x)^r} \right)} \\ &= \frac{(1-x)^{r-p-1} (x+x^2)^p}{(1-x)^r - x^{\alpha+r} (1+x)^r}. \end{aligned}$$

□

2.4 Les nombres q -Delannoy

Nous proposons dans cette section un q -analogue au coefficient de Delannoy, par l'extension de la relation (1.10)

Définition 2.4.1. *On définit le coefficient q -Delannoy, par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q + q^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q + q^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q, \quad (2.11)$$

avec la convention $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{[2]}^q = 1$, $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q = 0$ pour $k \notin \{0, \dots, n\}$ et $n \geq k \geq 0$.

La fonction génératrice de $(\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q)_{n \geq 0}$ est donnée dans le résultat suivant :

Théorème 2.4.2. *Soit $\mathbb{F}_k(x) := \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n$ la fonction génératrice des coefficients q -Delannoy, alors :*

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{q^{\binom{k}{2}} x^k (-x; q)_k}{(x; q)_{k+1}}.$$

Démonstration. On a $\mathbb{F}_k(x) = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n$, en utilisant la relation (2.11) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_k(x) &= \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n + \sum_{n \geq 0} q^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n + \sum_{n \geq 0} q^{n-2} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n \\ &= x \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n + (x+x^2) \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q (qx)^n \\ &= x\mathbb{F}_k(x) + (x+x^2)\mathbb{F}_{k-1}(qx), \end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{x(1+x)}{1-x} \mathbb{F}_{k-1}(qx). \quad (2.12)$$

En appliquant le même processus k fois, on obtient

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{q^{\binom{k}{2}} x^k (-x; q)_k}{(x; q)_{k+1}}.$$

□

Nous proposons maintenant, une autre relation de récurrence équivalente à la relation (2.11) pour les coefficients q -Delannoy.

Proposition 2.4.3. *Les coefficients q -Delannoy peuvent être aussi obtenus par la relation de récurrence suivante :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q + q^{k-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q + q^{2(k-1)} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q. \quad (2.13)$$

Démonstration. On a $\mathbb{F}_k(x) = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n$, en utilisant la relation (2.13) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_k(x) &= q^k \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n + q^{k-1} \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n + q^{2(k-1)} \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n \\ &= q^k x \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n + (q^{k-1}x + q^{2(k-1)}x^2) \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]}^q x^n \\ &= q^k x F_k(x) + (q^{k-1}x + q^{2(k-1)}x^2) F_{k-1}(x), \end{aligned}$$

alors

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{q^{k-1}x(1 + q^{k-1}x)}{1 - q^k x} \mathbb{F}_{k-1}(x). \quad (2.14)$$

En répétant le même processus k fois, on obtient :

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{q^{\binom{k}{2}} x^k (-x; q)_k}{(x; q)_{k+1}}.$$

Puisque nous avons obtenu la même fonction génératrice, par conséquent, les relations (2.11) et (2.13) sont équivalentes. \square

La formule explicite des nombres de Delannoy est donnée par :

Théorème 2.4.4. *Les nombres q -Delannoy $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q$ ont la formule explicite suivante :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[2]}^q = \sum_j \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q^{(1)}. \quad (2.15)$$

Démonstration. On a

$$\sum_{n \geq 0} \sum_j \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q^{(1)} x^n = \sum_j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q^{(1)} x^j \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} x^{n-j} = \frac{q^{\binom{k}{2}} x^k (-x; q)_k}{(x; q)_{k+1}},$$

la dernière égalité est obtenue par les deux relations (1.32) et (1.31). \square

Dans ce qui suit, nous établissons un q -analogue de la suite Tribonacci.

Théorème 2.4.5. Soit $\mathbb{T}_{n+1}^{(2)}(x) := \sum_k \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{[2]} x^k$ pour $n \geq 0$ et $\mathbb{T}_0^{(2)}(x) = 0$ alors :

$$\mathbb{T}_{n+1}^{(2)}(x) = \mathbb{T}_n^{(2)}(x) + q^{n-2}x\mathbb{T}_{n-1}^{(2)}(x/q) + q^{n-3}x\mathbb{T}_{n-2}^{(2)}(x/q) \quad (2.16)$$

et

$$\mathbb{T}_{n+1}^{(2)}(x) = \mathbb{T}_n^{(2)}(qx) + x\mathbb{T}_{n-1}^{(2)}(qx) + x\mathbb{T}_{n-2}^{(2)}(q^2x). \quad (2.17)$$

Démonstration. On a :

$$\mathbb{T}_{n+1}^{(2)}(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{[2]} x^k,$$

par la relation (2.11), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{n+1}^{(2)}(x) &= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]} x^k + \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]} q^{n-k-1} x^k \\ &+ \sum_k \begin{bmatrix} n-k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]} q^{n-k-2} x^k \\ &= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]} x^k + x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-2 \\ k' \end{bmatrix}_{[2]} q^{n-k'-2} x^{k'} \\ &+ x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-3 \\ k' \end{bmatrix}_{[2]} q^{n-k'-3} x^{k'} \\ &= \mathbb{T}_n^{(2)}(x) + q^{n-2}x\mathbb{T}_{n-1}^{(2)}(x/q) + q^{n-3}x\mathbb{T}_{n-2}^{(2)}(x/q). \end{aligned}$$

De la même façon, nous allons prouver la relation (2.17) en utilisant la relation (2.13).

Par la relation (2.13) on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{n+1}^{(2)}(x) &= \sum_k q^k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]} x^k + \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]} q^{k-1} x^k \\ &+ \sum_k \begin{bmatrix} n-k-2 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[2]} q^{2(k-1)} x^k \\ &= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[2]} (qx)^k + x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-2 \\ k' \end{bmatrix}_{[2]} (qx)^{k'} \\ &+ x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-3 \\ k' \end{bmatrix}_{[2]} (q^2x)^{k'} \\ &= \mathbb{T}_n^{(2)}(qx) + x\mathbb{T}_{n-1}^{(2)}(qx) + x\mathbb{T}_{n-2}^{(2)}(q^2x). \end{aligned}$$

□

Chapitre 3

Triangle de Delannoy généralisé

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous commençons par établir l'expression de la suite récurrente linéaire obtenue en sommant les éléments parcourant les directions finies du triangle de Delannoy généralisé. La fonction génératrice de cette somme est aussi donnée, ensuite, nous établissons l'unimodalité des suites situées sur la direction infinie $(1, -1)$ de ce triangle. Nous discutons en outre le phénomène de Morgan-Voyce et nous concluons par montrer la log-convexité de la suite centrale du triangle de Delannoy inversé.

3.2 Suites récurrentes linéaires

Nous établissons la relation de récurrence associée à la somme des éléments situés sur la direction finie (r, α) du triangle de Delannoy généralisé.

On note par $\mathcal{T}_{n,r,p,\alpha}^{(a,b,c)}$ la somme des éléments parcourant la direction (r, α) du triangle de Delannoy généralisé (voir les relation (1.17) et (1.18)),

$$\mathcal{T}_{n+1,r,p,\alpha}^{(a,b,c)} = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n-p}{\alpha+r} \rfloor} d(n - \alpha k, p + rk).$$

Nous commençons par analyser la direction $(1, \alpha)$.

Théorème 3.2.1. *La suite $\mathcal{T}_{n,\alpha} \equiv \mathcal{T}_{n,1,0,\alpha}^{(a,b,c)}$ satisfait la relation de récurrence linéaire suivante :*

$$\mathcal{T}_{n,\alpha} = b\mathcal{T}_{n-1,\alpha} + a\mathcal{T}_{n-\alpha-1,\alpha} + c\mathcal{T}_{n-\alpha-2,\alpha},$$

avec les conditions initiales $\mathcal{T}_{1,\alpha} = 1$ et $\mathcal{T}_{0,\alpha} = \mathcal{T}_{-1,\alpha} = \dots = \mathcal{T}_{n-\alpha-1,\alpha} = 0$.

Démonstration. Par la relation (1.18), on a :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_{n+1,\alpha} &= \sum_{k \geq 0} d(n - \alpha k, k) \\ &= \sum_{k \geq 0} bd(n - \alpha k - 1, k) + ad(n - \alpha k - 1, k - 1) + cd(n - \alpha k - 2, k - 1) \\ &= b \sum_{k \geq 0} d(n - \alpha k - 1, k) + a \sum_{k' \geq 0} d(n - \alpha k' - \alpha - 1, k') + c \sum_{k' \geq 0} d(n - \alpha k' - \alpha - 2, k') \\ &= b\mathcal{T}_{n,\alpha} + a\mathcal{T}_{n-\alpha,\alpha} + c\mathcal{T}_{n-\alpha-1,\alpha}. \end{aligned}$$

□

Soit la fonction génératrice $F(z) = \sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1,\alpha} z^n$, par le théorème 3.2.1 on obtient le corollaire suivant :

Corollaire 3.2.2. *La fonction génératrice de la suite $(\mathcal{T}_{n,\alpha})_{n \geq 0}$ est donnée par*

$$F(z) = \frac{1}{1 - bz - az^{\alpha+1} - cz^{\alpha+2}}.$$

Pour la preuve de ce résultat, on prend $r = 1$ et $p = 0$ dans le théorème 3.2.4.

On s'intéresse maintenant à la généralisation du théorème 3.2.1, $\alpha \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{N}$, $p \in \mathbb{Z}^+$ avec $0 \leq p < r$ et $\alpha + r > 0$.

Théorème 3.2.3. *La suite $\mathcal{T}_{n,q,r,p} := \mathcal{T}_{n,r,p,\alpha}^{(a,b,c)}$ satisfait la relation de récurrence linéaire suivante :*

$$\sum_{s=0}^r (-b)^s \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-s,r,p,\alpha} = \sum_{s=0}^r a^{r-s} c^s \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-r-\alpha-s,r,p,\alpha}. \quad (3.1)$$

Démonstration. Par le lemme 1.6.2, on a :

$$\begin{aligned} &\sum_{s=0}^r (-b)^s \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-s,r,p,\alpha} \\ &= \sum_{s=0}^r (-b)^s \binom{r}{s} \sum_k \sum_j \binom{p+rk}{j} \binom{n-\alpha k-j-s-1}{p+rk} a^{p+rk-j} b^{n-(\alpha+r)k-p-j-s-1} c^j \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_k \sum_j \binom{p+rk}{j} a^{p+rk-j} b^{n-(\alpha+r)k-p-j-1} c^j \sum_{s=0}^r (-1)^s \binom{r}{s} \binom{n-\alpha k-j-s-1}{p+rk} \\
&= \sum_k \sum_j \binom{p+rk}{j} \binom{n-\alpha k-j-r-1}{p+r(k-1)} a^{p+rk-j} b^{n-(\alpha+r)k-p-j-1} c^j \\
&\quad (k' \rightarrow k-1) \\
&= \sum_{k'} \sum_j \binom{p+rk'+r}{j} \binom{n-\alpha k'-j-r-q-1}{p+rk'} a^{p+rk'-j+r} b^{n-(\alpha+r)k'-p-j-\alpha-r-1} c^j \\
&= \sum_{k'} \sum_j \sum_s \binom{r}{s} \binom{p+rk'}{j-s} \binom{n-\alpha k'-j-r-\alpha-1}{p+rk'} a^{p+rk'-j+r} b^{n-(\alpha+r)k'-p-j-\alpha-r-1} c^j \\
&\quad (j' \rightarrow j-s) \\
&= \sum_{k'} \sum_{j'} \sum_s \binom{r}{s} \binom{p+rk'}{j'} \binom{n-\alpha k'-j'-s-r-\alpha-1}{p+rk'} a^{p+rk'-j'-s+r} \times \\
&\quad \times b^{n-(\alpha+r)k'-p-j'-s-\alpha-r-1} c^{j'+s} \\
&= \sum_{s=0}^r a^{r-s} c^s \binom{r}{s} \mathcal{T}_{n-r-\alpha-s,r,p,\alpha}.
\end{aligned}$$

□

3.2.1 Fonction génératrice

La fonction génératrice de la suite $(\mathcal{T}_{n,r,p,\alpha})_{n \geq 0}$ est donnée par :

Théorème 3.2.4. *Pour $n \geq 0$ on a :*

$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1,r,p,\alpha} z^n = \frac{(1-bz)^{r-p-1} (a+c z)^p z^p}{(1-bz)^r - (a+c z)^r z^{\alpha+r}}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1,r,p,\alpha} z^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} d(n-\alpha k, p+rk) z^n \\
&= \sum_{n \geq 0} \sum_{k \geq 0} \sum_j \binom{p+rk}{j} \binom{n-\alpha k-j}{p+rk} a^{p+rk-j} b^{n-k(\alpha+r)-p} c^j z^n \\
&= \frac{(az+c z^2)^p}{(1-bz)^{p+1}} \sum_{k \geq 0} \left(\frac{z^\alpha (az+c z^2)^r}{(1-bz)^r} \right)^k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{z(a+cz)}{1-bz} \right)^p \frac{\frac{1}{1-bz}}{1 - z^\alpha \left(\frac{z(a+cz)}{1-bz} \right)^r} \\
&= \frac{(1-bz)^{r-p-1} (a+cz) z^p}{(1-bz)^r - (a+cz)^r z^{\alpha+r}}.
\end{aligned}$$

□

Exemple 3.2.5. Pour $r = 2, \alpha = 1$ et $p = 0$, la suite

$$G_{n+1} := \mathcal{T}_{n+1,2,0,1}^{(1,1,1)} = \sum_k \sum_{j=0}^k \binom{2k}{j} \binom{n-j-k}{2k},$$

satisfait la relation de récurrence suivante :

$$G_n = 2G_{n-1} - G_{n-2} + G_{n-3} + 2G_{n-4} + G_{n-5} \quad (n \geq 5),$$

avec $G_0 = 0, G_1 = 1, G_2 = 1, G_3 = 1$ et $G_4 = 2$.

3.3 Unimodalité des suites situées sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy généralisé

Nous établissons l'unimodalité des suites situées sur la direction infinie $(1, -1)$ du triangle de Delannoy généralisé

Théorème 3.3.1. Pour n fixé, la suite $\{d(n+k, k)\}_k$ située sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy généralisé est log-concave, donc unimodale.

Pour pouvoir prouver ce théorème, nous avons besoin de l'identité suivante, qui est une généralisation de (1.14).

Lemme 3.3.2. L'égalité suivante est vérifiée

$$\sum_j \binom{k}{j} \binom{n-j}{k} \alpha^j = \sum_j \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} (\alpha+1)^j.$$

Démonstration. On commence par calculer la fonction génératrice de $\sum_j \binom{k}{j} \binom{n-j}{k} \alpha^j$, on obtient donc :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_j \binom{k}{j} \binom{n-j}{k} \alpha^j x^n &= \sum_j \binom{k}{j} (\alpha x)^j \sum_{n \geq 0} \binom{n-j}{k} x^{n-j} \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \sum_j \binom{k}{j} (\alpha x)^j \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} (1 + \alpha x)^k. \end{aligned}$$

Nous calculons aussi la fonction génératrice de $\sum_j \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} (\alpha + 1)^j$, nous obtenons alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \sum_j \binom{k}{j} \binom{n-k}{j} (\alpha + 1)^j x^n &= x^k \sum_j \binom{k}{j} (\alpha + 1)^j \sum_{n \geq 0} \binom{n-k}{j} x^{n-k} \\ &= \frac{x^k}{1-x} \sum_j \binom{k}{j} \left(\frac{\alpha x + x}{1-x} \right)^j \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} (1 + \alpha x)^k. \end{aligned}$$

Aussi les deux identités sont égaux. □

Après avoir démontré le lemme, nous passons maintenant à la preuve du théorème 3.3.1.

Démonstration. Pour n fixé, le lemme 3.3.2, donne :

$$d(n+k, k) = a^k b^n \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} \binom{n}{j} \left(1 + \frac{c}{ab}\right)^j.$$

On a la suite $\left(\binom{n}{j}\right)_j$ est log-concave car

$$\frac{\binom{n}{j}^2}{\binom{n}{j-1} \binom{n}{j+1}} = \frac{(j+1)(n-j+1)}{j(n-j)} \geq 1,$$

donc la suite $x_j := \binom{n}{j} \left(1 + \frac{c}{ab}\right)^j$ est trivialement log-concave car $1 + \frac{c}{ab}$ est une constante, et par le théorème 1.16.2, la suite $y_k := \sum_j \binom{k}{j} x_j$ est aussi log-concave, alors, la suite $(d(n+k, k))_k$ est log-concave, donc unimodale. □

3.4 Le triangle de Delannoy et la suite de Fibonacci généralisé

Kuhapatanakul [43] a montré que si nous supprimons les lignes impaires du triangle de Delannoy \mathcal{H} , la somme des éléments parcourant la direction $(1, 1)$ donne le carré des nombres de Fibonacci, et si nous supprimons les lignes paires, la somme des éléments situés sur la même direction donne les produits consécutifs des nombres de Fibonacci, de plus, l'auteur a généralisé ce fait à la suite de Fibonacci généralisée $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ définie par la relation (1.6). Nous donnons une preuve alternative de ce fait.

Nous commençons par donner le lemme auxiliaire suivant :

Lemme 3.4.1. [41, 59] *La fonction génératrice des carrés de la suite de Fibonacci généralisé $(\mathcal{F}_n)_{n \geq 0}$ et le produit des nombres de Fibonacci consécutifs généralisé sont donnés respectivement par :*

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i^2 z^i = \frac{z(1-bz)}{(1+bz)(1-(a^2+2b)z+b^2z^2)},$$

$$\sum_{i=0}^{\infty} \mathcal{F}_i \mathcal{F}_{i+1} z^i = \frac{az}{(1+bz)(1-(a^2+2b)z+b^2z^2)}.$$

Définissons le triangle, $\mathcal{H}^* = [r(n, k)]_{n, k \geq 0}$, avec

$$r(n, k) = \begin{cases} \mathcal{D}_{(ab, a, b^2)}(n-k, k), & \text{pour } n \geq k; \\ 0, & \text{pour } n < k. \end{cases}$$

De l'équation (1.15), on obtient :

$$r(n, k) = \sum_{i=0}^k \binom{k}{i} \binom{n-i}{k} a^{n-2j} b^{k+i}.$$

Théorème 3.4.2. *Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$\mathcal{F}_{n+1}^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} r(2n-2i, i) = \sum_{i=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j}{i} a^{2n-2i-2j} b^{i+j}, \quad (3.2)$$

$$\mathcal{F}_n \mathcal{F}_{n+1} = \sum_{i=0}^{\lfloor 2n-1/3 \rfloor} r(2n-2i-1, i) = \sum_{i=0}^{\lfloor 2n-1/3 \rfloor} \sum_{j=0}^i \binom{i}{j} \binom{2n-2i-j-1}{i} a^{2n-2i-2j-1} b^{i+j}. \quad (3.3)$$

Démonstration. Par le corollaire 3.2.2 on obtient la fonction génératrice de la somme des

éléments situés sur la direction (1, 2) du triangle \mathcal{H}^* :

$$S(z) = \frac{1}{1 - az - abz^3 - b^2z^4}.$$

Alors, la fonction génératrice des coefficients pairs est donnée par :

$$S_{pairs}(z) = \frac{1}{2}(S(z) + S(-z)) = \frac{1 - bz^2}{(1 + bz^2)(1 - (a^2 + 2b)z^2 + b^2z^4)} = \sum_{i=1}^{\infty} U_i^2 z^{2i-2}.$$

donc,

$$U_{n+1}^2 = \sum_{i=0}^{\lfloor 2n/3 \rfloor} r(2n - 2i, i).$$

Par conséquent, l'équation (3.2) est vérifiée.

L'identité (3.3) est prouvée de manière similaire. \square

3.5 Le phénomène Morgan-Voyce

La suite classique de Morgan-Voyce $(M_n)_{n \geq 0}$ est la suite récurrente linéaire d'ordre 2 définie par : $M_n = (2 + t)M_{n-1} - M_{n-2}$, pour $n \geq 3$, avec $M_1 = 1$ et $M_2 = 1 + t + s$.

Par rapport à la matrice de Pascal, nous avons toujours (cf. [2, 16]).

$$M_{n+1} = \sum_{k=0}^n M(n, k)t^k, \quad \text{avec } M(n, k) = \binom{n+k}{2k} + s \binom{n+k}{2k+1}.$$

Le phénomène Morgan-Voyce apparaît lorsque α prend des valeurs négatives, il considère le cas où les termes d'une même suite peuvent se chevaucher, lorsque cette situation se produit, nous obtenons une nouvelle formulation.

Pour les valeurs $\alpha = -r + 1, \dots, 0$ la relation (3.1) s'écrit comme suit :

$$\begin{aligned} & \mathcal{T}_{n,q,r,p} - b \binom{r}{1} \mathcal{T}_{n-1,q,r,p} + b^2 \binom{r}{2} \mathcal{T}_{n-2,q,r,p} + \dots + (-1)^{t-1} b^{t-1} \binom{r}{t-1} \mathcal{T}_{n-t+1,q,r,p} \\ &= \left((-1)^{t-1} b^t \binom{r}{t} + a^r \binom{r}{0} \right) \mathcal{T}_{n-t,q,r,p} + \dots + \left((-1)^{r-1} b^r \binom{r}{r} + \binom{r}{r-t} a^t c^{r-t} \right) \mathcal{T}_{n-r,q,r,p} \\ & \quad + \binom{r}{r-t+1} a^{t-1} c^{r-t+1} \mathcal{T}_{n-r+1,q,r,p} + \dots + \binom{r}{r} c^r \mathcal{T}_{n-r-t,q,r,p}, \end{aligned}$$

pour $t = 1, 2, \dots, r$.

Donc pour $q = -r + t$ ($1 \leq t \leq r$) et p fixé, nous introduisons la *suite Morgan-Voyce* $M_{n,t}^{(p)}$

d'ordre t tels que, $M_{n,t}^{(p)} \equiv \mathcal{T}_{n,q,r,p}$, aussi :

$$\sum_{s=0}^{t-1} (-b)^s \binom{r}{s} M_{n-s,t}^{(p)} = \sum_{s=t}^r \left(a^{r-s+t} c^{s-t} \binom{r}{s-t} - (-b)^s \binom{r}{s} \right) M_{n-s,t}^{(p)} + \sum_{s=r+1}^{r+t} a_{r+t-s} c^{s-i} \binom{r}{s-t} M_{n-s,t}^{(p)}.$$

En utilisant l'expression ci-dessus et le théorème 1.7.1, on obtient le résultat suivant :

Théorème 3.5.1. *La suite Morgan-Voyce d'ordre t est donnée par :*

$$\begin{cases} M_{n,t}^{(p)} = \lambda_0 y_{n-r-t+1} + \lambda_1 y_{n-r-t+2} + \cdots + \lambda_{r+t-1} y_n, \\ M_{j,t}^{(p)} = \alpha_{r+t-j-1}, \text{ pour } 0 \leq j \leq r+t-1. \end{cases}$$

avec $\lambda_j = -\sum_{k=j}^{r+t-1} a_{k-j} \alpha_k$ pour $(0 \leq j \leq r+t-1)$, avec $a_0 = -1$, et

$$a_j = \begin{cases} (-1)^{j+1} b^j \binom{r}{j}, & \text{pour } j = 0, \dots, t-1; \\ a^{r-j+t} c^{j-t} \binom{r}{j-t} + (-1)^{j+1} b^j \binom{r}{j}, & \text{pour } j = t, \dots, r; \\ a^{r-j+t} c^{j-t} \binom{r}{j-t}, & \text{pour } j = r+1, \dots, r+t. \end{cases}$$

où y_n est définie dans le théorème 1.7.1.

Ce résultat nous permet d'obtenir des identités combinatoires.

Exemple 3.5.2. *Pour $r = 2, p = 0$ et $t = 1$, on obtient :*

$$M_{n,1}^{(0)} = (2b + a^2)M_{n-1,1}^{(0)} + (2ac - b^2)M_{n-2,1}^{(0)} + c^2 M_{n-3,1}^{(0)},$$

avec $M_{0,1}^{(0)} = 0, M_{1,1}^{(0)} = 1$ et $M_{2,1}^{(0)} = b + a^2$.

Le théorème 3.5.1 donne

$$M_{n,1}^{(0)} = \lambda_0 y_{n-2} + \lambda_1 y_{n-1} + \lambda_2 y_n$$

avec, $M_{0,1}^{(0)} = \alpha_2, M_{1,1}^{(0)} = \alpha_1, M_{2,1}^{(0)} = \alpha_0$ et $\lambda_0 = -b, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 0$, alors :

$$\begin{aligned}
M_{n,1}^{(0)} &= -by_{n-2} + y_{n-1} \\
&= -b \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n-2} \binom{k_1+k_2+k_3}{k_1, k_2, k_3} (2b+a^2)^{k_1} (2ac-b^2)^{k_2} c^{2k_3} \\
&\quad + \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n-1} \binom{k_1+k_2+k_3}{k_1, k_2, k_3} (2b+a^2)^{k_1} (2ac-b^2)^{k_2} c^{2k_3}.
\end{aligned}$$

En outre, $M_{n,1}^{(0)} = \mathcal{T}_{n,-1,2,0}$, donc :

$$M_{n,1}^{(0)} = \sum_k d(n+k, 2k) = \sum_k \sum_j \binom{2k}{j} \binom{n+k-j-1}{2k} a^{2k-j} b^{n-k-j-1} c^j.$$

ce qui donne l'égalité suivante

Proposition 3.5.3. *L'identité suivante est vraie*

$$\begin{aligned}
&\sum_k \sum_j \binom{2k}{j} \binom{n+k-j-1}{2k} a^{2k-j} b^{n-k-j-1} c^j = \\
&b \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n-2} \binom{k_1+k_2+k_3}{k_1, k_2, k_3} (2b+a^2)^{k_1} (2ac-b^2)^{k_2} c^{2k_3} \\
&\quad + \sum_{k_1+2k_2+3k_3=n-1} \binom{k_1+k_2+k_3}{k_1, k_2, k_3} (2b+a^2)^{k_1} (2ac-b^2)^{k_2} c^{2k_3}.
\end{aligned}$$

3.6 Le triangle de Delannoy inversé et log-convexité

Le triangle de Delannoy inversé a également des propriétés intéressantes. Yang et al. [65] ont étudié ce triangle et ils ont donné une interprétation combinatoire en termes de chemins de treillis. Soit $\mathbb{J}(n, k)$ l'ensemble des chemins allant du point $(0, 0)$ au point $(n-k, n)$, dont le pas sont $R = \{V = (0, 1), D = (1, 1), H = (1, 0)\}$; avec la propriété supplémentaire que les chemins ne soient pas en dessous de la ligne $y = x$ et que la dernière étape des chemins n'est pas horizontale. Soit $\mathcal{L}(n, k)$ le nombre total de tous les chemins dans $\mathbb{J}(n, k)$. Soit $\mathcal{S} := (\mathcal{L}(n, k))_{n, k \in \mathbb{N}}$. Yang et al. [65] ont observé que la matrice non signée \mathcal{H}^{-1} est égale à \mathcal{S} . Ramírez et Sirvent ont généralisé ces matrices dans [54].

Les premières lignes du triangle de Delannoy inversé sont données par :

$$\mathcal{H}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -3 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 10 & -5 & 1 & 0 & 0 \\ 22 & -38 & 22 & -7 & 1 & 0 \\ -90 & 158 & -98 & 38 & -9 & 1 & \dots \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & \ddots \end{bmatrix}.$$

TABLE 3.1 – Le triangle de Delannoy inversé.

La suite associée à la colonne centrale du triangle non signée \mathcal{H}^{-1} est notée par H_n . Les premiers termes sont

$$1, 3, 22, 194, 1838, 18082, 182054, 1861890, 19258078, 200898626, \dots$$

On prouve que la suite $\{H_n\}_{n \geq 0}$ est log-convexe. Notez que, Liu et Wang [45] ont prouvé que la suite centrale de Delannoy est log-convexe.

Par le corollaire 4.3 de [65] on obtient l'expression suivante pour la suite H_n :

$$H_n = \sum_{j=0}^n \left(\frac{n}{2n-j} \binom{2n-1}{j} \binom{3n-j-1}{2n-1} + \frac{n+1}{2n-j} \binom{2n-1}{j} \binom{3n-j-2}{2n-1} \right), \quad n \geq 0.$$

Par l'algorithme de Kauers's [40], nous obtenons que H_n satisfait la relation de récurrence :

$$p_n H_n = q_n H_{n-1} + r_n H_{n-2}, \quad n \geq 2$$

avec les conditions initiales $H_0 = 1$, $H_1 = 3$ et

$$\begin{aligned} p_n &= 20n^4 - 72n^3 + 85n^2 - 39n + 6, \\ q_n &= 220n^4 - 902n^3 + 1272n^2 - 711n + 129, \\ r_n &= 20n^4 - 92n^3 + 89n^2 + 36n - 45. \end{aligned}$$

Enfin, nous avons besoin du critère suivant, pour la log-convexité des suites $\{z_n\}_n$ satis-

faisant la relation de récurrence suivante

$$a(n)z_{n+1} = b(n)z_n + c(n)z_{n-1}, \quad (3.4)$$

avec $a(n), b(n)$ et $c(n)$ sont positives pour $n \geq 1$,

Lemme 3.6.1 ([45]). *Soient la suite $\{z_n\}_n$ définie par (3.4) et*

$$\lambda_n = \frac{b(n) + \sqrt{b^2(n) + 4a(n)c(n)}}{2a(n)}.$$

Supposons que z_0, z_1, z_2, z_3 est log-convexe et que l'inégalité

$$a(n)\lambda_{n-1}\lambda_{n+1} - b(n)\lambda_{n-1} - c(n) \geq 0$$

est vrai pour $n \geq 2$, alors la suite $\{z_n\}_n$ est log-convexe.

En utilisant le logiciel *Mathematica*, la suite $(H_n)_{n \geq 0}$ vérifie les conditions du lemme ci-dessus, donc nous concluons avec le théorème suivant :

Théorème 3.6.2. *La suite $(H_n)_{n \geq 0}$ est log-convexe.*

Chapitre 4

Problèmes d'équilibre et triangle de Delannoy

4.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous étudions les problèmes d'équilibre et de co-équilibre des coefficients parcourant la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy, nous donnons la solution complète pour les quatre premières transversales $n = 0, 1, 2, 3$. Nous prouvons pour le cas général l'existence d'une solution pour le problème d'équilibre, et c'est ce qui nous a permis d'établir une nouvelle identité avec laquelle on achèvera ce chapitre.

4.2 Problème d'équilibre et de co-équilibre sur le triangle de Delannoy

Pour n fixé et x et y tels que $x + 2 \leq y$, nous définissons les problèmes d'équilibre et de co-équilibre avec les coefficients situés sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy, ce qui donne respectivement les deux équations suivante :

$$\sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} \quad (4.1)$$

et

$$\sum_{k=0}^x \binom{n+k}{k}_{(2)} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}_{(2)}. \quad (4.2)$$

Avant de donner la solution de ces équations, on présente un ensemble de lemmes qui seront utiles dans ce que suit.

Lemme 4.2.1. *L'identité suivante est vérifiée :*

$$\sum_{k=0}^t \binom{n+k}{k}_{(2)} = \frac{1}{2} \left[\binom{n+t}{t}_{(2)} + \binom{n+t+1}{t}_{(2)} \right]. \quad (4.3)$$

Démonstration. Pour $t = 1$, on peut facilement vérifier l'égalité suivante par la relation (1.10) :

$$\binom{n}{0}_{(2)} + \binom{n+1}{1}_{(2)} = \frac{1}{2} \left[\binom{n+1}{1}_{(2)} + \binom{n+2}{1}_{(2)} \right].$$

Supposons que l'équation (4.3) est vraie pour $0 \leq k \leq t-1$, donc :

$$\sum_{k=0}^{t-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} = \frac{1}{2} \left[\binom{n+t-1}{t-1}_{(2)} + \binom{n+t}{t-1}_{(2)} \right],$$

et montrons la pour t , par l'identité précédente nous obtenons :

$$\begin{aligned} 2 \sum_{k=0}^{t-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} + 2 \binom{n+t}{t}_{(2)} &= \binom{n+t-1}{t-1}_{(2)} + \binom{n+t}{t-1}_{(2)} + 2 \binom{n+t}{t}_{(2)} \\ &= \binom{n+t}{t}_{(2)} + \binom{n+t+1}{t}_{(2)}. \end{aligned}$$

□

Par le lemme 4.2.1, on peut déduire le résultat suivant :

Lemme 4.2.2. *Les équations (4.1) et (4.2) sont respectivement équivalentes aux deux équations diophantiennes suivantes :*

$$2 \binom{n+x+1}{x}_{(2)} = \binom{n+y-1}{y-1}_{(2)} + \binom{n+y}{y-1}_{(2)}, \quad (4.4)$$

$$2 \left(\binom{n+x}{x}_{(2)} + \binom{n+x+1}{x}_{(2)} \right) = \binom{n+y-1}{y-1}_{(2)} + \binom{n+y}{y-1}_{(2)}. \quad (4.5)$$

Démonstration. Par la définition (4.1) on a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} &= \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} \\ \sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} &= \sum_{k=0}^{y-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} - \sum_{k=0}^x \binom{n+k}{k}_{(2)} \\ \sum_{k=0}^{x-1} \binom{n+k}{k}_{(2)} + \sum_{k=0}^x \binom{n+k}{k}_{(2)} &= \sum_{k=0}^{y-1} \binom{n+k}{k}_{(2)}. \end{aligned}$$

et en utilisant la relation (4.3), on obtient :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left[\binom{n+x-1}{x-1}_{(2)} + \binom{n+x}{x-1}_{(2)} + \binom{n+x}{x}_{(2)} + \binom{n+x+1}{x}_{(2)} \right] \\ = \frac{1}{2} \left[\binom{n+y-1}{y-1}_{(2)} + \binom{n+y}{y-1}_{(2)} \right], \end{aligned}$$

De la relation (1.10), la dernière égalité donne :

$$2 \binom{n+x+1}{x}_{(2)} = \binom{n+y-1}{y-1}_{(2)} + \binom{n+y}{y-1}_{(2)}.$$

En utilisant la même méthode, nous pouvons facilement vérifier la relation (4.5). \square

Lemme 4.2.3. *Pour $n \geq 1$, l'identité suivante est vraie :*

$$\sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{j+1} \binom{n}{j} 2^j = \sum_{j=0}^n \binom{2n+2}{j} \binom{n}{j} 2^j. \quad (4.6)$$

Démonstration. Soit

$$A_n = \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{j+1} \binom{n}{j} 2^j$$

et

$$B_n = \sum_{j=0}^n \binom{2n+2}{j} \binom{n}{j} 2^j.$$

Soit W_n le n^{ime} terme de la suite $\{A_n\}$ ou $\{B_n\}$, nous vérifions par l'algorithme de Zeilberger (en utilisant le package fastZeil (voir annexe)) que les deux membre de l'équation (4.6) satisfont la relation de récurrence suivante :

$$W_{n+2} = \frac{591 + 1039n + 594n^2 + 110n^3}{(3+n)(3+2n)(7+5n)} W_{n+1} + \frac{(1+n)(12+5n)}{(3+n)(7+5n)} W_n,$$

avec $W_0 = 1$, $W_1 = 9$ et $W_2 = 85$, et donc, ceci prouve que $A_n = B_n$. \square

Désormais, nous étudierons les solutions aux problèmes d'équilibre et de co-équilibre du triangle de Delannoy pour les premières valeurs de n .

Notez que, pour $n = 0$, les coefficients situés sur la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy contiennent la suite 1, puis chaque élément de $\binom{n}{n}_{(2)}$ est un nombre d'équilibre pour $n \geq 1$ (et un nombre de co-équilibre pour $n \geq 0$).

4.2.1 Le cas $n = 1$

Pour $n = 1$, les coefficients $\{\binom{1+k}{k}_{[2]}\}_{k \geq 0}$ sont des nombres impairs, les problèmes d'équilibre et de co-équilibre définis par les nombres impairs sont résolus par Panda [51] (voir le théorème 1.18.5 dans le premier chapitre).

4.2.2 Le cas $n = 2$

Pour $n = 2$, on a le résultat suivant :

Théorème 4.2.4. *Pour $n = 2$, le seul nombre d'équilibre est $\binom{7}{5}_{(2)}$.*

Démonstration. En posant $n = 2$ dans la relation (4.4), on obtient l'équation diophantienne suivante :

$$2 \binom{3+x}{x}_{(2)} = \binom{1+y}{y-1}_{(2)} + \binom{2+y}{y-1}_{(2)}, \quad (4.7)$$

et en utilisant la relation (1.14), on peut écrire la relation (4.7) comme suit :

$$2 \sum_j \binom{x}{j} \binom{3}{j} 2^j = \sum_j \binom{y-1}{j} \binom{2}{j} 2^j + \sum_j \binom{y-1}{j} \binom{3}{j} 2^j. \quad (4.8)$$

Supposons que $x \geq 3$, alors la relation (4.8) est équivalente à :

$$8x^3 + 12x^2 + 16x + 6 = 4y^3 + 2y,$$

l'équation précédente peut s'écrire comme suit :

$$(2x+1)^3 + 5(2x+1) = 4y^3 + 2y. \quad (4.9)$$

En multipliant l'équation (4.9) par 2, et en posant $u = 2x + 1$ et $l = 2y - 5u$ on obtient :

$$123u^3 + 75u^2l + 15ul^2 + l^3 = -2l. \quad (4.10)$$

Soit $g = \gcd(l, 123)$ et p est un facteur premier de l , en considérant toutes les valeurs possibles de g on aura :

Si $g = 1$.

Notez que, par l'équation (4.10), $l \mid 123u^3$, donc $l \mid u^3$. Comme $p \mid l$, alors $p \mid u$. Soit $\alpha \geq 1$ et $\beta \geq 1$ les valeurs p -adic de l et u , respectivement. Alors il existe des entiers l_1 et u_1 , aucun d'eux n'est pas divisible par p , tels que

$$l = p^\alpha l_1, \quad u = p^\beta u_1. \quad (4.11)$$

On remplace par (4.11) dans (4.10) implique $\alpha = 3\beta$. On décompose l et u en produit de facteur premier, il s'ensuit que $l = v^3$ pour une certaines valeurs de v . Comme $l \mid u^3$ implique $v \mid u$, alors $u = kv$ pour un certain entier non nul k . On remplace l par v^3 et u par kv dans (4.10), avec $w = v^2$, nous obtenons l'équation suivante

$$123k^3 + 75k^2w + 15kw^2 + w^3 = -2. \quad (4.12)$$

Le programme MAGMA (voir annexe) donne que la seule solution de (4.12) est $(k, w) = (1, -5)$.

La décomposition en produit de facteur premier $123 = 3 \cdot 41$, nous étudions sur les cas possible pour g .

$g = 3, 41, 123$.

On pose $l = gl_1$. l'équation (4.10) s'écrit comme suit

$$\frac{123}{g}u^3 + 75u^2l_1 + 15gl_1^2u + g^2l_1^3 = -2l_1.$$

On peut répéter le traitement du cas $g = 1$, on obtient l'équation suivante

$$\frac{123}{g}k^3 + 75k^2w + 15gkw^2 + g^2w^3 = -2. \quad (4.13)$$

Le tableau suivant montre les solutions de l'équation ci-dessus déterminées par MAGMA.

g	3	41	123
(k, w)	$(-1, 1)$	$(-11, 1)$	x

$(k, w) = (-11, 1)$ est la seule paire de solutions qui satisfait les conditions de x et y .

$(k, w) = (-11, 1)$ donne $x = 5$ et $y = 7$ et cela complète la preuve. \square

Nous donnons le résultat suivant pour le problème de co-équilibre des nombres de Delannoy parcourant la direction $(1, -1)$.

Théorème 4.2.5. *Pour $n = 2$, le problème de co-équilibre n'admet pas de solution.*

Démonstration. Pour $n = 2$, nous avons l'équation suivante :

$$\sum_{k=0}^x \binom{2+k}{k}_{(2)} = \sum_{k=x+1}^{y-1} \binom{2+k}{k}_{(2)}, \quad (4.14)$$

en utilisant la relation (4.5), l'égalité (4.14) est réduite à l'égalité suivante :

$$2 \left\{ \binom{2+x}{x}_{(2)} + \binom{3+x}{x}_{(2)} \right\} = \binom{1+y}{y-1}_{(2)} + \binom{2+y}{y-1}_{(2)},$$

en utilisant la relation (1.14), on obtient :

$$2 \left\{ \sum_{j=0}^2 \binom{x}{j} \binom{2}{j} 2^j + \sum_{j=0}^3 \binom{x}{j} \binom{3}{j} 2^j \right\} = \sum_{j=0}^2 \binom{y-1}{j} \binom{2}{j} 2^j + \sum_{j=0}^3 \binom{y-1}{j} \binom{3}{j} 2^j,$$

l'équation précédente peut s'écrire, comme suit :

$$4(x+1)^3 + 2(x+1) = 2y^3 + y. \quad (4.15)$$

On remplace par $t = x + 1$ et $z = y - 2t$ dans la relation (4.15), on obtient :

$$12t^3 + 24zt^2 + 12z^2t + 2z^3 = -z.$$

On pose $g = \gcd(z, 12)$, alors $g = 1, 2, 3, 4, 6, 12$, on répète les mêmes étapes utilisées dans la preuve du théorème 4.2.4, on obtient l'équation suivante :

$$\frac{12}{g}k^3 + 24wk^2 + 12gw^2k + 2g^2w^3 = -1,$$

Nous utilisons à nouveau MAGMA pour résoudre l'équation si dessous, nous ne trouvons pas de solution pour toutes valeurs de g sauf pour $g = 12$ on a : $(k, w) = (-1, 0)$ et cette solution n'est pas réalisable. \square

4.2.3 Le cas $n = 3$

Théorème 4.2.6. *Pour $n = 3$, le seul nombre équilibre est : $\binom{10}{7}_{(2)}$.*

Démonstration. Pour prouver ce théorème, nous devons résoudre l'équation diophantienne suivante :

$$2 \binom{4+x}{x}_{(2)} = \binom{2+y}{y-1}_{(2)} + \binom{3+y}{y-1}_{(2)},$$

cette équation peut s'écrire comme suit :

$$4x^3 + 8x^3 + 20x^2 + 16x + 6 = 2y^4 + 4y^2,$$

on peut facilement vérifier que la dernière égalité donne :

$$2(2x+1)^4 + 28(2x+1)^2 + 34 = (4(y^2+1))^2. \quad (4.16)$$

Si on pose $t = 2x + 1$ et $u = 4(y^2 + 1)$, alors la relation (4.16) s'écrit comme suit :

$$2t^4 + 28t^2 + 34 = u^2.$$

En utilisant le package Integral Quartic Points de MAGMA. Nous obtenons les solutions suivantes :

t	1	-1	15	-15
u	8	8	328	328

nous vérifions toutes les valeurs de (t, u) , la seule solution qui vérifie les conditions de x et y est : $(t, u) = (15, 328)$, ce qui implique que $(x, y) = (7, 9)$. \square

Théorème 4.2.7. *Pour $n = 3$, Le problème de co-équilibre n'admet pas de solution.*

Démonstration. Pour $n = 3$, nous avons l'équation diophantienne suivante :

$$2 \binom{3+x}{x}_{(2)} + 2 \binom{4+x}{x}_{(2)} = \binom{2+y}{y-1}_{(2)} + \binom{3+y}{y-1}_{(2)}, \quad (4.17)$$

la relation (4.17) peut être écrite comme suit :

$$2(2x+2)^4 + 16(2x+2)^2 + 16 = 16(y^2+1)^2.$$

Si on pose : $t = 2x + 2$ et $u = 4(y^2 + 1)$ dans l'équation précédente, on obtient :

$$2t^4 + 16t^2 + 16 = 16u^2, \quad (4.18)$$

En utilisant MAGMA nous obtenons les solutions de l'équation (4.18) données dans le tableau suivant :

t	0	4	-1
u	4	28	28

Nous vérifions toutes les possibilités de (t, w) , on constate que le problème de co-équilibre n'admet pas de solution. \square

Pour les problèmes d'équilibre, nous présentons la solution des cas $n = 1, n = 2$ et $n = 3$ dans le triangle de Delannoy.

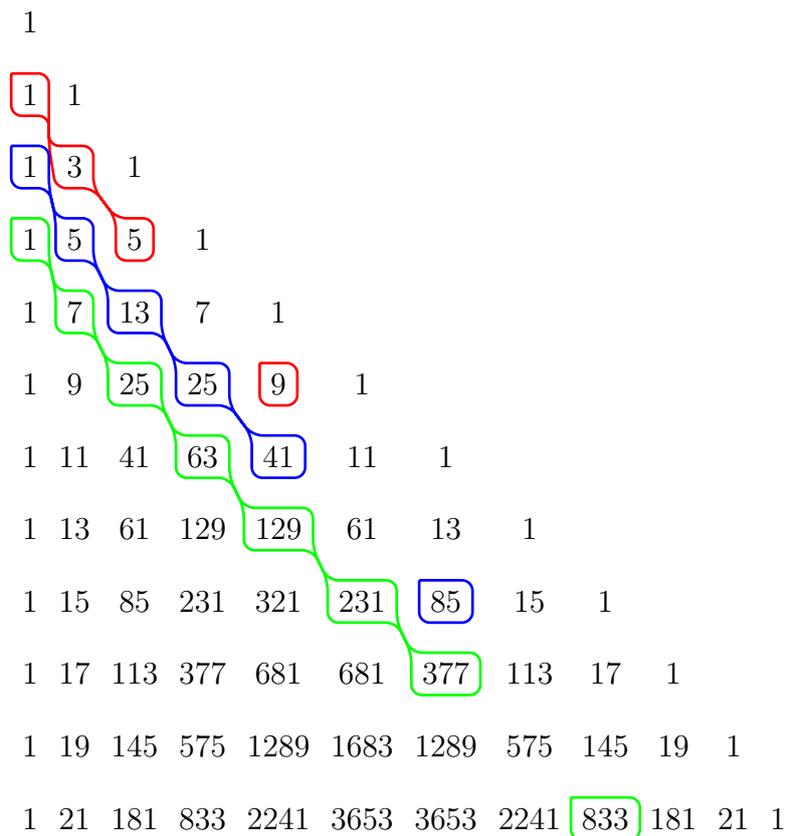


TABLE 4.1 – Nombres d'équilibre sur le triangle de Delannoy.

4.2.4 Cas où n est quelconque

Pour n quelconque, nous montrons l'existence de la solution pour le problème d'équilibre

Théorème 4.2.8. *Pour $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{n+k}{k}_{(2)} = \binom{3n+2}{2n+2}_{(2)},$$

alors $\binom{3n+1}{2n+1}_{(2)}$ est un nombre d'équilibre.

Démonstration. En utilisant la relation (1.14), on a :

$$\binom{3n+2}{2n+2}_{[2]} = \sum_{j=0}^n \binom{2n+2}{j} \binom{n}{j} 2^j,$$

et en utilisant (4.3), nous obtenons :

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{n+k}{k}_{(2)} = \frac{1}{2} \left[\binom{3n}{2n}_{(2)} + \binom{3n+1}{2n}_{(2)} \right].$$

Maintenant, en appliquant la relation (1.14), on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{2n} \binom{n+k}{k}_{(2)} &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \binom{2n}{j} \binom{n}{j} 2^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{2n}{j} \binom{n+1}{j} 2^j \\ &= \frac{1}{2} \sum_{j=0}^n \binom{2n}{j} \binom{n}{j} 2^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{2n}{j} \binom{n}{j} 2^j + \frac{1}{2} \sum_{j=0}^{n+1} \binom{2n}{j} \binom{n}{j-1} 2^j \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{2n}{j} \binom{n}{j} 2^j + \sum_{j=1}^{n+1} \binom{2n}{j} \binom{n}{j-1} 2^{j-1} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{2n}{j} \binom{n}{j} 2^j + \sum_{j'=0}^n \binom{2n}{j'+1} \binom{n}{j'} 2^{j'} \\ &= \sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{j+1} \binom{n}{j} 2^j. \end{aligned}$$

Par le lemme 4.2.3, on aura :

$$\sum_{j=0}^n \binom{2n+1}{j+1} \binom{n}{j} 2^j = \sum_{j=0}^n \binom{2n+2}{j} \binom{n}{j} 2^j = \binom{3n+2}{2n+2}_{[2]}.$$

□

Chapitre 5

Problème s -équilibre

5.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre, une généralisation aux problèmes d'équilibre et co-équilibre, appelé problème s -équilibre, nous commençons par montrer que la résolution de ce problème mène à la résolution d'une équation de Pell généralisée, puis, nous prouvons que tous les nombres s -équilibre sont obtenus par trois suites récurrentes et nous donnons les fonctions génératrices de ces suites. A la fin de ce chapitre nous établissons quelques relations entre les nombres s -équilibre et les nombres d'équilibre et nous donnons également des formules explicites pour les nombres s -équilibre.

5.2 Problème s -équilibre et l'équation de Pell généralisée

Un entier x est appelé nombre s -équilibre, si x est solution de l'équation diophantienne suivante :

$$1 + 2 + \cdots + (x - s) = (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (y - 1), \quad (y \leq x + 2) \quad (5.1)$$

Dans le résultat suivant, nous allons montrer que l'équation (5.1) peut s'écrire sous la forme d'une équation de Pell généralisée :

Théorème 5.2.1. *L'équation (5.1) est équivalente à :*

$$t^2 - 2u^2 = 2s^2 - 1, \quad (5.2)$$

avec $t = 2y - 1$ et $u = 2x - s + 1$.

Démonstration. Par la relation (5.1), on a :

$$1 + 2 + \cdots + (x - s) = (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (y - 1),$$

alors

$$1 + 2 + \cdots + (x - s) + 1 + 2 + \cdots + x = 1 + 2 + \cdots + x + (x + 1) + (x + 2) + \cdots + (y - 1),$$

cette égalité peut s'écrire comme suit :

$$2(1 + 2 + \cdots + (x - s)) + (x - s + 1) + (x - s + 2) + \cdots + x = 1 + 2 + \cdots + (y - 1). \quad (5.3)$$

La relation (5.3) donne :

$$(x - s + 1)^2 + \frac{s - 1}{2}(2x - s + 2) = \frac{y(y - 1)}{2},$$

de l'égalité précédente on obtient :

$$2(4(x - s + 1)^2 + 4(s - 1)(x - s + 1) + 2(s - 1)^2 + 2(s - 1) + 1) = 2(2y^2 - 2y + 1). \quad (5.4)$$

Par conséquent, la relation (5.4) donne :

$$2(2x - s + 1)^2 + 2s^2 = (2y - 1)^2 + 1.$$

En posant $t = 2y - 1$ et $u = 2x - s + 1$, on obtient notre résultat. \square

Pour résoudre l'équation (5.2), nous devons déterminer les solutions fondamentales de cette équation (les solutions fondamentales qui engendrent des entiers positifs (t, u)).

Proposition 5.2.2. *Les solutions fondamentales de l'équation (5.2) sont :*

$$(t_0^1, u_0^1) = (2s - 1, s - 1), \quad (5.5)$$

$$(t_0^2, u_0^2) = (2s - 1, -(s - 1)), \quad (5.6)$$

et si $2s^2 - 1$ est un carré parfait, nous avons aussi :

$$(t_0^3, u_0^3) = (\sqrt{2s^2 - 1}, 0). \quad (5.7)$$

Démonstration. On peut voir facilement que $(t, u) = (2s - 1, s - 1)$ et $(t, u) = (-(2s - 1), s - 1)$ sont des solutions fondamentales, car elles vérifient les conditions du théorème 1.19.3, il s'ensuit que $(t, u) = -(-(2s - 1), s - 1)$ est également une solution fondamentale, alors les relations (17) et (18) sont vérifiées, et il est trivial de voir aussi que si $2s^2 - 1$ est un carré parfait, alors $(\sqrt{2s^2 - 1}, 0)$ est une solution fondamentale. \square

On peut facilement vérifier que les seules solutions fondamentales de (5.2) sont données par la proposition 5.2.2, en fait, le théorème 1.19.3 nous assure que $0 \leq u < s$, donc, si on pose $u = s - i$ ($1 \leq i \leq s - 1$) et $t = ks - j$ dans la relation (5.2), on trouve que $k = 2, j = 1$ et $i = 1$. Il est également clair de voir que la solution fondamentale de $v^2 - 2w^2 = 1$ est $(v_0, w_0) = (3, 2)$.

5.3 Relations de récurrence

A partir des solutions fondamentales données dans la proposition ci-dessus, nous établissons trois suites récurrentes qui engendrent les nombres s -équilibre.

Soit $(x_n^{(1)})_{n \geq 0}$, $(x_n^{(2)})_{n \geq 0}$ et $(x_n^{(3)})_{n \geq 0}$ ces suites, alors :

Théorème 5.3.1. $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ et $x_n^{(3)}$ satisfont les relations de récurrence suivantes :

$$x_n^{(1)} = 6x_{n-1}^{(1)} + x_{n-2}^{(1)} - 2s + 2, \text{ avec } x_0^{(1)} = s - 1, x_1^{(1)} = 4s - 3, \quad (5.8)$$

$$x_n^{(2)} = 6x_{n-1}^{(2)} + x_{n-2}^{(2)} - 2s + 2, \text{ avec } x_0^{(2)} = 0, x_1^{(2)} = s, \quad (5.9)$$

et si $2s^2 - 1$ est un carré parfait, alors :

$$x_n^{(3)} = 6x_{n-1}^{(3)} + x_{n-2}^{(3)} - 2s + 2, \text{ avec } x_0^{(3)} = \frac{s-1}{2}, x_1^{(3)} = \sqrt{2s^2 - 1} + \frac{s-1}{2}. \quad (5.10)$$

Démonstration. Pour la solution fondamentale $(t_0^1, u_0^1) = (2s - 1, s - 1)$ les solutions de

l'équation (5.2) de terme générale (t_n^1, u_n^1) sont données par (voir le théorème 1.19.2) :

$$t_n^{(1)} + \sqrt{2}u_n^{(1)} = (2s - 1 + \sqrt{2}(s - 1))(3 + 2\sqrt{2})^n, \quad (5.11)$$

alors :

$$t_n^{(1)} - \sqrt{2}u_n^{(1)} = (2s - 1 - \sqrt{2}(s - 1))(3 - 2\sqrt{2})^n. \quad (5.12)$$

Par (5.11) et (5.12), on obtient :

$$t_n^{(1)} = \frac{(2s - 1 + (s - 1)\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n + (2s - 1 - (s - 1)\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^n}{2}$$

et

$$u_n^{(1)} = \frac{(2s - 1 + (s - 1)\sqrt{2})(3 + 2\sqrt{2})^n - (2s - 1 - (s - 1)\sqrt{2})(3 - 2\sqrt{2})^n}{2\sqrt{2}}.$$

Il est facile de vérifier que $u_n^{(1)} + u_{n-2}^{(1)} = 6u_{n-1}^{(1)}$, avec $u_0^{(1)} = s - 1$ et $u_1^{(1)} = 7s - 5$, et en remplaçant par $u_n^{(1)} = 2x_n^{(1)} - s + 1$ on obtient :

$$x_n^{(1)} = 6x_{n-1}^{(1)} + x_{n-2}^{(1)} - 2s + 2, \text{ avec } x_0^{(1)} = s - 1, x_1^{(1)} = 4s - 3.$$

En utilisant la même méthode, on peut vérifier les relations (5.9) et (5.10).

Pour le cas $2s^2 - 1$ est un carré parfait, le lemme 1.19.1 assure que s est un nombre impair, alors $\frac{s-1}{2}$ est un entier positif dans les coefficients de $x_n^{(3)}$. \square

Comme dans [14, 52], nous considérons que $x_0^{(1)}$, $x_0^{(2)}$, $x_1^{(1)}$ et $x_0^{(3)}$ sont des nombres s -équilibre .

Remarque 5.3.2. *Si on pose $s = 0$ dans la relation (5.9), on obtient les nombres co-équilibre et si on pose $s = 1$ dans les relations 5.8 ou 5.9 on obtient les nombres d'équilibre.*

Exemple 5.3.3. *Pour $s = 5$, les nombres 5-équilibre représentent la solution de l'équation suivante :*

$$1 + 2 + \cdots + (x - 5) = (x + 1) + \cdots + (y - 1).$$

Les premiers termes de nombres 5-équilibre obtenus par les récurrences établies dans le théorème 5.3.1 sont donnés respectivement par : (17, 90, 515), (22, 119, 684) et (9, 44, 247) et leurs y correspondant sont (22, 125, 726), (29, 166, 965) et (11, 60, 347).

5.3.1 Fonctions génératrices

Dans le résultat suivant, nous établissons les fonctions génératrices des suites données dans le théorème ci-dessus.

Théorème 5.3.4. *Les fonctions génératrices ordinaires des suites $\{x_n^{(1)}\}$, $\{x_n^{(2)}\}$ et $\{x_n^{(3)}\}$ sont données respectivement :*

$$F^{(1)}(z) = \frac{-z^2 + (4 - 3s)z + (s - 1)}{(1 - z)(1 - 6z + z^2)}, \quad (5.13)$$

$$F^{(2)}(z) = \frac{(-3s + 2)z^2 + sz}{(1 - z)(1 - 6z + z^2)} \quad (5.14)$$

et

$$F^{(3)}(z) = \frac{(-\sqrt{2s^2 - 1} + \frac{s-1}{2})z^2 + (\sqrt{2s^2 - 1} - 3s + 3)z + \frac{s-1}{2}}{(1 - z)(1 - 6z + z^2)}, \quad (5.15)$$

Démonstration. On a :

$$F^{(1)}(z) = x_0^{(1)} + zx_1^{(1)} + \dots + z^n x_n^{(1)} + \dots$$

alors

$$-6zF^{(1)}(z) = -6zx_0^{(1)} - 6z^2x_1^{(1)} + \dots - 6z^{n+1}x_n^{(1)} + \dots$$

et

$$z^2F^{(1)}(z) = z^2x_0^{(1)} + z^3x_1^{(1)} + \dots + z^{n+2}x_n^{(1)} + \dots$$

La somme de ces trois équations donne l'égalité suivante :

$$(1 - 6z + z^2)F^{(1)}(z) = x_0^{(1)} + zx_1^{(1)} - 6zx_0^{(1)} + (-2s + 2) \sum_{n \geq 2} z^n,$$

et comme $x_0^{(1)} = s - 1$ et $x_1^{(1)} = 4s - 3$, alors on obtient l'équation (5.13). On peut vérifier les équations (5.14) et (5.15), en suivant les mêmes étapes de la démonstration précédente. \square

5.3.2 Relations entre les nombres s -équilibre et les nombres d'équilibre

Nous nous intéressons maintenant à donner les relations entre les nombres s -équilibre et les nombres d'équilibre.

Corollaire 5.3.5. *Les relations entre les nombres s -équilibre et les nombres d'équilibre sont :*

$$x_n^{(1)} = \frac{7s-5}{2}B_n + \frac{1-s}{2}B_{n-1} + \frac{s-1}{2}, \quad (5.16)$$

$$x_n^{(2)} = \frac{s+1}{2}B_n + \frac{s-1}{2}B_{n-1} + \frac{s-1}{2} \quad (5.17)$$

et

$$x_n^{(3)} = \sqrt{2s^2-1}B_n + \frac{s-1}{2}. \quad (5.18)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} F^{(1)}(z) &= \frac{-z^2 + (4-3s)z + (s-1)}{(1-z)(1-6z+z^2)} \\ &= -\frac{z^2}{(1-z)(1-6z+z^2)} + (4-3s)\frac{z}{(1-z)(1-6z+z^2)} + (s-1)\frac{1}{(1-z)(1-6z+z^2)} \\ &= -z \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{n \geq 0} B_n z^n + (4-3s) \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{n \geq 0} B_n z^n + \frac{s-1}{z} \sum_{n \geq 0} z^n \sum_{n \geq 0} B_n z^n \\ &= -\sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n B_i \right) z^{n+1} + (4-3s) \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n B_i \right) z^n + (s-1) \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n B_i \right) z^{n-1} \\ &= -\sum_{n \geq 1} \left(\sum_{i=0}^{n-1} B_i \right) z^n + (4-3s) \sum_{n \geq 0} \left(\sum_{i=0}^n B_i \right) z^n + (s-1) \sum_{n \geq -1} \left(\sum_{i=0}^{n+1} B_i \right) z^n \end{aligned}$$

Par le lemme 1.17.4, on obtient :

$$\begin{aligned} F^{(1)}(z) &= -\sum_{n \geq 1} \frac{B_n - B_{n-1} - 1}{4} z^n + (4-3s) \sum_{n \geq 0} \frac{B_{n+1} - B_n - 1}{4} z^n \\ &\quad + (s-1) \sum_{n \geq -1} \frac{B_{n+2} - B_{n+1} - 1}{4} z^n. \end{aligned}$$

□

A partir du résultat précédent, on déduit le corollaire suivant

Corollaire 5.3.6. *Les identités suivantes sont vraies :*

$$\begin{aligned}x_n^{(1)} - x_{n-1}^{(1)} &= sB_{n+1} - (3s + 2)B_n, \\x_{n+1}^{(2)} - x_n^{(2)} &= (3s + 2)B_n - sB_{n-1}, \\x_{n+1}^{(2)} - x_n^{(2)} &= x_n^{(1)} - x_{n-1}^{(1)} + 4B_n.\end{aligned}$$

5.3.3 Formules de Binet et formules explicites

Nous donnons dans ce théorème les formules de Binets des suites $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ et $x_n^{(3)}$.

Théorème 5.3.7. *Les formules de Binets des suites $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ et $x_n^{(3)}$ sont données respectivement :*

$$\begin{aligned}x_n^{(1)} &= A^{(1)}\lambda_1^n + B^{(1)}\lambda_2^n + \frac{s-1}{2}, \text{ avec } A^{(1)} = \frac{-(1+\sqrt{2})(1-s\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}, \quad B^{(1)} = \frac{(1-\sqrt{2})(1+s\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}, \\x_n^{(2)} &= A^{(2)}\lambda_1^n + B^{(2)}\lambda_2^n + \frac{s-1}{2}, \text{ avec } A^{(2)} = \frac{-(1-\sqrt{2})(1+s\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}, \quad B^{(2)} = \frac{(1+\sqrt{2})(1-s\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}, \\x_n^{(3)} &= A^{(3)}\lambda_1^n + B^{(3)}\lambda_2^n + \frac{s-1}{2}, \text{ avec } A^{(3)} = \frac{\sqrt{2s^2-1}}{4\sqrt{2}}, \quad B^{(3)} = \frac{-\sqrt{2s^2-1}}{4\sqrt{2}},\end{aligned}$$

avec, $\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$.

Démonstration. En substituant $c_n^{(1)} = x_n^{(1)} - \frac{(s-1)}{2}$ dans l'équation (5.8), on trouve :

$$c_n^{(1)} = 6c_{n-1}^{(1)} - c_{n-2}^{(1)}, \quad (5.19)$$

l'équation auxiliaire de cette équation est :

$$\lambda^2 - 6\lambda + 1 = 0. \quad (5.20)$$

$\lambda_1 = 3 + \sqrt{8}$ et $\lambda_2 = 3 - \sqrt{8}$ sont les deux racines de (5.20).

La solution générale de l'équation (5.19) est donnée par :

$$c_n^{(1)} = A^{(1)}\lambda_1^n + B^{(1)}\lambda_2^n,$$

de la dernière égalité, nous obtenons :

$$\begin{aligned}c_0^{(1)} &= A^{(1)}\lambda_1 + B^{(1)}, \\c_1^{(1)} &= A^{(1)}\lambda_1 + B^{(1)}\lambda_2.\end{aligned}$$

Si on remplace par $c_0^{(1)} = x_0^{(1)} - \frac{(s-1)}{2}$ et $c_1^{(1)} = x_1^{(1)} - \frac{(s-1)}{2}$ dans les deux équations ci-dessus, on peut facilement vérifier que :

$$A^{(1)} = \frac{-(1 + \sqrt{2})(1 - s\sqrt{2})}{4\sqrt{2}}, \quad B^{(1)} = \frac{(1 - \sqrt{2})(1 + s\sqrt{2})}{4\sqrt{2}},$$

donc, la première équation du théorème est vérifiée.

De la même façon, on peut vérifier les deux autres équations du théorème 5.3.7. □

Le résultat suivant est une conséquence du dernier théorème.

Corollaire 5.3.8. *Les formules explicites de $x_n^{(1)}$, $x_n^{(2)}$ et $x_n^{(3)}$ sont données par :*

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (A^{(1)} + (-1)^j B^{(1)}) + \frac{s-1}{2}, \\ x_n^{(2)} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (A^{(2)} + (-1)^j B^{(2)}) + \frac{s-1}{2}, \\ x_n^{(3)} &= \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} (A^{(3)} + (-1)^j B^{(3)}) + \frac{s-1}{2}. \end{aligned}$$

Démonstration. On utilise la formule du binôme de Newton sur λ_1^n et λ_2^n dans le théorème ci-dessus. □

Chapitre 6

Triangle quasi s -Pascal

6.1 Introduction

Nous proposons dans ce chapitre, une généralisation aux triangles de Pascal et de Delannoy, appelé triangle quasi s -Pascal, où, la somme des éléments situés sur la direction $(1, 1)$ donnent les termes de la suite s -Fibonacci. Pour cela, nous considérons une famille de chemins de treillis sur une grille avec l'ensemble des pas possibles : $\{L = (1, 0), L_1 = (1, 1), L_2 = (2, 1), \dots, L_s = (s, 1)\}$. Nous commençons par donner la formule explicite des coefficients du triangle quasi s -Pascal, puis, nous montrons la relation entre les éléments du triangle quasi s -Pascal, les coefficients binomiaux et les nombres de Delannoy généralisés proposés par Ramirez et Sirvent [53]. Nous établissons aussi la relation de récurrence pour la somme des éléments situés sur les directions finies du triangle quasi s -Pascal, la fonction génératrice de la somme citées est aussi établie. Nous donnons également quelques identités, dont, une est équivalente à la somme de De-Moivre.

A la fin de ce chapitre nous établissons un q -analogue au coefficient du triangle quasi s -Pascal.

6.2 Le triangle quasi s -Pascal

Dans tout ce que suit, on utilise la notation $\binom{n}{k}_{[s]}$ pour le coefficient de la $n^{\text{ième}}$ ligne et de la $k^{\text{ième}}$ colonne du triangle quasi s -Pascal, ce coefficient est appelé coefficient quasi-binomial.

Définition 6.2.1. *Le coefficient quasi-binomial $\binom{n}{k}_{[s]}$ compte le nombre de chemins de*

treillis parcourant une grille du point $(0, 0)$ au point (n, k) , où, l'ensemble des pas possible est : $\{L = (1, 0), L_1 = (1, 1), L_2 = (2, 1), \dots, L_s = (s, 1)\}$. Avec $\binom{n}{0}_{[s]} = \binom{n}{n}_{[s]} = 1$ et la convention $\binom{n}{k}_{[s]} = 0$ pour $k > n$ ou $k < 0$.

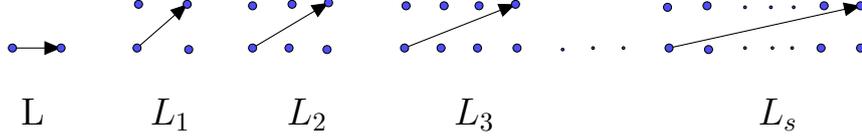


FIGURE 6.1 – Illustration des pas possibles du coefficient $\binom{n}{k}_{[s]}$.

Lemme 6.2.2. *Le coefficient quasi-binomial $\binom{n}{k}_{[s]}$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \binom{n-1}{k}_{[s]} + \binom{n-1}{k-1}_{[s]} + \binom{n-2}{k-1}_{[s]} + \dots + \binom{n-s}{k-1}_{[s]}, \quad (6.1)$$

Démonstration. En raisonnant sur toutes les possibilités du dernier pas donnés dans la définition 6.2.1, alors, si le dernier pas est $L = (1, 0)$, il nous reste à énumérer le nombre de chemins de treillis allant du point $(0, 0)$ au point $(n-1, k)$ et qui est donné par $\binom{n-1}{k}_{[s]}$, ou bien si le dernier pas est $L_1 = (1, 1)$ donc il nous reste à énumérer le nombre de chemins de treillis allant du point $(0, 0)$ au point $(n-1, k-1)$, et qui est donné par $\binom{n-1}{k-1}_{[s]}, \dots$, ou bien si le dernier pas est $L_s = (s, 1)$, alors, il nous reste à énumérer le nombre de chemins de treillis allant du point $(0, 0)$ au $(n-s, k-1)$ qui est $\binom{n-s}{k-1}_{[s]}$, considérant toutes les possibilités nous construisons notre récurrence. \square

Dans le résultat suivant on établit la fonction génératrice de $\{\binom{n}{k}_{[s]}\}_n$.

Théorème 6.2.3. *Soit $F_k(x) := \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k}_{[s]} x^n$, alors $F_k(x)$ est donnée par*

$$F_k(x) = (1 + x + x^2 + \dots + x^{s-1})^k \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}}.$$

Démonstration. En utilisant la relation de récurrence (6.1) on trouve :

$$F_k(x) = xF_k(x) + xF_{k-1}(x) + x^2F_{k-1}(x) + \dots + x^sF_{k-1}(x),$$

en répétant ce même processus k fois, on obtient le résultat. \square

6.2.1 Formule explicite et coefficient Multinomial

Dans le théorème suivant, nous donnons deux formules explicites pour les coefficients quasi-binomiaux : la première est exprimée à l'aide des coefficients binomiaux et la deuxième est exprimée en utilisant les coefficients multinomiaux.

Théorème 6.2.4. *Le coefficient quasi-binomial satisfait les deux formules explicites suivantes :*

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k}, \quad (6.2)$$

la version multinomiale est donnée par

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_s} \binom{n + k - \sum_{i=1}^s i k_i}{k}, \quad (6.3)$$

avec $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_s} = \frac{k!}{k_1! k_2! \cdots k_s!}$ pour $k_1 + k_2 + \cdots + k_s = k$ et $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_s} = 0$, sinon.

Démonstration. Pour monter la relation (6.2), on doit prouver que :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k} x^n = \left(\frac{x + x^2 + \cdots + x^s}{1 - x} \right)^k \frac{1}{1 - x}.$$

Ainsi

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k} x^n \\ &= \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} x^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} x^{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} x^{j_{s-1}} \sum_{n=0}^{\infty} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k} x^{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i} \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} x^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} x^{j_2} \cdots \sum_{j_{s-2}} \binom{j_{s-3}}{j_{s-2}} x^{j_{s-2}} \sum_{j_{s-1}} \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} x^{j_{s-1}} \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} x^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} x^{j_2} \cdots \sum_{j_{s-2}} \binom{j_{s-3}}{j_{s-2}} (x + x^2)^{j_{s-2}} \\ & \vdots \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} (x + x^2 + \cdots + x^{s-1})^{j_1} = \left(\frac{x + x^2 + \cdots + x^s}{1 - x} \right)^k \frac{1}{1 - x}. \end{aligned}$$

Pour la relation (6.3), on a :

$$\sum_{n \geq 0} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_s} \binom{n + k - \sum_{i=1}^s i k_i}{k} x^n$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{x^k} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_s} x^{\sum_{i=1}^s ik_i} \sum_{n \geq 0} \binom{n+k - \sum_{i=1}^s ik_i}{k} x^{n+k - \sum_{i=1}^s ik_i} \\
&= \frac{1}{(1-x)^{k+1}} \sum_{k_1, k_2, \dots, k_s} \binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_s} x^{\sum_{i=1}^s ik_i} \\
&= \left(\frac{x + x^2 + \dots + x^s}{1-x} \right)^k \frac{1}{1-x}.
\end{aligned}$$

□

6.2.2 Coefficients quasi-bi^snomiaux et matrice de Delannoy généralisée

Nous établissons dans le résultat suivant, le lien entre les coefficients du triangle quasi-s-Pascal $\binom{n}{k}_{[s]}$ et les coefficients du triangle de Delannoy généralisé $\mathcal{D}_m(n, k)$.

Théorème 6.2.5. *Pour $m = s$, $a = 1$ et $a_i = 1$ pour $i \in \{1, \dots, s\}$*

$$\mathcal{D}_s(k, n-k) = \binom{n}{k}_{[s]}.$$

Démonstration. Pour $a = 1$ et $a_i = 1$, pour $i \in \{1, \dots, s\}$, on a :

$$\mathcal{D}_s(n, k) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{n}{j_1} \binom{n-j_1}{j_2} \dots \binom{n-j_1 - \dots - j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n+k-u}{n},$$

avec $u = (s-1)(n-j_1) + \sum_{i=2}^{s-1} (i-s)j_i$, alors :

$$\mathcal{D}_s(n, k) = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{n}{n-j_1} \binom{n-j_1}{n-j_1-j_2} \dots \binom{n-j_1 - \dots - j_{s-2}}{n-j_1 - \dots - j_{s-2} - j_{s-1}} \binom{n+k-u}{n},$$

en posant $j'_v \rightarrow n - \sum_{l=1}^v j_l$, $v = \{1, \dots, s-1\}$, donc, $j'_1 + j'_2 + \dots + j'_{s-1} = u$, on obtient :

$$\mathcal{D}_s(n, k) = \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-1}} \binom{n}{j'_1} \binom{j'_1}{j'_2} \dots \binom{j'_{s-2}}{j'_{s-1}} \binom{n+k - \sum_{i=1}^{s-1} j'_i}{n},$$

d'où : $\mathcal{D}_s(k, n-k) = \binom{n}{k}_{[s]}$.

□

6.2.3 La suite s -Fibonacci

Soient $(T_{n,s})_n$ les termes de la suite obtenue en sommant les éléments situés sur la direction $(1, 1)$ du triangle quasi s -Pascal, alors :

$$T_{n+1,s} := \sum_k \binom{n-k}{k}_{[s]},$$

avec $T_{0,s} = 0$.

Théorème 6.2.6. *Pour $n \geq 0$, $(T_{n,s})_n$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$T_{n+1,s} = T_{n,s} + T_{n-1,s} + \cdots + T_{n-s,s},$$

avec $T_{1,s} = 1$ et $T_{-i,s} = 0$ pour $i \in \{0, -1, \dots, -(s-1)\}$.

$(T_{n,s})_{n \geq 0}$ est la suite s -Fibonacci.

Démonstration. On a $T_{n+1,s} = \sum_k \binom{n-k}{k}_{[s]}$ et en utilisant la relation (6.1) on obtient :

$$\begin{aligned} T_{n+1,s} &= \sum_k \binom{n-k-1}{k}_{[s]} + \sum_k \binom{n-k-1}{k-1}_{[s]} + \cdots + \sum_k \binom{n-k-s}{k-1}_{[s]} \\ &\quad k' \rightarrow k-1 \\ &= \sum_k \binom{n-k-1}{k}_{[s]} + \sum_{k'} \binom{n-k'-2}{k'}_{[s]} + \cdots + \sum_{k'} \binom{n-k'-s-1}{k'}_{[s]} \end{aligned}$$

$$= T_{n,s} + T_{n-1,s} + \cdots + T_{n-s,s}. \quad \square$$

Pour $s = 1$ et $s = 2$, on obtient les termes des suites de Fibonacci et Tribonacci respectivement.

Exemple 6.2.7. *Pour $s = 3$, nous obtenons le triangle quadrabonacci représenté dans le tableau suivant :*

n\k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0	1									
1	1	1								
2	1	3	1							
3	1	6	5	1						
4	1	9	15	7	1					
5	1	12	33	28	9	1				
6	1	15	60	81	45	11	1			
7	1	18	96	189	66	33	13	1		
8	1	21	141	378	459	281	91	15	1	
9	1	24	195	675	1107	946	449	120	17	1

TABLE 6.1 – Le triangle quadrabonacci.

Par la relation (6.1), les éléments du triangle quadrabonacci ($s = 3$) sont obtenus par la récurrence suivante :

$$\binom{n}{k}_{[3]} = \binom{n-1}{k}_{[3]} + \binom{n-1}{k-1}_{[3]} + \binom{n-2}{k-1}_{[3]} + \binom{n-3}{k-1}_{[3]},$$

avec $\binom{n}{0}_{[3]} = \binom{n}{n}_{[3]} = 1$.

$\binom{n}{k}_{[3]}$ compte le nombre de chemins de treillis parcourant une grille du point $(0,0)$ au point (n,k) , dont, les pas possibles sont : $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,1)$ et $(3,1)$, par exemple, les chemins possibles du coefficient $\binom{3}{1}_{[3]} = 6$ du triangle quadrabonacci, sont illustrés dans la Figure suivante :

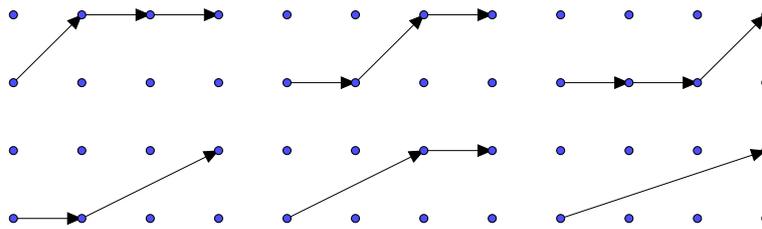


FIGURE 6.2 – Illustration des chemins possibles du coefficient $\binom{3}{1}_{[3]}$.

Pour $s = 1$ et $s = 2$ les triangle de Pascal et de Delannoy sont symétriques, contrairement aux cas où $s > 2$.

6.2.4 Triangle s -Pascal et triangle quasi- s -Pascal

Dans le résultat suivant, nous établissons la relation entre le triangle quasi s -Pascal et le triangle s -Pascal.

Théorème 6.2.8. *Pour n, k et s des entiers fixés, nous avons :*

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_i \binom{n-i}{k} \binom{i}{s-1}, \quad s \geq 1.$$

Démonstration. On a :

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n-j_1-j_2-\cdots-j_{s-1}}{k},$$

nous considérons la sommation par bloc $j_1 + j_2 + \cdots + j_{s-1} = i$ on obtient :

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_i \binom{n-i}{k} \sum_{j_1+j_2+\cdots+j_{s-1}=i} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} = \sum_i \binom{n-i}{k} \binom{i}{s-1}.$$

□

6.2.5 Relation de récurrence linéaire associée aux transversales finies du triangle quasi s -Pascal

Soient $r, p, n, s \in \mathbb{N}(s \geq 1)$ et $\alpha \in \mathbb{Z}$, nous établissons la relation de récurrence associée aux sommes des éléments situés sur la direction (r, α) du triangle quasi s -Pascal.

Soit la suite $(T_{n,s}^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ donnée par :

$$T_{n+1,s}^{(r,p,\alpha)} := \sum_k \binom{n-rk}{p+\alpha k}_{[s]}, \quad \text{avec } T_{0,s}^{(r,p,\alpha)} = 0. \quad (6.4)$$

Théorème 6.2.9. *Pour $n \geq \alpha s + r$, la suite $(T_{n+1,s}^{(r,p,\alpha)})_n$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{\alpha}{i} T_{n-i,s}^{(r,p,\alpha)} = \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} T_{n-r-\alpha-i,s}^{(r,p,\alpha)}, \quad (6.5)$$

on peut récupérer les conditions initiales $\mathcal{T}_{1,s}^{(r,p,\alpha)}, \dots, \mathcal{T}_{r+\alpha-1,s}^{(r,p,\alpha)}$ par $\sum_k \binom{n-\alpha k}{p+r k}_{[s]}$.

Pour la preuve du théorème, on utilise le lemme (1.6.2)

Démonstration. A partir des relations (6.2) et (6.4), nous obtenons :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} T_{n-i,s}^{(r,p,\alpha)} \\
&= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \sum_k \binom{n-rk-i-1}{p+rk} \Big|_s \\
&= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \sum_k \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{p+rk}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n-\alpha k - i - \sum_{i=1}^{s-1} j_i - 1}{p+rk} \\
&= \sum_k \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{p+rk}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \binom{n-\alpha k - i - \sum_{i=1}^{s-1} j_i - 1}{p+rk} \\
&= \sum_k \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{p+rk}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n-\alpha k - r - \sum_{i=1}^{s-1} j_i - 1}{p+r(k-1)} \\
&\quad (k' \rightarrow k-1) \\
&= \sum_{k'} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{p+rk'+r}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n-\alpha k' - \alpha - r - \sum_{i=1}^{s-1} j_i - 1}{p+rk'} \\
&= \sum_{k'} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{p+rk'+r}{j_1} \binom{j_1 - i_1 + i_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2} - i_{s-2} + i_{s-2}}{j_{s-1}} \times \\
&\quad \times \binom{n-\alpha k' - \alpha - r - \sum_{i=1}^{s-1} j_i - 1}{p+rk'}
\end{aligned}$$

Par la formule de Vandermonde :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k'} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}} \binom{r}{i_1} \binom{p+rk'}{j_1 - i_1} \binom{i_1}{i_2} \binom{j_1 - i_1}{j_2 - i_2} \dots \binom{i_{s-2}}{i_{s-1}} \binom{j_{s-2} - i_{s-2}}{j_{s-1} - i_{s-1}} \times \\
&\quad \times \binom{n-\alpha k' - \alpha - r - \sum_{i=1}^{s-1} j_i - 1}{p+rk'} \\
&\quad (l_v \rightarrow j_v - i_v) \\
&= \sum_{k'} \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{s-1}} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_{s-1}} \binom{r}{i_1} \binom{p+rk'}{l_1} \binom{i_1}{i_2} \binom{l_1}{l_2} \dots \binom{i_{s-2}}{i_{s-1}} \binom{l_{s-2}}{l_{s-1}} \times \\
&\quad \times \binom{n-\alpha k' - \alpha - r - \sum_{j=1}^{s-1} i_j - \sum_{j=1}^{s-1} l_j - 1}{p+rk'}
\end{aligned}$$

et en prenant la somme par bloc on aura : $i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = i$ on aura :

$$\begin{aligned}
&= \sum_{k'} \sum_i \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{s-1}} \sum_{i_1 + i_2 + \dots + i_{s-1} = i} \binom{\alpha}{i_1} \binom{p + rk'}{l_1} \binom{i_1}{i_2} \binom{l_1}{l_2} \cdots \binom{i_{s-2}}{i_{s-1}} \binom{l_{s-2}}{l_{s-1}} \times \\
&\times \binom{n - \alpha k' - \alpha - r - i - \sum_{j=1}^{s-1} l_j - 1}{p + rk'} \\
&= \sum_{k'} \sum_i \sum_{l_1, l_2, \dots, l_{s-1}} \binom{p + rk'}{l_1} \binom{l_1}{l_2} \cdots \binom{l_{s-2}}{l_{s-1}} \binom{n - \alpha k' - \alpha - r - i - \sum_{j=1}^{s-1} l_j - 1}{p + rk'} \times \\
&\times \sum_i \binom{\alpha}{i_1} \binom{i_1}{i_2} \binom{i_1}{i_2} \cdots \binom{i_{s-2}}{i_{s-1}} \\
&= \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} \mathcal{T}_{n-r-\alpha-i, s}^{(r, p, \alpha)}.
\end{aligned}$$

□

Pour $r = 1, \alpha = 1$ et $p = 0$ nous obtenons les termes de la suite s -Fibonacci.

Exemple 6.2.10. Pour $r = 2, \alpha = 1, p = 0$ et $n \geq 2s + 1$, nous obtenons la relation de récurrence suivante :

$$\begin{aligned}
T_{n,s}^{(2,0,1)} &= \sum_{j=1}^2 (-1)^{j+1} \binom{2}{j} T_{n-j,s}^{(2,0,1)} + \sum_{j=0}^{2(s-1)} \binom{2}{j}_{s-1} T_{n-j-3,s}^{(2,0,1)} \\
&= 2T_{n-1,s}^{(2,0,1)} - T_{n-2,s}^{(2,0,1)} + T_{n-3,s}^{(2,0,1)} + 2T_{n-4,s}^{(2,0,1)} + \cdots \\
&\cdots + sT_{n-s-2,s}^{(2,0,1)} + \cdots + 2T_{n-2s,s}^{(2,0,1)} + T_{n-2s-1,s}^{(2,0,1)},
\end{aligned}$$

Fonction génératrice

Dans le théorème suivant on établit la fonction génératrice de la suite $(\mathcal{T}_{n,s}^{(r,p,\alpha)})_n$.

Théorème 6.2.11. La fonction génératrice de la suite $\{\mathcal{T}_{n,s}^{(r,p,\alpha)}\}_{n \geq 0}$ est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1,s}^{(r,p,\alpha)} x^n = \frac{(1-x)^{r-p-1} (x + x^2 + \cdots + x^s)^p}{(1-x)^r - x^{r+\alpha} (1 + x + \cdots + x^{s-1})^r}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1,s}^{(r,p,\alpha)} x^n &= \sum_{n \geq 0} \sum_k \binom{n - \alpha k}{p + rk}_{[s]} x^n \\
&= \sum_{n \geq \alpha k} \sum_k \binom{n - \alpha k}{p + rk}_{[s]} x^{n - \alpha k} x^{\alpha k},
\end{aligned}$$

et par le théorème 6.2.3, on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \mathcal{T}_{n+1,s}^{(r,p,\alpha)} x^n &= \sum_k \frac{(x + x^2 + \dots + x^s)^{p+rk} x^{rk}}{(1-x)^{p+rk+1}} \\
&= \frac{(x + x^2 + \dots + x^s)^p}{(1-x)^{p+1}} \sum_k \left(\frac{(x + x^2 + \dots + x^s)^r x^\alpha}{(1-x)^r} \right)^k \\
&= \frac{(x + x^2 + \dots + x^s)^p}{(1-x)^{p+1}} \frac{1}{1 - \left(\frac{x^r(x+x^2+\dots+x^s)^r}{(1-x)^r} \right)} \\
&= \frac{(1-x)^{r-p-1} (x + x^2 + \dots + x^s)^p}{(1-x)^r - x^{r+\alpha} (1+x+\dots+x^{s-1})^r}.
\end{aligned}$$

□

6.3 La somme De-Moivre et quelques sommes imbriquées

Dans ce paragraphe, nous établissons une identité pour les coefficients quasi binomiaux $\binom{n}{k}_{[s]}$ analogue à la somme de De-Moivre pour le coefficient binomial, ainsi que quelques autres sommes imbriquées pour le coefficient $\binom{n}{k}_{[s]}$.

L'intérêt de l'identité suivante apparaît dans sa simplicité, car, elle contient une unique sommation d'un produit de deux coefficients binomiaux.

Théorème 6.3.1. *Le coefficient $\binom{n}{k}_{[s]}$ satisfait la relation suivante :*

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_j (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n+k-sj}{2k}. \quad (6.6)$$

Démonstration. Par le théorème 6.2.3 on obtient :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \binom{n}{k}_{[s]} x^n &= \frac{x^k (1 + x + x^2 + \dots + x^{s-1})^k}{(1-x)^{k+1}} \\
&= x^k (1-x^s)^k \frac{1}{(1-x)^{2k+1}} \\
&= x^k \sum_j (-1)^j \binom{k}{j} x^{js} \sum_i \binom{i+2k}{2k} x^i \\
&= \sum_n \sum_{i+sj=n} (-1)^j \binom{k}{j} \binom{i+2k}{2k} x^{n+k}
\end{aligned}$$

$$= \sum_n \sum_j (-1)^j \binom{k}{j} \binom{n - sj + k}{2k} x^n.$$

□

Maintenant, nous donnons une identité pour $\binom{n}{k}_{[s]}$ équivalente à la relation (1.26).

Théorème 6.3.2. *Pour $w = \exp(2i\pi/s)$, les coefficients quasi binomiaux satisfont l'expression suivante :*

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_j \binom{n-j}{k} (-1)^j \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{s-1}=j} \binom{k}{k_1} \binom{k}{k_2} \dots \binom{k}{k_{s-1}} \times w^{-\sum_{r=1}^{s-1} rk_r}.$$

Démonstration. En utilisant le théorème 6.2.3, on obtient :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k}_{[s]} x^n \\ &= \frac{x^k}{(1-x)^{k+1}} \prod_{j=1}^{s-1} (x - w^j)^k \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n \sum_{k_1} (-1)^{k-k_1} \binom{k}{k_1} w^{k-k_1} x^{k_1} \sum_{k_2} (-1)^{k-k_2} \binom{k}{k_2} w^{2(k-k_2)} x^{k_2} \dots \\ & \dots \sum_{k_{s-1}} (-1)^{k-k_{s-1}} \binom{k}{k_{s-1}} w^{(s-1)(k-k_{s-1})} x^{k_{s-1}} \\ &= \sum_{n \geq 0} \binom{n}{k} x^n \sum_{j \geq 0} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{s-1}=j} \binom{k}{k_1} \binom{k}{k_2} \dots \binom{k}{k_{s-1}} \times (-1)^{(s-1)k-j} w^{\sum_{r=1}^{s-1} r(k-k_r)} x^j \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_j \binom{n-j}{k} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{s-1}=j} \binom{k}{k_1} \binom{k}{k_2} \dots \binom{k}{k_{s-1}} \times (-1)^{(s-1)k-j} w^{\sum_{r=1}^{s-1} r(k-k_r)} x^n. \\ &= \sum_{n \geq 0} \sum_j \binom{n-j}{k} \sum_{k_1+k_2+\dots+k_{s-1}=j} \binom{k}{k_1} \binom{k}{k_2} \dots \binom{k}{k_{s-1}} (-1)^j w^{-\sum_{r=1}^{s-1} rk_r} x^n, \end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu.

□

Remarque 6.3.3. *On peut aussi déduire le théorème 6.3.2 en utilisant le théorème 6.2.8 et l'identité (1.26).*

En utilisant la fonction génératrice, nous obtenons la relation imbriquée suivante :

Théorème 6.3.4. *Les coefficients du triangle quasi s -Pascal satisfont l'identité suivante :*

$$\binom{n}{k}_{[s]} = \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n-k-\sum_{i=1}^{s-2} j_i}{j_{s-1}} \times (2)^{j_1} (3/2)^{j_2} \dots (s/(s-1))^{j_{s-1}}.$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 0} \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n-k-\sum_{i=1}^{s-2} j_i}{j_{s-1}} (2)^{j_1} (3/2)^{j_2} \dots (s/(s-1))^{j_{s-1}} x^n \\ &= x^k \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} (2x)^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} (3x/2)^{j_2} \dots \sum_{j_{s-2}} \binom{j_{s-3}}{j_{s-2}} (x(s-1)/(s-2))^{j_{s-2}} \times \\ & \times \sum_{j_{s-1}} \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} (s/s-1)^{j_{s-1}} \sum_{n \geq 0} \binom{n-k-\sum_{i=1}^{s-2} j_i}{j_{s-1}} x^{n-k-\sum_{i=1}^{s-2} j_i} \\ &= \frac{x^k}{1-x} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} (2x)^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} (3x/2)^{j_2} \dots \sum_{j_{s-2}} \binom{j_{s-3}}{j_{s-2}} (x(s-1)/(s-2))^{j_{s-2}} \times \\ & \times \sum_{j_{s-1}} \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \left(\frac{(s/(s-1))x}{1-x} \right)^{j_{s-1}} \\ &= \frac{x^k}{1-x} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} (2x)^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} (3x/2)^{j_2} \dots \\ & \dots \sum_{j_{s-2}} \binom{j_{s-3}}{j_{s-2}} \left(\frac{x(s-1)/(s-2) + x^2/(s-2)}{1-x} \right)^{j_{s-2}} \\ &= \frac{x^k}{1-x} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} (2x)^{j_1} \sum_{j_2} \binom{j_1}{j_2} (3x/2)^{j_2} \dots \\ & \dots \sum_{j_{s-3}} \binom{j_{s-4}}{j_{s-3}} \left(\frac{(x(s-2) + x^2 + x^3)/(s-3)}{1-x} \right)^{j_{s-3}} \\ & \vdots \\ &= \frac{x^k}{1-x} \sum_{j_1} \binom{k}{j_1} \left(\frac{2x + x^2 + \dots + x^{s-1}}{1-x} \right)^{j_1} \\ &= \frac{x^k (1 + x + x^2 + \dots + x^{s-1})^k}{(1-x)^{k+1}}. \end{aligned}$$

□

6.4 Le q -analogue du triangle quasi s -Pascal

Nous terminons ce chapitre par définir un q -analogue pour le triangle quasi s -Pascal, on note par $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q$ ces coefficients, nous donnons la formule explicite et la fonction génératrice de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q$ et nous proposons aussi une q -déformation pour la suite s -Fibonacci .

Définition 6.4.1. *On définit le coefficient q -quasi- bi^s nomial par l'une des deux relations équivalentes suivantes :*

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q = \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q + \sum_{j=1}^s q^{n-j} \begin{bmatrix} n-j \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q, \quad (6.7)$$

ou bien

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q = q^k \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q + \sum_{j=1}^s q^{(k-1)j} \begin{bmatrix} n-j \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q. \quad (6.8)$$

On utilise la convention $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}_{[s]}^q = 1$ et $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q = 0$ pour $k \notin \{0, \dots, n\}$.

Remarque 6.4.2. *Pour $s = 1$ on obtient les relations (1.29) et (1.30) respectivement.*

La fonction génératrice de $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q$ est donnée par :

Théorème 6.4.3. *Soit $\mathbb{F}_k(x) := \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^n$ la fonction génératrice du coefficient q -quasi bi^s nomial, alors :*

$$\mathbb{F}_k(x) = \frac{x^k q^{\binom{k}{2}} \prod_{j=0}^{k-1} (1 + q^j x + (q^j x)^2 + \dots + (q^j x)^{s-1})}{\prod_{j=0}^k (1 - q^j x)}.$$

Démonstration. On a $\mathbb{F}_k(x) = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^n$, en utilisant la relation (6.7), on obtient :

$$\begin{aligned} \mathbb{F}_k(x) &= \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^n + \sum_{n \geq 0} \sum_{j=1}^s q^{n-j} \begin{bmatrix} n-j \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q x^n \\ &= x \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^n + (x + x^2 + \dots + x^s) \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^n, \end{aligned}$$

donc

$$\frac{(1-x)\mathbb{F}_k(x)}{(x+x^2+\dots+x^s)} = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^n, \quad (6.9)$$

en utilisant à nouveau la relation (6.7), on obtient :

$$\begin{aligned}
& \frac{(1-x)\mathbb{F}_k(x)}{(x+x^2+\dots+x^s)} \\
&= \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^n + \sum_{n \geq 0} q^{n-1} \begin{bmatrix} n-1 \\ k-2 \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^n + \dots + \sum_{n \geq 0} q^{n-s} \begin{bmatrix} n-s \\ k-2 \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^n \\
&= qx \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]} (qx)^n + (qx + (qx)^2 + \dots + (qx)^s) + \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-2 \end{bmatrix}_{[s]}^q (q^2x)^n,
\end{aligned}$$

et par la relation (6.9) on obtient :

$$\frac{(1-x)(1-qx)\mathbb{F}_k(x)}{(x+x^2+\dots+x^s)(qx+(qx)^2+\dots+(qx)^s)} = \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ k-2 \end{bmatrix}_{[s]}^q (q^2x)^n, \quad (6.10)$$

nous répétons ce processus on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{(1-x)(1-qx)\dots(1-q^{k-1}x)\mathbb{F}_k(x)}{\prod_{j=0}^{k-1} (q^jx + (q^jx)^2 + \dots + (q^jx)^s)} &= \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n \\ 0 \end{bmatrix}_{[s]}^q (q^kx)^n \\
&= \frac{1}{(1-q^kx)},
\end{aligned}$$

ce qui donne le résultat voulu. □

Remarque 6.4.4. Avec la même méthode, nous pouvons également prouver le théorème 6.4.3, en utilisant la relation (6.8) et cela justifie l'équivalence des relations (6.7) et (6.8).

Dans le résultat suivant, on établit la formule explicite du coefficient q -quasi-bi s -nominal.

Théorème 6.4.5. La formule explicite du coefficient $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q$ est donnée par :

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q = \sum_j \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q^{(s-1)}. \quad (6.11)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \sum_j \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q^{(s-1)} x^n &= \sum_j \begin{bmatrix} k \\ j \end{bmatrix}_q^{(s-1)} x^j \sum_{n \geq 0} \begin{bmatrix} n-j \\ k \end{bmatrix}_q^{(1)} x^{n-j} \\
&= \frac{x^k q^{\binom{k}{2}} \prod_{j=0}^{k-1} (1 + q^jx + (q^jx)^2 + \dots + (q^jx)^{s-1})}{\prod_{j=0}^k (1 - q^jx)},
\end{aligned}$$

cette dernière égalité vient de la relation (1.32) et la relation (1.36). □

Nous passons maintenant à la relation de récurrence du q -analogue de la suite s -bonacci, ce résultat généralise le résultat obtenu dans le théorème 6.2.6.

Théorème 6.4.6. *Pour $n \geq 0$, soit $\mathbb{T}_{n+1}^{(s)}(x) := \sum_k \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k$, alors :*

$$\mathbb{T}_{n+1}^{(s)}(x) = \mathbb{T}_n^{(s)}(x) + x \sum_{j=1}^s q^{n-j-1} \mathbb{T}_{n-j}^{(s)}(x/q) \quad (6.12)$$

et

$$\mathbb{T}_{n+1}^{(s)}(x) = \mathbb{T}_n^{(s)}(xq) + x \sum_{j=1}^s \mathbb{T}_{n-j}^{(s)}(xq^j), \quad (6.13)$$

avec, $\mathbb{T}_0^{(s)}(x) = 0$.

Démonstration. On commence par prouver la relation (6.12), on a :

$$\mathbb{T}_{n+1}^{(s)}(x) = \sum_k \begin{bmatrix} n-k \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k,$$

alors, puis, en utilisant la relation (6.7), l'égalité devient :

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{n+1}^{(s)}(x) &= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k + \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k q^{n-k-1} + \dots \\ &\quad \dots + \sum_k \begin{bmatrix} n-k-s \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k q^{n-k-s} \\ &= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k + x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-2 \\ k' \end{bmatrix}_{[s]}^q x^{k'} q^{n-k'-2} + \dots \\ &\quad \dots + x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-s-1 \\ k' \end{bmatrix}_{[s]}^q x^{k'} q^{n-k'-s-1} \\ &= \mathbb{T}_n^{(s)}(x) + x \sum_{j=1}^s q^{n-j-1} \mathbb{T}_{n-j}^{(s)}(x/q). \end{aligned}$$

Pour montrer maintenant la relation (6.13), on procède de la même façon : en utilisant la

relation (6.8) on obtient :

$$\begin{aligned}
\mathbb{T}_{n+1}^{(s)}(x) &= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^k + \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k q^{k-1} + \dots \\
&\quad \dots + \sum_k \begin{bmatrix} n-k-s \\ k-1 \end{bmatrix}_{[s]}^q x^k q^{s(k-1)} \\
&= \sum_k \begin{bmatrix} n-k-1 \\ k \end{bmatrix}_{[s]}^q (qx)^k + x \sum_{k'} \begin{bmatrix} n-k'-2 \\ k' \end{bmatrix}_{[s]}^q x^{k'} q^{k'} + \dots \\
&\quad \dots + x \sum_{k'} \begin{bmatrix} k' \\ k' \end{bmatrix}_{[s]}^q x^{k'} q^{sk'} \\
&= \mathbb{T}_n^{(s)}(qx) + x \sum_{j=1}^s \mathbb{T}_{n-j}^{(s)}(xq^j).
\end{aligned}$$

□

Chapitre 7

Triangle quasi s -Lucas

7.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons une généralisation des triangles de Lucas et de Tribonacci-Lucas, appelée triangle quasi s -Lucas où la somme des éléments parcourant la direction $(1, 1)$ donne un terme de la suite s -Lucas, nous donnons donc un ensemble de résultats sur cette généralisation, nous établissons en premier lieu une formule explicite pour les coefficients de ce triangle, puis, nous donnons la relation entre le triangle quasi s -Lucas et les coefficients binomiaux, et finalement, nous établissons la relation de récurrence pour la somme des éléments situés sur les directions finies du triangle quasi s -Lucas.

7.2 Triangle quasi s -Lucas

Soit $L^{(s)}(n, k)$ l'élément de la $n^{\text{ème}}$ ligne et de la $k^{\text{ème}}$ colonne du triangle quasi s -Lucas.

Définition 7.2.1. *Le coefficient du triangle quasi s -Lucas $L^{(s)}(n, k)$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$L^{(s)}(n, k) = \binom{n}{k}_{[s]} + \binom{n-1}{k-1}_{[s]} + 2\binom{n-2}{k-1}_{[s]} + \cdots + s\binom{n-s}{k-1}_{[s]}, \quad (7.1)$$

avec $L^{(s)}(0, 0) = s + 1$, $L^{(s)}(n, 0) = 1$ et $L^{(s)}(n, n) = 2$.

7.2.1 Formule explicite

Dans le résultat suivant, nous établissons une formule explicite pour les coefficients du triangle quasi s -Lucas via les coefficients binomiaux.

Théorème 7.2.2. *La formule explicite de $L^{(s)}(n, k)$ est donnée par :*

$$L^{(s)}(n, k) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k} \frac{n+k}{n - j_1 - \cdots - j_{s-1}}.$$

Démonstration. Par les relations (7.1) et (6.2), on a

$$\begin{aligned} L^{(s)}(n, k) &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \\ &+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1} - 1}{k-1} \\ &+ 2 \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1} - 2}{k-1} \\ &\vdots \\ &+ s-1 \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1} - (s-1)}{k-1} \\ &+ s \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1} - s}{k-1} \\ &= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \\ &+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k-1}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1} - 1}{k-1} \\ &+ 2 \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-1}} \binom{k-1}{j'_1-1} \binom{j'_1-1}{j'_2} \cdots \binom{j'_{s-2}}{j'_{s-1}} \binom{n - j'_1 - \cdots - j'_{s-2} - j'_{s-1} - 1}{k-1} \\ &\vdots \\ &+ s-1 \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-1}} \binom{k-1}{j'_1-1} \binom{j'_1-1}{j'_2-1} \cdots \binom{j'_{s-2}-1}{j'_{s-1}} \binom{n - j'_1 - \cdots - j'_{s-2} - j'_{s-1} - 1}{k-1} \\ &+ s \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-1}} \binom{k-1}{j'_1-1} \binom{j'_1-1}{j'_2-1} \cdots \binom{j'_{s-2}-1}{j'_{s-1}-1} \binom{n - j'_1 - \cdots - j'_{s-2} - j'_{s-1} - 1}{k-1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-2}} \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \\
&+ \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-2}} \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1} - 1}{k-1} \\
&+ \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-2}, j'_{s-1}} \binom{k-1}{j'_1-1} \binom{j'_1-1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j'_1 - \cdots - j'_{s-2} - j'_{s-1} - 1}{k-1} \\
&\vdots \\
&+ s-2 \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-2}, j'_{s-1}} \binom{k-1}{j'_1-1} \binom{j'_1-1}{j'_2-1} \cdots \binom{j'_{s-2}-1}{j_{s-1}} \binom{n - j'_1 - \cdots - j'_{s-2} - j'_{s-1} - 1}{k-1} \\
&+ s-1 \sum_{j'_1, j'_2, \dots, j'_{s-2}, j'_{s-1}} \binom{k-1}{j'_1-1} \binom{j'_1-1}{j'_2-1} \cdots \binom{j'_{s-2}-1}{j'_{s-1}-1} \binom{n - j'_1 - \cdots - j'_{s-2} - j'_{s-1} - 1}{k-1} \\
&= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \\
&+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \frac{k}{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}} \\
&+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \frac{j_1 - j_2}{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}} \\
&\vdots \\
&+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \frac{(s-2)(j_{s-2} - j_{s-1})}{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}} \\
&+ \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}}{k} \frac{(s-1)j_{s-1}}{n - j_1 - \cdots - j_{s-2} - j_{s-1}} \\
&= \sum_{j_1, j_2, \dots, j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k} \frac{n+k}{n - j_1 - \cdots - j_{s-1}}.
\end{aligned}$$

□

Remarque 7.2.3. Pour $s = 1$ et $s = 2$, on obtient les triangles de Lucas et de Tribonacci Lucas respectivement.

La somme des éléments situés sur la direction $(1, 1)$ du triangle quasi s -Lucas donne un terme de la suite s -Lucas $(L_{n,s})_{n \geq 0}$, soit :

$$L_{n,s} = \sum_k L^{(s)}(n-k, k). \quad (7.2)$$

Théorème 7.2.4. $L_{n,s}$ satisfait la relation de récurrence suivante

$$L_{n,s} = F_{n+1,s} + F_{n-1,s} + 2F_{n-2,s} + \cdots + sF_{n-s,s}, \quad (7.3)$$

pour $n \geq s + 1$, et en utilisant la relation (7.3) on obtient :

$$L_{n,s} = L_{n-1,s} + L_{n-2,s} + L_{n-3,s} + \cdots + L_{n-(s+1),s}. \quad (7.4)$$

Démonstration. Par les relations (7.1) et (7.2), on a :

$$\begin{aligned} L_{n,s} &= \sum_k \binom{n-k}{k}_{[s]} + \sum_k \binom{n-k-1}{k-1}_{[s]} + 2 \sum_k \binom{n-k-2}{k-1}_{[s]} + \cdots \\ &\quad \cdots + s \sum_k \binom{n-k-s}{k-1}_{[s]} \\ &= \sum_k \binom{n-k}{k}_{[s]} + \sum_{k'} \binom{n-k'-2}{k'}_{[s]} + 2 \sum_{k'} \binom{n-k'-3}{k'}_{[s]} + \cdots \\ &\quad \cdots + s \sum_{k'} \binom{n-k'-s-1}{k'}_{[s]} \\ &= F_{n+1,s} + F_{n-1,s} + 2F_{n-2,s} + \cdots + F_{n-s,s}. \end{aligned}$$

On peut voir que $L_{n,s} - L_{n-1,s} - L_{n-2,s} - \cdots - L_{n-(s+1),s} = 0$, en utilisant la relation (7.3), d'où la relation (7.4). \square

7.2.2 Triangle quasi s -Lucas et coefficients bi^snominaux

Nous montrons dans ce paragraphe, qu'il existe un lien entre le triangle quasi s -Lucas et les coefficients bi^snomiaux

Théorème 7.2.5. Pour les entiers fixés n, k et $s, s \geq 1$ on a :

$$L^{(s)}(n, k) = \sum_i \binom{n-i}{k} \binom{k}{i}_{s-1} \frac{n+k}{n-i}.$$

Démonstration. On a :

$$L^{(s)}(n, k) = \sum_{j_1} \sum_{j_2} \cdots \sum_{j_{s-1}} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \cdots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \binom{n - \sum_{i=1}^{s-1} j_i}{k} \frac{n+k}{n - j_1 - \cdots - j_{s-1}},$$

en considérant une sommation par bloc $j_1 + j_2 + \dots + j_{s-1} = i$, nous obtenons

$$\begin{aligned} L^{(s)}(n, k) &= \sum_i \binom{n-i}{k} \frac{n+k}{n-i} \sum_{j_1+j_2+\dots+j_{s-1}=i} \binom{k}{j_1} \binom{j_1}{j_2} \dots \binom{j_{s-2}}{j_{s-1}} \\ &= \sum_i \binom{n-i}{k} \binom{k}{i}_{s-1} \frac{n+k}{n-i}. \end{aligned}$$

□

7.2.3 Relations de récurrence

Considérons maintenant la suite $(L_{n,s}^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ obtenue par la somme des éléments situés sur les directions finies du triangle quasi s -Lucas donnée par :

$$L_{n,s}^{(r,p,\alpha)} := \sum_k L^{(s)}(n - \alpha k, p + rk).$$

Théorème 7.2.6. *Pour $n \geq \alpha s + r$, $(L_{n+1,s}^{(r,p,\alpha)})_{n \geq 0}$ satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$\sum_{i=0}^{\alpha} (-1)^i \binom{r}{i} L_{n-i,s}^{(r,p,\alpha)} = \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} L_{n-\alpha-r-i,s}^{(r,p,\alpha)}. \quad (7.5)$$

Démonstration. On a :

$$\begin{aligned} & \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_{n-i,s}^{(r,p,\alpha)} \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \sum_k L^{(s)}(n - \alpha k - i, p + rk) \\ &= \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{\alpha}{i} \sum_k \binom{n - \alpha k - i}{p + rk}_{[s]} + \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - 1}{p + rk - 1}_{[s]} \\ &+ 2 \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - 2}{p + rk - 1}_{[s]} + \dots + s \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - s}{p + rk - 1}_{[s]}. \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 6.2.9, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_{n-i,s}^{(r,p,\alpha)} \\
= & \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - r - \alpha}{p + rk}_{[s]} + \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - r - \alpha - 1}{p + rk - 1}_{[s]} \\
& + 2 \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - r - \alpha - 2}{p + rk - 1}_{[s]} + \dots \\
& \dots + s \sum_{i=0}^{r(s-1)} \binom{r}{i}_{s-1} \sum_k \binom{n - \alpha k - i - r - \alpha - s}{p + rk - 1}_{[s]}.
\end{aligned}$$

et en utilisant la relation (7.1), nous obtenons le résultat voulu. \square

Corollaire 7.2.7. *La somme des éléments situés sur la direction (r, α) du triangle de Lucas et de Tribonacci-Lucas donnent :*

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_{n-i}^{(r,p,\alpha)} = L_{n-\alpha-r}^{(r,p,\alpha)}, \quad (7.6)$$

$$\sum_{i=0}^r (-1)^i \binom{r}{i} L_{n-i,2}^{(r,p,\alpha)} = \sum_{i=0}^r \binom{r}{i} L_{n-\alpha-r-i,2}^{(r,p,\alpha)}. \quad (7.7)$$

Exemple 7.2.8. *La somme des éléments situés sur la direction $(3, 2)$ du triangle Tribonacci-Lucas ($s = 2$, $r = 3$, $\alpha = 2$ et $p = 0$) satisfait la relation de récurrence suivante :*

$$L_{n,2}^{(3,0,2)} = 3L_{n-1,2}^{(3,0,2)} - 3L_{n-2,2}^{(3,0,2)} + L_{n-3,2}^{(3,0,2)} + L_{n-5,2}^{(3,0,2)} + 3L_{n-6,2}^{(3,0,2)} + 3L_{n-7,2}^{(3,0,2)} + L_{n-8,2}^{(3,0,2)},$$

avec : $L_{0,2}^{(3,0,2)} = 3$, $L_{1,2}^{(3,0,2)} = 1$, $L_{2,2}^{(3,0,2)} = 1$, $L_{3,2}^{(3,0,2)} = 1$, $L_{4,2}^{(3,0,2)} = 1$, $L_{5,2}^{(3,0,2)} = 3$, $L_{6,2}^{(3,0,2)} = 15$, $L_{7,2}^{(3,0,2)} = 49$.

Les premiers termes de cette suite sont $(3, 1, 1, 1, 1, 3, 15, 49, 115, 221, 377, 611, 1027, 1935, \dots)$

Chapitre 8

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons contribué à la réponse sur quelques questions qui font partie de la combinatoire énumérative, et sur d'autres questions, qui entrent dans le cadre de la théorie des nombres.

D'une part, nous avons étudié l'unimodalité des suites parcourant les transversales infinies des triangle de Delannoy et de Delannoy généralisé, nous avons défini les coefficients quasi bi^snomiaux qui représentent une généralisation des coefficients binomiaux et des nombres de Delannoy, nous avons montré que les coefficients quasi bi^snomiaux énumèrent des chemins de treillis en utilisant une certaine famille de pas, nous avons établi aussi quelques formules explicites pour ces coefficients et nous avons proposé un q -analogue aux coefficients quasi bi^snomiaux, nous avons défini également une généralisation aux triangle de Lucas et Tribonacci-Lucas, plusieurs questions dans ce contexte restent sans réponses, on cite par exemple : l'unimodalité des suites parcourant les transversales finies du triangle quasi bi^snomial, donner des interprétations combinatoires aux identités établies, trouver des applications pour les coefficients quasi bi^snomiaux dans d'autres branches de Mathématiques.

D'autre part, nous avons étudié le problème d'équilibre défini par les coefficients parcourant la direction $(1, -1)$ du triangle de Delannoy, nous avons donné la solution complète pour les premières transversales, et nous avons proposé une solution pour le cas général. Nous avons défini aussi le problème s -équilibre et nous avons étudié la solution de ce problème.

Il serait intéressant d'étudier d'autres problème d'équilibre et de s -équilibre en utilisant d'autres suites.

Annexe

Nous appliquons l'algorithme de Szeilberger pour prouver le lemme 4.2.3

Algorithme de Szeilberger

1. `<< RISC'fastZeil'` .

2. `Zb[Binomial[2n + 1, j + 1]Binomial[n, j](2)^j, {j, 0, n}, n, 2]`.

If 'n' is a natural number, then :

$$\{(1+n)(3+2n)(12+5n)T_n + (591+1039n+594n^2+110n^3)T_{n+1} - (3+n)(3+2n)(7+5n)T_{n+2} == 0\}$$

3. `Zb[Binomial[2n + 2, j]Binomial[n, j](2)^j, {j, 0, n}, n, 2]`

If 'n' is a natural number, then :

$$\{(1+n)(3+2n)(12+5n)T_n + (591+1039n+594n^2+110n^3)T_{n+1} - (3+n)(3+2n)(7+5n)T_{n+2} == 0\}$$

On remarque que les deux membres de l'identité (4.6) donnent la même récurrence, donc cette identité est vraie.

Nous donnons maintenant l'algorithme qui permet de résoudre une équation de Thue par Magma

Résolution de l'équation (4.13) pour $g = 41$ par Magma

1. `R < x > := PolynomialRing(Integers());`

2. `f := 3 * x^3 + 75 * x^2 + 615 * x + 1681;`

3. `T := Thue(f);`

4. `T;`

Thue objectif with form $3x^3 + 75x^2y + 615xy^2 + 1681y^3$

5. Solutions `(T, -2);`

`[-11, 1]`.

Bibliographie

- [1] A. Acikel, **S. Amrouche**, H. Belbachir and N. Irmak. quasi s -Lucas triangle. submitted.
- [2] L. Ait-Amrane, H. Belbachir, K. Betina. Periods of Morgan-Voyce sequences and elliptic curves. *Math. Slovaca* 2016; 66 (6).
- [3] K. Alladi ,Jr VE. Hoggatt. On Tribonacci numbers and related functions. *Fibonacci Quarterly* 1977; 15 (1) : 42–45.
- [4] **S. Amrouche** and H. Belbachir. Unimodality and linear recurrences associated with rays in the Delannoy triangle. *Turkish Journal of Mathematics* 44.1 (2020) : 118-130.
- [5] **S. Amrouche** and H. Belbachir. Asymmetric extension of Pascal-Delannoy triangles. Submitted.
- [6] **S. Amrouche**, H. Belbachir and N. Irmak. Balancing problem in the transversal $(1, -1)$ of Delannoy triangle. Submitted.
- [7] **S. Amrouche**, H. Belbachir and N. Irmak. On s -balancing numbers. Submitted.
- [8] **S. Amrouche**, H. Belbachir and J. L. Ramirez. Unimodality, linear recurrences and combinatorial properties associated to rays in the generalized Delannoy matrix. *Journal of Difference Equations and Applications*, 25(8) (2019) : 1200-1215.
- [9] G. Andrews, J. Baxter. Lattice gas generalization of the hard hexagon model III q -trinomials coefficients. *J Stat Phys* 1987; (47) : 297-330.
- [10] T. Andreescu, D. Andrica. *Quadratic Diophantine Equations*. Springer, 2015.
- [11] C. Banderier, S. Schwer. Why Delannoy numbers ?. *Journal of Statistical Planning and Inference* 2005; 135 (1) : 40–54.
- [12] P. Barry. On integer-sequence-based constructions of generalized Pascal triangles. *Journal of Integer Sequences* 2006; (9) : 06–2.
- [13] A. Bazeniari, M. Ahmia, H. Belbachir. Connection between bi^snomial coefficients and their analogs and symmetric functions. *Turkish Journal of Mathematics* 2018; 42 (3) : 807–818.

-
- [14] A. Behera, G. K. Panda. On the square roots of triangular numbers, *Fibonacci Quart.* 1999 ; (37) : 98–105.
- [15] A. Behera, K. Liptai, G. K. Panda, L. Szalay. Balancing with Fibonacci powers, *Fibonacci Quart* 2011 ; 49 (1) : 28-33.
- [16] H. Belbachir, F. Bencherif. Linear recurrence sequences and powers of square matrix. *Integers* 2006 ; (6) : A12, 1–17.
- [17] H. Belbachir and F. Bencherif. Unimodality of sequences associated to Pell numbers. *Ars Combinatoria* 2011 ; (102) : 305-311.
- [18] H. Belbachir, F. Bencherif, L. Szalay. Unimodality of certain sequences connected with binomial coefficients. *Journal of Integer Sequences* 2007, 10 (2) : 07–2.
- [19] H. Belbachir, B. Benmezai. A q -analogue for binomial coefficients and generalized Fibonacci sequences. *Comptes Rendus Mathematique* 2014 ; 352 (3) : 167–171.
- [20] H. Belbachir, S. Bouroubi, A. Khelladi, Connection between ordinary multinomials, Fibonacci numbers, Bell polynomials and discrete uniform distribution, *Annales Mathematicae et Informaticae* 2008 ; (35) : 21–30.
- [21] H. Belbachir, T. Komatsu, L. Szalay. Linear recurrences associated to rays in Pascals triangle and combinatorial identities. *Mathematica Slovaca* 2014 ; 64 (2) : 287–300.
- [22] H. Belbachir, L. Szalay. On the arithmetic triangles, *Siauliai Math. Sem* 2014 ; 9 (17) : 15-26.
- [23] H. Belbachir, L. Szalay. Balancing in direction $(1, -1)$ in Pascal's Triangle. *Armenian Journal of mathematics* 2014 ; 6 (1) : 32–41.
- [24] A. Benmezai. Ph.D Thesis <http://theses.univ-oran1.dz/these.php?id=16201630t>.
- [25] M. Benoumhani. A sequence of binomial coefficients related to Lucas and Fibonacci numbers. *Journal of Integer Sequences* 2003 ; 6.
- [26] R. Bollinger A note on Pascal T-triangles, Multinomial coefficients and Pascal pyramids. *Fibonacci Quart* 1986 ; (24) : 140-144.
- [27] G. Boros, V.H. Moll. A sequence of unimodal polynomials. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* 1999 ; 237 (1) : 272–287.
- [28] F. Brenti. Log-concave and unimodal sequences in Algebra. *Combinatorics and Geometry : an update. Contemporary Mathematics* 1994 ; (178) : 71–89.
- [29] L. Carlitz. Fibonacci notes. III. q -Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly* 1974 ; (12) : 317–322.
- [30] G. S. Cheon, H. Kim, L. W. Shapiro. A generalization of Lucas polynomial sequence. *Discrete Appl. Math.* 2009 ; (157) : 920–927.
- [31] S. Chern. A note on balancing binomial coefficients. *Proceedings of the Japan Academy, Series A, Mathematical Sciences* 2015 ; 91 (8) : 110–111.

-
- [32] J. Cigler. A new class of q -Fibonacci polynomials. *Electronic Journal of Combinatorics* 2003; 10 (1) : 19.
- [33] J. Cigler. q -Fibonacci polynomials. *Fibonacci Quarterly* 2003; 41 (1) : 31–40.
- [34] L. Comet. *Advanced Combinatorics*, Reidel 1974; 81.
- [35] A. De-Moivre. *The doctrine of chances*, Third edition 1756 (first ed. 1718 and second ed. 1738), reprinted by Chelsea, N. Y., 1967.
- [36] A. De-Moivre. *Miscellanea Analytica de Scrichus et Quadraturis*, J. Tomson and J. Watts, London, 1731.
- [37] M. Dziemianczuk. Counting lattice paths with four types of steps. *Graphs Combin* 2014 (30) : 1427–1452.
- [38] R. D. Fray, D. P. Roselle. Weighted lattice paths. *Pacific J. Math* 1971; 37(1) : 85–96.
- [39] N. Irmak. Balancing with balancing power, *Miskolc Math* 2013; 14 (3) : 951–957.
- [40] M. Kauers. *Guessing handbook*. Technical Report 09-07, RISC-Linz 2009.
- [41] E. Kiliç. Sums of the squares of term of sequence $\{u_n\}$. *Proc. Indian Acad. Sci* 2008 118(1) : 27–41.
- [42] T. Komatsu, L. Szalay. Balancing with binomial coefficients. *International Journal of Number Theory* 2014; 10 (07) : 1729–1742.
- [43] K. Kuhapatanakul. Some connections between a generalized Tribonacci triangle and a generalized Fibonacci sequence. *Fibonacci Quarterly* 2012; 50 (1) : 44–50.
- [44] K. Liptai, F. Luca, Á. Pintér and L. Szalay, Generalized balancing numbers, *Indag. Math* 2009; (20) : 87-100.
- [45] L. L. Liu, Y. Wang. On the log-convexity of combinatorial sequences. *Adv. in Appl. Math.* 2007; (39) : 453–476.
- [46] S. G. Mohanty and B. R. Handa. On lattice paths with several diagonal steps, *Canadian Math. Bull* 1968; (11), 537-545.
- [47] E. Munarini. Generalized q -Fibonacci numbers. *Fibonacci Quarterly* 2005; (43) : 234–242.
- [48] E. Munarini. Some q -binomial identities involving the generalized q -Fibonacci numbers. *Integers* 2018; (18) : 1–15.
- [49] E. Munarini, NZ. Salvi. Scattered subsets. *Discrete Mathematics* 2003; 267 (1-3) : 213–228.
- [50] H. Pan A Lucas-type congruence for q -Delannoy numbers. *ArXiv* 2015; 1508.02046.
- [51] G. K. Panda. Sequence balancing and cobalancing numbers, *Fibonacci Quarterly* 2007; 45(3) :265-271 .

-
- [52] G. K. Panda, P. K. Ray. Cobalancing numbers and cobalancers, *Int. J. Math. Math. Sci* 2005 ; (8) : 1189-1200.
- [53] J. L. Ramírez, V. Sirvent. A generalization of the k -bonacci sequence from Riordan arrays. *Electron. J. Combin* 2015 ; 22(1).
- [54] J. L. Ramírez, V. Sirvent. Generalized Schröder matrix and its combinatorial interpretation. *Linear Multilinear Algebra* 2018 66 (2) : 418–433
- [55] V. K. Rohatgi. A note on lattice paths with diagonal steps, *Canadian Math. Bull* 1964 (7) : 470-472.
- [56] BE. Sagan, Unimodality and the reflection principle. *Ars Combinatoria* 1998 ; (48) : 65–72.
- [57] Sloane N. The Online Encyclopedia of Integer Sequences. Available online at <http://oeis.org/>.
- [58] RP. Stanley. Log-Concave and Unimodal Sequences in Algebra, Combinatorics, and Geometry. *Annals of the New York Academy of Sciences* 1989 ; 576 (1) : 500–535.
- [59] P. Stănică. Generating functions, weighted and non-weighted sums for powers of second-order recurrence sequences. *Fibonacci Quart* 2003 ; 41(4) : 321–333.
- [60] Su XT, Y. Wang. On unimodality problems in Pascal's triangle. *Electronic Journal of Combinatorics* 2008 ; 15 (1).
- [61] R. Sulanke. Objects counted by the central Delannoy numbers. *J. Integer Seq* 2003 (6).
- [62] S. Tanny, M. Zuker. On a unimodality sequence of binomial coefficients. *Discrete Mathematics* 1974 ; 79–89.
- [63] S. Tanny, M. Zuker, On a unimodal sequence of binomial coefficients II, *J. Combin. Inform. System Sci* 1976 ; (1) : 81–91.
- [64] Y. Wang Y, YN. Yeh. Log-concavity and LC-positivity. *Journal of Combinatorial Theory Series A* 2007 ; 114 (2) : 195–210.
- [65] S.-L. Yang, S.-N. Zheng, S.-P. Yuan, T.-X. He. Schröder matrix as inverse of Delannoy matrix. *Linear Algebra Appl* 2013 ; 439 (11) : 3605–3614.
- [66] N. Yilmaz, N. Taskara. Incomplete Tribonacci-Lucas Numbers and Polynomials. *Advances in Applied Clifford Algebras* 2015 25 (3) : 741–753.
- [67] Y. Yu Confirming two conjectures of Su and Wang on binomial coefficients. *Advances in Applied Mathematics* 2009 ; 43 (4) : 317–322.