N° d'ordre : 87/2021-C/PH

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE

HOUARI BOUMEDIENNE

FACULTÉ DE PHYSIQUE

THESE DE DOCTORAT

présentée pour l'obtention du grâde de DOCTEUR

en: PHYSIQUE

Spécialité : Physique Théorique

par : ZENAD Malek.

Sujet :

Contribution au formalisme de la mécanique quantique pseudo-Hermitienne et PT-Symétrique

Soutenue publiquement le 14 /07/2021, devant le Jury composé de :

M. M.HACHEMANE	Professeur à l'USTHB	Président
Mme. F.Z. IGHEZOU	Professeur à l'USTHB	Directrice de thèse
M. O. CHERBAL	Professeur à l'USTHB	Co-Directeur de thèse
M. A. CHOUCHAOUI	Professeur à l'USTHB	Examinateur
M. R. MEZHOUD	Professeur à l'USDB	Examinateur
M. N. ZENINE	Directeur de recherche au CRNA	Examinateur

Remerciements

Le présent travail a été réalisé au sein du laboratoire de physique théorique de la faculté de physique de l'USTHB. Je souhaiterais remercier ma directrice de thèse Madame IGHEZOU Fatima Zohra, professeur à l'USTHB et mon co-directeur de thèse Monsieur CHERBAL Omar, professeur à l'USTHB. Je tiens à leur exprimer ma profonde reconnaissance pour m'avoir accordé leur confiance en m'encadrant avec patience et sagesse durant toute la période de la préparation de cette thèse.

Je tiens à remercier également Monsieur HACHEMANE Mahmoud, professeur à l'USTHB, de m'avoir fait l'honneur d'accepter de présider le jury de cette thèse.

Mes remerciements les plus vifs vont également à Messieurs CHOUCHAOUI Ahmed professeur à l'USTHB, MEZHOUD Reda professeur à l'université de Boumerdès et ZENINE Nadjah Directeur de recherche au CRNA pour avoir accepté de juger ce travail.

Mes remerciements vont également à tous les membres du laboratoire de physique théorique. Je remercie particulièrement mes enseignants ainsi que mes camarades de toute la faculté de physique. Un grand merci à mes amis Omar, Khireddine et Zouhir.

Je tiens à remercier mon épouse pour le soutien et les encouragements continus qu'elle m'a prodigués durant ces années de thèse, qu'elle trouve ici ma très haute considération.

Finalement, j'exprime ma profonde reconnaissance à mon père, ma mère, ma soeur, mes frères, ma belle-famille et à tous mes proches pour leur inestimable affection, leur soutien et leurs encouragements sans cesse renouvelés; à eux tous, j'exprime ma reconnaissance et ma profonde gratitude.

Dédicace

A ma mère et mon père

A mon épouse et à notre adorable princesse Ania.

Table des matières

Introduction Générale

La mécanique quantique qui s'intéresse à la compréhension de l'univers et de l'infiniment petit ainsi qu'à l'étude et la description des phénomènes fondamentaux, joue un rôle primordial dans la physique moderne [1], car elle fournit des outils permettant l'étude des phénomènes à l'échelle atomique et subatomique de façon quantitative, précise et détaillée.

L'un des outils les plus essentiels en mécanique quantique est l'équation de Schrödinger que nous évoquerons plusieurs fois dans la présente thèse [2]. Sa résolution reste un problème très important intervenant dans de nombreux calculs de la physique. A ce jour, il existe plusieurs méthodes de résolution de cette équation, comme la méthode de l'opérateur d'évolution et la méthode des invariants [3]. Cette dernière est basée sur la dérivation d'une relation entre les états propres d'un invariant et la solution de l'équation de Schrödinger.

Dans le présent travail, nous nous intéressons à la méthode des invariants afin de trouver une solution exacte de l'équation de Schrödinger et construire les états cohérents associés. Ces derniers jouent un rôle très important dans différentes branches de la physique [4-7]. Un état cohérent usuel est défini comme l'état quantique de l'oscillateur harmonique quantique, souvent décrit comme un état dont la dynamique ressemble le plus au comportement oscillatoire d'un oscillateur harmonique classique. Il a été introduit, pour la première fois, par Erwin Schrödinger [2] en 1926. Les états cohérents sont des états spécifiques tels que les valeurs moyennes des observables dans ces états ont des propriétés aussi proches que possible des grandeurs physiques du modèle classique correspondant. C'est pour cette raison que les états cohérents jouent un rôle privilégié dans l'étude des correpondances entre mécaniques quantique et classique.

Par ailleurs, la mécanique quantique continue à se développer et a prouvé ses capacités à décrire des systèmes physiques; plus précisément dans la fin des années 90, la découverte de la théorie $\mathcal{PT}$ symétrique par Bender et ses collaborateurs [8] a surpris beaucoup de physiciens. Bender et ses collaborateurs ont montré qu'un hamiltonien invariant par réflexion de l'espace et par renversement du sens du temps possède un spectre réel si la $\mathcal{PT}$ symétrie n'est pas brisée.

Quelques années plus tard, Mostafazadeh a développé en 2002 le formalisme mathématique de la pseudo-hermiticité [9]. La notion de pseudo-hermiticité a été introduite auparavant par Dirac et Pauli [10]. Mostafazadeh a développé la structure de base responsable de la réalité du spectre des hamiltoniens non-hermitiens. Il a montré [9] que l'on peut remplacer la condition de l'hermiticité et la condition de la $\mathcal{PT}$ symétrie, plus physique que mathématique, par une condition plus générale appelée la pseudo-hermiticité.

Cette thèse entre dans le cadre de l'extension de la notion d'états cohérents à différents domaines de la physique régis par un formalisme hamiltonien autre que celui de l'oscillateur harmonique. Nous avons généralisé, dans notre étude, la méthode des invariants de Dodonov-Malkin-Man'ko-Trifonov (DMMT) aux hamiltoniens pseudo-fermioniques dépendant du temps, en introduisant des opérateurs invariants d'échelles (intégrales de mouvement dépendant du temps) qui jouent le rôle d'opérateurs de création et d'annihilation. Cette généralisation nous a permis de construire les états cohérents pour les systèmes pseudo-fermioniques dépendants du temps [11].

Cette thèse est organisée comme suit:

Dans le premier chapitre, nous rappelons les principes fondamentaux de la théorie des invariants dans le cadre de la mécanique quantique hermitienne. Nous verrons tout d'abord la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld puis celle de l'invariant de Dodonov-Malkin-Man'ko-Trifonov (DMMT).

Le chapitre 2 sera consacré exclusivement à présenter les définitions et les propriétés de bases des états cohérents bosoniques et fermioniques toujours dans le cadre de la mécanique quantique hermitienne.

Les formalismes mathématiques de la $\mathcal{PT}$-symétrie et la pseudo-hermiticité ne seront pas non plus négligés. Nous leurs consacrons le chapitre 3, dans lequel nous allons exposer l'essentiel de la théorie non-hermitienne que nous jugerons utile pour la suite du manuscrit.

Le chapitre 4 porte sur la construction des états cohérents pseudo-fermioniques et pseudo-bosoniques indépendants du temps dans le cadre de la mécanique quantique non-hermitienne.

Dans le but d'étendre la méthode des invariants aux systèmes non-hermitiens dépendants du temps, le chapitre 5, qui est le chapitre central de cette thèse, sera consacré à l'extension de l'invariant de (DMMT) aux systèmes pseudo-fermioniques dépendant du temps. Ceci en introduisant des opérateurs invariants d'échelle (intégrales de mouvement dépendant du temps) qui jouent le rôle d'opérateurs pseudo-fermioniques dépendant du temps, ensuite en construisant des états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps pour ces systèmes.

Le chapitre 6 sera consacré à l'illustration de nos résultats généraux; dans cette partie, nous étudierons en détail un système à deux-niveaux $\mathcal{PT}$-symétrique dépendant du temps. Nous déterminerons explicitement les opérateurs de création et d'annihilation et nous construirons des états cohérents pseudo-fermioniques dépendant du temps pour ce système.

Par la suite, nous montrerons que notre approche pourra s'étendre aux systèmes pseudo-bosoniques dépendants du temps. Dans ce cadre, nous étudierons l'oscillateur harmonique amorti décrit par un hamiltonien non-hermitien dépendant du temps.

Une conclusion générale résumera l'ensemble du travail effectué.

CHAPITRE 1

Théorie des invariants dans le cadre de la mécanique quantique hermitienne

1.1 Introduction

Différentes discussions ont été abordées pour les systèmes quantiques dépendants et indépendants du temps. La résolution de l'équation fondamentale non relativiste proposée par Schrödinger est primordiale en mécanique quantique, l'une des méthodes de résolution les plus importantes est celle des invariants (intégrales du mouvement).

Le rôle des invariants en physique ne peut guère être sous-estimé. Ces derniers aident à analyser et à classer le comportement de divers systèmes classiques et quantiques; en effet, la connaissance de ces invariants simplifie considérablement la résolution d'équations dynamiques régissant l'évolution du système. L'importance de la méthode des invariants est due à la souplesse ainsi qu'à la simplicité dans l'obtention de la solution de l'équation de Schrödinger, car elle consiste à trouver une relation simple entre les états propres de l'invariant et la solution de l'équation de Schrödinger. La théorie de l'invariant a été introduite pour la première fois en 1969 par Lewis et Riesenfeld [3] pour des systèmes quantiques dépendants du temps en étudiant deux systèmes physiques , le premier traitant l'oscillateur harmonique de fréquence dépendante du temps alors que le second concerne une particule chargée placée dans un champ électromagnétique dépendant du temps.

Un invariant ou une intégrale du mouvement est, généralement, défini comme un opérateur dont la valeur moyenne $\langle\psi(t)| I(t) |\psi(t)\rangle$ ne dépend pas du temps pour tout état $|\psi(t)\rangle$ obéissant à l'équation de Schrödinger; cet invariant $I(t)$ satisfait l'équation $i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t} = [I(t), H(t)]$.

Dans ce qui suit, nous allons présenter l'essentiel de la théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld et nous examinons, par la suite, un autre type d'invariants non-hermitiens introduits par Dodonov–Malkin–Man'ko–Trifonov [12].

1.2 La théorie des invariants de Lewis et Riesenfeld

Nous considérons un système physique décrit par un hamiltonien hermitien $H(t)$ dépendant explicitement du temps et on suppose l'existence d'un autre opérateur hermitien qui dépend explicitement du temps $I(t)$, ce dernier est dit invariant s'il satisfait l'quation d'invariance

$$\frac{dI(t)}{dt} = \frac{\partial I(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}[I(t), H(t)] = 0, \tag{1.2.1}$$

l'évolution du vecteur d'état du système est décrite par l'équation

$$i\hbar\frac{\partial |\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)|\psi(t)\rangle, \tag{1.2.2}$$

en appliquant l'équation (1.2.1) sur $|\psi(t)\rangle$ et en utilisant l'équation (1.2.2), on obtient la relation

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}[I(t)|\psi(t)\rangle] = H(t)[I(t)|\psi(t)\rangle]. \tag{1.2.3}$$

Notons que l'action de l'opérateur invariant sur le vecteur d'état $|\psi(t)\rangle$ est aussi solution de l'équation de Schrödinger dépendante du temps. Ce résultat est valable quelque soit la forme de l'invariant.

Maintenant, nous considérons un opérateur invariant $I(t)$ hermitien ayant des valeurs propres λ et des états propres $|\lambda, n\rangle$ formant une base de l'espace de Hilbert, le nombre n représente tous les nombres quantiques (autres que λ) qui sont nécessaires à spécifier les états propres de l'invariant

$$I(t)\,|\lambda, n\rangle = \lambda\,|\lambda, n\rangle\,, \tag{1.2.4}$$

$$\langle \lambda', n' \mid \lambda, n\rangle = \delta_{\lambda'\lambda}\delta_{n'n}. \tag{1.2.5}$$

La différentiation de l'équation (1.2.4) conduit à

$$\frac{\partial I(t)}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle + I(t)\frac{\partial}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle + \lambda\frac{\partial}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle\,, \tag{1.2.6}$$

en appliquant l'équation (1.2.1) au ket $|\lambda, n\rangle$ on obtient

$$i\hbar\frac{\partial I(t)}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle + I(t)H(t)\,|\lambda, n\rangle - H(t)I(t)\,|\lambda, n\rangle = 0. \tag{1.2.7}$$

Le produit scalaire de l'équation (1.2.7) par le vecteur d'état $\langle \lambda', n'|$ donne

$$i\hbar\,\langle \lambda', n'|\,\frac{\partial I(t)}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle + (\lambda' - \lambda)\,\langle \lambda', n'|\,H(t)\,|\lambda, n\rangle = 0, \tag{1.2.8}$$

ce qui implique

$$\langle \lambda, n'|\,\frac{\partial I(t)}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle = 0. \tag{1.2.9}$$

En prenant maintenant le produit scalaire de l'équation (1.2.6) avec $\langle \lambda, n|$ on obtient

$$\langle \lambda, n|\,\frac{\partial I(t)}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle = \frac{\partial \lambda}{\partial t} = 0, \tag{1.2.10}$$

ceci permet de conclure que les valeurs propres de l'invariant sont indépendantes du temps.

Cherchons, maintenant, la relation qui existe entre les états propres de l'invariant $I(t)$ et les solutions de l'équation de Schrödinger; en commençant par l'équation (1.2.6) et en utilisant l'équation (1.2.10), on aboutit à

$$[\lambda - I(t)]\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle = \frac{\partial I(t)}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle\,. \tag{1.2.11}$$

En faisant le produit scalaire de l'équation (1.2.11) par le bra $\langle \lambda', n'|$ et en utilisant l'équation (1.2.8) nous obtenons

$$i\hbar(\lambda' - \lambda)\,\langle \lambda', n'|\,\frac{\partial}{\partial t}\,|\lambda, n\rangle = (\lambda' - \lambda)\,\langle \lambda', n'|\,H(t)\,|\lambda, n\rangle\,, \tag{1.2.12}$$

pour $\lambda' \neq \lambda$, on peut réécrire cette dernière sous la forme suivante

$$i\hbar \langle \lambda', n' | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, n \rangle = \langle \lambda', n' | H(t) | \lambda, n \rangle . \tag{1.2.13}$$

Remarquons que dans (1.2.13) si $\lambda = \lambda'$ (sachant que nous ne sommes pas dans ce cas), on aurait pu déduire immédiatement que l'état propre de l'invariant $I(t)$ est une solution particulière de l'équation de Schrödinger. Pour contourner cette difficulté, on peut donc multiplier $|\lambda, n\rangle$ par un facteur de phase dépendant du temps donné par

$$|\lambda, n\rangle_\alpha = \exp(i\alpha_{\lambda n}(t)) |\lambda, n\rangle , \tag{1.2.14}$$

les $|\lambda, n\rangle_\alpha$ sont aussi des états propres orthonormés de $I(t)$ associés aux valeurs propres λ.

$\alpha_{\lambda n}(t)$ est une fonction réelle choisie telle que l'équation (1.2.13) est vérifiée pour $\lambda = \lambda'$, cette phase est obtenue en substituant les états propres orthonormés de $I(t)$ donnés par l'expression (1.2.14) dans l'équation de Schrödinger, ce qui mène au résultat suivant

$$\frac{d\alpha_{\lambda n}}{dt} = i \langle \lambda, n | \frac{\partial}{\partial t} | \lambda, n \rangle - \frac{1}{\hbar} \langle \lambda, n | H(t)) | \lambda, n \rangle , \tag{1.2.15}$$

Le second membre de cette équation contient deux parties, une partie dynamique et une partie géométrique. La solution de l'équation de Schrödinger s'écrit

$$|\psi(t)\rangle = \sum_{\lambda n} C_{\lambda n}(0) \exp[i\alpha_{\lambda n}(t)] |\lambda, n\rangle , \tag{1.2.16}$$

où les $C_{\lambda n}(0)$ représentent des coefficients indépendants du temps.

1.3 L'invariant de Dodonov-Malkin-Man'ko-Trifonov (DMMT)

Lewis et Riesenfeld ont introduit la théorie des invariants pour résoudre l'équation de Schrödinger lorsque l'hamiltonien du système quantique est explicitement dépendant du temps. Dans cette théorie, les états propres de l'opérateur invariant hermitique ($I = I^+$), multipliés par un facteur de phase, représentent la solution de l'équation de Schrödinger .

Dodonov–Malkin–Man'ko–Trifonov (DMMT) ont utilisé un autre type d'invariant (intégrales du mouvement) linéaire, sous la forme,

$$A(t) = r(t)\hat{p} - \dot{r}(t)\hat{x}, \tag{1.3.1}$$

où $\hat{x}$ et $\hat{p}$ sont, respectivement, des opérateurs de position et d'impulsion et $r(t)$, une fonction complexe dépendante du temps; ce dernier a été utilisé pour l'étude d'un oscillateur harmonique quantique à fréquence dépendante du temps $\omega(t)$ ou d'une particule chargée se déplaçant dans un champ magnétique homogène dépendant du temps.

Selon le choix de la fonction $r(t)$, les états propres de l'opérateur $A(t)$ peuvent être soit des états cohérents généralisés [12-16] soit des états comprimés (*squeezed states*) corrélés [16-17], ou des propagateurs dans diverses représentations [18-19]. Des intégrales de mouvement quadratiques ont été utilisées par Dodonov–Malkin–Man'ko–Trifonov pour introduire les états cohérents pairs et impairs [20].

1.3.1 L'invariant de (DMMT) pour un oscillateur amorti dépendant du temps

Nous considérons le système formé d'un oscillateur amorti avec des paramétres dépendants du temps, son évolution non relativiste est régie par l'équation de Schrödinger, $(\hbar = 1, m = 1)$

$$i\frac{\partial \left|\psi(t)\right\rangle}{\partial t} = H(t)\left|\psi(t)\right\rangle, \tag{1.3.2}$$

où l'hamiltonien du système est donné par [12]

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2}e^{-2\Gamma(t)} + \frac{1}{2}\omega_0^2(t)e^{2\Gamma(t)}\hat{x}^2 - f(t)e^{2\Gamma(t)}\hat{x}. \tag{1.3.3}$$

Dodonov et *al* ont introduit deux opérateurs invariants d'échelle non hermitiens $A(t)$ et $A^\dagger(t)$ définis comme opérateurs linéaires en $\hat{p}$ et $\hat{x}$

$$A(t) = a(t)\hat{x} + b(t)\hat{p} + \delta(t), \tag{1.3.4}$$

où $a(t)$, $b(t)$ et $\delta(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps. Les opérateurs $A(t)$ et $A^{\dagger}(t)$ sont invariants, c'est-à-dire qu'ils vérifient les relations (1.2.1),

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[A(t), H(t)\right] &= 0, & (1.3.5)\\ \frac{\partial A^{\dagger}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[A^{\dagger}(t), H(t)\right] &= 0. & (1.3.6) \end{aligned}$$

Les coefficients $a(t)$, $b(t)$ et $\delta(t)$ obeissent alors aux équations différentielles suivantes

$$\begin{aligned} \dot{a} &= \omega_0^2(t)e^{2\Gamma(t)}b, & (1.3.7)\\ \dot{b} &= -e^{-2\Gamma(t)}a, & (1.3.8)\\ \dot{\delta} &= -f(t)e^{2\Gamma(t)}b. & (1.3.9) \end{aligned}$$

où le point désigne la dérivée par rapport au temps.

Par conséquent, toutes les intégrales linéaires du mouvement ont la forme

$$A(t) = b(t)\hat{p} - \dot{b}(t)e^{2\Gamma(t)}\hat{x} - \int f(\tau)e^{2\Gamma(\tau)}b(\tau)d\tau, \tag{1.3.10}$$

$b(t)$ étant une solution arbitraire de l'équation qui s'écrit comme

$$\ddot{b} + 2\dot{\Gamma}(t)\dot{b} + \omega_0^2(t)b = 0. \tag{1.3.11}$$

En prenant la fonction $b(t)$ sous la forme ci-dessous

$$b(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}\varepsilon(t), \tag{1.3.12}$$

et $\varepsilon(t)$, une fonction complexe avec la condition supplémentaire donnée par

$$e^{2\Gamma(t)}(\dot{\varepsilon}\varepsilon^* - \dot{\varepsilon}^*\varepsilon) = 2i, \tag{1.3.13}$$

où ε^* signifie le conjugué complexe de ε, ils obtiennent deux intégrales du mouvement $A(t)$ et $A^{\dagger}(t)$ linéaires et indépendantes.Ces dernières sont identifiées comme étant respectivement des opérateurs d'annihilation et de création vérifiant la relation de commutation suivante $\left[A(t), A^{\dagger}(t)\right] = 1$. Dodonov et *al* aboutissent, finalement, à la forme suivante de l'invariant $A(t)$ donnée par cette équation

$$A(t) = \frac{i}{\sqrt{2}}\left[\varepsilon(t)\hat{p} - \dot{\varepsilon}(t)e^{2\Gamma(t)}\hat{x}\right] + \frac{\delta(t)}{\sqrt{2}}, \tag{1.3.14}$$

avec

$$\delta(t) = -i \int f(\tau) e^{2\Gamma(\tau)} \varepsilon(\tau) d\tau. \tag{1.3.15}$$

Dodonov et *al* [12] se sont servis de la théorie des invariants introduite par Lewis et Riesenfeld. En imposant des conditions sur l'invariant, ils ont pu aboutir à une forme d'invariant qui jouera le rôle d'opérateur d'échelle. Ce dernier permet à son tour de construire les états cohérents de ce système.

Le prochain chapitre sera donc consacré aux définitions de base des états cohérents ainsi qu'aux notions fondamentales jugées utiles.

CHAPITRE 2

Etats cohérents en mécanique quantique hermitienne

2.1 Introduction

Les états cohérents quantiques aussi connus par états semi-classiques ont été introduits pour la première fois par Schrödinger en 1926 [2], dans le but de reproduire les solutions classiques d'un oscillateur harmonique, par la suite ces derniers ont été réintroduits par Glauber [4-6], Klauder [21-23] et Sudarshan [24] au début des années soixantes. La terminologie du mot «cohérent» trouve son origine dans la théorie de l'optique quantique qui a été mise en évidence par R.Glauber en 1963 (par exemple, rayonnement cohérent, sources émettant de manière cohérente) qui a montré le rôle important de ces derniers dans sa théorie. De nos jours, leur utilisation est diverse et nous les retrouvons dans différents domaines de la physique: physique nucléaire et atomique, physique de la matière condensée, théorie quantique des champs, cosmologie et astrophysique, etc.

Dans ce chapitre, nous allons présenter les définitions essentielles ainsi que les propriétés de base des états cohérents de l'oscillateur harmonique bosonique (étas cohérents standard).

Une étude de l'évolution de ces états cohérents au cours du temps sera, par la suite, discutée et nous terminerons ce chapitre par la théorie des états cohérents fermioniques.

2.2 Les états cohérents de l'oscillateur harmonique

L'oscillateur harmonique décrit un grand nombre de systèmes physiques, citons par exemple les vibrations des atomes d'une molécule autour de leur position d'équilibre, les oscillations des atomes ou ions d'un réseau cristallin. L'oscillateur harmonique intervient également dans l'étude du champ électromagnétique, c'est pourquoi l'étude détaillée de ce dernier en mécanique quantique est extrêmement importante du point de vue physique [25].

2.2.1 Définitions et propriétés élémentaires

Nous présentons dans cette section les définitions ainsi que les notions de base que nous jugeons utiles pour la suite du travail.

Soit H l'hamiltonien d'un oscillateur unidimensionnel de pulsation ω, $(\hbar = 1, m = 1)$

$$H = \frac{\hat{p}^2}{2} + \frac{1}{2}\omega^2\hat{x}^2, \tag{2.2.1}$$

où $\hat{p}$ et $\hat{x}$ sont, respectivement, les opérateurs d'impulsion et de position vérifiant la relation de commutation suivante.

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i. \tag{2.2.2}$$

Les opérateurs d'annihilation et de création associés à H sont écrits sous la forme suivante $(\hat{a} \equiv a)$

$$a = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x} + \frac{i}{\omega}\hat{p}\right), \qquad a^\dagger = \sqrt{\frac{\omega}{2}}\left(\hat{x} - \frac{i}{\omega}\hat{p}\right). \tag{2.2.3}$$

On peut réécrire notre hamiltonien en fonction de a et $a^\dagger$ sous la forme suivante

$$H = \omega(a^\dagger a + \frac{1}{2}). \tag{2.2.4}$$

Introduisons maintenant l'opérateur nombre de particules N qui est défini comme

$$N = a^\dagger a. \tag{2.2.5}$$

Les relations de commutation des opérateurs définis précédemment sont

$$\left[a, a^\dagger\right] = 1, \quad [N, a] = -a, \quad \left[N, a^\dagger\right] = a^\dagger, \tag{2.2.6}$$

les états propres normalisés $|n\rangle$ de H s'écrivent en fonction d'état du vide du système $|0\rangle$ comme suit

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(a^\dagger)^n |0\rangle, \tag{2.2.7}$$

ils obéissent aux relations de fermeture et d'orthogonalité données par

$$\sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = 1, \qquad \langle n \mid m\rangle = \delta_{nm}. \tag{2.2.8}$$

D'après le travail de Glauber [4-6] les états cohérents peuvent être construits à partir des trois définitions équivalentes[(1)] suivantes :

Première définition: Etat propre de l'opérateur d'annihilation

Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont définis comme états propres de l'opérateur d'annihilation a

$$a |\alpha\rangle = \alpha |\alpha\rangle, \quad \alpha \in \mathbb{C}. \tag{2.2.9}$$

Pour obtenir l'expression de ces états propres, le produit scalaire de l'état $|\alpha\rangle$ par le bra $\langle n|$ donne

$$\langle n \mid \alpha\rangle = \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \langle 0 \mid \alpha\rangle. \tag{2.2.10}$$

En utilisant la relation de fermeture, nous obtenons

$$\begin{aligned} |\alpha\rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n \mid \alpha\rangle, && (2.2.11)\\ &= \langle 0 \mid \alpha\rangle \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle, && (2.2.12) \end{aligned}$$

(1) On note que ces trois définitions sont équivalentes pour l'oscillateur harmonique.

la norme au carré du vecteur $|\alpha\rangle$ s'écrit ainsi

$$\begin{aligned}\langle \alpha \mid \alpha \rangle &= |\langle 0 \mid \alpha \rangle|^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|\alpha|^{2n}}{n!}, \\ &= |\langle 0 \mid \alpha \rangle|^2 \exp |\alpha|^2 . \qquad (2.2.13)\end{aligned}$$

Si l'état $|\alpha\rangle$ est normalisé c'est-à-dire $\langle \alpha \mid \alpha \rangle = 1$, nous pouvons évidemment définir sa phase en choisissant cette condition

$$\langle 0 \mid \alpha \rangle = \exp(-\frac{|\alpha|^2}{2}), \qquad (2.2.14)$$

De cette façon, les états cohérents de l'oscillateur harmonique s'écrivent sous la forme suivante

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle , \qquad (2.2.15)$$

et leurs conjugués hermitiques sont donnés par

$$\langle \alpha| = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha^*)^n}{\sqrt{n!}} \langle n| . \qquad (2.2.16)$$

Deuxième définition: Action de l'opérateur de déplacement sur l'état du vide

Les états cohérents peuvent être obtenus par l'action de l'opérateur de déplacement unitaire $D(\alpha)$ sur l'état du vide $|0\rangle$

$$D(\alpha) |0\rangle = |\alpha\rangle , \qquad (2.2.17)$$

où l'opérateur de déplacement $D(\alpha)$ est défini par:

$$D(\alpha) = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}, \qquad (2.2.18)$$

cet opérateur est unitaire

$$\begin{aligned} D^\dagger(\alpha) D(\alpha) &= D(\alpha) D^\dagger(\alpha) = \mathbf{1}, \qquad (2.2.19) \\ D^\dagger(\alpha) &= D(-\alpha) = D^{-1}(\alpha), \qquad (2.2.20)\end{aligned}$$

et satisfait les relations suivantes:

$$D^{-1}(\alpha) a D(\alpha) = a + \alpha, \qquad (2.2.21)$$

$$D^{-1}(\alpha)a^{\dagger}D(\alpha) = a^{\dagger} + \alpha^{*},$$

$$D(\alpha)D(\beta) = e^{\alpha\beta^{*}-\alpha^{*}\beta}D(\beta)D(\alpha), \tag{2.2.22}$$

$$D(\alpha+\beta) = D(\alpha)D(\beta)e^{i\,\mathrm{Im}(\alpha\beta^{*})}. \tag{2.2.23}$$

Pour montrer l'équivalence entre les deux définitions, nous commençons par la première définition. En appliquant $D^{-1}(\alpha)$ sur les deux membres de l'équation (2.2.9), nous obtenons

$$D^{-1}(\alpha)a\,|\alpha\rangle = \alpha D^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle\,, \tag{2.2.24}$$

d'autre part nous avons

$$\begin{aligned} D^{-1}(\alpha)a\,|\alpha\rangle &= D^{-1}(\alpha)aD(\alpha)D^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle\,, && (2.2.25)\\ &= (a+\alpha)D^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle\,, && (2.2.26)\\ &= aD^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle + \alpha D^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle\,, && (2.2.27) \end{aligned}$$

à partir des deux équations (2.2.24) et (2.2.27) nous déduisons que

$$a(D^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle) = 0, \tag{2.2.28}$$

ce qui implique que

$$D^{-1}(\alpha)\,|\alpha\rangle = |0\rangle\,, \tag{2.2.29}$$

ceci nous permet de retrouver la deuxième définition

$$D(\alpha)\,|0\rangle = |\alpha\rangle\,. \tag{2.2.30}$$

Troisième définition: Minimisation de la relation d'incertitude de Heisenberg

Les états cohérents peuvent être aussi définis comme étant des états qui minimisent la relation d'incertitude de Heisenberg $\left(\Delta x\Delta p \geq \frac{1}{2}\right)$, où les opérateurs position x et impulsion p sont donnés par

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{\frac{1}{2\omega}}(a^{\dagger}+a), && (2.2.31)\\ p &= i\sqrt{\frac{\omega}{2}}(a^{\dagger}-a). && (2.2.32) \end{aligned}$$

Les variances Δx et Δp s'écrivent comme suit

$$\Delta x = \sqrt{\langle\alpha|\, x^2 \,|\alpha\rangle - \langle\alpha|\, x \,|\alpha\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}, \tag{2.2.33}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle\alpha|\, p^2 \,|\alpha\rangle - \langle\alpha|\, p \,|\alpha\rangle^2} = \sqrt{\frac{\omega m}{2}}, \tag{2.2.34}$$

ainsi leur produit donne

$$\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}. \tag{2.2.35}$$

Citons maintenant quelques propriétés des états cohérents de l'oscillateur harmonique.

- Les états cohérents $|\alpha\rangle$ sont normalisés

$$\langle\alpha \mid \alpha\rangle = \mathbf{1}. \tag{2.2.36}$$

- Les états cohérents ne sont pas orthogonaux entre eux

$$\langle\beta \mid \alpha\rangle = \langle 0|\, D^\dagger(\beta) D(\alpha) \,|0\rangle \tag{2.2.37}$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\beta^{*n}\alpha^n}{n!} e^{-\frac{|\beta|^2}{2}} e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \tag{2.2.38}$$

$$= e^{\beta^*\alpha - \frac{|\beta|^2}{2} - \frac{|\alpha|^2}{2}} \neq 0. \tag{2.2.39}$$

- Ces états forment une base *surcomplète*

$$\frac{1}{\pi} \int |\alpha\rangle \langle\alpha|\, d^2\alpha = \mathbf{1}, \tag{2.2.40}$$

avec

$$d^2\alpha = d(\mathrm{Re}\,\alpha) d(\mathrm{Im}\,\alpha). \tag{2.2.41}$$

- Les états cohérents garantissent l'égalité $\Delta x \Delta p = \frac{1}{2}$ au cours du temps.

2.2.2 Evolution temporelle des états cohérents

L'évolution temporelle des états cohérents de l'oscillateur harmonique (hamiltonien du système indépendant du temps) est décrite par l'opérateur d'évolution donné par

$$U(t, t_0) = e^{-iH(t-t_0)} \tag{2.2.42}$$

L'état évolué s'écrit comme

$$|\alpha, t\rangle = U(t, t_0)\,|\alpha, t_0\rangle\,. \tag{2.2.43}$$

Si l'oscillateur harmonique est, à un instant intial $t_0 = 0$, dans un état $|\alpha, t_0 = 0\rangle = |\alpha\rangle$, alors pour un instant t quelconque nous aurons

$$\begin{aligned} |\alpha, t\rangle &= e^{-iHt}\,|\alpha\rangle & (2.2.44)\\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}e^{-i\omega(n+\frac{1}{2})t}\,|n\rangle \\ &= e^{-i\omega\frac{1}{2}t}e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}}\,|n\rangle\,, & (2.2.45)\end{aligned}$$

si nous posons

$$\alpha(t) = \alpha e^{-i\omega t}, \tag{2.2.46}$$

nous obtenons

$$|\alpha|^2 = \left|\alpha e^{-i\omega t}\right|^2, \tag{2.2.47}$$

ainsi, l'équation (2.2.43) devient

$$|\alpha, t\rangle = e^{-i\omega\frac{1}{2}t}\,|\alpha(t)\rangle\,. \tag{2.2.48}$$

Pour passer de $|\alpha\rangle$ à son état évolué[(1)] $|\alpha(t)\rangle$ nous devons remplacer α par $\alpha e^{-i\omega t}$, et multiplier le ket obtenu par le facteur de phase $e^{-i\omega\frac{1}{2}t}$ (ce facteur de phase n'a pas de conséquences physiques)[25]; cependant, un état cohérent reste toujours vecteur propre de l'opérateur d'anihilation a au cours du temps, avec la valeur propre $\alpha e^{-i\omega t}$

$$a\,|\alpha, t\rangle = \alpha e^{-i\omega t}\,|\alpha, t\rangle\,. \tag{2.2.49}$$

[(1)] Si l'évolué d'un état cohérent initial reste toujours état cohérent au cours du temps, on dit que l'évolution temporelle est stable.

Evolution de quelques grandeures physiques

En prenant l'équation (2.2.48) et en changeant α en $\alpha e^{-i\omega t}$ dans les équations (2.2.33) et (2.2.34), nous obtenons immédiatement les fluctuations de x et de p dans les états évolués $|\alpha(t)\rangle$

$$\Delta x = \sqrt{\langle\alpha(t)| x^2 |\alpha(t)\rangle - \langle\alpha(t)| x |\alpha(t)\rangle^2} = \sqrt{\frac{1}{2\omega}}, \tag{2.2.50}$$

$$\Delta p = \sqrt{\langle\alpha(t)| p^2 |\alpha(t)\rangle - \langle\alpha(t)| p |\alpha(t)\rangle^2} = \sqrt{\frac{\omega}{2}}, \tag{2.2.51}$$

ces dernières sont indépendantes du temps.

De même, on montre que l'énergie moyenne prise dans les états $|\alpha(t)\rangle$ est aussi indépendante du temps, elle est donnée par

$$\langle\alpha(t)| H |\alpha(t)\rangle = \hbar\omega \left[|\alpha|^2 + \frac{1}{2}\right]. \tag{2.2.52}$$

2.3 Les états cohérents fermioniques

Comme pour les états cohérents bosoniques, les états cohérents fermioniques sont définis comme états propres des opérateurs d'annihilation; cependant, en raison de la propriété anticommutative des opérateurs de Fermi, les valeurs propres correspondantes ne sont plus des nombres complexes ordinaires comme pour le cas des bosons, mais sont plutôt des valeurs propres anticommutables les unes avec les autres. Ces nombres complexes anticommutants particuliers sont connus sous le nom de nombres de Grassmann ou variables de Grassmann.

Aussi, nous présentons, dans cette section, quelques propriétés des variables de Grassman qui nous seront utiles dans la construction des états cohérents fermioniques. Comme les états cohérents bosoniques peuvent être considérés comme les états de vide déplacés dans l'espace des phases, nous introduisons de manière analogue l'opérateur de déplacement pour $N-$fermions et nous construisons les états cohérents appropriés.

2.3.1 Algèbre de Grassmann

Nous ne pouvons pas parler des états cohérents fermioniques sans définir quelques propriétés des variables anticommutatives introduites, historiquement, par Grassman puis développées par Berezin [26-27], qui les a introduites en physique.

Soit l'algèbre de Grassmann $\mathcal{G}$ générée par l'ensemble $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\xi_n\}$ tel que

$$\xi_i\xi_j + \xi_j\xi_i = 0, \quad \forall i, j = 1, 2, 3, ...n, \tag{2.3.1}$$

lorsque $i = j$, ces variables sont nilpotentes

$$\xi_i^2 = 0, \quad \xi_i^{*2} = 0. \tag{2.3.2}$$

Soit $f(\xi)$ un élément quelconque de l'ensemble $\{\xi_1, \xi_2, \xi_3, ...\xi_n\}$ où les ξ_i génèrent cette algèbre, tout élément $f(\xi)$ peut être représenté par [26]

$$f(\xi) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k_1}^{k_n} f^{k_1.....k_i}\xi_1...\xi_i, \tag{2.3.3}$$

où $f^{k_1.....k_i}$ sont des nombres (réels ou complexes).

Le conjugué hermitique renverse l'ordre de toutes les quantités fermioniques

$$\begin{aligned} (f(\xi)^*)^* &= f(\xi), & (2.3.4)\\ (f_1(\xi)f_2(\xi))^* &= f_2(\xi)^*f_1(\xi)^*, & (2.3.5)\\ (\alpha f(\xi))^* &= \alpha^* f(\xi)^*, & (2.3.6) \end{aligned}$$

avec α un nombre complexe.

En raison de la propriété d'anticommutation, il existe deux types de dérivées, la dérivée gauche $\frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_i}$ et la dérivée droite $\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_i}$ données, respectivement, par ces deux équations

$$\begin{aligned} \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial\xi_i}\xi_1\xi_2...\xi_n &= \delta_{1i}\xi_2...\xi_n - \delta_{2i}\xi_1\xi_3...\xi_n + ... + (-1)^{n-1}\delta_{ni}\xi_1\xi_2...\xi_{n-1}, & (2.3.7)\\ \xi_1\xi_2...\xi_n\frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial\xi_i} &= \delta_{ni}\xi_1\xi_2...\xi_{n-1}... + (-1)^{n-1}\delta_{1i}\xi_2...\xi_n. & (2.3.8) \end{aligned}$$

Pour calculer la dérivée gauche d'un monôme par rapport à la variable ξ_i, on place d'abord ξ_i à gauche (à l'aide des règles d'anti-commutation), puis on supprime cette variable. Si ξ_i est absente, la dérivée du monôme disparaît, citons alors quelques exemples

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_1}(\xi_1\xi_2\xi_3) = \xi_2\xi_3, \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_2}(\xi_1\xi_2\xi_3) = -\xi_1\xi_3, \tag{2.3.9}$$

$$\frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_2}(\xi_1\xi_3) = 0. \tag{2.3.10}$$

Nous tenons à mentionner dans ce qui suit que nous allons adopter la notation suivante $\frac{\partial}{\partial \xi_2}$ et la considérer seulement comme dérivée gauche.

Définissons maintenant l'intégration sur les variables de Grassmann, bien que cette intégration ainsi que la différenciation soient des opérations identiques telles que

$$\int d\xi_i \xi_1\xi_2...\xi_n \equiv \frac{\vec{\partial}}{\partial \xi_i}\xi_1\xi_2...\xi_n, \tag{2.3.11}$$

pour des cas plus simples ces intégrales se réduisent à

$$\begin{aligned} \int \xi_i d\xi_j &= \delta_{ij}, \quad \int \xi_i^* d\xi_j^* = \delta_{ij}, &(2.3.12)\\ \int d\xi &= 0, \quad \int d\xi^* = 0. &(2.3.13)\end{aligned}$$

2.3.2 Opérateurs fermioniques et variables de Grassmann

On considère les systèmes quantiques avec un nombre fini de N degrés de liberté fermioniques, soit l'espace de Hilbert correspondant défini comme étant le $N-$produit tensoriel de l'espace de Hilbert à deux dimensions [28]

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \otimes \mathcal{H}_2 \otimes \mathcal{H}_3 \otimes .....\mathcal{H}_N, \tag{2.3.14}$$

pour un degré de liberté $\mathcal{H}_i = \{|0\rangle_i, |1\rangle_i\}$. Ces systèmes sont caractérisés par les opérateurs d'annihilation et de création b_i et $b_i^\dagger$, $(i = 1, 2, 3......N)$ qui obéissent aux relations canoniques d'anticommutation données par

$$\begin{aligned} \left[b_i^\dagger, b_j\right]_+ &= b_i^\dagger b_j + b_j b_i^\dagger = \delta_{ij}, &(2.3.15)\\ [b_i, b_j]_+ &= 0, \left[b_i^\dagger, b_j^\dagger\right]_+ = 0. &(2.3.16)\end{aligned}$$

L'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ est engendré par les états propres de $b_i^\dagger b_i$

$$b_i^\dagger b_i \left|n_1 n_2 n_3 ....n_N\right\rangle = n_i \left|n_1 n_2 n_3 ....n_N\right\rangle \ \ , \ n_i = 0, 1, \tag{2.3.17}$$

avec

$$\left|n_1 n_2 n_3 ....n_N\right\rangle = \left|n_1\right\rangle_1 \otimes \left|n_2\right\rangle_2 \otimes \left|n_3\right\rangle_3 \otimes .... \left|n_N\right\rangle_N , \tag{2.3.18}$$

$\left|n_i\right\rangle$ étant un vecteur dans l'espace de Hilbert à un fermion $\mathcal{H}_i$ sur lequel les opérateurs b_i et $b_i^\dagger$ agissent via

$$b_i \left|0\right\rangle_i \ = \ 0, b_i \left|1\right\rangle_i = \left|0\right\rangle_i , \tag{2.3.19}$$

$$b_i^\dagger \left|0\right\rangle_i \ = \ \left|1\right\rangle_i , b_i^\dagger \left|1\right\rangle_i = 0. \tag{2.3.20}$$

Pour tout ensemble $\xi = \{\xi_i\}$ de variables de Grassmann, ξ_i anticommute avec tous les opérateurs fermioniques

$$[\xi_i, b_j]_+ = 0. \tag{2.3.21}$$

L'ordre de toutes les grandeurs fermioniques (les opérateurs d'échelles et les variables de Grassmann), est inversé lorsque on applique la conjugaison hermitienne, citons alors l'exemple suivant

$$(b_i \xi_j b_k^\dagger \xi_l^*)^\dagger = \xi_l b_k \xi_j^* b_i^\dagger . \tag{2.3.22}$$

2.3.3 Opérateur de déplacement

Définissons l'opérateur de déplacement unitaire $D(\xi)$ qui s'écrit comme [29]

$$D(\xi) = \exp\left(\sum_i (b_i^\dagger \xi_i - \xi_i^* b_i)\right). \tag{2.3.23}$$

Grâce à la propriété d'anticommutivité des nombres de Grassmann et lorsque ces derniers sont multipliés par des opérateurs d'annihilation ou de création fermioniques, ce produit devient commutatif avec les opérateurs fermioniques. Ainsi, les opérateurs $b_i^\dagger \xi_i$ et $\xi_j^* b_j$ commutent simplement pour $i \neq j$. Nous pouvons donc réécrire l'opérateur de déplacement sous la forme d'un produit d'exponentielles comme suit

$$\begin{aligned} D(\xi) &= \prod_i \exp(b_i^\dagger \xi_i - \xi_i^* b_i), && (2.3.24) \\ &= \prod_i \left[1 + b_i^\dagger \xi_i - \xi_i^* b_i + (b_i^\dagger b_i - \frac{1}{2})\xi_i^* \xi_i\right]. && (2.3.25) \end{aligned}$$

L'opérateur de déplacement est unitaire c'est-à-dire

$$\begin{aligned} D(\xi)D^\dagger(\xi) &= \prod_i \exp(b_i^\dagger \xi_i - \xi_i^* b_i)\exp(\xi_i^* b_i - b_i^\dagger \xi_i) && (2.3.26) \\ &= \prod_i \left[1 + b_i^\dagger \xi_i - \xi_i^* b_i + (b_i^\dagger b_i - \frac{1}{2})\xi_i^* \xi_i\right]\left[1 + \xi_i^* b_i - b_i^\dagger \xi_i + (b_i^\dagger b_i - \frac{1}{2})\xi_i^* \xi_i\right] \\ &= \mathbf{I} && (2.3.27) \\ &= D^\dagger(\xi)D(\xi) && (2.3.28) \end{aligned}$$

Ainsi, l'opérateur d'annihilation b_n commute avec tous les opérateurs $b_i^\dagger \xi_i$ et $\xi_i^* b_i$ lorsque $n \neq i$, et nous pouvons donc calculer l'opérateur d'annihilation déplacé en ignorant tous les termes sauf le $n$ième

$$\begin{aligned} D^\dagger(\xi) b_n D(\xi) &= \prod_i \exp(\xi_i^* b_i - b_i^\dagger \xi_i) b_n \prod_j \exp(b_j^\dagger \xi_j - \xi_j^* b_j) && (2.3.29) \\ &= \exp(\xi_n^* b_n - b_n^\dagger \xi_n) b_n \exp(b_n^\dagger \xi_n - \xi_n^* b_n) && (2.3.30) \\ &= (1 - b_n^\dagger \xi_n - \frac{1}{2}\xi_n^* b_n b_n^\dagger \xi_n) b_n (1 + b_n^\dagger \xi_n - \frac{1}{2} b_n^\dagger \xi_n \xi_n^* b_n) && (2.3.31) \\ &= b_n + \xi_n. && (2.3.32) \end{aligned}$$

Notons que, pour le passage de l'équation (2.3.30) vers l'équation (2.3.31), nous avons utilisé l'identité de Baker-Hausdorff

$$e^{A+B} = e^A e^B e^{-\frac{1}{2}[A,B]}, \tag{2.3.33}$$

où A et B sont deux opérateurs satisfaisant la condition suivante

$$[[A,B], A] = [[A,B], B] = 0. \tag{2.3.34}$$

De la même manière, nous obtenons pour $b_n^\dagger$

$$D^{\dagger}(\xi)b_n^{\dagger}D(\xi) = \prod_i \exp(\xi_i^* b_i - b_i^{\dagger}\xi_i)b_n^{\dagger}\prod_j \exp(b_j^{\dagger}\xi_j - \xi_j^* b_j) \quad (2.3.35)$$

$$= b_n^{\dagger} + \xi_n^*. \quad (2.3.36)$$

2.3.4 Construction des états cohérents fermioniques

Pour tout ensemble $\xi = \{\xi_i\}$ des nombres de Grassmann, nous définissons l'état cohérent normalisé $|\xi\rangle$ comme action de l'opérateur de déplacement sur l'état du vide du système [29]

$$|\xi\rangle = D(\xi)\,|0\rangle\,. \quad (2.3.37)$$

En utilisant la relation de déplacement donnée par l'équation (2.3.32), nous pouvons montrer que l'état cohérent est l'état propre de tout opérateur d'annihilation

$$\begin{aligned} b_n\,|\xi\rangle &= b_n D(\xi)\,|0\rangle \quad (2.3.38)\\ &= D(\xi)D(\xi)^{\dagger}b_n D(\xi)\,|0\rangle\\ &= D(\xi)(b_n + \xi_n)\,|0\rangle\\ &= D(\xi)\xi_n\,|0\rangle\\ &= \xi_n D(\xi)\,|0\rangle\\ &= \xi_n\,|\xi\rangle\,. \end{aligned}$$

A l'aide de l'expression de l'opérateur de déplacement (2.3.24), on peut écrire l'état cohérent sous la forme suivante

$$|\xi\rangle = D(\xi)\,|0\rangle = \prod_i \left[1 + b_i^{\dagger}\xi_i - \xi_i^* b_i + (b_i^{\dagger}b_i - \frac{1}{2})\xi_i^*\xi_i\right]|0\rangle\,, \quad (2.3.39)$$

$$= \prod_i \left[1 + b_i^{\dagger}\xi_i - \frac{1}{2}\xi_i^*\xi_i\right]|0\rangle\,,$$

$$= \exp(\sum_i (b_i^{\dagger}\xi_i - \frac{1}{2}\xi_i^*\xi_i)\,|0\rangle\,. \quad (2.3.40)$$

L'adjoint des états cohérents $|\xi\rangle$ s'exprime par

$$\langle\xi| = \langle 0| D^\dagger(\xi) = \langle 0| \exp(\sum_i (\xi_i^* b_i - \frac{1}{2}\xi_i^*\xi_i). \tag{2.3.41}$$

Le produit scalaire de deux états cohérents $|\xi\rangle$ et $|\zeta\rangle$ est donné par

$$\langle\zeta \mid \xi\rangle = \exp\left(\sum_i \left[\zeta_i^*\xi_i - \frac{1}{2}(\zeta_i^*\zeta_i + \xi_i^*\xi_i)\right]\right). \tag{2.3.42}$$

Les états $|\xi\rangle$ sont normalisés

$$\langle\xi \mid \xi\rangle = 1. \tag{2.3.43}$$

Les états cohérents fermioniques $|\xi\rangle$ forment une base surcomplète et la résolution de l'identité nous donne

$$I = \int d\mu(\xi,\xi^*) \, |\xi\rangle \langle\xi| \, , \tag{2.3.44}$$

avec

$$d\mu(\xi,\xi^*) = \prod_i^N d\xi_i^* d\xi_i. \tag{2.3.45}$$

Dans le cas d'un degré de liberté ($N = 1$) [28],[30], les variables de Grassmann agissent sur les états $|n_i\rangle$ comme suit

$$\xi\,|0\rangle = |0\rangle\,\xi \qquad \xi\,|1\rangle = -\,|1\rangle\,\xi. \tag{2.3.46}$$

L'opérateur de déplacement unitaire $D(\xi)$ s'écrit

$$\begin{aligned} D(\xi) &= e^{b^\dagger\xi - \xi^* b}, \\ D(\xi) &= 1 + b^\dagger\xi - \xi^* b + (b^\dagger b - \frac{1}{2})\xi^*\xi, \end{aligned} \tag{2.3.47}$$

et les états cohérents s'expriment, pour un seul degré de liberté fermionique, par

$$|\xi\rangle = D(\xi)\,|0\rangle\,, \tag{2.3.48}$$

$$= e^{b^\dagger\xi - \xi^* b}\,|0\rangle\,, \tag{2.3.49}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi} e^{b^\dagger\xi}\,|0\rangle\,, \tag{2.3.50}$$

$$= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|0\rangle - \xi\,|1\rangle), \tag{2.3.51}$$

où l'adjoint hermitique de $|\xi\rangle$ est donné par

$$\begin{aligned} \langle\xi| &= \langle 0| D^{\dagger}(\xi), \\ &= e^{-\frac{1}{2}\xi^{*}\xi}(\langle 0| - \xi^{*}\langle 1|). \end{aligned} \tag{2.3.52}$$

Dans le cas d'un degré de liberté ces états restent normalisés

$$\langle \xi \mid \xi \rangle = 1, \tag{2.3.53}$$

et ils fournissent une résolution de l'identité **1** via l'équation suivante

$$I = \int d\xi^{*} d\xi \, |\xi\rangle \langle \xi| \,, \tag{2.3.54}$$

$$\begin{aligned} &= \int d\xi^{*} d\xi \left[|0\rangle \langle 0| - \xi |1\rangle \langle 0| + \xi^{*} |0\rangle \langle 1| - \xi^{*}\xi \mathbf{1} \right], \\ &= \mathbf{1}. \end{aligned} \tag{2.3.55}$$

2.4 Etats cohérents pour des hamiltoniens hermitiens dépendants du temps

Une méthode de construction d'états cohérents pour un système quantique dynamique (c'est-à-dire un système décrit par une équation du type $i\frac{\partial|\psi(t)\rangle}{\partial t} = H(t)\,|\psi(t)\rangle$) basée sur l'emploi des intégrales du mouvement, a été proposée par Malkin et Man'ko [31]. Cette méthode a été utilisée pour l'étude détaillée des systèmes quantiques multidimensionnels avec des hamiltoniens dépendants du temps et de forme quadratique. Cette dernière a été aussi utilisée pour dériver de nouvelles équations pour la fonction de Green et la matrice de densité d'un système quantique arbitraire [16]. Nous citons ainsi le cas de l'oscillateur anharmonique étudié à l'aide des intégrales du mouvement. Pour cela, nous présenterons dans ce qui suit la méthode des invariants pour la construction des états cohérents bosoniques et fermioniques dépendants du temps.

2.4.1 Etats cohérents pour des systèmes bosoniques dépendants du temps

Malkin, Man'ko et *al* ,[12],[14],[15],[19] se sont proposés de construire deux opérateurs invariants $A(t)$ et $A^{\dagger}(t)$ non-hermitiens associés à un système bosonique décrit par un hamiltonien hermitien $H(t)$ dépendant explicitement du temps, ces deux opérateurs sont régis par l'équation d'invariance qui s'écrit ($\hbar = 1, m = 1$)

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[A(t), H(t)\right] = 0, \tag{2.4.1}$$

$$\frac{\partial A^{\dagger}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[A^{\dagger}(t), H(t)\right] = 0. \tag{2.4.2}$$

Ces opérateurs satisfont ainsi la relation de commutation suivante

$$\left[A(t), A^{\dagger}(t)\right] = 1. \tag{2.4.3}$$

Les états cohérents bosoniques dépendants du temps sont définis comme des fonctions propres de l'opérateur d'annihilation $A(t)$ qui s'expriment par

$$A(t)\left|\alpha, t\right\rangle = \alpha\left|\alpha, t\right\rangle. \tag{2.4.4}$$

Puisque $A(t)$ est un invariant alors ses valeurs propres sont indépendantes du temps. Nous pouvons également définir ces états $\left|\alpha, t\right\rangle$ comme l'action de l'opérateur de déplacement sur l'état du vide du système

$$\left|\alpha, t\right\rangle = D(\alpha, t)\left|0, t\right\rangle, \tag{2.4.5}$$

où

$$D(\alpha, t) = \exp\left[\alpha A^{\dagger}(t) - \alpha^{*} A(t)\right], \tag{2.4.6}$$

et l'état du vide $\left|0, t\right\rangle$ est défini par l'équation donnée par

$$A(t)\left|0, t\right\rangle = 0. \tag{2.4.7}$$

Etats cohérents d'un oscillateur amorti avec des paramètres dépendants du temps

Nous traitons maintenant le système de l'oscillateur amorti avec des paramétres dépendants du temps que nous avons déja discuté dans le premier chapitre du manuscrit, rappellons l'expression de l'hamiltonien du système qui s'écrit comme

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2} e^{-2\Gamma(t)} + \frac{1}{2}\omega_0^2(t) e^{2\Gamma(t)} \hat{x}^2 - f(t) e^{2\Gamma(t)} \hat{x}. \tag{2.4.8}$$

Les états cohérents de ce système sont définis comme des fonctions propres de l'opérateur d'annihilation $A(t)$ (qui est un opérateur invariant) donné par l'équation (1.3.14). Pour obtenir les expressions explicites de ces états, il faut résoudre le système d'équations suivant

$$A(t) \left|\alpha, t\right\rangle = \alpha \left|\alpha, t\right\rangle , \tag{2.4.9}$$

$$A^{\dagger}(t) \left|\alpha, t\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}|\alpha|} \frac{\partial}{\partial \alpha} e^{\frac{1}{2}|\alpha|} \left|\alpha, t\right\rangle , \tag{2.4.10}$$

nous obtenons alors les états cohérents $|\alpha, t\rangle$ normalisés

$$\left|\alpha, t\right\rangle = \frac{1}{(\pi\epsilon^2)^{\frac{1}{4}}} \exp \left[\begin{array}{c} \frac{i\dot{\varepsilon}}{2\epsilon} e^{2\Gamma(t)} x^2 + \frac{\sqrt{2}}{\epsilon}\alpha x - \frac{\epsilon^*}{2\epsilon}\alpha^2 - \frac{1}{2}\left|\alpha\right|^2 - \frac{x\delta}{\epsilon} - \frac{\epsilon^*}{4\epsilon}\delta^2 - \frac{1}{4}\left|\delta\right|^2 \\ + \frac{\alpha}{\sqrt{2}}(\delta^* + \frac{\epsilon^*}{\epsilon}\delta) - \frac{i}{2}\int \mathrm{Im}(\delta \dot{\delta}^*) d\tau \end{array} \right]. \tag{2.4.11}$$

où $\delta(t)$ et $\epsilon(t)$ sont des fonctions complexes dépendantes du temps. Ces états cohérents peuvent être aussi obtenus à partir de l'action de l'opérateur de déplacement sur l'état du vide $|0, t\rangle$, il s'ensuit donc

$$\begin{aligned} \left|\alpha, t\right\rangle &= D(\alpha) \left|0, t\right\rangle , && (2.4.12) \\ &= e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left|n, t\right\rangle , && (2.4.13) \end{aligned}$$

avec $|n, t\rangle$ qui s'écrit

$$\left|n, t\right\rangle = \sqrt{\frac{1}{n!}\left(\frac{\epsilon^*}{2\epsilon}\right)^n} \mathbf{H}_n\left(\frac{x + \mathrm{Re}(\epsilon^*\delta)}{|\epsilon|}\right) \left|0, t\right\rangle , \tag{2.4.14}$$

où $\mathbf{H}_n(x)$ est le polynôme d'Hermite. Les états cohérents satisfont les relations standard suivantes

$$\left\langle \alpha \mid \beta \right\rangle = \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left|\alpha\right|^2 - \frac{1}{2}\left|\beta\right|^2 + \alpha^*\beta \right\} , \tag{2.4.15}$$

$$\frac{1}{\pi}\int |\alpha\rangle\langle\alpha|\, d(\operatorname{Re}\alpha)d(\operatorname{Im}\alpha) = \mathbf{1}. \tag{2.4.16}$$

2.4.2 Etats cohérents pour des systèmes fermioniques dépendants du temps

Dans le cas fermionique et par analogie avec le sytème bosonique, nous considérons deux intégrales du mouvement $A(t)$ et $A^{\dagger}(t)$ régies, à leur tour, par l'équation de Liouville-Von Neumann ($\hbar = 1, m = 1$)

$$\begin{aligned} \frac{\partial A(t)}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[A(t), H(t)\right] &= 0, && (2.4.17)\\ \frac{\partial A^{\dagger}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i}\left[A^{\dagger}(t), H(t)\right] &= 0, && (2.4.18)\end{aligned}$$

ces opérateurs satisfont plutôt à l'algèbre des fermions

$$\left[A(t), A^{\dagger}(t)\right]_{+} = 1, \tag{2.4.19}$$

$$A^{2}(t) = 0, \quad A^{\dagger^{2}}(t) = 0. \tag{2.4.20}$$

Les états propres de l'opérateur invariant-annihilation $A(t)$ représentent les états cohérents fermioniques dépendants du temps de notre système, avec la valeur propre ξ telle que

$$A(t)\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle = \xi\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle \tag{2.4.21}$$

Comme pour le système bosonique, $A(t)$ est un invariant dont les valeurs propres sont indépendantes du temps.

L'expression de l'opérateur de déplacement pour le système fermionique est donnée par

$$D(\xi, t) = e^{A^{\dagger}(t)\xi - \xi^{*}A(t)}, \tag{2.4.22}$$

tandis que son action sur l'état du vide du système nous permet de construire les états cohérents fermioniques dépendants du temps qui s'écrivent ainsi

$$\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle = D(\xi, t)\left|\psi_{0}(t)\right\rangle, \tag{2.4.23}$$

l'état du vide $|\psi_0(t)\rangle$ est défini par l'équation suivante

$$A(t)\,|\psi_0(t)\rangle = 0. \tag{2.4.24}$$

L'action de l'opérateur de création $A^\dagger(t)$ sur l'état du vide donne

$$A^\dagger(t)\,|\psi_0(t)\rangle = |\psi_1(t)\rangle\,. \tag{2.4.25}$$

En tenant en compte que $|\psi_0(t)\rangle$ et $|\psi_1(t)\rangle$ forment une base normalisée, nous avons

$$\left\langle \psi_i(t) \mid \psi_j(t)\right\rangle = \delta_{ij} \quad \text{avec} \quad i,j=0,1 \tag{2.4.26}$$

$$|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)| + |\psi_1(t)\rangle\,\langle\psi_1(t)| = \mathbf{1}. \tag{2.4.27}$$

L'action des variables de Grassmann sur les états $|\psi_i(t)\rangle$ est donnée par

$$\xi\,|\psi_0(t)\rangle = |\psi_0(t)\rangle\,\xi, \qquad \xi\,|\psi_1(t)\rangle = -\,|\psi_1(t)\rangle\,\xi. \tag{2.4.28}$$

En développant l'expression de l'opérateur de déplacement donné par l'équation (2.4.22), nous pouvons réécrire l'état $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ sous la forme suivante

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|\psi_0(t)\rangle - \xi\,|\psi_1(t)\rangle). \tag{2.4.29}$$

Notons que tant que $A(t)$ est un invariant, les états cohérents $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ réprésentent la solution de l'équation de Schrödinger multipliés par un facteur de phase décrit par

$$|\psi(t)\rangle = e^{i\alpha_\xi}\left|\psi_\xi(t)\right\rangle, \tag{2.4.30}$$

Ce facteur peut être obtenu à partir de l'équation de Schrödinger et de la condition de normalisation, il s'écrit comme

$$\frac{d\alpha_\xi}{dt} = i\left\langle\psi_\xi(t)\right|\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_\xi(t)\right\rangle - \left\langle\psi_\xi(t)\right|H(t)\left|\psi_\xi(t)\right\rangle. \tag{2.4.31}$$

Cette partie de la thèse a été consacrée essentiellement à la présentation de la théorie des invariants ainsi qu'aux notions fondamentales que posséde la théorie des états cohérents dépendants et indépendants du temps. À cet égard, nons avons présenté la théorie des invariants introduite par Lewis et Riesenfeld et par la suite nous avons exposé la méthode des invariants de DMMT pour la construction des états cohérents bosoniques et fermioniques dépendants du temps.

CHAPITRE 3 La théorie quantique $\mathcal{PT}$ symétrique et pseudo-hermitienne

3.1 Introduction

L'existence de la condition d'hermiticité remonte aux premiers jours de la mécanique quantique. Celle-ci est exprimée par l'équation $H = H^{\dagger}$ où le symbole de conjugaison hermitienne de Dirac $\dagger$ représente les opérations combinées de transposition matricielle et de conjugaison complexe. Cette condition de symétrie mathématique est physiquement obscure mais très pratique car elle implique que les valeurs propres de H sont réelles et que l'opérateur d'évolution temporelle $\exp(-iHt)$ est unitaire.

Bien que l'hermiticité soit le meilleur moyen pour garantir les exigences de la mécanique quantique, principalement la réalité du spectre, cette exigence de l'hermiticité de l'hamiltonien représente une grande restriction dans le domaine d'application pour une théorie si prometteuse telle que la mécanique quantique. N'y aurait-il pas moyen d'étendre cette théorie sans violer aucun des axiomes physiques de la mécanique quantique ?

Les hamiltoniens non hermitiens sont traditionnellement utilisés pour décrire les processus dissipatifs, tels que le phénomène de désintégration radioactive.

En se basant sur un calcul numérique, Bender et ses collaborateurs ont réussi en 1998 [8] à prouver que la famille d'hamiltoniens non hermitiens définie par

$$H = \hat{p}^2 + \hat{x}^2(ix)^\nu \text{ avec } \nu \in R, \tag{3.1.1}$$

possède un spectre énergétique réel pour $\nu \geq 0$ et complexe pour $\nu < 0$. La réalité du spectre est due à l'invariance de symétrie par rapport aux opérations simultanées de parité et de renversement du sens du temps, cette opération est appelée la $\mathcal{PT}$ symétrie et ces hamiltoniens sont dits $\mathcal{PT}$ symétriques. Il a été montré plus tard que la condition de $\mathcal{PT}$ symétrie de l'hamiltonien n'est pas une condition suffisante pour la réalité du spectre, car il faudrait aussi s'assurer que les fonctions propres de l'hamiltonien associée sont aussi invariantes par l'opération $\mathcal{PT}$ **.**

En essayant de résoudre des problèmes qui se posaient dans la quantification de l'électrodynamique et dans la théorie quantique des champs où les états de norme négative apparaissent comme une conséquence de la renormalisation, Lee, Wick et Sudarshan [33-34] ont fait appel au concept de la pseudo-Hermiticité introduit dans les années 40 par Dirac et Pauli [10].

Ainsi, en 1992 la notion de quasi-Hermiticité a été discutée en détail par Scholtz et al [35]; dans leur papier pertinent, ils ont été les premiers à montrer comment construire une transformation de similarité qui met en correspondance les opérateurs Hermitiques et les opérateurs quasi-Hermitiques correspondants et aussi les premiers à considérer les transformations correspondantes des produits scalaires de l'espace de Hilbert.

Plus tard en 2002, Mostafazadah a montré [9],[38-39], qu'il existait des familles d'hamiltoniens qui ne sont ni hermitiques ni $\mathcal{PT}$ symétriques mais possèdent des spectres réels et il a confirmé aussi l'existence d'hamiltoniens $\mathcal{PT}$ symétriques dont le spectre n'est pas réel. Ce qui lui a permis de conclure que la $\mathcal{PT}$ -symétrie n'est ni suffisante ni nécessaire pour garantir la réalité du spectre; dans ce contexte Mostafazadah, a présenté une alternative à la mécanique quantique conventionnelle, dans laquelle les hamiltoniens sont dits pseudo-hermitiens.

Il a été montré que ces systèmes pseudo-hermitiens se réduisent à des systèmes non hermitiens $\mathcal{PT}$ symétriques dans un cas particulier que nous discuterons plus tard. Dans de tels systèmes pseudo-hermitiens, les valeurs propres sont réelles ou apparaissent comme des paires conjuguées l'une de l'autre [43]. Cependant, les vecteurs propres de H seuls ne forment pas un ensemble complet de fonctions orthonormales et peuvent ne pas avoir de normes définies positives par rapport au produit scalaire standard.

3.2 $\mathcal{PT}$ symetrie

Définition: Un hamiltonien H est dit $\mathcal{PT}$-symétrique s'il est invariant par la transformation $\mathcal{PT}$ c'est-à-dire qu'il vérifie la relation suivante [36]

$$H^{\mathcal{PT}} = (\mathcal{PT})H(\mathcal{PT})^{-1} = H, \tag{3.2.1}$$

à partir de cette dernière relation on en déduit que

$$[H, \mathcal{PT}] = 0, \tag{3.2.2}$$

où $\mathcal{P}$ est l'opérateur parité ou opérateur de réflexion spatiale, et $\mathcal{T}$ est l'opérateur renversement du temps.

L'opérateur parité $\mathcal{P}$

L'action de l'opérateur $\mathcal{P}$ sur l'état $|\overrightarrow{r}\rangle$ s'exprime par

$$\mathcal{P}\,|\overrightarrow{r}\rangle = |-\overrightarrow{r}\rangle\,, \tag{3.2.3}$$

En appliquant l'opérateur $\mathcal{P}^2$ sur le vecteur $|\overrightarrow{r}\rangle$ on retrouve le même état

$$\mathcal{P}^2\,|\overrightarrow{r}\rangle = \mathcal{P}\,|-\overrightarrow{r}\rangle = |\overrightarrow{r}\rangle \tag{3.2.4}$$

ce qui implique que l'opérateur $\mathcal{P}^2$ est l'opérateur identité. Comme

$$\mathcal{P}\mathcal{P}^{-1} = \mathbf{1}, \tag{3.2.5}$$

nous en déduisons que

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}. \tag{3.2.6}$$

Le conjugué hermitique de l'équation (3.2.3) donne

$$\langle -\overrightarrow{r}| = \langle \overrightarrow{r}|\,\mathcal{P}^{\dagger}, \tag{3.2.7}$$

donc la norme de l'états $|-\overrightarrow{r}\rangle = \mathcal{P}\,|\overrightarrow{r}\rangle$ conduit à

$$\mathcal{P}^{\dagger}\mathcal{P} = \mathbf{1}$$

sachant que $\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1}$, nous avons

$$\mathcal{P} = \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{\dagger}. \tag{3.2.8}$$

L'opérateur $\mathcal{P}$ agit sur les opérateurs position $\hat{x}$ et impulsion p en inversant leur signe à savoir [36]

$$\mathcal{P}\hat{x}\mathcal{P} = -\hat{x}, \quad \mathcal{P}\hat{p}\mathcal{P} = -\hat{p}, \tag{3.2.9}$$

et son action sur un état quelconque $|\psi\rangle$ est donnée par

$$\mathcal{P}\,|\psi\rangle = S\psi \tag{3.2.10}$$

où S est une matrice qui représente l'opérateur parité $\mathcal{P}$ et ψ un vecteur colonne qui represenrte $|\psi\rangle$.

L'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$

L'opérateur de renversement du temps $\mathcal{T}$ est un opérateur antilinéaire(1); son action sur les opérateurs position $\hat{x}$, impulsion $\hat{p}$ et le nombre complexe imaginaire pur i est donné comme suit [36]

$$\mathcal{T}\hat{x}\mathcal{T} = x\,, \quad \mathcal{T}\hat{p}\mathcal{T} = -\hat{p}, \quad \mathcal{T}i\mathbf{1}\mathcal{T} = -i\mathbf{1}. \tag{3.2.11}$$

On peut décomposer l'opérateur $\mathcal{T}$ comme produit de deux opérateurs

$$\mathcal{T} = UK, \tag{3.2.12}$$

(1) un opérateur A est dit antilinéaire si quels que soient les kets$|\psi_1\rangle$ et $|\psi_2\rangle$ de l'espace dans lequel il agit, on a $A[\lambda|\psi_1\rangle + \gamma|\psi_2\rangle] = \lambda^* A|\psi_1\rangle + \gamma^* A|\psi_2\rangle\ \forall\lambda, \gamma \in \mathbb{C}$.

où U est un opérateur unitaire et K , l'opérateur de conjugaison complexe qui transforme toutes les quantités à droite en leurs complexes conjuguées. Par exemple, les actions de $\mathcal{T}$ sur un état $|\psi\rangle$ et sur un opérateur A sont telles que :

$$\begin{aligned} \mathcal{T}|\psi\rangle &= UK|\psi\rangle = U|\psi\rangle^*, && (3.2.13)\\ \mathcal{T}A &= UKA = UA^*. && (3.2.14) \end{aligned}$$

L'une des propriétés importantes que possède l'opérateur $\mathcal{T}$ est l'anti-unitarité, c'est-à-dire que $\mathcal{T}$ satisfait à la relation suivante

$$\langle \mathcal{T}\phi|\mathcal{T}\psi\rangle = \langle\phi|\psi\rangle^* = \langle\psi|\phi\rangle\,. \tag{3.2.15}$$

Le fait que $\mathcal{T}$ soit un opérateur de réflexion, implique que l'action de $\mathcal{T}$ deux fois sur un état $|\psi\rangle$ laisse ce dernier inchangé à une phase près [39], à savoir

$$\begin{aligned} \mathcal{T}^2|\psi\rangle &= e^{i\varphi}|\psi\rangle, && (3.2.16)\\ &= UKUK|\psi\rangle, && (3.2.17)\\ &= UKU|\psi\rangle^*, && (3.2.18)\\ &= UU^*K|\psi\rangle^*, && (3.2.19)\\ &= UU^*|\psi\rangle, && (3.2.20) \end{aligned}$$

donc

$$e^{i\varphi} = UU^*, \tag{3.2.21}$$

En prenant le transposé de l'équation (3.2.21), on obtient donc

$$e^{i\varphi} = U^\dagger U^t, \tag{3.2.22}$$

la propriété de l'unitarité de U, c'est-à-dire $U^\dagger U = UU^\dagger = \mathbf{1}$, conduit à

$$U^t = Ue^{i\varphi}. \tag{3.2.23}$$

La transposée de l'équation (3.2.23) donne

$$U = U^t e^{i\varphi}, \tag{3.2.24}$$

En remplaçant la relation (3.2.23) dans (3.2.24), nous obtenons

$$U = U e^{2i\varphi} \Longrightarrow e^{2i\varphi} = 1, \tag{3.2.25}$$

donc

$$e^{2i\varphi} = 1, \tag{3.2.26}$$

soit

$$e^{i\varphi} = \pm 1, \tag{3.2.27}$$

finalement

$$\mathcal{T}^2 |\psi\rangle = \pm |\psi\rangle, \tag{3.2.28}$$

c'est-à-dire que

$$\mathcal{T}^2 = \pm \mathbf{1}. \tag{3.2.29}$$

Il est important de noter que $\mathcal{T}^2 = \mathbf{1}$ correspond au cas d'une symétrie paire (cas bosonique) et $\mathcal{T}^2 = -\mathbf{1}$ correspond au cas d'une symétrie impaire (cas fermionique). Dans le cas d'une symétrie impaire, l'opérateur $\mathcal{T} = UK$ est donné explicitement par [40]

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} i\sigma_2 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & i\sigma_2 & 0. & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & . & .0 \\ 0 & . & . & 0 & i\sigma_2 \end{pmatrix} K, \tag{3.2.30}$$

c'est-à-dire que tous les termes diagonaux sont égaux à $i\sigma_2$ et les termes non-diagonaux nuls.

Tandis que dans le cas d'une symétrie paire, $\mathcal{T}$ est donné par [39]

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & . & . & 0 \\ 0 & \sigma_1 & 0. & . & . \\ . & 0 & . & 0 & . \\ . & . & 0 & . & .0 \\ 0 & . & . & 0 & \sigma_1 \end{pmatrix} K, \tag{3.2.31}$$

où tous les termes diagonaux sont égaux à σ_1 et les termes non-diagonaux nuls, notons que $\sigma_1$et σ_2 représentent les matrices de Pauli.

Nous présentons maintenant deux théorèmes importants permettant de mieux comprendre le formalisme de la théorie quantique $\mathcal{PT}-$symétrique.

Théorème 1 [36]

Si l'hamiltonien H est un opérateur non hermitien et invariant sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$, ce dernier possède un spectre constitué de paires d'énergies complexes, conjuguée l'une de l'autre.

Théorème 2 [36]

Les valeurs propres d'un hamiltonien non hermitien $\mathcal{PT}-$symétrique sont réelles si ses fonctions propres sont invariantes sous l'action de l'opérateur $\mathcal{PT}$.

On déduit à partir de ces deux théorèmes que la $\mathcal{PT}-$symétrie d'un hamiltonien n'implique pas forcément la réalité de ses valeurs propres, cependant si ces fonctions propres sont aussi $\mathcal{PT}-$symétriques, les valeurs propres qui lui correspondent sont réelles, dans ce cas la $\mathcal{PT}-$symétrie est dite non brisée. Il existe des états propres de l'hamiltonien $\mathcal{PT}-$symétrique qui ne sont pas états propres de l'opérateur $\mathcal{PT}$, dans ce cas, la $\mathcal{PT}-$symétrie est dite brisée. Notons qu'elle est appellée partiellement brisée lorsque le spectre d'énergie est constitué d'une partie réelle et d'une autre partie de paires complexes conjuguées l'unes de l'autre, par contre, si tout le spectre d'énergie est complexe, alors, celle-ci est dite totalement brisée.

3.2.1 $\mathcal{PT}$-produit scalaire

Il est bien connu que l'une des propriétés fondamentales pour qu'une théorie quantique soit valable est que la norme d'un vecteur dans l'espace de Hilbert doit être positive. De plus, le produit scalaire de deux vecteurs quelconques dans l'espace de Hilbert doit être constant au cours de l'évolution du temps. Faudrait-il maintenant garantir que les hamiltoniens possédant une $\mathcal{PT}-$symétrie non brisée peuvent décrire la dynamique de systèmes physiques réels. Dans ce but, Bender [36] a introduit, dans un premier temps, un produit scalaire dit "$\mathcal{PT}-$produit scalaire" associé aux hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques défini par

$$\begin{aligned} \langle\varphi_1|\varphi_2\rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_c dx\,[\mathcal{PT}\varphi_1(x)]\,\varphi_2(x), && (3.2.32)\\ &= \int_c dx\varphi_1^*(-x)\varphi_2(x), && (3.2.33) \end{aligned}$$

où c est un certain contour défini dans le plan complexe qui peut être choisi sur l'axe réel. Le $\mathcal{PT}$-produit scalaire pour les fonctions propres $|\psi_n\rangle$ de H est donc donné par

$$\begin{aligned} \langle\psi_n|\psi_m\rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_c dx\,[\mathcal{PT}\psi_n(x)]\,\psi_m(x), && (3.2.34)\\ &= (-1)^n\delta_{nm}, && (3.2.35) \end{aligned}$$

cependant, quand $m = n$, les normes de ces fonctions propres dans ce produit scalaire s'expriment par

$$\begin{aligned} \langle\psi_n|\psi_n\rangle_{\mathcal{PT}} &= \int_c dx\,[\mathcal{PT}\psi_n(x)]\,\psi_n(x), && (3.2.36)\\ &= (-1)^n, && (3.2.37) \end{aligned}$$

et la relation de fermeture s'écrit comme suit

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\,[\mathcal{PT}\psi_n(x)]\,\psi_n(y) = \delta(x-y). \qquad (3.2.38)$$

Comme en mécanique quantique ordinaire, l'intérêt de cette définition est qu'elle maintient le fait que la norme de toute fonction d'onde est une quantité indépendante de sa phase globale et de plus elle est conservée au cours du temps. Cependant, cette définition contient une anomalie majeure qui réside dans le fait que les normes de certains états propres d'hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques sont négatives, et la relation (3.2.38) signifie que l'espace engendré par toutes les fonctions propres d'un hamiltonien $\mathcal{PT}$-symétrique ne peut être complet, ce qui a incité Bender a introduire un nouveau produit scalaire, c'est le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire [36].

3.2.2 $\mathcal{CPT}$-produit scalaire

Pour contourner le problème de la norme négative, Bender et *al* [36],[41] ont introduit un nouvel opérateur linéaire $\mathcal{C}$ qui est l'opérateur de conjugaison, ce dernier est une observable qui représente la mesure de la signature de la norme $\mathcal{PT}$ des états propres, cet opérateur est défini dans l'espace des coordonnées par la somme des produits des fonctions propres de l'hamiltonien comme

$$\mathcal{C} = \sum_n \psi_n(x)\psi_n(y) \tag{3.2.39}$$

Notons que l'opérateur $\mathcal{C}$ s'exprime en fonction des états propres de H , ce dernier dépend donc particulièrement du système étudié. Nous pouvons vérifier que le carré de $\mathcal{C}$ est égal à l'unité

$$\int \mathcal{C}(x,y)\mathcal{C}(y,z)dy = \delta(x-z). \tag{3.2.40}$$

Bender [41] a montré que tous les hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques dont la symétrie n'est pas brisée possèdent une autre symétrie engendrée par ce nouvel opérateur linéaire $\mathcal{C}$, ce dernier commute avec l'hamiltonien H et l'opérateur $\mathcal{PT}^{(1)}$,

$$[\mathcal{C}, H] = 0, \quad [\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0, \tag{3.2.41}$$

ce qui implique que

$$[H, \mathcal{CPT}] = 0. \tag{3.2.42}$$

(1) $\mathcal{C}$ ne commute pas avec les opérateurs $\mathcal{P}$ ou $\mathcal{T}$ séparément, mais il commute avec l'opérateur $\mathcal{PT}$.

L'action de $\mathcal{C}$ sur les fonctions propres de H est donnée par

$$\begin{aligned}
\mathcal{C}\psi_n(x) &= \int_c dy\mathcal{C}(x,y)\psi_n(y), &(3.2.43)\\
&= \sum_m \psi_m(x)\int_c dy\mathcal{C}(x,y)\psi_m(y)\psi_n(y), &(3.2.44)\\
&= (-1)^n\psi_n(x). &(3.2.45)
\end{aligned}$$

On montre que le $\mathcal{CPT}-$produit scalaire conduit à des normes positives et à un espace complet, à savoir

$$\begin{aligned}
\langle\psi_n|\psi_m\rangle_{\mathcal{CPT}} &= \int_c dx\,[\mathcal{CPT}\psi_n(x)]\,\psi_m(x), &(3.2.46)\\
&= \int_c dx\,[\mathcal{CPT}\psi_n(x)]\,\psi_m(x), &(3.2.47)\\
&= \delta_{nm}, &(3.2.48)
\end{aligned}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}[\mathcal{CPT}\psi_n(x)]\,\psi_n(y) = \delta(x-y). \tag{3.2.49}$$

3.3 Pseudo-Hermiticité

3.3.1 Définitions et propriétés

Soit l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$, un opérateur linéaire $H : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ est dit pseudo-hermitien [9] s'il existe un opérateur linéaire, hermitien, inversible $\eta : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ satisfaisant

$$H^\dagger = \eta H \eta^{-1}, \tag{3.3.1}$$

où $\dagger$ désigne l'adjoint de l'opérateur correspondant. La condition dans (3.3.1) se réduit à l'hermiticité ordinaire quand l'opérateur métrique est égal à l'identité I et à la $\mathcal{PT}$ -symétrie quand $\eta = \mathcal{P}$ (la $\mathcal{PT}$-symétrie est un cas particulier de la pseudo-hermiticité).

La métrique η peut être définie positive ou indéfinie. Nous tenons à noter que, dans le cas où l'opérateur métrique η est défini positif c'est à dire que toutes ses valeurs propres sont positives,

$$\langle\psi|\eta\psi\rangle > 0 \text{ pour tout } \psi \in \mathcal{H}, \psi \neq 0, \tag{3.3.2}$$

on dit alors que H est quasi-hermitien [43]; il existe donc un opérateur linéaire hermitien et inversible ρ tel que $\eta = \rho^2$, l'hamiltonien H admet, alors, un hamiltonien hermitien correspondant h vérifiant la relation de similarité $h = \rho H \rho^{-1}$ (Notons que l'opérateur η n'est pas unique).

En revanche, s'il existe dans le spectre de η, des valeurs négatives, ce dernier est dit indéfini.

On peut exprimer la condition (3.3.1) sous la forme:

$$H^{\#} = H, \tag{3.3.3}$$

ou encore

$$H^{\#} = \eta^{-1} H^{\dagger} \eta, \tag{3.3.4}$$

avec $H^{\#}$ est appelé le pseudo adjoint de H. La conjugaison $(^{\#})$ possède les propriétés suivantes

$$\mathbf{I}^{\#} = \eta^{-1} \mathbf{I}^{\dagger} \eta = \eta^{-1} \eta = \mathbf{I}, \tag{3.3.5}$$

$$(\mathcal{D}^{\#})^{\#} = \eta^{-1} (\eta^{-1} \mathcal{D}^{\dagger} \eta)^{\dagger} \eta = \eta^{-1} \eta \mathcal{D} \eta^{-1} \eta = \mathcal{D}, \tag{3.3.6}$$

$$(\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2)^{\#} = \eta^{-1} (\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_2)^{\dagger} \eta = \eta^{-1} \mathcal{D}_2^{\dagger} \eta \eta^{-1} \mathcal{D}_1^{\dagger} \eta = \mathcal{D}_2^{\#} \mathcal{D}_1^{\#}, \tag{3.3.7}$$

$$(\alpha \mathcal{D}_1 + \beta \mathcal{D}_2)^{\#} = \eta^{-1} (\alpha^{\dagger} \mathcal{D}_1^{\dagger}) \eta + \eta^{-1} (\beta^{\dagger} \mathcal{D}^{\dagger}) \eta = \alpha^* \mathcal{D}_1^{\#} + \beta^* \mathcal{D}_2^{\#}. \tag{3.3.8}$$

3.3.2 Le η-produit scalaire

Pour les mêmes éxigences physiques que nous avons discuté précédemment concernant la définition du $\mathcal{PT}$ et le $\mathcal{CPT}$-produit scalaire, Mostafazadeh [43] a défini un nouveau produit scalaire associé aux hamiltoniens pseudo-hermitiens, il est appelé η-produit scalaire et son expression est donnée par

$$\langle\phi|\psi\rangle_\eta = \langle\phi|\eta|\psi\rangle\,. \tag{3.3.9}$$

Vérifions, dans un premier temps, que l'hamiltonien pseudo-hermitien est self-adjoint sous le η-produit scalaire, ce qui se traduit par

$$\begin{aligned}\langle H\psi_1|\psi_2\rangle_\eta &= \langle H\psi_1|\eta\psi_2\rangle = \left\langle\psi_1|H^\dagger\eta\psi_2\right\rangle, && (3.3.10)\\ &= \left\langle\psi_1|\eta(\eta^{-1}H^\dagger\eta)\psi_2\right\rangle, && (3.3.11)\\ &= \left\langle\psi_1|\eta H^\#\psi_2\right\rangle = \left\langle\psi_1|H^\#\psi_2\right\rangle_\eta. && (3.3.12)\end{aligned}$$

Cette équation montre que, si l'hamiltonien H est pseudo-hermitien avec la métrique η, il est self adjoint dans le η-produit scalaire.

Montrons maintenant que la norme dans le η-produit scalaire est conservée au cours du temps si et seulement si H est pseudo-hermitien

$$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_\eta = \langle\psi_1(t)|\eta\psi_2(t)\rangle\,, \qquad \forall\,|\psi_1(t)\rangle\,,|\psi_2(t)\rangle \in \mathcal{H}. \tag{3.3.13}$$

nous avons

$$|\psi(t)\rangle = e^{-iHt}|\psi(0)\rangle, \tag{3.3.14}$$

alors

$$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_1(0)|e^{iH^\dagger t}\eta e^{-iHt}\psi_2(0)\right\rangle, \tag{3.3.15}$$

tenant compte de $\eta\eta^{-1} = 1$ on obtient

$$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_1(0)|\eta\eta^{-1}e^{iH^\dagger t}\eta e^{-iHt}\psi_2(0)\right\rangle, \tag{3.3.16}$$

sachant que

$$A^{-1}e^{B}A = e^{A^{-1}BA}, \tag{3.3.17}$$

où A et B sont des opérateurs linéaires, on obtient

$$\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_\eta = \left\langle\psi_1(0)|\eta e^{i\eta^{-1}H^\dagger\eta t}e^{-iHt}\psi_2(0)\right\rangle, \tag{3.3.18}$$

et puisque notre hamiltonien est pseudo hermitien donc il satisfait la relation $H = \eta^{-1}H^\dagger\eta$

$$\begin{aligned}\langle\psi_1(t)|\psi_2(t)\rangle_\eta &= \left\langle\psi_1(0)|\eta e^{iHt}e^{-iHt}\psi_2(0)\right\rangle, && (3.3.19)\\ &= \langle\psi_1(0)|\psi_2(0)\rangle_\eta, && (3.3.20)\end{aligned}$$

ce qui montre bien que le η-produit scalaire est conservé au cours du temps.

Vérifions maintenant l'orthogonalité des vecteurs propres associés à l'hamiltonien pseudo-hermitien, pour cela nous avons donc l'hamiltonien H qui est self-adjoint dans le η-produit scalaire

$$\begin{aligned}\left\langle\psi_i|H\psi_j\right\rangle_\eta &= \left\langle\psi_i H|\psi_j\right\rangle_\eta = \left\langle\psi_i|E_j\psi_j\right\rangle_\eta, && (3.3.21)\\ &= \left\langle\psi_i E_i|\psi_j\right\rangle_\eta = E_j\left\langle\psi_i|\psi_j\right\rangle_\eta, && (3.3.22)\\ &= E_i^*\left\langle\psi_i|\psi_j\right\rangle_\eta, && (3.3.23)\end{aligned}$$

alors

$$(E_j - E_i^*)\left\langle\psi_i|\psi_j\right\rangle_\eta = 0, \tag{3.3.24}$$

pour $i \neq j$ nous avons $\left\langle\psi_i|\psi_j\right\rangle_\eta = 0$, ce qui permet d'en conclure que les vecteurs propres de l'hamiltonien pseudo-hermitien sont orthogonaux, et ces vecteurs sont donc appelés η-orthogonaux.

3.3.3 hamiltoniens pseudo-hermitiens ayant une base biorthonormée complète

Soit H un Hamiltonien non-hermitien diagonalisable avec un spectre discret et non-dégénéré. Les vecteurs propres de H sont notés $\{|\psi_n\rangle\}$, ceux de $H^\dagger$ sont notés $\{|\phi_n\rangle\}$. On dit que

$\{|\psi_n\rangle, |\phi_n\rangle\}$ forment une base biorthonormée complète, si et seulement si, les relations suivantes sont satisfaites [43]: à savoir

$$H|\psi_n\rangle = E_n|\psi_n\rangle. \tag{3.3.25}$$

$$H^\dagger|\phi_n\rangle = E_n^*|\phi_n\rangle. \tag{3.3.26}$$

$$\langle\phi_n \mid \psi_m\rangle = \delta_{nm}. \tag{3.3.27}$$

$$\sum_n |\phi_n\rangle\langle\psi_n| = \sum_n |\psi_n\rangle\langle\phi_n| = I. \tag{3.3.28}$$

Notons que dans ces relations, l'Hamiltonien H est non-hermitien, (il n'est pas forcément pseudo-Hermitien).

A partir des équations (3.3.25) et (3.3.28) on détermine l'expression de H,

$$H|\psi_n\rangle\langle\phi_n| = E_n|\psi_n\rangle\langle\phi_n|, \tag{3.3.29}$$

ce qui implique que

$$H = \sum_n E_n|\psi_n\rangle\langle\phi_n| \tag{3.3.30}$$

De même pour $H^\dagger$,

$$H^\dagger|\phi_n\rangle = E_n^*|\phi_n\rangle, \tag{3.3.31}$$

nous avons

$$H^\dagger|\phi_n\rangle\langle\psi_n| = E_n^*|\phi_n\rangle\langle\psi_n|, \tag{3.3.32}$$

on en déduit que

$$H^\dagger = \sum_n E_n^*|\phi_n\rangle\langle\psi_n|, \tag{3.3.33}$$

3.3.4 Transformation de Dyson

Soit un hamiltonien H pseudo-hermitien admettant un spectre réel[(1)] et ayant une base biorthonormée complète, les équations aux valeurs propres des hamiltoniens H et $H^{\dagger}$s'écrivent

$$H\left|\psi_n\right\rangle = E_n\left|\psi_n\right\rangle, \tag{3.3.34}$$

$$H^{\dagger}\left|\phi_n\right\rangle = E_n\left|\phi_n\right\rangle. \tag{3.3.35}$$

Dyson propose une transformation qui permet de relier les vecteurs propres de l'opérateur non-hermitique H à ceux de l'opérateur hermitique h, cette dernière s'exprime par

$$\left|\phi_n\right\rangle = \rho\left|\varphi_n\right\rangle, \tag{3.3.36}$$

$$\left|\psi_n\right\rangle = \rho^{-1}\left|\varphi_n\right\rangle. \tag{3.3.37}$$

L'avantage de la correspondance de Dayson est qu'elle permet de faire passer d'un hamiltonien pseudo-hermitien à un hamiltonien hermitien équivalent, via la relation suivante

$$h = \rho H \rho^{-1}, \tag{3.3.38}$$

où ρ est un opérateur linéaire inversible et hermitien connu sous le nom d'opérateur de transformation de Dyson et l'équation aux valeurs propres de l'hamiltonien h s'écrit alors

$$h\left|\varphi_n\right\rangle = E_n\left|\varphi_n\right\rangle. \tag{3.3.39}$$

nous présentons dans ce qui suit deux théorèmes fondamentaux dans le cadre de la mécanique quantique pseudo-hermitienne.

Théorème 1 [43]: Soit H un hamiltonien non-hermitien ayant un spectre discret et admettant une base biorthonormée complète. Alors H est pseudo-hermitien si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1) Les valeurs propres de H sont réelles.

2) Les valeurs propres de H sont constituées de paires de valeurs propres complexes conjuguées l'une de l'autre.

[(1)]si un Hamiltonien pseudo-Hermitien H ayant un spectre réel alors est dit quasi-Hermitien.

Théorème 2 [43]: Soit H un hamiltonien non-hermitien ayant un spectre discret et admettant une base biorthonormée complète. Alors H est quasi-hermitien si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée:

1) H est pseudo-hermitien avec un opérateur métrique de la forme $\eta = \rho^2$, où ρ est un opérateur linéaire inversible et hermitien.

2) H admet un spectre réel.

3) H admet un hamiltonien hermitien h correspondant via la relation de similarité: $h = \rho H \rho^{-1}$. En plus H et h sont isospectraux.

3.3.5 Les méthodes de calcul de la métrique η

Le système quantique pseudo-hermitien est défini par un opérateur hamiltonien quasi-hermitien et un opérateur métrique associé η. Le problème central de la mécanique quantique pseudo-hermitienne revient à construire cet opérateur métrique η. Pour cela il existe différentes méthodes de calcul de la métrique, ce qui nous a conduit, dans cette section, à exposer les méthodes les plus générales.

La méthode spectrale

La méthode spectrale introduite par Mostafazadeh [43] est l'une des méthodes les plus simples et directes pour construire l'opérateur métrique défini positif η. Cette méthode est basée sur la représentation spectrale de l'opérateur métrique. Pour un hamiltonien pseudo-hermitien H, les états propres de ce système forment une base bi-orthonormée complète. Dans cette méthode, l'opérateur métrique est calculé de manière simple et élégante. Dans le cas du spectre réel, son expression est donnée par

$$\eta = \sum_n |\phi_n\rangle \langle\phi_n| \,, \tag{3.3.40}$$

et son inverse s'écrit comme

$$\eta^{-1} = \sum_n |\psi_n\rangle \langle\psi_n| \,, \tag{3.3.41}$$

en outre, la métrique η relie les états $|\psi_n\rangle$ et $|\phi_n\rangle$ par

$$|\phi_n\rangle = \eta\,|\psi_n\rangle\,, \quad |\psi_n\rangle = \eta^{-1}\,|\phi_n\rangle\,. \tag{3.3.42}$$

Méthode de paramétrisation de l'opérateur $\mathcal{C}$

Dans le cas des hamiltoniens $\mathcal{PT}$-symétriques, l'opérateur métrique η s'écrit sous cette forme

$$\eta = \mathcal{PC}, \tag{3.3.43}$$

soit

$$\eta^{-1} = \mathcal{CP}. \tag{3.3.44}$$

Cette méthode consiste à construire l'opérateur métrique η à partir des opérateurs de conjugaison $\mathcal{C}$ et de parité $\mathcal{P}$, dans la réference [42], il a été trouvé pratique d'écrire $\mathcal{C}$ sous forme d'un produit d'exponentielles de l'opérateur hermitien Q et de l'opérateur parité $\mathcal{P}$, ce qui se traduit par

$$\mathcal{C} = e^{Q(x,p)}\mathcal{P}, \tag{3.3.45}$$

les opérateurs Q et $\mathcal{P}$ satisfont cette relation

$$\mathcal{P}Q = -Q\mathcal{P}, \tag{3.3.46}$$

dans ce cas la métrique s'écrit

$$\eta = e^{-Q}, \tag{3.3.47}$$

qui est un opérateur hermitien défini positif, tandis que son inverse est donné par

$$\eta^{-1} = e^{Q}, \tag{3.3.48}$$

où l'opérateur Q peut être déterminé en imposant les trois conditions suivantes

$$[\mathcal{C}, \mathcal{PT}] = 0; \quad [\mathcal{C}, H] = 0; \quad \mathcal{C}^2 = 1. \tag{3.3.49}$$

Nous n'ignorons pas le fait qu'il existe d'autres méthodes pour la construction de l'opérateur métrique η, nous invitons donc les lecteurs à consulter la référence [43] pour avoir plus de détails sur ces méthodes. Nous tenons à souligner qu'il n'existe pas de méthode bien définie pour la détermination de l'opérateur métrique, l'obtention de l'expression de ce dernier dépend généralement du système étudié.

3.4 Les systèmes non-hermitiques dépendants du temps

Le formalisme des systèmes quantiques non-hermitiens indépendants du temps a été bien étudié par de nombreux chercheurs et ses principes de base ont été posés d'une manière assez cohérente et complète [43], ce qui n'a pas été le cas pour les systèmes quantiques non-hermitiens dépendants du temps. L'étude de ces systèmes a été abordée et discutée plusieurs fois [52]-[73]. Il existe plusieurs études pour la construction d'une théorie rigoureuse [64]-[73]; tout en sachant que le traitement des systèmes avec des hamiltoniens non-hermitiens dépendants du temps avec des opérateurs métriques indépendants du temps [62],[63] est amplement admis, la généralisation des systèmes non-hermitiens dépendants du temps avec une métrique dépendante du temps fait toujours l'objet d'études. Fring et Moussa [74],[75] approuvent les conclusions de Mostafazadeh [64],[66],[68], dans le fait que pour les opérateurs métriques dépendants du temps, on ne peut avoir simultanément l'unitarité d'une évolution temporelle et "l'observabilité" de l'hamiltonien, c'est-à-dire qu'on ne peut avoir que l'une ou l'autre.

Comme éléments de départ, Fring et Moussa ont pris les deux équations de Schrödinger dépendantes du temps

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\varphi(t)\right\rangle = h(t)\left|\varphi(t)\right\rangle, \qquad i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\psi(t)\right\rangle, \tag{3.4.1}$$

où $h(t)$ est hermitien, alors que $H(t)$ est considéré comme non hermitien, c'est-à-dire que $h(t) = h^{\dagger}(t)$ et $H(t) \neq H^{\dagger}(t)$, et ils affirment que les opérateurs ne peuvent être appelés hamiltoniens que s'ils génèrent l'évolution temporelle du système considéré, cela veut dire qu'ils satisfont l'équation de Schrödinger dépendante du temps.

Fring et Moussa supposent ensuite que les deux solutions $\varphi(t)$ et $\psi(t)$ sont liées à l'équation (3.4.1) par un opérateur inversible dépendant du temps $\rho(t)$ ce qui se traduit par

$$|\varphi(t)\rangle = \rho(t)\,|\psi(t)\rangle\,. \tag{3.4.2}$$

En substituant la relation (3.4.2) dans l'équation (3.4.1) on en déduit que les deux hamiltoniens sont reliés l'un à l'autre par

$$h(t) = \rho(t)H(t)\rho^{-1}(t) - i\hbar\rho^{-1}(t)\dot{\rho}(t). \tag{3.4.3}$$

Cette dernière relation est alors appelée relation de Dyson dépendante du temps car elle généralise la transformation de similarité $h = \rho H \rho^{-1}$ qui correspond au cas d'hamiltoniens non-hermitiens indépendants du temps, ou bien au cas d'hamiltoniens non-hermitiens dépendants du temps avec une métrique indépendante du temps.

En prenant le conjugué hermitique de l'équation (3.4.3) et en utilisant l'hermiticité de $h(t)$ ils aboutissent à une relation entre $H(t)$ et son conjugué hermitique

$$H^{\dagger}(t)\rho^{\dagger}(t)\rho(t) - \rho^{\dagger}(t)\rho(t)H(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left[\rho^{\dagger}(t)\rho(t)\right]^{-1}, \tag{3.4.4}$$

ou bien

$$H^{\dagger}(t)\eta(t) - \eta(t)H(t) = i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\eta(t)^{-1}, \tag{3.4.5}$$

donc

$$H^{\dagger}(t) = \eta(t)H(t)\eta(t)^{-1} + i\hbar\left[\frac{\partial}{\partial t}\eta(t)\right]\eta(t)^{-1}, \tag{3.4.6}$$

cette relation relie l'hamiltonien $H(t)$ à son conjugué $H^{\dagger}(t)$, elle est appellée relation de quasi-hermiticité dépendante du temps et elle remplace la relation de quasi-hermiticité standard bien connue dans le contexte de la mécanique quantique non hermitienne indépendante du temps.

CHAPITRE 4

Les états cohérents en mécanique quantique non-hermitienne

4.1 Introduction

Une attention considérable a été accordée à un formalisme alternatif pour la description des systèmes non-hermitiens, basé sur le concept des pseudo-fermions et pseudo-bosons. Les états cohérents pour les systèmes non-hermitiens sont construits à l'aide de ces opérateurs. D'après la littérature, les pseudo-fermions ont été introduits pour la première fois, dans le contexte de la mécanique quantique pseudo-hermitienne par Mostafazadeh [51]. En 2012 Baguarello s'est intéréssé au développement mathématique et physique des pseudo-fermions, il a établi en particulier la forme la plus générale de l'hamiltonien à deux niveaux admettant une structure pseudo-fermionique [76-77]. Cherbal et ses collaborateurs ont étudié l'exemple physique de l'atome à deux-niveaux en interaction avec un champ électromagnétique décrit par un hamiltonien pseudo-hermitien [78]. Dans leur travail, ils ont construit les états cohérents pseudo-fermioniques comme états propres de l'opérateur d'annihilation de pseudo-fermions. En revanche les états cohérents pseudo-bosoniques ont été construits par Trifonov dans [79-81]

Dans ce chapitre, nous allons définir et fournir quelques propriétés des pseudo-fermions, ainsi nous exposons la méthode de construction des états cohérents pseudo-fermioniques. Par la suite les pseudo-bosons seront aussi traités et leurs états cohérents seront construits.

4.2 Les pseudo-fermions

Les opérateurs pseudo-fermioniques sont définis comme étant une extention pseudo-hermitienne des relations d'anticommutation des fermions usuels. Ces opérateurs sont donc obtenus à partir de la modification des relations d'anticommutation des fermions (données dans les équations (2.3.15) et (2.3.16)) de la façon suivante [76]

$$\left[B,\bar{B}\right]_{+}=1,\ \ [B,B]_{+}=\left[\bar{B},\bar{B}\right]_{+}=0, \tag{4.2.1}$$

où $\bar{B}=B^{\#}=\eta^{-1}B^{\dagger}\eta$ est le pseudo-adjoint de B [78]. Remarquons, qu'en général, $\bar{B}\neq B^{\dagger}$.

Dans le cas où $\eta=\mathbf{1}$ nous retombons dans l'algèbre usuelle des fermions et $\bar{B}=B^{\dagger}$.

Il a été établi dans [76] que:

(i) Il existe deux états non nuls dans $\mathcal{H}$ notés $|\psi_0\rangle$ et $|\phi_0\rangle$ tels que,

$$B\left|\psi_0\right\rangle=0,\ \ \bar{B}^{\dagger}\left|\phi_0\right\rangle=0. \tag{4.2.2}$$

(ii) Il existe aussi dans $\mathcal{H}$ deux états excités $|\psi_1\rangle$ et $|\phi_1\rangle$ non nuls, définis par

$$\begin{aligned}
\bar{B}\left|\psi_0\right\rangle &= \left|\psi_1\right\rangle, \qquad B^{\dagger}\left|\phi_0\right\rangle=\left|\phi_1\right\rangle, && (4.2.3)\\
B\left|\psi_1\right\rangle &= \left|\psi_0\right\rangle, \qquad \bar{B}^{\dagger}\left|\phi_1\right\rangle=\left|\phi_0\right\rangle, && (4.2.4)
\end{aligned}$$

c'est-à-dire que $\bar{B}$ et B sont des opérateurs de création et d'annihilation respectivement pour l'ensemble $\mathcal{F}_{\psi}=\{\left|\psi_0\right\rangle,\left|\psi_1\right\rangle\}$ et $B^{\dagger}$ et $\bar{B}^{\dagger}$ sont des opérateurs de création et d'annihilation respectivement pour l'ensemble $\mathcal{F}_{\phi}=\{\left|\phi_0\right\rangle,\left|\phi_1\right\rangle\}$.

(iii) Les ensembles $\mathcal{F}_{\psi}=\{\left|\psi_0\right\rangle,\left|\psi_1\right\rangle\}$ et $\mathcal{F}_{\phi}=\{\left|\phi_0\right\rangle,\left|\phi_1\right\rangle\}$ forment deux ensembles biorthonormés.

(iv) Il existe des opérateurs "nombre de pseudo-fermions" $N = \bar{B}B$ associé à l'ensemble $\mathcal{F}_{\psi}$, et $N^{\dagger} = B^{\dagger}\bar{B}^{\dagger}$ associé à l'ensemble $\mathcal{F}_{\phi}$ tels que

$$N\left|\psi_{n}\right\rangle = n\left|\psi_{n}\right\rangle, \qquad N^{\dagger}\left|\phi_{n}\right\rangle = n\left|\phi_{n}\right\rangle, \qquad\qquad n = 0, 1. \tag{4.2.5}$$

L'opérateur "nombre de pseudo-fermions" N est non hermitien.

(v) Il existe un opérateur métrique η défini positif, hermitien et inversible qui satisfait $H^{\dagger} = \eta H \eta^{-1}$; l'hamiltonien H est quasi-hermitien, donc $\eta = \rho^{2}$ et H admet un hamiltonien hermitien correspondant h.

Dans le cas $\eta = 1$: (limite hermitienne)

1. Les opérateurs de création et d'annihilation des pseudo-fermions se réduisent à ceux des fermions usuels
$$B = b = \bar{B}^{\dagger},\ \ \bar{B} = b^{\dagger} = B^{\dagger}. \tag{4.2.6}$$

2. L'opérateur "nombre de pseudo-fermions" N reprend son hermiticité
$$N = N^{\dagger} = b^{\dagger}b. \tag{4.2.7}$$

3. Les ensembles $\mathcal{F}_{\psi}=\{\left|\psi_{0}\right\rangle, \left|\psi_{1}\right\rangle\}$ et $\mathcal{F}_{\phi} = \{\left|\phi_{0}\right\rangle, \left|\phi_{1}\right\rangle\}$ se rejoignent:
$$\mathcal{F}_{f} = \{\left|0\right\rangle, \left|1\right\rangle\} = \mathcal{F}_{\psi}= \mathcal{F}_{\phi}. \tag{4.2.8}$$
où $\mathcal{F}_{f}$ est un ensemble orthonormé complet.

4.2.1 Relations entre les pseudo-fermions et les fermions

Les opérateurs pseudo-fermioniques B et $\bar{B}$ sont reliés aux opérateurs fermioniques b et $b^{\dagger}$ via les relations suivantes [76]

$$B = \rho^{-1}b\rho \ \text{ et } \ \bar{B} = \rho^{-1}b^{\dagger}\rho, \tag{4.2.9}$$

où ρ est un opérateur hermitien strictement positif avec $\rho = \sqrt{\eta}$. Donc, les pseudo-fermions admettent toujours des fermions correspondants et les relations entre les états de l'ensemble des fermions $\mathcal{F}_f$ et les états des ensembles des pseudofermions $\mathcal{F}_\psi$ et $\mathcal{F}_\phi$ sont donnés par

$$\begin{aligned} |\psi_0\rangle &= \rho^{-1}|0\rangle, \quad |\psi_1\rangle = \rho^{-1}|1\rangle, & (4.2.10) \\ |\phi_0\rangle &= \rho|0\rangle, \quad |\phi_1\rangle = \rho|1\rangle. & (4.2.11) \end{aligned}$$

4.3 Construction des états cohérents pseudo-fermioniques

Les états cohérents pseudo-fermioniques des systèmes pseudo-hermitiens ont été construits par Cherbal [78] en utilisant la même méthode appliquée dans le cadre de la mécanique quantique hermitienne. Comme dans la mécanique quantique hermitienne, les états cohérents pseudo-fermioniques sont paramétrisés par les variables de Grassmann complexes qui anticommutent avec tous les opérateurs pseudo-fermioniques

$$[\xi, B]_+ = 0, \quad \left[\xi, \bar{B}\right]_+ = 0, [\xi^*, B]_+ = 0, \left[\xi^*, \bar{B}\right]_+ = 0, \tag{4.3.1}$$

leurs actions sur les ensembles de systèmes biorthonormés complets $\mathcal{F}_\psi = \{|\psi_0\rangle, |\psi_1\rangle\}$ et $\mathcal{F}_\phi = \{|\phi_0\rangle, |\phi_1\rangle\}$ sont données comme suit

$$\begin{aligned} \xi|\psi_0\rangle &= |\psi_0\rangle\xi, \quad \xi|\psi_1\rangle = -|\psi_1\rangle\xi, & (4.3.2) \\ \xi|\phi_0\rangle &= |\phi_0\rangle\xi, \quad \xi|\phi_1\rangle = -|\phi_1\rangle\xi. & (4.3.3) \end{aligned}$$

La conjugaison pseudo-hermitienne renverse l'ordre de toutes les quantités fermioniques, les opérateurs et les variables de Grassmann, à savoir

$$(\bar{B}\xi + \xi^* B)^\# = \xi^* B + \bar{B}\xi. \tag{4.3.4}$$

On définit l'opérateur de déplacement $D(\xi)$ par l'expression suivante

$$\begin{aligned} D(\xi) &= e^{\bar{B}\xi - \xi^* B}, & (4.3.5) \\ D(\xi) &= 1 + \bar{B}\xi - \xi^* B + (\bar{B}B - \frac{1}{2})\xi^*\xi, \end{aligned}$$

et son pseudo-adjoint $\overline{D}(\xi)=\eta^{-1}D^{\dagger}(\xi)\eta$ est donné par

$$\begin{aligned}\overline{D}(\xi) &= e^{\xi^* B-\bar{B}\xi}, &(4.3.6)\\ \overline{D}(\xi) &= 1+\xi^* B-\bar{B}\xi+(\bar{B}B-\frac{1}{2})\xi^*\xi. &(4.3.7)\end{aligned}$$

On peut montrer que l'opérateur $D(\xi)$ est pseudo-unitaire

$$\overline{D}(\xi)D(\xi)=e^{\xi^* B-\bar{B}\xi}e^{\bar{B}\xi-\xi^* B}, \tag{4.3.8}$$

en développant les expressions de $D(\xi)$ et $\overline{D}(\xi)$, et en se servant des relations d'anticommutations entre les opérateurs B, $\bar{B}$ et les variables de Grassmann on trouve

$$\overline{D}(\xi)D(\xi)=D(\xi)\overline{D}(\xi)=\mathbf{1}. \tag{4.3.9}$$

Ces deux opérateurs satisfont les relations suivantes

$$\begin{aligned}\overline{D}(\xi)BD(\xi) &= e^{\xi^* B-\bar{B}\xi}Be^{\bar{B}\xi-\xi^* B}, &(4.3.10)\\ &= (1+\xi^* B-\bar{B}\xi)B(1+\bar{B}\xi-\xi^* B), &(4.3.11)\\ &= B+\xi, &(4.3.12)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overline{D}(\xi)\bar{B}D(\xi) &= e^{\xi^* B-\bar{B}\xi}\bar{B}e^{\bar{B}\xi-\xi^* B}, &(4.3.13)\\ &= \bar{B}+\xi^*. &(4.3.14)\end{aligned}$$

Les états cohérents pseudo-fermioniques sont alors définis [78] par l'action de l'opérateur pseudo-unitaire $D(\xi)$ sur l'état fondamental $|\psi_0\rangle$ (comme pour les états cohérents usuels et les états cohérents fermioniques); ces états s'expriment pour un seul degré de liberté par

$$\begin{aligned}|\xi\rangle &= D(\xi)\,|\psi_0\rangle\,, &(4.3.15)\\ &= e^{\bar{B}\xi-\xi^* B}\,|\psi_0\rangle\,, &(4.3.16)\\ &= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}e^{\bar{B}\xi}\,|\psi_0\rangle\,, &(4.3.17)\\ &= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|\psi_0\rangle-\xi\,|\psi_1\rangle), &(4.3.18)\end{aligned}$$

où l'adjoint hermitique de $|\xi\rangle$ est donné par

$$\begin{aligned} \langle\xi| &= \langle 0| D^{\dagger}(\xi), && (4.3.19) \\ &= e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(\langle\psi_0| + \xi^* \langle\psi_1|). && (4.3.20) \end{aligned}$$

Comme dans le cas des fermions, on peut encore montrer que les états cohérents pseudo-fermioniques sont définis comme états propres de l'opérateur d'annihilation B ce qui se traduit par

$$\begin{aligned} B|\xi\rangle &= BD(\xi)|\psi_0\rangle, && (4.3.21) \\ &= D(\xi)\overline{D}(\xi)BD(\xi)|\psi_0\rangle, && (4.3.22) \\ &= D(\xi)(B+\xi)|\psi_0\rangle, && (4.3.23) \\ &= D(\xi)\xi|\psi_0\rangle, && (4.3.24) \\ &= \xi D(\xi)|\psi_0\rangle, && (4.3.25) \\ &= \xi|\xi\rangle. && (4.3.26) \end{aligned}$$

En mécanique quantique non-hemitienne où les systèmes sont décrits par des hamiltoniens non hermitiens, mais plutôt pseudo-hermiticitiens, les états cohérents associés à ces systèmes ne sont pas normalisés

$$\langle\xi|\xi\rangle = \langle\psi_0|\psi_0\rangle + [\langle\psi_1|\psi_1\rangle - \langle\psi_0|\psi_0\rangle]\xi^*\xi - 2i\,\mathrm{Im}\,[\xi\langle\psi_0|\psi_1\rangle] \neq 1, \qquad (4.3.27)$$

en revanche ces derniers sont $\eta-$normalisés

$$\begin{aligned} \langle\xi|\xi\rangle_\eta &= \langle\xi|\eta|\xi\rangle = e^{-\xi^*\xi}(\langle\psi_0| + \xi^*\langle\psi_1|)\eta(|\psi_0\rangle - \xi|\psi_1\rangle), && (4.3.28) \\ &= e^{-\xi^*\xi}(\langle\psi_0| + \xi^*\langle\psi_1|)(\eta|\psi_0\rangle - \xi\eta|\psi_1\rangle), && (4.3.29) \\ &= e^{-\xi^*\xi}(1+\xi^*\xi), && (4.3.30) \\ &= (1-\xi^*\xi)(1+\xi^*\xi) = 1, && (4.3.31) \end{aligned}$$

et d'une façon générale

$$\langle\xi_1|\xi_2\rangle_\eta = \xi_1^*\xi_2 + \frac{1}{4}(2-\xi_1^*\xi_1)(2-\xi_2^*\xi_2). \qquad (4.3.32)$$

Les états cohérents ne forment pas une base surcomplète[1]

$$\int d\xi^* d\xi \left|\xi\right\rangle \left\langle\xi\right| = \int d\xi^* d\xi \begin{bmatrix} \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| - \xi \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + \xi^* \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_1\right| \\ -\xi^*\xi \left(\left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right|\right) \end{bmatrix}, \tag{4.3.33}$$

$$= \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + \left|\psi_1\right\rangle \left\langle\psi_1\right| \neq \mathbf{I}. \tag{4.3.34}$$

La résolution d'identité s'écrit alors

$$\int d\xi^* d\xi \eta \left|\xi\right\rangle \left\langle\xi\right| = \int d\xi^* d\xi \eta e^{-\xi^*\xi} \left[\left(\left|\psi_0\right\rangle - \xi \left|\psi_1\right\rangle\right)\right] \left[\left(\left\langle\psi_0\right| + \xi^* \left\langle\psi_1\right|\right)\right], \tag{4.3.35}$$

$$= \int d\xi^* d\xi e^{-\xi^*\xi} \left[\eta(1 - \xi\xi^*) \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + \xi\xi^* \mathbf{I}\right], \tag{4.3.36}$$

$$= \int d\xi^* d\xi \left[\eta \left|\psi_0\right\rangle \left\langle\psi_0\right| + \xi\xi^* \mathbf{I}\right], \tag{4.3.37}$$

$$= \mathbf{I}. \tag{4.3.38}$$

4.4 Les pseudo-bosons

Dans le but de construire des états cohérents bosoniques pour des systèmes pseudo-hermitiens (brièvement états cohérents pseudo-bosoniques), nous abordons tout d'abord la notion de pseudo-bosons [80]. Ces pseudo-bosons que nous définissons par analogie avec les opérateurs pseudo-fermioniques sont définis comme étant des opérateurs d'échelles C et $\bar{C}$ où ces derniers sont les opérateurs d'annihilation et de création pseudo-bosoniques. Les pseudo-bosons [80] sont donc résultat d'une modification de la relation de commutation canonique $\left[a, a^\dagger\right] = 1$, qui est remplacée par une règle de commutation similaire

$$\left[C, \bar{C}\right] = 1, \tag{4.4.1}$$

où $\bar{C}$ est le pseudo-adjoint de C, et il s'écrit comme

$$\bar{C} = \eta^{-1} C^\dagger \eta. \tag{4.4.2}$$

[1] Nous rappellons que des états cohérents forment une base surcomplète, s'ils vérifient la résolution de l'identité $\int d\xi^* d\xi \left|\xi\right\rangle \left\langle\xi\right| = I$

Nous définissons maintenant l'opérateur nombre de pseudo-bosons qui s'écrit comme

$$N = \bar{C}C, \tag{4.4.3}$$

cet opérateur est pseudo-hermitien ce qui se traduit par

$$N^{\#} = (\bar{C}C)^{\#} = \bar{C}C = N, \tag{4.4.4}$$

le commutateur de N avec les opérateurs pseudo-bosoniques donne

$$[C, N] = C, \qquad \left[\bar{C}, N\right] = -\bar{C}. \tag{4.4.5}$$

Les états propres de l'opérateur nombre de pseudo-bosons N peuvent être construits en faisant agir sur l'état fondamental $|0\rangle$ l'opérateur de création pseudo-bosonique $\bar{C}$ où

$$N\left|\psi_n\right\rangle = \bar{C}C\left|\psi_n\right\rangle = n\left|\psi_n\right\rangle. \tag{4.4.6}$$

Cependant, compte tenu de $\bar{C} \neq C^{\dagger}$, ces états $|\psi_n\rangle$ ne sont pas orthogonaux et il s'avère qu'il existe une paire complémentaire d'opérateurs d'échelle pseudo-bosoniques $\bar{C}^{\dagger}$et $C^{\dagger}$ satisfaisant la relation de commutation suivante

$$\left[\bar{C}^{\dagger}, C^{\dagger}\right] = 1, \tag{4.4.7}$$

ces opérateurs sont des opérateurs d'annihilation et de création associés aux états de l'hamiltonien $H^{\dagger}$. Le système des deux ensembles d'états associés à H et $H^{\dagger}$ est dit bi-orthogonal et bi-complet ce qui s'exprime, respectivement, par les deux relations

$$\langle\psi_n|\phi_m\rangle = \delta_{nm}, \tag{4.4.8}$$

$$\sum_n \left|\psi_n\right\rangle\left\langle\phi_n\right| = \sum_n \left|\phi_n\right\rangle\left\langle\psi_n\right| = \mathbf{I}. \tag{4.4.9}$$

4.5 Construction des états cohérents pseudo-bosoniques

Les états cohérents pour les systèmes bosoniques pseudo hermitiens (pseudo-bosoniques) ont été définis dans [79] comme états propres des opérateurs d'annihilation de pseudo-bosons correspondants

$$C|\alpha\rangle = \alpha|\alpha\rangle . \tag{4.5.1}$$

Nous pouvons aussi introduire l'opérateur de déplacement pseudo-unitaire

$$D(\alpha) = e^{\alpha\bar{C} - \alpha^* C}, \tag{4.5.2}$$

et à partir de ce dernier les états cohérents pseudo-bosoniques peuvent être construits comme état fondamental $|0\rangle$ déplacé

$$|\alpha\rangle = D(\alpha)|0\rangle . \tag{4.5.3}$$

Les états cohérents pseudo-bosoniques sont alors donnés par

$$|\alpha\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} |\psi_n\rangle , \tag{4.5.4}$$

Notons que la structure des états cohérents pseudo-bosoniques est la même que celle des états cohérents canoniques de Glauber [4]; cependant, les propriétés des opérateurs de déplacement et des états $|\alpha\rangle$ associés sont différentes. En effet, d'une part l'opérateur de déplacement $D(\alpha)$ n'est pas unitaire dans le cas des pseudo-bosons ce qui implique que les états $|\alpha\rangle$ ne sont pas normalisés et d'autre part, l'ensemble $\{|\alpha\rangle\ ;\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ n'est pas surcomplet du fait que les états $|\psi_n\rangle$ ne sont pas orthogonaux. Ils sont cependant bi-normalisés(1) à $|\alpha\rangle$ c'est-à-dire

$$\langle\alpha|\alpha\rangle_\eta = \langle\alpha|\eta|\alpha\rangle = \mathbf{1} \tag{4.5.5}$$

et le système $\{|\alpha\rangle\ ,\eta|\alpha\rangle\,;\ \alpha \in \mathbb{C}\}$ est bi-surcomplet

$$\frac{1}{\pi}\int \eta|\alpha\rangle\langle\alpha|\, d^2\alpha = \mathbf{1}, \tag{4.5.6}$$

avec

$$d^2\alpha = d(\operatorname{Re}\alpha)d(\operatorname{Im}\alpha). \tag{4.5.7}$$

Lorsque $\eta = 1$, ces états se reduisent aux fameux états cohérents de Glauber $|\alpha\rangle = e^{\alpha a^\dagger - \alpha^* a}|0\rangle$, où a et $a^\dagger$ sont des opérateurs canoniques d'annihilation et de création de bosons.

(1) Les états cohérents pseudo-bosoniques bi-normalisés sont aussi appelé η-normalisés.

CHAPITRE 5

Extention de la théorie des invariants de DMMT au cas non hermitien

Dans ce chapitre nous étendons la méthode des invariants de DMMT pour les hamiltoniens pseudo-fermioniques dépendants du temps. Nous introduisons des opérateurs invariants d'échelle (intégrales de mouvement dépendantes du temps), qui jouent le rôle d'opérateurs de création et d'annihilation. Puis, nous construisons les états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps.

5.1 Invariants d'échelle et états cohérents pour les hamiltoniens non-hermitiens dépendants du temps

Nous considérons un hamiltonien $H(t)$ non hermitien dépendant du temps dont l'équation de Schrödinger correspondante s'écrit

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Psi(t)\right\rangle = H(t)\left|\Psi(t)\right\rangle, \tag{5.1.1}$$

tandis que celle associée à $h(t)$ est donnée par

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\left|\Phi(t)\right\rangle = h(t)\left|\Phi(t)\right\rangle. \tag{5.1.2}$$

Les deux fonctions d'ondes $|\Psi(t)\rangle$ et $|\Phi(t)\rangle$ sont liées par

$$|\Psi(t)\rangle = \rho^{-1} |\Phi(t)\rangle . \tag{5.1.3}$$

Il est important de savoir que nous traitons un système décrit par un hamiltonien $H(t)$ pseudo-hermitien dépendant du temps avec une métrique indépendante du temps cela signifie que la relation de Dyson dépendante du temps donnée par (3.4.3) et de quasi-hermiticité dépendante du temps donnée par (3.4.6) se réduisent à

$$h(t) = \rho H(t) \rho^{-1} \tag{5.1.4}$$

et

$$H^{\dagger}(t) = \eta H(t) \eta^{-1}, \tag{5.1.5}$$

où l'opérateur métrique s'écrit

$$\eta = \rho^{\dagger}\rho.$$

Ainsi tout opérateur auto-adjoint $o(t)$ possède un opérateur correspondant $O(t)$ dans le système non-hermitien donné par

$$O(t) = \rho^{-1} o(t) \rho. \tag{5.1.6}$$

Soient $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ deux intégrales du mouvement associées à l'hamiltonien $H(t)$

$$\begin{aligned} \frac{\partial B(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[B(t), H(t)\right] &= 0, && (5.1.7) \\ \frac{\partial \bar{B}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\bar{B}(t), H(t)\right] &= 0. && (5.1.8) \end{aligned}$$

Les opérateurs $B(t)$ et $A(t)$ sont reliés par

$$\begin{aligned} B(t) &= \rho^{-1} A(t) \rho, && (5.1.9) \\ \bar{B}(t) &= \rho^{-1} A^{\dagger}(t) \rho, && (5.1.10) \end{aligned}$$

où les opérateurs invariants d'échelle $A(t)$ et $A^{\dagger}(t)$, définis dans le premier chapitre, satisfont les équations (1.3.5) et (1.3.6).

Notons que les opérateurs invariants $\bar{B}(t)$ et $B^{\dagger}(t)$ associés à $H^{\dagger}(t)$ sont liés par

$$\bar{B}(t) = \eta^{-1} B^{\dagger}(t) \eta, \tag{5.1.11}$$

ce qui signifie que $\bar{B}(t) \neq B^{\dagger}(t)$.

En utilisant les relations (5.1.9), (5.1.10), (2.4.19) et (2.4.20), on peut déduire que $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ sont des opérateurs pseudo fermioniques dépendant du temps, c'est-à-dire qu'ils satisfont la relation d'anti-commutation

$$\left[B(t), \bar{B}(t)\right]_{+} = 1, \;\; B^{2}(t) = 0, \;\; \bar{B}^{2}(t) = 0. \tag{5.1.12}$$

Par conséquent, $B(t)$ et $\bar{B}(t)$, ($\bar{B}^{\dagger}(t)$ et $B^{\dagger}(t)$) deviennent respectivement les opérateurs d'annihilation et de création associés à $H(t)$, ($H^{\dagger}(t)$); l'action de $B(t)$ sur l'état du vide $|\psi_0(t)\rangle$ s'écrit

$$B(t) \left|\psi_0(t)\right\rangle = 0, . \tag{5.1.13}$$

alors que $\bar{B}(t)$ amène l'état $|\psi_0(t)\rangle$ à $|\psi_1(t)\rangle$

$$\bar{B}(t) \left|\psi_0(t)\right\rangle = \left|\psi_1(t)\right\rangle . \tag{5.1.14}$$

Les deux états $|\psi_0(t)\rangle$ et $|\psi_1(t)\rangle$ forment une base η-normalisée:

$$\langle \psi_n(t) | \psi_m(t) \rangle_{\eta} = \delta_{nm}, \qquad n, m = 0, 1 \tag{5.1.15}$$

$$\begin{aligned} \eta \left|\psi_0(t)\right\rangle \left\langle \psi_0(t)\right| + \eta \left|\psi_1(t)\right\rangle \left\langle \psi_1(t)\right| &= \mathbf{I}, & (5.1.16) \\ \left|\psi_0(t)\right\rangle \left\langle \psi_0(t)\right| \eta + \left|\psi_1(t)\right\rangle \left\langle \psi_1(t)\right| \eta &= \mathbf{I}. & (5.1.17) \end{aligned}$$

5.2 Etats cohérents pseudo-fermioniques pour des hamiltoniens non-hermitiens dépendants du temps

Nous définissons les états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps comme des fonctions propres de l'opérateur invariant-annihilation $B(t)$, de ce fait nous écrivons

$$B(t)\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle=\xi\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle. \tag{5.2.1}$$

Les variables de paramétrisation de ces états sont les variables complexes de Grassmann, qui sont indépendantes du temps puisque $B(t)$ est un invariant. Les variables complexes de Grassmann anticommutent avec tous les opérateurs pseudo-fermioniques dépendants du temps

$$[\xi, B(t)]_{+} = 0, \quad \left[\xi, \bar{B}(t)\right]_{+}=0, \tag{5.2.2}$$

$$[\xi^{*}, B(t)]_{+} = 0, \left[\xi^{*}, \bar{B}(t)\right]_{+}=0, \tag{5.2.3}$$

Leur action sur les états $|\psi_0(t)\rangle$ et $|\psi_1(t)\rangle$ est

$$\xi\left|\psi_0(t)\right\rangle = \left|\psi_0(t)\right\rangle\xi, \tag{5.2.4}$$

$$\xi\left|\psi_1(t)\right\rangle = -\left|\psi_1(t)\right\rangle\xi. \tag{5.2.5}$$

Les états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps peuvent être définis comme l'action de l'opérateur pseudo-unitaire $U(\xi,t)$ sur l'état fondamental $|\psi_0(t)\rangle$, on écrit alors

$$\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle=U(\xi,t)\left|\psi_0(t)\right\rangle, \tag{5.2.6}$$

avec

$$U(\xi,t)=e^{\bar{B}(t)\xi-\xi^{*}B(t)}, \tag{5.2.7}$$

On peut développer l'opérateur de déplacement $U(\xi,t)$ comme suit

$$U(\xi,t)=1+\bar{B}(t)\xi-\xi^{*}B(t)+\left[\bar{B}(t)B(t)-\frac{1}{2}\right]\xi^{*}\xi, \tag{5.2.8}$$

son pseudo-adjoint $\bar{U}(\xi,t) = \eta^{-1}U^{\dagger}(\xi,t)\eta$ est donné par

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi,t) &= e^{\xi^* B(t) - \bar{B}(t)\xi}, && (5.2.9) \\ \bar{U}(\xi,t) &= 1 + \xi^* B(t) - \bar{B}(t)\xi + \left[\bar{B}(t)B(t) - \frac{1}{2}\right]\xi^*\xi. && (5.2.10) \end{aligned}$$

Les opérateurs $U(\xi,t)$ et $\bar{U}(\xi,t)$ sont pseudo-unitaires

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi,t)U(\xi,t) &= e^{\xi^* B(t) - \bar{B}(t)\xi} e^{\bar{B}(t)\xi - \xi^* B(t)}, && (5.2.11) \\ &= U(\xi,t)\bar{U}(\xi,t), && (5.2.12) \\ &= \mathbf{I}. && (5.2.13) \end{aligned}$$

Ces deux opérateurs satisfont les relations suivantes

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi,t)B(t)U(\xi,t) &= e^{\xi^* B(t) - \bar{B}(t)\xi} B(t) e^{\bar{B}(t)\xi - \xi^* B(t)}, && (5.2.14) \\ &= B(t) + \xi, && (5.2.15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{U}(\xi,t)\bar{B}(t)U(\xi,t) &= e^{\xi^* B(t) - \bar{B}(t)\xi} \bar{B}(t) e^{\bar{B}(t)\xi - \xi^* B(t)}, && (5.2.16) \\ &= \bar{B}(t) + \xi^*. && (5.2.17) \end{aligned}$$

Nous pouvons montrer que les deux définitions d'états cohérents pseudo-fermioniques dans les équations (5.2.1) et (5.2.6) sont équivalentes, nous commençons par

$$B(t)\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle = B(t)U(\xi,t)\left|\psi_0(t)\right\rangle, \qquad (5.2.18)$$

l'opérateur $U(\xi,t)$ est pseudo-unitaire, nous avons

$$B(t)\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle = U(\xi,t)\bar{U}(\xi,t)B(t)U(\xi,t)\left|\psi_0(t)\right\rangle, \qquad (5.2.19)$$

En tenant compte du résultat obtenu dans l'équation (5.2.15) , il vient

$$\begin{aligned} B(t)\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle &= U(\xi,t)\left[B(t)+\xi\right]\left|\psi_0(t)\right\rangle, && (5.2.20) \\ &= U(\xi,t)\xi\left|\psi_0(t)\right\rangle, && (5.2.21) \\ &= \xi\left|\psi_{\xi}(t)\right\rangle. && (5.2.22) \end{aligned}$$

En substituant l'expression de $U(\xi, t)$ donnée par l'équation (5.2.8) dans l'équation (5.2.6), on trouve

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|\psi_0(t)\rangle - \xi\,|\psi_1(t)\rangle). \tag{5.2.23}$$

En se basant sur les propriétés des variables de Grassmann et en tenant compte du fait que $|\psi_0(t)\rangle$ et $|\psi_1(t)\rangle$ forment une base η-normalisée, il en résulte que

$$\left\langle\psi_\xi(t)|\psi_\xi(t)\right\rangle_\eta = (1-\xi^*\xi)(1+\xi^*\xi) = 1. \tag{5.2.24}$$

Etablissons maintenant la résolution de l'identité de la manière suivante

$$\int d\xi^* d\xi \eta \left|\psi_\xi(t)\right\rangle \left\langle\psi_\xi(t)\right| = \int d\xi^* d\xi \eta e^{-\xi^*\xi} \left[(|\psi_0(t)\rangle - \xi\,|\psi_1(t)\rangle)\right]\left[(\langle\psi_0(t)| + \xi^*\,\langle\psi_1(t)|)\right], \tag{5.2.25}$$

$$= \int d\xi^* d\xi e^{-\xi^*\xi} \left[\eta\,|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)| + \xi\xi^*\eta\,|\psi_1(t)\rangle\,\langle\psi_1(t)|\right] + \tag{5.2.26}$$

$$\int d\xi^* d\xi e^{-\xi^*\xi} \left[\xi^*\eta\,|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_1(t)| - \xi\eta\,|\psi_1(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)|\right], \tag{5.2.27}$$

Compte tenu de

$$\eta\,|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)| + \eta\,|\psi_1(t)\rangle\,\langle\psi_1(t)| = \mathbf{I}, \tag{5.2.28}$$

la résolution de l'identité s'écrit finalement

$$\int d\xi^* d\xi \eta \left|\psi_\xi(t)\right\rangle \left\langle\psi_\xi(t)\right| = \int d\xi^* d\xi e^{-\xi^*\xi} \left[\eta(1-\xi\xi^*)\,|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)| + \xi\xi^*\mathbf{I}\right], \tag{5.2.29}$$

$$= \int d\xi^* d\xi \left[\eta\,|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)| + \xi\xi^*\mathbf{I}\right], \tag{5.2.30}$$

$$= \mathbf{I}. \tag{5.2.31}$$

Nous tenons à souligner que notre méthode de construction des états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps diffère de la méthode utilisée dans la référence [82], basée sur l'approche de Lewis et Riesenfeld où l'invariant hermitien $I(t)$ a été tout d'abord construit comme un produit d'opérateurs d'échelle qui ne sont pas des opérateurs invariants, contrairement à la nouvelle méthode abordée dans [11].

5.3 Solution de l'équation de Schrödinger pour un système non-hermitien dépendant du temps

Nous pouvons écrire les solutions $|\Psi_\xi(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger (5.1.1) en fonction des états propres $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ de $B(t)$ comme suit

$$|\Psi_\xi(t)\rangle = \exp(i\alpha_\xi(t)) \left|\psi_\xi(t)\right\rangle, \tag{5.3.1}$$

où la dérivée de la fonction de phase $\alpha_\xi(t)$ est donnée par l'expression suivante

$$\frac{d\alpha_\xi(t)}{dt} = i \left\langle\psi_\xi(t)\right| \eta\frac{\partial}{\partial t} \left|\psi_\xi(t)\right\rangle - \frac{1}{\hbar} \left\langle\psi_\xi(t)\right| \eta H(t)) \left|\psi_\xi(t)\right\rangle. \tag{5.3.2}$$

Montrons maintenant que la phase $\alpha_\xi(t)$ est égale à zéro pour tout système pseudo-fermionique; en prenant la dernière expression donnée par l'équation (5.3.2), nous déduisons que les phases dynamique et géométrique s'expriment respectivement ainsi

$$\frac{d\alpha_\xi^g(t)}{dt} = \dot{\alpha}_\xi^g(t) = i \left\langle\psi_\xi(t)\right| \eta\frac{\partial}{\partial t} \left|\psi_\xi(t)\right\rangle, \tag{5.3.3}$$

$$\frac{d\alpha_\xi^d(t)}{dt} = \dot{\alpha}_\xi^d(t) = -\frac{1}{\hbar} \left\langle\psi_\xi(t)\right| \eta H(t)) \left|\psi_\xi(t)\right\rangle. \tag{5.3.4}$$

L'équation (5.2.23) permet d'écrire les états cohérents pseudo-fermioniques $\left|\psi_\xi(t)\right\rangle$ et $\left\langle\psi_\xi(t)\right|$ sous la forme suivante

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(|\psi_0(t)\rangle - \xi\,|\psi_1(t)\rangle), \tag{5.3.5}$$

$$\left\langle\psi_\xi(t)\right| = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(\langle\psi_0(t)| + \xi^*\,\langle\psi_1(t)|). \tag{5.3.6}$$

En injectant ces deux dernières relations dans les équations (5.3.4) et (5.3.3), et en utilisant quelques propriétés des variables de Grassmann données par

$$\xi\,|\psi_0(t)\rangle = |\psi_0(t)\rangle\,\xi, \qquad \xi\,|\psi_1(t)\rangle = -\,|\psi_1(t)\rangle\,\xi. \tag{5.3.7}$$

nous aboutissons à ces deux nouvelles expressions des phases dynamiques et géométriques:

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{\xi}^{d}(t) &= -(1-\xi^{*}\xi)\left\langle\psi_{0}(t)\right|\eta H(t)\left|\psi_{0}(t)\right\rangle-\xi^{*}\left\langle\psi_{1}(t)\right|\eta H(t)\left|\psi_{0}(t)\right\rangle &\quad (5.3.8)\\ &\quad -\xi\left\langle\psi_{0}(t)\right|\eta H(t)\left|\psi_{1}(t)\right\rangle-\xi^{*}\xi\left\langle\psi_{1}(t)\right|\eta H(t)\left|\psi_{1}(t)\right\rangle, &\quad (5.3.9)\end{aligned}$$

et

$$\dot{\alpha}_{\xi}^{g}(t)=ie^{-\frac{1}{2}\xi^{*}\xi}\begin{bmatrix}\left\langle\psi_{0}(t)\right|\eta\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{0}(t)\right\rangle-\left\langle\psi_{0}(t)\right|\eta\xi\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{1}(t)\right\rangle\\ +\xi^{*}\left\langle\psi_{1}(t)\right|\eta\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{0}(t)\right\rangle-\xi^{*}\left\langle\psi_{1}(t)\right|\eta\xi\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{1}(t)\right\rangle\end{bmatrix}. \tag{5.3.10}$$

En utilisant les deux relations suivantes

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\xi\left|\psi_{1}(t)\right\rangle\right]=\frac{\partial}{\partial t}\left[-\left|\psi_{1}(t)\right\rangle\xi\right], \tag{5.3.11}$$

et

$$\xi\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{1}(t)\right\rangle=-\left[\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{1}(t)\right\rangle\right]\xi, \tag{5.3.12}$$

la phase géométrique peut se réécrire comme suit

$$\begin{aligned}\dot{\alpha}_{\xi}^{g}(t) &= i(1-\xi^{*}\xi)\left\langle\psi_{0}(t)\right|\eta\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{0}(t)\right\rangle+i\xi\left\langle\psi_{0}(t)\right|\eta\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{1}(t)\right\rangle\\ &\quad +i\xi^{*}\left\langle\psi_{1}(t)\right|\eta\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{0}(t)\right\rangle+i\xi\xi^{*}\left\langle\psi_{1}(t)\right|\eta\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{1}(t)\right\rangle. &\quad (5.3.13)\end{aligned}$$

Evaluons maintenant les quatres termes de la phase géométrique; sachant que

$$B(t)\left|\psi_{0}(t)\right\rangle=0, \tag{5.3.14}$$

la dérivée donne

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t)\right]\left|\psi_{0}(t)\right\rangle+B(t)\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{0}(t)\right\rangle=0, \tag{5.3.15}$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|\psi_{0}(t)\right\rangle=-B^{-1}(t)\left[\frac{\partial}{\partial t}B(t)\right]\left|\psi_{0}(t)\right\rangle. \tag{5.3.16}$$

Puisque $B(t)$ est un invariant associé à $H(t)$, c'est-à-dire

$$\frac{\partial}{\partial t}B(t)=iB(t)H(t)-iH(t)B(t), \tag{5.3.17}$$

il suffit alors d'injecter l'équation (5.3.17) dans (5.3.16) pour aboutir à

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_0(t)\rangle = -B^{-1}(t)\left[iB(t)H(t) - iH(t)B(t)\right]|\psi_0(t)\rangle . \tag{5.3.18}$$

De cette façon, nous obtenons

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_0(t)\rangle = -iH(t)|\psi_0(t)\rangle , \tag{5.3.19}$$

ceci signifie que $|\psi_0(t)\rangle$ obéït à l'équation de Schrödinger.

Nous réexprimons le premier et le troisième termes de la phase géométrique (5.3.10) comme suit

$$i\langle\psi_0(t)|\,\eta\frac{\partial}{\partial t}|\psi_0(t)\rangle = \langle\psi_0(t)|\,\eta H(t)|\psi_0(t)\rangle , \tag{5.3.20}$$

$$i\langle\psi_1(t)|\,\eta\frac{\partial}{\partial t}|\psi_0(t)\rangle = \langle\psi_1(t)|\,\eta H(t)|\psi_0(t)\rangle \tag{5.3.21}$$

En appliquant la même démarche pour $\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle$, nous avons

$$\bar{B}(t)|\psi_0(t)\rangle = |\psi_1(t)\rangle , \tag{5.3.22}$$

la différenciation de cette dernière permet d'écrire

$$\left[\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(t)\right]|\psi_0(t)\rangle + \bar{B}(t)\frac{\partial}{\partial t}|\psi_0(t)\rangle = \frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle , \tag{5.3.23}$$

En portant l'équation (5.3.19) dans l'équation précédente il s'ensuit

$$\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle = \left[\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(t)\right]|\psi_0(t)\rangle - i\bar{B}(t)H(t)|\psi_0(t)\rangle \tag{5.3.24}$$

Comme $\bar{B}(t)$ est aussi un invariant associé à $H(t)$, nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t}\bar{B}(t) = i\bar{B}(t)H(t) - iH(t)\bar{B}(t), \tag{5.3.25}$$

nous en déduisons que $\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle$ s'écrit comme

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle &= \left[i\bar{B}(t)H(t) - iH(t)\bar{B}(t)\right]|\psi_0(t)\rangle - i\bar{B}(t)H(t)|\psi_0(t)\rangle , && (5.3.26)\\
&= -iH(t)\bar{B}(t)|\psi_0(t)\rangle , && (5.3.27)\\
&= -iH(t)|\psi_1(t)\rangle , && (5.3.28)
\end{aligned}$$

ce qui confirme que $|\psi_1(t)\rangle$ obéit également à l'équation de Schrödinger. Les deuxième et quatrième termes sont donc donnés par

$$i\langle\psi_0(t)|\,\eta\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle = \langle\psi_0(t)|\,\eta H(t)\,|\psi_1(t)\rangle\,, \tag{5.3.29}$$

$$i\langle\psi_1(t)|\,\eta\frac{\partial}{\partial t}|\psi_1(t)\rangle = \langle\psi_1(t)|\,\eta H(t)\,|\psi_1(t)\rangle\,, \tag{5.3.30}$$

L'expression finale de la phase géométrique est donnée par

$$\begin{aligned} \dot{\alpha}_\xi^g(t) &= (1-\xi^*\xi)\,\langle\psi_0(t)|\,\eta H(t)\,|\psi_0(t)\rangle + \xi\,\langle\psi_0(t)|\,\eta H(t)\,|\psi_1(t)\rangle && (5.3.31)\\ &\quad +\xi^*\,\langle\psi_1(t)|\,\eta H(t)\,|\psi_0(t)\rangle + \xi^*\xi\,\langle\psi_1(t)|\,\eta H(t)\,|\psi_1(t)\rangle\,, && (5.3.32)\\ &= -\dot{\alpha}_\xi^d(t), && (5.3.33) \end{aligned}$$

donc

$$\dot{\alpha}_\xi^g(t) + \dot{\alpha}_\xi^d(t) = 0. \tag{5.3.34}$$

Dans ce qui précède, nous avons pu montrer que la phase totale est constante pour tout système pseudo-fermionique dépendant du temps.

CHAPITRE 6 Illustration

6.1 Introduction

Le système à deux niveaux a été un modèle référence dans de nombreuses branches de la physique allant des interactions rayonnement-matière aux collisions physiques [83]-[85], il est au cœur des applications modernes et constitue le fondement des études fondamentales de la mécanique quantique.

Ce chapitre sera donc consacré à l'étude d'un système pseudo-fermionique $\mathcal{PT}$ -symétrique dépendant du temps à deux niveaux. Pour ce faire, nous allons utiliser la méthode de DMMT que nous avons généralisée auparavant, par la suite nous étendrons cette méthode de DMMT au cas pseudo-bosonique en donnant l'exemple d'un oscillateur quantique amorti décrit par un hamiltonien non hermitien dépendant du temps.

6.2 Système à deux niveaux PT-symétrique dépendant du temps

6.2.1 Présentation du modèle

Nous considérons le système à deux niveaux $\mathcal{PT}$ -symmétrique dépendant du temps introduit par Luo [86]. L'évolution du système est décrite par l'équation de Schrödinger,

$$i\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_0(t) \end{pmatrix} = H(t)\begin{pmatrix} C_1(t) \\ C_0(t) \end{pmatrix}, \tag{6.2.1}$$

avec l'Hamiltonian $H(t)$

$$H(t) = i\gamma(t)\sigma_z + \nu(t)\sigma_x, \tag{6.2.2}$$

où σ_x et σ_z sont les matrices de Pauli habituelles, $\nu(t)$ la fréquence de Rabi réelle qui décrit le couplage entre les deux niveaux et $\gamma(t)$ représente une paire de coefficients de gain-perte réels, tandis que $C_1(t)$ et $C_0(t)$ sont respectivement les amplitudes des vecteurs de base des niveaux supérieur et inférieur $|1\rangle = \binom{1}{0}$ et $|0\rangle = \binom{0}{1}$.

Le système étudié (6.2.1) peut être réalisé dans de nombreux contextes physiques, tels que des guides d'ondes couplés avec un indice de réfraction complexe [87],[88] ou un système dissipatif à deux états d'atomes froids [89].

Dans ce travail, on s'intéresse aux modulations synchrones ce qui signifie que les termes $\gamma(t)$ et $\nu(t)$ ont la même dépendance temporelle, en d'autres termes, les fonctions de modulation $\gamma(t)$ et $\nu(t)$ satisfont la relation $\gamma(t) = k\nu(t)$, k étant une constante complexe [86].

Nous obtenons un système à deux niveaux, symétrique par réflexion espace-temps sous des modulations synchrones combinées; l'hamiltonien du système s'écrit

$$H(t) = \nu(t)\begin{pmatrix} ik & 1 \\ 1 & -ik \end{pmatrix} = \nu(t)\mathcal{H} \tag{6.2.3}$$

$$. \tag{6.2.4}$$

L'Hamitonien $H(t)$ peut être écrit en fonction des matrices de Pauli comme suit

$$H(t) = \nu(t)\mathcal{H} = \nu(t)(ik\sigma_z + \sigma_x), \tag{6.2.5}$$

avec

$$\mathcal{H} = \begin{pmatrix} ik & 1 \\ 1 & -ik \end{pmatrix}, \tag{6.2.6}$$

l'hamiltonien indépendant du temps $\mathcal{H}$ est $\mathcal{PT}$ -symmétrique, l'opérateur parité $\mathcal{P}$ étant donné par

$$\mathcal{P} = \sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{6.2.7}$$

Nous supposons que $|k| < 1$ correspond au régime de $PT-$symétrie non brisée. Ensuite, $H(t)$ peut être transformé en son hamiltonien hermitien correspondant $h(t)$ à travers la transformation de similarité $h(t) = \rho H(t)\rho^{-1}$, avec une métrique indépendante du temps ρ donnée par

$$\rho = \frac{1}{\sqrt{\cos\theta}} \begin{pmatrix} \sin\frac{\theta}{2} & -i\cos\frac{\theta}{2} \\ i\cos\frac{\theta}{2} & \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.2.8}$$

où $\sin\theta = k$, $\cos\theta = \sqrt{1-k^2}$.

L'hamiltonien $h(t)$ est explicitement exprimé par

$$h(t) = \begin{pmatrix} 0 & -\nu(t)\cos\theta \\ -\nu(t)\cos\theta & 0 \end{pmatrix} = -\nu(t)\cos\theta\sigma_x. \tag{6.2.9}$$

6.2.2 Construction de l'invariant

Nous recherchons les opérateurs invariants $A(t)$ et $A^\dagger(t)$ associés à $h(t)$, ces derniers s'écrivent

$$A(t) = R_-(t)\sigma_- + R_+(t)\sigma_+ + R_3(t)\sigma_z, \tag{6.2.10}$$

$$A^\dagger(t) = R_+^*(t)\sigma_- + R_-^*(t)\sigma_+ + R_3^*(t)\sigma_z, \tag{6.2.11}$$

où $\sigma_\pm = \frac{1}{2}(\sigma_x \pm i\sigma_y)$, $R_\pm(t)$ et $R_3(t)$ sont des coefficients réels ou complexes en fonction du temps, à déterminer.

En remplaçant les équations (6.2.10) et (6.2.9) dans (1.3.5) on obtient le système d'équations différentielles du premier ordre couplées reliant les paramètres de $h(t)$ à ceux de $A(t)$

$$\dot{R}_3(t) = -i\nu\cos\theta(R_+ - R_-), \tag{6.2.12}$$

$$\dot{R}_+(t) = -2i\nu\cos\theta R_3, \tag{6.2.13}$$

$$\dot{R}_-(t) = 2i\nu\cos\theta R_3. \tag{6.2.14}$$

Notons que le point désigne une différenciation par rapport au temps. Maintenant nous allons reécrire ces trois équation différentielles en une seule équation qui est en fonction en $R_+(t)$, à partir des équation (6.2.13) on a

$$R_3(t) = \frac{i\dot{R}_+}{2\nu\cos\theta} \tag{6.2.15}$$

De plus, nous imposons la condition que $A(t)$ et $A^\dagger(t)$ soient des opérateurs fermioniques, c'est-à-dire qu'ils obéissent aux relations fermioniques d'anticommutation ce qui se traduit par les deux équations suivantes

$$A(t)A^\dagger(t) + A^\dagger(t)A(t) = |R_-|^2 + |R_+|^2 + 2|R_3|^2 = \mathbf{1}, \tag{6.2.16}$$

et

$$A^2(t) = A^{\dagger 2}(t) = R_+R_- + R_3^2 = 0. \tag{6.2.17}$$

A partir des équation (6.2.15) et (6.2.17) nous écrivons R_- en fonction de R_+

$$R_- = \frac{\dot{R}_+^2}{4\nu^2\cos^2\theta R_+}, \tag{6.2.18}$$

nous obtenons l'equation differentielle du second ordre en fonction de R_+ :

$$2R_+\ddot{R}_+ - \dot{R}_+^2 - 2\frac{\dot{\nu}}{\nu}R_+\dot{R}_+ + 4\nu^2\cos^2(\theta)R_+^2 = 0 \tag{6.2.19}$$

nous introduisons le changement de variable suivant

$$R_+(t) = \tfrac{1}{2}\nu r^2(t), \tag{6.2.20}$$

ce qui conduit à l'équation auxiliaire linéaire en r donnée par

$$\ddot{r} + \Omega(t)r = 0, \tag{6.2.21}$$

où

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}\frac{\ddot{\nu}}{\nu} - \frac{3}{4}\left(\frac{\dot{\nu}}{\nu}\right)^2 + \nu^2(t)(1-k^2). \tag{6.2.22}$$

Ici la "fréquence" Ω dépend des paramètres de l'hamiltonien correspondant. Les solutions de l'équation auxiliaire sont soumises à des contraintes différentes. Nous posons $\tau = \tau(t) = \int \nu(t)dt$, et de ce fait la solution de l'équation auxiliaire (6.2.21) s'écrira donc

$$r(t) = \frac{1}{\sqrt{\nu(t)}}(A_1 e^{i\tau(t)\cos\theta} + A_2 e^{-i\tau(t)\cos\theta}), \tag{6.2.23}$$

où les constantes A_1 et A_2 sont déterminées par les conditions initiales.

Determinons, à présent, explicitement les expressions des opérateurs pseudo-fermioniques dépendants du temps $B(t)$ et $\bar{B}(t)$.En effet, en remplaçant les expressions de $A(t)$, $A^\dagger(t)$ et ρ données par les équations (6.2.10), (6.2.11) et (6.2.8) respectivement, on trouve les opérateurs pseudo-fermioniques $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ dépendant du temps via la relation $B(t) = \rho^{-1}A(t)\rho$, qui s'écrivent de la manière suivante

$$B(t) = \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix} -R_3 - i\sin\theta\frac{R_+ + R_-}{2} & iR_3\sin\theta - R_-\cos^2\frac{\theta}{2} - R_+\sin^2\frac{\theta}{2} \\ iR_3\sin\theta - R_-\sin^2\frac{\theta}{2} - R_+\cos^2\frac{\theta}{2} & R_3 + i\sin\theta\frac{R_+ + R_-}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.2.24}$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} \mu_3(t) & \mu_+(t) \\ \mu_-(t) & -\mu_3(t) \end{pmatrix}, \tag{6.2.25}$$

où μ_3, μ_+ et μ_- sont donnés par

$$\begin{aligned} \mu_3(t) &= \frac{1}{2\cos\theta}\left(A_1^2 e^{2i\tau\cos\theta} + A_2^2 e^{-2i\tau\cos\theta}\right) - i\frac{\tan\theta}{2}A_1A_2, && (6.2.26)\\ \mu_+(t) &= \frac{1}{2\cos\theta}(A_1 e^{i(\tau\cos\theta - \frac{\theta}{2})} - A_2 e^{-i(\tau\cos\theta - \frac{\theta}{2})})^2, && (6.2.27)\\ \mu_-(t) &= -\frac{1}{2\cos\theta}(A_1 e^{i(\tau\cos\theta + \frac{\theta}{2})} + A_2 e^{-i(\tau\cos\theta + \frac{\theta}{2})})^2, && (6.2.28) \end{aligned}$$

tandis que l'opérateur de création pseudo-fermionique obtenu via la relation $\bar{B}(t) = \rho^{-1}A^\dagger(t)\rho$ est donné par

$$\bar{B}(t) = \frac{1}{\cos\theta}\begin{pmatrix} -R_3^* - i\sin\theta\frac{R_+^* + R_-^*}{2} & iR_3^*\sin\theta - R_-^*\sin^2\frac{\theta}{2} - R_+^*\cos^2\frac{\theta}{2} \\ iR_3^*\sin\theta - R_-^*\cos^2\frac{\theta}{2} - R_+^*\sin^2\frac{\theta}{2} & R_3^* + i\sin\theta\frac{R_+^* + R_-^*}{2} \end{pmatrix}, \tag{6.2.29}$$

on peut l'écrire aussi sous cette forme

$$\bar{B}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_3(t) & \lambda_+(t) \\ \lambda_-(t) & -\lambda_3(t) \end{pmatrix}, \tag{6.2.30}$$

où λ_3, λ_+ et λ_- sont donnés par

$$\begin{aligned}
\lambda_3(t) &= \frac{1}{2\cos\theta}\left(A_1^2 e^{-2i\tau\cos\theta} - A_2^2 e^{2i\tau\cos\theta}\right) - i\frac{\tan\theta}{2}A_1A_2, && (6.2.31)\\
\lambda_+(t) &= -\frac{1}{2\cos\theta}(A_1 e^{-i(\tau\cos\theta-\frac{\theta}{2})} + A_2 e^{i(\tau\cos\theta-\frac{\theta}{2})})^2, && (6.2.32)\\
\lambda_-(t) &= \frac{1}{2\cos\theta}(A_1 e^{-i(\tau\cos\theta+\frac{\theta}{2})} + A_2 e^{i(\tau\cos\theta+\frac{\theta}{2})})^2. && (6.2.33)
\end{aligned}$$

Notons que $\lambda_3 \neq \mu_3^*$, $\lambda_+ \neq \mu_-^*$, $\lambda_- \neq \mu_+^*$, ce qui signifie que $\bar{B}(t) \neq B^\dagger(t)$. De plus, $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ satisfont évidemment à l'algèbre pseudo-fermionique dépendant du temps, (5.1.12).

6.2.3 Etats cohérents pour un système à deux niveaux PT-symétrique dépendant du temps

Les opérateurs $B(t)$ et $\bar{B}(t)$ ($\bar{B}^\dagger(t)$ et $B^\dagger(t)$) sont les opérateurs invariants d'annihilation et de création associés à $H(t)$ et $(H^\dagger(t))$. L'état $|\psi_0(t)\rangle$ associé à l'hamiltonien $H(t)$ est déduit à partir de l'équation $B(t)\,|\psi_0(t)\rangle = 0$

$$|\psi_0(t)\rangle = d\begin{pmatrix}\mu_3(t)\\ \mu_-(t)\end{pmatrix}, \tag{6.2.34}$$

cependant nous obtenons l'état $|\psi_1(t)\rangle$ à partir de $|\psi_1(t)\rangle = \bar{B}(t)\,|\psi_0(t)\rangle$

$$|\psi_1(t)\rangle = d\begin{pmatrix}\mu_3(t)\lambda_3(t) + \mu_-(t)\lambda_+(t)\\ \mu_3(t)\lambda_-(t) - \mu_-(t)\lambda_3(t)\end{pmatrix}, \tag{6.2.35}$$

où

$$d = (\frac{\cos\theta}{\Lambda})^{\frac{1}{2}}, \tag{6.2.36}$$

et

$$\Lambda = \mu_3(t)\mu_3^*(t) + \mu_-(t)\mu_-^*(t) + ik\left[\mu_3(t)\mu_-^*(t) + \mu_-(t)\mu_3^*(t)\right], \tag{6.2.37}$$

ces deux états $|\psi_0(t)\rangle$ et $|\psi_1(t)\rangle$ satisfont à une base η-normalisée c'est-à-dire que

$$\langle\psi_n(t)|\psi_m(t)\rangle_\eta = \delta_{nm}, \tag{6.2.38}$$

$$\begin{aligned}
\eta\,|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)| + |\psi_1(t)\rangle\,\langle\psi_1(t)| &= \mathbf{I}, && (6.2.39)\\
|\psi_0(t)\rangle\,\langle\psi_0(t)|\,\eta + |\psi_1(t)\rangle\,\langle\psi_1(t)|\,\eta &= \mathbf{I}. && (6.2.40)
\end{aligned}$$

Les états cohérents pseudo-fermioniques dépendant du temps pour notre système sont définis par

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = U(\xi,t)\left|\psi_0(t)\right\rangle, \tag{6.2.41}$$

avec

$$U(\xi,t) = e^{\bar{B}(t)\xi-\xi^* B(t)}. \tag{6.2.42}$$

En substituant l'expression de $U(\xi,t)$ donnée par l'équation (5.2.8) dans l'équation (5.2.6), on trouve

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}(\left|\psi_0(t)\right\rangle - \xi\left|\psi_1(t)\right\rangle), \tag{6.2.43}$$

$$\left|\psi_\xi(t)\right\rangle = (\frac{\cos\theta}{\Lambda})^{\frac{1}{2}} e^{-\frac{1}{2}\xi^*\xi}\left[\begin{pmatrix}\mu_3(t)\\ \mu_-(t)\end{pmatrix} - \xi\begin{pmatrix}\mu_3(t)\lambda_3(t)+\mu_-(t)\lambda_+(t)\\ \mu_3(t)\lambda_-(t)-\mu_-(t)\lambda_3(t)\end{pmatrix}\right], \tag{6.2.44}$$

et le η-produit scalaire donne

$$\left\langle\psi_\xi(t)|\psi_\xi(t)\right\rangle_\eta = 1. \tag{6.2.45}$$

La phase totale est égale à zéro, et par conséquent, les états cohérents pseudo-fermioniques pour ce système évoluent sans phase.

6.3 Extension aux systèmes pseudo-bosoniques

Nous considérons un hamiltonien $H(t)$ non hermitien dépendant du temps dont l'équation de Schrödinger correspondante est donnée par l'équation (5.1.1). Soient $C(t)$ et $\bar{C}(t)$ deux intégrales du mouvement associées à l'hamiltonien $H(t)$

$$\frac{\partial C(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[C(t),H(t)\right] = 0, \tag{6.3.1}$$

$$\frac{\partial \bar{C}(t)}{\partial t} + \frac{1}{i\hbar}\left[\bar{C}(t),H(t)\right] = 0 \tag{6.3.2}$$

Sachant que les opérateurs $C(t)$ et $A(t)$ sont reliés par

$$C(t) = \rho^{-1}A(t)\rho, \tag{6.3.3}$$

$$\bar{C}(t) = \rho^{-1}A^\dagger(t)\rho, \tag{6.3.4}$$

où $A(t)$ et $A^{\dagger}(t)$ représentent les opérateurs invariants associés à l'hamiltonien hermitien $h(t)$ et satisfont les équations (1.3.5) et (1.3.6).

Comme les opérateurs invariants $\bar{C}(t)$ et $C^{\dagger}(t)$ associés à $H^{\dagger}(t)$ sont liés par

$$\bar{C}(t) = \eta^{-1} C^{\dagger}(t) \eta, \tag{6.3.5}$$

ceci signifie que $\bar{C}(t) \neq C^{\dagger}(t)$.

En utilisant les relations (6.3.3), (6.3.4) et (2.4.19), on peut déduire que $C(t)$ et $\bar{C}(t)$ sont des opérateurs pseudo-bosoniques dépendant du temps, c'est-à-dire qu'ils satisfont la relation de commutation

$$\left[C(t), \bar{C}(t)\right] = 1, \tag{6.3.6}$$

Par conséquent, $C(t)$ et $\bar{C}(t)$, ($\bar{C}^{\dagger}(t)$ et $C^{\dagger}(t)$) deviennent respectivement les opérateurs d'annihilation et de création associés à $H(t)$ et $(H^{\dagger}(t))$.

Les états cohérents pseudo-bosoniques dépendants du temps sont définis comme des fonctions propres de l'opérateur d'annihilation $C(t)$; de ce fait nous écrivons

$$C(t) \left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle = \alpha \left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle. \tag{6.3.7}$$

Les variables de paramétrisation de ces états sont les variables complexes indépendantes du temps car $C(t)$ est un invariant. Les états cohérents pseudo-bosoniques $\left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle$ peuvent également être définis comme état fondamental $\left|\psi_{0}(t)\right\rangle$ déplacé

$$\left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle = D(\alpha, t) \left|\psi_{0}(t)\right\rangle. \tag{6.3.8}$$

avec

$$D(\alpha) = e^{\alpha \bar{C}(t) - \alpha^{*} C(t)} \tag{6.3.9}$$

Les états cohérents pseudo-bosoniques sont alors donnés par

$$\left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle = e^{-\frac{|\alpha|^2}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}} \left|\psi_{n}(t)\right\rangle, \tag{6.3.10}$$

$$\left\langle \psi_{\alpha}(t) | \psi_{\alpha}(t) \right\rangle_{\eta} = \left\langle \psi_{\alpha}(t) | \eta | \psi_{\alpha}(t) \right\rangle = \mathbf{1}, \tag{6.3.11}$$

et le système $\{\left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle, \eta \left|\psi_{\alpha}(t)\right\rangle ; \alpha \in \mathbb{C}\}$ est bi-surcomplet c'est-à-dire

$$\frac{1}{\pi}\int \eta \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle \left\langle \psi_\alpha(t)\right| d^2\alpha = \mathbf{1}, \tag{6.3.12}$$

avec

$$d^2\alpha = d(\mathrm{Re}\,\alpha)d(\mathrm{Im}\,\alpha). \tag{6.3.13}$$

Nous pouvons écrire les solutions $|\Psi(t)\rangle$ de l'équation de Schrödinger (5.1.1) en fonction des états propres $|\psi_\alpha(t)\rangle$ de $C(t)$ comme suit

$$\left|\Psi_\alpha(t)\right\rangle = \exp(i\alpha_\alpha(t)) \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle, \tag{6.3.14}$$

où la dérivée de la fonction de phase $\alpha_\alpha(t)$ est donnée par l'équation

$$\frac{d\alpha_\alpha(t)}{dt} = i \left\langle \psi_\alpha(t)\right| \eta \frac{\partial}{\partial t} \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle - \frac{1}{\hbar} \left\langle \psi_\alpha(t)\right| \eta H(t)) \left|\psi_\alpha(t)\right\rangle. \tag{6.3.15}$$

6.3.1 Oscillateur bosonique amorti décrit par l'hamiltonien non Hermitique dépendant du temps

Nous nous servirons de la méthode de DMMT que nous avons étendue précédemment pour l'étude de l'exemple de l'oscillateur quantique amorti décrit par l'hamiltonien non hermitique dépendant du temps qui s'écrit sous la forme

$$H(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m}e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{x}^2 e^{\lambda t} + i\hat{p}e^{-\lambda t} - \frac{m}{2}e^{-\lambda t}, \tag{6.3.16}$$

où $\omega(t)$ est une fonction réelle dépendante du temps et λ un facteur d'amortissement réel ($\lambda > 0$),

L'hamiltonien $H(t)$ peut être transformé en son hamiltonien hermitien correspondant $h(t)$ via la relation de similarité $h(t) = \rho H(t)\rho^{-1}$ avec

$$\rho = e^{-m\hat{x}}, \tag{6.3.17}$$

$$\begin{aligned} h(t) &= e^{-m\hat{x}}(\frac{\hat{p}^2}{2m}e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{x}^2 e^{\lambda t} + i\hat{p}e^{-\lambda t} - \frac{m}{2}e^{-\lambda t})e^{m\hat{x}} \quad (6.3.18) \\ &= \frac{1}{2m}e^{-\lambda t}e^{-m\hat{x}}\hat{p}^2 e^{m\hat{x}} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)e^{\lambda t}e^{-m\hat{x}}\hat{x}^2 e^{m\hat{x}} + \\ &\quad ie^{-\lambda t}e^{-m\hat{x}}\hat{p}e^{m\hat{x}} - \frac{m}{2}e^{-\lambda t}, \quad (6.3.19) \end{aligned}$$

nous utilisons l'identité suivante

$$e^{-mA}Be^{mA} = B - \frac{m}{1!}[A,B] + \frac{(-m)^2}{2!}[A,[A,B]] + ... \quad (6.3.20)$$

et les relations de commutation

$$[\hat{x},\hat{p}] = i, \quad \left[\hat{x},\hat{p}^2\right] = 2i\hat{p} \quad (6.3.21)$$

l'hamiltonien Hermitien $h(t)$ s'écrit alors

$$h(t) = \frac{\hat{p}^2}{2m}e^{-\lambda t} + \frac{1}{2}m\omega^2(t)\hat{x}^2 e^{\lambda t}, \quad (6.3.22)$$

$h(t)$ est l'hamiltonien hermitien de l'oscillateur harmonique amorti quantique. En fait, dans le cas où ω est constant, $h(t)$ est l'hamiltonien de type Caldirola-Kanai [90],[91], qui admet un système classique dissipatif correspondant. Il est utile de souligner que pour $t = 0$, notre hamiltonien non-hermitien $H(0)$ donné par (6.3.16) coïncide (à une constante près) avec l'hamiltonien non-hermitien indépendant du temps introduit par Bagarello dans [92].

En prenant le cas où $\Gamma(t) = \frac{1}{2}\lambda t$ et $f(t) = 0$, l'hamiltonien donné par l'équation (1.3.3) (le système de l'oscillateur amorti avec des paramètres dépendants du temps) que nous avons abordé dans le premier chapitre, se réduit à celui donné par l'équation 6.3.22, de ce fait les invariants d'échelle $A(t)$ et $A^\dagger(t)$ associés à $h(t)$ s'écrivent alors

$$\begin{aligned} A(t) &= \frac{i}{\sqrt{2m}}(\epsilon\hat{p} - m\dot{\epsilon}e^{\lambda t}\hat{x}), \quad (6.3.23) \\ A^\dagger(t) &= -\frac{i}{\sqrt{2m}}(\epsilon^*\hat{p} - m\dot{\epsilon}^* e^{\lambda t}\hat{x}), \quad (6.3.24) \end{aligned}$$

où $\epsilon(t)$ sont les solutions de l'équation auxiliaire

$$\ddot{\epsilon} + \lambda\dot{\epsilon} + \omega^2(t)\epsilon = 0, \tag{6.3.25}$$

Les opérateurs pseudo-bosoniques dépendant du temps, désignés par $C(t)$ et $\bar{C}(t)$, sont déduits par les relations de similarité (6.3.3) et (6.3.4) et donnés par

$$\begin{aligned} C(t) &= \rho^{-1}A(t)\rho, && (6.3.26)\\ &= A(t) - \sqrt{\frac{m}{2}}\epsilon(t), && (6.3.27)\\ &= \frac{i}{\sqrt{2m}}(\epsilon\hat{p} - m\dot{\epsilon}e^{\lambda t}\hat{x} + im\epsilon), && (6.3.28)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \bar{C}(t) &= \rho^{-1}A^{\dagger}(t)\rho, && (6.3.29)\\ &= A^{\dagger}(t) + \sqrt{\frac{m}{2}}\epsilon^*(t), && (6.3.30)\\ &= \frac{-i}{\sqrt{2m}}(\epsilon^*\hat{p} - m\dot{\epsilon}^*e^{\lambda t}\hat{x} + im\epsilon^*). && (6.3.31)\end{aligned}$$

Il est clair que $\left[C(t), \bar{C}(t)\right] = 1$.

Les opérateurs $\bar{C}^{\dagger}(t)$ et $C^{\dagger}(t)$ sont les opérateurs invariants d'annihilation et de création associés à $H^{\dagger}(t)$ et sont donnés par

$$\begin{aligned} \bar{C}^{\dagger}(t) &= A(t) + \sqrt{\frac{m}{2}}\epsilon(t), && (6.3.32)\\ &= \frac{i}{\sqrt{2m}}(\epsilon\hat{p} - m\dot{\epsilon}e^{\lambda t}\hat{x} - im\epsilon), && (6.3.33)\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} C^{\dagger}(t) &= A^{\dagger}(t) - \sqrt{\frac{m}{2}}\epsilon^*(t), && (6.3.34)\\ &= \frac{-i}{\sqrt{2m}}(\epsilon^*\hat{p} - m\dot{\epsilon}^*e^{\lambda t}\hat{x} - im\epsilon^*), && (6.3.35)\end{aligned}$$

On note que $C^{\dagger}(t) \neq \bar{C}(t)$.

Les états cohérents pseudo-bosoniques dépendants du temps associés à notre système sont construits à partir de l'équation donnée par

$$C(t)\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle = \alpha\left|\psi_\alpha(t)\right\rangle. \tag{6.3.36}$$

Conclusion

Dans cette thèse, qui entre dans le cadre de l'extension de la notion d'états cohérents à différents domaines de la physique régis par un formalisme hamiltonien autre que celui de l'oscillateur harmonique, nous avons généralisé la méthode des invariants de (DMMT) aux systèmes non-hermitiens dépendants du temps. Cette généralisation nous a permis de construire les états cohérents pour les systèmes pseudo-fermioniques dépendant du temps [11].

Dans un premier temps, nous avons exposé les notions fondamentales de la théorie des invariants en mécanique quantique hermitienne. Aussi, nous avons présenté un rappel sur les propriétés fondamentales des états cohérents bosoniques et fermioniques. Les formalismes mathématiques de la $\mathcal{PT}$-symetrie et de la pseudo-hermiticité, introduits par Bender [8] et Mostafazadeh [9] respectivement, ont à été passés en revue.

Ensuite, nous avons généralisé la méthode des invariants de (DMMT) aux hamiltoniens pseudo-fermioniques dépendants du temps, en introduisant des opérateurs invariants d'échelles (intégrales de mouvement dépendant du temps) qui jouent le rôle d'opérateurs de création et d'annihilation.

Une fois que tous les ingrédients appropriés aux états cohérents ont été introduits, nous avons construit les états cohérents pour les hamiltoniens pseudo-fermioniques dépendants du temps.

Nous avons montré que la phase $\alpha_{\xi}(t)$ est égale à zéro pour tout système pseudo-fermionique dépendant du temps.

Comme illustration, un système à deux-niveaux à symétrie $\mathcal{PT}$ et dépendant du temps a été étudié en détail.

Les expressions des opérateurs d'annihilation et de création, ainsi que la construction des états cohérents pseudo-fermioniques dépendants du temps pour ce système physique, ont été déterminées explicitement.

Nous avons aussi montré dans ce travail que notre approche pourra s'étendre aux systèmes pseudo-bosoniques dépendants du temps. Une étude a été effectuée pour un oscillateur harmonique amorti décrit par un hamiltonien non-hermitien et dépendant du temps.

Comme perspective, la construction des états comprimés "*squeezed states*" pour les hamiltoniens pseudo-fermioniques dépendants du temps, pourra faire l'objet d'inverstigations futures.

Bibliographie

[1] Rex, A,. Thornton, S.T.: Physique moderne, (2009).

[2] Schrödinger, E.: Der stetige Ubergang von der Mikro-zur Makromechanik. Naturwissenschaften **14**, 664 (1926).

[3] Lewis, H.R,. Riesenfeld, W.B.: An exact quantum theory of the time-dependent harmonic oscillator and of a charged particle in a time-dependent electromagnetic field. J. Math. Phys. 10, 1458 (1969).

[4] Glauber, R.J.: Photons correlations, Phys. Rev. Lett., 10, 84. (1963).

[5] Glauber, R.J.: The quantum theory of optical coherence, Phys. Rev., 130, 2529. (1963).

[6] Glauber, R.J.: Coherent and incoherent states of radiation field, Phys. Rev., 131, 2766 (1963).

[7] Glauber, R. J.: Classical behavior of systems of quantum oscillators, Phys. Lett. 21650-652 (1966).

[8] Bender, C., Boettcher, M.S.: Real Spectra in Non-Hermitian Hamiltonians Having PT Symmetry, Phys. Rev. Lett. 80, 5243 (1998).

[9] Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry : The necessary condition for the reality of the spectrum of a non-Hermitian Hamiltonian, J. Math. Phys. 43, 205-214 (2002).

[10] Pauli, W.: On Dirac's New Method of Field Quantization, Rev. Mod. Phys. 15, 175-207 (1943).

[11] Zenad, M., Ighezou, F. Z., Cherbal, O. and Maamache, M.: Ladder invariants and coherent states for time-dependent non-Hermitian Hamiltonians, Int. J. Theor. Phys. 59, 1214–1226 (2020).

[12] Dodonov, V.V., Man'ko, V.I.: Coherent states and the resonance of a quantum damped oscillator. Phys. Rev. A 20, 550 (1979).

[13] Malkin, I.A., Man'ko, V.I., and Trifonov, D.A.: Invariants and the evolution of coherents states for a charged particle in a time-dependent magnetic field. Phys. Lett. A 30 41 (1969).

[14] Malkin, I.A., Man'ko, V.I., Trifonov, D.A.: Coherent states and transition probabilities in a timedependent electromagnetic field. Phys. Rev. D 2, 1371 (1970)

[15] Malkin, I.A., Man'ko, V.I., Trifonov, D.A.: Linear adiabatic invariants and coherent states. J. Math. Phys. 14, 576 (1973)

[16] Dodonov, V.V., Malkin, I.A., and Man'ko, V.I.: Coherent states of a charged particle in a time-dependent uniform electromagnetic field of a plane current, Physica 59 241 (1972).

[17] Dodonov, V.V., Kurmyshev, E.V. and Man'ko,V.I.: Generalized uncertainty relation and correlated coherent states, Phys. Lett. A 79 150 (1980).

[18] V.V. Dodonov, I.A. Malkin and V.I. Man'ko.: The Green function and thermodynamical properties of quadratic systems, J. Phys. A: Math. Gen. 8 L19 (1975).

[19] Dodonov, V.V., Malkin, I.A., Man'ko, V.I.: Integrals of the motion, Green functions and coherent states of dynamical systems. Int. J. Theor. Phys. 14, 37 (1975)

[20] Dodonov, V.V., Malkin, I.A., and Man'ko, V.I.: even and odd coherent states and excitations of a singular oscillator, Physica 72 597 (1974).

[21] Klauder, J.R.: The action option and the Feynman quantization of spinor fields in terms of ordinary c-numbers, Ann. Phys., 11, 123. (1960)

[22] Klauder, J.R. Continuous–Representation theory I. Postulates of continuous-representation theory, J.Math. Phys., 4, 1055. (1963)

[23] Klauder, J.R.: Continuous Representation theory II. Generalized relation between quantum and classical dynamics, J. Math. Phys., 4, 1058. (1963)

[24] Sudarshan, E.C.G. Equivalence of semiclassical and quantum mechanical descriptions of statistical light beams, Phys. Rev. Lett., 10, 277. (1963)

[25] Tannoudji, C. C. Diu, B. Laloe, F. Mécanique quantique Tome 1, (Hermann Editeurs,Paris, 1977)

[26] Berezin, F. A Marinov, M. S.:Particle Spin Dynamics as the Grassmann Variant of Classical Mechanics, ANNALS OF PHYSICS lw,336-362 (1977).

[27] Berezin,F. A.: The Method of Second Quantization, (Academic Press, New York,1966)

[28] Junker, G. Klauder, J. R.: Coherent-state quantization of constrained fermion systems, Eur. Phys. J. C. 4, 173-183 (1998)

[29] Cahill, K. E. Glauber,R J.: Density operators for fermions, Phys. Rev. A 59, 1538-1555 (1999)

[30] Ohnuki,J. Kashiwa, T.: Coherent States of Fermi Operators and the Path Integral, Prog. Theo. Phys. 60, 548-564 (1978)

[31] Malkin,I. A. Man'ko,V. I.: in Coherent states in quantum theory (in Russian) (Mir, Moscow, 1972)

[32] Dodonov, V. V. Malkin, I. A. and Man'ko, V. I.: Teor. Mat. Fiz. 24, 164 (1975); Int. J. Theor. Phys. 14, 37 (1975); J. Stat. Phys. 16, 357 (1977).

[33] Lee, T. D. Wick, G. C.: Negative metric and the unitarity of the S-matrix, Nucl. Phys.B. 9, 209-243 (1969).

[34] Sudarshan, E. C. G.: Quantum Mechanical Systems with Indefinite Metric. I, Phys.Rev. 123, 2183-2193 (1961).

[35] Scholtz, F. G. Geyer, H. B. Hahne, F. J. W.: Quasi-Hermitian operators in quantum mechanics and the variational principle, Ann. Phys. 213, 74-101 (1992).

[36] Bender, C.M.: Making sense of non-Hermitian Hamiltonians. Rep. Progr. Phys. 70, 947 (2007).

[37] Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.II. A complete characterization of non-Hermitian Hamiltonians with real spectrum, J. Math. Phys. 43, 2814-2816 (2002).

[38] Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermiticity versus PT symmetry.III. Equivalence of Pseudo Hermiticity and the presence of antilinear symmetries, J. Math. Phys. 43, 3944-3951 (2002)

[39] Sato, M., Hasebe, K., Esaki, K., Kohmoto M.: Time-Reversal Symmetry in NonHermitian Systems, Prog. Theo. Phys. 127, 937 (2012).

[40] Jones-Smith, K., Mathur, H.: Non-Hermitian quantum Hamiltonians with PT symmetry, Phys. Rev. A 82, 042101, (2010).

[41] Bender, C. M., Brody, D. C., Jones, H. F.: Complex Extension of Quantum Mechanics, Phys. Rev. Lett. 89, 270401-270404 (2002).

[42] Bender, C. M., Brody, D. C., Jones, H. F.:Extension of PT-symmetric quantum mechanics to quantum field theory with cubic interaction, Phys. Rev. D. 70, 025001 (2004)

[43] Mostafazadeh, A.: Pseudo-Hermitian representation of quantum mechanics, Int. J. Geom. Meth. Mod. Phys. 7, 1191, (2010)

[44] Roy, B., Roy, P.: Coherent states of non-Hermitian quantum systems. Phys. Lett. A359, 110 (2006)

[45] Graefe, E.M., Schubert, R.: Complexified coherent states and quantum evolution with non-Hermitian Hamiltonians. J. Phys. A45, 244033 (2012).

[46] Beckers, J., Debergh, N., Carinena, J.F., Marmo, G.: Non-hermitian oscillator-like Hamiltonians and λ-coherent states revisited. Mod. Phys. Lett. A16, 91 (2001).

[47] Kandirmaz, N., Sever, R.: Coherent states for PT-/non-PT-symmetric and non-Hermitian Morse potentials via the path integral method. Phys. Scr.81, 035302 (2010)

[48] Yahiaoui, S.A., Bentaiba, M.: New position-dependent effective mass coherent states for a generalized shifted harmonic oscillator. J. Phys. A47, 025301 (2013)

[49] Guerrero, J.: Non-Hermitian Coherent states for Finite-Dimensional systems. In: Antoine, J.-P., Bagarello, F., Gazeau, J.-P. (eds.) Coherent States and their Applications: a Contemporary Panorama, Springer Proceedings in Physics, vol. 205, pp. 191–207 (2018)

[50] Dey, S., Fring, A., Hussin, V.: A squeezed review on coherent states and nonclassicality for NonHermitian systems with minimal length. In: Antoine, J.-P., Bagarello, F., Gazeau, J.-P. (eds.) Coherent States and Their Applications: A Contemporary Panorama, Springer Proceedings in Physics, vol. 205, pp. 209–242 (2018)

[51] Mostafazadeh, A.: Statistical origin of pseudo-Hermitian supersymmetry and pseudo-Hermitian fermions, J. Phys. A: Math. Gen.37 10193–10207 (2004).

[52] B´ıla, H.: Adiabatic time-dependent metrics in PT-symmetric quantum theories. arXiv:0902.0474

[53] Gong, J., Wang, Q.H.: Geometric phase in PT-symmetric quantum mechanics. Phys. Rev. A82, 012103 (2010)

[54] Gong, J., Wang, Q.H.: Time-dependent-symmetric quantum mechanics. J. Phys. A46, 485302 (2013).

[55] Khantoul, B., Bounames, A., Maamache, M.: On the invariant method for the time-dependent nonHermitian Hamiltonians. Eur. Phys. J. Plus132, 258 (2017)

[56] Maamache, M. Djeghiour, O.K. Mana, N. and Koussa,W.: "Pseudo-invariants theory and real phases for systems with non-Hermitian time-dependent Hamiltonians," Eur. Phys. J. Plus 132, 383 (2017).

[57] Koussa, W. Mana, N. Djeghiour,O. K. and Maamache, M.: "The pseudo Hermitian invariant operator and time-dependent non-Hermitian Hamiltonian exhibiting a SU(1, 1) and SU(2) dynamical symmetry," J. Math. Phys. 59, 072103 (2018).

[58] Fring, A., Frith, T.: Exact analytical solutions for time-dependent Hermitian Hamiltonian systems from static unobservable non-Hermitian Hamiltonians. Phys. Rev. A95(R), 010102 (2017).

[59] Luiz, F.S., Pontes, M.A., Moussa, M.H.Y.: Unitarity of the time-evolution and observability of nonHermitian Hamiltonians for time-dependent Dyson maps. arXiv:1611.08286

[60] Luiz, F.S., Pontes, M.A., Moussa, M.H.Y.: Gauge linked time-dependent non-Hermitian Hamiltonians. arXiv:1703.01451

[61] Maamache, M.: Non-unitary transformation of quantum time-dependent non-Hermitian systems. Acta Polytech.57, 424 (2017)

[62] Figueira de Morisson Faria, C.,Fring, A.: Time evolution of nonHermitian Hamiltonian systems, J. Phys. A. 39, 9269 (2006).

[63] Figueira de Morisson Faria, C.,Fring, A.: Non-Hermitian Hamiltonians with real eigenvalues coupled to electric fields: From the time-independent to the time-dependent quantum mechanical formulation, Laser Phys. 17, 424 (2007).

[64] Mostafazadeh, A.: Time-dependent pseudo-Hermitian Hamiltonians defining a unitary quantum system and uniqueness of the metric operator. Phys. Lett. B 650, 208 (2007).

[65] Znojil, M.: Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution. quant-ph. 0710.5653v1 (2007).

[66] Mostafazadeh, A.: Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution", arXiv:0711.0137

[67] Znojil, M.: Reply to Comment on "Time-dependent quasi-Hermitian Hamiltonians and the unitary quantum evolution" arXiv:0711.0514

[68] Mostafazadeh, A.: Comment on "Reply to Comment on Time dependent Quasi-Hermitian Hamiltonians and the Unitary Quantum Evolution", arXiv:0711.1078

[69] Znojil, M.: Which operator generates time evolution in Quantum Mechanics?, arXiv:0711.0535

[70] Znojil, M.: Time-dependent version of crypto-Hermitian quantum theory. Phys. Rev. D 78, 085003 (2008)

[71] Gong, J. and Wang, Q. H.: Geometric phase in PT -symmetric quantum mechanics, Phys. Rev. A. 82, 012103 (2010).

[72] Gong, J. and Wang, Q. H.: Time-dependent PT -symmetric quantum mechanics, J. Phys. A. 46, 485302 (2013).

[73] Maamache, M.: Periodic pseudo-Hermitian Hamiltonian : Nonadiabatic geometric phase, Phys. Rev. A. 92, 032106 (2015).

[74] Fring, A., Moussa, M.H.Y.: Unitary quantum evolution for time-dependent quasi-Hermitian systems with nonobservable Hamiltonians. Phys. Rev. A 93, 042114 (2016).

[75] Fring, A., Moussa, M.H.Y.: Non-Hermitian Swanson model with a time-dependent metric. Phys. Rev. A 94, 042128 (2016).

[76] Bagarello, F.: Linear pseudo-fermions. J. Phys. A 45, 444002 (2012)

[77] Bagarello, F.: Model pseudofermionic systems: Connections with exceptional points, Phys. Rev. A 89, 032113 (2014).

[78] Cherbal, O., Drir, M., Maamache M., Trifonov, D. A.: Fermionic coherent states for pseudo-Hermitian two-level systems, J. Phys. A 40, 1835 (2007).

[79] Trifonov, D.A.: Pseudo-Boson coherent and fock states. In: Sekigawa, K., et al. (eds.) Differential Geometry, Complex Analysis and Mathematical Physics, p. 241. W. Scientific (2009).

[80] Bagarello, F.: Pseudobosons, Riesz bases, and coherent states. J. Math. Phys. 51, 023531 (2010).

[81] Bagarello, F.: Intertwining operators for non-self-adjoint Hamiltonians and bicoherent states. J. Math. Phys. 57, 103501 (2016).

[82] Cherbal, O. Maamache, M.: "Time-dependent pseudofermionic systems and coherent states," J. Math. Phys. 57, 022102 (2016).

[83] Scully, M. O. and Zubairy, M. S.:Quantum Optics(Cambridge University, Cambridge, England, 1997).

[84] Allen, L. and Eberly, J. H.: Optical Resonance and Two-Level Atoms(Cambridge University, Cambridge, England, 1997).

[85] Shore, B. W.:The Theory of Coherent Atomic Excitation(Wiley, New York, 1990).

[86] Luo, X., Yang, B., Zhang, X., Li, L., Yu, X.: Analytical results for a parity-time-symmetric two-level system under synchronous combined modulations. Phys. Rev A95, 052128 (2017)

[87] Guo, A. Salamo, G. J. Duchesne, D. Morandotti, R. VolatierRavat, M. Aimez, V. Siviloglou, G. A. and Christodoulides, D. N.: Observation of PT-Symmetry Breaking in Complex Optical Potentials Phys. Rev. Lett.103, 093902(2009).

[88] Ruter, C. E. Makris, K. G. El-Ganainy, R. Christodoulides, D. N. Segev, M. and Kip,D.: Observation of parity–time symmetry in optics Nat. Phys.6,192(2010).

[89] J. Li, A. K. Harter, J. Liu, L. de Melo, Y. N. Joglekar, and L.:Observation of parity-time symmetry breaking transitions in a dissipative Floquet system of ultracold atoms Luo,arXiv:1608.05061.

[90] Caldirola, P.: Forze non conservative nella meccanica quantistica. Nuovo Cim.18, 393 (1941).

[91] Kanai, E.: On the quantization of dissipative systems. Prog. Theor. Phys.3, 440 (1948).

[92] Bagarello, F.: Examples of Pseudo-bosons in quantum mechanics. Phys. Lett. A374, 3823 (2010).

[93] Koussa, W. Attia, M. and Maamache, M.: Pseudo-fermionic coherent states with time-dependent metric.J. Math. Phys. 61, 042101 (2020).