N° d'ordre : 05./2021-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par : CHELLAL Redha

Sujet

Identités pour les nombres et polynômes de Bernoulli

Soutenue publiquement, le 10/06/2021, devant le Jury composé de :

M/ MIHOUBI Miloud	Professeur à l'USTHB	Président
M/ BENCHERIF Farid	Professeur à l'USTHB	Directeur de thèse
M/ DERBAL Abdallah	Professeur à l'ENS .Kouba	Examinateur
M/ AIT MOKHTAR Ahmed	Maître de Conférence/A à l'ENS .Kouba	Examinateur
Mme/ ZERROUKHAT Schehrazade	Maitre de Conférence/ B à l'USTHB	Invitée

Table des matières

A la mémoire d'Abdelkader AÏDER

9 juin 1955 -1^er^ octobre 2013

Remerciements

J'exprime tout d'abord ma profonde gratitude et mon entière reconnaissance à mon directeur de thèse, Monsieur le Professeur BENCHERIF Farid pour tout le temps qu'il m'a consacré. C'est grâce à son soutien moral et scientifique ainsi qu'à ses nombreux conseils et encouragements permanents que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je suis particulièrement honoré que Monsieur le Professeur MIHOUBI Miloud ait accepté de présider mon Jury de soutenance. Je le remercie vivement.

Je remercie aussi chaleureusement les Professeurs,

Monsieur AÏT MOKHTAR Ahmed de l'ENS de Kouba,

Monsieur DERBAL Abdallah de l'ENS de Kouba,

Madame ZERROUKHAT Schehrazade de l'USTHB,

pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce travail.

Je remercie aussi toutes les personnes qui ont contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je remercie tout particulièrement Monsieur le Professeur MEHBALI Mohamed, exerçant à London South Bank University, pour les nombreux échanges scientifiques fructueux que nous avons eus par visioconférence.

Je remercie mon cher ami CHEROUK Abdelhadi ainsi que la tante de ma chère épouse Madame TIGZIRIA Farida pour leur précieux soutien.

Je remercie également toute ma famille et ma belle famille pour leur aide essentielle.

Je remercie ma chère épouse pour son soutien moral permanent et pour tous les sacrifices qu'elle a consentis.

Je dédie spécialement cette thèse à mon cher fils Wassim Lotfi.

Notations

1. $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ désignent respectivement les ensembles des entiers naturels, des entiers relatifs, des rationnels, des réels et des complexes.
2. D : opérateur de dérivation défini par : $D\left(x^0\right) = 0$ et $D\left(x^n\right) = nx^{n-1}$ pour $n \geq 1$.
3. τ_a : opérateur de translation : $\tau_a\left(x^n\right) = \left(x+a\right)^n$.
4. $\Delta := \tau_1 - \tau_0$: opérateur de pseudo-dérivation : $\Delta\left(x^n\right) = \left(x+1\right)^n - x^n$.
5. $\mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\right)$: $\mathbb{C}$-algèbre des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}\left[x\right]$.
6. $\mathbb{C}[[t]]$: $\mathbb{C}$-algèbre des séries formelles en une indétrminée t, à coefficients dans $\mathbb{C}$.
7. $\Gamma = \mathbb{C}[[D]] = \{\ S\left(D\right)\ /\ S\left(t\right) \in \mathbb{C}[[t]]\}$: $\mathbb{C}$-algèbre des opérateurs de composition.
8. $\mathcal{G}_t = \{S\left(t\right) \in \mathbb{C}\left[[t]\right]\ /\ \operatorname{val} S\left(t\right) = 0\}$: groupe des unités de l'anneau $\left(\mathbb{C}\left[[t]\right], +, \circ\right)$.
9. $\mathcal{G}_D := \{\ S\left(D\right) \in \mathbb{C}\left[[D]\right]\ /\ \operatorname{val} S\left(t\right) = 0\}$: groupe des opérateurs d'Appell.
10. $\mathfrak{D}_t := \{\ S\left(t\right) \in \mathbb{C}\left[[t]\right]\ /\ \operatorname{val} S\left(t\right) = 1\}$: ensemble des delta-séries.
11. $\mathfrak{D}_D := \{\ S\left(D\right) \in \mathbb{C}\left[[D]\right]\ /\ \operatorname{val} S\left(t\right) = 1\}$: ensemble des delta-opérateurs.
12. $B_n\left(x\right)$: n-ième polynôme de Bernoulli.
13. B_n : n-ième nombre de Bernoulli.
14. $\Omega_B := \frac{D}{e^D - 1}$: opérateur de composition associé à la suite de polynômes $\left(B_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
15. $E\left(m,n,r\right) := \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} = \frac{1}{2}S_{n,n,r}^{(1)}\left(m,0,0\right)$ pour r impair.
16. $B_n^{(\alpha)}(x)$: n-ième polynôme généralisé de Bernoulli.
17. $B_n^{(\alpha)}$: n-ième nombre généralisé de Bernoulli.
18. $\Omega_\alpha = \Omega_{B^{(\alpha)}} := \left(\frac{D}{e^D-1}\right)^\alpha$: opérateur de composition associé à $\left(B_n^{(\alpha)}\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$.
19. $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}\left(u,v,w\right) := \sum_{k=0}^{n+r} u^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}^{(\alpha)}\left(v\right) +$
$$\left(-1\right)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r} u^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}^{(\alpha)}\left(w\right).$$
20. $q := u + v + w - \alpha$: indice associé la somme $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}\left(u,v,w\right)$.

Introduction

Cette thèse est consacrée à l'étude de l'obtention d'identités combinatoires concernant de manière générale certains nombres et polynômes remarquables et concernant de manière particulière les nombres et polynômes de Bernoulli classiques ou généralisés. Elle comporte trois chapitres :

- le premier pour mettre en place les outils nécessaires à cette étude et pour aussi préciser la définition de ces nombres et de ces polynômes,

- le second pour l'étude d'identités concernant les nombres de Bernoulli,

- le troisième pour l'étude d'identités concernant les polynômes de Bernoulli.

Dans ce qui suit, nous allons préciser le contenu de chacun de ces trois chapitres.

Le premier chapitre comporte une étude des opérateurs de composition du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$. On convient d'appeler opérateur (de $\mathbb{C}[x]$) tout endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$. On désigne par $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ la $\mathbb{C}$-algèbre des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$. L'opérateur de dérivation D et l' opérateur de translation par a noté τ_a (où $a \in \mathbb{C}$) sont définis par leurs images des vecteurs de la base canonique de $\mathbb{C}[x]$:

$$\tau_a(x^n) = (x+a)^n, \quad D\left(x^0\right) = 1 \text{ et } \quad D(x^n) = nx^{n-1}, \, n \geq 1.$$

On dit qu'un opérateur Ω est un opérateur de composition s'il commute avec tous les opérateurs de translation, c'est à dire si l'on a $\Omega \circ \tau_a = \tau_a \circ \Omega$, pour tout $a \in \mathbb{C}$. On montre que l'ensemble Γ des opérateurs de composition est confondu avec l'ensemble des opérateurs qui peuvent s'écrire comme des séries en D. De plus, on montre que l'unicité de l'écriture d'un opérateur de composition Ω comme une série en D : $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}$. Ce qui nous permet de définir l'ordre d'un opérateur de composition $\Omega = S(D)$ comme étant la valuation de la série formelle $S(t)$.

L'application Ψ de $\mathbb{C}[[t]]$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ qui à toute série formelle $S(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{t^k}{k!}$ associée à l'opérateur de composition $S(D) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}$ est un homomorphisme d'algèbres (commutatives) injectif. On en déduit que $\Gamma = \operatorname{Im}\Psi$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{C}[x]$ isomorphe à l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$. On convient de noter l'ensemble Γ aussi par $\mathbb{C}[[D]]$.

Le groupe $\mathcal{G}$ des éléments inversibles de l'anneau $(\mathbb{C}[[D]], +, \circ)$ est constitué par l'ensemble des opérateurs de composition d'ordre zéro. On l'appelle le groupe des opérateurs d'Appell. On dit qu'une suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[[x]]$ vérifie les relations d'Appell si on a : $A_n'(x) = nA_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$ et $A_0'(x) = 0$. On dit aussi qu'une telle suite est une suite de polynômes d'Appell si de plus le degré de tout polynôme $A_n(x)$ est égal à n. Les suites de polynômes d'Appell sont ainsi désignées en l'honneur d'Emile Appell qui les a introduites et étudiées dans un célèbre article [5] en 1880. On étudie certaines des nombreuses propriétés de ces suites dans ce chapitre. Les conditions suivantes sont équivalentes :

1. La suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations d'Appell,
2. $\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x)\frac{t^n}{n!} = S(t)e^{tx}$ avec $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)\frac{t^n}{n!}$,
3. $A_n(x) = \Omega_A(x^n)$ avec $\Omega_A \in \Gamma$: $\Omega_A = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0)\frac{D^n}{n!}$,
4. $A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}A_k(0)x^{n-k}$, $n \in \mathbb{N}$.

De plus si $A_0(0) \neq 0$, ce qui équivaut à dire que $\Omega_A \in \mathcal{G}$, la suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant l'une des conditions équivalentes précédentes est appelée suite de polynômes d'Appell.

Toute série formelle T de $\mathbb{C}[[t]]$ de valuation strictement positive est substituable dans toute autre série formelle S de $\mathbb{C}[[t]]$. Pour de telles séries, on peut définir la série composée $S \circ T$ avec $S \circ T = S(T(t))$. On appelle delta-série de $\mathbb{C}[[t]]$ toute série $\mathbb{C}[[t]]$ d'ordre 1. On note par $\mathfrak{D}_t$ l'ensemble des delta-séries de $\mathbb{C}[[t]]$. La composition des séries formelles est une loi de composition interne sur $\mathfrak{D}_t$. On montre que $(\mathfrak{D}_t, \circ)$ est un groupe (non commutatif). On note par $S^{\langle -1\rangle}$ la série réciproque de S (série inverse pour la loi de composition) de toute série $S \in \mathfrak{D}_t$. On a $S \circ S^{\langle -1\rangle} = S^{\langle -1\rangle} \circ S = t$.

On appelle delta-opérateur tout opérateur de composition d'ordre 1. On désigne par $\mathfrak{D}_D$ l'ensemble des delta-séries. On montre que tout delta-opérateur possède des propriétés analogues à l'opérateur de dérivation D (qui est aussi un delta-opérateur). On prouve aussi le fait important et très utile que tout opérateur de composition de $\mathbb{C}[x]$ peut s'écrire comme une série en δ, δ étant un opérateur de composition quelconque. Ainsi on a aussi $\Gamma = \mathbb{C}[[\delta]]$.

L'opérateur de pseudo-dérivation Δ défini par $\Delta(x^n) = (x+1)^n - x^n$ étant un delta-opérateur, on a donc aussi $\Gamma = \mathbb{C}[[\Delta]]$.

En considérant les opérateurs de composition Ω_B, Ω_E et Ω_G suivants :

$$\Omega_B = \frac{D}{e^D - 1}, \ \ \Omega_E = \frac{2}{e^D + 1}, \quad \Omega_G = \frac{2D}{e^D + 1},$$

on définit le n-ième polynôme de Bernoulli $B_n(x)$, le n-ième polynôme d'Euler $E_n(x)$ et le n-ième polynôme de Genocchi $G_n(x)$ par les relations suivantes :

$$B_n(x) = \Omega_B(x^n), \quad E_n(x) = \Omega_E(x^n), G_n(x) = \Omega_G(x^n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Grâce à cette définition, on constate que ces suites de polynômes vérifient toutes les relations d'Appell. Ω_B et Ω_E sont de plus des opérateurs d'Appell. Les suites de polynômes de Bernoulli et d'Euler sont donc des suites de polynômes d'Appell.

La formule suivante est exactement la formule (7.8) donnée dans l'article de Gessel [30, p.17] intitulé "Applications of the classical umbral calculus". Cette formule est très utile pour l'obtention d'identités pour les nombres de Bernoulli.

Théorème 1 *Pour tout polynôme $f(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, on a pour tout entier naturel m :*

$$f(B+m) - f(-B) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k). \tag{1}$$

La relation figurant dans le théorème de Gessel étant simplement une écriture symbolique (et pratique) de l'égalité suivante :

$$L_1 (f(x+m) - f(-x)) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k).$$

où L_1 est la forme linéaire définie sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ par :

$$L_1(x^n) = B_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, après avoir développé le membre de gauche de (1) en puissances de B, chaque B^j est remplacé par le nombre de Bernoulli B_j.

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, le n-ième polynôme généralisé de Bernoulli $B_n^{(\alpha)}(x)$, le n-ième polynôme d'Euler généralisé $E_n^{(\alpha)}(x)$ et le n-ième polynôme généralisé de Genocchi $G_n^{(m)}(x)$ sont définis par les relations suivantes :

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_B^{\alpha}(x^n), \quad E_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_E^{\alpha}(x^n), \; G_n^{m}(x) = \Omega_G^{m}(x^n).$$

Comme on a aussi Γ=$\mathbb{C}[[\Delta]]$, les opérateurs de composition Ω_B, Ω_E et Ω_G peuvent s'exprimer comme des séries en Δ. On montre que :

$$\begin{aligned}
\Omega_B &= \frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\Delta^k, \\
\Omega_E &= \frac{2}{2+\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}\Delta^k, \\
\Omega_G &= \frac{2\ln(1+\Delta)}{2+\Delta}.
\end{aligned}$$

Ces formules permettent d'obtenir facilement des expressions explicites pour $B_n(x)$, $E_n(x)$. Ainsi, on peut facilement prouver la formule explicite suivante :

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n, \quad n \geq 0.$$

Nous prouvons au premier chapitre la formule suivante, explicite et originale pour le n-ième polynôme de Bernoulli. Cette formule généralise une formule explicite pour le n-ième nombre de Bernoulli établi par Kronecker en 1883 :

Théorème 2 *Pour tous entiers naturels m et n, on a pour $m \geq n$*

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m+1}{j} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} (x+k)^n.$$

Nous précisons ensuite ce qu'on entend par transformation binomiale de suites. Soit $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite (numérique) définie par sa série génératrice exponentielle $S_u(t)$

$$S_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n!}.$$

On convient d'associer à la suite u la suite $u^* = (u_n^*)_{n \in \mathbb{N}}$ appelée suite duale de u en définissant u^* par la donnée de sa série génératrice exponentielle :

$$S_{u^*}(t) = e^t S_u(-t).$$

Autrement dit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^* \frac{t^n}{n!} = e^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \frac{t^n}{n!}.$$

On en déduit que u^* est définie par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k.$$

Définition 3 *L'application $\mathcal{T} : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\mathcal{T}(u) = u^*$$

est appelée transformation binomiale de la suite u. Toute suite u telle que $u^* = u$ est dite auto-duale ou invariante par transformation binomiale. Toute suite u telle que $u^* = -u$ est dite inversement invariante par transformation binomiale.

On démontre que si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite numérique et n et ℓ des entiers naturels, alors :

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite invariante par transformation binomiale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_{\ell+k}-\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}u_{n+k}=0,$$

- si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite inversement invariante par transformation binomiale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_{\ell+k}+\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}u_{n+k}=0.$$

Ces simples résultats permettent d'obtenir des identités pour des nombres de Bernoulli. La suite $((-1)^n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ étant une suite duale, on obtient l'identité suivante connue sous le nom d'identité de Carlitz :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{\ell+k}-(-1)^{\ell+n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}B_{n+k}=0$$

de laquelle on peut déduire l'identité suivante connue sous le nom d'identité de Kaneko :

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,B_{n+k}=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

Le deuxième chapitre est consacré à des généralisations de la formule de Kaneko et de la formule de Carlitz aux nombres de Bernoulli. Ces généralisations sont dues essentiellement à Gessel. Posons :

$$E(m,n,r)=\sum_{k=0}^{n+r}m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}.$$

La formule de Kaneko se formule ainsi :

$$E(1,n,1)=0,\quad n\in\mathbb{N}.$$

En 2003, Gessel [30, Theorem 7.3] prouve très simplement à l'aide du calcul ombral classique la généralisation suivante :

$$\begin{aligned}E(m,n,1)&=\sum_{k=0}^{n+1}m^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\binom{n+k+1}{1}B_{n+k}\\&=\sum_{k=1}^{m-1}\left((2n+1)\,k-(n+1)\,m\right)(n+1)\,k^n\,(k-m)^{n-1}.\end{aligned}$$

En 2009, à l'aide de l'analyse complexe, Chen et Sun [25, Theorem 7.2] prouvent la généralisation suivante :

$$\begin{aligned} E\left(m,n,3\right) &= \sum_{k=0}^{n+3} m^{n+3-k}\binom{n+3}{k}\binom{n+k+3}{3}B_{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{6}h\left(m,n,k\right)\left(n+3\right)k^{n}\left(k-m\right)^{n-1}, \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} h\left(m,n,k\right) &= 2\left(n+2\right)\left(2n+3\right)\left(2n+5\right)k^{3}-2m\left(n+2\right)\left(2n+5\right)\left(3n+5\right)k^{2} \\ &\quad +3m^{2}\left(n+2\right)\left(2n^{2}+7n+7\right)k-m^{3}\left(n+1\right)^{2}\left(n+2\right). \end{aligned}$$

La question se pose alors naturellement de savoir s'il serait possible de trouver une expression simplifiée pour $E\left(n,m,r\right)$ pour r impair. En 2012, lors du Congrès des Mathématiciens Algériens qui s'est tenu à Annaba les 7 et 8 mars, A. Aïder [4] répond positivement à cette question dans une communication (avec F. Bencherif comme co-auteur) intitulée "On a generalization of the analog of a theorem of Chen and Sun" en présentant le théorème suivant :

Théorème 4 *Soient ℓ, n, m et r des entiers naturels. Alors, on a :*

$$\begin{aligned} E\left(m,n,r\right) &= \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} \\ &= \sum_{k=1}^{m-1}\left(r+1\right)p_r(n,m,k)k^{n}\left(k-m\right)^{n-1} \end{aligned}$$

où

$$p_r(m,n,k)=\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{i,\frac{r+1}{2}}\right)\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{n+i-1}k^{r-i}\left(k-m\right)^{i}$$

où $\delta_{i,\frac{r+1}{2}}$ désigne le symbole de Kroncker valant 1 si $i=\frac{r+1}{2}$ et 0 sinon.

En 2013, Gessel prouve à l'aide du calcul ombral classique dans un annexe à l'article [9] la généralisation suivante de la relation de Carlitz permettant aussi une généralisation du théorème de Kaneko équivalente à celle obtenue par Aïder et Bencherif :

Théorème 5 *Soient ℓ, n, m et r des entiers naturels. Alors, on a :*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k} \\
&+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} \\
= \;&(r+1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{\ell+j-1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}k^{\ell+j-1}(m-k)^{n+r-j}.
\end{aligned}$$

Si r est impair, alors on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} \\
&= \frac{1}{2}(r+1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{n+r}{r+1-j}k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}.
\end{aligned}$$

La preuve du théorème 58 donnée par Gessel dans [9] est longue (un peu plus de deux pages). Elle fait appel à de nombreux résultats intermédiaires : identités combinatoires, identités polynomiales. Dans ce deuxième chapitre, nous donnons une preuve complète du théorème d'Aïder-Bencherif ainsi qu'une nouvelle preuve du théorème de Gessel plus courte que celle donnée par Gessel. Nous prouvons l'équivalence entre l'identité de Aïder-Bencherif et une identité de Gessel et nous en donnons aussi des applications.

Au troisième et dernier chapitre, nous prouvons deux théorèmes originaux qui ont fait l'objet d'une récente publication [21]. Le premier théorème est le suivant :

Théorème 6 *Soit $w = (w_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique telle que sa fonction génératrice exponentielle $S_w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n!}$ satisfait à la relation :*

$$S_w(-t) = \varepsilon e^{\lambda t} S_w(t)$$

où $\varepsilon \in \{1, -1\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Alors pour tous entiers naturels n, ℓ et r, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}w_{\ell+k} \\
&+(-1)^{\ell+n+r+1}\varepsilon\sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}w_{n+k} = 0.
\end{aligned}$$

Ce théorème permet d'obtenir des identités pour diverses suites de nombres et de polynômes remarquables telles que les nombres et polynômes de Fibonnaci, de Lucas, de Tchebychev.

Le deuxième de ces théorèmes concerne les polynômes généralisés de Bernoulli.

Théorème 7 *Pour tous nombres complexes α, $\lambda \in \mathbb{C}$ et pour tous entiers n, ℓ, r, s, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x)$$
$$+ (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha+s-\lambda-x)$$
$$= \Omega_{\alpha-1}(\frac{D^{r+1}}{r!} \sum_{k=1}^{s} (x-k)^{\ell+r} (x+\lambda-k)^{n+r}).$$

Dans ce théorème, D désigne l'opérateur de dérivation et $\Omega_{\alpha-1}$ désigne l'opérateur de composition défini par : $\Omega_{\alpha-1}(x^n) = B_n^{(\alpha-1)}(x)$. Ce théorème généralise aux polynômes de Bernoulli généralisés l'identité que Gessel a obtenue pour les nombres de Bernoulli. Ce théorème permet de retrouver comme cas particuliers un nombre considérable d'identités concernant les nombres et polynômes de Bernoulli classiques ou généralisés. Ce constat est plus facile à faire en reformulant ce théorème sous une forme plus adaptée aux applications pratiques.

En notant par $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u, v, w)$ la somme définie par :

$$\begin{aligned} S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u, v, w) &= \sum_{k=0}^{n+r} u^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(v) \\ &\quad + (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} u^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)}(w), \end{aligned}$$

dans laquelle n, ℓ, r sont des entiers naturels, α un nombre complexe, u, v et w des nombres complexes (ou des variables) et en définissant ce qu'on conviendra d'appeler un indicateur ou un indice $q = q(u, v, w, \alpha)$ associé à cette somme par :

$$q = u + v + w - \alpha,$$

le théorème 7 peut se reformuler très simplement en affirmant que si $u + v + w - \alpha \in \mathbb{N}$, alors on a :

$$S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u, v, w) = F(v)$$

où $F(x)$ est le polynôme défini par :

$$F(x) = \Omega_{\alpha-1}(\frac{D^{r+1}}{r!} \sum_{k=1}^{q} (x-k)^{\ell+r} (x+\lambda-k)^{n+r}),$$

avec

$$q = u + v + w - \alpha \quad \text{et } F(x) = 0 \quad \text{si } q = 0.$$

.

Chapitre 1

Opérateurs de composition

1.1 Introduction

Ce chapitre est consacré essentiellement à une étude succincte de la $\mathbb{C}$-algèbre Γ des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$ en vue de ses applications à l'obtention d'identités pour certaines suites de nombres et de polynômes remarquables, en privilégiant tout particulièrement les suites de nombres et polynômes de Bernoulli.

L'opérateur τ_a de translation par a (où $a \in \mathbb{C}$) est l'endomorphisme de $\mathbb{C}[x]$ qui à un polynôme $P(x)$ associé le polynôme $P(x)$. Classiquement, un opérateur de composition Ω de $\mathbb{C}[x]$ est défini comme étant un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel de $\mathbb{C}[x]$ qui commute avec tout opérateur de translation τ_a, c'est à dire tel que $\tau_a \circ \Omega = \Omega \circ \tau_a$, pour tout $a \in \mathbb{C}$. On montre ensuite qu'un tel opérateur Ω peut s'écrire sous forme d'une série en l'opérateur de dérivation D, c'est à dire qu'on peut écrire Ω sous la forme $\Omega = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{D^k}{k!}$ et aussi que, réciproquement, tout opérateur de $\mathbb{C}[x]$ s'écrivant comme une série en D est un opérateur de composition de $\mathbb{C}[x]$. On peut donc aussi définir un opérateur de composition de $\mathbb{C}[x]$ comme une série en D. C'est ce point de vue que nous avons adopté au paragraphe suivant pour définir ces opérateurs. Pour cela, nous étudierons sommairement l'algèbre $\mathbb{C}[[t]]$ des séries formelles en une indéterminée t et nous désignerons aussi Γ par $\mathbb{C}[[D]]$. Nous définirons ensuite au troisième paragraphe les nombres et polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi aussi bien classiques que généralisés et nous étudierons plus particulièrement les propriétés des polynômes et nombres de Bernoulli. Le quatrième paragraphe est consacré à l'obtention de formules explicites pour les nombres et polynômes de Bernoulli. Nous nous intéresserons plus particulièrement à une ancienne formule explicite du n-ième nombre de Bernoulli datant de 1883 et due à Kronecker. Au cinquième et dernier paragraphe, nous préciserons la définition de la transformée binomiale d'une suite et étudierons certaines de ses propriétés. Comme applications des toutes ces notions, nous achèverons ce chapitre par l'obtention d'identités classiques ou nouvelles pour des nombres et polynômes remarquables.

1.2 Algèbre des opérateurs de composition

1.2.1 Définition de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$

L'ensemble $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ muni de l'addition des endomorphismes, c'est à dire de la loi interne définie dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ par $(u,v) \mapsto u+v$ (où $u+v$ est défini par $(u+v)(x) = u(x) + v(x)$) et de la multiplication des endomorphismes par un scalaire, c'est à dire de l'application de $\mathbb{C} \times \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ définie par $(\lambda, u) \mapsto \lambda u$ (où λu est défini par $(\lambda u)(x) = \lambda u(x)$) est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Muni de l'addition et de la composition des endomorphismes, c'est-à-dire de l'application de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x]) \times \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ dans $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ définie par $(u,v) \mapsto u \circ v$, $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$, est un anneau non commutatif. De plus, la propriété mixte suivante est bien vérifiée :

$$\lambda(u \circ v) = (\lambda u) \circ v = u \circ (\lambda v).$$

Il en résulte que $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ muni de ces trois lois est une $\mathbb{C}$-algèbre. Dans tout ce qui suit, nous convenons d'appeler opérateur tout élément de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$, c'est-à-dire tout endomorphisme de $\mathbb{C}[x]$. Pour définir un opérateur Ω, il suffit de définir les images des vecteurs d'une base de $\mathbb{C}[x]$. Il en résulte qu'en choisissant la base canonique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[x]$, il suffit de définir, par exemple, les images $\Omega(x^n)$ pour $n \in \mathbb{N}$.

1.2.2 La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[u]$ des polynômes de l'opérateur u

Étant donné un polynôme $P(t) = a_0 + a_1 t + \cdots a_n t^n \in \mathbb{C}[t]$ et un opérateur $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$, on définit l'opérateur noté par abus de notation par $P(u)$ comme étant l'endomorphisme de $\mathbb{C}[x]$ défini par :

$$P(u) = a_0 I + a_1 u + \cdots a_n u^n$$

où I est l'opérateur unité défini par :

$$I(x^n) = x^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

et u^m l'opérateur classiquement défini par $u^m = u \circ u^{m-1}$ pour $m \geq 1$ avec $u^0 = I$.

Par abus de notation, on note par $\mathbb{C}[u]$ la partie de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ constituée par les polynômes d'opérateurs $P(u)$ quand P parcourt $\mathbb{C}[t]$.

$$\mathbb{C}[u] = \{P(u) \ / \ P(t) \in \mathbb{C}[t]\}.$$

Il est facile de constater que les propriétés suivantes sont vérifiées :

$$\begin{aligned} P_1(u) - P_2(u) &= (P_1 - P_2)(u), \\ (\lambda P_1)(u) &= \lambda P_1(u), \\ P_1(u) \circ P_2(u) &= (P_1 P_2)(u) = (P_2 P_1)(u) = P_2(u) \circ P_1(u) \end{aligned}$$

pour tous polynômes P_1 et P_2 de $\mathbb{C}[t]$ et pour tout nombre complexe λ. Il en résulte que $\mathbb{C}[u]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$.

1.2.3 L'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[t]]$

Ce paragraphe est consacré à quelques précisions concernant la $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[t]]$ des séries formelles à une indéterminée t. Nous adoptons ici certaines notations et définitions données dans l'ouvrage de Roman [56].

L'anneau $\mathbb{C}[[t]]$

On désigne par $\mathbb{C}[[t]]$ l'ensemble des séries formelles en une indéterminée t. Un élément de $\mathbb{C}[[t]]$ peut s'écrire :

$$S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

où $a_n \in \mathbb{C}$ pour entier $n \in \mathbb{N}$. Deux séries formelles $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ et $T = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ sont égales si et seulement si $a_n = b_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. On convient de designer par $[t^m]$ le coefficient de t^m dans la série S. Ainsi, on a :

$$[t^m]\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) = a_m.$$

On définit la somme et le produit des séries S et T comme suit :

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) t^n,$$

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{n} a_j b_{n-j}\right) t^n. \tag{1.1}$$

Muni de ces deux lois $\mathbb{C}[[t]]$ est un anneau commutatif. Tout élément $S = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n t^n \in \mathbb{C}[[t]]$ peut s'écrire sous la forme dite forme exponentielle :

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!},$$

il suffit de définir a_n par la relation $a_n = n!\alpha_n$, pour tout $n \in \mathbb{N}$. Le produit de deux éléments $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}$ de $\mathbb{C}[[t]]$ écrit sous forme exponentielle peut alors s'effectuer comme suit :

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{t^n}{n!}$$

avec

$$\frac{c_n}{n!} = \sum_{p+q=n \text{ et } (p,q)\in\mathbb{N}^2} \frac{a_p}{p!}\frac{b_q}{q!},$$

ce qu'on peut encore écrire :

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}.$$

On convient de noter aussi par $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$ la série $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{t^n}{n!}$.

Valuation d'une série formelle

On définit l'ordre d'une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ qu'on appelle aussi valuation de la série comme étant le plus petit entier n pour lequel $a_n \neq 0$ si $S \neq 0$. On note par $\operatorname{val} S$ la valuation de la série S. On convient de poser $\operatorname{val} S = +\infty$ si $S = 0$. Il est facile de constater que l'on a :

$$\operatorname{val} ST = \operatorname{val} S + \operatorname{val} T$$

$$\operatorname{val}(S+T) \geq \min(\operatorname{val} S, \operatorname{val} T).$$

On démontre qu'une série $S \in \mathbb{C}[[t]]$ est inversible pour la multiplication si et seulement si sa valuation est nulle. Ainsi le groupe des unités de l'anneau commutatif $\mathbb{C}[[t]]$ est $\mathcal{G}_t$ avec

$$\mathcal{G}_t = \{S \in \mathbb{C}[[t]] \ / \ \operatorname{val} S = 0\}.$$

L'algèbre $\mathbb{C}[[t]]$

Muni de l'addition et de la loi externe définie de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}[[t]]$ dans $\mathbb{C}[[t]]$ et qui au couple (λ, S) où $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, associe la série λS définie par :

$$\lambda S = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n t^n,$$

$\mathbb{C}[[t]]$ est un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. De plus cette structure d'espace vectoriel est compatible avec la structure d'anneau de $\mathbb{C}[[t]]$, ce qui signifie que la propriété mixte suivante est bien vérifiée pour $\lambda \in \mathbb{C}$ et $S, T \in \mathbb{C}[[t]]$:

$$\lambda(ST) = (\lambda S)T = S(\lambda T).$$

On en conclut que muni des trois lois ainsi définies, $\mathbb{C}[[t]]$ est une algèbre commutative.

Composition de deux séries formelles

Soit $(T_k)_{k\in\mathbb{N}}$ une suite de séries formelles telles que $\operatorname{val} T_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$. Alors pour toute série formelle $S = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$, nous pouvons considérer l'expression :

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k$$

On définit la série notée $S \circ T = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k$ comme étant la série formelle dont le coefficient de t^n est donné par la formule suivante :

$$[t^n]\left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k T_k\right) = \sum_{k=0}^{\infty} [t^n]\,(a_k T_k)\,. \tag{1.2}$$

Ce procédé définit bien une série formelle en T. En effet, dans le membre droit de (1.2), la sommation ne comporte qu'un nombre fini de termes non nuls. Cela provient du fait que comme $\operatorname{val} T_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$, les termes $[t^n]\,(a_k T_k)$ tels que $\operatorname{val} T_k \leq n$ sont en nombre fini, tous les autres termes $[t^n]\,(a_k T_k)$ sont nuls car ils correspondent au cas où $\operatorname{val} T_k > n$.

Le cas particulier où l'on considère

$$T_k = T^k$$

où $T \in \mathbb{C}\,[[t]]$ est telle que $\operatorname{val} T \geq 1$ est particulièrement important. En effet, dans ce cas, on a $\operatorname{val} T^k \geq k$ et donc on a bien $\operatorname{val} T_k \longrightarrow \infty$ quand $k \longrightarrow \infty$. On peut donc considérer la série formelle noté $S \circ T$ définie par :

$$S \circ T = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k.$$

La série $S \circ T$ est dite série composée et elle est obtenue par substitution de la série T dans la série S. Ce qu'on notera aussi par

$$S\,(T\,(t)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k\,(t)\,.$$

On peut remarquer que l'on a pour $ST \neq 0$:

$$\operatorname{val}\,(S \circ T) = \operatorname{val} S.\operatorname{val} T. \tag{1.3}$$

Groupe des delta-séries

Définition 8 *On appelle delta-série de $\mathbb{C}\,[[t]]$ toute série formelle de $\mathbb{C}\,[[t]]$ de valuation égale à 1.*

Désignons par $\mathfrak{D}_t$ l'ensemble des delta-séries de $\mathbb{C}[[t]]$. On peut constater que si S et T sont deux delta-séries, on a $\operatorname{val} S = \operatorname{val} T = 1$. On peut considérer la série $S \circ T$ et comme d'après (1.3), on a $\operatorname{val}(S \circ T) = \operatorname{val} S . \operatorname{val} T = 1$, la série $S \circ T$ est encore une delta série.

On constate ainsi que la composition de séries est une loi de composition interne dans l'ensemble $\mathfrak{D}_{ser}$. La série $\Lambda = t = \sum_{n=1}^{\infty} \delta_{n,1} t^n$ est l'élément neutre pour cette loi. On a pour toute série $S \in \mathcal{D}_{ser}$:

$$S \circ \Lambda = \Lambda \circ S = S.$$

On démontre aussi que la loi $\circ$ est associative dans $\mathfrak{D}_{ser}$ et que pour toute delta-série S, il existe une unique série formelle T telle que $S \circ T = t$, la série T est appelée série réciproque de la série S. On désigne par $S^{\langle -1 \rangle}$ la série réciproque de T. On montre alors que l'on a

$$S \circ S^{\langle -1 \rangle} = S^{\langle -1 \rangle} \circ S = t.$$

On a ainsi le résultat important suivant :

Théorème 9 *L'ensemble $\mathfrak{D}_t$ muni de la loi $\circ$ est un groupe.*

En désignant par $\exp t$ la série formelle

$$\exp t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^n}{n!},$$

on a pour tout $a \in \mathbb{C}$

$$\exp(at) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{t^n}{n!}.$$

On démontre aisément que l'on a pour tout $a, b \in \mathbb{C}$

$$\exp(at)\exp(bt) = \exp((a+b)t).$$

On convient de noter par e^t la série formelle $\exp(t)$.

On prouve que les séries $e^t - 1$ et $\ln(1+t)$ définies par :

$$e^t - 1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^n}{n!} \text{ et } \ln(1+t) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{t^n}{n}$$

sont réciproques l'une de l'autre. On a donc :

$$\left(e^t - 1\right)^{\langle -1 \rangle} = \ln(1+t) \quad \text{et} \quad (\ln(1+t))^{\langle -1 \rangle} = e^t - 1.$$

1.2.4 La $\mathbb{C}$-algèbre $\mathbb{C}[[D]]$ des séries de l'opérateur D

L'opérateur de dérivation D joue un rôle important dans ce qui va suivre. Cet opérateur est défini comme suit :

$$D(x^n) = \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0, \\ nx^{n-1} & \text{si } n \geq 1. \end{cases}$$

L'opérateur de dérivation est telle que

$$D^m(x^n) = 0 \ \text{ pour } m > n.$$

Cette dernière propriété fait qu'on peut associer à toute série formelle $S(t) = \sum_{m\geq 0} \alpha_m t^m$ de $\mathbb{C}[[t]]$ l'opérateur $\sum_{m\geq 0} \alpha_m D^m$ noté par abus de notation $S(D)$ défini par :

$$\begin{aligned} S(D)(x^n) &= \left(\sum_{m\geq 0} \alpha_m D^m\right)(x^n) \\ &= \sum_{m\geq 0} \alpha_m D^m(x^n) \\ &= \sum_{m=0}^{n} \alpha_m D^m(x^n). \end{aligned}$$

Définition 10 *On appelle opérateur de composition de $\mathbb{C}[x]$ tout endomorphisme Ω de $\mathbb{C}[x]$ pouvant s'écrire sous la forme :*

$$\Omega = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m D^m$$

où D est l'opérateur de dérivation de $\mathbb{C}[x]$.

Par abus de notation, on note par $\mathbb{C}[[D]]$ l'ensemble des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$. On a :

$$\mathbb{C}[[D]] = \{S(D) \ / \ S(t) \in \mathbb{C}[[t]]\}.$$

Nous montrerons au théorème 23 qu'en désignant par τ_a l'opérateur de translation par a défini par :

$$\tau_a(x^n) = (x+a)^n,$$

on a :

$$\forall \Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x]), (\ \Omega \in \mathbb{C}[[D]] \iff \forall a \in \mathbb{C},\ \ \tau_a \circ \Omega = \Omega \circ \tau_a).$$

Il sera alors équivalent de définir un opérateur de composition comme un opérateur $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ qui commute avec tout opérateur de translation τ_a pour $a \in \mathbb{C}$.

Il est alors facile de constater qu'on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} S_1(D) - S_2(D) &= (S_1 - S_2)(D), && (1.4)\\ (\lambda S_1)(D) &= \lambda S_1(u), && (1.5)\\ S_1(D) \circ S_2(D) &= (S_1 S_2)(D) = (S_2 S_1)(D) = S_2(D) \circ S_1(D) && (1.6)\end{aligned}$$

pour toutes séries formelles S_1 et S_2 de $\mathbb{C}[[t]]$ et pour tout nombre complexe λ. De plus $I = \tau_0 \in \mathbb{C}[[D]]$. Il en résulte que $\mathbb{C}[[D]]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$. On peut aussi constater qu'alors, $\mathbb{C}[D]$ est une sous-algèbre commutative de $\mathbb{C}[[D]]$. On a ainsi établi le théorème suivant :

Théorème 11 *L'ensemble $\mathbb{C}[[D]]$ des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ des endomorphismes de $\mathbb{C}[x]$.*

Le théorème qui suit apporte une précision importante sur la structure de $\mathbb{C}[[D]]$:

Théorème 12 *L'application Ψ de $\mathbb{C}[[t]]$ dans $\mathbb{C}[[D]]$ qui à $S(t) = \sum_{m\geq 0} a_m t^m$ associe $S(D) = \sum_{m\geq 0} a_m D^m$ est un isomorphisme d'algèbres. L'écriture d'un opérateur de composition Ω sous la forme d'une série en D est unique.*

Preuve. On constate aisément que l'on a pour tous $\lambda \in K$ et $S_1(t)$, $S_2(t) \in \mathbb{K}[[t]]$, on a :

$$\Psi(S_1(t) + S_2(t)) = S_1(D) + S_2(D),$$

$$\Psi(S_1(t) S_2(t)) = S_1(D) \circ S_2(D),$$

$$\Psi(\lambda S(t)) = \lambda S(D) \quad \text{et } \Psi(1) = I$$

où $I = \tau_0$ est l'élément neutre de la loi de composition dans $\mathbb{C}[[D]]$. Ψ est donc un morphisme d'algèbres. Prouvons que Ψ est bijective. Pour cela, il nous suffit de prouver que le noyau de Ψ est réduit à $\{0\}$. Pour cela considérons $S(t) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{t^k}{k!}$ une série formelle telle que $S(t) \in \ker \Psi$. On a alors $\Psi(S(t)) = 0$, c'est-à-dire $S(D) = \sum_{k\geq 0} a_k \frac{D^k}{k!} = 0$. On en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k \frac{D^k}{k!}\right)(x^n) = 0. \tag{1.7}$$

Or

$$\left(\sum_{k\geq 0} a_k \frac{D^k}{k!}\right)(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}. \tag{1.8}$$

Il résulte de (1.7) et (1.8) que l'on a $a_n = 0$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ et par conséquent $S(t) = 0$ et $\ker \Psi = \{0\}$.

Ψ est donc un morphisme bijectif d'algèbres. Il en résulte aussi que l'écriture d'un opérateur de composition Ω sous forme d'une série en D est unique. $\square$

L'unicité de l'écriture d'un opérateur de composition sous forme d'une série en D nous permet de définir l'ordre d'un opérateur de composition de la manière suivante :

Définition 13 *On appelle ordre d'un opérateur de composition Ω la valutation de l'unique série formelle $S(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ vérifiant $\Omega = S(D)$.*

Notons par $\operatorname{ord}\Omega$ l'ordre d'un opérateur de composition $\Omega = S(D)$. Par définition, on a :

$$\operatorname{ord}\Omega = \operatorname{val} S(t).$$

1.2.5 Ensemble $\mathfrak{D}_D$ des delta opérateur de $\mathbb{C}[x]$

Les delta-opérateurs de $\mathbb{C}[x]$ sont des opérateurs de composition qui jouent un rôle analogue à l'opérateur de dérivation D.

Définition 14 *On appelle delta-opérateur de $\mathbb{C}[x]$ tout opérateur de composition d'ordre 1.*

L'ensemble des delta-opérateurs de $\mathbb{C}[x]$ est l'ensemble $\mathfrak{D}$ défini par :

$$\begin{aligned}\mathfrak{D}_D &= \{\Omega \in \mathbb{C}[[D]] \quad / \quad \operatorname{ord}\Omega = 1\} \\ &= \{S(D) \quad / \quad S(t) \in \mathbb{C}[[t]] \quad \text{et} \quad \operatorname{val} S(t) = 1\}.\end{aligned}$$

Comme $\mathfrak{D}_t$ désigne l'ensemble des delta-séries $\mathbb{C}[[t]]$, c'est à dire l'ensemble des séries de $\mathbb{C}[[t]]$ de valuation égale à 1. On a aussi :

$$\mathfrak{D}_D = \{S(D) \quad / \quad S(t) \in \mathfrak{D}_t\}.$$

L'opérateur de dérivation est un delta-opérateur. On a :

$$D = \sum_{k=0}^{\infty} \delta_{1,k} \frac{D^k}{k!},$$

où $\delta_{1,k}$ est le symbole de Kronecker valant 1 si $k = 1$ et 0 autrement.

Le théorème suivant montre que tout delta-opérateur vérifie des propriétés analogues à celles vérifiées par l'opérateur de dérivation :

Théorème 15 *Soient δ un delta-opérateur de $\mathbb{C}[x]$, m et n des entiers naturels. Alors pour tout polynôme $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, on a les propriétés suivantes :*

1. $\deg P(x) = n$ *avec* $n \geq 1 \Longrightarrow \deg \delta(P(x)) = n-1$,

2. $P(x)$ *est un polynôme constant* $\Longleftrightarrow \delta(P(x)) = 0$.

3. $\delta^m(x^n) = 0$ *si* $m > n$ *et* $\delta^m(P(x)) = 0$ *si* $m > \deg(P(x))$

Preuve. Soient $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ et δ un delta-opérateur de $\mathbb{C}[x]$, alors δ peut s'écrire :

$$\delta = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!} \text{ avec } a_1 \neq 0.$$

1. Si $\deg P(x) = n$ avec $n \geq 1$, alors on a $D^k(P(x)) = 0$ pour $k \geq n+1$ et donc

$$\delta(P(x)) = \sum_{k=1}^{n} a_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!} = a_1 P'(x) + \sum_{k=2}^{n} a_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!}$$

   Comme $a_1 \neq 0$, on a $\deg(a_1 P'(x)) = n-1$. De plus, la somme $\sum_{k=2}^{n} a_k \frac{P^{(k)}(x)}{k!}$ est un polynôme de degré strictement inférieur à n. Il en résulte que l'on a : $\deg \delta(P(x)) = n-1$.

2. Soit $P(x)$ un polynôme constant, on a alors $D^k(P(x)) = 0$ pour tout $k \geq 1$ et donc $\delta(P(x)) = 0$. L'implication réciproque est vraie car sa contraposée est vraie d'après ce qui précède. En effet si $P(x)$ n'est pas un polynôme constant, alors $\deg P(x) = n$ avec $n \geq 1$ et par suite $\deg \delta(P(x)) = n-1$ et donc $P(x) \neq 0$.

3. On a $\deg(\delta^m(x^n)) = n-m$ pour $0 \leq m \leq n$. En particulier $\deg(\delta^n(x^n)) = 0$, $\delta^n(x^n)$ est donc un polynôme constant et donc $\delta\ (\delta^n(x^n)) = 0$. Ainsi, on a bien $\delta^m(x^n) = 0$ pour $m > n$. La relation plus générale $\delta^m(P(x)) = 0$ si $m > \deg(P(x))$ se prouve de manière analogue.

□

Le théorème 15 nous autorise à considérer, pour tout delta-opérateur δ les séries en δ exactement de la même manière que nous l'avons fait pour l'opérateur D. Chaque série en δ définit un opérateur de $\mathbb{C}[x]$. On note encore de manière similaire (et avec un abus de notation) par $\mathbb{C}[[\delta]]$ l'ensemble des séries en δ :

$$\mathbb{C}[[\delta]] = \{S(\delta)\ /\ S(t) \in \mathbb{C}[[t]]\}.$$

On a alors un résultat analogue exactement comme nous l'avons fait pour D.

Théorème 16 *Pour tout delta-opérateur δ, l'ensemble $\mathbb{C}[[\delta]]$ des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ des endomorphismes de $\mathbb{C}[x]$.*

On en fait un résultat qui nous sera très utile donnée dans le théorème suivant :

Théorème 17 *Γ désignant l'ensemble des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$, pour tout delta-opérateur δ :*

1. *$\Gamma = \mathbb{C}[[\delta]]$,*
2. *l'ensemble des delta-opérateurs de $\mathbb{C}[x]$ vérifie :*

$$\mathfrak{D}_D = \{S(\delta) \quad / \quad S(t) \in \mathbb{C}[[t]] \quad et \quad \operatorname{val} S(t) = 1\}.$$

Preuve.

1. Soit δ un delta-opérateur de $\mathbb{C}[x]$. δ peut s'écrire :

$$\delta = T(D)$$

où $T \in \mathfrak{D}_t$. La série T admet une série réciproque $T^{\langle -1 \rangle}$ vérifiant

$$T \circ T^{\langle -1 \rangle} = T^{\langle -1 \rangle} \circ T = t$$

On a donc :

$$D = T^{\langle -1 \rangle}(\delta).$$

Les séries formelles T et $T^{\langle -1 \rangle}$ de valuation égale à 1 sont substituables dans toute série formelle de $\mathbb{C}[[t]]$. Pour tout $S(t) \in \mathbb{C}[[t]]$, on a :

$$S(D) = S\left(T^{\langle -1 \rangle}(\delta)\right) = \left(S \circ T^{\langle -1 \rangle}\right)(\delta) \tag{1.9}$$

et

$$S(\delta) = S(T(D)) = (S \circ T)(D). \tag{1.10}$$

On déduit aisément de (1.9) et (1.10 les inclusions $\mathbb{C}[[D]] \subset \mathbb{C}[[\delta]]$ et $\mathbb{C}[[\delta]] \subset \mathbb{C}[[D]]$. On a donc bien l'égalité $\mathbb{C}[[\delta]] = \mathbb{C}[[D]] = \Gamma$.

2. On a :

$$\mathfrak{D}_D = \{S(D) \quad / \quad S(t) \in \mathbb{C}[[t]] \quad \text{et} \quad \operatorname{val} S(t) = 1\}.$$

Posons

$$\mathfrak{D}_\delta = \{S(\delta) \quad / \quad S(t) \in \mathbb{C}[[t]] \quad \text{et} \quad \operatorname{val} S(t) = 1\}.$$

Il s'agit de prouver l'égalité $\mathfrak{D}_D = \mathfrak{D}_\delta$. On procède comme précédemment en prouvant deux inclusions. Si $S(D) \in \mathfrak{D}_D$, on a alors $S(D) = \left(S \circ T^{\langle -1 \rangle}\right)(\delta)$ avec $\operatorname{val}\left(S \circ T^{\langle -1 \rangle}\right) = \operatorname{val} S . \operatorname{val} T^{\langle -1 \rangle} = 1$ et donc $S(D) \in \mathfrak{D}_\delta$. On en déduit que $\mathfrak{D}_D \subset \mathfrak{D}_\delta$. De même, si $S(\delta)$ $\mathfrak{D}_\delta$, on a alors $S(\delta) = (S \circ T)(D)$ avec $\operatorname{val}(S \circ T) = \operatorname{val} S . \operatorname{val} T = 1$ et donc on a aussi $S(\delta) \in \mathfrak{D}_D$. On en déduit qu'on a aussi $\mathfrak{D}_\delta \subset \mathfrak{D}_D$. Par suite on a l'égalité $\mathfrak{D}_D = \mathfrak{D}_\delta$.

$\square$

L'écriture d'un opérateur de composition comme une série en δ est unique. En effet, il suffit de prouver l'unicité de la représentation de l'opérateur nulle. Ce qui est immédiat. En effet, si $\Omega = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta^k = 0$, on a alors $\Omega\left(x^n\right) = \sum_{k=1}^{n} a_k \delta^k \left(x^n\right) = 0$ et cette égalité implique $a_k = 0$ pour tout $0 \leq k \leq n$ car il s'agit d'une combinaison linéaire nulle de polynômes $\delta^k\left(x^n\right)$ de degrés distincts ($\deg \delta^k \left(x^n\right) = n - k$).

Remarquons qu'on a :

$$S_1\left(D\right) = S_2\left(\delta\right) \Longrightarrow \operatorname{val} S_1 = \operatorname{val} S_2$$

car si $\delta = T\left(D\right)$ avec nécessairement $\operatorname{val} T = 1$, on alors $S_1\left(D\right) = S_2\left(T\left(D\right)\right) = \left(S_2 \circ T\right)\left(D\right)$, ce qui implique $S_1 = S_2 \circ T$ et par suite $\operatorname{val} S_1 = \operatorname{val}\left(S_2 \circ T\right) = \operatorname{val} S_2 . \operatorname{val} T = \operatorname{val} S_2$.

Ainsi l'ordre d'un opérateur de composition écrit comme série $S\left(\delta\right)$ en un delta-opérateur δ est aussi égale à la valuation de la série formelle $S\left(t\right)$.

1.2.6 Opérateurs de translations, opérateurs de pseudo-dérivation

On sait que si $\left(A_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes telle que $\deg A_n\left(x\right) = n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors $\left(A_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base de $\mathbb{C}\left[x\right]$. De plus, on sait que pour définir un opérateur Ω, il suffit de définir seulement les images $\Omega\left(A_n\left(x\right)\right)$ des vecteurs d'une base $\left(A_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}\left[x\right]$. De plus si $\deg \Omega\left(A_n\left(x\right)\right) = n$, alors Ω est un automorphisme de $\mathbb{C}\left[x\right]$.

Définition 18 *Pour tout $a \in \mathbb{C}$, l' opérateur τ_a défini par :*

$$\tau_a\left(x^n\right) = \left(x+a\right)^n, \quad n \in \mathbb{N}$$

est appelé opérateur de translation par a.

Remarquons que l'on a $\tau_0 = I$ où I est l'opérateur d'identité de $\mathbb{C}\left[x\right]$ noté aussi par 1.

Le théorème suivant est immédiat :

Théorème 19 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, l'opérataur τ_a de translation par α est un automophisme de $\mathbb{C}\left[x\right]$ qui vérifie les propriétés suivantes :*

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \qquad \tau_a = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{D^k}{k!},$$

$$\forall a, b \in \mathbb{C}, \qquad \tau_a \circ \tau_b = \tau_{a+b}, \tag{1.11}$$

$$\forall a, \qquad \tau_a^{-1} = \tau_{-a}. \tag{1.12}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}\tau_a(x^n) &= (x+a)^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a^k \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(a^k \frac{D^k}{k!}\right) x^n.\end{aligned}$$

Comme on a $\frac{D^k}{k!}(x^n) = 0$ pour $k > n$, on en déduit que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\tau_a(x^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(a^k \frac{D^k}{k!}\right) x^n = \left(\sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{D^k}{k!}\right) x^n.$$

Il en résulte que :

$$\tau_a = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{D^k}{k!}.$$

La relation (1.11) est triviale. Remarquons qu'on a :

$$e^{at} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k \frac{t^k}{k!}$$

et qu'on peut donc aussi écrire :

$$\tau_a = e^{at}.$$

On a alors :

$$\tau_a \circ \tau_b = e^{aD} \circ e^{bD} = e^{(a+b)D} = \tau_{a+b}.$$

En particulier, la relation (1.12) résulte du fait qu'on a :

$$\tau_a \circ \tau_{-a} = \tau_{-a} \circ \tau_a = \tau_0 = I.$$

□

Il est facile de constater que si a et b sont deux nombres complexes distincts, alors l'opérateur $\tau_a - \tau_b$ est un delta-opérateur. En effet, on a :

$$\tau_a - \tau_b = e^{aD} - e^{bD} = (a-b)D + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a^k - b^k\right) \frac{D^k}{k!}.$$

Comme $a - b \neq 0$, on constate que $\tau_a - \tau_b$ est un opérateur de composition d'ordre 1. $\tau_a - \tau_b$ est donc un delta-opérateur. Les delta-opérateurs Δ et ∇ appelés aussi opérateur de pseudo-dérivation sont définis par :

$$\Delta = \tau_1 - \tau_0 \quad \text{et } \nabla = \tau_0 - \tau_{-1}.$$

Définition 20 *Les opérateurs Δ et ∇ sont définis par les relations :*

$$\Delta\left(x^n\right) = (x+1)^n - x^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

et

$$\nabla\left(x^n\right) = x^n - (x-1)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Comme $\tau_0 = I$, on a :

$$\Delta = \tau_1 - I = e^D - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

et

$$\nabla = I - \tau_{-1} = 1 - e^{-D} = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{D^k}{k!}.$$

Définition 21 *L'opérateur de primitivation* Int *est défini par :*

$$\operatorname{Int}\left(x^n\right) = \frac{x^{n+1}}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Remarquons que si Ω est un opérateur de composition, le degré du polynôme $\Omega\left(x^n\right)$ est toujours de degré inférieur ou égal à n :

$$\forall \Omega \in \mathcal{L}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\right), \Omega \in \mathbb{C}\left[\left[D\right]\right] \Longrightarrow \deg \Omega\left(x^n\right) \leq n.$$

En effet, si $\Omega \in \mathbb{C}\left[\left[D\right]\right]$, Ω s'écrit sous la forme $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}$. On a alors :

$$\begin{aligned}
\Omega(x^n) &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k} x^{n-k} \\
&= a_0 x^n + a_1 \binom{n}{1} x^{n-1} + ... + a_n
\end{aligned}$$

et donc le degré du polynôme $\Omega\left(x^n\right)$ est inférieur ou égal à n. Il en résulte que l'opérateur de primitivation Int n'est pas un opérateur de composition car on a : $\deg\left(\operatorname{Int}\left(x^n\right)\right) = n+1 > n$.

1.2.7 Puissances des opérateurs Δ et ∇

Si U et $V \in \mathbb{C}[[D]]$, alors U et V commutent et la formule du binôme s'applique pour développer $(U+V)^k$ pour $k \in \mathbb{N}$. On a :

$$(U+V)^k = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} U^j \circ V^{k-j}. \tag{1.13}$$

En particulier avec $(U,V) \in \{(\tau_1,-1),(1,-\tau_{-1})\}$ où 1 désigne l'opérateur $\tau_0 = I$ et en constatant que l'on a pour tout entier j :

$$\tau_1^j = \tau_j \text{ et } \tau_{-1}^j = \tau_{-j},$$

on déduit de (1.13) le théorème suivant :

Théorème 22 *Pour tout entier naturel k, on a :*

$$\Delta^k = (\tau_1 - 1)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} \tau_j,$$

$$\nabla^k = (1-\tau_{-1})^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} \tau_{-j}.$$

1.2.8 Caractérisation des opérateurs de composition à l'aide des translations

On a vu que $(\mathbb{C}[[D]],+,\circ,.)$ était une algèbre commutative. Il en résulte que deux éléments quelconques U et V de $\mathbb{C}[[D]]$ commutent. Comme les translations $\tau_a = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \frac{D^n}{n!} \in \mathbb{C}[[D]]$, on peut affirmer que tout opérateur appartenant à $\mathbb{C}[[D]]$ est un opérateur qui commute avec tout opérateur de translation. Le théorème qui suit montre que réciproquement, tout opérateur qui commute avec les translations appartient nécessairement à $\mathbb{C}[[D]]$:

Théorème 23 *Un opérateur $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ est un élément de $\mathbb{C}[[D]]$ si et seulement s'il commute avec tout opérateur de translation τ_a pour $a \in \mathbb{C}$.*

$$\forall \Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x]), (\ \Omega \in \mathbb{C}[[D]] \quad \Longleftrightarrow \forall a \in \mathbb{C},\ \ \tau_a \circ \Omega = \Omega \circ \tau_a).$$

Preuve. Soit $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$, comme on a $\tau_a = e^{aD} - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} a^k \frac{D^k}{k!}$, on a $\tau_a \in \mathbb{C}[[D]]$ et τ_a commute avec Ω, l'implication directe est donc prouvée. Prouvons l'implication réciproque,

$$\forall a \in \mathbb{C},\quad (\tau_a \circ \Omega = \Omega \circ \tau_a) \Longrightarrow \Omega \in \mathbb{C}[[D]].$$

Supposons donc que :

$$\forall a \in \mathbb{C},\ \ \tau_a \circ \Omega = \tau_a \circ \Omega.$$

On a alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad (\tau_a \circ \Omega)(x^n) = (\Omega \circ \tau_a)(x^n)\,. \tag{1.14}$$

Posons

$$A_n(x) = \Omega(x^n)\,. \tag{1.15}$$

On déduit de (1.14) et (1.15) que pour tout $a \in \mathbb{C}$, on a :

$$\tau_a(A_n(x)) = \Omega((x+a)^n)\,.$$

C'est-à-dire

$$A_n(x+a) = \Omega\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} x^k\right).$$

Ainsi, on a :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad A_n(x+a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} A_k(x)$$

Pour $x = 0$, on en déduit que :

$$\forall a \in \mathbb{C}, \quad A_n(a) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} A_k(0) \tag{1.16}$$

Comme $\mathbb{C}$ est un corps infini, on peut déduire de (1.16) que pour tout entier naturel n, on a :

$$\begin{aligned}
\Omega(x^n) &= A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(0) \binom{n}{k} x^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} A_k(0) \frac{D^k}{k!}(x^n) \\
&= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}\right)(x^n)
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}.$$

On a bien prouvé qu'on a alors :

$$\Omega \in \mathbb{C}[[D]]\,.$$

□

Corollaire 24 *Un opérateur $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ est un delta-opérateur si et seulement si il vérifie les deux conditions suivantes :*

1. *δ commute avec tout opérateur de translation τ_a pour $a \in \mathbb{C}$,*
2. *$\delta(x) = c \in \mathbb{C}^*$ est un polynôme constant non nul*

Preuve. Si $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ est un delta-opérateur, les deux propriétés 1 et 2 du corollaire 24 sont vérifiées d'après le théorèmes 23 et 15. Réciproquement, si un opérateur $\delta \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ vérifie les deux propriétés 1 et 2 du corollaire 24, alors δ est un opérateur de composition grâce à 1 d'après le théorème 23. Il en résulte que δ peut s'écrire $\delta = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}$. On alors $\delta(x) = a_0 x + a_1$. La condition 2 du corollaire impose que $a_0 = 0$ et $a_1 \neq 0$. Il en résulte que $\operatorname{ord} \delta = 1$ et δ est un delta-opérateur. □

1.2.9 Suites de polynômes vérifiant les relations d'Appell

Étant donné un opérateur $\Omega \in \mathcal{L}(\mathbb{C}[x])$ défini par

$$\Omega(x^n) = A_n(x), \quad n \in \mathbb{N},$$

où $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite donnée polynômes de $\mathbb{C}[x]$. Nous allons déterminer les conditions nécassaires et suffisantes pour que l'opérateur Ω soit un opérateur de composition. Pour cela, nous commençons par la défintion pratique suivante :

Définition 25 *On dit qu'une suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations d'Appell si les conditions suivantes sont réalisées :*

1. *$A_0'(x) = 0$,*
2. *$A_n'(x) = nA_{n-1}(x)$ pour $n \geq 1$*

Théorème 26 *Soit $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[x]$. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations d'Appell.*
2. *On a*
$$A_n(x) = \Omega(x^n), \quad n \in \mathbb{N},$$
où Ω est l'opérateur de composition défini par
$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}.$$

3. *La série génératrice exponentielle de la suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = S(t) e^{xt}$$

où $S(t) \in \mathbb{C}[[t]]$.

Preuve.

1. Prouvons que (1) $\Longrightarrow$ (2). On constate aisément que si une suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie les relations d'Appell, $A_0(x)$ est un polynôme constant. En posant

$$a_n = A_n(0), \ \ n \in \mathbb{N},$$

on a :

$$A_0(x) = a_0$$

et

$$\frac{D^k}{k!} A_n(x) = \binom{n}{k} A_{n-k}(x) \text{ pour } 0 \leq k \leq n.$$

En particulier, on a alors :

$$\frac{D^n}{n!} A_n(x) = A_0(x) = a_0 \text{ pour } 0 \leq k \leq n$$

et

$$\frac{D^k}{k!} A_n(x) = 0 \text{ pour } k > n.$$

Le polynôme $A_n(x)$ est donc de degré $\leq n$. La formule de Taylor-MacLaurin nous permet d'affirmer que l'on a :

$$\begin{aligned} A_n(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{A_n^{(k)}(0)}{k!} x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0) x^k \\ &= \sum_{k=0}^{n} A_k(0) \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= \left(\sum_{k=0}^{n} A_k(0) \frac{D^k}{k!} \right) x^n \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!} \right) x^n \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A_n(x) = \Omega(x^n)$$

où

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}.$$

est un opérateur de composition.

2. Prouvons que (2) $\Longrightarrow$ (3). La relation

$$A_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!} \right) (x^n)$$

est équivalente à la relation

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0)\, x^k$$

qui elle même est équivalente à la relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) \frac{t^n}{n!} \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!} \right).$$

qui s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = S(t)\, e^{xt}$$

avec

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) \frac{t^n}{n!}.$$

3. Prouvons que (3) $\Longrightarrow$ (1). La relation

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = S(t)\, e^{xt},$$

est équivalente à :

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0)\, x^k$$

et donc aussi à :

$$A_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!} \right) (x^n).$$

On a alors :

$$A_n(x) = \Omega(x^n)$$

où Ω est l'opérateur de composition

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}.$$

On a clairement :

$$A_0'(x) = A_0'(0) = 0.$$

Comme Ω est un opérateur de composition, il commute avec l'opérateur de dérivation D et on a :

$$(D \circ \Omega)(x^n) = (\Omega \circ D)(x^n),$$

ce qui se traduit pour $n \geq 1$ par :

$$A_n'(x) = nA_{n-1}(x).$$

La suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie bien les relations d'Appell.

$\square$

Théorème 27 *Soit $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les relations d'Appell, alors on a pour tout entier naturel n :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(y)\, x^{n-k}. \tag{1.17}$$

Preuve. En effet, en posant

$$S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(0) \frac{t^n}{n!},$$

on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x+y) \frac{t^n}{n!} &= S(t)\, e^{t(x+y)} \\
&= \left(S(t)\, e^{ty}\right) e^{tx} \\
&= \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n(y) \frac{t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n \frac{t^n}{n!}\right) \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k+\ell=n} \frac{A_k(y)}{k!} \frac{x^\ell}{\ell!}\right) t^n
\end{aligned}$$

On en déduit :

$$\frac{A_n(x+y)}{n!} = \sum_{k+\ell=n} \frac{A_k(y)}{k!} \frac{x^\ell}{\ell!}$$

d'où l'on déduit la relation (1.17). $\square$

1.2.10 Suites de polynômes d'Appell

C'est dans un important article [5] que le mathématicien français Paul Emile Appell définit en 1880 des suites de polynômes qui portent désormais son nom. La définition qui suit est fidèle à la définition qu'il donne dans son article pour ces polynômes.

Définition 28 *On appelle suite de polynômes d'Appell toute suite de polynômes* $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant les deux conditions suivantes :*

$$\forall n \in \mathbb{N},\ \deg A_n(x) = n$$

et

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A_n'(x) = nA_{n-1}'(x).$$

On constate aisément qu'une suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell si et seulement si elle vérifie les relations d'Appell et si de plus le polynôme constant $A_0(x)$ n'est pas le polynôme nul.

Exemple 29 *La suite de polynômes* $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de polynômes d'Appell.*

Les deux résultats suivants sont des corollaires au théorème 26 :

Théorème 30 *.Une suite de polynômes* $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est suite de polynômes d'Appell si et seulement si l'opérateur* Ω_A *défini par*

$$\Omega_A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0)\frac{D^k}{k!}$$

est un opérateur d'Appell telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad A_n(x) = \Omega_A(x^n).$$

Théorème 31 *Soit* $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de polynômes. Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de polynômes d'Appell*
2. *Pour tout entier naturel* n*, on a :*

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(0)\, x^k \quad \text{et } A_0(0) \neq 0. \tag{1.18}$$

3. *Il existe une série formelle $S(t) \in \mathbb{C}[[t]]$ telle que $S(0) \neq 0$ et*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{t^n}{n!} = S(t) e^{tx}. \tag{1.19}$$

Le théorème suivant permet de carctériser les opérateurs de composition d'ordre m.

Théorème 32 *Soit m un entier naturel m et $\mathcal{G}_D$ le groupe des opérateurs d'Appell, alors*

1. *L'ensemble des opérateurs de composition d'ordre m est $D^m\mathcal{G}_D$*

$$D^m\mathcal{G}_D = \{D^m U \ / \ U \in \mathcal{G}_D\}.$$

2. *L'ensemble des delta-opérateurs $\mathfrak{D}_D$ est telle que :*

$$\mathfrak{D}_D = D\mathcal{G}_D.$$

Preuve.

1. Soit Ω un opérateur de composition d'ordre m, alors Ω s'écrit :

$$\Omega = \sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{D^n}{n!}$$

avec $a_m \neq 0$. On peut écrire Ω sous la forme

$$\begin{aligned} \Omega &= D^m \left(\sum_{n=m}^{\infty} a_n \frac{D^{n-m}}{n!} \right) \\ &= D^m \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \frac{D^k}{(m+k)!} \right) \\ &= D^m U. \end{aligned}$$

avec

$$U = \sum_{k=0}^{\infty} a_{m+k} \frac{D^k}{(m+k)!}.$$

Comme $a_m \neq 0$, on a

$$\operatorname{ord} U = 0.$$

On a donc $U \in \mathcal{G}_D$

2. C'est simplement le cas particulier où $m = 1$.

$\square$

Remarquons que si $S(t)$ et $T(t)$ sont des séries formelles telles que $T(t) \neq 0$. On peut considérer la fraction $\frac{S(t)}{T(t)} \in \mathbb{C}((t))$. On a alors $\frac{S(t)}{T(t)} \in \mathbb{C}[[t]]$ si et seulement si $\operatorname{val} S(t) \geq \operatorname{val} T(t)$. On peut donc considérer des opérateurs de compostion s'écrivant sous la forme

$$\Omega = \frac{S(D)}{T(D)}$$

pourvu que $\operatorname{ord} S(D) \geq \operatorname{ord} T(D)$.

En désigant respectivement par p et q les ordres des opérateurs de composition $S(D)$ et $T(D)$, on peut écrire :

$$S(D) = D^p S_1(D) \quad \text{et} \quad T(D) = D^q T_1(D)$$

avec $S_1(D) \in \mathcal{G}_D$ et $T_1(D) \in \mathcal{G}_D$ et $p \geq q$. On a alors :

$$\Omega = D^{p-q} \frac{S_1(D)}{T_1(D)} = D^{p-q} S_1(D) T_1^{-1}(D)$$

où $D^{p-q} \in \mathbb{C}[[D]]$ et $S_1(D) T_1^{-1}(D) \in \mathbb{C}[[D]]$.

1.2.11 Groupe des opérateurs d'Appell

Le théorème qui suit précise les éléments du groupe (commutatif) $\mathcal{G}_D$ des unités de l'anneau commutatif $(\mathbb{C}[[D]], +, \circ)$.

Théorème 33 *Le groupe $\mathcal{G}_D$ des unités de l'anneau $(\mathbb{C}[[D]], +, \circ)$ est constitué par l'ensemble des opérateurs de composition Ω de $\mathbb{C}[[D]]$ qui s'ecrivent sous la forme*

$$\Omega = S(D)$$

où $S(t)$ est une série formelle de $\mathbb{C}[[t]]$ d'ordre zéro.

$$\mathcal{G}_D = \{S(D) \ / \ S(t) \in \mathbb{C}[[t]] \ \text{ et } S(0) \neq 0\}$$

Preuve. Un opérateur $\Omega_1 = S_1(D)$ de $\mathbb{C}[[D]]$ est une unité de l'anneau $(\mathbb{C}[[D]], +, \circ)$ si et seulement s'il existe un opérateur $\Omega_2 = S_2(D)$ de $\mathbb{C}[[D]]$ tel que $\Omega_1 \circ \Omega_2 = I$, c'est-à-dire si et seulement si $S_1(t) S_2(t) = 1$, autrement dit si et seulement si $S_1(t)$ est une série formelle inversible. Ce qui se traduit par $S_1(0) \neq 0$. $\square$

Définition 34 *On appelle opérateur d'Appell tout élément de $\mathcal{G}_D$. Le groupe $\mathcal{G}_D$ est appelé groupe des opérateurs d'Appell.*

Les opérateurs d'Appell sont des automorphismes de $\mathbb{C}[x]$. Le cas des opérateurs d'Appell $S(D)$ tels que la série formelle $S(t)$ a pour premier terme le nombre 1, c'est-à-dire tel que $S(0) = 1$ est particulièrement intéressant. Dans ce cas, $\operatorname{val}(S(t) - 1) \geq 1$ et on peut définir pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ la série $S^\alpha(t)$ de la manière suivante

$$S^\alpha(t) = (1 + (S(t) - 1))^\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{\alpha}{k} (S(t) - 1)^k .$$

Cette définition de $S^\alpha(t)$ coïncide avec la définition de $S^m(t)$ dans la cas où $\alpha = m$ avec $m \in \mathbb{Z}$. Comme on a $S^\alpha(0) = 1$, il en résulte que $S^\alpha(D) \in \mathcal{G}_D$.

1.3 Nombres et polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

C'est dans son ouvrage "Ars Conjectandi" [15] (publié à Bâle huit ans après sa mort) que Jakob Bernoulli (1654-1705) définit une suite de nombres rationnels appelés aujourd'hui en son honneur "nombres de Bernoulli. Ces nombres ont aussi été mis en évidence par Takakazu Seki (1642 - 1708) mathématicien japonais qui les découvrit, sans doute, très peu de temps avant lui [6]. Depuis cette date, ces nombres font l'objet d'intenses études. La recherche de formules explicites et de relations de récurrence aussi bien pour les nombres de Bernoulli que pour les polynômes de Bernoulli a été et reste un domaine constant d'intérêt de beaucoup de mathématiciens [33]. Dans ce paragraphe, nous allons définir non seulement les suites de nombres et de polynômes de Bernoulli mais aussi les suites et nombres d'Euler et de Genocchi au sens classique avant d'étudier certaines de leurs généralisations. Les propriétés des opérateurs de composition nous permettront de prouver très simplement de nombreuses propriétés de ces nombres et polynômes remarquables.

1.3.1 Nombres et polynômes classiques de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

Considérons les trois séries formelles suivantes de $\mathbb{C}[[t]]$

$$S_1(t) = \frac{t}{e^t - 1},\ S_2(t) = \frac{2}{e^t + 1} \text{ et } S_3(t) = \frac{2t}{e^t + 1}.$$

On a

$$\operatorname{val} S_1(t) = 0,\ \operatorname{val} S_2(t) = 0 \text{ et } \operatorname{val} S_3(t) = 1.$$

Désignons par Ω_B, Ω_E et Ω_G les opérateurs de composition associés respectivement à ces trois séries formelles. On a :

$$\Omega_B = S_1(D) = \frac{D}{e^D - 1},\ \ \Omega_E = S_2(D) = \frac{2}{e^D + 1} \text{ et } \Omega_G = S_3(D) = \frac{2D}{e^D + 1}$$

et aussi

$$\operatorname{val}\Omega_B = 0, \quad \operatorname{val}\Omega_E = 0 \quad \text{et} \quad \operatorname{val}\Omega_G = 1.$$

Les opérateurs Ω_B et Ω_E sont des opérateurs d'Appell, Ω_G est un delta-opérateur. Remarquons qu'on peut facilement exprimer ces trois opérateurs de composition comme des séries en Δ. En effet, les relations :

$$\Delta = e^D - 1 \;\text{ et }\; D = \ln(1+\Delta)$$

permettent d'exprimer ces trois opérateurs en des séries en Δ comme suit :

$$\begin{aligned}
\Omega_B &= \frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k+1}\Delta^k, \\
\Omega_E &= = \frac{2}{\Delta+2} = \frac{1}{1+\frac{1}{2}\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k}\Delta^k, \\
\Omega_G &= \frac{2\ln(1+\Delta)}{\Delta+2} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{\substack{r+s=k\\(r,s)\in\mathbb{N}^2}} \frac{(-1)^k}{(r+1)\,2^s}\right)\Delta^{k+1}.
\end{aligned}$$

Définition 35 *On appelle n-ième polynôme de Bernoulli le polynôme $B_n(x)$ défini par :*

$$B_n(x) = \Omega_B(x^n) = \left(\frac{D}{e^D-1}\right)(x^n).$$

On appelle n-ième polynôme d'Euler le polynôme $E_n(x)$ défini par :

$$E_n(x) = \Omega_E(x^n) = \left(\frac{2}{e^D+1}\right)(x^n).$$

On appelle n-ième polynôme de Genocchi le polynôme $G_n(x)$ défini par :

$$G_n(x) = \Omega_G(x^n) = \left(\frac{2D}{e^D+1}\right)(x^n).$$

Selon notre définition et les propriétés des opérateurs de composition, on a aussi les relations suivantes qu'on considère souvent pour définir ces nombres et polynômes remarquables :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{t}{e^t-1}e^{tx}, \tag{1.20}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^t+1}e^{tx}, \tag{1.21}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} G_n(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^t+1}e^{tx}. \tag{1.22}$$

Les polynômes d'Euler ont été ainsi désignés en l'honneur du mathématicien suisse Leonhard Euler (1707-1783). Les polynômes de Genocchi ont été ainsi désignés en l'honneur du mathématicien italien Angelo Genocchi (1817-1889).

Les expressions (1.20), (1.21) et (1.22) permettent de prouver aisément le théorème suivant :

Théorème 36 *Pour tout entier naturel* n*, on a :*

$$(-1)^n B_n(x) = B_n(1-x) \tag{1.23}$$

$$(-1)^n E_n(x) = E_n(1-x)$$

$$(-1)^{n+1} G_n(x) = G_n(1-x)$$

Preuve. Le théorème résulte des relations suivantes déduites de (1.20),(1.21) et (1.22) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{-t}{e^{-t}-1} e^{-tx} = \frac{t}{e^t-1} e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} B_n(1-x) \frac{t^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n E_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2}{e^{-t}+1} e^{-tx} = \frac{2}{e^t+1} e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} E_n(1-x) \frac{t^n}{n!},$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^{n+1} G_n(x) \frac{t^n}{n!} = \frac{2t}{e^{-t}+1} e^{-tx} = \frac{2t}{e^t+1} e^{t(1-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} G_n(1-x) \frac{t^n}{n!}.$$

□

Du fait que les opérateurs Ω_B et Ω_E sont des opérateurs d'Appell et que Ω_G est un delta-opérateur. Les suites de polynômes de Bernoulli $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et d'Euler $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sont des suites de polynômes d'Appell. Ce qui n'est pas le cas de la suite des polynômes de Genocchi $(G(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Les propriétés suivantes résultent immédiatement de ces constations :

$$B_0(x) = 1 \text{ et } B_n'(x) = nB_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$E_0(x) = 1 \text{ et } E_n'(x) = nE_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$G_0(x) = 0 \text{ et } G_n'(x) = nG_{n-1}(x), \quad n \geq 1,$$

$$\deg B_n(x) = n, \quad \deg E_n(x) = n, \quad n \geq 0,$$

$$\deg G_n(x) = n-1, \quad n \geq 1,$$

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} y^{n-k} B_k(x), \tag{1.24}$$

$$E_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}E_k(x),$$
$$G_n(x+y)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}G_k(x).$$

Les premiers polynômes de Bernoulli sont :

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1,\\
B_1(x) &= x-\frac{1}{2},\\
B_2(x) &= x^2-x+\frac{1}{6},\\
B_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{2}x.
\end{aligned}$$

Les premiers polynômes d'Euler sont :

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= 1,\\
E_1(x) &= x-\frac{1}{2},\\
E_2(x) &= x^2-x,\\
E_3(x) &= x^3-\frac{3}{2}x^2+\frac{1}{4}.
\end{aligned}$$

Les premiers polynômes de Genocchi sont :

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= 0,\\
G_1(x) &= 1,\\
G_2(x) &= 2x-1,\\
G_3(x) &= 3x^2-3x.
\end{aligned}$$

On a la relation :

$$G_n(x)=nE_{n-1}(x),\quad n\in\mathbb{N}^*.$$

On définit aussi les suites des nombres de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$, d'Euler $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Genocchi $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par les relations :

$$B_n=B_n(0),\qquad E_n=2^nE_n\left(\frac{1}{2}\right),\quad G_n=G_n(0),\quad n\in\mathbb{N}.$$

Dans ce qui suit, nous allons nous focaliser davantage sur les propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli.

Théorème 37 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = (n+1)\,x^n \tag{1.25}$$

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt = x^n \tag{1.26}$$

$$\Omega_B^{-1} = \Delta \circ \mathrm{Int} \tag{1.27}$$

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(x) = B_{n+1}(x) + (n+1)\,x^n, \tag{1.28}$$

$$B_n(x) = x^n + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n+1}{k} B_k(x)\,. \tag{1.29}$$

Preuve.

1. On a :

$$\Delta \circ \Omega_B = \ln(1+\Delta) = D,$$

il en résulte que :

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = \Delta\left(\Omega_B\left(x^{n+1}\right)\right) = D\left(x^{n+1}\right) = (n+1)\,x^n.$$

2. La suite de polynômes de Bernoulli étant une suite de polynômes d'Appell, on a $B'_{n+1}(x) = (n+1)\,B_n(x)$. On en déduit en exploitant le résultat obtenu précédemment :

$$\begin{aligned}\int_x^{x+1} B_n(t)\,dt &= \left[\frac{B_{n+1}(t)}{n+1}\right]_x^{x+1} \\ &= \frac{B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x)}{n+1} = x^n\end{aligned}$$

3. Ainsi, avec l'opérateur Int défini par :

$$\mathrm{Int}\,(x^n) = \frac{x^{n+1}}{n+1},$$

on a la relation :

$$\Delta \circ \mathrm{Int} \circ \Omega_B = I.$$

On en déduit que :

$$\Omega^{-1} = \Delta \circ \mathrm{Int}\,.$$

4. Comme $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell, on a :

$$B_{n+1}(x+1) = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} B_k(x)$$

la propriété résulte alors de (1.25) en y remplaçant $B_{n+1}(x+1)$ par cette expression.

5. Ce n'est qu'une simple réécriture de la relation (1.29). Cette relation permet de calculer facilement les premiers polynômes de Bernoulli.

□

On peut déduire du théorème 37 les propriétés bien connues suivantes des nombres de Bernoulli [1] :

Théorème 38 *Pour tous entiers naturels n et m, on a :*

$$(-1)^n B_n = B_n + \delta_{n,1}, \tag{1.30}$$

$$B_{2n+1} = 0,\ n \geq 1, \tag{1.31}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n + \delta_{n,1}, \tag{1.32}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^m = \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}, \tag{1.33}$$

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{m+1}{2k} B_{2k} n^{m+1-2k}. \tag{1.34}$$

Dans ce théorème, $\delta_{i,j}$ désigne le symbole de Kronecker prenant la valeur 1 si $i = j$ et 0 autrement.

Preuve.

1. Nous disposons des relations suivantes

$$B_0(x) = 1, \quad B_1(x) = x - \frac{1}{2}$$

et de la relation suivante déduite de (1.25) pour $x = 0$

$$B_n(1) - B_n(0) = 0, \quad n \geq 2.$$

On en déduit que l'on a :

$$B_n(1) - B_n(0) = \begin{cases} 0 \ \text{ si } n = 0, \\ 1 \text{ si } n = 1, \\ 0 \text{ si } n \geq 1. \end{cases}$$

Ces relations sont équivalentes à la relation :

$$B_n(1) - B_n = \delta_{n,1}. \tag{1.35}$$

D'autre part, on déduit de la relation (1.23), écrite pour $x = 0$, que l'on a aussi :

$$(-1)^n B_n = B_n(1). \tag{1.36}$$

Il résulte des relations (1.35) et (1.36) que l'on a bien :

$$(-1)^n B_n = B_n + \delta_{n,1}. \tag{1.37}$$

2. On déduit de cette dernière relation que :

$$-B_{2n+1} = B_{2n+1} + \delta_{2n+1,1},$$

ce qui implique bien la relation :

$$B_{2n+1} = 0,\ n \geq 1.$$

3. On a, en exploitant les relations (1.24), (1.36) et (1.37) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k = B_n(1) = (-1)^n B_n = B_n + \delta_{n,1}.$$

4. En exploitant (1.25)

$$B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k) = (m+1)\, k^m.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k^m &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{n} \left(B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)\right) \\ &= \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1}. \end{aligned}$$

5. On a :

$$\begin{aligned} B_{m+1}(n+1) &= B_{m+1}(n) + (m+1)\, n^m \\ &= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} + (m+1)\, n^m \\ &= B_{m+1} + n^{m+1} + \frac{m+1}{2} n^m + \sum_{k=2}^{m+1} \binom{m+1}{k} B_k n^{m+1-k} \end{aligned}$$

On en déduit à l'aide des relations (1.33) et (1.31) que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^m &= \frac{B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}}{m+1} \\ &= \frac{n^{m+1}}{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \sum_{k=1}^{\left[\frac{m}{2}\right]} \binom{m+1}{2k} B_{2k} n^{m+1-2k}. \end{aligned}$$

$\square$

La formule (1.34) est connue sous le nom de formule de Faulhaber en l'honneur du mathématicien Johann Faulhaber (1580-1635) qui étudia les sommes $\sum_{k=1}^{n} k^m$ un siècle avant Bernoulli.

1.3.2 Nombres de Fibonacci et de Lucas

La suite des nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par les relations :

$$F_0 = 0,\ F_1 = 1 \ \text{ et } F_n = F_{n-1} + F_{n-2} \text{ pour } n \geq 2$$

est l'une des plus anciennes suites d'entiers connues. Elle a été ainsi nommée en l'honneur du mathématicien du Moyen Age Léonardo Pisano (1170-1250) plus connu sous le nom de Fibonacci, qui les a défini dans un ouvrage intitulé "le Liber abaci" publié en 1202.

La suite des nombres de Lucas est appelée aussi "suite de Fibonacci-Lucas" et elle est définie par les relations :

$$L_0 = 2,\ L_1 = 1 \ \text{ et } L_n = L_{n-1} + L_{n-2} \text{ pour } n \geq 2$$

ainsi désignée en l'honneur du mathématicien français Edouard Lucas (1842-1891) qui les défini et étudié notamment dans l'article [45].

Ces deux suites d'entiers classiques sont répertoriées dans l'encyclopédie des suites en ligne de Sloane sous les références. Les suites des premières valeurs de ces suites sont :

$$(F_n)_{n\geq 0} = (0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 45, 89, 144, \ldots)$$

et

$$(L_n)_{n\geq 0} = (2, 1, 3, 4, 7, 11, 18, 29, 47, 76, 123, 199, 322, \ldots).$$

Les formules suivantes, connues sous le nom de formules de Binet (du nom du mathématicien Jacques Binet (1786-1856)) sont des expressions explicites du n-ième terme de chacune de ces suites :

$$F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right) \text{ et } L_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

En posant

$$c = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \ \text{ et } d = \frac{1-\sqrt{5}}{2},$$

on a :

$$F_n = \frac{c^n - d^n}{c-d} \ \text{ et } L_n = c^n + d^n,$$

avec

$$c + d = 1. \tag{1.38}$$

A partir de ces formules, il est facile de déterminer les fonctions génératrices exponentielles des suites $F = (F_n)_{n \geq 0}$ et $L = (L_n)_{n \geq 0}$. On a :

$$S_F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{c^n - d^n}{c - d} \right) \frac{t^n}{n!} = \frac{e^{ct} - e^{dt}}{c - d}$$

et

$$S_L(t) = \sum_{n=0}^{\infty} L_n \frac{t^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} (c^n + d^n) \frac{t^n}{n!} = e^{ct} + e^{dt}.$$

A l'aide de la relation (1.38), on constate ainsi que :

$$S_F(-t) = \frac{e^{-ct} - e^{-dt}}{c - d} = \frac{e^{(d-1)t} - e^{(c-1)t}}{c - d} = -e^{-t} S_F(t)$$

et

$$S_L(-t) = e^{-ct} + e^{-dt} = e^{(d-1)t} + e^{(c-1)t} = e^{-t} S_F(t)$$

1.3.3 Les relations de Gessel

A toute suite numérique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, on peut associer la forme linéaire L définie par la donnée des images des vecteurs de la base canonique $(x^n)_{n \in \mathbb{N}}$ de la manière suivante :

$$L(x^n) = u_n.$$

Il en résulte par linéarité que pour tout polynôme $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, on a alors :

$$L(P(x)) = L\left(\sum_{k=0}^{n} a_k x^k \right) = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k.$$

Par soucis de simplification, de nombreux auteurs (Lucas, Agoh, Gessel,...) adoptent la notation "abusive" mais pratique suivante : $L(P(x))$ est simplement désigné par $P(u)$ et on convient d'écrire :

$$P(u) = \sum_{k=0}^{n} a_k u_k.$$

Nous allons maintenant définir deux formes linéaires L_1 et L_2 sur $\mathbb{C}[x]$ attachées à la suite des nombres de Bernoulli. Ces deux formes linéaires sont définies par :

$$L_1(x^n) = B_n$$

et

$$L_2\left(x^n\right) = (-1)^n B_n.$$

Ces deux formes ont des propriétés qui ont été exploitées par de nombreux auteurs parmi lesquels on trouve Gessel qui prouve et exploite la propriété suivante :

Théorème 39 *Pour tout polynôme $f(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, on a pour tout entier naturel m*

$$f(B+m) - f(-B) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k). \tag{1.39}$$

Preuve. La relation (1.39) signifie que l'on a :

$$L_1\left(f(x+m) - f(-x)\right) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k).$$

Pour prouver cette dernière relation, il suffit de la prouver seulement dans le cas particulier où $f(x) = x^n$. Dans ce cas, la relation à prouver devient :

$$L_1\left((x+m)^n - (-x)^n\right) = \sum_{k=1}^{m-1} nk^{n-1}.$$

On a :

$$\begin{aligned} L_1\left((x+m)^n - (-x)^n\right) &= L_1\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k m^{n-k}\right) - (-1)^n L_1\left(x^n\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k m^{n-k} - (-1)^n B_n \\ &= B_n(m) - B_n(1) \end{aligned}$$

Ainsi la relation à prouver est équivalente à la relation suivante :

$$B_n(m) - B_n(1) = \sum_{k=1}^{m-1} nk^{n-1}.$$

Cette dernière relation résulte aisément de la relation suivante déduite de (1.25) :

$$B_n(x+1) - B_n(x) = nx^{n-1}.$$

En effet, il suffit de remarquer qu'on a alors :

$$B_n(m) - B_n(1) = \sum_{k=1}^{m-1} \left(B_n(k+1) - B_n(k)\right) = \sum_{k=1}^{m-1} nk^{n-1}.$$

$\square$

1.3.4 Nombres et polynômes généralisés de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

Considérons de nouveau les trois séries formelles suivantes de $\mathbb{C}[[t]]$

$$S_1(t) = \frac{t}{e^t - 1}, \quad S_2(t) = \frac{2}{e^t + 1} \text{ et } S_3(t) = \frac{2t}{e^t + 1}.$$

On a :

$$\operatorname{val} S_1(t) = 0, \quad \operatorname{val} S_2(t) = 0 \quad \text{et} \ \operatorname{val} S_3(t) = 1.$$

Les opérateurs de composition associés respectivement à ces trois séries formelles Ω_B, Ω_E et Ω_G On a

$$\Omega_B = S_1(D) = \frac{D}{e^D - 1}, \ \ \Omega_E = \ S_2(D) = \frac{2}{e^D + 1} \text{ et } \Omega_G = S_3(D) = \frac{2D}{e^D + 1}$$

Les deux séries formelles $S_1(t)$ et $S_2(t)$ ont pour premier terme (non nul) le nombre 1. On peut donc définir pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ deux opérateurs d'Appell Ω_B^α et Ω_E^α et un opérateur de composition Ω_G^m pour $m \in \mathbb{N}$:

$$\Omega_B^\alpha = \left(\frac{t}{e^D - 1}\right)^\alpha, \ \ \Omega_E^\alpha = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^\alpha \text{ et } \Omega_G^m = \left(\frac{2D}{e^D + 1}\right)^m$$

Définition 40 *On appelle n-ième polynôme généralisé de Bernoulli d'ordre α le polynôme $B_n^{(\alpha)}(x)$ défini par :*

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_B^\alpha(x^n) = \left(\frac{t}{e^D - 1}\right)^\alpha (x^n).$$

On appelle n-ième polynôme généralisé d'Euler d'ordre α le polynôme $E_n^{(\alpha)}(x)$ défini par :

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_E^\alpha(x^n) = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^\alpha (x^n).$$

On appelle n-ième polynôme généralisé de Genocchi d'ordre α le polynôme $G_n^{(\alpha)}(x)$ défini par :

$$G_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_G^\alpha(x^n) = \left(\frac{2t}{e^D + 1}\right)^\alpha (x^n).$$

On pose aussi :

$$B_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}(0) \quad \text{et } E_n^{(\alpha)} = 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

Les nombres $B_n^{(\alpha)}$ et $E_n^{(\alpha)}$ sont appelés respectivement nombres généralisés de Bernoulli et d'Euler d'ordre α. On a :

$$B_n(x) = B_n^{(1)}(x),$$
$$E_n(x) = E_n^{(1)}(x),$$
$$B_n = B_n^{(1)} \text{ et } E_n = E_n^{(1)}.$$

Comme Ω_B^α et Ω_E^α sont des opérateurs d'Appell, les suites de polynômes $\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\geq 0}$ sont des suites de polynômes d'Appell. Il en résulte les propriétés suivantes ([56], p. 93) :

$$B_n^{(\alpha)}(0) = 1 \quad \text{et} \quad E_n^{(\alpha)}(0) = 1, \tag{1.40}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^\alpha e^{tx}, \tag{1.41}$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t + 1}\right)^\alpha e^{tx}, \tag{1.42}$$

$$B_0^{(\alpha)}(x) = 1 \text{ et } D\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right) = nB_{n-1}^{(\alpha)}(x) \text{ pour } n \geq 1, \tag{1.43}$$

$$E_0^{(\alpha)}(x) = 1 \text{ et } D\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right) = nE_{n-1}^{(\alpha)}(x) \text{ pour } n \geq 1,$$
$$B_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}B_k^{(\alpha)}(x), \tag{1.44}$$
$$E_n^{(\alpha)}(x+y) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}y^{n-k}E_k^{(\alpha)}(x).$$

Les premiers polynômes généralisés d'ordre α de Bernoulli et d'Euler sont :

$$\begin{aligned}
B_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
B_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{1}{2}\alpha, \\
B_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - \alpha x + \frac{1}{12}\alpha(3\alpha - 1), \\
B_3^{(\alpha)}(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\alpha(3\alpha - 1)x - \frac{1}{8}\alpha^2(\alpha - 1),
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
E_0^{(\alpha)}(x) &= 1 \\
E_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{1}{2}\alpha, \\
E_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - \alpha x + \frac{1}{4}\alpha(\alpha-1), \\
E_3^{(\alpha)}(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2 + \frac{3}{4}\alpha(\alpha-1)x - \frac{1}{8}\alpha^2(\alpha-3).
\end{aligned}$$

Théorème 41 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$\Delta\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right) = D\left(B_n^{(\alpha-1)}(x)\right) \tag{1.45}$$

$$B_n^{(\alpha)}(\alpha - x) = (-1)^n B_n^{(\alpha)}(x) \tag{1.46}$$

$$B_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 0 \text{ pour } n \text{ impair.} \tag{1.47}$$

Preuve.

1. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty}\left(B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x)\right)\frac{t^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x+1)\frac{t^n}{n!} - \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!} \\
&= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{t(x+1)} - \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{tx} \\
&= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha}\left(e^t-1\right)e^{tx}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} \Delta\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha-1} te^{tx} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha-1)}(x)\frac{t^{n+1}}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} D(B_{n+1}^{(\alpha-1)}(x))\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} D(B_n^{(\alpha-1)}(x))\frac{t^n}{n!}
\end{aligned}$$

D'ou résulte la relation (1.45).

2. On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(\alpha - x)\frac{t^n}{n!} &= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{t(\alpha-x)} \\
&= \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{t\alpha}e^{-tx} \\
&= \left(\frac{te^t}{e^t-1}\right)^{\alpha} e^{-tx} \\
&= \left(\frac{-t}{e^{-t}-1}\right)^{\alpha} e^{-tx}.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(\alpha - x)\frac{t^n}{n!} &= \sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x)\frac{(-t)^n}{n!} \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n B_n^{(\alpha)}(x)\frac{t^n}{n!}.
\end{aligned}$$

On en déduit la relation (1.46).

3. Pour $x = \frac{\alpha}{2}$ et n impair, la relation (1.46).

$$B_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) = -B_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

d'où résulte la relation (1.47).

$\square$

Théorème 42 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, on a pour tous entiers naturels m et $n \geq 1$:*

$$\sum_{k=0}^{n-1} B_m^{(\alpha)}(k) = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}^{(\alpha+1)}(n) - B_{m+1}^{(\alpha+1)}\right) \tag{1.48}$$

$$\sum_{k=0}^{n-1} k^m = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n) - B_{m+1}\right) \tag{1.49}$$

Preuve. La relation (1.45) permet d'écrire :

$$\Delta\left(B_{m+1}^{(\alpha+1)}(x)\right) = D\left(B_{m+1}^{(\alpha)}(x)\right),$$

c'est à dire, en tenant compte de (1.43 :

$$B_{m+1}^{(\alpha+1)}(x+1) - B_{m+1}^{(\alpha+1)}(x) = (m+1)B_m^{(\alpha)}(x).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}(m+1)\sum_{k=0}^{n-1} B_m^{(\alpha)}(k) &= \sum_{k=0}^{n-1} B_{m+1}^{(\alpha+1)}(x+1) - B_{m+1}^{(\alpha+1)}(x) \\ &= B_{m+1}(n) - B_{m+1}(0).\end{aligned}$$

D'où résulte la relation (1.48).

La relation (1.49) est le cas particulier de (1.48) où $\alpha = 0$ en tenant compte du fait que

$$B_m^{(0)}(k) = k^m.$$

□

1.4 Formules explicites

Dans ce paragraphe, nous montrons comment l'emploi des opérateurs de composition permet de trouver (ou de retrouver) des formules explicites pour les polynômes de Bernoulli et donc aussi de prouver des formules explicites pour les nombres de Bernoulli.

1.4.1 Une très ancienne formule explicite

Dans son article intitulé "*Explicit formulas for Bernoulli numbers*" publié en 1972 dans la revue The American Mathematical Monthly, Gould [33] cite la formule suivante :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n, \quad n \geq 0. \tag{1.50}$$

Cette formule est la toute première formule qu'il énonce dans son article. Il affirme que cette formule est très ancienne et qu'il est difficile de l'attribuer à un auteur plutôt qu'à un autre.

Grâce aux opérateurs de composition, il est facile de prouver la généralisation de la formule (1.50) aux polynômes de Bernoulli donnée dans le théorème suivant :

Théorème 43 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} (x+j)^n, \quad n \geq 0.$$

Preuve. On a :

$$B_n(x) = \Omega_B(x^n).$$

On sait que :

$$\Omega_B = \frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{\Delta^k}{k+1}.$$

On sait aussi que :

$$\begin{aligned}
\Delta^k(x^n) &= (\tau_1 - I)^k(x^n) \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}\tau_j(x^n) \\
&= \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n. \qquad (1.51)
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
B_n(x) &= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\Delta^k(x^n) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n \\
&= \sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}(x+j)^n.
\end{aligned}$$

La preuve du théorème est complète. Pour $x = 0$, ce théorème permet d'obtenir la formule (1.50) citée par Gould. □

1.4.2 Généralisation d'une formule explicite de Kronecker (1883)

Dans le même article [33], en page 46, Gould affirme que Kronecker [42] a découvert une formule intéressante pour les nombres de Bernoulli qui peut être énoncée comme suit :

$$B_{2n} = \sum_{j=2}^{2n+1}(-1)^{j-1}\binom{2n+1}{j}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j-1}k^{2n}. \qquad (1.52)$$

Gould constate qu'en 1967, Bergmann [14], a aussi découvert la formule explicite suivante :

$$B_{n-1} = -\sum_{j=1}^{n}(-1)^j\binom{n}{j}\frac{1}{j}\sum_{k=1}^{j-1}k^{n-1}, \qquad (1.53)$$

mais qu'en fait, ces deux formules (1.52) et (1.53) sont similaires. Gould affirme que Bergmann n'était certainement pas au courant qu'il n'avait fait que retrouver une ancienne formule.

Kronecker aussi bien que Bergmann ont employé la formule d'interpolation de Lagrange pour prouver leur formules.

Grâce encore aux opérateurs de composition, il est facile de prouver la généralisation aux polynômes de Bernoulli des formules (1.52) et (1.53) donnée dans le théorème suivant :

Théorème 44 *Pour tous entiers naturels m et n, on a pour $m \geq n$*

$$B_n(x) = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m+1}{j} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} (x+k)^n \tag{1.54}$$

Le théorème permet effectivement de retrouver les formules (1.52) et (1.53). En effet, on déduit de la formule (1.54) la relation suivante obtenue pour $x = 0$ après avoir remplacé m et n par $2n$ dans (1.54)

$$B_{2n} = \sum_{j=1}^{2n+1} (-1)^{j-1} \binom{2n+1}{j} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} k^n \tag{1.55}$$

de laquelle résulte (1.52) car l'indice du terme correspondant à $j = 1$ est nul dans (1.55). En remplaçant m et n par $n-1$ dans (1.54), on obtient la formule suivante :

$$B_{n-1}(x) = -\sum_{j=1}^{n} (-1)^j \binom{n}{j} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} (x+k)^{n-1}$$

de laquelle résulte (1.53) pour $x = 0$.

Pour prouver le théorème 44, le lemme suivant nous sera utile :

Lemme 45 *Pour tout entier naturel m, on a :*

$$\sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{1}{k+1} (x-1)^k = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m+1}{j} \frac{1}{j} \sum_{k=0}^{j-1} x^k. \tag{1.56}$$

On a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{m} (-1)^k (x-1)^k &= \frac{1}{x} \left(1 - (1-x)^{m+1}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m+1}{j} x^{j-1}. \qquad (1.57)
\end{aligned}$$

Par intégration, on déduit de (1.57) la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{k+1} (x-1)^{k+1} = \sum_{j=1}^{m+1} (-1)^{j-1} \binom{m+1}{j} \frac{1}{j} \left(x^j - 1\right). \tag{1.58}$$

En divisant les deux membres de (1.58) par $x-1$ et en remarquant que

$$\frac{x^j-1}{x-1}=\sum_{k=0}^{j-1}x^k,$$

on obtient la relation (1.56).

On déduit du lemme la relation suivante entre opérateurs de composition :

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{1}{k+1}(\tau_1-1)^k=\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j-1}\binom{m+1}{j}\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\tau_k$$

qui peut encore s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{1}{k+1}\Delta^k=\sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j-1}\binom{m+1}{j}\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\tau_k \tag{1.59}$$

Prouvons maintenant le théorème 44.

Preuve. On a pour tous entiers naturels m et n tels que $m\geq n$:

$$\begin{aligned}B_n(x) &= \Omega_B(x^n)\\ &= \left(\frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta}\right)(x^n)\\ &= \left(\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{\Delta^k}{k+1}\right)(x^n).\end{aligned}$$

En exploitant la relation (1.59), on en déduit que :

$$\begin{aligned}B_n(x) &= \sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j-1}\binom{m+1}{j}\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}\tau_k(x^n)\\ &= \sum_{j=1}^{m+1}(-1)^{j-1}\binom{m+1}{j}\frac{1}{j}\sum_{k=0}^{j-1}(x+k)^n,\end{aligned}$$

ce qui est bien la relation qu'on devait prouver. Le théorème 44 est ainsi prouvé. □

1.5 Transformation binomiale

Il n'y a pas de définition standard de ce que l'on appelle la transformation binomiale d'une suite, c'est pourquoi nous commencerons par préciser la définition que nous avons adopté avant d'en étudier les propriétés et certaines applications.

1.5.1 Définition de la transformation binomiale

Soit $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite (numérique) définie par sa série génératrice exponentielle $S_u(t)$:

$$S_u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \frac{t^n}{n!}.$$

On convient d'associer à la suite u la suite $u^* = (u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ appelée suite duale de u en définissant u^* par la donnée de sa série génératrice exponentielle :

$$S_{u^*}(t) = e^t S_u(-t). \tag{1.60}$$

Autrement dit u^*

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n^* \frac{t^n}{n!} = e^t \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n u_n \frac{t^n}{n!}.$$

On en déduit que u^* est définie par la relation :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad u_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k.$$

Définition 46 *L'application $\mathcal{T} : \mathbb{C}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ définie par :*

$$\mathcal{T}(u) = u^*$$

est appelée transformation binomiale de la suite u.

1.5.2 Propriétés et exemples

L'application $\mathcal{T}$ est un endomorphisme du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Il est facile de constater que la relation (1.60) est équivalente à la relation :

$$S_u(t) = e^t S_{u^*}(-t).$$

Autrement dit, on a l'équivalence :

$$\mathcal{T}(u) = u^* \Longleftrightarrow \mathcal{T}(u^*) = u.$$

Ce qui se traduit par la propriété suivante connue sous le nom de "formule d'inversion de Pascal) :

$$\left(\forall n \in \mathbb{N},\ u_n^* = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k\right) \Longleftrightarrow \left(\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k u_k^*\right).$$

On en déduit aussi que l'endomorphisme $\mathcal{T}$ est involutif. On a :

$$\forall u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}, \quad \mathcal{T}^2(u) = u.$$

Les valeurs propres de $\mathcal{T}$ ne peuvent être que 1 et -1. En effet, si λ est une valeur propre de $\mathcal{T}$, alors il existe une suite non nul u tel que $\mathcal{T}(u) = \lambda u$. On en déduit que $\mathcal{T}^2(u) = \lambda^2 u$. Par suite, on a $\lambda^2 u = u$ et $\lambda = \pm 1$. Nous convenons alors de noter E_1 et E_{-1} les sous espaces propres associés aux valeurs propres 1 et -1 respectivement :

$$E_1 = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \ \mathcal{T}(u) = u\} \ \text{ et } \ E_{-1} = \{u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}} / \ \mathcal{T}(u) = -u\}.$$

Il est facile de constater que $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ est la somme directe de E_1 et E_{-1}.

$$\mathbb{C}^{\mathbb{N}} = E_1 \oplus E_{-1}$$

En effet, toute suite $u \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ s'écrit de manière unique : $u = v + w$ comme somme d'un élément $v \in E_1$et $w \in E_{-1}$. On a $v = \frac{1}{2}(u + u^*)$ et $w = \frac{1}{2}(u - u^*)$. On convient d'appeler suite invariante par transformation binomiale ou suite de Césàro ou encore suite auto-duale toute suite appartenant au sous-espace propre E_1 et suites inversement invariantes toute suite appartenant au sous-espace propre E_{-1}.

Exemple 47 *Les suites suivantes sont des suites invariantes par transformation binomiale :*

1. *la suite* $\left(\frac{1}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$,
2. *la suite des nombres de Lucas* $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
3. *la suite* $((-1)^n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

La suite de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite inversement invariante par transformation binomiale.*

En effet :

1. $\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(\frac{1}{2})^k = (1-\frac{1}{2})^n = \frac{1}{2^n}$. On a donc $(\frac{1}{2^n})^* = \frac{1}{2^n}$.
2. En effet avec $c = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $d = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$, on a $c + d = 1$. On en déduit que

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}c^k = (1-c)^n = d^n \ \text{ et } \ \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}d^k = (1-d)^n = c^n.$$

Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}(c^k + d^k) = c^n + d^n,$$

autrement dit

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}L_k = L_n.$$

Ainsi $L_n^* = L_n$ et $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien une suite invariante par transformation binomiale.

3. Dire que la suite $((-1)^n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite autoduale équivaut à affirmer que :
$$(-1)^n B_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \tag{1.61}$$
Pour prouver (1.61), il suffit tout juste d'utiliser les relations (1.46) et (1.23) pour $\alpha = 1$. Pour $y = 1$ dans (1.46), on a alors :
$$B_n(x+1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x). \tag{1.62}$$
En remplaçant x par 0 dans (1.23) et (1.62), on obtient clairement la relation (1.61).
4. La suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite inversement invariante. En effet :
$$F_n^* = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \frac{c^k - d^k}{c-d} = \frac{d^n - c^n}{c-d} = -F_n.$$

1.5.3 Forme linéaire associée à une suite numérique et propriétés

Lemme 48 *Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et L_u la forme linéaire définie sur $\mathbb{C}[x]$ par :*
$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad L_u(x^n) = u_n.$$
Alors on a :

1. *Pour tout entier naturel n :*
$$L_u((1-x)^n) = u_n^*$$
où $(u_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite duale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est invariante par transformation binomiale, alors pour tout polynôme $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, on a :*
$$L_u(P(x) - P(1-x)) = 0.$$

Preuve.

1. En effet, on a pour tout entier naturel n
$$\begin{aligned} L_u((1-x)^n) &= L_u\left(\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^k\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_k = u_n^*. \end{aligned}$$

2. Dans le cas où $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est invariante par transformation binomiale, on obtient :
$$L_u\left((1-x)^n\right) = u_n = \ L_u\left(x^n\right).$$
On en déduit que :
$$L_u\left(x^n - (1-x)^n\right) = 0.$$
Par combinaisons linéaires on en déduit alors que pour tout polynôme $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, on a :
$$L_u\left(P(x) - P(1-x)\right) = 0.$$

$\square$

Lemme 49 *Pour tous entiers naturels n et ℓ, on a l'identité :*
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{\ell+k} - \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} (1-x)^{n+k} = 0$$

Preuve. En effet, on a trivialement :
$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{\ell+k} &= x^{\ell} (1-x)^n \\
&= (1-(1-x))^{\ell} (1-x)^n \\
&= \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} (1-x)^{n+k}.
\end{aligned}$$

$\square$

En appliquant les lemmes précédents, on a le théorème suivant :

Théorème 50 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique, on a alors pour tous entiers naturels n et ℓ l'identité :*
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{\ell+k} - \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} u^*_{n+k} = 0,$$
où $(u^*_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite duale de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Le corollaire suivant est immédiat :

Corollaire 51 *Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique et n et ℓ des entiers naturels.*

1. *Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite invariante par transformation binomiale, on a :*
$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} u_{\ell+k} - \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k \binom{\ell}{k} u_{n+k} = 0.$$

2. Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite inversement invariante par transformation binomiale, on a :

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}u_{\ell+k}+\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}u_{n+k}=0.$$

Le résultat suivant facile à établir d'intéressantes applications.

Corollaire 52 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}F_{\ell+k}-\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}F_{n+k}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{\ell+k}-(-1)^{\ell+n}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}B_{n+k}=0,$$

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}B_{n+k}-(-1)^{m+n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{m+k}.$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}L_{\ell+k}+\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^k\binom{\ell}{k}L_{n+k}=0.$$

Théorème 53 *Pour toute suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, suite invariante par transformation binomiale, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,u_{n+k}=0$$

Preuve. En effet, on constate que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}x^{n+1+k}=x^{n+1}(1-x)^{n+1}$$

En dérivant par rapport à x, on en déduit l'identité suivante :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,x^{n+k} &= (n+1)\,x^n(1-x)^{n+1}-(n+1)\,x^{n+1}(1-x)^n\\ &= P(x)-P(1-x),\end{aligned}\tag{1.63}$$

où

$$P(x)=(n+1)\,x^n(1-x)^{n+1}.$$

Si $u=(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite invariante par transformation binomiale, on a d'après le lemme 48,

$$L_u(P(x)-P(1-x))=0.$$

Avec (1.63), on en déduit que :

$$L_u\left(\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,x^{n+k}\right)=0,$$

c'est-à-dire

$$\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,u_{n+k}=0.$$

□

Corollaire 54 *Pour tout entier $n\geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,B_{n+k}=0. \tag{1.64}$$

Preuve. En effet, on sait que la suite $((-1)^n B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite autoduale. En appliquant le théorème 53, on obtient la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,B_{n+k}=0.$$

qui peut s'écrire

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(n+1+k)\,B_{n+k}+2\,(n+1)\,B_{2n+1}=0.$$

Pour $n\geq 1$, on sait que $B_{2n+1}=0$, la relation (1.64) en résulte. □

1.5.4 Identités pour des suites de polynômes vérifiant les relations d'Appell

Le théorème qui suit facile à prouver nous fournira aussi d'intéressantes identités pour des suites de nombres et de polynômes remarquables.

Théorème 55 *Pour toute suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant les relations d'Appell : $A_0'(x)=0$ et $A_n'(x)=nA_{n-1}(x)$ pour $n\geq 1$. Alors on a :*

1. *L'identité suivante vérifiée pour tous entiers naturels n et ℓ :*

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}A_{\ell+k}(x)-(-1)^n\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}A_{n+k}(x-1)=0. \tag{1.65}$$

2. Si de plus la suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifie la condition suivante :*

$$A_n(x) = (-1)^n A_n(1-x), \tag{1.66}$$

alors on a l'identité suivante vérifiée pour tous entiers naturels n *et* ℓ *:*

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{\ell+k}(x) + (-1)^{n+\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} A_{n+k}(-x) = 0. \tag{1.67}$$

et plus généralement pour tous entiers naturels n *,* ℓ *et* r*, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} A_{\ell+k}(x) + (-1)^{n+\ell+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} \binom{\ell+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} A_{n+k}(-x) = 0. \tag{1.68}$$

Preuve. Soit $A = (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les relations d'Appell.

1. Soit Ω_A l'opérateur de composition associé à A et défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Omega_A(x^n) = A_n(x),$$

On a alors (1.65)

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad \Omega_A((x-1)^n) = A_n(x-1),$$

en effet :

$$\Omega_A((x-1)^n) = (\Omega_A \circ \tau_{-1})(x^n) = (\tau_{-1} \circ \Omega_A)(x^n) = A_n(x-1).$$

Par suite , en appliquant Ω aux deux membres de l'identité suivante obtenue au lemme (49)

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} x^{\ell+k} - (-1)^n \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} (x-1)^{n+k} = 0,$$

on obtient (1.65).

2. La relation (1.67) s'obtient à partir de (1.65) en y remplançant x par $x-1$ et en tenant compte de (1.66).
3. En remplaçant n par $n+r$ et ℓ par $\ell+1$, on déduit de (1.67) que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} A_{\ell+k}(x) + (-1)^{n+\ell+1} \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+r}{k} A_{n+k}(-x) = 0. \tag{1.69}$$

En appliquant l'opérateur $\frac{D^r}{r!}$ aux deux membres de la relation (1.69), on obtient la relation (1.68) en tenant compte que du fait que $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes vérifiant les relations d'Appell, on a :

$$\frac{D^r}{r!} A_{\ell+k+r}(x) = \binom{\ell+k+r}{r} A_{\ell+k}(x) \quad \text{et} \quad \frac{D^r}{r!} A_{n+k+r}(x) = \binom{n+k+r}{r} A_{n+k}(x).$$

$\square$

Corollaire 56

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{\ell+k}\left(x\right)+\left(-1\right)^{n+\ell+1}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}B_{n+k}\left(-x\right)=0. \tag{1.70}$$

et plus généralement pour tous entiers naturels n *,* ℓ *et* r*, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}\left(x\right)+\left(-1\right)^{n+\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}\binom{\ell+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{n+k}\left(-x\right)=0.$$

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{\ell+k}\left(x\right)+\left(-1\right)^{n+\ell+1}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}E_{n+k}\left(-x\right)=0. \tag{1.71}$$

et plus généralement, pour tous entiers naturels n , ℓ et r, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}E_{\ell+k}\left(x\right)+\left(-1\right)^{n+\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}\binom{\ell+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}E_{n+k}\left(-x\right)=0.$$

Signalons que les relations (1.70) et (1.71) ont été obtenues par Wu, Sun et Pan [67, Thm. 2, Eq. (6), Eq. (7), p. 297] en 2004 à l'aide des propriétés de séries formelles. Au chapitre suivant, nous nous intéresserons à des extensions et généralisations importantes de l'identité (1.64) du corollaire 54 dues à Gessel.

Chapitre 2

Identités de Gessel

2.1 Introduction

Au premier chapitre, nous avons vu que la suite des nombres de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pouvait être définie par les relations suivantes :

$$B_0 = 1 \;\text{ et } B_n = -\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k,\;\; n \geq 1. \tag{2.1}$$

On a vu aussi qu'on avait :

$$B_{2n+1} = 0,\; n \geq 1. \tag{2.2}$$

De préférence à une formule explicite du n-ième nombre de Bernoulli telle que l'une des anciennes formules explicites que nous avons prouvées au premier chapitre, ces relations permettent de calculer aisément les nombres de Bernoulli. On déduit aisément de (2.1) et (2.2) que l'on a :

$$B_{2n} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n+1}{2k}B_{2k},\;\; n \geq 1. \tag{2.3}$$

Cette dernière expression de B_{2n} nécessite la connaissance de n nombres de Bernoulli, à savoir les nombres de Bernoulli B_{2k} pour $0 \leq k \leq n-1$. Dès leur mise en évidence par J. Bernoulli dans son ouvrage "Ars Conjectandi" [15], la recherche d'autres formules de recurrences pour les nombres de Bernoulli a fait l'objet d'une intense exploration. En 1827, Von Ettingshausen [29] découvre la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k}(n+k+1)B_{n+k} = 0,\;\; n \geq 1. \tag{2.4}$$

Cette même relation (2.4) est redécouverte en 1877 par Seidel [59]. En 1880, Lucas [43] prouve cette relation en la déduisant de la formule symétrique suivante qu'il démontre en utilisant le calcul symbolique :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{\ell+k}+(-1)^{\ell+n+1}\sum_{k=0}^{\ell}\binom{\ell}{k}B_{n+k}=0. \tag{2.5}$$

Il signale alors le grand intérêt de la relation (2.4) pour le calcul des nombres de Bernoulli en mettant en évidence le fait que la relation (2.4) exige la connaissance de moins de nombres de Bernoulli d'indices stricitement inférieurs à $2n$ que la formule (2.3) pour le calcul de B_{2n}. En effet, la relation (2.4) permet d'exprimer B_{2n} de la manière suivante :

$$B_{2n}=-\frac{1}{(2n+1)\,(n+1)}\sum_{k=0}^{\frac{n-2}{2}}\binom{n+1}{2k}(n+2k+1)B_{n+2k},\ \text{ pour } n\geq 2 \text{ et } n \text{ pair}, \tag{2.6}$$

$$B_{2n}=-\frac{1}{(2n+1)\,(n+1)}\sum_{k=0}^{\frac{n-3}{2}}\binom{n+1}{2k+1}(n+2k+2)B_{n+2k+1},\ \text{ pour } n\geq 1 \text{ et } n \text{ impair}. \tag{2.7}$$

Dans chacun des cas, le calcul de B_{2n} à l'aide (2.6) ou (2.7) ne nécessite, au plus, que la connaissance de $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ nombres de Bernoulli. L'emploi d'une telle formule réalise donc une economie de pratiquement la moitié des termes à connaître par rapport à la formule (2.3).

Signalons que la relation symétrique (2.5) prouvée par Lucas en 1880 [43] à l'aide du calcul ombral classique (appelé alors calcul symbolique) a été proposée comme problème à résoudre par Carlitz [18] en 1971 et qu'en 1972, Shannon [60] on a donné une solution. De nos jours, la relation (2.5) est connue sous le nom d'identité de Carlitz et elle continue de faire l'objet de différentes recherches. Ainsi, de nouvelles preuves de (2.5) ont été données par Vassilev et Missana [66] en 2005, par Chu et Magli [26] en 2007, par Prodinger [54] en 2014, par Neto [49] en 2015, par Gould et Quaintance en 2014 [32] et par Pita [53] en 2016.

Revenons à la relation (2.4). En 1995, Kaneko [38] redécouvre la relation (2.4) en donnant deux preuves différentes, une preuve sophistiquée basée sur la théorie des fractions continues appliquée aux séries formelles et une seconde preuve beaucoup plus simple due à D. Zagier, basée sur une transformation binomiale de suites. Kaneko introduit la notation suivante :

$$\widetilde{B}_n=(n+1)\,B_n.$$

Il énonce son résultat sous la forme suivante :

$$\widetilde{B}_{2n}=-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}\widetilde{B}_{n+k},\ \ n\geq 1$$

en notant que $\widetilde{B}_1=-1$ et $\widetilde{B}_n=0$ pour tous les entiers impairs ≥ 3. Il note alors la forte ressemblance de cette dernière formule avec la formule classique (2.1) et signale comme l'avait fait Lucas plus d'un siècle avant lui, l'économie du nombre de termes à connaître pour calculer

B_{2n}. Comme l'a signalé Cigler [27] en 2010, l'identité (2.4) appelée aujourd'hui identité de Kaneko devrait s'appeler identité d'Ettingshausen-Seidel-Kaneko. Nous avons déjà prouvé la relation (2.4) au premier chapitre de cette thèse de manière très simple. L'emploi du calcul ombral classique permet de prouver cette relation de manière triviale comme l'a signalé Gessel en 2003 dans un important article [30, p.17] intitulé "Applications of the classical umbral calculus" et dédié à la mémoire de Gian-Carlo Rota. Signalons que les fondements du Calcul ombral moderne ont été principalement développés par Steven Roman [56] et Gian-Carlo Rota (1932-1999) [57]. Dans cet article Gessel développe ce qu'il convient d'appeler le Calcul ombral classique pour prouver des propriétés intéressantes qui ne sont pas aussi facilement prouvées par d'autres méthodes. Au paragraphe 7 de cet article, Gessel introduit un paramètre $m \in \mathbb{N}$ et s'intéresse aux sommes :

$$E\left(m,n,r\right)=\sum_{k=0}^{n+r}m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}$$

Il prouve la généralisation suivante de la relation de Kaneko qu'il énonce de la manière suivante :

Théorème 57 *[30, Theorem 7.3]*

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}2^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\widetilde{B}_{n+k} &= (-1)^{n},\\
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}3^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\widetilde{B}_{n+k} &= (-2)^{n-1}\left(n-4\right),\\
\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}4^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\widetilde{B}_{n+k} &= (-1)^{n}\left(4^{n}+\left(2-\frac{4}{3}n\right)3^{n}\right),
\end{aligned}$$

et en général,

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n+1}m^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\widetilde{B}_{n+k}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(\left(2n+1\right)k-\left(n+1\right)m\right)k^{n}\left(k-m\right)^{n-1}. \tag{2.8}$$

Remarquons que la relation (2.8) peut se reformuler comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n+1}m^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\binom{n+k+1}{1}B_{n+k}=\sum_{k=1}^{m-1}\left(n+1\right)^{2}k^{n+1}\left(k-m\right)^{n+1}+\left(n+1\right)nk^{n+1}\left(k-m\right)^{n-1}.$$

Autrement dit, le théorème 57 de Gessel s'énonce comme suit :

$$E\left(m,n,1\right)=\sum_{k=1}^{m-1}\left(n+1\right)^{2}k^{n+1}\left(k-m\right)^{n+1}+\left(n+1\right)nk^{n+1}\left(k-m\right)^{n-1}.$$

En 2009, Chen et Sun donnent une expression simplifiée pour $E(m,n,3)$ en prouvant, à l'aide de l'analyse complexe, le résultat suivant :

Théorème 58 *[25, Theorem 7.2]*

$$\frac{1}{n+3}\sum_{k=0}^{n+3} m^{n+3-k}\binom{n+3}{k}(n+k+3)(n+k+2)\widetilde{B}_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} h(m,n,k)\,k^n(k-m)^{n-1}, \tag{2.9}$$

où

$$\begin{aligned} h(m,n,k) &= 2(n+2)(2n+3)(2n+5)k^3 - 2m(n+2)(2n+5)(3n+5)k^2 \\ &\quad +3m^2(n+2)\left(2n^2+7n+7\right)k - m^3(n+1)^2(n+2). \end{aligned}$$

Remarquons de nouveau que la relation (2.9) peut se reformuler comme suit :

$$E(m,n,3) := \sum_{k=0}^{n+3} m^{n+3-k}\binom{n+3}{k}\binom{n+k+3}{3}B_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} q(m,n,k)$$

avec

$$\begin{aligned} q(m,n,k) &= 2\binom{n+3}{2}^2 k^{n+1}(k-m)^{n+1} + 4\binom{n+3}{4}k^{n+3}(k-m)^{n-1} \\ &\quad +(3n+11)\binom{n+3}{3}k^{n+2}(k-m)^n + \binom{n+3}{3}(n+1)k^n(k-m)^{n+2}. \end{aligned}$$

Ainsi Gessel a trouvé en 2003 une expression simplifiée pour $E(m,n,1)$ (cas où $r=1$) [30, Theorem 7.3] (qui est le Théorème 57) dans cette thèse) alors que Chen et Sun ont trouvé en 2009 une expression simplifiée de $E(m,n,3)$ (cas où $r=3$) [25, Theorem 7.2] (qui est le Théorème 58 dans cette thèse). L'étude du cas général devenait à ce moment là un problème intéressant à résoudre : peut-on trouver plus généralement une expression simplifiée pour $E(m,n,r)$ pour r impair ? La réponse positive à cette question fut donnée par Aïder et Bencherif en 2012, lors du Congrès des Mathématiciens Algériens qui s'est tenu à Annaba les 7 et 8 mars. En effet, A. Aïder a répondu positivement à cette question dans une communication (avec F. Bencherif comme co-auteur) intitulée "On a generalization of the analog of a theorem of Chen and Sun" en présentant un résultat pouvant se formuler comme suit :

Théorème 59 *[4]*

Pour tout entier naturel impair r et pour tous entiers naturels m et n, on a :

$$E(m,n,r) := \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} p_r(m,n,k) \tag{2.10}$$

avec

$$
\begin{aligned}
p_r(m,n,k) &= \frac{r+1}{2}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}^2 k^{n+\frac{r-1}{2}}\left(k-m\right)^{n+\frac{r-1}{2}} \\
&\quad + (r+1)\sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}k^{n+r-i}\left(k-m\right)^{n-1+i}.
\end{aligned}
$$

Le cas général était donc résolu. La formule générale donnée par Aïder et Bencherif permet de retrouver la formule la formule de Gessel pour $r=1$. Cependant pour $r=3$, elle fournit au second membre l'expression suivante pour $E\left(m,n,3\right)$:

$$E\left(m,n,3\right)=\sum_{k=1}^{m-1}p_3(m,n,k)$$

avec :

$$q_3(m,n,k)=2\binom{n+3}{2}^2 k^{n+1}(k-m)^{n+1}+4\binom{n+3}{3}\binom{n+3}{1}k^{n+2}(k-m)^{n}+4\binom{n+3}{4}k^{n+3}(k-m)^{n-1}$$

$$
\begin{aligned}
p_3(m,n,k) &= 2\binom{n+3}{2}^2 k^{n+1}\left(k-m\right)^{n+1}+2\binom{n+3}{4}k^{n+3}\left(k-m\right)^{n-1} \\
&\quad +2\binom{n+3}{1}\binom{n+3}{3}k^{n+2}\left(k-m\right)^{n}
\end{aligned}
$$

alors que l'identité donnée par Chen et Sun s'écrit

$$E\left(m,n,3\right)=\sum_{k=1}^{m-1}q(m,n,k)$$

avec

$$
\begin{aligned}
q\left(m,n,k\right) &= 2\binom{n+3}{2}^2 k^{n+1}\left(k-m\right)^{n+1}+4\binom{n+3}{4}k^{n+3}\left(k-m\right)^{n-1} \\
&\quad + (3n+11)\binom{n+3}{3}k^{n+2}\left(k-m\right)^{n}+\binom{n+3}{3}\left(n+1\right)k^{n}\left(k-m\right)^{n+2}.
\end{aligned}
$$

Les expressions de $p_3(m,n,k)$ et $q\left(m,n,k\right)$ sont différentes, c'est ce qui explique le titre de la communication "On a generalization of the analog of a theorem of Chen and Sun". En fait, on peut observer que la différence entre $q(m,n,k)$ et $p_3(m,n,k)$ peut s'écrire :

$$q(m,n,k)-p_3(m,n,k)=\binom{n+3}{3}\left(n+1\right)\left(k^{n}\left(k-m\right)^{n+2}-k^{n+2}\left(k-m\right)^{n}\right)$$

et que par conséquent :

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(q(m,n,k)-p_3(m,n,k)\right)=\binom{n+3}{3}(n+1)\sum_{k=1}^{m-1}\left(k^n\left(k-m\right)^{n+2}-k^{n+2}\left(k-m\right)^n\right).$$

Il est alors facile de prouver que :

$$\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\left(k^n\left(k-m\right)^{n+2}-k^{n+2}\left(k-m\right)^n\right)}_{W}=0 \tag{2.11}$$

(il suffit de faire le changement de k en $m-k$ dans le membre de droite de (2.11) pour constater que la somme W est égale à $-W$ et que par conséquent $W=0$. Ainsi, l'identité d'Aïder-Bencherif est bien aussi une généralisation de l'identité de Chen et Sun.

En 2013, Gessel prouve à l'aide du calcul ombral classique, dans une annexe à l'article [9, Theorem 2, p. 6], la généralisation suivante de la relation de Carlitz permettant d'obtenir une expression simplifiée de $E\left(m,n,r\right)$.

Théorème 60 *[9]*

Soient ℓ,n,m et r des entiers naturels. Alors, on a :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+r}m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k} \\ &+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}m^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} \\ =\;&(r+1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{\ell+j-1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}k^{\ell+j-1}(m-k)^{n+r-j}.\end{aligned} \tag{2.12}$$

Si r est impair, alors on a :

$$E\left(m,n,r\right):=\sum_{k=0}^{n+r}m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}=\sum_{k=1}^{m-1}g_r(m,n,k) \tag{2.13}$$

avec

$$g_r(m,n,k)=\frac{1}{2}(r+1)\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{n+r}{r+1-j}k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}.$$

Dans ce chapitre, nous examinerons au paragraphe suivant certaines preuves de la relation (2.5). Nous prouverons ensuite au troisième paragraphe le théorème d'Aïder et Bencherif. Au quatrième paragraphe, nous présentons une nouvelle preuve du théorème de Gessel beaucoup plus courte que celle de Gessel. Nous terminerons ce chapitre en montrant comment le théorème de Gessel généralise de nombreuses identités obtenues pour les nombres de Bernoulli par différents auteurs. La généralisation du théorème de Gessel aux polynômes et à ses applications fera l'objet du troisième chapitre de cette thèse.

2.2 Preuve du théorème d'Aïder-Bencherif

Dans [4], on trouve l'énoncé du théorème 59 mais on ne trouve pas la preuve de ce thèorème. En exploitant des écrits laissés par feu Abdelkader Aïder et avec l'aide de mon promoteur qui est aussi auteur de théorème [4], nous avons pu mettre au point la preuve simple, relativement courte et originale qui suit.

Tout d'abord, nous pouvons remarquer que le résultat du théorème 59 peut s'énoncer comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} = \sum_{k=1}^{m-1} q_r(m,n,k), \tag{2.14}$$

où

$$\begin{aligned} q_r(m,n,k) = {} & \frac{r+1}{2} \binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}^2 k^{n+\frac{r-1}{2}} (k-m)^{n+\frac{r-1}{2}} \\ & + (r+1) \sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{n+r}{j} \binom{n+r}{r+1-j} k^{n+r-j} (k-m)^{n+j-1}. \end{aligned} \tag{2.15}$$

$$q_3(n,m,k) = 2\binom{n+3}{2}^2 k^{n+1}(k-m)^{n+1} + 4\binom{n+3}{3}\binom{n+3}{1} k^{n+2}(k-m)^{n} + 4\binom{n+3}{4} k^{n+3}(k-m)^{n-1}$$

Le lemme suivant nous sera d'une grande utilité dans cette preuve :

Lemme 61 *Pour tous entiers naturels r et s, on a la propriété suivante :*

$$\sum_{k=1}^{m-1} \left(k^r (k-m)^s - (-1)^{r+s} k^s (k-m)^r \right) = 0, \tag{2.16}$$

En effet, en changeant k en $m-k$, on a :

$$S = \sum_{k=1}^{m-1} \left((m-k)^r (-k)^s - (-1)^{r+s} (m-k)^s (-k)^r \right) = -S.$$

Ainsi $S = -S$ et par conséquent $S = 0$.

Pour prouver ce résultat, commençons par rappeler que d'après le théorème 39 du premier chapitre, on a pour tout polynôme $f(x)$ de $\mathbb{C}[x]$ et pour tout entier naturel m la relation suivante :

$$f(B+m) - f(-B) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k), \tag{2.17}$$

cette dernière relation étant simplement une écriture symbolique et pratique de l'égalité

$$L_1 (f (x+m) - f(-x)) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k).$$

où L_1 est la forme linéaire définie sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ par :

$$L_1 (x^n) = B_n, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Autrement dit, après avoir développé le membre de gauche de (2.21) en puissances de B, chaque B^j est remplacé par le nombre de Bernoulli B_j. La relation (2.15) s'obtient comme une application directe de la formule (2.17) en choisissant pour $f(x)$ le polynôme $f_1(x)$ suivant :

$$f_1 (x) = \frac{D^r}{2(r+1)!} \left((x-m)^{n+r} x^{n+r} \right).$$

2.2.1 Calcul de $f_1 (x+m) - f_1 (-x)$

Remarquons que

$$-f_1(-x) = f_1(x+m).$$

En effet, en posant

$$g(x) = (x-m)^{n+r} x^{n+r},$$

on a :

$$g(-x) = (x+m)^{n+r} x^{n+r} = g(x+m)$$

$$\begin{aligned} -f_1(-x) &= -\frac{D^r g}{2(r+1)!}(-x) \\ &= (-1)^{r+1} \frac{D^r}{2(r+1)!} g(-x) \\ &= \frac{D^r}{2(r+1)!} g(x+m) = f_1(x+m). \end{aligned}$$

Il en résulte que l'on a .Ainsi,

$$\begin{aligned} f_1(x+m) - f_1(-x) &= \frac{1}{r+1} \frac{D^r}{r!} \left(x^{n+r} (x+m)^{n+r} \right) \\ &= \frac{1}{r+1} \frac{D^r}{r!} \left(\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} x^{n+k+r} \right). \end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_1(x+m) - f_1(-x) = \frac{1}{r+1} \sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} x^{n+k}. \tag{2.18}$$

2.2.2 Calcul de $f_1'(x)$

On a :

$$f_1'(x) = \frac{D^{r+1}}{2(r+1)!}\left((x-m)^{n+r}x^{n+r}\right).$$

En appliquant la formule de Leibniz pour calculer la dérivée $(r+1)$-ième du produit des deux polynômes $(x-m)^{n+r}$ et x^{n+r}, on obtient à partir de l'expression (2.25) de $f_1'(x)$:

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r+1}\frac{D^i}{i!}\left(x^{n+r}\right)\frac{D^{r+1-i}}{(r+1-i)!}(x-m)^{n+r} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{r+1}\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i} \\
&\quad + \binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}^2 x^{n+r-\frac{r+1}{2}}(x-m)^{n-1+\frac{r+1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{2}\sum_{i=\frac{r+1}{2}+1}^{r+1}\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i}}_{(E)}.
\end{aligned}$$

L'expression (E) peut s'écrire en changeant i en $r+1-i$

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\binom{n+r}{r+1-i}\binom{n+r}{i}x^{n-1+i}(x-m)^{n+r-i} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\binom{n+r}{r+1-i}\binom{n+r}{i}\left((x^{n-1+i}(x-m)^{n+r-i} - x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi, on obtient :

$$\begin{aligned}
f_1'(x) &= \sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{i,\frac{r+1}{2}}\right)\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i} \\
&\quad + \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\binom{n+r}{r+1-i}\binom{n+r}{i}\left((x^{n-1+i}(x-m)^{n+r-i} - x^{n+r-i}(x-m)^{n-1+i}\right).
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{m-1} f_1'(k) &= \sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{i,\frac{r+1}{2}}\right)\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{r+1-i}k^{n+r-i}(k-m)^{n-1+i} \\ &+\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}-1}\frac{1}{2}\binom{n+r}{r+1-i}\binom{n+r}{i}\underbrace{\sum_{k=1}^{m-1}\left((k^{n-1+i}(k-m)^{n+r-i}-k^{n+r-i}(k-m)^{n-1+i}\right)}_{(F)}.\end{aligned}$$

Comme $(n-1+i)+(n+r-i)=2n+r-1$ est un entier pair, on a d'après le lemme 61 $F=0$, c'est-à-dire

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left((k^{n-1+i}(k-m)^{n+r-i}-k^{n+r-i}(k-m)^{n-1+i}\right)=0.$$

Par suite, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-1} f_1'(k)=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{i,\frac{r+1}{2}}\right)\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{n+i-1}k^{n+r-i}(k-m)^{n-1+i}. \tag{2.19}$$

En exploitant les relations (2.18) et (2.19) et la propriété suivante :

$$f_1(B+m)-f_1(-B)=\sum_{k=1}^{m-1} f'(k),$$

c'est-à-dire :

$$L_1(f_1(x+m)-f_1(-x))=\sum_{k=1}^{m-1} f'(k),$$

on obtient la relation suivante :

$$\begin{aligned}&\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k} \\ &=\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{i=0}^{\frac{r+1}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\delta_{i,\frac{r+1}{2}}\right)\binom{n+r}{i}\binom{n+r}{n+i-1}k^{n+r-i}(k-m)^{n-1+i},\end{aligned}$$

ce qui est bien la relation qu'on voulait démontrer.

2.3 Nouvelle preuve du théorème de Gessel

Nous allons prouver la relation suivante donnée par Gessel en 2013 [9, Theorem 2, p. 6] et qui a été rappelée dans l'introduction de ce chapitre (théorème 60).

Pour tous entiers naturels ℓ, n, m et r, on a :

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k} \\
& + (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} \\
= \; & (r+1) \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{\ell+j-1} \binom{n+r}{j} \binom{\ell+r}{r+1-j} k^{\ell+j-1} (m-k)^{n+r-j}. \qquad (2.20)
\end{aligned}$$

La preuve donnée par Gessel [9, Theorem 2, p. 6] de ce théorème est relativement laborieuse. Dans ce qui suit, nous prouvons de manière plus courte et sans doute plus simple ce résultat de Gessel. Pour cela, commençons par rappeler que d'après le théorème 39 du premier chapitre, on a pour tout polynôme $f(x)$ de $\mathbb{C}[x]$ et pour tout entier naturel m la relation suivante :

$$f_1(B+m) - f_1(-B) = \sum_{k=1}^{m-1} f'(k), \qquad (2.21)$$

La formule (2.21) est la formule (7.8) donnée dans l'article de Gessel [30, p.17] intitulé "Applications of the classical umbral calculus". Gessel exploite cette formule pour prouver la relation (2.20) mais la preuve que donne Gessel dans [9] est longue (de la page 7 à la page 9 et fait appel à de nombreux résultats intermédiaires (identité combinatoire, identité polynomiale non évidente et nombreux calculs). La preuve que nous donnons de ce résultat est extrêmement courte et simple. La relation (2.20) s'obtient comme une application directe de la formule (2.21) en choisissant pour $f(x)$ le polynôme $f_2(x)$ suivant :

$$f_2(x) = (-1)^{\ell+n+r+1} \frac{D^r}{r!} \left((x-m)^{n+r} x^{\ell+r} \right). \qquad (2.22)$$

2.3.1 Calcul de $f_2(-x)$

On a :

$$\begin{aligned}
f_2(x) &= (-1)^{\ell+n+r+1} \frac{D^r}{r!} \sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} (-m)^{n+r-k} x^{\ell+r+k} \\
&= -\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} (-x)^{\ell+k}
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$-f_2(x) = \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k} \qquad (2.23)$$

2.3.2 Calcul de $f_2\,(x+m)$

On a :

$$\begin{aligned}
f_2\,(x+m) &= \tau_m\,(f\,(x)) \\
&= \tau_m\left((-1)^{\ell+n+r+1}\,\frac{D^r}{r!}\left((x-m)^{n+r}\,x^{\ell+r}\right)\right) \\
&= (-1)^{\ell+n+r+1}\left(\tau_m\circ\frac{D^r}{r!}\right)\left((x-m)^{n+r}\,x^{\ell+r}\right)
\end{aligned}$$

Comme les opérateurs τ_m et $\frac{D^r}{r!}$ sont des opérateurs de composition, ils commutent. On a :

$$\tau_m\circ\frac{D^r}{r!}=\frac{D^r}{r!}\circ\tau_m.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
f_2\,(x+m) &= (-1)^{\ell+n+r+1}\left(\frac{D^r}{r!}\circ\tau_m\right)\left((x-m)^{n+r}\,x^{\ell+r}\right) \\
&= (-1)^{\ell+n+r+1}\,\frac{D^r}{r!}\left(\tau_m\left((x-m)^{n+r}\,x^{\ell+r}\right)\right) \\
&= (-1)^{\ell+n+r+1}\,\frac{D^r}{r!}\left(x^{n+r}\,(x+m)^{\ell+r}\right) \\
&= (-1)^{\ell+n+r+1}\,\frac{D^r}{r!}\left(\sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}x^{n+r+k}\right)
\end{aligned}$$

Ainsi,

$$f_2\,(x+m)=(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}x^{n+k} \tag{2.24}$$

2.3.3 Calcul de $f_2'\,(x)$

On a :

$$f_2'\,(x)=(r+1)\,(-1)^{\ell+n+r+1}\,\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}\left((x-m)^{n+r}\,x^{\ell+r}\right). \tag{2.25}$$

En appliquant la formule de Leibniz pour calculer la dérivée $(r+1)$-ième du produit des deux polynômes $(x-m)^{n+r}$ et $x^{\ell+r}$, on obtient à partir de l'expression (2.25) de $f_2'(x)$:

$$\begin{aligned}
f_2'\,(x) &= (r+1)\,(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{j=0}^{r+1}\left(\frac{D^j}{j!}\,(x-m)^{n+r}\right)\left(\frac{D^{r+1-j}}{(r+1-j)!}x^{\ell+r}\right) \\
&= (r+1)\,(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\,(x-m)^{n+r-j}\binom{\ell+r}{r+1-j}x^{\ell+j-1} \\
&= (r+1)\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{\ell+n+r+1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}x^{\ell+j-1}\,(x-m)^{n+r-j}
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$f_2'(x) = (r+1) \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{\ell+j-1} \binom{n+r}{j} \binom{\ell+r}{r+1-j} x^{\ell+j-1} (m-x)^{n+r-j} . \tag{2.26}$$

Des relations (2.23), (2.24), (2.26), on déduit que l'on a :

$$\begin{aligned} f_2(x+m) - f_2(-x) &= \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k} \\ &\quad + (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} x^{n+k} \end{aligned}$$

et

$$\sum_{k=1}^{m-1} f_2'(k) = (r+1) \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{j=0}^{r+1} (-1)^{\ell+j-1} \binom{n+r}{j} \binom{\ell+r}{r+1-j} k^{\ell+j-1} (m-k)^{n+r-j} .$$

L'application de la relation de Gessel

$$f_2(B+m) - f_2(-B) = \sum_{k=1}^{m-1} f_2'(k)$$

donne alors immédiatement la relation (2.20).

2.4 Equivalence des identités d'Aïder-Bencherif et de Gessel

Dans ce paragraphe, nous allons prouver l'équivalence des identités (2.10) et (2.13).Nous allons montrer que l' expression simplifiée de $E(m,n,r)$ donnée en 2013 par Gessel [9] est équivalente à l'expression simplifiée donnée en 2012 par Aïder et Bencherif [4]. Rappelons qu'avec $E(m,n,r) := \sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}$, Aïder et Bencherif ont énoncé le résultat suivant :

$$E(m,n,r) = \sum_{k=1}^{m-1} p_r(m,n,k)$$

avec

$$\begin{aligned} p_r(m,n,k) &= \frac{r+1}{2} \binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}^2 k^{n+\frac{r-1}{2}} (k-m)^{n+\frac{r-1}{2}} \\ &\quad + (r+1) \sum_{i=0}^{\frac{r-1}{2}} \binom{n+r}{i} \binom{n+r}{r+1-i} k^{n+r-i} (k-m)^{n-1+i} . \end{aligned}$$

que Gessel a annoncé le résultat suivant :

$$E\,(m,n,r)=\sum_{k=1}^{m-1} g_r(m,n,k)$$

avec

$$g_r(m,n,k)=\frac{1}{2}(r+1)\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{n+r}{r+1-j}k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}. \tag{2.27}$$

Observons que r étant impair, la somme (2.27) comporte un nombre impair de termes égél à $r+2$. En mettant en évidence le terme central correspondant à $j=\frac{r+1}{2}$, on a :

$$\begin{aligned} g_r(m,n,k) &= \frac{r+1}{2}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}^2 k^{n+\frac{r-1}{2}}(k-m)^{n+\frac{r-1}{2}} \\ &\quad \underbrace{+\frac{r+1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{j}\binom{n+r}{r+1-j}k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}}_{R_1} \\ &\quad \underbrace{+\frac{r+1}{2}\sum_{j=\frac{r+1}{2}+1}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{n+r}{r+1-j}k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}}_{R_2}. \end{aligned}$$

En changeant j en $r+1-j$, le terme R_1 peut s'écrire :

$$\begin{aligned} R_2 &= \frac{r+1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{r+1-j}\binom{n+r}{j}k^{n+r-j}(k-m)^{j+n-1} \\ &= R_1+\underbrace{\frac{r+1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{r+1-j}\binom{n+r}{j}\left(k^{n+r-j}(k-m)^{j+n-1}-k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}\right)}_{R_3} \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} g_r(m,n,k) &= \frac{r+1}{2}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}^2 k^{n+\frac{r-1}{2}}(k-m)^{n+\frac{r-1}{2}}+2R_1+R_3 \\ &= p_r(m,n,k)+R_3. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$g_r(m,n,k)-p_r(m,n,k)=\frac{r+1}{2}\sum_{j=0}^{\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{r+1-j}\binom{n+r}{j}\left(k^{n+r-j}(k-m)^{j+n-1}-k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}\right)$$

et comme $(n+r-j)+(j+n-1)=2n+r-1$ est un nombre pair, on a :

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(k^{n+r-j}(k-m)^{j+n-1}-k^{j+n-1}(k-m)^{n+r-j}\right)=0.$$

Par suite,

$$\sum_{k=1}^{m-1}\left(g_r(m,n,k)-p_r(m,n,k)\right)=0.$$

Les identités (2.10) et (2.13) sont donc équivalentes.

2.5 Applications des théorèmes

Nous avons déjà vu que les théorèmes 59 et 60 donnant des expressions simplifiées de $E\left(m,n,r\right):=\sum_{k=0}^{n+r}m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}$ généralisaient :

- l'identité de Kaneko [38] obtenue pour $m=1$ et $r=1$,

- l'identité de Gessel [30, Theorem 7.3] obtenue obtenue pour $r=1$,

- l'identité de Chen et Sun [25] obtenue pour $r=3$.

Dans ce qui suit, nous allons constater que les théorèmes précédents 59 et 60 généralisent encore de nombreuses autres identités comportant les nombres de Bernoulli parmi lesquelles nous aurons les identités qui suivent.

2.5.1 L'identité de Momiyama (2001)

La relation (2.12) du théorème de Gessel 60 implique pour $m=r=1$:

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}\left(\ell+k+r\right)B_{\ell+k}+\left(-1\right)^{\ell+n}\sum_{k=0}^{\ell+1}\binom{\ell+1}{k}\left(n+k+1\right)B_{n+k}=0. \tag{2.28}$$

La relation (2.28) est précisément la relation que Momiyama [47] a prouvé par une méthode p-adique en 2001.

2.5.2 L'identité de Chang et Ha (2001)

En 2001, Chang et Ha [20] ont prouvé l'identité suivante :

$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{n+1}{k-n}(k+1)\frac{B_k}{2^k}=(-1)^n\frac{n+1}{2^{2n+1}},n\geq 1. \tag{2.29}$$

Le corollaire suivant signalé dans [4] généralise la relation (2.29).

Corollaire 62 *[4]Pour tout entier naturel n et pour tout entier naturel impair r, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} 2^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}$$
$$= (-1)^{n+\frac{r-1}{2}} \frac{r+1}{2} \binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}.$$

En effet pour $r = 1$, la relation

$$\sum_{k=0}^{n+1} 2^{n+1-k} \binom{n+r}{k} (n+k+1) B_{n+k} = (-1)^{n+\frac{r-1}{2}} (n+1).$$

En changeant k en $n-k$

Preuve. D'après la démonstration du théorème 2.10, on sait que pour $m = 2$, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+r} 2^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} = f_1'(1)$$

avec

$$f_1'(x) = \frac{D^{r+1}}{2(r+1)!} \left((x-2)^{n+r} x^{n+r}\right).$$

Le théorème résulte du calcul de $f_1'(1)$. On a :

$$\begin{aligned} f_1'(x) &= (r+1) \frac{D^{r+1}}{2(r+1)!} \left((x-1)^2 - 1\right)^{n+r} \\ &= (r+1) \frac{D^{r+1}}{2(r+1)!} \sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} (-1)^{n+r-k} (x-1)^{2k} \\ &= \frac{r+1}{2} \sum_{k=\frac{r+1}{2}}^{n+r} (-1)^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{2k}{r+1} (x-1)^{2k-r-1}. \end{aligned}$$

Ainsi on a bien :

$$\begin{aligned} f_1'(1) &= \frac{r+1}{2} \left[(-1)^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{2k}{r+1} \right]_{k=\frac{r+1}{2}} \\ &= (-1)^{n+\frac{r-1}{2}} \frac{r+1}{2} \binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}. \end{aligned}$$

$\square$

2.5.3 L'identité de Chen et Sun (2009)

Dans le cas particulier où $m = 1$ et $r = 3$, on obtient la relation suivante qui est précisément le Théorème 7.1 prouvé par Chen et Sun [25, Theorem 7.1] en 2009 :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+3}{k} (n+k+3)(n+k+2)(n+k+1) B_{n+k} = 0.$$

2.5.4 L'identité de Zekiri-Bencherif (2012)

Dans le cas général où $m = 1$ et r est un entier impair, on obtient la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k} = 0$$

qui peut s'écrire en multipliant les deux membres par $r!$:

$$\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} (n+k+r)(n+k+r-1)\ldots(n+k+1) B_{n+k} = 0. \tag{2.30}$$

La relation (2.30) est le résultat principal prouvé par en 2011 par Zékiri et Bencherif [70].

Chapitre 3

Identités pour des suites de nombres et de polynômes remarquables

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous allons énoncer et prouver deux identités remarquables, chacune faisant l'objet d'un théorème : théorème A et théorème B.

Le théorème A s'applique à toute suite numérique $(w_n)_{n\geq 0}$ dont la fonction génératrice exponentielle $S_w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n!}$ satisfait à la relation $S_w(-t) = \varepsilon e^{\lambda t} S_w(t)$ où $\varepsilon = \pm 1$ et $\lambda \in \mathbb{C}$. Ce théorème s'applique en particulier aux suites invariantes par transformation binomiale (appelées aussi suites de Césàro). Il s'agit essentiellement d'une généralisation d'une identitée pour les suites de Césàro obtenue en 2012 par Bencherif et Garici (Théorème2.1, [12]). Ce théorème A permet d'obtenir des identités polynomiales et il s'applique à de nombreuses suites de polynômes remarquables telles que les suites de polynômes généralisés de Bernoulli, d'Euler ou de Genocchi, les suites de polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas, les suites de polynômes de Tchébychev de première et seconde espèce ainsi qu'à de nombreuses autres suites de nombres ou de polynômes remarquables.

Le théorème B concerne exclusivement les polynômes généralisés de Bernoulli. Ce Théorème généralise un théorème obtenu en 2012 par Aïder et Bencherif [4] ainsi qu'un théorème analogue du à Gessel en 2013 [9] concernant les nombres de Bernoulli. Il s'agit en fait d'une généralisation aux polynômes généralisés de Bernoulli du théorème de Gessel qui porte sur les nombres de Bernoulli. Ce théorème B permet d'obtenir comme cas particulier non seulement une identité obtenue à l'aide du premier théorème pour les polynômes généralisés de Bernoulli aussi les nombreuses autres identités vérifiées par les nombres et polynômes de Bernoulli (classiques ou généralisés) que nous avons examiné au chapitre précédent.

Le plan de ce chapitre est le suivant. Nous énoncerons et prouverons le théorème A au pararagraphe suivant. Au troisième paragraphe, nous appliquerons le théorème A à de nombreuses suites de nombres et de polynômes remarquables. Nous énoncerons et prouverons ensuite le théorèmes B au quatrième paragraphe. Le cinquième paragraphe sera consacré à des applications du théorème B. Les théorèmes A et B ont fait l'objet d'une récente publication [21].

3.2 Théorème A

En 2012, Bencherif et Garici ont prouvé deux identités pour les suites de Cesàro (Théorème2.1, [12]). Ces identités leur ont permis de retrouver de nombreuses identités comportant les nombres de Bernoulli découvertes par différents auteurs et prouvées par diverses méthodes ainsi que des identités analogues pour certaines suites de nombres remarquables telles que les suites de nombres de Genocchi, de Fibonacci et de Lucas. Le théorème suivant généralise une de ces identités. Cette généralisation va nous permettre d'obtenir des identités analogues pour d'autres suites de nombres ou de polynômes remarquables telles que celles citées dans l'introduction de ce chapitre.

3.2.1 Enoncé du théorème A

Théorème 63 *[21] Soit* $w = (w_n)_{n\geq 0}$ *une suite numérique telle que sa fonction génératrice exponentielle* $S_w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n!}$ *satisfait à la relation*

$$S_w(-t) = \varepsilon e^{\lambda t} S_w(t) \tag{3.1}$$

où $\varepsilon \in \{1, -1\}$ *et* $\lambda \in \mathbb{C}$*. Alors pour tous entiers naturels* n*,* ℓ *et* r*, on a :*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} w_{\ell+k} \\ &+ (-1)^{\ell+n+r+1} \varepsilon \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} w_{n+k} = 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ce théorème constitue bien une généralisation de la première relation du thèorème 2.1 de ([12]). En effet, la relation (3.1) peut aussi s'écrire

$$S_w(t) = \varepsilon e^{-\lambda t} S_w(-t).$$

(3.2) est équivalente à la relation suivante :

$$w_n = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} (-1)^k w_k \ , \quad n \in \mathbb{N}. \tag{3.3}$$

Pour $\lambda = -1$ et $\varepsilon = 1$, elle équivaut à dire que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est une suite de Césàro, (ou de manière synonyme une suite invariante par transformation binomiale ou autoduale). Pour $\lambda = 1$ et $\varepsilon = -1$, la relation (3.2) signifie que la suite $(w_n)_{n\geq 0}$ est inversement invariante par transformation binomiale. On en déduit le corollaire suivant dans lequel la relation (3.4) est une formulation équivalente à la première relation du théorème 2.1 de ([12]).

Corollaire 64 *Soit $w = (w_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique et n, ℓ et r des entiers naturels.*

1. *Si la suite w est une suite invariante par transformation binomiale, alors on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} (-1)^k \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} w_{\ell+k} - (-1)^r \sum_{k=0}^{\ell+r} (-1)^k \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} w_{n+k} = 0. \tag{3.4}$$

2. *Si la suite w est une suite inversement invariante par transformation binomiale, alors on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} (-1)^k \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} w_{\ell+k} + (-1)^r \sum_{k=0}^{\ell+r} (-1)^k \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} w_{n+k} = 0. \tag{3.5}$$

3.2.2 Lemmes préliminaires

La preuve du théorème 63 repose sur les deux lemmes suivants :

Lemme 65 *Soit $w = (w_n)_{n\geq 0}$ une suite numérique telle que sa fonction génératrice exponentielle $S_w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n!}$ satisfait à la relation*

$$S_w(-t) = \varepsilon e^{\lambda t} S_w(t) \tag{3.6}$$

où $\varepsilon \in \{1, -1\}$ et $\lambda \in \mathbb{C}$.

Soit $\mathcal{L}_w$ la forme linéaire, associée à la suite $w = (w_n)_{n\geq 0}$, définie sur le $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$ par la donnée suivante des images des vecteurs de la base canonique $(x^n)_{n\geq 0}$:

$$\mathcal{L}_w(x^n) = w_n, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{3.7}$$

Alors, pour tout polynôme $P(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, on a :

$$P(x) - \varepsilon P(-\lambda - x) \in \ker \mathcal{L}_w. \tag{3.8}$$

Preuve. La relation (3.1) est équivalente à la relation (3.3) et se traduit alors par la relation suivante :

$$\mathcal{L}_w\left(x^n\right) = \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} (-1)^k \mathcal{L}_w\left(x^k\right) \;, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La linéarité de $\mathcal{L}_w$ nous permet d'en déduire la propriété suivante :

$$\mathcal{L}_w\left(x^n - \varepsilon \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-\lambda)^{n-k} \left(-x^k\right)\right) = 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

ce qui se traduit encore par la relation :

$$x^n - \varepsilon\left(-\lambda - x\right)^n \in \ker \mathcal{L}_w, \quad n \in \mathbb{N}.$$

La linéarité de $\mathcal{L}_w$ nous permet alors d'affirmer que pour tout polynôme $P(x)$ de $\mathbb{C}[x]$, on a :

$$P(x) - \varepsilon P(-\lambda - x) \in \ker \mathcal{L}_w.$$

La preuve du lemme est complète. □

Lemme 66 *Pour tous entiers naturels n, ℓ et r, le polynôme $P(x) = P_{(n,\ell,r)}(x)$ défini par :*

$$P(x) = \frac{D^r}{r!}\left(x^{\ell+r}(\lambda + x)^{n+r}\right)$$

vérifie les identités suivantes :

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k} \tag{3.9}$$

et

$$P(x) = \sum_{k=0}^{\ell+r} (-\lambda)^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (\lambda + x)^{n+k}. \tag{3.10}$$

Preuve. Il suffit de remarquer qu'on peut développer $P(x)$ de deux manières différentes. On a d'une part :

$$\begin{aligned} P(x) &= \frac{D^r}{r!}\left(\sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \lambda^{n+r-k} x^{\ell+k+r}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k}, \end{aligned}$$

ce qui prouve la relation (3.9).

On a d'autre part :

$$\begin{aligned}
P(x) &= \frac{D^r}{r!}\left(((\lambda+x)-\lambda)^{\ell+r}(\lambda+x)^{n+r}\right)\\
&= \sum_{k=0}^{\ell+r}\binom{\ell+r}{k}\lambda^{\ell+r-k}(\lambda+x)^{n+k+r}\\
&= \sum_{k=0}^{\ell+r}(-\lambda)^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(\lambda+x)^{n+k},
\end{aligned}$$

ce qui prouve la relation (3.10). □

3.2.3 Preuve du théorème A

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème 63. Appliquons la relation au polynôme :

$$P(x) = \frac{D^r}{r!}\left(x^{\ell+r}(\lambda+x)^{n+r}\right).$$

De l'expression (3.10) de $P(x)$, on déduit que :

$$\begin{aligned}
P(-\lambda-x) &= \sum_{k=0}^{n+r}(-\lambda)^{\ell+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(-x)^{n+k}\\
&= (-1)^{\ell+n+r}\sum_{k=0}^{n+r}\lambda^{\ell+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}x^{n+k}. \qquad (3.11)
\end{aligned}$$

Finalement, on déduit de (3.9) et (3.11) que :

$$\begin{aligned}
P(x)-\varepsilon P(-\lambda-x) &= \sum_{k=0}^{n+r}\lambda^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}x^{\ell+k}\\
&\quad+(-1)^{\ell+n+r+1}\varepsilon\sum_{k=0}^{n+r}\lambda^{\ell+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}x^{n+k}. \qquad (3.12)
\end{aligned}$$

Or d'après la relation (3.8), on a :

$$\mathcal{L}_w\left(P(x)-\varepsilon P(-\lambda-x)\right) = 0 \qquad (3.13)$$

où $\mathcal{L}_w$ est la forme linéaire définie en (3.7) par :

$$\mathcal{L}_w\left(x^n\right) = w_n, \qquad n\in\mathbb{N}. \qquad (3.14)$$

Il résulte de (3.12), (3.13) et (3.14) la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} w_{\ell+k}$$
$$+ (-1)^{\ell+n+r+1} \varepsilon \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} w_{n+k} = 0,$$

ce qui est bien la relation (3.2) du théorème 63 qu'on devait prouver. La preuve du théorème est complète.

3.3 Applications du Théorème A

Dans ce pararagraphe, nous allons appliquer le théorème A à de nombreuses suites de nombres et polynômes remarquables.

3.3.1 Identités pour les polynômes généralisés de Bernoulli et d'Euler

Le corollaire qui suit est une application directe du théorème 63 à la suite des polynômes généralisés de Bernoulli :

Corollaire 67 *Pour tous entiers naturels n, ℓ et r, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} (\alpha - 2x)^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x)$$
$$+ (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} (\alpha - 2x)^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)}(x) = 0. \tag{3.15}$$

Preuve. En effet, la suite des polynômes généralisés de Bernoulli est définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^{\alpha} e^{xt}.$$

En posant, pour α et x fixés :

$$w_n = B_n^{(\alpha)}(x),$$

on a :

$$S_w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{t}{e^t - 1} \right)^{\alpha} e^{xt}$$

et

$$\begin{aligned} S_w(-t) &= \left(\frac{-t}{e^{-t}-1}\right)^{\alpha} e^{-xt} \\ &= \left(\frac{t}{e^{t}-1}\right)^{\alpha} e^{xt} e^{(\alpha-2x)t} \\ &= e^{(\alpha-2x)t} S_w(t) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$S_w(-t) = \varepsilon e^{\lambda t} S_w(t)$$

avec $\varepsilon = 1$ et $\lambda = \alpha - 2x$. L'application du théorème 63 fournit alors la relation (3.15). □

On peut aussi établir un résultat analogue pour les polynômes généralisés d'Euler.

Corollaire 68 *Pour tous entiers naturels n, ℓ et r, on a :*

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+r} (\alpha-2x)^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} E_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) \\ &+ (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} (\alpha-2x)^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} E_{n+k}^{(\alpha)}(x) = 0. \end{aligned} \tag{3.16}$$

Preuve. En effet, la suite des polynômes généralisés d'Euler est définie par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt}.$$

En posant cette fois-ci, pour α et x fixés :

$$w_n = E_n^{(\alpha)}(x),$$

on a :

$$S_w(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n \frac{t^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^t+1}\right)^{\alpha} e^{xt}$$

et

$$\begin{aligned} S_w(-t) &= \left(\frac{2}{e^{-t}+1}\right)^{\alpha} e^{-xt} \\ &= \left(\frac{2}{e^{t}+1}\right)^{\alpha} e^{xt} e^{(\alpha-2x)t} \\ &= e^{(\alpha-2x)t} S_w(t) \end{aligned}$$

On obtient ainsi :

$$S_w(-t) = \varepsilon e^{\lambda t} S_w(t)$$

avec $\varepsilon = 1$ et $\lambda = \alpha - 2x$. L'application du théorème 63 fournit alors la relation (3.16). $\square$

Remarquons aussi que le lemme 66 nous fournit la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k} - \sum_{k=0}^{\ell+r} (-\lambda)^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (\lambda+x)^{n+k} = 0 \tag{3.17}$$

En appliquant aux deux membres de la relation (3.17) l'opérateur de composition Ω_B^α défini par :

$$\Omega_B^\alpha (x^n) = \left(\frac{t}{e^D - 1} \right)^\alpha (x^n) = B_n^{(\alpha)}(x),$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) - \sum_{k=0}^{\ell+r} (-\lambda)^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} \Omega_B^\alpha \left((\lambda+x)^{n+k} \right) = 0. \tag{3.18}$$

Comme Ω_B^α est un opérateur de composition, on a :

$$\Omega_B^\alpha \left((\lambda+x)^{n+k} \right) = B_{n+k}^{(\alpha)}(\lambda+x)$$

Compte tenu de ce fait, la relation (3.18) peut s'écrire :

$$\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) +$$

$$(-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (-1)^{n+k} B_{n+k}^{(\alpha)}(\lambda+x) = 0 \tag{3.19}$$

On sait aussi que l'on a :

$$(-1)^{n+k} B_{n+k}^{(\alpha)}(\lambda+x) = B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha-\lambda-x). \tag{3.20}$$

On déduit des relations (3.19) et (3.20) le corollaire suivant :

Corollaire 69 *Pour tous entiers naturels n, ℓ et r, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x)$$

$$+(-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha-\lambda-x) = 0.$$

On peut aussi déduire du lemme 66 des identités pour les suites des polynômes généralisés d'Euler. En effet, en appliquant aux deux membres de la relation (3.17) l'opérateur de composition Ω_E^{α} défini par :

$$\Omega_E^{\alpha}\left(x^n\right)=\left(\frac{2}{e^D+1}\right)^{\alpha}\left(x^n\right)=E_n^{(\alpha)}\left(x\right),$$

on obtient :

$$\sum_{k=0}^{n+r}\lambda^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}E_{\ell+k}^{(\alpha)}\left(x\right)$$
$$-\sum_{k=0}^{\ell+r}\left(-\lambda\right)^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}\Omega_E^{\alpha}\left(\left(\lambda+x\right)^{n+k}\right)=0.$$

On sait aussi que l'on a :

$$\left(-1\right)^{n+k}E_{n+k}^{(\alpha)}\left(\lambda+x\right)=E_{n+k}^{(\alpha)}\left(\alpha-\lambda-x\right).$$

On obtient ainsi pour les polynômes généralisés d'Euler une relation tout à fait analogue à celle vérifiée par les polynômes généralisés de Bernoulli

Corollaire 70 *Pour tous entiers naturels n, ℓ et r,on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r}\lambda^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}E_{\ell+k}^{(\alpha)}\left(x\right)$$
$$+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}\lambda^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}E_{n+k}^{(\alpha)}\left(\alpha-\lambda-x\right)=0.$$

3.3.2 Identités pour les polynômes généralisés de Genocchi

Les nombres G_n et polynômes $G_n\left(x\right)$ de Genocchi sont définis par :

$$\frac{2x}{e^x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\frac{x^n}{n!},\qquad \frac{2xe^{xt}}{e^x+1}=\sum_{n=0}^{\infty}G_n\left(t\right)\frac{x^n}{n!}.$$

Les polynômes généralisés de Genocchi $G_n^{(m)}(x)$ sont définis, pour $m\in\mathbb{N}$, par :

$$\sum_{n=0}^{\infty}G_n^{(m)}(x)\frac{t^n}{n!}=\left(\frac{2t}{e^t+1}\right)^m e^{tx}.$$

On a :

$$S_{G^{(m)}}(t)=(-1)^m e^{(2x-m)t}S_{E^{(\alpha)}}(-t).$$

Théorème 63 mène à :

$$\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}(2x-m)^{n+r-k}G_{\ell+l}^{(m)}(x)$$
$$+(-1)^{m+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(2x-m)^{\ell+r-k}G_{n+k}^{(m)}(x)$$
$$=0.$$

3.3.3 Identités pour les nombres de Stirling généralisés du seconde espèce

Les nombres de Stirling du seconde espèce apparaissent dans l'OEIS comme A008277, sont définis par la formule explicite [34] :

$$S(n,m)=\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}j^n.$$

La première généralisation de ces nombres a été fournie par d'Ocagne [52] et Carlitz [19] :

$$S^{(\alpha)}(n,m)=\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(\alpha+j)^n.$$

Ces nombres sont liés aux polynômes de Bernoulli généralisés [13] :

$$S^{(\alpha)}(n+m,m)=\binom{n+m}{m}B_n^{(-m)}(\alpha).$$

Nous nous intéressons aux nombres généralisés de Stirling [17], qui sont définis par :

$$S^{(\alpha)}(n,m,s)=\frac{(-1)^m}{m!}\sum_{j=0}^{m}(-1)^j\binom{m}{j}(\alpha+sj)^n.$$

Notons que

$$S^{(\alpha)}(n,m,1)=S^{(\alpha)}(n,m)\ \text{ and }\ S^{(0)}(n,m,1)=S(n,m).$$

Pour m et s fixés, considérons la suite $(w_{m,s})_n=(S^{(\alpha)}(n,m,s))_n$, pour laquelle la fonction génératrice est :

$$\sum_{n=0}^{\infty}S^{(\alpha)}(n,m,s)\frac{t^n}{n!}=\frac{1}{m!}e^{\alpha t}(e^{st}-1)^m.$$

On a :

$$S_{w_{m,s}}(t)=(-1)^m e^{(2x+ms)t}S_{w_{m,s}}(-t).$$

En appliquant le théorème 63, nous obtenons l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}(2x+ms)^{n+r-k}S^{(\alpha)}(\ell+k,m,s)$$
$$+(-1)^{m+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(2x+ms)^{\ell+r-k}S^{(\alpha)}(n+k,m,s)$$
$$=0.$$

3.3.4 Identités pour les nombres de Fibonacci et de Lucas

Le théorème A s'applique à la suite de Fibonacci avec $\varepsilon=-1$ et $\lambda=-1$ et à la suite de Lucas avec $\varepsilon=1$ et $\lambda=-1$. On obtient ainsi la proposition suivante :

Proposition 71 *Pour tous entiers naturels n, ℓ et r,on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}F_{\ell+k}$$
$$+(-1)^r\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}F_{n+k}=0$$

et

$$\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}L_{\ell+k}$$
$$-(-1)^r\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}L_{n+k}=0.$$

3.3.5 Identités pour les polynômes de Fibonacci et de Lucas

Les polynômes bivariés de Fibonacci et de Lucas $\left(u_n(x,y)\right)_{n\geq 0}$ et $\left(v_n(x,y)\right)_{n\geq 0}$ sont définis [7] par :

$$u_n(x,y)=xu_{n-1}(x,y)+yu_{n-2}(x,y) \text{ and } v_n(x,y)=xv_{n-1}(x,y)+yv_{n-2}(x,y)$$

pour $n\geq 2$ avec $u_0(x,y)=0$, $u_1(x,y)=1$, $v_0(x,y)=2$, $v_1(x,y)=x$. Il est bien connu qu'on a :

$$u_n(x,y)=\frac{\left(\alpha(x,y)\right)^n-\left(\beta(x,y)\right)^n}{c\,(x,y)-d\,(x,y)},\ v_n(x,y)=\left(c(x,y)\right)^n+\left(d(x,y)\right)^n$$

où

$$c(x,y) = \frac{1}{2}\left(x + \sqrt{x^2+4y}\right) \text{ and } d(x,y) = \frac{1}{2}\left(x - \sqrt{x^2+4y}\right).$$

Notons que les suites de Fibonacci $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Lucas $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont équivalentes à :

$$F_n = u_n(1,1) \quad \text{et} \quad L_n = v_n(1,1).$$

Considérons les suites $u^* = \big(u_{sn}(x,y)\big)_n$ et $v^* = \big(v_{sn}(x,y)\big)_n$ où s est un entier non négatif. Ceci implique que :

$$S_{u^*}(t) = -e^{v_s(x,y)t} S_{u^*}(-t) \text{ and } S_{v^*}(t) = e^{v_s(x,y)t} S_{v^*}(-t).$$

Considérons les suites $u^* = \big(u_{sn}(x,y)\big)_n$ et $v^* = \big(v_{sn}(x,y)\big)_n$ où s est un entier non négatif. Ceci implique que :

$$S_{u^*}(t) = -e^{v_s(x,y)t} S_{u^*}(-t) \text{ and } S_{v^*}(t) = e^{v_s(x,y)t} S_{v^*}(-t).$$

L'application du théorème 63 conduit au corollaire suivant :

Corollaire 72 *Soient n, ℓ, r et s des entiers non négatifs. Alors :*

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k \binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}\big(v_s(x,y)\big)^{n+r-k} u_{s(l+k)}(x,y) \\
&+ (-1)^r \sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k \binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}\big(v_s(x,y)\big)^{\ell+r-k} u_{s(n+k)}(x,y) = 0, \qquad (3.21)\\
&\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k \binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}\big(v_s(x,y)\big)^{n+r-k} v_{s(l+k)}(x,y) \\
&- (-1)^r \sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k \binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}\big(v_s(x,y)\big)^{\ell+r-k} v_{s(n+k)}(x,y) = 0. \qquad (3.22)
\end{aligned}$$

Le corollaire 72 généralise les identités impliquant les nombres de Fibonacci et de Lucas [39] mentionnés dans [12] et [26]. Comme il fournit identités pour plusieurs suites d'entiers, comme la suite des nombres de Fibonacci $(F_n)_{n\geq 0} = (u_n(1,1))_{n\geq 0}$, suite des nombres de Lucas $(L_n)_{n\geq 0} = (v_n(1,1))_{n\geq 0}$, suite des nombres de Pell $(P_n)_{n\geq 0} = (u_n(2,1))_{n\geq 0}$, suite des nombres de Pell-Lucas $(Q_n)_{n\geq 0} = (v_n(2,1))_{n\geq 0}$, suite des nombres de Jacobsthal $(J_n)_{n\geq 0} = (v_n(1,2))_{n\geq 0}$ et la suite des nombres de Jacobsthal-Lucas $(j_n)_{n\geq 0} = (v_n(1,2))_{n\geq 0}$ apparaissent respectivement dans l'OEIS (*On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*) [61] comme A000045, A000032, A000129, A002203, A001045 et A014551 et aussi les suites des nombres $(F_{2n})_{n\geq 0}$, $(L_{2n})_{n\geq 0}$, $(P_{2n})_{n\geq 0}$, $(Q_{2n})_{n\geq 0}$, $(J_{2n})_{n\geq 0}$, et $(j_{2n})_{n\geq 0}$ respectivement comme A001906, A005248, A001542, A003499, A002450, et A052539 dans OEIS.

3.3.6 Identités pour les polynômes de Tchebychev

Les polynômes de Tchebychev de première espèce $(T_n(x))_{n\geq 0}$ sont définis par : [40, 8] :

$$T_0(x) = 1,\ T_1(x) = x \text{ et }\ T_n(x) = 2xT_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \text{ pour } n \geq 2.$$

Les polynômes de Tchebychev de seconde espèce $(U_n(x))_{n\geq 0}$ sont définis par : [40, 8] :

$$U_0(x) = 1,\ U_1(x) = 2x \ \text{ et }\ U_n(x) = 2xU_{n-1}(x) - U_{n-2}(x) \text{ pour } n \geq 2.$$

Les premiers polynômes de Tchebychev de première espèce et de seconde esprèce sont :

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1 \\ T_1(x) &= x \\ T_2(x) &= 2x^2 - 1 \\ T_3(x) &= 4x^3 - 3x \\ T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} U_0(x) &= 1, \\ U_1(x) &= 2x, \\ U_2(x) &= 4x^2 - 1, \\ U_3(x) &= 8x^3 - 4x, \\ U_3(x) &= 16x^4 - 12x^2 + 1. \end{aligned}$$

Ces polynômes vérifient de nombreuses relations parmi lesquelles :

$$\begin{aligned} \cos(nx) &= T_n(\cos x), \\ \frac{\sin((n+1)x)}{\sin x} &= U_n(\cos x). \end{aligned}$$

Nous pouvons également appliquer le théorème 63 aux polynômes de Tchebychev du première espèce $T(x) = (T_n(x))_{n\geq 0}$ et aux polynômes de Tchebychev du seconde espèce $U(x) = (U_n(x))_{n\geq 0}$ qui vérifient les relations suivantes :

$$T_n(x) = \frac{1}{2}v_n(2x, -1) \ \text{ and } U_n(x) = u_{n+1}(2x, -1).$$

En appliquant le corollaire 72, nous en déduisons les identités suivantes :

$$\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{n+r} (-1)^k \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} (2T_s(x))^{n+r-k} T_{s(\ell+k)}(x) \\ &- (-1)^r \sum_{k=0}^{\ell+r} (-1)^k \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (2T_s(x))^{\ell+r-k} T_{s(n+k)}(x) = 0. \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}(-1)^k\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}2T_s(x)^{n+r-k}U_{s(\ell+k)-1}(x)\\
&+(-1)^r\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}2T_s(x)^{\ell+r-k}U_{s(n+k)-1}(x)=0,
\end{aligned}
$$

où n, ℓ et s sont des entiers naturels.

3.4 Théorème B

3.4.1 Enoncé du Théorème B

Dans tout ce qui suit, par soucis de simplification, nous adopterons la notation Ω_α au lieu de $\Omega_B^{(\alpha)}$

$$\Omega_\alpha=\Omega_B^{(\alpha)}.$$

On a donc pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$:

$$\Omega_\alpha\left(x^n\right)=B_n^{(\alpha)}(x),\quad n\in\mathbb{N}. \tag{3.23}$$

Dans ce qui suit, le théorème suivant sera aussi désigné par théorème B.

Théorème 73 *.Pour tous nombres complexes α, λ, et pour tous entiers naturels l, n, r et s, on a :*

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}\lambda^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x)\\
&+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}\lambda^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha+s-\lambda-x)\\
&=\Omega_{\alpha-1}\Big(\frac{D^{r+1}}{r!}\sum_{k=1}^{s}(x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}\Big).
\end{aligned}\tag{3.24}
$$

3.4.2 Lemmes préliminaires

Lemme 74 *Pour tout $\alpha\in\mathbb{C}$, on a :*

$$\Omega_\alpha\circ\Delta=\Omega_{\alpha-1}\circ D.$$

Preuve. Pour tout $n = 0$, on a :

$$(\Omega_\alpha \circ \Delta)(x^n) = 0 = (\Omega_{\alpha-1} \circ D)(x^n) = 0.$$

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a :

$$\begin{aligned}
(\Omega_\alpha \circ \Delta)(x^n) &= \Omega_\alpha\left((x+1)^n - x^n\right) \\
&= \Omega_\alpha\left((x+1)^n\right) - \Omega_\alpha(x^n) \\
&= (\Omega_\alpha \circ \tau_1)(x^n) - \Omega_\alpha(x^n).
\end{aligned}$$

Comme Ω_α est un opérateur de composition, il commute avec l'opérateur de translation τ_1. On a :

$$\Omega_\alpha \circ \tau_1 = \tau_1 \circ \Omega_\alpha.$$

Par suite, on a :

$$\begin{aligned}
(\Omega_\alpha \circ \Delta)(x^n) &= (\tau_1 \circ \Omega_\alpha)(x^n) - \Omega_\alpha(x^n) \\
&= \tau_1 \circ (\Omega_\alpha(x^n)) - \Omega_\alpha(x^n) \\
&= B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x) \\
&= \Delta\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right). \qquad (3.25)
\end{aligned}$$

Or d'après la relation (1.45) du théorème 41, on a :

$$\Delta\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right) = D\left(B_n^{(\alpha-1)}(x)\right). \qquad (3.26)$$

On en déduit de (3.25) et (3.26) que l'on a :

$$\begin{aligned}
(\Omega_\alpha \circ \Delta)(x^n) &= D\left(B_n^{(\alpha-1)}(x)\right) \\
&= (D \circ \Omega_{\alpha-1})(x^n).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \qquad (\Omega_\alpha \circ \Delta)(x^n) = (D \circ \Omega_{\alpha-1})(x).$$

On a donc bien :

$$\Omega_\alpha \circ \Delta = D \circ \Omega_{\alpha-1}.$$

□

Lemme 75 *Soit*

$$P(x) = \sum_{k=1}^{s} P_k(x)$$

où

$$P_k(x) = \frac{D^r}{r!}((x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}).$$

Alors :

1.
$$P_k(x+1) = P_{k-1}(x)$$

2.
$$\Delta P(x) = P_0(x) - P_s(x),$$

3.
$$P_0(x) = \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k},$$

4.
$$P_s(x) = (-1)^{\ell+n+r} \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (-1)^{n+k} (x+\lambda-s)^{n+k}.$$

Preuve.

1.
$$\begin{aligned}
P_k(x+1) &= \left(\tau_1 \circ \frac{D^r}{r!}\right) \left((x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}\right) \\
&= \left(\frac{D^r}{r!} \circ \tau_1\right) \left((x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}\right) \\
&= \frac{D^r}{r!}\left((x+1-k)^{\ell+r}(x+1+\lambda-k)^{n+r}\right) \\
&= \frac{D^r}{r!}((x-(k-1))^{\ell+r}(x+\lambda-(k-1))^{n+r}). \\
&= P_{k-1}(x).
\end{aligned}$$

2. On a :
$$\begin{aligned}
\Delta P(x) &= \Delta\left(\sum_{k=1}^{s} P_k(x)\right) \\
&= \sum_{k=1}^{s} \left(P_k(x+1) - P_k(x)\right).
\end{aligned}$$

Or d'après le résultat qu'on a prouvé précédemment, on a $P_k(x+1) = P_{k-1}(x)$. On a donc :
$$\begin{aligned}
\Delta P(x) &= \sum_{k=1}^{s} \left(P_{k-1}(x) - P_k(x)\right) \\
&= P_0(x) - P_s(x).
\end{aligned}$$

3. On a :

$$\begin{aligned}
P_0(x) &= \frac{D^r}{r!} x^{\ell+r}(x+\lambda)^{n+r} \\
&= \frac{D^r}{r!} \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} x^{\ell+k+r} \\
&= \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} x^{\ell+k}.
\end{aligned}$$

4. On a :

$$\begin{aligned}
P_s(x) &= \frac{D^r}{r!} ((x+\lambda-s)-\lambda)^{\ell+r}(x+\lambda-s)^{n+r} \\
&= \frac{D^r}{r!} \sum_{k=0}^{n+r} (-\lambda)^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} (x+\lambda-s)^{n+k+r} \\
&= (-1)^{\ell+n+r} \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} (-1)^{n+k}(x+\lambda-s)^{n+k}.
\end{aligned}$$

$\square$

Le résultat (1.46) du théorème 41 rappelé dans le lemme suivant nous sera aussi utile dans la preuve du théorème B.

Lemme 76 *Pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$(-1)^n B_n^{(\alpha)}(x) = B_n^{(\alpha)}(\alpha - x).$$

3.4.3 Preuve du Théorème B

En désignant respectivement par M_1 et M_2 le premier et second membre de la relation (3.24) :

$$\begin{aligned}
M_1 = & \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) \\
& + (-1)^{\ell+n+r+1} \sum_{k=0}^{\ell+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha+s-\lambda-x)
\end{aligned}$$

et

$$M_2 = \Omega_{\alpha-1}\left(\frac{D^{r+1}}{r!} \sum_{k=1}^{s} (x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}\right),$$

prouver le théorème B (théorème 73) consiste à prouver que l'on a : $M_1 = M_2$. Pour cela nous exploitons le lemme qui affirme que l'on a :

$$(\Omega_\alpha \circ \Delta)(Q(x)) = (\Omega_{\alpha-1} \circ D)(Q(x)).$$

pour tout polynôme $Q(x)$. En particulier en choississant pour polynôme $Q(x)$ le polynôme $P(x)$ défini par :

$$P(x) = \sum_{k=1}^{s} P_k(x)$$

où

$$P_k(x) = \frac{D^r}{r!}\left((x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}\right).$$

On en déduit que :

$$(\Omega_\alpha \circ \Delta)(P(x)) = (\Omega_{\alpha-1} \circ D)(P(x)). \tag{3.27}$$

Pour prouver le théorème 73, nous allons simplement montrer que l'on a $(\Omega_\alpha \circ \Delta)(P(x)) = M_1$ et $(\Omega_{\alpha-1} \circ D)(P(x)) = M_2$.

D'après le lemme 75, on a :

$$\Delta P(x) = P_0(x) - P_s(x).$$

On en déduit que :

$$(\Omega_\alpha \circ \Delta)(P(x)) = \Omega_\alpha(P_0(x)) - \Omega_\alpha(P_s(x)). \tag{3.28}$$

D'après les expressions de $P_0(x)$ et $P_s(x)$ données dans le lemme 75 et la relation (3.23), on a :

$$\Omega_\alpha(P_0(x)) = \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) \tag{3.29}$$

et

$$\Omega_\alpha(P_s(x)) = (-1)^{\ell+n+r}\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(-1)^{n+k}\Omega_\alpha\left((x+\lambda-s)^{n+k}\right).$$

Comme Ω_α est un opérateur de composition, il commute avec la translation $\tau_{\lambda-s}$. On a donc :

$$\begin{aligned}
\Omega_\alpha\left((x+\lambda-s)^{n+k}\right) &= (\Omega_\alpha \circ \tau_{\lambda-s})\left(x^{n+k}\right) \\
&= (\tau_{\lambda-s} \circ \Omega_\alpha)\left(x^{n+k}\right) \\
&= \tau_{\lambda-s}\left(B_{n+k}^{(\alpha)}(x)\right) \\
&= B_{n+k}^{(\alpha)}(x+\lambda-s).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$\Omega_\alpha(P_s(x)) = (-1)^{\ell+n+r}\sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(-1)^{n+k}B_{n+k}^{(\alpha)}(x+\lambda-s).$$

D'autre part, on sait que :

$$(-1)^{n+k} B_{n+k}^{(\alpha)} (x + \lambda - s) = B_{n+k}^{(\alpha)} (\alpha + s - \lambda - x).$$

On a donc :

$$\Omega_\alpha \left(P_s(x) \right) = (-1)^{\ell+n+r} \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)} (\alpha + s - \lambda - x). \tag{3.30}$$

On déduit des relations (3.28), (3.29) et (3.30) que :

$$\begin{aligned}
(\Omega_\alpha \circ \Delta) \left(P(x) \right) &= \Omega_\alpha(P_0(x)) - \Omega_\alpha(P_s(x)) \\
&= \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{n+r-k} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) \\
&\quad -(-1)^{\ell+n+r} \sum_{k=0}^{n+r} \lambda^{\ell+r-k} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)} (\alpha + s - \lambda - x).
\end{aligned}$$

On constate ainsi que $(\Omega_\alpha \circ \Delta)\left(P(x)\right)$ est bien égal au premier membre de la relation (3.24) du théorème 73 :

$$(\Omega_\alpha \circ \Delta) \left(P(x) \right) = M_1. \tag{3.31}$$

De même, prouvons maintenant que $(\Omega_{\alpha-1} \circ D)\left(P(x)\right)$ est égal au second membre de la relation (3.24) du théorème 73. On a :

$$\begin{aligned}
P(x) &= \sum_{k=1}^{s} P_k(x) \\
&= \sum_{k=1}^{s} \frac{D^r}{r!} \left((x-k)^{\ell+r} (x+\lambda-k)^{n+r} \right) \\
&= \frac{D^r}{r!} \left(\sum_{k=1}^{s} (x-k)^{\ell+r} (x+\lambda-k)^{n+r} \right).
\end{aligned}$$

Ainsi, on a :

$$(\Omega_{\alpha-1} \circ D) \left(P(x) \right) = \Omega_{\alpha-1} \left(\frac{D^{r+1}}{r!} \sum_{k=1}^{s} (x-k)^{\ell+r} (x+\lambda-k)^{n+r} \right)$$

On a ainsi prouvé que $(\Omega_{\alpha-1} \circ D)\left(P(x)\right)$ est bien égal au second membre de la relation (3.24) du théorème 73 :

$$(\Omega_{\alpha-1} \circ D) \left(P(x) \right) = M_2. \tag{3.32}$$

On déduit des relations (3.27), (3.31) et (3.32) que :

$$M_1 = M_2.$$

La preuve du théorème B (théorème 73) est complète.

3.5 Applications du Théorème B

Le théorème 73 généralise un grand nombre d'identités comportant les nombres ou les polynômes de Bernoulli classiques ou généralisés.

3.5.1 Reformulation du théorème 73

En vue des applications pratiques, nous allons reformuler le théorème 73. Rappelons que nous avons défini le polynôme $B^{(\alpha)}(x)$ par la donnée des images des vecteurs de la base canonique $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_\alpha(x^n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Si l'on doit substituer à x une valeur $x = v$, nous devons veiller à prendre certaines précautions. Nous écrirons ainsi

$$B^{(\alpha)}(v) = [\Omega_\alpha(x^n)]_{x=v}, \qquad n \in \mathbb{N}.$$

(Si $v \in \mathbb{C}$, $\Omega_\alpha(v^n) = v^n\Omega_\alpha(x^0) = v^n B_0^{(\alpha)}(x) = v^n$). Convenons de désigner par $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w)$ l'expression suivante dans laquelle n, ℓ et r désignent des entiers naturels, α un nombre complexe, u, v et w des nombres complexes ou des polynômes :

$$\begin{aligned} S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w) &= \sum_{k=0}^{n+r} u^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}^{(\alpha)}(v) \\ &+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r} u^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}^{(\alpha)}(w). \end{aligned}$$

Le théorème 73 s'énonce alors comme suit : pour tous nombres complexes α, λ et pour tous entiers naturels l, n, r et s, on a :

$$S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(\lambda, x, \alpha+s-\lambda-x) = \Omega_{\alpha-1}(\frac{D^{r+1}}{r!}\sum_{k=1}^{s}(x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r}).$$

En posant

$$u = \lambda, \quad v = x \text{ et } w = \alpha+s-\lambda-x,$$

on a l'équivalence suivante :

$$\left\{\begin{array}{l} u = \lambda \\ v = x \\ w = \alpha+s-\lambda-x \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{l} \lambda = u \\ x = v \\ s = u+v+w-\alpha \end{array}\right.$$

On constate qu'avec ce nouveau changement de paramètres, le théorème 73 s'énonce comme suit :

$$S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w) = \left[\Omega_{\alpha-1}(\frac{D^{r+1}}{r!}\sum_{k=1}^{q}(x-k)^{\ell+r}(x+u-k)^{n+r})\right]_{x=v}. \tag{3.33}$$

où

$$q := u+v+w-\alpha.$$

Ainsi, la seule condition pour pouvoir appliquer le théorème 73 et de pouvoir donner une expression simplifiée à la somme $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w)$ est que $q \in \mathbb{N}$. Convenons d'appeler indice de la somme $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w)$ la quantité q.

Remarquons que l'on a d'après le lemme 76 :

$$B_{n+k}^{(\alpha)}(w) = (-1)^{n+k} B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha - w)$$

et qu'ainsi le premier membre de (3.33) est aussi égal à :

$$\begin{aligned} S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w) &= \sum_{k=0}^{n+r} u^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}^{(\alpha)}(v) \\ &\quad +(-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k u^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}^{(\alpha)}(\alpha-w). \end{aligned}$$

Remarquons enfin que dans le cas où $q = u+v+w-\alpha = 0$, le théorème 73 s'applique et on a $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(u,v,w) = 0$.

3.5.2 Généralisation de la formule de Gessel aux polynômes classiques de Bernoulli.

Pour $\alpha = 1$, on a $B_n^{(1)}(x) = B_n(x)$ et $\Omega_{\alpha-1} = \Omega_0 = I$ et le second membre de la relation (3.24) peut s'écrire en utilisant la formule de dérivation d'un produit de deux polynômes de Leibniz :

$$\frac{D^{r+1}}{r!}\sum_{k=1}^{s}(x-k)^{\ell+r}(x+\lambda-k)^{n+r} = (r+1)\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}(x-k)^{l+j-1}(x+\lambda-k)^{n+r-j}.$$

Par application du théorème B, pour $\alpha = 1$, $\lambda = m$ et $s = m-1$, on obtient la relation suivante :

$$S^{(1)}(m,x,-x) = (r+1)\sum_{k=1}^{s}\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}(x-k)^{l+j-1}(x+\lambda-k)^{n+r-j}.$$

qu'on énonce dans le corollaire suivant :

Corollaire 77 *Pour tous entiers naturels ℓ, n, r et m, on a :*

$$\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x)$$
$$+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(-x)$$
$$=(r+1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{r+1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}(x-k)^{\ell+j-1}(x+m-k)^{n+r-j}. \tag{3.34}$$

En remplaçant x par 0 dans (3.34), nous trouvons la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+r} m^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}$$
$$+(-1)^{\ell+n+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r} m^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}$$
$$=(r+1)\sum_{k=1}^{m-1}\sum_{j=0}^{r+1}(-1)^{\ell+j-1}\binom{n+r}{j}\binom{\ell+r}{r+1-j}k^{\ell+j-1}(m-k)^{n+r-j}. \tag{3.35}$$

La relation (3.35) est exactement le théorème obtenu par Gessel [9] en 2013 pour les nombres de Bernoulli classiques. Le corollaire 77 est donc une généralisation de ce théorème de Gessel aux polynômes de Bernoulli. Signalons qu'en 2014, He [36] a retrouvé la formule de Gessel en utilisant une méthode basée sur des propriétés des q-Bernoulli nombres et polynômes de Carlitz.

3.5.3 Identité de Nielsen (1923)

Dans un ouvrage écrit en français, intitulé "*Traité Élémentaire des Nombres de Bernoulli* " et paru en 1923, Nielsen [50] définit différemment les nombres et les polynômes de Bernoulli. Ces nombres et polynômes correspondent avec nos notations aux nombres $(-1)^{n-1}B_{2n}$ et aux polynômes $\frac{B_n(x+1)}{n!}$ respectivement. En page 182 de cet ouvrage, Nielsen prouve une formule que l'on peut énoncer comme suit :

$$\sum_{k=0}^{n+r}(1-2\beta)^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x+\beta)$$
$$-\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^{\ell+r+k}(1-2\beta)^{\ell+r-k}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x-\beta)$$
$$=\frac{D^{r+1}}{r!}\left((x+\beta-1)^{\ell+r}(x-\beta)^{n+r}\right). \tag{3.36}$$

Le premier membre de la relation de Nielsen s'exprime comme étant exactement $S^{(1)}_{n,\ell,r}(1-2\beta, x+\beta, 1-x+\beta)$. La quantité $q(1-2\beta, x+\beta, 1-x+\beta) = 1-2\beta+x+\beta+1-x+\beta = 2 \in \mathbb{N}$. Le théorème 73 s'applique et permet d'affirmer que l'on a :

$$S^{(1)}_{n,\ell,r}(1-2\beta, x+\beta, 1-x+\beta) = \frac{D^{r+1}}{r!}\left((x+\beta-1)^{\ell+r}(x-\beta)^{n+r}\right),$$

ce qui est encore exactement la relation de Nielsen (3.36). Ainsi, la relation de Nielsen est un cas particulier du théorème 73.

3.5.4 Identités d'Agoh (2000)

En 2000, par l'emploi de congruences dans $\mathbb{Z}_p$, Agoh [2] a obtenu de nombreuses identités combinatoires pour les polynômes de Bernoulli qui sont en fait des cas particuliers du théorème 73. Nous avons choisi de prouver cela sur les deux identités suivantes : [2, Eq. (3.2)(i), p. 205] et [2, Eq. (3.4)(i), p. 207] :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n} m^{n-k}\binom{n}{k}B_{\ell+k}(x) - \sum_{k=0}^{\ell}(-m)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}B_{n+k}(x)\\ &= n\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n-1}(x-m+k)^{\ell} + \ell\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n}(x-m+k)^{\ell-1}\end{aligned} \tag{3.37}$$

et

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x)\\ &+(-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x)\\ &=(n+r)\sum_{k=0}^{r}\binom{n+r-1}{k}\binom{\ell+r}{r-k}x^{n+r-k-1}(x-1)^{\ell+k}\\ &+(\ell+r)\sum_{k=0}^{r}\binom{\ell+r-1}{k}\binom{n+r}{r-k}x^{n+k}(x-1)^{\ell+r-k-1}.\end{aligned} \tag{3.38}$$

Le premier membre de (3.37) est égal à $S^{(1)}_{n,\ell,0}(m, x, 1-x)$ avec $q(m, x, 1-x) = m+x+1-x-1 = m$:

$$\begin{aligned}S^{(1)}_{n,\ell,0}(m,x,1-x) \quad : \quad &= \sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x)\\ &+(-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x)\end{aligned} \tag{3.39}$$

Le théorème B s'applique donc avec $\alpha = 1$, $s = m$, $r = 0$ et $\lambda = m$ et il nous permet d'affirmer que :

$$S^{(1)}_{n,\ell,0}(m, x, 1-x) = D\left(\sum_{k=1}^{m}(x-k)^{\ell+r}(x+m-k)^{n})\right), \tag{3.40}$$

autrement dit, on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x) \\
&+(-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x) \\
=\ & D\left(\sum_{k=1}^{m}(x-k)^{\ell+r}(x+m-k)^{n})\right)
\end{aligned} \tag{3.41}$$

En changeant k en $m-k$ dans la sommation figurant au second membre de la relation (3.41), on obtient :

$$\begin{aligned}
D\left(\sum_{k=1}^{m}(x-k)^{\ell}(x+m-k)^{n}\right) &= D\left(\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n}(x-m+k)^{\ell}\right) \\
&= n\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n-1}(x-m+k)^{\ell} \\
&+ \ell\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n}(x-m+k)^{\ell-1}.
\end{aligned} \tag{3.42}$$

On déduit des relations (3.41) et (3.42) que l'on a :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x) \\
&+(-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x) \\
=\ & n\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n-1}(x-m+k)^{\ell} + \ell\sum_{k=0}^{m-1}(x+k)^{n}(x-m+k)^{\ell-1}.
\end{aligned} \tag{3.43}$$

La relation (3.43) est identique à la relation d'Agoh (3.37). La relation (3.37) est donc un cas particulier du théorème 73.

De même, on peut constater que le premier membre de la relation (3.38) est égal à la somme

$S^{(1)}_{n,\ell,r}(1,x,1-x)$ qui est d'indice $q=1+x+1-x-1=1$:

$$S^{(1)}_{n,\ell,r}(1,x,1-x) \;:\; = \sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x) + (-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x) \qquad (3.44)$$

Le théorème B s'applique avec $\alpha=1$, $s=1$ et $\lambda=1$. On a donc :

$$S^{(1)}_{n,\ell,r}(1,x,1-x) = \frac{D^{r+1}}{r!}\left((x-k)^{\ell+r}(x+1-k)^{n+r}\right). \qquad (3.45)$$

Le second membre de (3.45) peut se calculer comme suit :

$$\begin{aligned}\frac{D^{r+1}}{r!}\left((x-k)^{\ell+r}(x+1-k)^{n+r}\right) &= \frac{D^r}{r!}\left((n+r)x^{n+r-1}(x-1)^{\ell+r}+(\ell+r)x^{n+r}(x-1)^{\ell+r-1}\right)\\ &= (n+r)\sum_{k=0}^{r}\binom{n+r-1}{k}\binom{\ell+r}{r-k}x^{n+r-k-1}(x-1)^{\ell+k}\\ &+ (\ell+r)\sum_{k=0}^{r}\binom{\ell+r-1}{k}\binom{n+r}{r-k}x^{n+k}(x-1)^{\ell+r-k-1}.\end{aligned} \qquad (3.46)$$

Il résulte des relations (3.44), (3.45), (3.46) que :

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}B_{\ell+k}(x)\\ &+ (-1)^{\ell+r+1}\sum_{k=0}^{\ell+r}(-1)^k\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x)\\ &= (n+r)\sum_{k=0}^{r}\binom{n+r-1}{k}\binom{\ell+r}{r-k}x^{n+r-k-1}(x-1)^{\ell+k}\\ &+ (\ell+r)\sum_{k=0}^{r}\binom{\ell+r-1}{k}\binom{n+r}{r-k}x^{n+k}(x-1)^{\ell+r-k-1}.\end{aligned} \qquad (3.47)$$

La relation (3.47) est identique à la la relation d'Agoh (3.38). La relation (3.38) est donc bien elle aussi un cas particulier du théorème 73.

Pour $r\in\{0,1\}$, on déduit de la relation (3.38) les deux relations suivantes qu'Agoh [3, Cor. 3.4, Eq. (3.9), Eq. (3.10), p. 163] a prouvé en 2017, par une méthode différente :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{\ell+k}(x) - \sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}B_{n+k}(x) = (n+\ell)x - nx^{n-1}(x-1)^{\ell-1}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n+1}\binom{n+1}{k}(\ell+k+1)B_{\ell+k}(x)-\sum_{k=0}^{\ell+1}(-1)^{\ell+1-k}\binom{\ell+1}{k}(n+k+1)B_{n+k}(x)$$
$$=(n+\ell+2)(n+\ell+1)x^2-2(n+1)(n+\ell+1)x+(n+1)nx^{n-1}\left(x-1\right)^{\ell-1}.$$

3.5.5 Généralisation de l'identité de Chang et Ha (2001)

Nous avons déja généralisé au chapitre 2 l'identité suivante établie par Chang et Ha [20] en 2001 :

$$\sum_{k=n}^{2n}\binom{n+1}{k-n}(k+1)\frac{B_k}{2^k}=(-1)^n\frac{n+1}{2^{2n+1}},n\geq 1. \tag{3.48}$$

équivalente par un changement de variable à l'identité :

$$\sum_{k=0}^{n+1}2^{n+1-k}\binom{n+1}{k}\left(n+k+r\right)B_{n+1}=(-1)^n\binom{n+1}{1}. \tag{3.49}$$

Nous avons prouvé au corollaire 62 que plus généralement, pour tout entier naturels n et pour tout entier naturel impair r, on a :

$$\sum_{k=0}^{n+r}2^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}=(-1)^{n+\frac{r-1}{2}}\frac{(r+1}{2}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}. \tag{3.50}$$

L'identité (3.49) est alors le cas particulier de la relation (3.50) où $r=1$.

Le corollaire qui suit est une généralisation de la relation (3.50) aux polynômes de Bernoulli :

Corollaire 78 *Pour tout entier r impair*

$$\sum_{k=0}^{n+r}(2-2x)^{n+r-k}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}B_{n+k}(x)$$
$$=(-1)^{n+\frac{r-1}{2}}\frac{r+1}{2}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}(x-1)^{2n+r-1}.$$

Pour $\beta=0$, le corollaire permet d'obtenir (3.50).

Preuve. Considérons l'expression :

$$S_{n,n,r}^{(1)}\left(2-2\beta,\beta+x,\beta-x\right)$$

d'indice $q = (2-2\beta) + (\beta + x) + (\beta - x) - 1 = 1$. Le théorème B s'applique avec $s = 1$, $\lambda = 2 - 2\beta$. On a :

$$\frac{1}{2} S^{(1)}_{n,n,r}\left(2-2\beta,\beta + x, \beta - x\right) = \frac{r+1}{2}\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}\left(x^2 - (\beta-1)^2\right)^{n+r},$$

C'est-à-dire :

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(2-2\beta)^{n+r-k}\left(B_{n+k}(\beta+x) + B_{n+k}(\beta-x)\right) \\
= &\ \frac{r+1}{2}\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}\left(x^2 - (\beta-1)^2\right)^{n+r}. \qquad (3.51)
\end{aligned}$$

Pour $x = 0$, on déduit de la relation (3.51) :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(2-2\beta)^{n+r-k} B_{n+k}(\beta) \\
= &\ \left[\frac{r+1}{2}\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}\left(x^2 - (\beta-1)^2\right)^{n+r}\right]_{x=0}. \qquad (3.52)
\end{aligned}$$

Comme

$$\left(x^2 - (\beta-1)^2\right)^{n+r} = \sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\left(-(\beta-1)^2\right)^{n+r-k} x^{2k},$$

on a :

$$\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}\left(x^2 - (\beta-1)^2\right)^{n+r} = \sum_{k=\frac{r+1}{2}}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{2k}{r+1}\left(-(\beta-1)^2\right)^{n+r-k} x^{2k-r-1}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{r+1}{2}\frac{D^{r+1}}{(r+1)!}\left(x^2 - (\beta-1)^2\right)^{n+r}\right]_{x=0} \\
= &\ \left[\binom{n+r}{k}\binom{2k}{r+1}\left(-(\beta-1)^2\right)^{n+r-k}\right]_{k=\frac{r+1}{2}} \\
= &\ (-1)^{n+\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}(\beta-1)^{2n+r-1}. \qquad (3.53)
\end{aligned}$$

Il résulte des relations (3.52) et (3.53) que :

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(2-2\beta)^{n+r-k} B_{n+k}(\beta) \\
= &\ (-1)^{n+\frac{r-1}{2}}\binom{n+r}{\frac{r+1}{2}}(\beta-1)^{2n+r-1}.
\end{aligned}$$

Cette relation étant établie pour tout $\beta \in \mathbb{C}$, on en déduit la relation du corollaire obtenue en remplaçant β par x. Pour $x = 0$, le corollaire (78) permet de retouver la relation (1.37). Le corollaire (78) est donc bien une généralisation du corollaire 62 et donc aussi une généralisation de l'identité de Chang et Ha [20, 2001]. $\square$

3.5.6 Identités de Sun (2003)

En 2003, Sun [64] a obtenu de nombreuses identités combinatoires en étudiant certaines propriétés liant une suite à sa suite duale parmi lesquelles nous avons choisi les trois suivantes où $z = 1 - x - y$: [64, Thm. 1.2, Eq. (1.15), Eq. (1.16), p. 712] et [64, Remark. 1.2, Eq. (1.18) p. 713] :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_{\ell+k}(y) = (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} x^{\ell-k} B_{n+k}(z) = 0, \tag{3.54}$$

$$\begin{aligned} &(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (\ell+k+1) x^{n+1-k} B_{\ell+k}(y) \\ &+ (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} (n+k+1) x^{\ell+1-k} B_{n+k}(z) \\ &= (-1)^n (n+\ell+2) \left((B_{n+\ell+1}(x+y)) - B_{n+\ell+1}(y) \right), \end{aligned} \tag{3.55}$$

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (n+k+1)(1-2x)^{n-k+1} B_{n+k}(x) = -2(n+1) B_{2n+1}(x). \tag{3.56}$$

Notons que l'identité (3.54) a encore été prouvée par Chen et Sun [25, Thm. 5.1, p. 2121] en 2009 et par Pita [53] en 2016. Notre théorème B permet de retouver comme cas particuliers toutes ces identités.

Le premier membre de (3.54) est égal à $S^{(1)}_{n,\ell,0}(x, y, z)$:

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} B_{\ell+k}(y) = (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} x^{\ell-k} B_{n+k}(z) = S^{(1)}_{n,\ell,0}(x, y, z).$$

Comme la somme $S^{(1)}_{n,\ell,0}(x, y, z)$ est d'indice $q = x + y + z - 1 = 0$, le théorème B s'applique avec $s = 0$. On obtient la relation $S^{(1)}_{n,\ell,0}(x, y, z) = 0$. L'identité (3.54) est ainsi obtenue comme application du théorème B.

De même, si on considère $S^{(1)}_{n,\ell,1}(x, y, z)$ (avec $z = 1 - x - y$) d'indice $q = x + y + z - 1 = 0$,le théorème B s'applique encore avec $s = 0$. On obtient ainsi la relation $S^{(1)}_{n,\ell,1}(x, y, z) = 0$. Ce qui se traduit par l'identité suivante :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\ell+k+1) x^{n+1-k} B_{\ell+k}(y)$$
$$+ (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} (n+k+1) x^{\ell+1-k} B_{n+k}(z) = 0. \tag{3.57}$$

En séparant le terme correspondant à $k = n+1$ dans les sommations figurant au premier membre de (3.57), on obtient :

$$\begin{aligned}
& (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (\ell+k+1) x^{n+1-k} B_{\ell+k}(y) + (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} (n+k+1) x^{\ell+1-k} B_{n+k}(z) \\
= \; & (-1)^n (n+\ell+2) \left((-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(z)) - B_{n+\ell+1}(y) \right), \qquad (3.58)
\end{aligned}$$

On obtient bien la relation (3.55) en observant qu'au second membre, on peut remplacer $(-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(z)$ par $B_{n+\ell+1}(x+y)$. En effet, comme on a $z = 1-x-y$, l'application du lemme 76 avec $\alpha = 1$ nous fournit bien la relation

$$(-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(z) = (-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(1-(x+y)) = B_{n+\ell+1}\left(x+y\right).$$

Enfin ; si on considère la somme $S^{(1)}_{n,n,1}\left(1-2x, x, x\right)$ d'indice $q = (1-2x)+x+x-1 = 0$, le théorème B s'applique avec $s = 0$. On obtient ainsi la relation $\frac{1}{2} S^{(1)}_{n,n,1}\left(1-2x, x, x\right) = 0$. Ce qui se traduit par l'identité suivante :

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} \left(n+k+1\right) \left(1-2x\right)^{n-k+1} B_{n+k}(x) = 0 \tag{3.59}$$

En séparant dans (3.59) le terme correspondant à $k = n+1$ dans la somme du reste de la somme, on obtient la relation suivante qui est l'identité (3.56) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} \left(n+k+1\right) \left(1-2x\right)^{n-k+1} B_{n+k}(x) = -2\left(n+1\right) B_{2n+1}(x).$$

3.5.7 Les identités de Wu, Sun and Pan (2004)

En 2004, Wu, Sun et Pan ont obtenu les identités suivantes [67, Thm. 2, Eq. (6), Eq. (8), p. 297] :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{\ell+k}(x) = (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} B_{n+k}(-x), \tag{3.60}$$

et

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (\ell+k+1) B_{\ell+k}(x) + (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} (n+k+1) B_{n+k}(-x)$$
$$= (-1)^n (n+\ell+2)(n+\ell+1) x^{n+\ell}. \qquad (3.61)$$

L'identité (3.60) a déjà été prouvée au chapitre 1 (corollaire 56). On peut la retrouver comme cas particuliers du théorème 73. Il suffit de considérer les sommes $S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(1,x,-x)$ d'indice $q = 1 + x - x - 1 = 0$ auquel le théorème B s'applique avec $s = 0$. On obtient :

$$S_{n,\ell,r}^{(\alpha)}(1,x,-x) = 0,$$

ce qui se traduit par la relation :

$$\begin{aligned} & (-1)^n \sum_{k=0}^{n+r} \binom{n+r}{k} \binom{\ell+k+r}{r} B_{\ell+k}^{(\alpha)}(x) \\ = \quad & (-1)^{\ell+r} \sum_{k=0}^{\ell+r} \binom{\ell+r}{k} \binom{n+k+r}{r} B_{n+k}^{(\alpha)}(-x). \end{aligned} \qquad (3.62)$$

Pour $\alpha = 1$ et $r = 0$, la relation (3.62) donne la relation (3.60). Pour $\alpha = 1$ et $r = 1$, la relation (3.62) donne la relation suivante :

$$(-1)^n \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} (\ell+k+1) B_{\ell+k}(x) + (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell+1} \binom{\ell+1}{k} (n+k+1) B_{n+k}(-x) = 0$$

de laquelle nous pouvons déduire :

$$\begin{aligned} & (-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n+1}{k} (\ell+k+1) B_{\ell+k}(x) + (-1)^\ell \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell+1}{k} (\ell+k+1) B_{n+k}(-x) \\ = \quad & (-1)^n (n+\ell+2) \left((-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(-x) - B_{n+\ell+1}(x) \right). \end{aligned} \qquad (3.63)$$

En exploitant le lemme 76, on a :

$$\begin{aligned} (-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(-x) &= (-1)^{n+\ell+1} B_{n+\ell+1}(1-(x+1)) \\ &= B_{n+\ell+1}(x+1). \end{aligned} \qquad (3.64)$$

En exploitant la relation (1.25) du théorème 37, on a alors :

$$B_{n+\ell+1}(x+1) - B_{n+\ell+1}(x) = (n+\ell+1) x^{n+\ell} \qquad (3.65)$$

On peut alors déduire des relations (3.63), (3.64) et (3.65) l'identité (3.61).

3.5.8 Les identités de Chen (2007)

En 2007, en étudiant la transformation binomiale de suites, Chen a prouvé l'identité suivante [24, Thm. 5.3, Eq. (5.7), p. 149] :

$$\sum_{k=0}^{n+r}\binom{n+r}{k}\binom{\ell+k+r}{r}y^{n+r-k}B_{\ell+k}(x)-\sum_{k=0}^{\ell+r}\binom{\ell+r}{k}\binom{n+k+r}{r}(-y)^{\ell+r-k}B_{n+k}(x+y)=0 \tag{3.66}$$

En 2010, He et Zhang [35] ont également prouvé l'équation (3.66). Cette identité est un cas particulier du théorème 73. En effet, le premier membre de (3.66) est égal à la somme $S^{(1)}_{n,\ell,r}(y,x,1-x-y)$ qui est nulle car d'indice $q=0$.

3.5.9 Identité de Neto (2015)

En 2015, Neto [49], donne comme application de l'algèbre de Zéon qu'il développe dans son article la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n}x^{n-k}\binom{n}{k}B^{(x)}_{\ell+k}-(-1)^{n+\ell}\sum_{k=0}^{\ell}x^{\ell-k}\binom{\ell}{k}B^{(x)}_{n+k}=0 \tag{3.67}$$

Cette identité est un cas particulier immédiat de notre théorème 73. En effet, le premier membre de (3.67) est égal à la somme $S^{(x)}_{n,\ell,0}(x,0,0)$ qui est d'indice $q=x-x=0$. Cette somme est donc nulle.

Conclusion

Nous avons effectué une recherche approfondie sur différentes identités comportant les nombres ou les polynômes de Bernoulli classiques ou généralisés. Cette étude nous a permis de constater que certaines identités concernant les nombres de Bernoulli ont été redécouvertes à de nombreuses reprises au cours du temps. Chacun des auteurs pensant souvent avoir découvert une nouvelle identité. Deux faits permettent de donner une explication à ce constat. Le premier concerne les définitions de ces nombres et de ces polynômes qui ont évolué depuis leur mise en évidence par J. Bernoulli. Ainsi la définition des nombres et polynômes de Bernoulli (et d'Euler) dans l'ouvrage de Nielsen [50] n'est plus celle qu'on adopte généralement de nos jours. Le deuxième fait qui pourrait aussi expliquer cela est plus simplement le manque d'information. Au deuxième chapitre de cette thèse, nous avons signalé une identité attribuée de nos jours à Kaneko car effectivement mise en évidence par Kaneko en 1995 [38] alors que cette même identité avait été déjà découverte par A. v. Ettingshausen [29] en 1827 et redécouverte par Seidel [59] en 1883. Cigler [27] a suggéré de la désigner par "identité de v. Ettingshausen-Seidel-Kaneko".

De même, on attribue à Carlitz une identité qu'Edouard Lucas avait déjà signalé en 1883. La méthode utilisée pour découvrir une identité semble être plus importante que l'identité en elle-même. Kaneko [38] exploite subtilement une méthode très sophitiquée basée sur le développement en fractions continues d'une série formelle tout en adjoignant une courte preuve. L'identité dite de Carlitz a été prouvée par de nombreux auteurs par différentes méthodes, comme nous l'avons signalé au deuxième chapitre de cette thèse. C'est en fait la généralisation de cette identité qui a motivé de nombreux auteurs dont Gessel. C'est aussi en voulant généraliser aux polynômes de Bernoulli l'identité que Gessel avait obtenue pour les nombres de Bernoulli que nous sommes parvenus à découvrir le fameux théorème B. Notre méthode, sans doute originale, basée sur l'emploi des opérateurs de composition a été très efficace pour obtenir une identité générale permettant de retrouver comme cas particuliers un nombre considérable d'identités connues. Par cette approche, il serait certainement possible de prouver des théorèmes analogues et appropriés pour d'autres suites particulières de polynômes telles que les polynômes généralisés d'Euler et pour plus généralement des suites de polynômes d'Appell vérifiant certaines propriétés.

Bibliographie

[1] M. Abramowitz and I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions*, Bureau of Standards, Applied Math. Series, Vol. 55, 10th Printing, 1972.

[2] T. Agoh, Recurrences for Bernoulli and Euler polynomials and numbers. *Expo. Math.* **18** (2000), 197–214.

[3] T. Agoh, Shortened recurrence relations for generalized Bernoulli numbers and polynomials, *J. Number Theory* **176** (2017), 149–173.

[4] A. Aïder and F. Bencherif, On a generalization of the analog of a theorem of Chen and Sun, *Congrès des Mathématiciens Algériens, CMA'2012*, Annaba, 2012.

[5] P. Appell, Sur une classe de polynômes, *Ann. Sci. Ec. Norm. Supér.* **9** (2) (1880) 119–144.

[6] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M Kaneko, D. Zagier, Bernoulli Numbers and Zeta Functions, Springer Japon, 2014.

[7] H. Belbachir and F. Bencherif, On some properties of bivariate Fibonacci and Lucas polynomials, *J. Integer Sequences* **11** (2008), Article 08.2.6.

[8] H. Belbachir and F. Bencherif, On some properties of Chebyshev polynomials, *Discuss. Math. Gen. Algebra Appl.* **28** (1) (2008), 121–133.

[9] H. Belbachir and M. Rahmani, On Gessel-Kaneko's identity for Bernoulli numbers. *Appl. Anal. Discrete Math.* **7** (2013), 1–10.

[10] F. Bencherif, Opérateurs de composition, Notes de Cours Master. USTHB.

[11] F. Bencherif, Sur une propriété des polynômes de Nörlund, *Actes des Rencontres du C.I.R.M.*, **2** (2010) 71–77.

[12] F. Bencherif and T. Garici, Suites de Cesàro et nombres de Bernoulli, Actes de la Conférence "Fonctions L et Arithmétique", Publ. Math. Besançon Algèbre Théorie Nr., 2012/1, Presses Univ. Franche-Comté, Besançon, 2012, pp. 19–26.

[13] F. Bencherif, B. Benzaghou, and S. Zerroukhat, Une identité pour des polynômes d'Appell, *C. R. Math. Acad. Sci. Paris* **355** (2017), 1201–1204.

[14] Horst Bergmann, Eine explizite Darstellung der Bernoulli'schen Zahlen, Math. Nachr., 34 (1967), 377-378.

[15] J. Bernoulli, Ars Conjectandi, Opus Posthumum. Accedit Tractatus de Seriebus Infinitis, et Epistola Gallice Scripta de Ludo Pilae Reticularis. Thurneysen, Basel (1713)

[16] Nicolas Bourbaki, Fonctions d'une variable réelle (1976).

[17] N. P. Cakek, V. Grandimir, and V. Milovamovic, On generalized Stirling numbers and polynomials, *Math. Balkanica.* **10** **(**2004), 241–248.

[18] L. Carlitz, Problem 795, *Math. Mag.* **44** (1971), 106.

[19] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind, II, *Fibonacci Quart.* **18** (1980), 242–257.

[20] C.-H. Chang and C.-W. Ha, On recurrence relations for Bernoulli and Euler numbers, *Bull. Aust. Math. Soc.* **64** (2001), 469–474.

[21] R. Chellal, F. Bencherif and M. Mehbali, An Identity for Generalized Bernoulli Polynomials, *J. Integer Sequences*, **23** (2020), Article 20.11.2

[22] R. Chellal, Autour de certaines propriétés arithmétiques des nombres de bernoulli Magister en Mathématiques, 2012 USTHB

[23] R Chellal, F Bencherif, M Mehbali identity for generalized Bernoulli polynomials, arXiv preprint arXiv :2001.09323, 2020 - arxiv.org

[24] K. W. Chen, Identities from the binomial transform, *J. Number Theory* **124** (2007), 142–150.

[25] W. Y. C. Chen and L. H. Sun, Extended Zeilberger's algorithm for identities on Bernoulli and Euler polynomials, *J. Number Theory* **129** (2009), 2111–2132.

[26] W. Chu and P. Magli, Summation formulae on reciprocal sequences, *European J. Combin.* **28** (2007), 921–930.

[27] J. Cigler, q-Fibonacci polynomials and q-Genocchi numbers. Preprint, 2010. Available at Arxiv.org/abs/0908.1219v3.

[28] K. Dilcher and I. Sh. Slavutskii, *A Bibliography of Bernoulli Numbers.*

[29] A. V. Ettingshausen, *Vorlesungen Über die Höhere Mathematik*, Vol. 1, Verlag Carl Gerold, Wien, 1827.

[30] I. M. Gessel, Applications of the classical umbral calculus, *Algebra Universalis* **49** (2003), 397–434.

[31] J.W.L. Glaisher, On the residues of the sums of products of the first $p-1$ numbers and their powers to modulus p^2 or p^3, Quart. J. Math. Oxford 31 (1900), $321-353$.

[32] H. W. Gould and J. Quaintance, Bernoulli numbers and a new binomial transform identity, *J. Integer Sequences* **17** (2014), Article 14.2.2.

[33] H. W. Gould, Explicit formulas for Bernoulli numbers, *Amer. Math. Monthly* **79** (1972), 44–51.

[34] R. L. Graham, D. E. Knuth, and O. Patashnik. *Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 2nd edition, 1994.

[35] Y. He and W. P. Zhang, Some symmetric identities involving a sequence of polynomials. *Electron. J. Combin.* **17** (2010), Article #N7.

[36] Y. He, Some results for Carlitz's q-Bernoulli numbers and polynomials, *Appl. Anal. Discrete Math.* **8** (2014), 304–319.

[37] K. Ireland and M. Rosen, *A Classical Introduction to Modern Number Theory*, 2nd ed., Springer, 1990.

[38] M. Kaneko, A recurrence formula for the Bernoulli numbers, *Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci.* **71** (1995), 192–193.

[39] T. Koshy, *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications*, Wiley, 2001.

[40] T. Koshy, *Pell and Pell-Lucas Numbers with Applications*, Wiley, New York, 2014.

[41] . D. H. Lehmer, On Fermat's quotient, base two, Math. Comp. 36 (1981), 289–290. MR 82e :10004

[42] L. Kronecker, Bemerkung zur Abhandlung des Herrn Worpizky, J. Reine Angew. Math., 94 (1883), 268-270.

[43] E. Lucas, Sur les nouvelles formules de MM. Seidel et Stern, concernant les nombres de Bernoulli, *Bull. Soc. Math. France* **8** (1880) 169–172.

[44] E. Lucas, *Théorie des Nombres*, Vol. 1, Gauthier-Villars, Paris, 1891. Republished by A. Blanchard, Paris, 1961 and by J. Gabay in 1991

[45] E. Lucas, Théorie des fonctions numériques simplement périodiques, Amer. J. Math., vol. 1, no 2, 1878, p. 182-240.

[46] A. Messahel, Etude de certaines suites de cesàro, mémoire de Magister, USTHB 2014.

[47] H. Momiyama, A new recurrence formula for Bernoulli numbers, *Fibonacci Quart.* **39** (2001), 285–288.

[48] Y.-P. Mu, Symmetric recurrence relations and binomial transforms, *J. Number Theory* **133** (2013), 3127–3137.

[49] A. F. Neto, Carlitz's identity for the Bernoulli numbers and Zeon algebra, *J. Integer Sequences* **18** (2015), Article 15.5.6.

[50] N. Nielsen, *Traité Élémentaire des Nombres de Bernoulli*. Gauthier-Villars, 1923.

[51] I. Niven, Formal power series, Amer. Math. Monthly 76 (1969), 871–889.

[52] M. d'Ocagne, Sur une classe de nombres remarquables, *Amer. J. Math.* **9** (1887) 353–380.

[53] C. Pita, Carlitz-type and other Bernoulli identities, *J. Integer Sequences* **19** (2016), Article 16.1.8.

[54] H. Prodinger, A short proof of Carlitz's Bernoulli number identity, *J. Integer Sequences* **17** (2014), Article 14.4.1.

[55] A. Robert. A course in p-adic analysis. Graduate Texts in Mathematics, 198. Springer-Verlag, New York, 2000.

[56] S. Roman, The Umbral Calculus, Academic Press, New York, NY, USA, 1984.

[57] G.-C. Rota and B. D. Taylor, The classical umbral calculus, SIAM J. Math. Anal. 25 (1994), 694–711.

[58] J. Satoh, A recurrence formula for q-Bernoulli numbers attached to formal group, *Nagoya Math. J.* **157** (2000), 93–101.

[59] L. Seidel, Über eine einfache Entstehungsweise der Bernoullischen Zahlen und einiger verwandten Reihen, *Sitzungsber. Münch. Akad. Math. Phys.* (1877), 157–187.

[60] A. G. Shannon, Solution of Problem 795, *Math. Mag.* **45** (1972), 55–56.

[61] N. J. A. Sloane et al., *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*, 2020.

[62] Z. W. Sun, Arithmetic theory of harmonic numbers, Proc. Amer. Math. Soc. 140 (2012), 415–428.

[63] Z. H. Sun, Invariant sequences under binomial transformation, *Fibonacci Quart.* **39** (2001) 324–333.

[64] Z. W. Sun, Combinatorial identities in dual sequences, *European J. Combin.* **24** (2003) 709–718.

[65] P. Vassilev and M. Vassilev-Missana, On the sum of equal powers of the first n terms of an arbitrary arithmetic progression, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics* **11** (2005), 15–21.

[66] P. Vassilev and M. Vassilev-Missana, On one remarkable identity involving Bernoulli numbers, *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics* **11** (2005), 22–24.

[67] K.-J. Wu, Z.-W. Sun, and H. Pan, Some identities for Bernoulli and Euler polynomials, *Fibonacci Quart.* **42** (2004), 295–299.

[68] A. Zekiri and F. Bencherif, Courte preuve d'une identité comportant les nombres de Bernoulli. Preprint, 2015. Available at Arxiv.org/abs/1506.08112.

[69] A. Zekiri, F. Bencherif, and R. Boumahdi, Generalization of an identity of Apostol, *J. Integer Sequences* **21** (2018), Article 18.5.1.

[70] A. Zekiri and F. Bencherif, A new recursion relationship for Bernoulli numbers. *Ann. Math. Inform.* **38** (2011), 123–126.

[71] S. Zerroukhat, Opérateurs de composition et congruences, thèse de doctorat USTHB ; 2018.

[72] S. Zerroukhat, F. Bencherif et R. Chellal, Amélioration d'une congruence de Glaisher, 2016. ffhal-01350056f

[73] S. Zerroukhat, F. Bencherif et R. Chellal, Amélioration d'une congruence de Glaisher. Congrès des Mathématiciens Algériens, CMA'2016, Batna, 08-09 novembre 2016.