Ce travail comporte trois parties dont les deux premières portent sur une équation quasi-linéaire du 1er ordre qui constitue un cas particulier de lois de conservation.

Un système de lois de conservation de p équations ($p\in\mathbb{N}^*$) sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ ($d\in\mathbb{N}^*$) s'écrit:

$$(1) \qquad \frac{\partial u}{\partial t} + \sum_{j=1}^{d} \frac{\partial}{\partial x_j} f_j(u) = 0 \quad , \; x=(x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d \; , \; t>0$$

où: $$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_p \end{bmatrix}$$

est une fonction vectorielle de $[0,+\infty[\times \mathbb{R}^d$ à valeurs dans Ω et les fonctions:

$$f_j = \begin{bmatrix} f_{1j} \\ \vdots \\ f_{pj} \end{bmatrix} \quad , \; 1\le j\le d$$

sont des fonctions régulières de Ω dans $\mathbb{R}^p$ appelées fonctions flux.

L'ouvert Ω est appelé ensemble des états.

Formellement, le système (1) exprime la conservation des quantités $u_1,\dots,u_p$. En effet, considérons un domaine D arbitraire de $\mathbb{R}^d$ et $n=(n_1,\dots,n_d)$ la normale extérieure au bord ∂D de D. Il résulte de (1):

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\int_D u(t,x)\, dx + \sum_{j=1}^{d} \int_{\partial D} f_j(u)\, n_j \, d\sigma = 0$$

où $d\sigma$ est la mesure surfacique sur ∂D.

La relation (2) exprime que la variation au cours du temps de $\int_D u\, dx$ est égale aux pertes à travers le bord ∂D de D.

Le système (1) est dit hyperbolique si pour tout u dans Ω et pour tout $\omega = (\omega_1,\dots,\omega_d)$ dans $\mathbb{R}$, la matrice:

$$A(u,\omega) = \sum_{j=1}^{d} \omega_j \; A_j(u) \quad .$$

où A_j est la matrice Jacobienne de $f_j(u)$, possède p valeurs propres réelles.

Si de plus ces valeurs propres sont distinctes alors le système est dit strictement hyperbolique.

Une caractéristique essentielle de ces systèmes est que le problème de Cauchy:

trouver $u : \mathbb{R}^d \times [0,+\infty[\longrightarrow \Omega$ solution de (1) et vérifiant la condition initiale:

(3) $\quad u(0,x) = u_0(x) \qquad x \in \mathbb{R}^d$

où $\quad u_0 : \mathbb{R}^d \longrightarrow \Omega \quad$ est une fonction donnée,

ne possède pas en général de solution classique au delà d'un temps T^* fini même si u_0 est trés régulière.

Le but du chapitre 1 est d'illustrer ceci par un exemple simple. Pour cela on considère l'équation scalaire :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} + a(u).\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0 & (t,x)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R} \\ u(0,x) = u_0(x) & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

où a et u_0 sont des fonctions données de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

On montre que lorsque a et u_0 sont classiques, il y a existence et unicité d'une solution classique définie sur $[0,T^*[\times\mathbb{R}$ et que cette solution présente au delà de T^* $(T^*<+\infty)$ des singularités.

Dans le chapitre 2, on montre un résultat analogue dans le cas où a et u_0 sont lipschitziennes bornées sur $\mathbb{R}$.

Dans le dernier chapitre, on s'intéresse au système de Vlasov-Poisson en dimension deux. Pour cela on considère un plasma composé d'une seule espèce de particules et on désigne par $f(t,x,v)$ la fonction de distribution des particules qui occupent au temps t la position x et qui sont animées d'une vitesse v. En négligeant les chocs et le champ magnétique, le système de Vlasov-Poisson s'écrit:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} + v.\nabla_x f + \nabla_x \phi . \nabla_v f = 0 & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2_x \times \mathbb{R}^2_v \quad (6) \\ \Delta_x \phi = g & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2_x \quad (7) \\ g = \displaystyle\int_{\mathbb{R}^2} f(t,x,v)\, dv & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2_x \quad (8) \\ E = \nabla_x \phi & \text{dans } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^2_x \quad (9) \end{cases}$$

ϕ, g et E représentent réspectivement le potentiel électrique, la densité de charge et le champ électrique.

On considère plus précisément le problème décrit par les équations (6), (7),(8) et (9) avec les conditions:

(10) $\quad f_{/t=0} = f_0$

(11) $\quad \lim\limits_{|x| \longrightarrow \infty} \nabla_x \phi = 0$

pour lequel on construit une solution "faible" $W^{1,p}$ $(5<p<+\infty)$ locale en temps puis globale en temps moyennant une condition supplémentaire sur la donnée initiale f_0, et ceci en s'inspirant de ce qui a été fait dans [5].

La preuve des résultats établis ici est basée essentiellement sur la méthode des caractéristiques et celle des approximations successives dans les chapitres 2 et 3.