Service des Thèses
Bibliothèque Universitaire

RESUME :

Nous présentons dans cette thèse des résultats sur la fonction $\sigma(n) = \sum_{d \text{ divise } n} d$, étudiée par RAMANUJAN, ERDÖS, NICOLAS et ROBIN.

A l'aide des nombres colossalement abondants nous montrons dans ce travail que, l'hypothèse de RIEMANN est équivalente à :

$\frac{\sigma(n)}{n \log\log n} < e^{\gamma}$ pour tout $n \geq 5041$ où γ est la constante d'EULER. ([ROB]).

Si l'hypothèse de RIEMANN est fausse alors :

$\sigma(n)/(n \log\log n) \leq \sigma(12)/(12 \log\log 12) = 2.5634$ pour tout $n \geq 7$.

Soit : $\sigma^{*}(n) = \sum_{\substack{d \text{ divise } n \\ (d,n/d)=1}} d$.

Nous introduisons les nombres σ^{*}-colossalement abondants à l'aide desquels nous montrons : $\sigma(n)/(\sigma^{*}(n) \log\log n) < e^{\gamma}$ pour $n \geq 17$.

Nous montrons aussi : $\sigma^{*}(n)/(n \log\log n) < 1.63601$ pour $n \geq 31$, sauf $\sigma^{*}(42)/(42 \log\log 42) = 1.733621242...$.

Soit $\sigma_k(n) = \sum_{d \text{ divise } n} d^k$ pour $0 < k < 1$

Nous donnons une démonstration plus simple que celle de GRONWALL dans [GRO] du résultat :

$$\limsup \left[\log(\sigma_k(n)/n^k) \times (\log\log n)/(\log n)^{1-k}\right] = 1/(1-k).$$

Nous montrons, contrairement au cas $k = 1$, qu'il existe une infinité de nombres colossalement abondants N tels que :

$$\log(\sigma_k(N)/N^k) \times (\log\log N)/(\log N)^{1-k} > 1/(1-k).$$