L'objet de ce travail est l'étude du système $S_{(\varepsilon,a)}$ suivant :

$$\left(S_{(\varepsilon,a)}\right) \qquad \begin{cases} \dot{x} = u(x,y) \\ \dot{y} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(y-\varphi(x)\right)^2 - a\psi(x) \end{cases}$$

avec : ε positif infiniment petit , a paramètre réel . u, φ et ψ des fonctions suffisamment régulières. Son originalité réside dans le fait que ce système admet une "équation" double $\left(y-\varphi(x)\right)^2 = 0$ qui se scinde en deux courbes i.proches pour $a \neq 0$ et $a\varepsilon^2 \approx 0$.

On sait que ce type de problème de perturbation singulière à deux paramètres s'étudie agréablement dans le cadre de l' "analyse non standard", car pour des données u, φ, et ψ standard on obtient tous les renseignements sur le comportement limite en fixant ε infiniment petit et en étudiant le système pour les valeurs fixées de a.

Dans certains cas et à travers une certaine échelle appropriée , peut apparaître une bifurcation pour les valeurs convenables de a qui s'accompagne éventuellement de trajectoires du type "Canards" découverts initialement par E. BENOIT, J.L. CALLOT, M.& F. DIENER [2].

Dans le chapitre 0 nous donnons une brève description des outils issus de la théorie des ensembles internes et la manière de s'en servir à travers quelques courts exemples et applications.

Dans le chapitre 1 nous comparerons brièvement les méthodes classiques et non classiques en usage dans des problèmes analogues, relatives à l'étude d'un système différentiel perturbé dans le plan.

Nous utiliserons l'exemple désormais historique des canards de l'équation de VAN DER POL pour illustrer la théorie des canards.

Dans le deuxième chapitre, nous développerons l'étude du système $S_{(\varepsilon,a)}$ à travers des changements d' échelles convenables.

Ci-après , nous présentons quelques tracés de trajectoires du système :

$$(1) \quad \begin{cases} \dot{x} = 1 \\ \dot{y} = \dfrac{1}{\varepsilon^2}\left(y - \dfrac{1}{3}x^3\right)^2 - a \end{cases}$$

exécutés sur micro-ordinateur obtenus pour $\varepsilon = 0.1$ et diverses valeurs de a indiquées sous les tracés .

Ce système servira comme premier exemple du chapitre (III).

Nous constatons que pour $\varepsilon = 0.1$ et $a << -0.1$ les trajectoires du champ (1.1) traversent la courbe lente (B_0) d'équation : $y = \frac{1}{3}x^3$ après avoir longé un segment de (B_0) selon les différentes valeurs du paramètre a inférieur à 1 (voir les figures de 1.a à 1.e).
Si $a \geq -0,1$ alors les trajectoires de (1) longent la cubique (B) une fois pour toute (voir figures 1.f à 1.h). Entre les deux types de comportements extrêmes (fig.1.a et 1.h) existent des cas pour a infiniment proche de la valeur - 0.1 où les trajectoires longent un segment standard de la sous variété lente (B) pour $y < \varphi(x)$, $x < 0$ jusqu'à l'origine , point critique de la courbe lente , puis un autre segment également standard pour $y > \varphi(x)$ et $x > 0$ (fig.de 1.e à 1.g) . Nous appelons Ce type de trajectoire **micro-canard** (voir fig. 1.e à 1.g).

Remarquons enfin que le phénomène "rideau" se déroule seulement pendant l'effet-micro-canard . Le rideau est légèrement ouvert dans (fig. 1.e & 1.g) et grand ouvert dans (fig. 1.f) .

C'est essentiellement l'apparition de ce phénomène " micro-canards" qui nous a motivé pour faire cette étude .

En général , une trajectoire du système $S(\varepsilon, a)$ qui arrive dans le halo de la sous variété (C) d'équation : $y = \varphi(x)$, peut éventuellement - selon les valeurs de a - longer (C) une fois pour toute, ou la traverser pour longer une droite quasi-verticale dans le sens des y positifs

Entre ces deux comportements extrêmes peut apparaître pour des valeurs très particulières de a le micro-canard accompagné du phénomène "rideau".

Enfin, nous terminons notre étude par un chapitre (III) consacré à des exemples particulièrement intéressants de systèmes du type : $S(\varepsilon, a)$.