N^0 d'ordre : **11/2021-D/MT**

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumedienne
Faculté des Mathématiques

Thèse de Doctorat en Sciences

présentée pour l'obtention du grade de docteur en : mathématiques

Spécialité : Géométrie

Par

Ahmed ZEGLAOUI

THÈME

GÉOMÉTRIE HESSIENNE ET GÉOMÉTRIE DE L'INFORMATION

Soutenu publiquement, le **08/04/2021**; devant le jury composé de :

M.	KESSI	Arezki	Professeur à l'U.S.T.H.B	Président
M.	AIT AMRANE	Yacine	Professeur à l'U.S.T.H.B	Directeur de thèse
M.	NGUIFFO BOYOM	Michel	Professeur à l'U. de Montpellier	Co-directeur de thèse
M.	BOUYAKOUB	Abdelkader	Professeur à l'U. d'Oran 1	Examinateur
M.	YOUSFATE	Abderrahmane	Professeur à l'U. de Sidi Bel Abbès	Examinateur

Remerciements

*Je ne peux présenter ce modeste travail sans avoir, au préalable, remercier les deux personnes ayant joué un rôle crucial dans son élaboration, j'ai nommé mes directeurs de thèse les professeurs **Aït Amrane Yacine** et **Michel Nguiffo Boyom**. Le premier a beaucoup payer de sa personne afin que ce manuscrit soit de meilleur qualité grâce à ses remarques et suggestions très précieuses. je ne saurais trop le remercier pour son aide. Le deuxième pour avoir m'avoir fait découvrir la géométrie de l'information et son lien avec la géométrie hessienne. Je le remercie infiniment pour le temps qui m'a consacré lors de chacune de mes visites à l'institut Montpelliérain Alexander Grothendieck.*

*Un grand merci au professeur **Kessi Arezki** pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de soutenance de cette thèse.*

*Le professeur **Bouyakoub Abdelkader** a été mon enseignant en graduation à l'université d'Oran Es-Senia, j'ai beaucoup appris grâce à lui et il m'a aidé pour avoir une bourse d'études. Pour ça et pour avoir accepter d'examiner ce manuscrit, je lui adresse mes remerciements les plus sincères.*

*Je remercie également le professeur **Yousfate Abderrahmane** de m'avoir fait l'honneur d'examiner ce travail et pour ses remarques et suggestions en lien avec la géométrie de l'information.*

*Pas mal de gratitude et un grand merci aux collègues et amis : **M. A. Boutiche**, **D. Smai**, **A. Zeghib**, **S. Bekkara**, **D. Massart**, **M. M. Henoune**, **D-E. Hamdaoui**, **D. Djebbouri**, **T. Djebbouri**, **A. A. Bouchentouf** pour leur soutien et encouragement.*

Merci à toute personne qui a contribué, de près ou de loin, à l'accomplissement de cette thèse et dont j'ai oublié de citer le nom.

Géométrie hessienne et géométrie de l'information

Résumé

Une structure hessienne est la donnée d'une métrique riemannienne sur une variété localement plate vérifiant l'équation de Codazzi. Un exemple de structure hessienne est celui de la structure hessienne définie sur un domaine de $\mathbb{R}^n$ à l'aide de la métrique de Fisher associée à un modèle statistique exponentiel. La métrique pseudo-riemanienne sous-jacente à une structure hessienne permet de définir la structure hessienne duale au sens de Amari-Chentsov. En plus de la courbure riemannienne, il existe une autre courbure sur une variété hessienne appelée la courbure hessienne.

Une structure de Poisson hessienne, sa structure duale et sa courbure hessienne sont définies par analogie au cas d'une structure hessienne, la variété de Poisson pseudo-riemannienne remplace la variété pseudo-riemannienne sous-jacente.

Les structures de Jacobi hessiennes généralisent les structures de Poisson hessiennes. Il s'agit de remplacer la structure de Poisson sous-jacente par une structure de Jacobi.

La donnée d'un modèle statistique paramétré par une variété différentiable permet, sous certaines conditions, de construire des exemples des structures citées ci-dessus.

Table des matières

Introduction

Ce modeste travail porte essentiellement sur la géométrie hessienne et ses ramifications, avec un accent mis sur le lien qu'a cette géométrie avec la géométrie de l'information. D'après Jean-Louis Koszul, Hirohiko Shima a été l'un des premiers à voir que la géométrie hessienne avait des connections inattendues avec d'autres domaines de recherche. Elle a profondément influencé des domaines tels que "la géométrie de l'information" et "la géométrie et la topologie des variétés localement plates hyperboliques".

Dans cette thèse, nous allons établir de nouveaux liens qu'a la géométrie hessienne avec d'autres domaines de recherche en géométrie différentielle, à savoir les variétés de Poisson, les algèbres de Lie et les variétés de Jacobi, ce qui va donner naissance à de nouvelles structures géométriques : les structures de Poisson hessiennes, les algèbres de Lie hessiennes et es structures de Jacobi hessiennes. Des exemples de ces structures pouvant être construites à l'aide de techniques empruntées à la géométrie de l'information.

Ce manuscrit est organisé comme suit.

Le premier chapitre est consacré à introduire les notions de bases : les variétés localement plates, métriques hessiennes, connexions duales, structures hessiennes de type Koszul, la courbure hessienne d'une variété hessienne. S'en suit le lien établi par Hirohiko Shima entre la géométrie hessienne et la géométrie de l'information à l'aide des modèles statistiques. On termine ce chapitre par un bref rappel de la cohomologie de Koszul-Vinberg, introduite par Michel Nguiffo Boyom, en remarquant au passage que la métrique hessienne d'une variété hessienne est un 2-cocycle du complexe de Koszul-Vinberg, appelé également complexe de Boyom, associé à la structure de variété localement plate sous-jacente.

Le deuxième chapitre est consacré aux variétés de Poisson hessiennes. On commence par introduire la notion de variété de Poisson localement plate. On montre qu'une telle variété est feuilletée par des variétés symplectiques localement plates. On définit également la cohomologie de Koszul-Vinberg d'une variété de Poisson localement plate. On introduit par la suite les variétés de Poisson-Codazzi. Pour cette nouvelle structure, on définit la structure de Poisson-Codazzi duale et la courbure hessienne. On établit les premières propriétés d'une variété de Poisson-Codazzi, notamment le fait qu'elle est feuilletée par des variétés symplectiques de Codazzi. On définit une variété de Poisson hessienne comme étant une variété de Poisson-Codazzi dont la connexion contravariante sous-jacente est plate. On établit les premières propriétés de cette nouvelle structure qui sont semblables à celles des variétés de Poisson-Codazzi. On termine ce chapitre par l'introduction de la version linéaire des structures de Poisson hessiennes, à savoir les algèbres de Lie hessiennes.

Le troisième chapitre présente une généralisation de la structure géométrique définie dans le deuxième chapitre. Ainsi, la notion de variété de Jacobi hessienne se veut comme généralisation naturelle de la notion de variété de Poisson hessienne. On commence par associer à une structure de Jacobi sur une variété pseudo-riemannienne un préalgèbroïde de Lie et une connexion de Levi-Civita contravariante analogue à celle d'une variété de Poisson pseudo-riemannienne. Nous étudions de près les deux cas particuliers où la structure de Jacobi est associée à une structure de contact, et à une structure localement conformément symplectique. On introduit les structures de Jacobi-Codazzi et on définit enfin les structures de Jacobi hessiennes comme une généralisation naturelle des structures de Poisson hessiennes.

Dans le quatrième et dernier chapitre, on considère un modèle statistique sur un espace mesuré paramétré par une variété différentiable. Dans le cas où l'information de Fisher associée à ce modèle est une métrique riemannienne, appelée alors métrique de Fisher, ceci induit une famille à un paramètre de structures de Codazzi sur la variété différentiable sous-jacente. On étudie les cas où cette dernière supporte une structure de Poisson ou une structure de Jacobi.

1

Structures hessiennes et géométrie de l'information

1.1 Variétés hessiennes

1.1.1 Définition et premières propriétés

Avant de parler des variétés hessiennes, on rappelle la notion d'une variété localement plate.

Définition 1.1.1 ***Variétés localement plates***
Une structure de jauge localement plate est la donnée d'un couple (M,∇) composé d'une variété différentiable M (de dimension n, $n \in \mathbb{N}^*$) et d'une connexion affine (covariante) ∇ dont la torsion T^∇ et la courbure R^∇ sont identiquement nulles.
On dit également que (M,∇) est une variété localement plate.

Un atlas affine sur une variété M est un atlas dont les changements de cartes sont des transformations affines entre ouverts de $\mathbb{R}^n$. Une carte de cet atlas est appelée une carte affine ou un système de coordonnées affine. Dans [12], H. Shima montre que la donnée d'une structure localement plate sur M est équivalente à la donnée d'un atlas affine sur M. En effet, il montre que si (M,∇) est une variété localement plate, alors en tout point de M il existe un système de coordonnées local $(U; x^1, ..., x^n)$ tel que

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}} \frac{\partial}{\partial x^j} = 0, \qquad \text{pour tous } 1 \leq i,j \leq n. \tag{1.1.1}$$

Ces systèmes forment un atlas affine sur M. Réciproquement, s'il existe un atlas affine sur M alors la connexion ∇, définie par les équations (1.1.1), définit une structure localement plate sur M.

Définition 1.1.2 ***Métriques hessiennes - variétés hessiennes***
Une métrique pseudo-riemannienne $\widetilde{g}$ sur une variété localement plate (M, ∇) est dite hessienne si, pour tout système de coordonnées affine $(U; x^1, ..., x^n)$ de (M, ∇), il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(U)$, appelée potentiel de $\widetilde{g}$ sur U relativement à ∇, telle que

$$\widetilde{g}_{ij} := \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}, \qquad \text{pour tous } 1 \leq i, j \leq n.$$

Si $\widetilde{g}$ est une métrique hessienne sur (M, ∇), on dit que $(\nabla, \widetilde{g})$ est une structure hessienne sur M ; on dit également que $(M, \nabla, \widetilde{g})$ est une variété hessienne.

Exemple 1.1.1 ***La structure hessienne standard sur $\mathbb{R}^n$***
Si on note ∇^n la connexion de Levi-Civita de la métrique riemannienne standard $\widetilde{g}_{\mathbb{R}^n}$ de $\mathbb{R}^n$, alors $(\nabla^n, \widetilde{g}_{\mathbb{R}^n})$ est une structure hessienne sur $\mathbb{R}^n$. Pour s'en convaincre, il suffit de prendre pour potentiel de $\widetilde{g}_{\mathbb{R}^n}$ sur $\mathbb{R}^n$ la fonction

$$\varphi : \left(x^1, ..., x^n\right) \longmapsto \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \left(x^i\right)^2.$$

On pourra appeler $(\nabla^n, \widetilde{g}_{\mathbb{R}^n})$ la structure hessienne standard sur $\mathbb{R}^n$.

Définition 1.1.3 ***Variétés de Codazzi***
Une structure de Codazzi sur M est la donnée d'un couple $(\nabla, \widetilde{g})$, composé d'une connexion affine sans torsion ∇ et d'une métrique pseudo-riemannienne $\widetilde{g}$ vérifiant ***l'équation de Codazzi :***

$$\nabla_X \widetilde{g}(Y, Z) = \nabla_Y \widetilde{g}(X, Z), \tag{1.1.2}$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$.
On dit également que $(M, \nabla, \widetilde{g})$ est une variété de Codazzi.

Exemple 1.1.2 *Soient $(M, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne et $\boldsymbol{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de la métrique $\widetilde{g}$. Le couple $(\boldsymbol{\nabla}, \widetilde{g})$ définit une structure de Codazzi sur M.*

Notation 1.1.1 *Soient $(M, \nabla, \widetilde{g})$ une variété hessienne et $\boldsymbol{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de la métrique $\widetilde{g}$. On note*

$$B = \boldsymbol{\nabla} - \nabla.$$

Les deux connexions ∇ et $\boldsymbol{\nabla}$ étant sans torsion implique que B est un champ de $(1,2)$-tenseurs symétriques.

La proposition suivante, due à H. Shima, montre, entre autre, qu'une variété de Codazzi dont la connexion affine sous-jacente est de courbure nulle, est une variété hessienne.

Proposition 1.1.1 *([12])*
Soient (M, ∇) une variété localement plate et $\widetilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne sur M. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. *La métrique $\widetilde{g}$ est une métrique hessienne.*
2. *La métrique $\widetilde{g}$ vérifie l'équation de Codazzi (1.1.2).*
3. *La métrique $\widetilde{g}$ vérifie l'identité suivante :*
$$\widetilde{g}\,(B_X Y, Z) = \widetilde{g}\,(Y, B_X Z)\,, \tag{1.1.3}$$
pour tous $X, Y, Z \in \chi\,(M)$.

Preuve. L'équivalence entre 2. et 3. découle immédiatement du fait que $\boldsymbol{\nabla}\widetilde{g} = 0$. Pour montrer l'équivalence entre les assertions 1. et 2., il suffit de la faire localement moyennant le choix d'un système de coordonnées affine $(U; x^1, ..., x^n)$; ainsi, si $\widetilde{g}$ est une métrique hessienne, il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^\infty\,(U)$ telle que $\widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^i \partial x^j}$, le lemme de Schwartz montre que

$$\begin{aligned}
\nabla_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x^j}}\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \frac{\partial \widetilde{g}_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \widetilde{g}_{ik}}{\partial x^j} \\
&= \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) - \frac{\partial^2}{\partial x^j \partial x^i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x^k}\right) = 0.
\end{aligned}$$

Réciproquement, pour tout j, on pose $h_j = \sum_{i=1}^n \widetilde{g}_{ij} dx^i$. D'après l'identité de Codazzi (1.1.2), on a

$$dh_j = \sum_{1 \le k < i \le n} \left(\frac{\partial \widetilde{g}_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \widetilde{g}_{kj}}{\partial x^i}\right) dx^k \wedge dx^i = 0.$$

Quitte à réduire le domaine de la carte U, on peut supposer que U est simplement connexe, ainsi et d'après le lemme de Poincaré, pour tout j, il existe une fonction φ_j telle que $h_j = d\varphi_j$. Posons alors $\mu = \sum_{j=1}^n \varphi_j dx^j$, cette forme différentielle est également fermée car

$$d\mu = \sum_{j=1}^n h_j \wedge dx^j = \sum_{1 \le k < i \le n} (\widetilde{g}_{ij} - \widetilde{g}_{ji})\, dx^i \wedge dx^j = 0.$$

En appliquant le lemme de Poincaré une seconde fois, on peut trouver une fonction φ telle que $\mu = d\varphi$. Nous avons donc

$$\varphi_j = \frac{\partial \varphi}{\partial x^j} \quad \text{et} \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} = \frac{\partial \varphi_j}{\partial x^i} = \widetilde{g}_{ij},$$

ce qui montre que $\widetilde{g}$ est une métrique hessienne. ■

Corollaire 1.1.1 *Soit* $(M, \nabla, \widetilde{g})$ *une variété hessienne, alors*

$$\widetilde{g}(B_X Y, Z) = \frac{1}{2}\nabla_X \widetilde{g}(Y, Z), \tag{1.1.4}$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Preuve. En utilisant le fait que $\boldsymbol{\nabla}\widetilde{g} = 0$ et l'identité (1.1.3), on trouve

$$\begin{aligned} \nabla_X \widetilde{g}(Y, Z) &= \widetilde{g}(B_X Y, Z) + \widetilde{g}(Y, B_X Z) \\ &= 2\widetilde{g}(B_X Y, Z), \end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$. ■

Définition 1.1.4 ***Courbure hessienne - tenseur hessien***
La courbure hessienne d'une variété hessienne $(M, \nabla, \widetilde{g})$ *est le champ de* $(1,3)$*-tenseurs* $\widetilde{Q}$ *défini par*

$$\widetilde{Q} = \nabla B,$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{Q}(X, Y, Z) = \nabla_X (B_Y Z) - B_{\nabla_X Y} Z - B_Y (\nabla_X Z),$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$.
Le tenseur hessien $\widetilde{\mathcal{Q}}$ *de* $(M, \nabla, \widetilde{g})$ *est défini par*

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(X, Y, Z, T) := \widetilde{g}\left(\widetilde{Q}(X, Y, Z), T\right),$$

pour tous $X, Y, Z, T \in \chi(M)$.

Remarque 1.1.1 *On note* $\widetilde{R}$ *la courbure de la métrique* $\widetilde{g}$ *(i.e., la courbure de la connexion de Levi-Civita* $\boldsymbol{\nabla}$ *de* $\widetilde{g}$*). Dans un système de coordonnées affine* $(U; x^1, ..., x^n)$ *sur* (M, ∇)*, si* $\widetilde{g}_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}$*, alors*

$$\widetilde{\mathcal{Q}}_{ijkl} := \widetilde{\mathcal{Q}}\left(\frac{\partial}{\partial x^i}, \frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}, \frac{\partial}{\partial x^l}\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial^4 \varphi}{\partial x^i \partial x^j \partial x^k \partial x^l} - \frac{1}{2}\sum_{r,s=1}^{n} \widetilde{g}^{rs} \frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^i \partial x^l \partial x^r}\frac{\partial^3 \varphi}{\partial x^j \partial x^k \partial x^s},$$

ce qui donne, en utilisant (1.1.4), l'identité

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(X, Y, Z, T) - \widetilde{\mathcal{Q}}(Y, X, Z, T) = 2\widetilde{g}\left(\widetilde{R}(X, Y) Z, T\right)$$

et les relations de symétrie suivantes :

$$\widetilde{\mathcal{Q}}(X, Y, Z, T) = \widetilde{\mathcal{Q}}(Z, Y, X, T) = \widetilde{\mathcal{Q}}(X, T, Z, Y) = \widetilde{\mathcal{Q}}(Z, T, X, Y) = \widetilde{\mathcal{Q}}(Y, Z, T, X),$$

pour tous $X, Y, Z, T \in \chi(M)$.

1.1.2 Structures hessiennes duales

Afin d'introduire la dualité de Amari-Chentsov pour les variétés hessiennes, on commence par le faire pour les domaines hessiens de $\mathbb{R}^n$. On note $(\mathbb{R}^n; x^1, ..., x^n)$ le système de coordonnées affine standard de $\mathbb{R}^n$.

Un domaine hessien de $\mathbb{R}^n$ est une variété hessienne dont la variété sous-jacente est un domaine (i.e., un ouvert connexe) borné Ω muni de la connexion plate standard ∇^n de $\mathbb{R}^n$. Soient $(\Omega, \nabla^n, \widetilde{g})$ un domaine hessien de $\mathbb{R}^n$ et φ un potentiel de la métrique hessienne $\widetilde{g}$. On note $\mathbf{i}_\Omega$ l'application $-d\varphi : \Omega \longrightarrow (\mathbb{R}^n)^*$, appelée le **gradient hessien** du domaine hessien $(\Omega, \nabla^n, \widetilde{g})$. On note $(\nabla^n)'$ la connexion plate standard de l'espace vectoriel dual $(\mathbb{R}^n)^*$ de $\mathbb{R}^n$ et $\left((\mathbb{R}^n)^*; x_1^{'}, ..., x_n^{'}\right)$ le système de coordonnées affine associé. On a

$$x_i^{'} \circ \mathbf{i}_\Omega = -\frac{\partial \varphi}{\partial x^i}, \qquad \text{pour tout } 1 \leq i \leq n.$$

Ainsi, la matrice jacobienne de $(-\mathbf{i}_\Omega)$ relativement aux systèmes de coordonnées affines standards de $\mathbb{R}^n$ et $(\mathbb{R}^n)^*$ n'est rien d'autre que la matrice hessienne de φ, c'est-à-dire la matrice associée à $\widetilde{g}$. Comme $\widetilde{g}$ est non dégénérée alors $\mathbf{i}_\Omega$ est une immersion et donc c'est un difféomorphisme local de Ω sur son image $\Omega' := \mathbf{i}_\Omega(\Omega)$. Si $\mathbf{i}_\Omega$ est un plongement alors Ω' est ouvert de $(\mathbb{R}^n)^*$.

Théorème 1.1.1 *([12])**Domaine hessien dual***
Sous les mêmes hypothèses et notations ci-dessus. Si ∇^* est la connexion affine définie sur Ω par

$$(\mathbf{i}_\Omega)_* \left(\nabla^*_X Y\right) = (\nabla^n)'_{(\mathbf{i}_\Omega)_* X} \left((\mathbf{i}_\Omega)_* Y\right),$$

pour tous $X, Y \in \chi(\Omega)$. On a :

1. *Si on note $\boldsymbol{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de la métrique $\widetilde{g}$, alors*

$$\nabla^* = 2\boldsymbol{\nabla} - \nabla^n.$$

2. *Si pour tout i on pose $x_i^* = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} = -x_i^{'} \circ \mathbf{i}_\Omega$, alors (Ω, ∇^*) est une variété localement plate et $(\Omega; x_1^*, ..., x_n^*)$ est un système de coordonnées affine relativement à ∇^*, c'est-à-dire $\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x_i^*}} \frac{\partial}{\partial x_j^*} = 0$. De plus, on a*

$$\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \delta_i^j \quad \text{et} \quad \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}, \frac{\partial}{\partial x_j^*}\right) = \widetilde{g}^{ij},$$

pour tous i, j.

3. *La connexion ∇^* est la connexion duale au sens de Amari-Chentsov de la connexion plate standard ∇^n, c'est-à-dire*
$$X\left(\widetilde{g}\left(Y,Z\right)\right)=\widetilde{g}\left(\nabla^n_XY,Z\right)+\widetilde{g}\left(Y,\nabla^*_XZ\right),$$
pour tous $X,Y,Z\in\chi\left(\Omega\right)$.

4. *Le couple $\left(\nabla^*,\widetilde{g}\right)$ est une structure hessienne sur Ω.*

Preuve. Comme $\mathbf{i}_\Omega$ est un difféomorphisme local, on peut trouver au voisinage de tout point de Ω un ouvert U de $\mathbb{R}^n$ contenu dans Ω sur lequel la restriction de $\mathbf{i}_\Omega$, que l'on note $\mathbf{i}$ (par abus de notation), réalise un difféomorphisme sur son image.

1. On a
$$\mathbf{i}_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)=-\sum_{j=1}^n\left(\widetilde{g}_{ij}\circ\mathbf{i}^{-1}\right)\frac{\partial}{\partial x_j^{'}}\qquad\text{et}\qquad\mathbf{i}_*^{-1}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^{'}}\right)=-\sum_{j=1}^n\widetilde{g}^{ij}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$
D'où
$$\begin{aligned}\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}&=\mathbf{i}_*^{-1}\left(\left(\nabla^n\right)'_{\mathbf{i}_*\left(\frac{\partial}{\partial x^i}\right)}\left(\mathbf{i}_*\left(\frac{\partial}{\partial x^j}\right)\right)\right)\\&=\mathbf{i}_*^{-1}\left(\sum_{k,l=1}^n\left(\widetilde{g}_{ik}\circ\mathbf{i}^{-1}\right)\frac{\partial\left(\widetilde{g}_{jl}\circ\mathbf{i}^{-1}\right)}{\partial x_k^{'}}\frac{\partial}{\partial x_l^{'}}\right)\\&=\sum_{k,l,r,s=1}^n\left(\widetilde{g}_{ik}\frac{\partial\widetilde{g}_{jl}}{\partial x^r}\widetilde{g}^{rk}\widetilde{g}^{sl}\right)\frac{\partial}{\partial x^s}\\&=\sum_{s=1}^n\left(\sum_{l=1}^n\widetilde{g}^{sl}\frac{\partial\widetilde{g}_{jl}}{\partial x^i}\right)\frac{\partial}{\partial x^s}.\end{aligned}$$
Ainsi, de la relation (1.1.4), on en déduit que
$$\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=2\sum_{s=1}^n\Gamma_{ij}^s\frac{\partial}{\partial x^s}=2\boldsymbol{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=\left(2\boldsymbol{\nabla}-\nabla^n\right)_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}.$$

2. De la relation
$$\mathbf{i}_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}\right)=-\frac{\partial}{\partial x_i^{'}},$$
on trouve
$$\nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x_i^*}}\frac{\partial}{\partial x_j^*}=\nabla^n_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}=0.$$

Ce qui montre que (Ω, ∇^*) est localement plate et que $(\Omega; x_1^*, ..., x_n^*)$ est un système de coordonnées affine relativement à ∇^*. Aussi, on a

$$\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \widetilde{g}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x^r}{\partial x_i^*}\frac{\partial}{\partial x^r}, \frac{\partial}{\partial x^j}\right) = \sum_{r=1}^{n} \widetilde{g}_{rj}\widetilde{g}^{ri} = \delta_i^j$$

et

$$\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}, \frac{\partial}{\partial x_j^*}\right) = \widetilde{g}\left(\sum_{r=1}^{n} \frac{\partial x^r}{\partial x_i^*}\frac{\partial}{\partial x^r}, \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial x^s}{\partial x_j^*}\frac{\partial}{\partial x^s}\right) = \sum_{r,s=1}^{n} \widetilde{g}^{ri}\widetilde{g}^{sj}\widetilde{g}_{rs} = \widetilde{g}^{ij}.$$

3. En utilisant l'identité (1.1.4), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right) &= 2\widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, B_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, 2\boldsymbol{\nabla}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) \\
&= \widetilde{g}\left(\nabla^n_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla^*_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right).
\end{aligned}$$

4. De la symétrie de la métrique $\widetilde{g}$ on trouve

$$d\left(\sum_{i=1}^{n} x^i dx_i^*\right) = \sum_{i=1}^{n} dx^i \wedge dx_i^* = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial x_i^*}{\partial x^j} dx^i \wedge dx^j = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \left(\widetilde{g}_{ij} - \widetilde{g}_{ji}\right) dx^i \wedge dx^j = 0.$$

D'après le lemme de Poincaré, il existe une fonction φ^* tel que $d\varphi^* = \sum_{i=1}^{n} x^i dx_i^*$. Par conséquent

$$x^i = \frac{\partial \varphi^*}{\partial x_i^*} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*} = \frac{\partial x^i}{\partial x_j^*} = \widetilde{g}^{ij} = \widetilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x_i^*}, \frac{\partial}{\partial x_j^*}\right).$$

D'où $\widetilde{g} = \nabla^*(d\varphi^*)$.

■

Remarque 1.1.2 *Sous les mêmes notations que dans la preuve ci-dessus, la fonction φ^* n'est rien d'autre que* ***la transformée de Legendre-Fenchel*** *de la fonction φ à une constante près. En effet, on a*

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*} = \widetilde{g}^{ij} = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^k \partial x^l}\frac{\partial x^k}{\partial x_i^*}\frac{\partial x^l}{\partial x_j^*} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_i^* \partial x_j^*} - \sum_{l=1}^{n} x_l^* \frac{\partial^2 x^l}{\partial x_i^* \partial x_j^*},$$

et d'un autre côté,

$$\frac{\partial^2}{\partial x_i^* \partial x_j^*}\left(\sum_{l=1}^{n} x^l x_l^*\right) = \frac{\partial}{\partial x_i^*}\left(x^j + \sum_{l=1}^{n} x_l^* \frac{\partial x^l}{\partial x_j^*}\right) = 2\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*} + \sum_{l=1}^{n} x_l^* \frac{\partial^2 x^l}{\partial x_i^* \partial x_j^*}.$$

En additionnant les deux identités ci-dessus, on obtient

$$\frac{\partial^2 \varphi^*}{\partial x_i^* \partial x_j^*} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^* \partial x_j^*}\left(-\varphi + \sum_{l=1}^{n} x^l x_l^*\right).$$

D'où

$$\varphi^* = -\varphi + \sum_{l=1}^{n} x^l x_l^* + \sum_{i=1}^{n} a^i x_i^* + a.$$

En dérivant par rapport à x_i^* *on trouve* $a^i = 0$*, d'où l'assertion.*

Corollaire 1.1.2 ***Dualité de Amari-Chentsov pour les structures hessiennes***
Soient $(M, \nabla, \widetilde{g})$ *une variété hessienne et* $\boldsymbol{\nabla}$ *la connexion de Levi-Civita de la métrique* $\widetilde{g}$*. Soit* ∇^* *la connexion affine sur* M *définie par*

$$\nabla^* = 2\boldsymbol{\nabla} - \nabla.$$

Alors on a :

1. *La coonexion* ∇^* *est la connexion duale au sens de Amari-Chentsov de* ∇ *relativement à la métrique* $\widetilde{g}$*, c'est-à-dire*

$$X\left(\widetilde{g}\left(Y, Z\right)\right) = \widetilde{g}\left(\nabla_X Y, Z\right) + \widetilde{g}\left(Y, \nabla_X^* Z\right), \tag{1.1.5}$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi\left(M\right)$*.*

2. *Le couple* (M, ∇^*) *est une variété localement plate.*
3. *Le couple* $(\nabla^*, \widetilde{g})$ *est structure hessienne sur* M*.*

Preuve. On peut démontrer le corollaire en utilisant les systèmes de coordonnées affines et appliquer le théorème ci-dessus, ici nous allons plutôt exposer une preuve intrinsèque.

1. En remarquant que $\nabla^* = \boldsymbol{\nabla} + B$ et en utilisant l'identité (1.1.4) on obtient

$$\begin{aligned} 2\widetilde{g}\left(Y, \nabla_X^* Z\right) &= 2\widetilde{g}\left(Y, \boldsymbol{\nabla}_X Z\right) + \nabla_X \widetilde{g}\left(Y, Z\right) \\ &= 2\widetilde{g}\left(Y, \boldsymbol{\nabla}_X Z\right) + X\left(\widetilde{g}\left(Y, Z\right)\right) - \widetilde{g}\left(\nabla_X Y, Z\right) - \widetilde{g}\left(Y, \nabla_X Z\right) \\ &= X\left(\widetilde{g}\left(Y, Z\right)\right) - \widetilde{g}\left(\nabla_X Y, Z\right) + \widetilde{g}\left(Y, \nabla_X^* Z\right). \end{aligned}$$

D'où l'identité (1.1.5).

2. Comme ∇ et $\boldsymbol{\nabla}$ sont sans torsion, alors

$$\begin{aligned} T^{\nabla^*}(X,Y) &= 2\left(\boldsymbol{\nabla}_X Y - \boldsymbol{\nabla}_Y X\right) - \left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right) - [X,Y] \\ &= 2[X,Y] - 2[X,Y] \\ &= 0. \end{aligned}$$

   D'un autre côté, l'égalité (1.1.5) montre que

$$\begin{aligned} \widetilde{g}\left(R^{\nabla^*}(X,Y)Z,T\right) &= -\widetilde{g}\left(Z,R^{\nabla}(X,Y)T\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

   On conclut que (M,∇^*) est une variété localement plate.

3. On a $B^* = \boldsymbol{\nabla} - \nabla^* = -B$, il suffit alors d'utiliser la troisième assertion de la proposition 1.1.1.

■

Définition 1.1.5 ***Structure hessienne duale***
La structure hessienne $(\nabla^*,\widetilde{g})$, donnée par le corollaire ci-dessus, est appelée la structure hessienne duale de la structure hessienne $(\nabla,\widetilde{g})$ sur M. La variété hessienne $(M,\nabla^*,\widetilde{g})$ est appelée la variété hessienne duale de $(M,\nabla,\widetilde{g})$.

1.1.3 Structures hessiennes de type Koszul

Proposition 1.1.2 *Soit ∇ une connexion affine sur M. Soit ϑ une 1-forme différentielle telle que $\widetilde{g} := \nabla\vartheta$ est une métrique pseudo-riemannienne. On a*

$$d\vartheta(X,Y) = \vartheta\left(T^{\nabla}(X,Y)\right)$$

et

$$\nabla_X\widetilde{g}(Y,Z) - \nabla_Y\widetilde{g}(X,Z) = \vartheta\left(\nabla_{T^{\nabla}(X,Y)}Z\right) - T^{\nabla}(X,Y)(\vartheta(Z)) - \vartheta\left(R^{\nabla}(X,Y)Z\right),$$

pour tous $X,Y,Z \in \chi(M)$.

Preuve. La métrique $\widetilde{g}$ étant symétrique, on en déduit que

$$\begin{aligned} d\vartheta(X,Y) - \vartheta\left(T^{\nabla}(X,Y)\right) &= X(\vartheta(Y)) - Y(\vartheta(X)) - \vartheta\left(\nabla_X Y - \nabla_Y X\right) \\ &= \widetilde{g}(X,Y) - \widetilde{g}(Y,X) \\ &= 0. \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned}\nabla_X \widetilde{g}(Y,Z) &= X(Y(\vartheta(Z))) - X(\vartheta(\nabla_Y Z)) - (\nabla_X Y)(\vartheta(Z)) \\ &\quad + \vartheta(\nabla_{\nabla_X Y} Z) - Y(\vartheta(\nabla_X Z)) + \vartheta(\nabla_Y(\nabla_X Z)),\end{aligned}$$

et la seconde identité en découle. ■

Corollaire 1.1.3 *Sous les mêmes hypothèses et notations que la proposition ci-dessus. Si* (M,∇) *est une variété localement plate, alors la* 1*-forme* ϑ *est fermée et* $(M,\nabla,\widetilde{g})$ *est une variété hessienne.*

Preuve. Découle immédiatement de la proposition ci-dessus et de la proposition 1.1.1.
■

Définition 1.1.6 ***Structures hessiennes de type Koszul***
Une variété hessienne $(M,\nabla,\widetilde{g})$ *est dite de type Koszul (ou de Koszul) s'il existe une* 1*-forme différentielle fermée* ϑ *sur* M *telle que*

$$\widetilde{g} = \nabla\vartheta,$$

c'est-à-dire

$$\widetilde{g} : (X,Y) \longmapsto X(\vartheta(Y)) - \vartheta(\nabla_X Y).$$

Dans le cas particulier où ϑ *est une forme exacte, on dit que* $(M,\nabla,\widetilde{g})$ *est une variété hessienne de type Koszul exacte. Auquel cas, toute primitive* φ *de* ϑ *est appelée un potentiel de* $(M,\nabla,\widetilde{g})$*. La métrique* $\widetilde{g}$ *est alors appelée le hessien (ou la différentielle seconde) de la fonction* φ *et on écrit*

$$\widetilde{g} = H_\nabla^\varphi : (X,Y) \longmapsto X(Y(\varphi)) - \nabla_X Y(\varphi).$$

Remarque 1.1.3 *Comme toute forme fermée est localement exacte, alors tout point de* M *admet un voisinage ouvert* U *sur lequel il existe une fonction* $\varphi \in C^\infty(U)$ *telle que* $\vartheta|_U = d\varphi$*, ce qui implique que* $\widetilde{g}|_U = \nabla d\varphi$*. Ainsi, moyennant le choix d'un système de coordonnées affine de* (M,∇)*, le couple* $(\nabla,\widetilde{g})$ *définit bien une structure hessienne sur* M*. On peut également remarquer que toute variété hessienne est localement une variété hessienne de Koszul exacte.*

1.2 Structures hessiennes et géométrie de l'information

Dans ce paragraphe, on va faire des rappels sur les domaines hessiens de $\mathbb{R}^n$ induits par certains modèles statistiques. Un modèle statistique étant une famille de distributions de probabilité paramétrée par les éléments du domaine de $\mathbb{R}^n$ sous-jacent. Les références sont [3], [10], [11].

Soit (Σ, μ) un espace mesuré (la mesure μ étant supposée positive). Rappelons qu'une distribution de probabilité p sur (Σ, μ) est une fonction mesurable positive $p : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ vérifiant

$$\int_{\Sigma} p(\sigma)\, d\mu(\sigma) = 1.$$

L'espérance mathématique, ou la moyenne, d'une fonction $f : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}$ relativement à la distribution p est définie par

$$E_p(f) := \int_{\Sigma} f(\sigma)\, p(\sigma)\, d\mu(\sigma).$$

Définition 1.2.1 ***Modèles statistiques sur un domaine de*** $\mathbb{R}^n$
Soient (Σ, μ) un espace mesuré et Θ un domaine de $\mathbb{R}^n$. Un modèle statistique P sur (Σ, μ) (paramétré par Θ) est une application $P : \Sigma \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}_+$ telle que :

1. *Pour tout $\sigma \in \Sigma$, $(P_\sigma : x \longmapsto P(\sigma, x)) \in \mathcal{C}^\infty(\Theta)$.*
2. *Pour tout $x \in \Theta$, $(P_x : \sigma \longmapsto P(\sigma, x))$ est une distribution de probabilité sur (Σ, μ).*

Dans la suite de cette section, on suppose que toutes les fonctions $F : \Sigma \times \Theta \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiables par rapport à x et intégrables par rapport à σ vérifient aussi que pour tout $x \in \Theta$ et $i = 1, ..., n$,

$$\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\int_{\Sigma} F(\sigma, x)\, d\mu(\sigma)\right) = \int_{\Sigma} \frac{\partial F}{\partial x^i}(\sigma, x)\, d\mu(\sigma). \tag{1.2.1}$$

Exemple 1.2.1 ***Modèles exponentiels***
Un modèle statistique P sur (Σ, μ) est appelé modèle exponentiel s'il existe des fonctions $C, F_1, ..., F_n$ sur Σ et une fonction φ sur Θ telles que

$$P(\sigma, x) = \exp\left\{C(\sigma) - \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} x^i F_i(\sigma)\right\},$$

pour tous $\sigma \in \Sigma, x \in \Theta$.
Dans le cas particulier où (Σ, μ) est la droite réelle munie de la mesure de Lebesgue, $\Theta =$

$\mathbb{R} \times]0, +\infty[$ *: le demi-plan de Poincaré et*

$$\begin{array}{lll} F_1(\sigma) = \sigma^2, & x^1 = \frac{a}{\kappa^2}, & x^2 = \frac{1}{2\kappa^2}, \\ F_2(\sigma) = \sigma, & C = 0, & \varphi(x^1, x^2) = \frac{(x^1)^2}{4x^2} + \frac{1}{2}\ln\frac{\pi}{x^2}, \end{array}$$

on retrouve le modèle normal, c'est-à-dire le modèle composé de toutes les lois normales sur la droite réelle. Ce modèle peut être paramétré par la moyenne a et l'écart type κ.

Définition 1.2.2 ***Information de Fisher***
Sous les mêmes hypothèses et notations ci-dessus, pour tout $\sigma \in \Sigma$ on pose $l_\sigma = \ln P_\sigma$ et pour tout $x \in \Theta$ on pose

$$\tilde{g}_{ij}(x) := E_x\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}\right) := \int_\Sigma \frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}(x)\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}(x)\, P_x(\sigma)\, d\mu(\sigma), \text{ pour tous } 1 \leq i, j \leq n.$$

Le champ de tenseurs $\tilde{g}$ défini par

$$\tilde{g}_x(u, v) := \sum_{1 \leq i,j \leq n} u^i v^j \tilde{g}_{ij}(x)$$

est appelé l'information de Fisher associée au modèle P. La matrice $(\tilde{g}_{ij}(x))_{1 \leq i,j \leq n}$ est appelée la matrice de l'information de Fisher, ou la matrice de Fisher, associée à P au point $x \in \Theta$.

Remarque 1.2.1 *En utilisant successivement la formule (1.2.1), on trouve*

$$0 = \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\int_\Sigma P_\sigma(x)\, d\mu(\sigma)\right) = \int_\Sigma \frac{\partial P_\sigma}{\partial x^i}(x)\, d\mu(\sigma) = \int_\Sigma \frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}(x)\, P_\sigma(x)\, d\mu(\sigma)$$

et

$$0 = \int_\Sigma \frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^j \partial x^i}(x)\, P_\sigma(x)\, d\mu(\sigma) + \int_\Sigma \frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}(x)\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}(x)\, P_\sigma(x)\, d\mu(\sigma).$$

D'où

$$E_x\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\right) = 0$$

et

$$\tilde{g}_{ij}(x) = -E_x\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^i \partial x^j}\right).$$

Par ailleurs, comme

$$\tilde{g}_x(u, u) = \int_\Sigma \left(\sum_{i=1}^n u^i \frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}(x)\right)^2 P_\sigma(x)\, d\mu(\sigma) \geq 0,$$

alors l'information de Fisher est symétrique et positive.

Définition 1.2.3 ***Métrique de Fisher***
Dans le cas où l'information de Fisher $\tilde{g}$ est partout non dégénérée, on l'appelle la métrique de Fisher associée au modèle P.

Remarque 1.2.2 *Si l'information de Fisher $\tilde{g}$ est une métrique de Fisher, alors $(\Theta, \tilde{g})$ est une variété riemanienne induite par le modèle statistique P.*

On se place dans le cas où $\tilde{g}$ est une métrique de Fisher, on a les résultats suivants.

Proposition 1.2.1 *Les symboles de Christoffel de la connexion de Levi-Civita $\boldsymbol{\nabla}$ de $\tilde{g}$ sont données par*

$$\left(\Gamma_{ij}^k\right)_x = \sum_{s=1}^n \tilde{g}^{ks}(x)\left(E_x\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^s}\right) + \frac{1}{2}E_x\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^s}\right)\right).$$

De plus, si pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit la connexion affine ∇^t sur Θ par

$$\left(\Gamma_{ij}^k(t)\right)_x = \sum_{s=1}^n \tilde{g}^{ks}(x)\left(E_x\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^s}\right) + \frac{1-t}{2}E_x\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^s}\right)\right),$$

alors ∇^{-t} est la connexion duale de ∇^t relativement à la métrique de Fisher $\tilde{g}$.

Preuve. Pour tous $1 \leq i, j, k \leq n$ et pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note

$$\Gamma_{ijk}(t) = \tilde{g}\left(\nabla^t_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right).$$

Il vient que

$$\Gamma_{ij}^k(t) = \sum_{s=1}^n \tilde{g}^{ks}\Gamma_{ijs}(t).$$

Comme

$$\frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^k} = E\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^k \partial x^i}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}\right) + E\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^k \partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\right) + E\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^k}\right),$$

alors

$$\Gamma_{ijk}(0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \tilde{g}_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial \tilde{g}_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial \tilde{g}_{ij}}{\partial x^k}\right) = E\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^i \partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^k}\right) + \frac{1}{2}E\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^j}\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^k}\right).$$

On a également

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(\nabla^t_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right) + \tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \nabla^{-t}_{\frac{\partial}{\partial x^i}}\frac{\partial}{\partial x^k}\right) &= \Gamma_{ijk}(t) + \Gamma_{ikj}(-t) \\ &= \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\tilde{g}\left(\frac{\partial}{\partial x^j}, \frac{\partial}{\partial x^k}\right)\right),\end{aligned}$$

ce qui montre que ∇^{-t} est la connexion duale de ∇^t relativement à $\tilde{g}$. ■

Proposition 1.2.2 ***Structure hessienne induite par un modèle exponentiel***
Soit P le modèle exponentiel

$$P(\sigma, x) = \exp\left\{C(\sigma) - \varphi(x) + \sum_{i=1}^{n} x^i F_i(\sigma)\right\}.$$

Si la matrice hessienne de φ est partout définie positive alors $\left(\Theta, \nabla^1, \tilde{g}\right)$ est un domaine hessien.

Preuve. On a

$$\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^i}(x) = F_i(\sigma) - \frac{\partial \varphi}{\partial x^i}(x) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^i \partial x^j}(x) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}(x).$$

D'où

$$\Gamma_{ijk}(1) = E\left(\frac{\partial^2 l_\sigma}{\partial x^i \partial x^j} \frac{\partial l_\sigma}{\partial x^k}\right) = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j} E\left(\frac{\partial l_\sigma}{\partial x^k}\right) = 0$$

et

$$\tilde{g}_{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Ainsi, $\left(\Theta, \nabla^1\right)$ est une variété plate et $\tilde{g}$ est une métrique hessienne sur $\left(\Theta, \nabla^1\right)$. ∎

1.3 La cohomologie de Boyom

Rappelons la notion de cohomolgie de Boyom, notion introduite par M. Nguiffo Boyom dans [10]. On va se restreindre au cas où le corps de base est le corps des nombres réels.

1.3.1 KV-algèbres et modules de Boyom

Définition 1.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une $\mathbb{R}$-algèbre dont le produit est noté "$\cdot$". On dit que $(\mathcal{A}, \cdot)$ est une algèbre de Koszul-Vinberg, en abrégé : une KV-algèbre, si pour tous $a, b, c \in \mathcal{A}$ on a*

$$a \cdot (b \cdot c) - (a \cdot b) \cdot c - b \cdot (a \cdot c) + (b \cdot a) \cdot c = 0.$$

Les KV-algèbres sont parfois appelées les algèbres symétriques à gauche.

Remarque 1.3.1 *Soit $\mathcal{A}$ une KV-algèbre. Le commutateur $[.,.]$ du produit de $\mathcal{A}$ (c'est-à-dire $[a, b] := a \cdot b - b \cdot a$) définit une structure d'algèbre de Lie sur $\mathcal{A}$. On dit que $(\mathcal{A}, [.,.])$ est l'algèbre de Lie associée à la KV-algèbre $(\mathcal{A}, \cdot)$.*

Exemple 1.3.1 ***La KV-algèbre associée à une variété localement plate***
En plus des algèbres associatives, un exemple remarquable d'une KV-algèbre est celui de l'espace vectoriel des champs de vecteurs $\chi(M)$ *au-dessus d'une variété localement plate* (M, ∇) *muni du produit*

$$(X, Y) \longmapsto X \cdot Y := \nabla_X Y.$$

En effet, on a

$$X \cdot (Y \cdot Z) - (X \cdot Y) \cdot Z - Y \cdot (X \cdot Z) + (Y \cdot X) \cdot Z = R^{\nabla}(X, Y) Z - \nabla_{T^{\nabla}(X,Y)} Z = 0.$$

Le commutateur de cette KV-algèbre n'est rien d'autre que le crochet de Lie usuel sur les champs de vecteurs au-dessus de la variété M*.*

Exemple 1.3.2 ***La KV-algèbre associée à une algèbre de Lie symplectique***
Rappelons qu'une structure d'algèbre de Lie symplectique est la donnée d'un triplet $(\mathcal{G}, [.,.], \omega)$*, où* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *est une algèbre de Lie (réelle ou complexe) et* ω *est une forme bilinéaire alternée et non dégénérée vérifiant*

$$\omega(u, [v, w]) + \omega(v, [w, u]) + \omega(w, [u, v]) = 0,$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$*. Sur l'algèbre de Lie symplectique* $(\mathcal{G}, [.,.], \omega)$*, on considère l'application bilinéaire* $\cdot : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *définie par*

$$\omega(u \cdot v, w) = \omega([u, w], v),$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$*. L'on définit ainsi une structure de KV-algèbre sur* $\mathcal{G}$ *naturellement associée à* $(\mathcal{G}, [.,.], \omega)$*. Remarquons au passage que l'algèbre de Lie sous-jacente à* $(\mathcal{G}, [.,.], \omega)$ *est l'algèbre de Lie associée à cette KV-algèbre.*

On rappelle également la notion de module de Boyom.

Définition 1.3.2 *Soient* W *un* $\mathbb{R}$*-espace vectoriel et* $\mathcal{A}$ *une KV-algèbre tels qu'il existe deux applications* $\mathbb{R}$*-bilinéaires :*

$$\begin{array}{ccc} W \times \mathcal{A} & \longrightarrow & W \\ (w, a) & \longmapsto & wa \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccc} \mathcal{A} \times W & \longrightarrow & W \\ (a, w) & \longmapsto & aw \end{array},$$

appelées respectivement, action à droite et action à gauche de $\mathcal{A}$ *sur* W*. On dit que* W *est un bimodule de Boyom sur* $\mathcal{A}$ *si*

$$(a \cdot b) w - a(bw) - (b.a) w + b(aw) = 0 \text{ et } (aw) b - a(wb) - (wa) b + w(a \cdot b) = 0,$$

pour tous $w \in W, a, b \in \mathcal{A}$.
On dit que W est un module de Boyom à droite (resp. à gauche) sur $\mathcal{A}$ si l'action à gauche (resp. à droite) de $\mathcal{A}$ sur W est triviale.
On appelle élément de Jacobi d'un module de Boyom W sur $\mathcal{A}$ tout élément $w \in W$ vérifiant $(a \cdot b)\, w - a\,(bw) = 0$, pour tous $(a, b) \in \mathcal{A} \times \mathcal{A}$. On note $J\,(W)$ le sous-espace vectoriel des éléments de Jacobi de W.

Exemple 1.3.3 *L'espace vectoriel $\mathcal{C}^\infty\,(M)$ est un module de Boyom à gauche sur la KV-algèbre $(\chi\,(M)\,, \nabla)$ via l'action de dérivation usuelle $(X, \varphi) \longmapsto \mathcal{L}_X \varphi := X\,(\varphi)$. Ceci est justifié par le fait que la connexion ∇ est sans torsion.*

Remarque 1.3.2 *Une KV-algèbre $\mathcal{A}$ est un bimodule de Boyom sur elle même. Le sous-espace vectoriel $J\,(\mathcal{A})$ des éléments de Jacobi de $\mathcal{A}$ est une algèbre associative (et donc une KV-algèbre) qu'on appelle l'algèbre de Jacobi de la KV-algèbre $\mathcal{A}$.*

Exemple 1.3.4 *L'algèbre de Jacobi $J\,(\chi\,(M))$ de la KV-algèbre $(\chi\,(M)\,, \nabla)$ est l'ensemble des transformations infinitésimales affines de la variété M. L'ensemble des champs de vecteurs complets appartenant à $J\,(\chi\,(M))$ est un sous-espace vectoriel de dimension finie de $J\,(\chi\,(M))$. En particulier, si M est une variété compacte alors $J\,(\chi\,(M))$ est de dimension finie. Le groupe de Lie simplement connexe, dont $(J\,(\chi\,(M))\,, [.,.])$ est l'algèbre de Lie, admet une structure de jauge bi-invariante localement plate.*

1.3.2 La cohomologie de Boyom

La cohomologie de Hochschild et la cohomologie de Chevally-Eilenberg contrôlent, entre autre, les déformations et les extensions des algèbres associatives et des algèbres de Lie respectivement. Dans le cas d'une algèbre qui n'est ni associative, ni une algèbre de Lie, il est facile en général, de définir la notion de module sur cette algèbre mais il n'est pas du tout évident de définir des cohomologies dessus. Le cas particulier des algèbres de Koszul-Vinberg en est une parfaite illustration. En 1968, A. Nijenhuis donne une première définition de la cohomologie d'une KV-algèbre à l'aide de la cohomologie de Chevally-Eilenberg de l'algèbre de Lie définie par le commutateur du produit de ladite KV-algèbre. Une définition intrinsèque de cette cohomologie a été donnée par M. Nguiffo Boyom dans [10], dont l'énoncé est le suivant.

Définition 1.3.3 *Soient $(\mathcal{A}, \cdot)$ une KV-algèbre et W un bimodule de Boyom sur $\mathcal{A}$. Pour tout entier $q \geq 1$, on note $\mathbf{C}^q_B\,(\mathcal{A}, W) := L_q\,(\mathcal{A}, W)$: l'espace vectoriel des applications*

q-linéaires sur $\mathcal{A}$ à valeurs dans W, on munit $\mathbf{C}_B^q(\mathcal{A}, W)$ d'une structure de bimodule de Boyom définie par les actions

$$(af)(a_1, ..., a_q) = a(f(a_1, ..., a_q)) - \sum_{i=1}^{q} f(a_1, ..., a \cdot a_i, ..., a_q) \ \ \text{et} \ \ (fa)(a_1, ..., a_q) = (f(a_1, ..., a_q))\, a.$$

On définit également l'application linéaire $\delta_q : \mathbf{C}_B^q(\mathcal{A}, W) \longrightarrow \mathbf{C}_B^{q+1}(\mathcal{A}, W)$ par

$$\delta_q f(a_1, ..., a_{q+1}) = \sum_{i=1}^{q} (-1)^i \left\{ (f a_{q+1})(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_q, a_i) + (a_i f)(a_1, ..., \hat{a}_i, ..., a_{q+1}) \right\}.$$

On complète le complexe en posant $\mathbf{C}_B^q(\mathcal{A}, W) = 0$ pour $q < 0$, $\mathbf{C}_B^0(\mathcal{A}, W) = J(W)$ et $\delta_0 w : a \longmapsto wa - aw$.
Comme $\delta_{q+1} \circ \delta_q = 0$, pour tout $q \in \mathbb{Z}$, ceci définit un complexe de cochaines $(\mathbf{C}_B^q(\mathcal{A}, W), \delta_q)$ dont la cohomologie est appelée la cohomologie de Boyom de la KV-algèbre $\mathcal{A}$ à coefficients dans W. Pour tout q, on note $Z_B^q(\mathcal{A}, W) = \ker \delta_q$: l'ensemble des q-cocycles, $B_B^q(\mathcal{A}, W) = \operatorname{Im} \delta_{q-1}$: l'ensemble des q-cobords et $H_B^q(\mathcal{A}, W)$ le $q^{\text{ième}}$ groupe de cohomologie de Boyom de $\mathcal{A}$ à coefficients dans le bimodule de Boyom W sur $\mathcal{A}$.
On appelle la cohomologie de Boyom de $\mathcal{A}$ la cohomologie de Boyom de $\mathcal{A}$ à coefficients dans lui même ; pour tout q, on note $H_B^q(\mathcal{A}) := H_B^q(\mathcal{A}, \mathcal{A})$.

Exemple 1.3.5 *[10]Si $\mathcal{A} = \chi(M)$ est la KV-algèbre associée à une variété localement plate (M, ∇), alors $H_B^1(\mathcal{A}) = 0$. En effet, si $\Phi \in Z_B^1(\mathcal{A})$ alors $\Phi(\nabla_X Y) = \nabla_X(\Phi(Y)) + \nabla_{\Phi(X)} Y$, ainsi $\Phi([X, Y]) = [X, \Phi(Y)] + [\Phi(X), Y]$, ce qui montre que Φ est une dérivation de l'algèbre de Lie des champs vecteurs, par conséquent, il existe $\zeta \in \chi(M)$ tel que $\Phi(X) = [\zeta, X] = \delta_0 \zeta(X)$.*

Exemple 1.3.6 *On donne un exemple de calcul de la cohomologie de Boyom d'une KV-algèbre associée à une algèbre de Lie symplectique (exemple 1.3.2). L'espace vectoriel $\mathcal{A} = \mathbb{R}^4$ dont la base usuelle (ou canonique) sera notée $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$, muni du crochet de Lie $[.,.]$ défini par $[e_1, e_2] = e_3$ et les autres sont tous nuls, et de la forme symplectique $\omega = e^1 \wedge e^3 + e^2 \wedge e^4$, où $\{e^1, e^2, e^3, e^4\}$ désigne la base duale de la base usuelle de $\mathbb{R}^4$, est une algèbre de Lie symplectique. La loi "$\cdot$" de la KV-algèbre $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ associée à cette dernière structure est définie par*

$$u \cdot v = (u_1, u_2, u_3, u_4) \cdot (v_1, v_2, v_3, v_4) := (0, 0, -u_2 v_1, u_1 v_1),$$

pour tous $u, v \in \mathbb{R}^4$. On a $J(\mathbb{R}^4) = \mathbb{R}^4$ car $(\mathbb{R}^4, \cdot)$ est une algèbre associative, et on a $H_B^0(\mathbb{R}^4) = \{(0,0)\} \times \mathbb{R}^2 \cong \mathbb{R}^2$. Par ailleurs, des calculs longs mais assez faciles montrent que

$$H_B^1(\mathbb{R}^4) \cong \mathbb{R}^4 \qquad \text{et} \qquad H_B^2(\mathbb{R}^4) \cong \mathbb{R}^{31}.$$

Afin d'introduire la cohomologie de Boyom d'une variété localement plate (M, ∇), rappelons, voir [10], que $(C_B^*(M), \delta)$ est un complexe de Boyom contenu dans le complexe de Boyom $(\mathbf{C}_B^*(\chi(M), \mathcal{C}^\infty(M)), \delta)$, où pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, on a $C_B^q(M) = \mathcal{T}^q(M)$: le $\mathcal{C}^\infty(M)$-module des champs de q-tenseurs covariants sur la variété M, et $C_B^0(M) = J(\mathcal{C}^\infty(M))$: l'ensemble des fonctions affines sur (M, ∇).

Définition 1.3.4 *[10]* ***La cohomologie de Boyom d'une variété localement plate*** *La cohomologie de Boyom de la variété localement plate (M, ∇), que l'on note $H_B^*(M)$, est la cohomologie de Boyom du complexe de Boyom $(C_B^*(M), \delta)$.*

De la définition ci-dessus, on remarque qu'une variété localement plate (M, ∇) dispose, en plus de la cohomologie de de Rham $H_{dR}^*(M)$, d'une deuxième cohomologie. Nous allons voir, pour les groupes de cohomologie d'ordres $0, 1, 2$, le lien entre ces deux cohomologies.

Remarque 1.3.3 *Comme $C_B^1(M) = \Omega^1(M)$ et que, du fait que la connexion ∇ est sans torsion, on a*

$$d\theta(X, Y) = \delta_1\theta(Y, X) - \delta_1\theta(X, Y),$$

il vient que

$$Z_B^1(M) \subset Z_{dR}^1(M).$$

Par ailleurs, comme $C_B^0(M) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ et que $(-\delta_0)$ n'est rien d'autre que la restriction de la différentielle extérieure d à $C_B^0(M)$, alors $H_B^0(M) = H_{dR}^0(M)$ et

$$B_B^1(M) \subset B_{dR}^1(M).$$

De plus, comme $B_{dR}^1(M) \cap Z_B^1(M) = B_B^1(M)$ alors le groupe $H_B^1(M)$ s'injecte canoniquement dans $H_{dR}^1(M)$.

Pour les groupes de cohomologie d'ordre deux, on a le résultat suivant.

Proposition 1.3.1 *Soit (M, ∇) une variété localement plate. L'application*

$$\begin{array}{rccc} Alt: & C_B^2(M) & \longrightarrow & \Omega^2(M) \\ & \Phi & \longmapsto & Alt(\Phi), \end{array}$$

définie par

$$Alt(\Phi) : (X, Y) \longmapsto \Phi(X, Y) - \Phi(Y, X),$$

induit un morphisme naturel de $H_B^2(M)$ dans $H_{dR}^2(M)$.

Preuve. On rappelle que

$$\delta_2\Phi(X,Y,Z) = Y(\Phi(X,Z)) - X(\Phi(Y,Z)) + \Phi([X,Y],Z) + \Phi(Y,\nabla_X Z) - \Phi(X,\nabla_Y Z).$$

Comme

$$\begin{aligned} X(Alt(\Phi)(Y,Z)) - Alt(\Phi)([X,Y],Z) &= X(\Phi(Y,Z)) - \Phi([X,Y],Z) \\ &\quad -X(\Phi(Z,Y)) + \Phi(Z,[X,Y]), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} d(Alt(\Phi))(X,Y,Z) &= -\delta_2\Phi(X,Y,Z) - \delta_2\Phi(Y,Z,X) - \delta_2\Phi(Z,X,Y) \\ &\quad +\Phi(Z,[X,Y]) + \Phi(X,[Y,Z]) + \Phi(Y,[Z,X]) \\ &\quad +\Phi(Y,\nabla_X Z) - \Phi(X,\nabla_Y Z) + \Phi(Z,\nabla_Y X) \\ &\quad -\Phi(Y,\nabla_Z X) + \Phi(X,\nabla_Z Y) - \Phi(Z,\nabla_X Y). \end{aligned}$$

La connexion ∇ étant sans torsion, ceci montre que

$$d(Alt(\Phi))(X,Y,Z) = -\delta_2\Phi(X,Y,Z) - \delta_2\Phi(Y,Z,X) - \delta_2\Phi(Z,X,Y).$$

Ainsi, si $\Phi \in Z_B^2(M)$ alors $Alt(\Phi) \in Z_{dR}^2(M)$.
Supposons à présent que $\Phi \in B_B^2(M)$, ceci implique l'existence d'une 1-forme θ sur M telle que $\Phi = \delta_1\theta$, c'est-à-dire

$$\Phi(X,Y) = \theta(\nabla_X Y) - X(\theta(Y)),$$

pour tous $X, Y \in \chi(M)$. D'où, de la symétrie de ∇, on déduit que

$$\begin{aligned} Alt(\Phi)(X,Y) &= \theta([X,Y]) - X(\theta(Y)) + Y(\theta(X)) \\ &= -d\theta(X,Y). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $Alt(\Phi) \in B_{dR}^2(M)$. ■

Remarque 1.3.4 *Soit (M,∇) une variété localemet plate. Dire que $(M,\nabla,\widetilde{g})$ est une variété hessienne est équivaut à dire que $\widetilde{g}$ est un 2-cocycle du complexe de Boyom associé à (M,∇). Dans le cas particulier où $\widetilde{g}$ est un 2-cobord ceci est équivaut à dire que $(M,\nabla,\widetilde{g})$ est une variété hessienne de type Koszul.*

2

Variétés de Poisson hessiennes

2.1 Variétés de Poisson localement plates

2.1.1 Définition et premières propriétés

Afin d'introduire la notion de variété de Poisson localement plate, on commence par un bref rappel de la notion de connexion (ou dérivée) contravariante associée à un champ de bivecteurs π au-dessus de la variété M ; cette notion a été introduite par I. Vaisman dans [13] puis développée par L. R. Fernandes dans [8].

Dans tout ce qui suit, on désigne par π un champ de bivecteurs sur M. Au champ de bivecteurs π est associé naturellement l'algébroïde alterné $(T^*M, \sharp_\pi, [.,.]_\pi)$, où $\sharp_\pi : T^*M \longrightarrow TM$ est le morphisme de fibrés vectoriels (couvrant l'identité de M) défini par $\beta\left(\sharp_\pi(\alpha)\right) = \pi(\alpha, \beta)$, et $[.,.]_\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ est le crochet de Koszul associé à π défini par

$$[\alpha, \beta]_\pi := \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha - d\left(\pi(\alpha, \beta)\right) = i_{\sharp_\pi(\alpha)}d\beta - i_{\sharp_\pi(\beta)}d\alpha + d\left(\pi(\alpha, \beta)\right),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.
Une connexion contravariante D sur (M, π) est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire $D : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ vérifiant :

$$D_{\varphi\alpha}\beta = \varphi D_\alpha\beta \qquad \text{et} \qquad D_\alpha(\varphi\beta) = \left(\sharp_\pi(\alpha)\varphi\right)\beta + \varphi D_\alpha\beta,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.
La torsion T^D d'une connexion contravariante D est l'application $\mathcal{C}^\infty(M)$-bilinéaire $T^D : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ définie par

$$T^D(\alpha, \beta) = D_\alpha\beta - D_\beta\alpha - [\alpha, \beta]_\pi,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. La connexion D est dite symétrique, ou sans torsion, si $T^D = 0$. La courbure R^D d'une connexion contravariante D est l'application $R^D : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ définie par

$$R^D(\alpha, \beta)\gamma = D_\alpha(D_\beta \gamma) - D_\beta(D_\alpha \gamma) - D_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma,$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. La connexion D est dite plate, ou de courbure nulle, si $R^D = 0$.

Définition 2.1.1 *On dit que (M, π, D) est une* ***variété presque de Poisson localement plate*** *si D est, à la fois, symétrique et plate.*
Une ***variété de Poisson localement plate*** *est une variété presque de Poisson localement plate (M, π, D) dont la connexion contravariante sous-jacente est une connexion de Poisson, c'est-à-dire $D\pi = 0$.*

Remarque 2.1.1 *Si (M, π, D) est une variété de Poisson localement plate, alors (M, π) est une variété de Poisson. En effet, comme D est sans torsion alors*

$$-[\pi, \pi](\alpha, \beta, \gamma) = D\pi(\alpha, \beta, \gamma) + D\pi(\beta, \gamma, \alpha) + D\pi(\gamma, \alpha, \beta), \tag{2.1.1}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Ainsi, $D\pi = 0$ implique que $[\pi, \pi] = 0$.

Exemple 2.1.1 ***Variétés symplectiques localement plates***
Soient ω une 2-forme différentielle non dégénérée et ∇ une connexion affine (covariante) sur M.
On dit que (M, ω, ∇) est une variété presque symplectique localemet plate si (M, ∇) est une variété localement plate.
On dit que (M, ω, ∇) est une variété symplectique localemet plate si (M, ∇) est une variété localement plate et ∇ est une connexion symplectique (i.e., $\nabla\omega = 0$). Comme pour la remarque ci-dessus, l'identité $\nabla\omega = 0$ implique que ω est une forme fermée, donc (M, ω) est une variété symplectique.
On note π la champ de bivecteurs associé à ω, c'est-à-dire

$$\pi(\alpha, \beta) = \omega(\sharp_\omega(\alpha), \sharp_\omega(\beta)),$$

où $\sharp_\omega$ est l'isomorphisme inverse de $(X \longmapsto -i_X\omega := \omega(., X))$, ce qui signifie que $\sharp_\omega = \sharp_\pi$. Pour toute connexion affine ∇ sur M, on pose

$$D_\alpha \beta = \sharp_\pi^{-1}\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \sharp_\pi(\beta)\right).$$

Cette formule établit une correspondance bi-univoque entre les connexions affines covariantes sur M et les connexions affines contravariantes sur (M,π). De plus, on a

$$D\pi(\alpha,\beta,\gamma)=\nabla\omega\left(\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta),\sharp_\pi(\gamma)\right).$$

Dans le cas où ω est une forme symplectique (ce qui équivaut au fait que (M,π) est une variété de Poisson), les courbures R^D, R^∇ et les torsions T^D, T^∇ de D et ∇ respectivement sont reliées par les formules

$$R^D(\alpha,\beta)\gamma=\sharp_\pi^{-1}\left(R^\nabla\left(\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)\right)\sharp_\pi(\gamma)\right)$$

et

$$T^D(\alpha,\beta)=\sharp_\pi^{-1}\left(T^\nabla\left(\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)\right)\right).$$

Ce qui montre l'existence d'une correspondance bi-univoque entre les variétés symplectiques localement plates et les variétés de Poisson localement plates dont le tenseur de Poisson est partout non dégénéré.

Proposition 2.1.1 *Soient ∇ une connexion affine et π un champ de bivecteurs sur M. Pour tous $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$, on pose*

$$D^\pi_\alpha\beta:=\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta.$$

L'on définit ainsi une connexion contravariante sur M.
Si (M,∇) est une variété localement plate et $\nabla\pi=0$ alors π est un tenseur de Poisson et (M,π,D^π) est une variété de Poisson localement plate.

Preuve. Comme ∇ est sans torsion et $\nabla\pi=0$, alors

$$\begin{aligned}(D^\pi_\alpha\beta)(X) &= \sharp_\pi(\alpha)(\beta(X))-\beta\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}X\right)\\ &= \sharp_\pi(\alpha)(\beta(X))-\beta\left(\nabla_X(\sharp_\pi(\alpha))\right)-\beta\left([\sharp_\pi(\alpha),X]\right)\\ &= \sharp_\pi(\alpha)(\beta(X))-\pi(\nabla_X\alpha,\beta)-\beta\left([\sharp_\pi(\alpha),X]\right)\\ &= \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta(X)-\pi(\nabla_X\alpha,\beta).\end{aligned}$$

Ainsi

$$\left(D^\pi_\alpha\beta-D^\pi_\beta\alpha\right)(X)=\left(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta-\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha\right)(X)-\pi(\nabla_X\alpha,\beta)-\pi(\alpha,\nabla_X\beta),$$

d'où

$$T^{D^\pi}(\alpha,\beta)(X)=\nabla_X\pi(\alpha,\beta).$$

Or $\nabla\pi = 0$, ce qui montre que D^π est sans torsion. De plus, on a

$$\begin{aligned}[\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)] &= \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(\sharp_\pi(\beta)) - \nabla_{\sharp_\pi(\beta)}(\sharp_\pi(\alpha)) \\ &= \sharp_\pi\left(D^\pi_\alpha\beta - D^\pi_\beta\alpha\right) \\ &= \sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi).\end{aligned}$$

Ce qui montre que π est un tenseur de Poisson.
D'autre part, on a

$$\begin{aligned}\left(D^\pi_\alpha\left(D^\pi_\beta\gamma\right)\right)(X) &= \sharp_\pi(\alpha)(\sharp_\pi(\beta)(\gamma(X))) - \sharp_\pi(\alpha)\left(\gamma\left(\nabla_{\sharp_\pi(\beta)}X\right)\right) \\ &\quad -\sharp_\pi(\beta)\left(\gamma\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}X\right)\right) + \gamma\left(\nabla_{\sharp_\pi(\beta)}\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}X\right)\right).\end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}\left(D^\pi_\alpha\left(D^\pi_\beta\gamma\right) - D^\pi_\beta\left(D^\pi_\alpha\gamma\right)\right)(X) &= [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)](\gamma(X)) - \gamma\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\left(\nabla_{\sharp_\pi(\beta)}X\right) - \nabla_{\sharp_\pi(\beta)}\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}X\right)\right) \\ &= [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)](\gamma(X)) - \gamma\left(\nabla_{[\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)]}X\right) \\ &= \left(\nabla_{[\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)]}\gamma\right)(X).\end{aligned}$$

Comme π est un tenseur de Poisson alors la courbure de D^π est nulle, ce qui montre que (M, π, D^π) est une variété presque de Poisson localement plate. Par ailleurs, comme

$$D^\pi\pi(\alpha,\beta,\gamma) = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\pi(\beta,\gamma),$$

alors l'hypothèse $\nabla\pi = 0$ entraîne que (M, π, D^π) est une variété de Poisson localement plate. ■

Comme une variété de Poisson est feuilletée par des variétés symplectiques, nous allons montrer qu'une structure de Poisson localement plate (π, D) sur M induit une structure localemet plate sur chaque feuille symplectique.

Lemme 2.1.1 *Soient (M,π) une variété de Poisson, D une connexion de Poisson symétrique (i. e., $D\pi = 0$ et D est sans torsion) et S une feuille symplectique de (M,π). On a :*

1. *L'application $\nabla^S : \chi(S) \times \chi(S) \longrightarrow \chi(S)$ définie par*

$$\nabla^S_X Y := \sharp_\pi(D_\alpha\beta)\,|_S, \tag{2.1.2}$$

où α et β sont tels que $X = \sharp_\pi(\alpha)\,|_S$ et $Y = \sharp_\pi(\beta)\,|_S$, est une connexion symétrique sur S.

2. *Si on note R^S la courbure de ∇^S alors*

$$R^S(X,Y)Z = \sharp_\pi\left(R^D(\alpha,\beta)\gamma\right)|_S,$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$ et pour tous $X,Y,Z \in \chi(S)$ tels que $X = \sharp_\pi(\alpha)|_S, Y = \sharp_\pi(\beta)|_S, Z = \sharp_\pi(\gamma)|_S$.

Preuve. Soient S une feuille symplectique de la variété de Poisson (M,π).

1. L'application bilinéaire ∇^S est bien définie sur l'espace des champs de vecteurs sur la feuille S car : comme π est un tenseur de Poisson et D est sans torsion alors si $\sharp_\pi(\alpha) = 0$ ou $\sharp_\pi(\beta) = 0$, on a

$$\sharp_\pi(D_\alpha\beta) - \sharp_\pi(D_\beta\alpha) = \sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi) = [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)] = 0.$$

Par ailleurs, si $\sharp_\pi(\beta) = 0$, alors pour tout $\gamma \in \Omega^1(M)$, on a

$$\gamma(\sharp_\pi(D_\alpha\beta)) = \pi(D_\alpha\beta,\gamma) = \sharp_\pi(\alpha).\pi(\beta,\gamma) - D_\alpha\gamma(\sharp_\pi(\beta)) = 0,$$

ce qui montre que ∇^S est bien définie. On vérifie facilement que ∇^S est bien une dérivée covariante sur S. Par ailleurs, comme

$$\nabla^S_X Y - \nabla^S_Y X = \sharp_\pi([\alpha,\beta]_\pi)|_S = [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]|_S = [X,Y],$$

alors ∇^S est sans torsion.

2. Découle du fait que $D\pi = 0$, ce qui donne

$$\nabla^S_X\left(\nabla^S_Y Z\right) = \sharp_\pi(D_\alpha(D_\beta\gamma))|_S,$$

et du fait que π est un tenseur de Poisson.

■

Théorème 2.1.1 *Soit (M,π,D) une variété de Poisson localement plate. Toute feuille symplectique de (M,π) est naturellement munie d'une structure symplectique localement plate.*

Preuve. Du lemme ci-dessus, on déduit que si (M,π,D) est une variété de Poisson localement plate alors $\left(S,\nabla^S\right)$ est une variété localement plate. Rappelons que la forme symplectique ω_S de S est définie par

$$\omega_S(X,Y) := \pi(\alpha,\beta)|_S,$$

pour tous $X, Y \in \chi(S)$, où α et β sont tels que $X = \sharp_\pi(\alpha)|_S$ et $Y = \sharp_\pi(\beta)|$. Ainsi, comme

$$\omega_S\left(\nabla_X^S Y, Z\right) = \pi(D_\alpha \beta, \gamma)|_S,$$

alors

$$\nabla^S \omega_S(X, Y, Z) = D\pi(\alpha, \beta, \gamma)|_S = 0,$$

ce qui montre que $\left(S, \omega_S, \nabla^S\right)$ est une variété symplectique localement plate. ■

2.1.2 La cohomologie de Boyom d'une variété de Poisson localement plate

Définition 2.1.2 ***La KV-algèbre associée à une variété de Poisson localement plate***
Soit (M, π, D) une variété presque de Poisson localement plate. Sur l'espace vectoriel $\Omega^1(M)$ des formes de Pfaff sur M, on définit l'application

$$(\alpha, \beta) \longmapsto D_\alpha \beta.$$

Ainsi, $(\Omega^1(M), D)$ est une KV-algèbre, appelée la KV-algèbre associée à (M, π, D). Dans le cas où $D\pi = 0$, on dit que $(\Omega^1(M), D)$ est la KV-algèbre associée à la variété de Poisson localement plate (M, π, D).

Remarque 2.1.2 *Soit (M, π, D) une variété presque de Poisson localement plate. L'application*

$$\begin{array}{ccc} \Omega^1(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M) \\ (\alpha, \varphi) & \longmapsto & \sharp_\pi(\alpha)(\varphi), \end{array}$$

définit sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ une structure de module de Boyom à gauche sur $\Omega^1(M)$ si et seulement si π est un tenseur de Poisson.

Définition 2.1.3 ***La cohomologie de Boyom d'une variété de Poisson localement plate***
Soit $(\Omega^1(M), D)$ la KV-algèbre associée à une variété de Poisson localement plate (M, π, D). On note $\left(\mathbf{C}_B^q(M, \pi), \delta_q\right)_{q \in \mathbb{N}}$ le complexe de Boyom dont les q-cochaines sont les champs de q-tenseurs contravariants sur M, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{C}_B^0(M, \pi) = J(\mathcal{C}^\infty(M))$: l'ensemble des fonctions φ dont le hessien contravriant H_D^φ défini par D est nul, c'est-à-dire

$$\sharp_\pi(\alpha)(\sharp_\pi(\beta)(\varphi)) - \sharp_\pi(D_\alpha \beta)(\varphi) = 0,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. On note $H_B^*(M, \pi)$ la cohomologie de Boyom de ce complexe et on l'appelle la cohomologie de Boyom de la variété de Poisson localement plate (M, π, D).

Proposition 2.1.2 *Soient* (M, ∇) *une variété localement plate et* (M, π, D) *une variété de Poisson localement plate.*
On suppose que $\sharp_\pi : (\Omega^1(M), D) \longrightarrow (\chi(M), \nabla)$ *est un morphisme de KV-algèbres, alors* $\sharp_\pi$ *réalise un morphisme entre* $H_B^*(M)$ *et* $H_B^*(M, \pi)$.

Preuve. Le morphisme $\sharp_\pi$ induit naturellement une application linéaire, que l'on note encore $\sharp_\pi$, définie par

$$\begin{array}{rccl} \sharp_\pi : & \mathbf{C}_B^q(M) & \longrightarrow & \mathbf{C}_B^q(M, \pi) \\ & \Phi & \longmapsto & ((\alpha_1, ..., \alpha_q) \longmapsto (-1)^q \Phi(\sharp_\pi(\alpha_1), ..., \sharp_\pi(\alpha_q))), \end{array}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, et $\sharp_\pi(\varphi) = \varphi$, pour tout $\varphi \in \mathbf{C}_B^0(M)$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$(\alpha(\sharp_\pi(\Phi)))(\alpha_1, ..., \alpha_q) = (-1)^q (\sharp_\pi(\alpha)\Phi)(\sharp_\pi(\alpha_1), ..., \sharp_\pi(\alpha_q)).$$

D'où

$$\begin{aligned} (\delta_q(\sharp_\pi(\Phi)))(\alpha_1, ..., \alpha_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q} (-1)^i (\alpha_i \sharp_\pi(\Phi))(\alpha_1, ..., \widehat{\alpha_i}, ..., \alpha_{q+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{q} (-1)^{i+q} (\sharp_\pi(\alpha_i)\Phi)\left(\sharp_\pi(\alpha_1), ..., \widehat{\sharp_\pi(\alpha_i)}, ..., \sharp_\pi(\alpha_{q+1})\right) \\ &= (-1)^q (\delta_q\Phi)(\sharp_\pi(\alpha_1), ..., \sharp_\pi(\alpha_{q+1})) \\ &= -\sharp_\pi(\delta_q\Phi)(\alpha_1, ..., \alpha_{q+1}). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\delta_q \circ \sharp_\pi = -\sharp_\pi \circ \delta_q$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\sharp_\pi$ induit un morphisme entre $H_B^*(M, \pi)$ et $H_B^*(M)$. ■

Remarque 2.1.3 *Dans le cas où* π *est non dégénéré, il y a isomorphisme entre* $H_B^*(M, \pi)$ *et* $H_B^*(M)$.

Proposition 2.1.3 *Soit* (M, π, D) *une variété de Poisson localement plate. On note* $H_\pi^2(M)$ *le deuxième groupe de cohomologie de Poisson de* (M, π)*. L'application*

$$\begin{array}{rccl} Alt : & C_B^2(M, \pi) & \longrightarrow & \chi^2(M) \\ & P & \longmapsto & Alt(P), \end{array}$$

définie par

$$Alt(P) : (\alpha, \beta) \longmapsto P(\alpha, \beta) - P(\beta, \alpha),$$

induit un morphisme naturel de $H_B^2(M, \pi)$ *à valeurs dans* $H_\pi^2(M)$.

Preuve. On note d_π l'opérateur de bord du complexe de Lichnerowicz associé à la variété de Poisson (M,π) (voir [13]) et on rapelle que

$$\delta_2 P(\alpha,\beta,\gamma) = \sharp_\pi(\beta)(P(\alpha,\gamma)) - \sharp_\pi(\alpha)(P(\beta,\gamma)) + P([\alpha,\beta]_\pi,\gamma) + P(\beta, D_\alpha\gamma) - P(\alpha, D_\beta\gamma).$$

Comme

$$\begin{aligned} \sharp_\pi(\alpha)(Alt(P)(\beta,\gamma)) - Alt(P)([\alpha,\beta]_\pi,\gamma) &= \sharp_\pi(\alpha)(P(\beta,\gamma)) - P([\alpha,\beta]_\pi,\gamma) \\ &\quad -\sharp_\pi(\alpha)(P(\gamma,\beta)) + P(\gamma,[\alpha,\beta]_\pi), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} d_\pi(Alt(P))(\alpha,\beta,\gamma) &= -\delta_2 P(\alpha,\beta,\gamma) - \delta_2 P(\beta,\gamma,\alpha) - \delta_2 P(\gamma,\alpha,\beta) \\ &\quad + P(\gamma,[\alpha,\beta]_\pi) + P(\alpha,[\beta,\gamma]_\pi) + P(\beta,[\gamma,\alpha]_\pi) \\ &\quad + P(\beta, D_\alpha\gamma) - P(\alpha, D_\beta\gamma) + P(\gamma, D_\beta\alpha) \\ &\quad - P(\beta, D_\gamma\alpha) + P(\alpha, D_\gamma\beta) - P(\gamma, D_\alpha\beta). \end{aligned}$$

La connexion D étant sans torsion, ceci montre que

$$d_\pi(Alt(P))(\alpha,\beta,\gamma) = -\delta_2 P(\alpha,\beta,\gamma) - \delta_2 P(\beta,\gamma,\alpha) - \delta_2 P(\gamma,\alpha,\beta).$$

Ainsi, si $P \in Z_B^2(M,\pi)$ alors $Alt(P) \in Z_\pi^2(M)$.
Supposons à présent que $P \in B_B^2(M,\pi)$, ceci implique l'existence d'un champ de vecteurs ζ sur M tel que $P = \delta_1\zeta$, c'est-à-dire

$$P(\alpha,\beta) = \sharp_\pi(\alpha)(\beta(\zeta)) - D_\alpha\beta(\zeta),$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$. De la symétrie de D, on déduit que

$$\begin{aligned} Alt(P)(\alpha,\beta) &= \sharp_\pi(\alpha)(\beta(\zeta)) - \sharp_\pi(\beta)(\alpha(\zeta)) - [\alpha,\beta]_\pi(\zeta) \\ &= -\mathcal{L}_\zeta\pi(\alpha,\beta) \\ &= -[\pi,\zeta](\alpha,\beta) \\ &= d_\pi\zeta(\alpha,\beta). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $Alt(P) \in B_\pi^2(M)$. ■

Remarque 2.1.4 *Comme $C_B^1(M,\pi) = \chi(M)$ et que, du fait que la connexion D est sans torsion, on a*

$$d_\pi\zeta(\alpha,\beta) = \delta_1\zeta(\alpha,\beta) - \delta_1\zeta(\beta,\alpha),$$

il vient que

$$Z_B^1(M,\pi) \subset Z_\pi^1(M).$$

Par ailleurs, comme $C_B^0(M,\pi) \subset \mathcal{C}^\infty(M)$ *et que* $(-\delta_0)$ *n'est rien d'autre que la restriction de la différentielle extérieure contravariante* d_π *à* $C_B^0(M,\pi)$*, alors* $H_B^0(M,\pi) = H_\pi^0(M)$ *et*

$$B_B^1(M,\pi) \subset B_\pi^1(M).$$

De plus, comme $B_\pi^1(M) \cap Z_B^1(M,\pi) = B_B^1(M,\pi)$*, alors le groupe* $H_B^1(M,\pi)$ *s'injecte canoniquement dans* $H_\pi^1(M)$*.*

2.2 Structures de Poisson-Codazzi

2.2.1 Variétés presque de Poisson-Codazzi

Soit M une variété différentiable et soit $\widetilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne sur M. Dans toute la suite, lorsque $\widetilde{g}$ est une métrique, on désignera toujours par $\flat_g : TM \to T^*M$ l'isomorphisme de fibrés vectoriels tel que $\flat_g(X)(Y) = \widetilde{g}(X,Y)$, par $\sharp_g$ l'isomorphisme inverse de $\flat_g$, et par g la cométrique de $\widetilde{g}$, c'est-à-dire le champ de tenseurs défini par

$$g(\alpha,\beta) = \widetilde{g}\left(\sharp_g(\alpha), \sharp_g(\beta)\right) \tag{2.2.1}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Soient π un champ de bivecteurs et $\widetilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne sur M. Au couple (π, g) on associe le champ d'endomorphismes J de TM défini par

$$\widetilde{g}(JX,Y) = \pi(\alpha,\beta), \tag{2.2.2}$$

où l'on a posé $X = \sharp_g(\alpha)$ et $Y = \sharp_g(\beta)$. On note J_π le champ d'endomorphismes de T^*M défini par

$$g(J_\pi\alpha,\beta) = \pi(\alpha,\beta), \tag{2.2.3}$$

c'est-à-dire $J = \sharp_g \circ J_\pi \circ \flat_g$. On considère le champ de tenseurs g^π défini par

$$g^\pi(\alpha,\beta) = g\left(J_\pi\alpha, J_\pi\beta\right).$$

On appelle la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au couple (π, g) l'unique connexion contravariante symétrique et compatible avec la métrique g (i.e., $\mathcal{D}g = 0$). Rappelons que si $\mathcal{D}\pi = 0$, on dit que (M,π,g) est une variété de Poisson pseudo-riemannienne ([5], [6]).

Définition 2.2.1 *Une **structure presque de Poisson-Codazzi** sur une variété différentiable M est un triplet (π, g, D), où g est une métrique pseudo-riemannienne contravariante et D est une connexion contravariante sans torsion sur M, relativement au champ de bivecteurs π, tels que*

$$D_\alpha g\left(\beta,\gamma\right) = D_\beta g\left(\alpha,\gamma\right), \tag{2.2.4}$$

*pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. On dit également que (M, π, g, D) est une **variété presque de Poisson-Codazzi**.*
On appelle (2.2.4) la formule de Codazzi contravariante.

Exemple 2.2.1 ***Structures presque symplectiques de Codazzi***
Soient ∇ une connexion affine, ω une 2-forme différentielle partout non dégénérée et $\widetilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne sur M. On note g^ω la métrique pseudo-riemannienne (covariante) définie par

$$g^\omega\left(X,Y\right) = g\left(i_X\omega, i_Y\omega\right),$$

$\boldsymbol{\nabla}$ *(resp. ∇^ω) la connexion de Levi-Civita de $\widetilde{g}$ (resp. de g^ω) et $\tilde{J}$ (resp. J_ω) le champ d'endomorphismes défini par*

$$\omega\left(X,Y\right) = \widetilde{g}\left(\tilde{J}X, Y\right) \text{ (resp. } \omega\left(X,Y\right) = g^\omega\left(J_\omega X, Y\right)\text{)}.$$

On dit $(M, \omega, \widetilde{g}, \nabla)$ est une variété presque symplectique de Codazzi si $(\widetilde{g}, \nabla)$ est une structure de Codazzi sur M.
On suppose que ω est une forme symplectique sur M. On note π le champ de Poisson naturellement associé à ω et on définit la connexion contravariante D comme suit

$$D_\alpha\beta := \sharp_\pi^{-1}\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}\left(\sharp_\pi\left(\beta\right)\right)\right).$$

Comme π est un tenseur de Poisson, la connexion D est sans torsion si et seulement si la connexion covariante ∇ l'est.
D'un autre côté, du fait que

$$g\left(D_\alpha\beta,\gamma\right) = g^\omega\left(\nabla_X Y, Z\right),$$

où $\alpha = \sharp_\pi^{-1}(X), \beta = \sharp_\pi^{-1}(Y), \gamma = \sharp_\pi^{-1}(Z)$, pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$, on déduit que (M, π, g, D) est une variété presque de Poisson-Codazzi si et seulement si (g^ω, ∇) est une structure de Codazzi sur M. Remarquons au passage que g est la cométrique de g^ω si et seulement si $(M, \omega, \tilde{g})$ est une variété presque hermitienne. Ainsi, si $(\omega, \tilde{g})$ est une structure presque hermitienne, alors (M, π, g, D) est une variété presque de Poisson-Codazzi si et seulement si $(M, \omega, \widetilde{g}, \nabla)$ est une variété presque symplectique de Codazzi.

Théorème 2.2.1 ***Dualité de Amari-Chentsov pour les variétés presque de Poisson-Codazzi.***
Soient π une champ de bivecteurs, g une pseudo-métrique contravariante et D une connexion contravariante sur M. On considère la connexion D^* définie par

$$g\left(D_\alpha^* \beta, \gamma\right) = \sharp_\pi\left(\alpha\right)\left(g\left(\beta, \gamma\right)\right) - g\left(\beta, D_\alpha \gamma\right), \qquad (2.2.5)$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. La variété (M, π, g, D^*) est une variété presque de Poisson-Codazzi si et seulement si (M, π, g, D) est une variété presque de Poisson-Codazzi. Auquel cas, nous aurions

$$D^* = 2\mathcal{D} - D.$$

Preuve. La formule (2.2.5) peut s'écrire sous la forme

$$g\left(D_\alpha^* \beta, \gamma\right) = g\left(D_\alpha \beta, \gamma\right) + D_\alpha g\left(\beta, \gamma\right).$$

D'où

$$g\left(T^{D^*}\left(\alpha, \beta\right), \gamma\right) = g\left(T^D\left(\alpha, \beta\right), \gamma\right) + D_\alpha g\left(\beta, \gamma\right) - D_\beta g\left(\alpha, \gamma\right).$$

Supposons que (M, π, g, D) est une variété presque de Poisson-Codazzi. De la formule (2.2.4) et du fait que $T^D = 0$, on déduit que la connexion contravariante D^* est sans torsion. Ensuite, de la formule (2.2.5) on remarque que

$$\left(D^*\right)^* = D,$$

ainsi, comme $T^D = T^{D^*} = 0$ alors $D_\alpha^* g\left(\beta, \gamma\right) = D_\beta^* g\left(\alpha, \gamma\right)$, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. La réciproque découle du fait que $\left(D^*\right)^* = D$.
D'autre part, de la formule (2.2.5) on montre que g est parallèle relativement à la connexion contravariante

$$\frac{1}{2}\left(D + D^*\right).$$

Comme cette dernière est sans torsion, par unicité de la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au couple (π, g), on conclut que $D^* = 2\mathcal{D} - D$. ■

Définition 2.2.2 ***La structure presque de Poisson-Codazzi duale.***
Soit (M, π, g, D) une variété presque de Poisson-Codazzi. La structure presque de Poisson-Codazzi (π, g, D^*) est appelée la structure presque de Poisson-Codazzi duale de (π, g, D) sur la variété M.

Définition 2.2.3 ***Courbure hessienne d'une variété presque de Poisson-Codazzi.*** *Soit (M, π, g, D) une variété presque de Poisson-Codazzi. On note $\Lambda = \mathcal{D} - D$. On appelle la courbure hessienne de (M, π, g, D) le champ de tenseurs Q sur M défini par $Q = D\Lambda$, c'est-à-dire par*

$$Q(\alpha, \beta, \gamma) = D_\alpha (\Lambda_\beta \gamma) - \Lambda_{D_\alpha \beta} \gamma - \Lambda_\beta (D_\alpha \gamma),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Le tenseur hessien $\mathcal{Q}$ de (M, π, g, D) est défini par

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = g(Q(\alpha, \beta, \gamma), \delta),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$.

Afin d'exhiber les premières propriétés de la courbure hessienne d'une variété presque de Poisson-Codazzi, nous avons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.2.1 *Soient π un champ de bivecteurs, g une pseudo-métrique contravariante et D une connexion contravariante sans torsion sur (M, π). Les assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *(M, π, g, D) est une variété presque de Poisson-Codazzi.*
2. *Le champ de tenseurs Λ vérifie*
$$g(\Lambda_\gamma \alpha, \beta) = g(\alpha, \Lambda_\gamma \beta), \tag{2.2.6}$$
pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.
3. *L'identité suivante est vérifiée*
$$g(\Lambda_\alpha \beta, \gamma) = \frac{1}{2} D_\alpha g(\beta, \gamma), \tag{2.2.7}$$
pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

Preuve. Comme $\mathcal{D}g = 0$ alors

$$g(\Lambda_\alpha \beta, \gamma) + g(\beta, \Lambda_\alpha \gamma) = D_\alpha g(\beta, \gamma), \tag{2.2.8}$$

d'où

$$D_\alpha g(\beta, \gamma) - D_\beta g(\alpha, \gamma) = g(\Lambda_\alpha \beta - \Lambda_\beta \alpha, \gamma) + g(\beta, \Lambda_\alpha \gamma) - g(\alpha, \Lambda_\beta \gamma).$$

Les deux connexions $\mathcal{D}$ et D étant sans torsion, ce qui implique que le champ de tenseurs Λ est symétrique. Ainsi

$$D_\alpha g(\beta, \gamma) - D_\beta g(\alpha, \gamma) = g(\Lambda_\gamma \alpha, \beta) - g(\alpha, \Lambda_\gamma \beta),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Cette dernière égalité montre l'équivalence des deux premières assertions.
Supposons à présent que (2.2.4) est vérifiée, en utilisant les relations (2.2.6) et (2.2.8), on trouve

$$2g(\Lambda_\alpha \beta, \gamma) = g(\Lambda_\alpha \beta, \gamma) + g(\beta, \Lambda_\alpha \gamma) = D_\alpha g(\beta, \gamma),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Inversement, si (2.2.7) est vérifiée, alors la symétrie de $D_\alpha g$ montre l'égalité (2.2.6). Ceci établit l'équivalence entre les deux dernières assertions. ■

Proposition 2.2.1 *Soit (M, π, g, D) une variété presque de Poisson-Codazzi.*

1. *On a*

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) - \mathcal{Q}(\alpha, \delta, \gamma, \beta) = 2g(\Lambda_\gamma(\Lambda_\alpha \beta) - \Lambda_\alpha(\Lambda_\gamma \beta), \delta),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$.

2. *Le champ de tenseurs $\mathcal{Q}$ vérifie :*

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathcal{Q}(\alpha, \gamma, \beta, \delta)$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$

Preuve.

1. On a par définition

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = g(D_\alpha(\Lambda_\beta \gamma), \delta) - g(\Lambda_{D_\alpha \beta} \gamma, \delta) - g(\Lambda_\beta(D_\alpha \gamma), \delta).$$

En utilisant (2.2.6) et la symétrie de Λ, on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= g(D_\alpha(\Lambda_\beta \gamma), \delta) - g(\Lambda_\gamma(D_\alpha \beta), \delta) - g(D_\alpha \gamma, \Lambda_\beta \delta) \\ &= g(D_\alpha(\Lambda_\beta \gamma), \delta) - g(D_\alpha \beta, \Lambda_\gamma \delta) - g(D_\alpha \gamma, \Lambda_\beta \delta). \end{aligned}$$

De la relation (2.2.7), il vient que

$$g(D_\alpha(\Lambda_\beta \gamma), \delta) = \sharp_\pi(\alpha)(g(\Lambda_\beta \gamma, \delta)) - g(\Lambda_\beta \gamma, D_\alpha \delta) - 2g(\Lambda_\alpha(\Lambda_\beta \gamma), \delta).$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) &= \sharp_\pi(\alpha)(g(\Lambda_\beta \gamma, \delta)) - g(\Lambda_\beta \gamma, D_\alpha \delta) - 2g(\Lambda_\beta \gamma, \Lambda_\alpha \delta) \\ &\quad - g(D_\alpha \beta, \Lambda_\gamma \delta) - g(D_\alpha \gamma, \Lambda_\beta \delta) \\ &= \sharp_\pi(\alpha)(g(\Lambda_\gamma \beta, \delta)) - g(\Lambda_\gamma \beta, D_\alpha \delta) - 2g(\Lambda_\beta \gamma, \Lambda_\alpha \delta) \\ &\quad - g(D_\alpha \beta, \Lambda_\gamma \delta) - g(D_\alpha \gamma, \Lambda_\beta \delta). \end{aligned}$$

Ainsi, d'après (2.2.6), on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)-\mathcal{Q}(\alpha,\delta,\gamma,\beta) &= 2g(\Lambda_\gamma\delta,\Lambda_\alpha\beta)-2g(\Lambda_\beta\gamma,\Lambda_\alpha\delta)\\ &= 2g(\Lambda_\gamma(\Lambda_\alpha\beta)-\Lambda_\alpha(\Lambda_\gamma\beta),\delta).\end{aligned}$$

2. Découle de l'identité

$$\mathcal{Q}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=g(D_\alpha(\Lambda_\beta\gamma),\delta)-g(D_\alpha\beta,\Lambda_\gamma\delta)-g(D_\alpha\gamma,\Lambda_\beta\delta),$$

et de la formule (2.2.6).

■

Examinons à présent le lien entre la courbure hessienne et la dualité de Amari-Chentsov pour les structures presque de Poisson-Codazzi.

Proposition 2.2.2 *Soient (M,π,g,D) une variété presque de Poisson-Codazzi. On note Q (resp. $\mathcal{Q}$) la courbure hessienne (resp. le tenseur hessien) de (M,π,g,D). Soit (π,g,D^*) la structure duale de (π,g,D). Si on note Q^* (resp. $\mathcal{Q}^*$) la courbure hessienne (resp. le tenseur hessien) de (M,π,g,D^*), alors on a*

$$Q^*=Q-2\mathcal{D}\Lambda$$

et

$$\mathcal{Q}^*(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=-\mathcal{Q}(\alpha,\beta,\delta,\gamma)+2g(\Lambda_\alpha\beta,\Lambda_\gamma\delta),$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Omega^1(M)$.

Preuve. On a $D^*=2\mathcal{D}-D$, d'où $\Lambda^*:=\mathcal{D}-D^*=-\Lambda$ et par conséquent $Q^*=Q-2\mathcal{D}\Lambda$. Par ailleurs, comme

$$g(D^*_\alpha(\Lambda_\beta\gamma),\delta)=\sharp_\pi(\alpha)(g(\Lambda_\gamma\beta,\delta))-g(\Lambda_\gamma\beta,D_\alpha\delta)$$

et

$$\begin{aligned}g(D^*_\alpha\beta,\Lambda_\gamma\delta) &= \sharp_\pi(\alpha)(g(\beta,\Lambda_\gamma\delta))-g(\beta,D_\alpha(\Lambda_\gamma\delta))\\ &= g(\mathcal{D}_\alpha\beta,\Lambda_\gamma\delta)+g(\beta,\mathcal{D}_\alpha(\Lambda_\gamma\delta))-g(\beta,D_\alpha(\Lambda_\gamma\delta)),\end{aligned}$$

en vertu de la formule (2.2.6) et du fait que $\mathcal{D}=D+\Lambda$, on a

$$\begin{aligned}\mathcal{Q}^*(\alpha,\beta,\gamma,\delta) &= g(D^*_\alpha\beta,\Lambda_\gamma\delta)+g(D^*_\alpha\gamma,\Lambda_\beta\delta)-g(D^*_\alpha(\Lambda_\beta\gamma),\delta)\\ &= -\mathcal{Q}(\alpha,\beta,\delta,\gamma)+2g(\Lambda_\alpha\beta,\Lambda_\gamma\delta),\end{aligned}$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Omega^1(M)$. ■

2.2.2 Variétés de Poisson-Codazzi

Définition 2.2.4 *Une **variété de Poisson-Codazzi** est une variété presque de Poisson-Codazzi* (M, π, g, D) *telle que* (M, π, g) *est une variété de Poisson pseudo-riemannienne et*

$$D(J_\pi) = 0.$$

Remarque 2.2.1 *Soient* π *un champ de bivecteurs et* g *est une métrique pseudo-riemannienne contravariante sur* M*. Alors* (M, π, g) *est une variété de Poisson pseudo-riemannienne si et seulement si* $(M, \pi, g, \mathcal{D})$ *est une variété de Poisson-Codazzi.*

Exemple 2.2.2 ***Structures symplectiques de Codazzi***
Sous les mêmes hypothèses et notations de l'exemple 2.2.1, si de plus $\nabla \tilde{J} = 0$ *et* $\boldsymbol{\nabla} \tilde{J} = 0$*, on dit que* $(M, \omega, \widetilde{g}, \nabla)$ *est une variété symplectique de Codazzi.*
En remarquant que $J_\omega \circ \sharp_\pi = \sharp_\pi \circ J_\pi$*, alors pour tous* $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$*, on a*

$$g(D_\alpha J_\pi(\beta), \gamma) = g^\omega\left(\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} J_\omega(\sharp_\pi(\beta)), \sharp_\pi(\gamma)\right),$$

et on a des formules similaires en remplaçant D *par* $\mathcal{D}$ *et* ∇ *par* ∇^ω *(car* $\sharp_\pi(\mathcal{D}_\alpha \beta) = \nabla^\omega_{\sharp_\pi(\alpha)}(\sharp_\pi(\beta))$*). On déduit que* (M, π, g, D) *est une variété de Poisson-Codazzi si et seulement si* (∇, g^ω) *est une structure de Codazzi sur* M *et* $\nabla J_\omega = \nabla^\omega J_\omega = 0$*. Remarquons au passage que* g *est la cométrique de* g^ω *si et seulement si* $(M, \omega, \tilde{g})$ *est une variété presque hermitienne. Ainsi, si* $(\omega, \tilde{g})$ *est une structure presque hermitienne, alors* (M, π, g, D) *est une variété de Poisson-Codazzi si et seulement si* $(M, \omega, \widetilde{g}, \nabla)$ *est une variété symplectique de Codazzi.*

Remarque 2.2.2 *Soit* (M, π, g, D) *une variété de Poisson-Codazzi. Comme* D *est sans torsion et* π *est un tenseur de Poisson alors, de la formule (2.1.1), on a*

$$D\pi(\alpha, \beta, \gamma) + D\pi(\beta, \gamma, \alpha) + D\pi(\gamma, \alpha, \beta) = 0.$$

Mais le fait que $D(J_\pi) = 0$ *entraîne*

$$D\pi(\alpha, \beta, \gamma) = D_\alpha g(\gamma, J_\pi \beta).$$

Ainsi, l'équation (2.2.4) montre que

$$D\pi(\alpha, \beta, \gamma) + D\pi(\gamma, \alpha, \beta) = 0.$$

On déduit que

$$D\pi = 0.$$

Définition 2.2.5 ***Variétés de Poisson quasi-Codazzi***
Soient (M,π) une variété de Poisson, D une connexion contravariante sur (M,π) et g une métrique pseudo-riemannienne contravariante sur M. On dit que (M,π,g,D) est une variété de Poisson quasi-Codazzi, ou que (π,g,D) est une structure de Poisson quasi-Codazzi sur M, si D est sans torsion et

$$D_\alpha g^\pi(\beta,\gamma) = D_\beta g^\pi(\alpha,\gamma), \tag{2.2.9}$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$.

Remarque 2.2.3 *Toute variété de Poisson-Codazzi est une variété de Poisson quasi-Codazzi. En effet, si (M,π,g,D) est une variété de Poisson-Codazzi, de l'égalité $D(J_\pi)=0$ on déduit que*

$$\begin{aligned} g^\pi(\beta, D_\alpha\gamma) &= g(J_\pi\beta, D_\alpha(J_\pi\gamma)) \\ &= -g\left(\beta, D_\alpha\left(J_\pi^2\gamma\right)\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que

$$D_\alpha g^\pi(\beta,\gamma) = -D_\alpha g\left(\beta, J_\pi^2\gamma\right).$$

Reste à appliquer la formule (2.2.4).

Comme une variété de Poisson-Codazzi est de Poisson, elle est feuilletée par des feuilles symplectiques. Le résultat suivant montre que ces feuilles admettent des structures symplectiques de Codazzi.

Théorème 2.2.2 ***Structures de Poisson-Codazzi et feuilletage symplectique.***
Soient (M,π,g,D) une variété de Poisson-Codazzi et S une feuille symplectique telle que la restriction de g à S est non dégénérée, alors $\left(S,\omega_S,g^S,\nabla^S\right)$ est une variété symplectique de Codazzi, où ω_S est la forme symplectique de S (voir la preuve du théorème 2.1.1), ∇^S est définie par (2.1.2) et g^S est la pseudo-métrique définie sur la feuille S par

$$g^S(X,Y) := \widetilde{g}(\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta))\mid_S = g(J_\pi\alpha, J_\pi\beta)\mid_S, \tag{2.2.10}$$

pour tous $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$ et pour tous $X,Y\in\chi(S)$ tels que $X=\sharp_\pi(\alpha)\mid_S, Y=\sharp_\pi(\beta)\mid_S$.

Preuve. D'après la remarque ci-dessus et le théorème 2.1.1, comme $D\pi=0$ alors ∇^S est sans torsion. Comme $D(J_\pi)=0$ alors

$$g^S\left(\nabla_X^S Y, Z\right) = g(D_\alpha(J_\pi\beta), J_\pi\gamma)\mid_S = -g\left(D_\alpha\beta, J_\pi^2\gamma\right)\mid_S.$$

D'un autre côté, comme $TS = \operatorname{Im} \sharp_\pi$ alors

$$\nabla^S_X g^S (Y, Z) = -D_\alpha g \left(\beta, J_\pi^2 \gamma\right) |_S, \tag{2.2.11}$$

d'où, d'après la formule (2.2.4), on a

$$\nabla^S_X g^S (Y, Z) = \nabla^S_Y g^S (X, Z),$$

ce qui montre que $\left(S, \nabla^S, g^S\right)$ est une variété de Codazzi, ainsi $\left(S, \omega_S, \nabla^S, g^S\right)$ est une variété presque symplectique de Codazzi.
On note J_S le champ d'endomorphismes de TS défini par

$$\omega_S (X, Y) = g^S (J_S X, Y).$$

Comme $D(J_\pi) = 0$ alors

$$\begin{aligned} g^S \left(\nabla^S_X J_S (Y), Z\right) &= g\left(D_\alpha J_\pi (\beta), \gamma\right) |_S \\ &= 0, \end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ et pour tous $X, Y, Z \in \chi(S)$ tels que $X = \sharp_\pi(\alpha) |_S, Y = \sharp_\pi(\beta) |_S$ $, Z = \sharp_\pi(\gamma) |_S$. Ce qui montre que $\nabla^S (J_S) = 0$. Par ailleurs, la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au couple (π, g) est liée à la connexion de Levi-Civita $\boldsymbol{\nabla}^S$ de la métrique g^S par

$$\boldsymbol{\nabla}^S_X Y = \sharp_\pi (\mathcal{D}_\alpha \beta) |_S,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ et pour tous $X, Y \in \chi(S)$ tels que $X = \sharp_\pi(\alpha) |_S, Y = \sharp_\pi(\beta) |_S$. En effet, comme π est un tenseur de Poisson et $\mathcal{D}$ est sans torsion, alors $\boldsymbol{\nabla}^S$ est symétrique. D'autre part, comme $\mathcal{D}(J_\pi) = 0$ et $\mathcal{D}g = 0$ alors la formule (2.2.11) montre $\boldsymbol{\nabla}^S g^S = 0$. Ainsi, le même argument utilisé pour D et ∇^S montre que $\mathcal{D}(J_\pi) = 0$ implique $\boldsymbol{\nabla}^S (J_S) = 0$, on conclut que $\left(S, \omega_S, \nabla^S, g^S\right)$ est une variété symplectique de Codazzi. ■

Corollaire 2.2.1 *Soit (M, π, g) une variété de Poisson pseudo-riemannienne et S une feuille symplectique telles que la restriction de g à S est non dégénérée, alors $\left(S, \omega_S, g^S, \boldsymbol{\nabla}^S\right)$ est une variété symplectique de Codazzi, où $\boldsymbol{\nabla}^S$ est la connexion de Levi-Civita (covariante) associée à la métrique g^S.*

Preuve. Découle immédiatement du théorème ci-dessus. ■

La notion de dualité de Amari-Chentsov pour les structures presque de Poisson-Codazzi s'étend aux structures de Poisson-Codazzi, comme le montre le résultat suivant.

Théorème 2.2.3 ***Dualité de Amari-Chentsov pour les variétés de Poisson-Codazzi.*** *Sous les mêmes hypothèses et notations du théorème 2.2.1, (M, π, g, D) est une variété de Poisson-Codazzi si et seulement si (M, π, g, D^*) l'est. Auquel cas, (π, g, D^*) est appelée la structure de Poisson-Codazzi duale de (π, g, D) sur M.*

Preuve. En vertu du théorème 2.2.1, il suffit de montrer que $D(J_\pi) = 0$ si et seulement si $D^*(J_\pi) = 0$. Or ceci découle immédiatement de l'égalité

$$D^* = 2\mathcal{D} - D.$$

En effet, si $D(J_\pi) = 0$ et $\mathcal{D}(J_\pi) = 0$ alors $D^*(J_\pi) = 0$; la réciproque découle du fait que $(D^*)^* = D$. ■

Exemple 2.2.3 *Soient $(M, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne et π un champ de bivecteurs sur M. Soient ∇ la connexion de Levi-Civita de $\widetilde{g}$ et $\mathbf{D}^\pi$ la connexion contravariante définie dans [5] par*

$$\mathbf{D}^\pi_\alpha \beta = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta.$$

On suppose que ∇ est une connexion de Poisson, c'est-à-dire $\nabla \pi = 0$, alors d'après la proposition 2.1.1, la connexion $\mathbf{D}^\pi$ est sans torsion ; de plus, comme

$$\begin{aligned} g(\mathbf{D}^\pi_\alpha \beta, \gamma) &= \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta (\sharp_g(\gamma)) \\ &= \sharp_\pi(\alpha)(g(\beta, \gamma)) - \widetilde{g}\left(\sharp_g(\beta), \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(\sharp_g(\gamma))\right) \\ &= \sharp_\pi(\alpha)(\widetilde{g}(\sharp_g(\beta), \sharp_g(\gamma))) - \widetilde{g}\left(\sharp_g(\beta), \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)}(\sharp_g(\gamma))\right), \end{aligned}$$

alors

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^\pi_\alpha g(\beta, \gamma) &= -\nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \widetilde{g}(\sharp_g(\beta), \sharp_g(\gamma)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Par unicité de la connexion de Levi-Civita associée au couple (π, g), on déduit que $\mathbf{D}^\pi = \mathcal{D}$. Ainsi, de la formule

$$g(\mathcal{D}_\alpha J_\pi(\beta), \gamma) = g(\mathbf{D}^\pi_\alpha J_\pi(\beta), \gamma) = \nabla_{\sharp_\pi(\alpha)} \pi(\beta, \gamma) = 0,$$

on conclut que $(M, \pi, g, \mathbf{D}^\pi)$ est une variété de Poisson-Codazzi auto-duale.

Cette dualité passe aux feuilles symplectiques, comme le montre le théorème ci-dessous.

Théorème 2.2.4 ***Structure de Poisson-Codazzi duale et feuilletage symplectique*** *Soient (M, π, g, D) une variété de Poisson-Codazzi et S une feuille symplectique de (M, π) telle que la restriction de g à S est non dégénérée. La structure de Codazzi induite sur S par la structure de Poisson-Codazzi duale (M, π, g, D^*) n'est rien d'autre que la structure de Codazzi duale de celle induite par (M, π, g, D).*

Preuve. Soient $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ et soient $X, Y, Z \in \chi(S)$ tels que $X = \sharp_\pi(\alpha)\mid_S, Y = \sharp_\pi(\beta)\mid_S, Z = \sharp_\pi(\gamma)\mid_S$. On pose

$$\left(\nabla^S\right)^*_X Y = \sharp_\pi\left(D^*_\alpha \beta\right)\mid_S .$$

Comme $D^*(J_\pi) = 0$, on a

$$\begin{aligned} g^S\left(\left(\nabla^S\right)^*_X Y, Z\right) &= g\left(J_\pi\left(D^*_\alpha\beta\right), J_\pi\gamma\right)\mid_S \\ &= \left(\sharp_\pi(\alpha)\left(g\left(J_\pi\beta, J_\pi\gamma\right)\right) - g\left(J_\pi\beta, D_\alpha\left(J_\pi\gamma\right)\right)\right)\mid_S \\ &= X\left(g^S(Y,Z)\right) - g^S\left(Y, \nabla^S_X Z\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\left(\nabla^S\right)^*$ est la connexion duale de ∇^S relativement à g^S. ■

Proposition 2.2.3 *Sous les mêmes hypothèses et notations du théorème 2.2.2. On désigne par Q^S (resp. $\mathcal{Q}^S$) la courbure hessienne (resp. le tenseur hessien) de la variété de Codazzi $\left(S, g^S, \nabla^S\right)$. On a*

$$Q^S(X,Y,Z) = \sharp_\pi\left(Q(\alpha,\beta,\gamma)\right)\mid_S$$

et

$$\mathcal{Q}^S(X,Y,Z,U) = -\mathcal{Q}\left(\alpha,\beta,\gamma,J_\pi^2\delta\right)\mid_S,$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$ et pour tous $X, Y, Z, U \in \chi(S)$ tels que $X = \sharp_\pi(\alpha)\mid_S, Y = \sharp_\pi(\beta)\mid_S, Z = \sharp_\pi(\gamma)\mid_S, U = \sharp_\pi(\delta)\mid_S$.

Preuve. Si on note $\boldsymbol{\nabla}^S$ la connexion de Levi-Civita de la pseudo-métrique g^S et $B^S = \boldsymbol{\nabla}^S - \nabla^S$, d'après le théorème 2.2.4 ci-dessus, on a

$$\boldsymbol{\nabla}^S_X Y = \frac{1}{2}\left(\nabla^S_X Y + \left(\nabla^S\right)^*_X Y\right) = \frac{1}{2}\left(\sharp_\pi\left(D_\alpha\beta + D^*_\alpha\beta\right)\right)\mid_S = \sharp_\pi\left(\mathcal{D}_\alpha\beta\right)\mid_S,$$

ce qui montre que

$$B^S_X Y = \sharp_\pi\left(\Lambda_\alpha\beta\right)\mid_S .$$

D'où

$$\begin{aligned} Q^S(X,Y,Z) &= \nabla^S_X\left(B^S_Y Z\right) - B^S_{\nabla^S_X Y} Z - B^S_Y\left(\nabla^S_X Z\right) \\ &= \sharp_\pi\left(Q(\alpha,\beta,\gamma)\right)\mid_S . \end{aligned}$$

Ainsi

$$\begin{aligned}
\mathcal{Q}^S(X,Y,Z,U) &= g\left(J_\pi\left(Q\left(\alpha,\beta,\gamma\right)\right),J_\pi\delta\right)|_S \\
&= -\mathcal{Q}\left(\alpha,\beta,\gamma,J_\pi^2\delta\right)|_S\,.
\end{aligned}$$

Ce qui achève la preuve. ■

2.3 Structures de Poisson hessiennes

2.3.1 Variétés presque de Poisson hessiennes

Définition 2.3.1 *Une* ***variété presque de Poisson hessienne*** (M,π,g,D) *est une variété presque de Poisson-Codazzi telle que la connexion D est de courbure nulle.*

Proposition 2.3.1 ***Courbure (riemannienne contravariante) d'une variété presque de Poisson hessienne.***
Soit (M,π,g,D) une variété presque de Poisson hessienne telle que π est un tensuer de Poisson. On note R la courbure de la connexion de Levi-Civita contravriante $\mathcal{D}$ associée au couple (π,g).

1. *On a*
$$R(\alpha,\beta)=-\left[\Lambda_\alpha,\Lambda_\beta\right]:=\Lambda_\beta\circ\Lambda_\alpha-\Lambda_\alpha\circ\Lambda_\beta.$$
2. *La courbure sectionnelle $K(\alpha,\beta)$ du plan engendré par $\{\alpha,\beta\}$ est donnée par l'expression*
$$K(\alpha,\beta)=\frac{g\left(\Lambda_\alpha\beta,\Lambda_\alpha\beta\right)-g\left(\Lambda_\alpha\alpha,\Lambda_\beta\beta\right)}{g(\alpha,\alpha)\,g(\beta,\beta)-\left(g(\alpha,\beta)\right)^2}.$$

Preuve.

1. On pose $\Omega_{\alpha,\beta}=\mathcal{D}_\alpha\circ\Lambda_\beta-\Lambda_\beta\circ\mathcal{D}_\alpha+\Lambda_\alpha\circ\mathcal{D}_\beta-\mathcal{D}_\beta\circ\Lambda_\alpha$, en utilisant la formule (2.2.6), on obtient
$$\begin{aligned}
g\left(\mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta\gamma\right)-\Lambda_\beta\left(\mathcal{D}_\alpha\gamma\right),\delta\right) &= g\left(\mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta\gamma\right),\delta\right)-g\left(\mathcal{D}_\alpha\gamma,\Lambda_\beta\delta\right) \\
&= \sharp_\pi(\alpha)\left(g\left(\Lambda_\beta\gamma,\delta\right)\right)-g\left(\Lambda_\beta\gamma,\mathcal{D}_\alpha\delta\right) \\
&\quad -\sharp_\pi(\alpha)\left(g\left(\gamma,\Lambda_\beta\delta\right)\right)+g\left(\gamma,\mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta\delta\right)\right) \\
&= g\left(\gamma,\mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta\delta\right)\right)-g\left(\Lambda_\beta\gamma,\mathcal{D}_\alpha\delta\right).
\end{aligned}$$
Ainsi
$$g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma),\delta\right)=g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\delta),\gamma\right).$$

Par ailleurs, la connexion D étant plate, il vient que

$$\begin{aligned} D_{[\alpha,\beta]_\pi} &= \mathcal{D}_\alpha \circ \mathcal{D}_\beta - \mathcal{D}_\beta \circ \mathcal{D}_\alpha + \Lambda_\alpha \circ \Lambda_\beta - \Lambda_\beta \circ \Lambda_\alpha - \Omega_{\alpha,\beta}, \\ &= R(\alpha,\beta) + \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi} + [\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta] - \Omega_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$g\left(D_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma, \delta\right) = g\left(R(\alpha,\beta)\gamma, \delta\right) + g\left(\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma, \delta\right) + g\left([\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta]\gamma, \delta\right) - g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right). \tag{2.3.1}$$

Or, la formule (2.2.6) montre que

$$g\left([\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta]\delta, \gamma\right) = -g\left([\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta]\gamma, \delta\right)$$

et du fait que π soit un tenseur de Poisson il vient que $g\left(R(\alpha,\beta)\gamma, \delta\right) = -g\left(\gamma, R(\alpha,\beta)\delta\right)$. Ainsi, en permutant γ et δ dans formule (2.3.1), on trouve

$$g\left(\gamma, D_{[\alpha,\beta]_\pi}\delta\right) = -g\left(R(\alpha,\beta)\gamma, \delta\right) + g\left(\gamma, \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi}\delta\right) - g\left([\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta]\gamma, \delta\right) - g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right).$$

En additionant ensuite cette dernière formule avec la formule (2.3.1), il vient que

$$D_{[\alpha,\beta]_\pi} g(\gamma, \delta) = 2g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right).$$

De la formule (2.2.7) on déduit que

$$\Omega_{\alpha,\beta} = \Lambda_{[\alpha,\beta]_\pi} := \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]_\pi} - D_{[\alpha,\beta]_\pi}.$$

Il suffit alors de remplacer $\Omega_{\alpha,\beta}$ dans la formule (2.3.1).

2. De la première assertion et de la formule (2.2.6), il vient que

$$\begin{aligned} g\left(R(\alpha,\beta)\beta, \alpha\right) &= g\left(\Lambda_\beta(\Lambda_\alpha\beta), \alpha\right) - g\left(\Lambda_\alpha(\Lambda_\beta\beta), \alpha\right) \\ &= g\left(\Lambda_\alpha\beta, \Lambda_\beta\alpha\right) - g\left(\Lambda_\beta\beta, \Lambda_\alpha\alpha\right). \end{aligned}$$

Le résultat découle alors de la symétrie du champ de tenseurs Λ.

■

Corollaire 2.3.1 *Sous les mêmes hypothèses et notations que la proposition ci-dessus. La courbure de la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ est liée à la courbure hessienne Q par*

$$\mathcal{Q}(\alpha,\beta,\gamma,\delta) - \mathcal{Q}(\alpha,\delta,\gamma,\beta) = 2g\left(R(\alpha,\gamma)\beta, \delta\right),$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. Découle immédiatement de la première assertion de la proposition ci-dessus et de la proposition 2.2.1. ■

Remarque 2.3.1 *Il résulte du corollaire ci-dessus que, si*

$$\mathcal{Q}(\alpha,\beta,\gamma,\delta)=\mathcal{Q}(\alpha,\delta,\gamma,\beta),$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma,\delta\in\Omega^1(M)$*, alors la connexion de Levi-Civita contravariante* $\mathcal{D}$ *est de courbure nulle et par conséquent* $(M,\pi,\mathcal{D})$ *est une variété presque de Poisson localement plate.*

2.3.2 Variétés de Poisson hessiennes

Définition 2.3.2 *Une* ***variété de Poisson hessienne*** *(resp. une* ***variété de Poisson quasi-hessienne****)* (M,π,g,D) *est une variété de Poisson-Codazzi (resp. une variété de Poisson quasi-Codazzi) telle que la courbure de* D *est nulle.*

Comme pour les structures de Poisson-Codazzi, toute variété de Poisson hessienne est une variété de Poisson quasi-hessienne.

Remarque 2.3.2 *On dit d'une variété de Poisson pseudo-riemanienne* (M,π,g) *qu'elle est localement plate si la courbure de* $\mathcal{D}$ *est nulle, ainsi* $(M,\pi,g,\mathcal{D})$ *est une variété de Poisson hessienne si et seulement si* (M,π,g) *est une variété de Poisson pseudo-riemannienne localement plate.*

Exemple 2.3.1 ***Structures (presque) symplectiques hessiennes***
Sous les mêmes hypothèses et notations des exemples 2.2.1 et 2.2.2. On dit que $(M,\omega,\widetilde{g},\nabla)$ *est une variété (presque) symplectique hessienne si* $(M,\omega,\widetilde{g},\nabla)$ *est une variété (presque) symplectique de Codazzi dont la connexion* ∇ *est de courbure nulle.*
Si π *est un tenseur de Poisson, alors la connexion* D *est plate si et seulement si* ∇ *est plate. Ainsi,* (M,π,g,D) *est une variété presque de Poisson hessienne si et seulement si* (M,g^ω,∇) *est une variété hessienne. On en déduit que, si* $(\omega,\widetilde{g})$ *est une structure presque hermitienne sur* M*, alors* (M,π,g,D) *est une variété (presque) de Poisson hessienne si et seulement si* $(M,\omega,\widetilde{g},\nabla)$ *est une variété (presque) symplectique hessienne.*

Définition 2.3.3 ***Variétés de Poisson (quasi-)hessiennes de type Koszul***
Une variété de Poisson hessienne (resp. quasi-hessienne) (M,π,g,D) *est dite de type Koszul s'il existe un champ de vecteurs* ξ *sur* M *tel que*

$$g(\alpha,\beta)=D\xi(\alpha,\beta):=\sharp_\pi(\alpha)(\beta(\xi))-D_\alpha\beta(\xi)$$

(resp.

$$g^{\pi}(\alpha,\beta) = D\xi(\alpha,\beta) := \sharp_{\pi}(\alpha)(\beta(\xi)) - D_{\alpha}\beta(\xi)\,).$$

On dit que le champ ξ est un champ de Koszul de (M,π,g,D).
Une variété de Poisson hessienne (resp. quasi-hessienne) de type Koszul (M,π,g,D) est dite exacte s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$ telle que $\xi = -\sharp_{\pi}(d\varphi)$, c'est-à-dire

$$g(\alpha,\beta) = H_D^{\varphi}(\alpha,\beta) := \sharp_{\pi}(\alpha)(\sharp_{\pi}(\beta)(\varphi)) - \sharp_{\pi}(D_{\alpha}\beta)(\varphi)$$

(resp.

$$g^{\pi}(\alpha,\beta) = H_D^{\varphi}(\alpha,\beta) := \sharp_{\pi}(\alpha)(\sharp_{\pi}(\beta)(\varphi)) - \sharp_{\pi}(D_{\alpha}\beta)(\varphi)\,).$$

Une telle fonction φ est appelée un potentiel de (M,π,g,D).

Remarque 2.3.3 *Soit (M,π,g,D) une variété de Poisson quasi-hessienne. L'identité (2.2.9) montre que g^{π} est un 2-cocycle du complexe de Boyom de la structure presque de Poisson localement plate sous-jacente. Dire que (M,π,g,D) est de type Koszul veut dire que g^{π} est un 2-cobord de ce complexe de Boyom ($g^{\pi} = \delta_1(-\xi)$). D'un autre côté, comme*

$$g^{\pi}(\alpha,\beta) - g^{\pi}(\beta,\alpha) = -\mathcal{L}_{\xi}\pi(\alpha,\beta),$$

la symétrie de g^{π} entraîne que ξ est un champ de Poisson, c'est-à-dire que ξ est un 1-cocycle du complexe de Lichnerowicz-Poisson de la variété de Poisson (M,π) (i. e., $\xi \in Z_{\pi}^{1}(M)$). Ainsi, une structure de Poisson quasi-hessienne de Koszul (M,π,g,D) est exacte si et seulement si ξ est un 1-cobord de ce complexe (i. e., $\xi \in B_{\pi}^{1}(M)$).

Exemple 2.3.2 ***Structures hessiennes de type Koszul sur une variété symplectique***
On reprend l'exemple 2.3.1 et on suppose que (M,π,D,g) est une variété de Poisson quasi-hessienne de type Koszul. On pose $\eta = -\sharp_{\pi}^{-1}(\xi)$. Si pour tous $X,Y \in \chi(M)$ on note $\alpha = \sharp_{\pi}^{-1}(X), \beta = \sharp_{\pi}^{-1}(Y)$, alors on a

$$\begin{aligned} g^{\omega}(X,Y) &= g^{\pi}(\alpha,\beta) \\ &= \sharp_{\pi}(\alpha)(\beta(\xi)) - D_{\alpha}\beta(\xi) \\ &= X(\eta(Y)) - \eta(\nabla_X Y), \end{aligned}$$

ce qui montre que $(M,\nabla,g^{\omega} := \nabla\eta)$ est une variété hessienne de type Koszul.
Dans le cas où $(M,\nabla,g^{\omega} := \nabla(d\varphi))$ est une variété hessienne de Koszul exacte, le champ de vecteurs ξ n'est rien d'autre que l'hamiltonien de φ.

Théorème 2.3.1 ***Dualité de Amari pour les variétés de Poisson hessiennes***
Sous les mêmes hypohèses et notations que le théorème 2.2.1, (M, π, g, D^*) *est une variété de Poisson hessienne si et seulement si* (M, π, g, D) *est une variété de Poisson hessienne.*

Preuve. Comme π est un tenseur de Poisson. De l'identité (2.2.5), on en déduit que

$$g\left(R^{D^*}(\alpha, \beta)\gamma, \delta\right) = -g\left(R^D(\alpha, \beta)\delta, \gamma\right),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$. Ainsi, $R^{D^*} = 0$ si et seulement si $R^D = 0$; il ne reste alors qu'appliquer le théorème 2.2.1. ■

Définition 2.3.4 ***La structure de Poisson hessienne duale***
Soit (M, π, g, D) *une variété de Poisson hessienne. La structure de Poisson hessienne* (π, g, D^*) *est appelée la structure de Poisson hessienne duale de* (π, g, D) *sur la variété* M*.*

Exemple 2.3.3 *Sous les mêmes hypothèses et notations que l'exemple 2.2.3, si de plus* $(M, \widetilde{g})$ *est une variété riemannienne localement plate, c'est-à-dire* $(M, \boldsymbol{\nabla})$ *est une variété localement plate, alors en vertu de la proposition 2.1.1, on constate que* $(M, \pi, g, \mathbf{D}^\pi)$ *est une variété de Poisson hessienne auto-duale.*

Théorème 2.3.2 *Soient* (M, π, D, g) *une variété de Poisson hessienne et* S *une feuille symplectique telle que la restriction de* g *à* S *est non dégénérée, alors* $\left(S, \omega_S, \nabla^S, g^S\right)$ *est une variété symplectique hessienne, où* ∇^S *est définie par (2.1.2) et* g^S *est la pseudo-métrique définie par (2.2.10).*

Preuve. D'après le théorème 2.1.1, $\left(S, \nabla^S\right)$ est localement plate. Il suffit alors d'appliquer le théorème 2.2.2. ■

Corollaire 2.3.2 *Soit* (M, π, g) *une variété de Poisson pseudo-riemannienne localement plate. Toute feuille symplectique* S *de* (M, π)*, sur laquelle la restriction de* g *est non dégénérée, est naturellement munie d'une structure symplectique hessienne.*

Preuve. Comme $\mathcal{D}\pi = 0$ alors $\left(S, \boldsymbol{\nabla}^S\right)$ est localement plate, le résultat découle alors du corollaire 2.2.1. ■

Théorème 2.3.3 ***Structure de Poisson hessienne duale et feuilletage symplectique***

Soient (M, π, g, D) une variété de Poisson hessienne et S une feuille symplectique de (M, π) telle que la restriction de g à S est non dégénérée. La structure hessienne induite sur S par la structure de Poisson hessienne duale (M, π, g, D^*) n'est rien d'autre que la structure hessienne duale de celle induite par (M, π, g, D).

Preuve. Du théorème 2.2.4, on en déduit que, comme $\left(\nabla^S\right)^*$ est la connexion duale de ∇^S relativement à g^S, alors on a

$$g^S\left(R^{\left(\nabla^S\right)^*}(X,Y)\,Z,T\right) = -g^S\left(R^{\nabla^S}(X,Y)\,T,Z\right),$$

pour tous $X, Y, Z, T \in \chi(S)$. Ainsi, $R^{\left(\nabla^S\right)^*} = 0$ si et seulement si $R^{\nabla^S} = 0$. Reste à appliquer de théorème 2.2.4. ■

Corollaire 2.3.3 *Soit (M, π, g) une variété de Poisson pseudo-riemannienne localement plate. Toute feuille symplectique S de (M, π), sur laquelle la restriction de g est non dégénérée, est naturellement munie d'une structure de variété hessienne auto-duale.*

Preuve. Découle du théorème ci-dessus et du corollaire 2.3.2. ■

Définition 2.3.5 *La courbure hessienne d'une variété de Poisson hessienne est la courbure hessienne de la structure de Poisson-Codazzi sous-jacente.*

Exemple 2.3.4 *Si (M, π, g) est une variété de Poisson pseudo-riemannienne localement plate alors $(M, \pi, g, \mathcal{D})$ est une variété de Poisson hessienne auto-duale dont la courbure hessienne est nulle.*

2.4 Algèbres de Lie hessiennes

2.4.1 Algèbres de Lie plates

Soit $\mathcal{G}$ un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension finie et soit $[.,.] : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ une application bilinéaire alternée. On dit que $(\mathcal{G}, [.,.])$ est une algèbre alternée. Si de plus $[.,.]$ vérifie l'identité de Jacobi, on dit que $(\mathcal{G}, [.,.])$ est une algèbre de Lie (réelle).

Définition 2.4.1 *Une connexion infinitésimale $\mathbf{A}$ sur une algèbre alternée $(\mathcal{G}, [.,.])$ est une application $\mathbf{A} : \mathcal{G}\times\mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ bilinéaire.*
La torsion de $\mathbf{A}$ est l'application bilinéaire $T^{\mathbf{A}} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ définie par

$$T^{\mathbf{A}}(u,v) = \mathbf{A}_u v - \mathbf{A}_v u - [u,v]\,.$$

La connexion $\mathbf{A}$ *est dite symétrique ou sans torsion si* $T^{\mathbf{A}} = 0$.
La courbure de la connexion $\mathbf{A}$ *est l'application trilinéaire* $R^{\mathbf{A}} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *définie par*

$$R^{\mathbf{A}}(u, v, w) = \mathbf{A}_u(\mathbf{A}_v w) - \mathbf{A}_v(\mathbf{A}_u w) - \mathbf{A}_{[u,v]} w.$$

La connexion $\mathbf{A}$ *est dite plate si* $R^{\mathbf{A}} = 0$.
On dit que $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{A})$ *est une algèbre alternée plate si* $\mathbf{A}$ *est, à la fois, symétrique et plate.*
On dit que $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie plate si* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{A})$ *est une algèbre alternée plate et* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *est une algèbre de Lie.*

Remarque 2.4.1 *Soient* G *un groupe de Lie réel et* $\left(\chi^L(G), [.,.]\right)$ *l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche. On dit qu'une connexion affine* ∇^L *sur* G *est invariante à gauche si* $\nabla^L_X Y \in \chi^L(G)$*, pour tous* $X, Y \in \chi^L(G)$*. Comme* $\chi^L(G)$ *s'identifie, via la correspondance* $(X \longmapsto X_{1_G})$*, à l'espace vectoriel tangent à* G *en l'élément neutre, alors* $\mathbf{A}_u v := \left(\nabla^L_X Y\right)_{1_G}$*, où* $u = X_{1_G}$ *et* $v = Y_{1_G}$*, est une connexion infinitésimale sur* $\mathcal{G} = T_{1_G} G$*. De plus*

$$T^{\mathbf{A}}(u, v) = \left(T^{\nabla^L}(X, Y)\right)_{1_G} \qquad \text{et} \qquad R^{\mathbf{A}}(u, v, w) = \left(R^{\nabla^L}(X, Y) Z\right)_{1_G}.$$

Ainsi, si $\left(G, \nabla^L\right)$ *est une variété localement plate alors* $(T_{1_G} G, [.,.], \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie plate.*

Théorème 2.4.1 *Soient* (M, π, D) *une variété de Poisson localement plate et* $x \in M$*. On pose* $\mathcal{G} = \ker((\sharp_\pi)_x)$ *et on le munit de la structure d'algèbre de Lie obtenue en linéarisant la structure de Poisson au point* x*, alors la connexion infinitésimale*

$$\mathbf{A}_u v := (D_\alpha \beta)_x, \text{ où } \alpha, \beta \in \Omega^1(M) \text{ tels que } u = \alpha_x, v = \beta_x,$$

est symétrique (resp. plate) si D *est sans torsion (resp. plate).*

Preuve. Rappelons que le crochet de Lie $[.,.]$ est défini par

$$[u, v] = d_x(\pi(\alpha, \beta)), \text{ où } \alpha, \beta \in \Omega^1(M) \text{ tels que } u = \alpha_x, v = \beta_x.$$

Comme

$$[\alpha, \beta]_\pi = d(\pi(\alpha, \beta)) + i_{\sharp_\pi(\alpha)} d\beta - i_{\sharp_\pi(\beta)} d\alpha,$$

alors

$$[u, v] = ([\alpha, \beta]_\pi)_x.$$

Ainsi, si D est sans torsion alors

$$T^{\mathbf{A}}(u,v) = (D_\alpha\beta - D_\beta\alpha - [\alpha,\beta]_\pi)_x = 0.$$

De même, si la courbure de D est nulle alors

$$R^{\mathbf{A}}(u,v,w) = \left(D_\alpha(D_\beta\gamma) - D_\beta(D_\alpha\gamma) - D_{[\alpha,\beta]_\pi}\gamma\right)_x = 0,$$

où $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$ sont tels que $u = \alpha_x, v = \beta_x, w = \gamma_x$. ■

Rappelons qu'il y a une bijection entre les strctures d'algèbre Lie sur un espace vectoriel réel de dimension finie et les structures de Poisson linéaires sur son dual. On appelle dérivée contravariante linéaire sur une variété de Poisson linéaire toute dérivée contravariante dont les sympboles de Christoffel, relativement à un système de coordonnées linéaires, sont linéaires.

Dans tout ce qui suit, $(\mathcal{G},[.,.])$ désigne une algèbre de Lie réelle de dimension finie dont l'espace vectoriel sous-jacent est muni de sa structure différentielle linéaire.

Théorème 2.4.2 *Soit $(\mathcal{G}^*,\pi)$ la structure de Poisson linéaire associée à $(\mathcal{G},[.,.])$. Il y a une correspondance bi-univoque entre les connexions infinitésimales symétriques (resp. plates) sur $(\mathcal{G},[.,.])$ et les dérivées contravariantes linéaires sans torsion (resp. plates) sur la variété de Poisson linéaire $(\mathcal{G}^*,\pi)$.*

Preuve. Soit D une dérivée contravariante sans torsion sur $(\mathcal{G}^*,\pi)$. Comme la structure d'algèbre de Lie obtenue en linéarisant π en 0 est $(\mathcal{G},[.,.])$, alors il suffit d'appliquer le théorème ci-dessus.
Inversement, comme le champ de bivecteurs π est défini par

$$\pi(du,dv)(\mu) := \mu([u,v]),$$

alors

$$[du,dv]_\pi = d([u,v]).$$

Ainsi, si $\mathbf{A}$ est une connexion infinitésimale sur $(\mathcal{G},[.,.])$, alors il suffit de prendre

$$D_{du}dv = d(\mathbf{A}_u v).$$

D'où l'assertion. ■

Définition 2.4.2 ***KV-algèbre et cohomologie de Boyom d'une algèbre de Lie plate*** *Soit $(\mathcal{G},[.,.],\mathbf{A})$ une algèbre de Lie plate. L'algèbre de Koszul-Vinberg $(\mathcal{G},\mathbf{A})$ est appelée la KV-algèbre associée à $(\mathcal{G},[.,.],\mathbf{A})$. La cohomologie de Boyom $H_B^*(\mathcal{G})$ associée à $(\mathcal{G},\mathbf{A})$ est appelée la cohomologie de Boyom de l'algèbre de Lie plate $(\mathcal{G},[.,.],\mathbf{A})$.*

Exemple 2.4.1 *On considère l'algèbre de Lie plate* $(\mathbb{R}^2, [.,.], \mathbf{A})$*, où*

$$[e_1, e_2] = e_2$$

et

$$\mathbf{A}_{e_1} e_1 = e_1, \qquad \mathbf{A}_{e_1} e_2 = -2e_1 + 2e_2, \qquad \mathbf{A}_{e_2} e_1 = -2e_1 + e_2, \qquad \mathbf{A}_{e_2} e_2 = -4e_1 + 2e_2.$$

Avec des calculs longs mais assez faciles, on montre que

$$H_B^0\left(\mathbb{R}^2\right) = 0, \qquad H_B^1\left(\mathbb{R}^2\right) = 0, \qquad H_B^2\left(\mathbb{R}^2\right) = 0.$$

Remarque 2.4.2 *Avec la cohomologie de Boyom, on dispose d'une autre cohomologie sur l'algèbre de Lie* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *qui vient s'ajouter à la cohomologie de Chevally-Eilenberg* $H_{CE}^*(\mathcal{G})$*. Remarquons au passage que* $H_B^0(\mathcal{G}) = J(\mathcal{G}) \cap Z(\mathcal{G}) \subset Z(\mathcal{G}) = H_{CE}^0(\mathcal{G})$*, où l'on désigne par* $Z(\mathcal{G})$ *le centre de* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *et par* $J(\mathcal{G})$ *l'algèbre de Jacobi de la KV-algèbre* $(\mathcal{G}, \mathbf{A})$*.*
D'un autre côté, comme $C_B^1(\mathcal{G}) = C_{CE}^1(\mathcal{G}) = End(\mathcal{G})$ *et que, du fait que la connexion* $\mathbf{A}$ *est symétrique, on a*

$$d_{CE}\Psi(u,v) = \delta_1\Psi(v,u) - \delta_1\Psi(u,v),$$

alors

$$Z_B^1(\mathcal{G}) \subset Z_{CE}^1(\mathcal{G}).$$

Par ailleurs, comme $C_B^0(\mathcal{G}) = J(\mathcal{G}) \subset C_B^0(\mathcal{G}) = \mathcal{G}$ *et que* δ_0 *n'est rien d'autre que la restriction de* $-ad$ *à* $J(\mathcal{G})$*, alors*

$$B_B^1(\mathcal{G}) \subset B_{CE}^1(\mathcal{G}).$$

Ce qui permet d'établir un morphisme de $H_B^1(\mathcal{G})$ *dans* $H_{CE}^1(\mathcal{G})$*.*

Proposition 2.4.1 *Soit* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{A})$ *une algèbre de Lie plate. L'application*

$$\begin{array}{rccc} Alt: & C_B^2(\mathcal{G}) & \longrightarrow & C_{CE}^2(\mathcal{G}), \\ & \Theta & \longmapsto & Alt(\Theta), \end{array}$$

définie par

$$Alt(\Theta) : (u,v) \longmapsto \Theta(u,v) - \Theta(v,u),$$

induit un morphisme naturel de $H_B^2(\mathcal{G})$ *dans* $H_{CE}^2(\mathcal{G})$*.*

Preuve. On note d_{CE} l'opérateur de bord du complexe de Chevally-Eilenberg associé à l'algèbre de Lie $(\mathcal{G}, [.,.])$ et on rapelle que

$$\begin{aligned}\delta_2\Theta(u,v,w) &= \mathbf{A}_{\Theta(u,v)-\Theta(v,u)}w + \mathbf{A}_v(\Theta(u,w)) - \mathbf{A}_u(\Theta(v,w)) \\ &\quad +\Theta([u,v],w) + \Theta(v,\mathbf{A}_u w) - \Theta(u,\mathbf{A}_v w).\end{aligned}$$

En effectuant la somme cyclique et en utilisant le fait que $\mathbf{A}$ est sans torsion, on obtient que

$$d_{CE}(Alt(\Theta))(u,v,w) = -\delta_2\Theta(u,v,w) - \delta_2\Theta(v,w,u) - \delta_2\Theta(w,u,v).$$

Ainsi, si $\Theta \in Z_B^2(\mathcal{G})$ alors $Alt(\Theta) \in Z_{CE}^2(\mathcal{G})$.
Supposons maintenant que $\Theta \in B_B^2(\mathcal{G})$. Ceci implique l'existence d'un endomorphisme Ψ de $\mathcal{G}$ tel que $\Theta = \delta_1\Psi$, c'est-à-dire, tel que

$$\Theta(u,v) = \Psi(\mathbf{A}_u v) - \mathbf{A}_u(\Psi(v)) - \mathbf{A}_{\Psi(u)}v,$$

pour tous $u,v \in \mathcal{G}$. De la symétrie de $\mathbf{A}$, on déduit que

$$\begin{aligned}Alt(\Theta)(u,v) &= \Psi([u,v]) + [v,\Psi(u)] - [u,\Psi(v)] \\ &= -d_{CE}\Psi(u,v).\end{aligned}$$

Ce qui montre que $Alt(\Theta) \in B_{CE}^2(\mathcal{G})$. ■

2.4.2 Algèbres de Lie-Codazzi

Proposition 2.4.2 *[6] Soit* $\mathbf{a}$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\mathcal{G}$*. Il existe une unique connexion infinitésimale* A *sur* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *telle que*

$$\mathbf{a}(A_u v, w) + \mathbf{a}(v, A_u w) = 0 \qquad et \qquad A_u v - A_v u = [u,v].$$

Elle est entièrement caractérisée par la formule suivante (que l'on peut également appeler la formule de Koszul) :

$$2\mathbf{a}(A_u v, w) = \mathbf{a}([u,v],w) + \mathbf{a}([w,u],v) + \mathbf{a}([w,v],u), \tag{2.4.1}$$

pour tous $u,v,w \in \mathcal{G}$*. On appelle* A ***la connexion de Levi-Civita infinitésimale*** *de* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a})$.

Preuve. L'unicité découle de la non dégénérescence de la forme bilinéaire $\mathbf{a}$. Pour l'existence, il suffit d'établir la formule (2.4.1). En effet, on a

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}(A_u v, w) &= \mathbf{a}([u,v], w) + \mathbf{a}(A_v u, w) \\
&= \mathbf{a}([u,v], w) - \mathbf{a}(u, A_v w) \\
&= \mathbf{a}([u,v], w) - \mathbf{a}([v,w], u) - \mathbf{a}(u, A_w v) \\
&= \mathbf{a}([u,v], w) - \mathbf{a}([v,w], u) + \mathbf{a}(A_w u, v) \\
&= \mathbf{a}([u,v], w) + \mathbf{a}([w,v], u) + \mathbf{a}([w,u], v) - \mathbf{a}(A_u v, w),
\end{aligned}$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$. ■

Exemple 2.4.2 *L'algèbre de Heisenberg (de dimension* 3*) qui s'identifie à* $\mathbb{R}^3$ *muni du crochet de Lie* $[.,.]$ *défini par*

$$[e_1, e_2] = e_3, \qquad [e_1, e_3] = 0, \qquad [e_2, e_3] = 0,$$

où $\{e_1, e_2, e_3\}$ *est la base usuelle (canonique) de* $\mathbb{R}^3$*. On onsidère* $\langle .,. \rangle$ *le produit scalaire standard de* $\mathbb{R}^3$*. La connexion de Levi-Civita infinitésimale de* $(\mathbb{R}^3, [.,.], \langle .,. \rangle)$ *est définie par*

$$\begin{cases} A_{e_1} e_1 = A_{e_2} e_2 = A_{e_3} e_3 = 0, & A_{e_1} e_3 = A_{e_3} e_1 = \frac{1}{2} e_2, \\ A_{e_1} e_2 = -A_{e_2} e_1 = \frac{1}{2} e_3, & A_{e_2} e_3 = A_{e_3} e_2 = \frac{1}{2} e_1. \end{cases}$$

La courbure de cette connexion n'est pas identiquement nulle.

Définition 2.4.3 ***Connexion infinitésimale duale***
Soient $\mathbf{A}$ *une connexion infinitésimale sur* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *et* $\mathbf{a}$ *une forme bilinéaire symétrique non dégénérée sur* $\mathcal{G}$*. La connexion infinitésimale duale* $\mathbf{A}^*$ *de* $\mathbf{A}$*, relativement à la forme* $\mathbf{a}$*, est définie par*

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}_u^* v, w) = -\mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u w), \tag{2.4.2}$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$*.*

Remarque 2.4.3 *On a clairement* $(\mathbf{A}^*)^* = \mathbf{A}$*. De plus, on a*

$$\mathbf{a}\left(R^{\mathbf{A}^*}(u, v, w), z\right) = -\mathbf{a}\left(R^{\mathbf{A}}(u, v, z), w\right),$$

pour tous $u, v, w, z \in \mathcal{G}$ *; ceci montre l'équivalence entre* $R^{\mathbf{A}^*} = 0$ *et* $R^{\mathbf{A}} = 0$*.*

Définition 2.4.4 ***Algèbre de Lie-Codazzi***
On dit que $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie-Codazzi si* $\mathbf{A}$ *est une connexion infinitésimale symétrique sur* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *qui vérifie l'équation de Codazzi infinitésimale :*

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}_u v, w) + \mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u w) = \mathbf{a}(\mathbf{A}_v u, w) + \mathbf{a}(u, \mathbf{A}_v w), \tag{2.4.3}$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$.

Remarque 2.4.4 *Soit* $\mathbf{A}$ *une connexion infinitésimale symétrique sur* $(\mathcal{G}, [.,.])$. *Le quadruplet* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie-Codazzi si et seulement si sa connexion duale* $\mathbf{A}^*$ *est symétrique. En effet, la formule (2.4.3) peut s'écrire*

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}_u v, w) - \mathbf{a}(\mathbf{A}^*_u v, w) = \mathbf{a}(\mathbf{A}_v u, w) - \mathbf{a}(\mathbf{A}^*_v u, w).$$

Comme $\mathbf{A}$ *est symétrique, alors (2.4.3) est équivalente à*

$$\mathbf{a}(\mathbf{A}^*_u v - \mathbf{A}^*_v u, w) = \mathbf{a}([u, v], w),$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$.

Proposition 2.4.3 *Soient* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a})$ *une algèbre de Lie munie d'une forme bilinéaire symétrique non dégénérée* $\mathbf{a}$, $\mathbf{A}$ *une connexion infinitésimale symétrique sur* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *et* A *la connexion de Levi-Civita infinitésimale de* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a})$. *On pose* $\mathbf{B} = A - \mathbf{A}$. *Alors,* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie-Codazzi si et seulement si*

$$\mathbf{a}(\mathbf{B}_u v, w) = \mathbf{a}(v, \mathbf{B}_u w), \tag{2.4.4}$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$.

Preuve. Remarquons que $\mathbf{B}$ est une application bilinéaire symétrique. On a

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(\mathbf{B}_v u, w) - \mathbf{a}(v, \mathbf{B}_u w) &= \mathbf{a}(A_v u, w) - \mathbf{a}(v, A_u w) - \mathbf{a}(\mathbf{A}_v u, w) + \mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u w)\\ &= \mathbf{a}(A_v u, w) + \mathbf{a}(A_u v, w) - \mathbf{a}(\mathbf{A}_v u, w) + \mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u w).\end{aligned}$$

Or

$$\begin{aligned}\mathbf{a}(A_v u, w) + \mathbf{a}(A_u v, w) &= \mathbf{a}([w, v], u) + \mathbf{a}([w, u], v)\\ &= \mathbf{a}(\mathbf{A}_w v, u) + \mathbf{a}(\mathbf{A}_w u, v)\\ &\quad - \mathbf{a}(\mathbf{A}_v w, u) - \mathbf{a}(\mathbf{A}_u w, v).\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbf{a}(\mathbf{B}_v u, w) - \mathbf{a}(v, \mathbf{B}_u w) = \mathbf{a}(\mathbf{A}_w v, u) + \mathbf{a}(\mathbf{A}_w u, v) - \mathbf{a}(\mathbf{A}_v u, w) - \mathbf{a}(\mathbf{A}_v w, u),$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$. ■

Corollaire 2.4.1 ***Algèbre de Lie-Codazzi duale***
Soit $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *une algèbre de Lie-Codazzi. Si on note* $\mathbf{A}^*$ *la connexion duale de* $\mathbf{A}$ *relativement à* $\mathbf{a}$*, alors* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A}^*)$ *est également une algèbre de Lie-Codazzi, appelée l'algèbre de Lie-Codazzi duale de* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$.

Preuve. Si on note $\mathbf{B}^* = A - \mathbf{A}^*$, alors comme $\mathbf{A}$ et $\mathbf{A}^*$ sont symétriques alors $\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$ est également symétrique. De plus

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\left((\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)_u v, w\right) &= \mathbf{a}(\mathbf{A}_u v, w) - \mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u w) \\
&= -\mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u^* w) - \mathbf{a}(v, \mathbf{A}_u w) \\
&= -\mathbf{a}\left(v, (\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)_u w\right).
\end{aligned}$$

Ce qui montre que $A = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^*)$, ce qui équivaut à $\mathbf{B}^* = -\mathbf{B}$. L'assertion découle alors du fait que $\mathbf{B}^*$ vérifie l'identité (2.4.4). ■

Définition 2.4.5 ***Courbure d'une algèbre de Lie-Codazzi***
Soit $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *une algèbre de Lie-Codazzi. On appelle la courbure hessienne de* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$*, l'application trilinéaire* $\mathbf{q} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{G}$ *définie par*

$$\mathbf{q} : (u, v, w) \longmapsto \mathbf{A}_u(\mathbf{B}_v w) - \mathbf{B}_w(\mathbf{A}_u v) - \mathbf{B}_v(\mathbf{A}_u w).$$

On définit également la forme multilinéaires $\mathrm{II} : \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \times \mathcal{G} \longrightarrow \mathbb{R}$ *par*

$$\mathrm{II} : (u, v, w, z) \longmapsto \mathbf{a}(\mathbf{q}(u, v, w), z),$$

qu'on appelle le tenseur hessien de $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$.

Remarque 2.4.5 *Sous les mêmes notations que la définition ci-dessus, si on note* $\mathbf{q}^*$ *(resp.* II^**) la courbure hessienne (resp. le tenseur hessien) de la structure d'algèbre de Lie-Codazzi duale* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A}^*)$*, alors*

$$\mathbf{q}^*(u, v, w) = \mathbf{q}(u, v, w) - 2\left(A_u(\mathbf{B}_v w) - \mathbf{B}_w(A_u v) - \mathbf{B}_v(A_u w)\right),$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$*. D'où l'on déduit que*

$$\mathrm{II}^*(u, v, w, z) = \mathbf{a}(\mathbf{B}_u v, \mathbf{B}_w z) - \mathrm{II}(u, v, z, w),$$

pour tous $u, v, w, z \in \mathcal{G}$.

Proposition 2.4.4 *Sous les mêmes hypothèses et notations de la définition ci-dessus, on a :*

$$\mathrm{II}\,(u,v,w,z) - \mathrm{II}\,(u,z,w,v) = 2\mathbf{a}\left(z, \mathbf{B}_w\left(\mathbf{B}_u v\right) - \mathbf{B}_u\left(\mathbf{B}_w v\right)\right)$$

et

$$\mathrm{II}\,(u,v,w,z) = \mathrm{II}\,(u,w,v,z)\,,$$

pour tous $u,v,w,z \in \mathcal{G}$.

Preuve. Découle de la formule (2.4.4) et de la symétrie de $\mathbf{B}$. ■

Théorème 2.4.3 *Soient* (M,π,g,D) *une variété presque de Poisson-Codazzi et* $x \in M$ *tel que* g_x *est non dégénérée. On suppose que* π *est un tenseur de Poisson. On pose* $\mathcal{G} = \ker\left(\left(\sharp_\pi\right)_x\right)$ *et on le muni de la structure d'algèbre de Lie obtenue en linéarisant la structure de Poisson au point* x*. Si on considère la connexion infinitésimale* $\mathbf{A}$ *définie dans le théorème 2.4.1. Si on note* $\mathbf{a}$ *la restriction de* g_x *à* $\mathcal{G}$*, alors on a :*

1. *Le quadruplet* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie-Codazzi induite sur* $\mathcal{G}$ *par la structure presque de Poisson-Codazzi* (π, g, D)*.*
2. *L'algèbre de Lie-Codazzi induite par la structure presque de Poisson-Codazzi* (π, g, D^*) *duale de* (π, g, D) *n'est rien d'autre que l'algèbre de Lie-Codazzi* $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A}^*)$*.*
3. *On a*
$$\mathbf{q}\,(u,v,w) = \left(Q\,(\alpha,\beta,\gamma)\right)_x$$
et
$$\mathrm{II}\,(u,v,w,z) = \left(\mathcal{Q}\,(\alpha,\beta,\gamma,\delta)\right)_x\,,$$
où $u = \alpha_x, v = \beta_x, w = \gamma_x, z = \delta_x \in \mathcal{G}$.

Preuve. Soient $\alpha,\beta,\gamma,\delta \in \Omega^1(M)$ tels que $\alpha_x,\beta_x,\gamma_x,\delta_x \in \mathcal{G}$. On pose $u = \alpha_x, v = \beta_x, w = \gamma_x, z = \delta_x$.

1. Rappelons tout d'abord qu'on a par définition $\mathbf{A}_u v = \left(D_\alpha\beta\right)_x$. Ainsi
$$\mathbf{a}\left(\mathbf{A}_u v, w\right) = \left(g\left(D_\alpha\beta,\gamma\right)\right)_x\,,$$
d'où
$$\left(D_\alpha g\,(\beta,\gamma)\right)_x = -\mathbf{a}\left(\mathbf{A}_u v, w\right) - \mathbf{a}\left(v, \mathbf{A}_u w\right).$$
La formule (2.2.4) implique alors l'identité (2.4.3).

2. On a

$$\begin{aligned}
\mathbf{a}\left(\left(D_\alpha^*\beta\right)_x, w\right) &= \left(g\left(D_\alpha^*\beta,\gamma\right)\right)_x \\
&= \left(\sharp_\pi(\alpha)\left(g(\beta,\gamma)\right) - g\left(\beta, D_\alpha\gamma\right)\right)_x \\
&= -\mathbf{a}\left(v, \mathbf{A}_u w\right) \\
&= \mathbf{a}\left(\mathbf{A}_u^* v, w\right).
\end{aligned}$$

   Ce qui montre que $\mathbf{A}_u^* v = \left(D_\alpha^*\beta\right)_x$.

3. De la formule (2.4.1) et par définition de la dérivée de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au couple (π, g), on remarque que $A_u v = \left(\mathcal{D}_\alpha\beta\right)_x$. D'où

$$\mathbf{B}_u v = \left(\Lambda_\alpha\beta\right)_x,$$

   et les deux identités en découlent immédiatement.

■

Définition 2.4.6 *On appelle la structure d'algèbre de Lie-Codazzi donnée par le théorème ci-dessus, la structure d'algèbre de Lie-Codazzi obtenue en linéarisant la structure presque de Poisson-Codazzi (M, π, g, D) au point x.*

Dans le cas d'une structure de Poisson linéaire, on a le résultat suivant.

Théorème 2.4.4 *Soient $(\mathcal{G}, [.,.])$ une algèbre de Lie et $(\mathcal{G}^*, \pi)$ la structure de Poisson linéaire associée. Il y a une correspondance bi-univoque entre les structures de Lie-Codazzi sur $(\mathcal{G}, [.,.])$ et les structures presque de Poisson-Codazzi sur la variété de Poisson linéaire $(\mathcal{G}^*, \pi)$.*

Preuve. La démonstration est analogue à celles des théorèmes 2.4.2 ci-dessus et du théorème 1.2 dans [6]. ■

2.4.3 Algèbres de Lie hessiennes

Définition 2.4.7 ***Algèbre de Lie hessienne***
Une algèbre de Lie hessienne est une algèbre de Lie-Codazzi $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ telle que $R^{\mathbf{A}} = 0$. La courbure hessienne d'une algèbre de Lie hessienne est la courbure hessienne de la structure d'algèbre de Lie-Codazzi sous-jacente.

Remarque 2.4.6 ***Algèbre de Lie hessienne duale***
Soit $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ une algèbre de Lie hessienne. D'après la remarque 2.4.3, la courbure de la connexion duale $\mathbf{A}^*$ est nulle. On en déduit, d'après le corollaire 2.4.1, que $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A}^*)$ est une algèbre de Lie hessienne, qu'on appelle l'algèbre de Lie hessienne duale de $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$.

Proposition 2.4.5 *Soit $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ une algèbre de Lie hessienne. La courbure R de la connexion de Levi-Civita infinitésimale de $(\mathcal{G}, [.,.], \mathbf{a})$ vérifie l'identité*

$$R(u, v, w) = \mathbf{B}_v(\mathbf{B}_u w) - \mathbf{B}_u(\mathbf{B}_v w),$$

pour tous $u, v, w \in \mathcal{G}$.

Preuve. Pour tous $u, v \in \mathcal{G}$, on considère l'endomorphisme

$$\Sigma_{u,v} = A_u \circ \mathbf{B}_v - \mathbf{B}_v \circ A_u + \mathbf{B}_u \circ A_v - A_v \circ \mathbf{B}_u.$$

En utilisant la formule (2.4.4), on trouve

$$\mathbf{a}(A_u(\mathbf{B}_v w) - \mathbf{B}_v(A_u w), z) = \mathbf{a}(w, A_u(\mathbf{B}_v z)) - \mathbf{a}(\mathbf{B}_v w, A_u z).$$

D'où

$$\mathbf{a}(\Sigma_{u,v}(w), z) = \mathbf{a}(\Sigma_{u,v}(z), w).$$

Comme $R^{\mathbf{A}} = 0$, il vient que

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{[u,v]} &= A_u \circ A_v - A_v \circ A_u + \mathbf{B}_u \circ \mathbf{B}_v - \mathbf{B}_v \circ \mathbf{B}_u - \Sigma_{u,v} \\
&= R(u, v, .) + A_{[u,v]} + \mathbf{B}_u \circ \mathbf{B}_v - \mathbf{B}_v \circ \mathbf{B}_u - \Sigma_{u,v}.
\end{aligned}$$

Ce qui équivaut à

$$\mathbf{a}\left(\mathbf{A}_{[u,v]} w, z\right) = \mathbf{a}(R(u, v, w), z) + \mathbf{a}\left(A_{[u,v]} w, z\right) - \mathbf{a}(\mathbf{B}_v(\mathbf{B}_u w) - \mathbf{B}_u(\mathbf{B}_v w), z) - \mathbf{a}(\Sigma_{u,v}(w), z).$$

Or, la formule (2.4.4) montre que

$$\mathbf{a}(\mathbf{B}_v(\mathbf{B}_u w) - \mathbf{B}_u(\mathbf{B}_v w), z) = -\mathbf{a}(\mathbf{B}_v(\mathbf{B}_u z) - \mathbf{B}_u(\mathbf{B}_v z), w).$$

Ainsi

$$\mathbf{a}\left(w, \mathbf{A}_{[u,v]} z\right) = -\mathbf{a}(R(u, v, w), z) + \mathbf{a}\left(w, A_{[u,v]} z\right) + \mathbf{a}(\mathbf{B}_v(\mathbf{B}_u w) - \mathbf{B}_u(\mathbf{B}_v w), z) - \mathbf{a}(\Sigma_{u,v}(w), z).$$

En additionnant avec la formule ci-dessus, on trouve

$$\begin{aligned}
2\mathbf{a}(\Sigma_{u,v}(w), z) &= -\mathbf{a}\left(\mathbf{A}_{[u,v]} w, z\right) - \mathbf{a}\left(w, \mathbf{A}_{[u,v]} z\right) \\
&= 2\mathbf{a}\left(\mathbf{B}_{[u,v]} w, z\right).
\end{aligned}$$

On conclut que $\Sigma_{u,v}(w) = \mathbf{B}_{[u,v]} w = A_{[u,v]} w - \mathbf{A}_{[u,v]} w$. ■

Corollaire 2.4.2 *Sous les mêmes hypothèses et notations de la proposition ci-dessus, on a*

$$\mathrm{II}\,(u, v, w, z) - \mathrm{II}\,(u, z, w, v) = 2\mathbf{a}\,(z, R\,(u, w, v))\,,$$

pour tous $u, v, w, z \in \mathcal{G}$.

Preuve. Découle du résultat ci-dessus et de la proposition 2.4.4. ∎

Théorème 2.4.5 *Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème 2.4.3, on a :*

1. *Si* (π, g, D) *est une structure presque de Poisson hessienne, alors* $(\mathcal{G}, [.,.]\,, \mathbf{a}, \mathbf{A})$ *est une algèbre de Lie hessienne.*

2. *L'algèbre de Lie hessienne induite par la structure presque de Poisson hessienne duale de* (π, g, D)*, n'est rien d'autre que l'algèbre de Lie hessienne duale de* $(\mathcal{G}, [.,.]\,, \mathbf{a}, \mathbf{A})$.

Preuve. Soient $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$ tels que $\alpha_x, \beta_x, \gamma_x, \delta_x \in \mathcal{G}$. On pose $u = \alpha_x, v = \beta_x, w = \gamma_x, z = \delta_x$.

1. D'après le théorème 2.4.1, comme D est plate il en est de même pour $\mathbf{A}$.

2. Découle du théorème 2.4.1 et de la deuxième assertion du théorème 2.4.3.

∎

Définition 2.4.8 *On appelle la structure d'algèbre de Lie hessienne donnée par le théorème ci-dessus, la structure d'algèbre de Lie hessienne obtenue en linéarisant la structure presque de Poisson hessienne* (M, π, g, D) *au point* x.

Dans le cas d'une structure de Poisson linéaire, on a le résultat suivant.

Théorème 2.4.6 *Soient* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *une algèbre de Lie et* $(\mathcal{G}^*, \pi)$ *la structure de Poisson linéaire associée. Il y a une correspondance bi-univoque entre les structures de Lie hessiennes sur* $(\mathcal{G}, [.,.])$ *et les structures presque de Poisson hessiennes sur la variété de Poisson linéaire* $(\mathcal{G}^*, \pi)$.

Preuve. Découle des deux théorèmes 2.4.2 et 2.4.4. ∎

Exemple 2.4.3 *Soit l'algèbre de Lie plate $(\mathbb{R}^2, [.,.], \mathbf{A})$ définie dans l'exemple 2.4.1. Si $\mathbf{a}$ est une forme bilinéaire symétrique non dégénérée telle que $(\mathbb{R}^2, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ est une algèbre de Lie hessienne, alors $\mathbf{a}$ est de la forme*

$$\mathbf{a} = \sigma\left(-e^1 \otimes e^1 + 2e^1 \otimes e^2 + 2e^2 \otimes e^1 + 4e^2 \otimes e^2\right),$$

où $\sigma \in \mathbb{R} - \{0\}$ et $\{e^1, e^2\}$ la base duale de la base canonique de $\mathbb{R}^2$. Toutes ces formes ont la même connexion de Levi-Civita infinitésimale A définie par

$$A_{e_1}e_1 = -\frac{1}{2}e_1 - \frac{1}{4}e_2, \qquad A_{e_1}e_2 = -e_1 + \frac{1}{2}e_2, \qquad A_{e_2}e_1 = -e_1 - \frac{1}{2}e_2, \qquad A_{e_2}e_2 = -2e_1 + e_2.$$

Ainsi, sans perdre en généalité, on peut prendre $\sigma = 1$.
Comme $\mathbf{B} = A - \mathbf{A}$ est donnée par

$$\mathbf{B}_{e_1}e_1 = -\frac{3}{2}e_1 - \frac{1}{4}e_2, \qquad \mathbf{B}_{e_1}e_2 = e_1 - \frac{3}{2}e_2 = \mathbf{B}_{e_2}e_1, \qquad \mathbf{B}_{e_2}e_2 = 2e_1 - e_2.$$

Alors, la courbure hessienne $\mathbf{q}$ de l'algèbre de Lie hessienne $(\mathbb{R}^2, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ est donnée par

$$\begin{cases} \mathbf{q}(e_1, e_1, e_1) = 2e_1, & \mathbf{q}(e_2, e_1, e_1) = -4e_1, \quad \mathbf{q}(e_1, e_1, e_2) = \mathbf{q}(e_1, e_2, e_1) = -2e_1 + 4e_2, \\ \mathbf{q}(e_2, e_2, e_2) = -8e_2, & \mathbf{q}(e_1, e_2, e_2) = -4e_2, \quad \mathbf{q}(e_2, e_2, e_1) = \mathbf{q}(e_2, e_1, e_2) = -4e_1 - 2e_2. \end{cases}$$

Ainsi, le tenseur hessien II de $(\mathbb{R}^2, [.,.], \mathbf{a}, \mathbf{A})$ est donné par

$$\begin{cases} \mathrm{II}(e_1, e_1, e_1, e_1) = -2, & \mathrm{II}(e_1, e_1, e_1, e_2) = 4, & \mathrm{II}(e_1, e_1, e_2, e_1) = \mathrm{II}(e_1, e_2, e_1, e_1) = 10, \\ \mathrm{II}(e_2, e_1, e_1, e_1) = 4, & \mathrm{II}(e_1, e_2, e_2, e_1) = -8, & \mathrm{II}(e_1, e_1, e_2, e_2) = \mathrm{II}(e_1, e_2, e_1, e_2) = 12, \\ \mathrm{II}(e_2, e_2, e_2, e_2) = -32, & \mathrm{II}(e_2, e_2, e_2, e_1) = -16, & \mathrm{II}(e_2, e_2, e_1, e_2) = \mathrm{II}(e_2, e_1, e_2, e_2) = -16, \\ \mathrm{II}(e_1, e_2, e_2, e_2) = -16, & \mathrm{II}(e_2, e_1, e_1, e_2) = -8, & \mathrm{II}(e_2, e_2, e_1, e_1) = \mathrm{II}(e_2, e_1, e_2, e_1) = 0. \end{cases}$$

La connexion duale $\mathbf{A}^*$ de $\mathbf{A}$ (par rapport à $\mathbf{a}$) est donnée par

$$\mathbf{A}^*_{e_1}e_1 = -2e_1 - \frac{1}{2}e_2, \qquad \mathbf{A}^*_{e_1}e_2 = -e_2, \qquad \mathbf{A}^*_{e_2}e_1 = -2e_2, \qquad \mathbf{A}^*_{e_2}e_2 = 4e_2.$$

3

Variétés de Jacobi hessiennes

3.1 Préalgébroïdes de Lie associés à une variété de Jacobi

La principale référence de cette section est [2].

3.1.1 Préalgébroïdes de Lie associés à une variété de Jacobi

Une structure de Jacobi sur M est la donnée d'un couple (π, ξ), composé d'un champ de bivecteurs π et d'un champ de vecteurs ξ tels que

$$[\pi, \pi] = 2\xi \wedge \pi \qquad \text{et} \qquad [\xi, \pi] := \mathcal{L}_\xi \pi = 0, \tag{3.1.1}$$

où l'on désigne par $[.,.]$ le crochet de Schouten-Nijenhuis. On dit que (M, π, ξ) est une variété de Jacobi. Le cas $\xi = 0$ correspond à une variété de Poisson (M, π).

Définition 3.1.1 *Rappelons qu'un algébroïde alterné sur une variété différentiable M est un triplet $(E, \sharp_E, [.,.]_E)$ où E est l'espace total d'un fibré vectoriel au-dessus de M, $\sharp_E$ est un morphisme de fibrés vectoriels de E dans TM, appelé l'application ancre, et*

$$\begin{array}{rccc} [.,.]_E : & \Gamma(E) \times \Gamma(E) & \longrightarrow & \Gamma(E), \\ & (s,t) & \longmapsto & [s,t]_E, \end{array}$$

est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire alternée sur l'espace $\Gamma(E)$ des sections de E, vérifiant l'identité de Leibniz :

$$[s, \varphi t]_E = \varphi\, [s,t]_E + \sharp_E(s)(\varphi) t, \quad \forall \varphi \in C^\infty(M),\ \forall s,t \in \Gamma(E).$$

Un algébroïde alterné $(E, \sharp_E, [.,.]_E)$ est un préalgébroïde de Lie si

$$\sharp_E\left([s,t]_E\right) = [\sharp_E(s), \sharp_E(t)], \quad \forall s,t \in \Gamma(E),$$

et un algébroïde de Lie si $(\Gamma(E), [.,.]_E)$ est une algèbre de Lie, c'est-à-dire si

$$[s,[t,r]_E]_E + [t,[r,s]_E]_E + [r,[s,t]_E]_E = 0, \quad \forall s,t,r \in \Gamma(E).$$

Exemple 3.1.1 *Tout sous-fibré de TM est un préalgébroïde de Lie pour l'injection canonique et le crochet de Lie habituel des champs de vecteurs. Un sous-fibré de TM est un algébroïde de Lie si et seulement s'il est intégrable. L'algébroïde de Lie $(TM, \mathrm{id}_M, [.,.])$ est appelé l'algébroïde tangent de M.*

Remarque 3.1.1 *Un algébroïde de Lie est un préalgébroïde de Lie. D'un autre côté, un préalgébroïde de Lie $(E, \sharp_E, [.,.]_E)$ dont l'ancre $\sharp_E$ est un isomorphisme est un algébroïde de Lie isomorphe à l'algébroïde tangent $(TM, \mathrm{id}_M, [.,.])$ de M.*

Exemple 3.1.2 ***(L'algébroïde alterné associé à un champ de bivecteurs)*** *Considérons un champ de bivecteurs π sur M. Soit $\sharp_\pi : T^*M \longrightarrow TM$ le morphisme de fibrés vectoriels défini par*

$$\beta\left(\sharp_\pi(\alpha)\right) := \pi(\alpha, \beta)$$

et soit l'application $[.,.]_\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ définie par

$$[\alpha,\beta]_\pi := \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha - d\left(\pi(\alpha,\beta)\right),$$

appelée le crochet de Koszul. Le triplet $(T^*M, \sharp_\pi, [.,.]_\pi)$ est un préalgébroïde de Lie et, de plus, quelles que soient les formes différentielles $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ on a

$$\gamma\left(\sharp_\pi\left([\alpha,\beta]_\pi\right) - [\sharp_\pi(\alpha), \sharp_\pi(\beta)]\right) = \frac{1}{2}[\pi,\pi](\alpha,\beta,\gamma), \tag{3.1.2}$$

et quelles que soient les fonctions $\varphi, \psi, \phi \in C^\infty(M)$ on a

$$[d\varphi,[d\psi,d\phi]_\pi]_\pi + [d\psi,[d\phi,d\varphi]_\pi]_\pi + [d\phi,[d\varphi,d\psi]_\pi]_\pi = -\frac{1}{2}d\left([\pi,\pi](d\varphi,d\psi,d\phi)\right). \tag{3.1.3}$$

Ainsi, $(T^*M, \sharp_\pi, [.,.]_\pi)$ est un algébroïde de Lie si et seulement si π est un tenseur de Poisson.

Définition 3.1.2 *Soit π un tenseur de Poisson sur M, le triplet $(T^*M, \sharp_\pi, [.,.]_\pi)$ est appelé l'algébroïde de Lie associé à la variété de Poisson (M,π), ou l'algébroïde cotangent de la variété de Poisson (M,π).*

Dans le cas où le tenseur de Poisson π est non dégénéré, c'est-à-dire le cas symplectique, l'algébroïde cotangent de la variété de Poisson (M, π) est isomorphe à l'algébroïde tangent de la variété M.

Soient π un champ de bivecteurs et ξ un champ de vecteurs sur M. Considérons le morphisme de fibrés vectoriels $\sharp_{\pi,\xi} : T^*M \longrightarrow TM$ défini par

$$\sharp_{\pi,\xi}(\alpha) = \sharp_\pi(\alpha) + \alpha(\xi)\xi$$

et, pour une 1-forme $\lambda \in \Omega^1(M)$, l'application $[.,.]^\lambda_{\pi,\xi} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$ définie par

$$[\alpha, \beta]^\lambda_{\pi,\xi} := [\alpha, \beta]_\pi + \alpha(\xi)\left(\mathcal{L}_\xi\beta - \beta\right) - \beta(\xi)\left(\mathcal{L}_\xi\alpha - \alpha\right) - \pi(\alpha, \beta)\lambda,$$

où $\sharp_\pi$ et $[.,.]_\pi$ sont respectivement le morphisme de fibrés et le crochet de Koszul définis dans l'exemple 3.1.2. Alors $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^\lambda_{\pi,\xi})$ est un algébroïde alterné.

Définition 3.1.3 *Le triplet $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^\lambda_{\pi,\xi})$ est appelé l'algébroïde alterné associé à (π, ξ, λ).*

Remarque 3.1.2 *Dans le cas où $\xi = \lambda = 0$, le triplet $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^\lambda_{\pi,\xi})$ n'est rien d'autre que l'algébroïde alterné $(T^*M, \sharp_\pi, [.,.]_\pi)$ associé au champ de bivecteurs π. Donc c'est un algébroïde de Lie si et seulement si (M, π) est une variété de Poisson, l'algébroïde cotangent de la variété de Poisson (M, π).*

Théorème 3.1.1 *Supposons que (M, π, ξ) est une variété de Jacobi, i. e. que le couple (π, ξ) vérifie les identités $\mathcal{L}_\xi\pi = 0$ et $[\pi, \pi] = 2\xi \wedge \pi$, et soit $\lambda \in \Omega^1(M)$. On a*

$$\sharp_{\pi,\xi}([\alpha, \beta]^\lambda_{\pi,\xi}) - [\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)] = \pi(\alpha, \beta)\left(\xi - \sharp_{\pi,\xi}(\lambda)\right),$$

quelles que soient les formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. On a d'une part

$$\begin{aligned}
\sharp_{\pi,\xi}([\alpha, \beta]^\lambda_{\pi,\xi}) &= \sharp_\pi\left([\alpha, \beta]^\lambda_{\pi,\xi}\right) + [\alpha, \beta]^\lambda_{\pi,\xi}(\xi)\xi \\
&= \sharp_\pi\left([\alpha, \beta]_\pi\right) + \alpha(\xi)\sharp_\pi(\mathcal{L}_\xi\beta) - \alpha(\xi)\sharp_\pi(\beta) - \beta(\xi)\sharp_\pi(\mathcal{L}_\xi\alpha) + \beta(\xi)\sharp_\pi(\alpha) \\
&\quad -\pi(\alpha, \beta)\sharp_\pi(\lambda) + \left([\alpha, \beta]_\pi(\xi) + \alpha(\xi)\mathcal{L}_\xi\beta(\xi) - \beta(\xi)\mathcal{L}_\xi\alpha(\xi) - \pi(\alpha, \beta)\lambda(\xi)\right)\xi
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}[][\alpha,\beta]_\pi(\xi) &= \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\beta(\xi) - \mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\alpha(\xi) - d\left(\pi(\alpha,\beta)\right)(\xi)\\
&= \sharp_\pi(\alpha)(\beta(\xi)) - \beta(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\alpha)}\xi) - \sharp_\pi(\beta)(\alpha(\xi)) + \alpha(\mathcal{L}_{\sharp_\pi(\beta)}\xi) - \xi\left(\pi(\alpha,\beta)\right)\\
&= \sharp_\pi(\alpha)(\beta(\xi)) + \beta(\mathcal{L}_\xi(\sharp_\pi(\alpha))) - \sharp_\pi(\beta)(\alpha(\xi)) - \alpha(\mathcal{L}_\xi(\sharp_\pi(\beta))) - \xi\left(\pi(\alpha,\beta)\right).\end{aligned}$$

Comme nous avons supposé que $\mathcal{L}_\xi\pi = 0$, alors on a

$$\mathcal{L}_\xi(\sharp_\pi(\alpha)) = \sharp_\pi(\mathcal{L}_\xi\alpha), \quad \mathcal{L}_\xi(\sharp_\pi(\beta)) = \sharp_\pi(\mathcal{L}_\xi\beta)$$

et

$$\xi(\pi(\alpha,\beta)) = \pi(\mathcal{L}_\xi\alpha,\beta) + \pi(\alpha,\mathcal{L}_\xi\beta),$$

et par conséquent

$$[\alpha,\beta]_\pi(\xi) = \sharp_\pi(\alpha)(\beta(\xi)) - \sharp_\pi(\beta)(\alpha(\xi)).$$

En remplaçant dans la dernière expression de $\sharp_{\pi,\xi}([\alpha,\beta]^\lambda_{\pi,\xi})$ ci-dessus et en tenant compte du fait qu'on a $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \sharp_\pi(\lambda) + \lambda(\xi)\xi$, on obtient

$$\begin{aligned}\sharp_{\pi,\xi}([\alpha,\beta]^\lambda_{\pi,\xi}) &= \sharp_\pi\left([\alpha,\beta]_\pi\right) + \alpha(\xi)\sharp_\pi(\mathcal{L}_\xi\beta) - \alpha(\xi)\sharp_\pi(\beta) - \beta(\xi)\sharp_\pi(\mathcal{L}_\xi\alpha) + \beta(\xi)\sharp_\pi(\alpha)\\
&\quad -\pi(\alpha,\beta)\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) + \left(\sharp_\pi(\alpha)(\beta(\xi)) - \sharp_\pi(\beta)(\alpha(\xi)) + \alpha(\xi)\mathcal{L}_\xi\beta(\xi) - \beta(\xi)\mathcal{L}_\xi\alpha(\xi)\right)\xi\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\begin{aligned}[][\sharp_{\pi,\xi}(\alpha),\sharp_{\pi,\xi}(\beta)] &= [\sharp_\pi(\alpha) + \alpha(\xi)\xi, \sharp_\pi(\beta) + \beta(\xi)\xi]\\
&= [\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)] - \beta(\xi)\mathcal{L}_\xi(\sharp_\pi(\alpha)) + \alpha(\xi)\mathcal{L}_\xi(\sharp_\pi(\beta))\\
&\quad + \left(\sharp_\pi(\alpha)(\beta(\xi)) - \sharp_\pi(\beta)(\alpha(\xi)) - \beta(\xi)\xi(\alpha(\xi)) + \alpha(\xi)\xi(\beta(\xi))\right)\xi.\end{aligned}$$

Ainsi, toujours avec l'hypothèse $\mathcal{L}_\xi\pi = 0$, on obtient

$$\begin{aligned}\sharp_{\pi,\xi}([\alpha,\beta]^\lambda_{\pi,\xi}) - [\sharp_{\pi,\xi}(\alpha),\sharp_{\pi,\xi}(\beta)] &= \sharp_\pi\left([\alpha,\beta]_\pi\right) - [\sharp_\pi(\alpha),\sharp_\pi(\beta)]\\
&\quad -\alpha(\xi)\sharp_\pi(\beta) + \beta(\xi)\sharp_\pi(\alpha) - \pi(\alpha,\beta)\sharp_{\pi,\xi}(\lambda).\end{aligned}$$

Soit maintenant $\gamma \in \Omega^1(M)$. De cette dernière égalité, de l'identité (3.1.2) et du fait qu'on a

$$\begin{aligned}\xi\wedge\pi(\alpha,\beta,\gamma) &= \alpha(\xi)\pi(\beta,\gamma) - \beta(\xi)\pi(\alpha,\gamma) + \gamma(\xi)\pi(\alpha,\beta)\\
&= \gamma\left(\alpha(\xi)\sharp_\pi(\beta) - \beta(\xi)\sharp_\pi(\alpha) + \pi(\alpha,\beta)\xi\right)\end{aligned}$$

on déduit que

$$\gamma\left(\sharp_{\pi,\xi}([\alpha,\beta]^{\lambda}_{\pi,\xi})-[\sharp_{\pi,\xi}(\alpha),\sharp_{\pi,\xi}(\beta)]\right)=\left(\frac{1}{2}[\pi,\pi]-\xi\wedge\pi\right)(\alpha,\beta,\gamma)-\pi(\alpha,\beta)\gamma(\sharp_{\pi,\xi}(\lambda)-\xi),$$

d'où l'identité du théorème dont l'une des hypothèses est que $[\pi,\pi]=2\xi\wedge\pi$. ■

Corollaire 3.1.1 *Soit (M,π,ξ) une variété de Jacobi et soit $\lambda\in\Omega^1(M)$. Si $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda)=\xi$, alors l'algébroïde alterné $(T^*M,\sharp_{\pi,\xi},[.,.]^{\lambda}_{\pi,\xi})$ associé au triplet (π,ξ,λ) est un préalgébroïde de Lie, c'est-à-dire*

$$\sharp_{\pi,\xi}([\alpha,\beta]^{\lambda}_{\pi,\xi})=[\sharp_{\pi,\xi}(\alpha),\sharp_{\pi,\xi}(\beta)] \tag{3.1.4}$$

quelles que soient les formes $\alpha,\beta\in\Omega^1(M)$. La réciproque aussi est vraie si $\pi\neq 0$.

Preuve. Découle du théorème ci-dessus. ■

3.1.2 Algébroïde cotangent à une variété de contact

Soit M une variété différentiable de dimension impaire $2n+1$, $n\in\mathbb{N}^*$. Une 1-forme différentielle η sur M est dite de contact si la forme $\eta\wedge(d\eta)^{\wedge^n}$ est une forme volume. Dans ce cas, on dit que (M,η) est une variété de contact. Soit (M,η) une variété de contact, il existe un unique champ de vecteurs ξ sur M, appelé champ caractéristique ou champ de Reeb associé à (M,η), tel que

$$i_\xi d\eta := d\eta(\xi,.)=0 \qquad \text{et} \qquad i_\xi\eta:=\eta(\xi)=1.$$

De la formule de cartan $\mathcal{L}_\xi=i_\xi\circ d+d\circ i_\xi$, on déduit que

$$\mathcal{L}_\xi\eta=0 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{L}_\xi d\eta=0.$$

L'ensemble $\ker\eta:=\{X\in\chi(M):\ \eta(X)=0\}$ est appelé la distribution caractéristique de la structure de contact (M,η). L'application $\flat_\eta:TM\to T^*M$ définie par

$$\flat_\eta(X)=-i_Xd\eta+\eta(X)\eta,$$

est un isomorphisme de fibrés vectoriels. Notons $\sharp_\eta$ son isomorphisme inverse. Remarquons que $\flat_\eta(\xi)=\eta$. Si on considère le champ de bivecteurs π défini par

$$\pi(\alpha,\beta)=d\eta\left(\sharp_\eta(\alpha),\sharp_\eta(\beta)\right),$$

le couple (π,ξ) définit bien une structure de Jacobi sur M, il s'agit de la structure de Jacobi associée à la structure de contact (M,η).

Proposition 3.1.1 *Soient (M,η) une variété de contact et (π,ξ) la structure de Jacobi associée. Alors l'algébroïde alterné $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^{\eta}_{\pi,\xi})$ est un algébroïde de Lie isomorphe à l'algébroïde tangent de M.*

Preuve. Montrons que $\sharp_{\pi,\xi}$ est égal à l'isomorphisme $\sharp_\eta$, inverse de l'isomorphisme $\flat_\eta$. Soient $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$, et soient X, Y tels que $\alpha = \flat_\eta(X)$ et $\beta = \flat_\eta(Y)$. Remarquons d'abord qu'on a

$$\alpha(\xi) = \flat_\eta(X)(\xi) = d\eta(\xi, X) + \eta(X)\eta(\xi) = \eta(X),$$

et de même $\beta(\xi) = \eta(Y)$. Maintenant, on a

$$\begin{aligned}
\beta(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)) &= \beta(\sharp_\pi(\alpha) + \alpha(\xi)\xi) \\
&= \beta(\sharp_\pi(\alpha)) + \alpha(\xi)\beta(\xi) \\
&= \pi(\alpha,\beta) + \eta(X)\eta(Y) \\
&= d\eta(X,Y) + \eta(X)\eta(Y) \\
&= (-i_Y d\eta + \eta(Y)\eta)(X) \\
&= \flat_\eta(Y)(X) \\
&= \beta(\sharp_\eta(\alpha)).
\end{aligned}$$

Donc $\sharp_{\pi,\xi} = \sharp_\eta$ et en particulier $\sharp_{\pi,\xi}(\eta) = \sharp_\eta(\eta) = \xi$. La proposition découle alors du corollaire 3.1.1 et de la remarque 3.1.1. ■

Remarque 3.1.3 *Donc si (M,η) est une variété de contact et si (π,ξ) est la structure de Jacobi associée, d'après la proposition ci-dessus, on a $\sharp_{\pi,\xi} = \sharp_\eta$. Si on pose $[.,.]_\eta = [.,.]^\eta_{\pi,\xi}$, alors on a un algébroïde de Lie $(T^*M, \sharp_\eta, [.,.]_\eta)$ associé naturellement à la variété de contact (M,η). On pourra l'appeler l'algébroïde cotangent de la variété de contact (M,η).*

3.1.3 Algébroïde cotangent à une variété localement conformément symplectique

Une structure localement conformément symplectique est un triplet (M,ω,θ) composé d'une variété différentiable M, d'une 1-forme différentielle fermée θ et d'une 2-forme différentielle non dégénérée ω telles que

$$d\omega + \theta \wedge \omega = 0.$$

Dans le cas particulier où la forme θ est exacte (i. e., $\theta = df$), on dit que (M,ω,df) est conformément symplectique. Une variété (M,ω,df) est conformément symplectique si et seulement si $(M, e^f\omega)$ est symplectique, ce qui justifie la terminologie. Soit (M,ω,θ)

une variété localement conformément symplectique, comme la 2-forme ω est non dégénérée forcément la variété M est de dimension paire.

La proposition ci-dessous montre que la donnée d'une variété localement conformément symplectique est équivalent à la donnée d'une variété de Jacobi dont le champ de bivecteurs sous-jacent est non dégénéré (voir aussi [9], § 2.3, exemple 4). N'ayant pas trouvé de démonstration dans la littérature, nous en donnons une ici.

Soit une variété différentiable M de dimension paire. Soient $\omega \in \Omega^2(M)$ une 2-forme non dégénérée et $\theta \in \Omega^1(M)$. On associe au couple (ω, θ) un couple (π, ξ) où ξ est le champ de vecteurs sur M défini par

$$i_\xi \omega = -\theta, \tag{3.1.5}$$

et π le champ de bivecteurs sur M défini par

$$i_{\sharp_\pi(\alpha)}\omega = -\alpha, \qquad \forall \alpha \in \Omega^1(M). \tag{3.1.6}$$

Inversement, à un couple (π, ξ), où π est un champ de bivecteurs non dégénéré et ξ est un champ de vecteurs sur M, on associe un couple (ω, θ) où ω est la 2-forme différentielle sur M définie par

$$\omega(X,Y) = \pi(\sharp_\pi^{-1}(X), \sharp_\pi^{-1}(Y)) \tag{3.1.7}$$

et θ la 1-forme différentielle

$$\theta = \sharp_\pi^{-1}(\xi). \tag{3.1.8}$$

Lemme 3.1.1 *Soient (ω, θ) et (π, ξ) deux couples comme ci-dessus. Quels que soient les champs de vecteurs $X, Y, Z \in \chi(M)$, si $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ sont les 1-formes différentielles telles que $X = \sharp_\pi(\alpha)$, $Y = \sharp_\pi(\beta)$ et $Z = \sharp_\pi(\gamma)$, alors on a*

1. $(dw + \theta \wedge \omega)(X,Y,Z) = \left(\frac{1}{2}[\pi,\pi] - \xi \wedge \pi\right)(\alpha, \beta, \gamma)$.

2. $\mathcal{L}_\xi \omega(X,Y) = -\mathcal{L}_\xi \pi(\alpha, \beta)$.

Preuve. Rappelons que les couples (ω, ξ) et (π, ξ) sont associés l'un à l'autre par les relations (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) et (3.1.8). On a

$$\omega([X,Y], Z) = -i_Z\omega([X,Y]) = \gamma([X,Y]),$$

et en utilisant l'identité (3.1.2), il vient

$$\omega([X,Y], Z) = -\frac{1}{2}[\pi,\pi](\alpha,\beta,\gamma) + \pi([\alpha,\beta]_\pi, \gamma).$$

Ainsi

$$\begin{array}{rl} & \omega([X,Y],Z)+\omega([Y,Z],X)+\omega([Z,X],Y) \\ = & -\frac{3}{2}\,[\pi,\pi]\,(\alpha,\beta,\gamma)+\pi([\alpha,\beta]_\pi\,,\gamma)+\pi([\beta,\gamma]_\pi\,,\alpha)+\pi([\gamma,\alpha]_\pi\,,\beta) \\ = & -\frac{1}{2}\,[\pi,\pi]\,(\alpha,\beta,\gamma)+\sharp_\pi(\alpha)\pi(\beta,\gamma)+\sharp_\pi(\beta)\pi(\gamma,\alpha)+\sharp_\pi(\gamma)\pi(\alpha,\beta) \\ = & -\frac{1}{2}\,[\pi,\pi]\,(\alpha,\beta,\gamma)+X(\omega(Y,Z))+Y(\omega(Z,X))+Z(\omega(X,Y)), \end{array}$$

d'où l'on déduit l'égalité

$$d\omega(X,Y,Z)=\frac{1}{2}\,[\pi,\pi]\,(\alpha,\beta,\gamma). \tag{3.1.9}$$

Par ailleurs, remarquons que $\theta(X)=-i_\xi\omega(X)=i_X\omega(\xi)=i_{\sharp_\pi(\alpha)}\omega(\xi)=-\alpha(\xi)$, de même $\theta(Y)=-\beta(\xi)$ et $\theta(Z)=-\gamma(\xi)$, d'où

$$\begin{aligned} \theta\wedge\omega(X,Y,Z) &= \theta(X)\omega(Y,Z)-\theta(Y)\omega(X,Z)+\theta(Z)\omega(X,Y) \\ &= -\alpha(\xi)\pi(\beta,\gamma)+\beta(\xi)\pi(\alpha,\gamma)-\gamma(\xi)\pi(\alpha,\beta) \\ &= -\xi\wedge\pi(\alpha,\beta,\gamma). \end{aligned}$$

D'où, avec (3.1.9), la première assertion du lemme. Montrons la deuxième assertion. Remarquons qu'on a

$$\pi(\mathcal{L}_\xi\alpha,\beta)=-\mathcal{L}_\xi\alpha(\sharp_\pi(\beta))=-\mathcal{L}_\xi\alpha(Y)=-\xi(\alpha(Y))+\alpha(\mathcal{L}_\xi Y)=\xi(\omega(X,Y))-\omega(X,\mathcal{L}_\xi Y).$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi\pi(\alpha,\beta) &= \xi(\pi(\alpha,\beta))-\pi(\mathcal{L}_\xi\alpha,\beta)-\pi(\alpha,\mathcal{L}_\xi\beta) \\ &= \xi(\omega(X,Y))-\xi(\omega(X,Y))+\omega(X,\mathcal{L}_\xi Y)-\xi(\omega(X,Y))+w(\mathcal{L}_\xi X,Y) \\ &= -\xi(\omega(X,Y))+\omega(X,\mathcal{L}_\xi Y)+w(\mathcal{L}_\xi X,Y) \\ &= -\mathcal{L}_\xi\omega(X,Y). \end{aligned}$$

■

Proposition 3.1.2 *Toute variété localement conformément symplectique (M,ω,θ) possède une structure de Jacobi associée. Inversement, toute variété de Jacobi (M,π,ξ) dont le champ de bivecteurs π est non dégénéré admet une structure localement conformément symplectique (ω,θ) telle que (π,ξ) est la structure de Jacobi associée.*

Preuve. Supposons que (ω,θ) et (π,ξ) sont des couples associés l'un à l'autre par les relations (3.1.5), (3.1.6), (3.1.7) et (3.1.8). De l'assertion 1. du lemme 3.1.1 on déduit que l'identié $d\omega + \theta \wedge \omega = 0$ est satisfaite si et seulement l'identité $[\pi, \pi] = 2\xi \wedge \pi$ l'est, et si l'une des deux est satisfaite alors, en utilisant la formule de Cartan, on obtient que

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_\xi \omega &= d(i_\xi \omega) + i_\xi d\omega \\ &= -d\theta - i_\xi(\theta \wedge \omega) \\ &= -d\theta - \theta(\xi)\omega - \theta \wedge i_\xi \omega \\ &= -d\theta + i_\xi \omega(\xi) + \theta \wedge \theta \\ &= -d\theta, \end{aligned}$$

donc, avec l'assertion 2. du lemme 3.1.1, que $\mathcal{L}_\xi \pi = 0$ si et seulement si $d\theta = 0$. Ainsi, le couple (ω, θ) définit une structure localement conformément symplectique sur M si et seulement si le couple (π, ξ) est une structure de Jacobi sur M. ■

Proposition 3.1.3 *Soit (M, ω, θ) variété localement conformément symplectique et soit (π, ξ) la structure de Jacobi associée. Alors l'algébroïde alterné $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^\theta_{\pi,\xi})$ est un algébroïde de Lie isomorphe à l'algébroïde tangent de M.*

Preuve. On a $\theta(\xi) = -i_\xi\omega(\xi) = 0$, donc $\sharp_{\pi,\xi}(\theta) = \sharp_\pi(\theta) + \theta(\xi)\xi = \sharp_\pi(\theta) = \xi$. Donc, d'après le corollaire 3.1.1, le triplet $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^\theta_{\pi,\xi})$ est un préalgébroïde de Lie. D'arpès la remarque 3.1.1, il nous reste à montrer que $\sharp_{\pi,\xi}$ est un isomorphisme. Il suffit de montrer qu'il est injectif. Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$ tel que $\sharp_{\pi,\xi}(\alpha) = 0$. Alors $\theta(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)) = 0$, c'est-à-dire $\theta(\sharp_\pi(\alpha)) + \alpha(\xi)\theta(\xi) = 0$. Comme $\theta(\xi) = 0$ il vient que $\theta(\sharp_\pi(\alpha)) = 0$, donc que $\alpha(\xi) = \alpha(\sharp_\pi(\theta)) = -\theta(\sharp_\pi(\alpha)) = 0$. Par conséquent, $\sharp_\pi(\alpha) = \sharp_\pi(\alpha) + \alpha(\xi)\xi = \sharp_{\pi,\xi}(\alpha) = 0$. Comme le champ de bivecteurs π est non dégénéré, on en déduit que $\alpha = 0$. ■

Remarque 3.1.4 *Donc si (M, ω, θ) est une variété localement conformément symplectique et si (π, ξ) est la structure de Jacobi associée, d'après la proposition ci-dessus, si on pose $\sharp_{\omega,\theta} := \sharp_{\pi,\xi}$, donc*

$$\sharp_{\omega,\theta}(\alpha) = \sharp_\omega(\alpha) + \alpha(\sharp_\omega(\theta))\sharp_\omega(\theta),$$

et on pose $[.,.]_{\omega,\theta} := [.,.]^\theta_{\pi,\xi}$, alors on a un algébroïde de Lie $(T^*M, \sharp_{\omega,\theta}, [.,.]_{\omega,\theta})$ associé naturellement à la variété localement conformément symplectique (M, ω, θ). On pourra l'appeler l'algébroïde cotangent de la variété localement conformément symplectique (M, ω, θ).

3.2 Variétés de Jacobi localement plates

3.2.1 Définition et premières propriétés

Soient π un champ de bivecteurs et ξ un champ de vecteurs sur M. Une connexion contravariante D sur M relativement au couple (π, ξ) est une application $\mathbb{R}$-bilinéaire

$$\begin{array}{rccl} D: & \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) & \longrightarrow & \Omega^1(M), \\ & (\alpha, \beta) & \longmapsto & D_\alpha \beta, \end{array}$$

telle que

$$D_{\varphi\alpha}\beta = \varphi D_\alpha \beta \qquad \text{et} \qquad D_\alpha(\varphi\beta) = (\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\varphi)\beta + \varphi D_\alpha \beta,$$

pour tous $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M), \alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.
Dans le cas où le couple (π, ξ) définit une structure de Jacobi sur M, on dit que D est une connexion contravariante sur la variété de Jacobi (M, π, ξ).

Définition 3.2.1 ***Torsion et courbure d'une connexion contravariante sur une variété de Jacobi***
Soit D une connexion contravariante sur M relativement au couple (π, ξ) et soit $\lambda \in \Omega^1(M)$. La torsion T_λ^D et la courbure R_λ^D de D relativement à λsont respectivement définies par

$$T_\lambda^D(\alpha, \beta) = D_\alpha\beta - D_\beta\alpha - [\alpha, \beta]_{\pi,\xi}^\lambda$$

et

$$R_\lambda^D(\alpha, \beta) = D_\alpha \circ D_\beta - D_\beta \circ D_\alpha - D_{[\alpha,\beta]_{\pi,\xi}^\lambda}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.
On dit que D est symétrique ou sans torsion (resp. plate) relativement à λ si $T_\lambda^D = 0$ (resp. $R_\lambda^D = 0$).

Remarque 3.2.1 *Supposons que le champ de bivecteurs π est non nul et soient $\lambda, \vartheta \in \Omega^1(M)$.*

1. *Si $T_\lambda^D = T_\vartheta^D$ alors $\lambda = \vartheta$. En effet, on a*

$$T_\lambda^D(\alpha, \beta) - T_\vartheta^D(\alpha, \beta) = \pi(\alpha, \beta)(\vartheta - \lambda)$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Ainsi, si D est symétrique relativement à λ et relativement à ϑ, alors forcément $\lambda = \vartheta$.

2. *L'application*

$$D \longmapsto \left(\widetilde{D} : (\alpha, \beta) \longmapsto \frac{1}{2} \pi (\alpha, \beta) (\lambda - \vartheta) + D_\alpha \beta \right),$$

établit une bijection entre les connexions contravariantes symétriques relativement à λ et celles symétriques relativement à ϑ. Cette bijection préserve les géodésiques car π est antisymétrique.

Définition 3.2.2 ***Variétés (presque) de Jacobi localement plates***
Soient π un champ de bivecteurs et ξ un champ de vecteurs sur M. Soit D une connexion contravariante sur M relativement au couple (π, ξ). On dit que (M, π, ξ, D) est une variété presque de Jacobi localement plate si D est symétrique et plate relativement à une 1-forme λ. On dit que (M, π, ξ, D) est une variété de Jacobi localement plate si de plus (π, ξ) est une structure de Jacobi et $D\sharp_{\pi,\xi} = 0$.

Exemple 3.2.1 ***Variétés de Poisson localement plates***
Une variété (presque) de Poisson localement plate (M, π, D) est une variété (presque) de Jacobi localement plate (M, π, ξ, D) avec $\xi = 0$ et $\lambda = 0$.

Définition 3.2.3 ***Variétés de contact localement plates***
Soit (M, η) une variété de contact et soit (π, ξ) la structure de Jacobi associée. On dit que (M, η, D) est une variété de contact localement plate si (M, π, ξ, D) est une variété de Jacobi localement plate relativement à η.

Définition 3.2.4 ***Variétés localement conformément symplectiques localement plates***
Soit (M, ω, θ) une variété localement conformément symplectique et soit (π, ξ) la structure de Jacobi associée. On dit que (M, ω, θ, D) est une variété localement conformément symplectique localement plate si (M, π, ξ, D) est une variété de Jacobi localement plate relativement à θ.

Théorème 3.2.1 *Soit (M, π, ξ) une variété de Jacobi. On suppose que $\sharp_{\pi,\xi}$ est un isomorphisme. Soit ∇ une connexion sur M et soit D la connexion contravariante définie par*

$$D_\alpha \beta := \sharp_{\pi,\xi}^{-1} \left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)} \left(\sharp_{\pi,\xi} (\beta) \right) \right), \tag{3.2.1}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. On a :

1. *La connexion ∇ est symétrique si et seulement si D l'est (relativement à $\lambda = \sharp_{\pi,\xi}^{-1}(\xi)$).*

2. La connexion ∇ est plate si et seulement si D est plate relativement à $\sharp_{\pi,\xi}^{-1}(\xi)$.

Preuve. Soit $\lambda = \sharp_{\pi,\xi}^{-1}(\xi)$. D'après le corollaire 3.1.1, on a

$$\sharp_{\pi,\xi}\left([\alpha,\beta]_{\pi,\xi}^{\lambda}\right) = [\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)],$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$. De l'identité (3.2.1), il vient que

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(T_\lambda^D(\alpha,\beta)\right) = T^\nabla\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right)$$

et

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(R_\lambda^D(\alpha,\beta)\gamma\right) = R^\nabla\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right)\sharp_{\pi,\xi}(\gamma),$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$. Les deux assertions du théorème en découlent. ∎

Proposition 3.2.1 *Soient π un champ de bivecteurs, ξ un champ de vecteurs et λ une 1-forme sur M. Soit ∇ une connexion sur M et soit $D^{\pi,\xi}$ la connexion contravariante définie par*

$$D_\alpha^{\pi,\xi}\beta = \nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\beta,$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$. On note $T_\lambda^{\pi,\xi}$(resp. $R_\lambda^{\pi,\xi}$) la torsion (resp. la courbure) de $D^{\pi,\xi}$ relativement à λ. On a d'une part

$$\left(R_\lambda^{\pi,\xi}(\alpha,\beta)\gamma\right)(X) = \left(\nabla_{[\sharp_{\pi,\xi}(\alpha),\sharp_{\pi,\xi}(\beta)]-\sharp_{\pi,\xi}\left([\alpha,\beta]_{\pi,\xi}^{\lambda}\right)}\gamma\right)(X) - \gamma\left(R^\nabla\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right)X\right),$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$ et $X \in \chi(M)$. D'autre part, si on suppose que $\nabla\sharp_{\pi,\xi} = 0$ alors

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(T_\lambda^{\pi,\xi}(\alpha,\beta)\right) = T^\nabla\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right) + \sharp_{\pi,\xi}\left([\alpha,\beta]_{\pi,\xi}^{\lambda}\right) - [\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)],$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. On a

$$\begin{aligned}\left(D_\alpha^{\pi,\xi}\left(D_\beta^{\pi,\xi}\gamma\right)\right)(X) &= \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(\gamma(X))\right) - \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\gamma\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\beta)}X\right)\right) \\ &\quad -\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\left(\gamma\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}X\right)\right) + \gamma\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\beta)}\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}X\right)\right).\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}\left(D_\alpha^{\pi,\xi}\left(D_\beta^{\pi,\xi}\gamma\right) - D_\beta^{\pi,\xi}\left(D_\alpha^{\pi,\xi}\gamma\right)\right)(X) &= [\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)](\gamma(X)) \\ &\quad +\gamma\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\beta)}\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}X\right) - \nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\beta)}X\right)\right),\end{aligned}$$

D'où la première identité de la proposition. D'autre part, si $\nabla\sharp_{\pi,\xi} = 0$ alors

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(D_\alpha^{\pi,\xi}\beta\right) = \nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right),$$

d'où la seconde identité de la proposition. ∎

Corollaire 3.2.1 *Sous les mêmes hypothèses et notations de la proposition ci-dessus, si de plus* (π, ξ) *est une structure de Jacobi et* $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$*, alors la courbure de* ∇ *est nulle si et seulement si* D *est de courbure nulle également.*
On suppose de plus que $\sharp_{\pi,\xi}$ *est inversible et que* $\nabla \sharp_{\pi,\xi} = 0$*, alors* (M, π, ξ, D) *est une variété de Jacobi localement plate si et seulement si* (M, ∇) *est une variété localement plate.*

Preuve. Découle du corollaire 3.1.1 et de la proposition ci-dessus. ■

3.2.2 La cohomologie de Boyom d'une variété de Jacobi localement plate

Définition 3.2.5 ***La KV-algèbre associée à une variété de Jacobi localement plate***
Soit (M, π, ξ, D) *une variété presque de Jacobi localement plate. Sur l'espace vectoriel* $\Omega^1(M)$*, on définit l'application* $\mathbb{R}$*-bilinéaire*

$$(\alpha, \beta) \longmapsto \alpha \cdot \beta := D_\alpha \beta.$$

Ainsi, $(\Omega^1(M), D)$ *est une KV-algèbre, appelée la KV-algèbre associée à variété presque de Jacobi localement plate* (M, π, ξ, D)*.*

Exemple 3.2.2 *Si* (M, π, ξ, D) *est une variété presque de Jacobi localement plate dont la structure de Jacobi sous-jacente* (π, ξ) *est celle associée à une variété de contact (resp. associée à une variété localement conformément symplectique), la KV-algèbre asociée sera appelée la KV-algèbre associée à une variété de contact localement plate (resp. associée à une variété localement conformément symplectique).*

Remarque 3.2.2 *Soit* (M, π, ξ, D) *une variété de Jacobi localement plate. L'application*

$$\begin{array}{rcl} \cdot : \Omega^1(M) \times \mathcal{C}^\infty(M) & \longrightarrow & \mathcal{C}^\infty(M), \\ (\alpha, \varphi) & \longmapsto & \alpha \cdot \varphi := \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(\varphi), \end{array}$$

définie sur $\mathcal{C}^\infty(M)$ *une structure de module de Boyom à gauche sur* $(\Omega^1(M), D)$*. Ceci découle immédiatement de l'égalité (**??**).*

Définition 3.2.6 ***La cohomologie de Boyom d'une variété de Jacobi localement plate***
Soit $(\Omega^1(M), D)$ *la KV-algèbre associée à la variété de Jacobi localement plate* (M, π, ξ, D)*. On note* $\left(\mathbf{C}_B^q(M, \pi, \xi) := \mathbf{C}_B^q(\Omega^1(M), \mathcal{C}^\infty(M)), \delta_q\right)_{q \in \mathbb{N}}$ *le complexe de Boyom dont les*

cochaines sont les champs de q-tenseurs contravariants sur M, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, et $\mathbf{C}_B^0(M,\pi,\xi) = J(\mathcal{C}^\infty(M))$. On note $H_B^*(M,\pi,\xi)$ la cohomologie de Boyom de ce complexe et on l'appelle la cohomologie de Boyom de la variété de Jacobi localement plate (M,π,ξ,D).

Dans le cas où $\xi = \lambda = 0$, on retrouve la notion de la cohomologie de Boyom d'une variété de Poisson localement plate.

Proposition 3.2.2 *Soient (M,∇) une variété localement plate et (M,π,ξ,D) une variété de Jacobi localement plate.*
On suppose que $\sharp_{\pi,\xi} : (\Omega^1(M), D) \longrightarrow (\chi(M), \nabla)$ est un morphisme de KV-algèbres, alors $\sharp_{\pi,\xi}$ réalise un morphisme entre $H_B^*(M,\pi,\xi)$ et $H_B^*(M)$.

Preuve. Le morphisme $\sharp_{\pi,\xi}$ induit naturellement une application linéaire, que l'on note encore $\sharp_{\pi,\xi}$, définie par

$$\begin{array}{llll} \sharp_{\pi,\xi}: & \mathbf{C}_B^q(M) & \longrightarrow & \mathbf{C}_B^q(M,\pi,\xi), \\ & \Phi & \longmapsto & ((\alpha_1,...,\alpha_q) \longmapsto (-1)^q \Phi(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_1),...,\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_q))), \end{array}$$

pour tout $q \in \mathbb{N}^*$, et $\sharp_{\pi,\xi}(\varphi) = \varphi$, pour tout $\mathbf{C}_B^0(M)$. Soit $q \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\alpha(\sharp_{\pi,\xi}(\Phi))(\alpha_1,...,\alpha_q) = (-1)^q(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\Phi)(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_1),...,\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_q)).$$

D'où

$$\begin{aligned} \delta_q(\sharp_{\pi,\xi}(\Phi))(\alpha_1,...,\alpha_{q+1}) &= \sum_{i=1}^{q}(-1)^i(\alpha_i\sharp_{\pi,\xi}(\Phi))(\alpha_1,...,\widehat{\alpha_i},...,\alpha_{q+1}) \\ &= \sum_{i=1}^{q}(-1)^{i+q}(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_i)\Phi)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_1),...,\widehat{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_i)},...,\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_{q+1})\right) \\ &= (-1)^q(\delta_q\Phi)(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_1),...,\sharp_{\pi,\xi}(\alpha_{q+1})) \\ &= -\sharp_{\pi,\xi}(\delta_q\Phi)(\alpha_1,...,\alpha_{q+1}). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\delta_q \circ \sharp_{\pi,\xi} = -\sharp_{\pi,\xi} \circ \delta_q$, pour tout $q \in \mathbb{N}^*$. Ainsi, $\sharp_{\pi,\xi}$ induit un morphisme entre $H_B^*(M,\pi,\xi)$ et $H_B^*(M)$. ■

Remarque 3.2.3 *Dans le cas où $\sharp_{\pi,\xi}$ est inversible, il y a isomorphisme entre $H_B^*(M,\pi,\xi)$ et $H_B^*(M)$. C'est particulièrement le cas lorsque la structure de Jacobi sous-jacente est celle associée à une structure de contact ou à une structure localement conformément symplectique.*

3.3 Connexion de Levi-Civita associée au triplet (π, ξ, g)

3.3.1 Algébroïde alterné associé au triplet (π, ξ, g)

Soient $(M, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne, π un champ de bivecteurs sur M et ξ un champ de vecteurs sur M. On note g la cométrique de $\widetilde{g}$. Au triplet (π, ξ, g) on associe la 1-forme différentielle λ définie par

$$\lambda = \widetilde{g}(\xi, \xi)\flat_g(\xi) - \flat_g(J\xi),$$

i.e. $\sharp_g(\lambda) = \widetilde{g}(\xi, \xi)\xi - J\xi$, et on note $[.,.]^g_{\pi,\xi}$ au lieu de $[.,.]^\lambda_{\pi,\xi}$.

Définition 3.3.1 *Soient π un champ de bivecteurs et ξ un champ de vecteurs sur M. On dit qu'une métrique pseudo-riemannienne $\widetilde{g}$ sur M est associée au couple (π, ξ) si $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie, c'est-à-dire si :*

$$\widetilde{g}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right) = g(\alpha, \beta), \qquad \forall \alpha, \beta \in \Omega^1(M).$$

Soit g est la cométrique de $\widetilde{g}$. On dit que la métrique pseudo-riemannienne contravariante g sur M est associée au couple (π, ξ) si $\widetilde{g}$ est associée au couple (π, ξ).

Lemme 3.3.1 *Soient π un champ de bivecteurs et ξ un champ de vecteurs sur M. Soit $\widetilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne sur M associée au couple (π, ξ). On a*

$$\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi.$$

Preuve. Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$. On a

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}(\sharp_{\pi,\xi}(\lambda), \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)) &= \widetilde{g}(\sharp_g(\lambda), \sharp_g(\alpha)) \\
&= \widetilde{g}(\xi, \xi)g(\xi, \sharp_g(\alpha)) - \widetilde{g}(J\xi, \sharp_g(\alpha)) \\
&= \widetilde{g}(\xi, \xi)\alpha(\xi) + \widetilde{g}(\xi, J\sharp_g(\alpha)) \\
&= \widetilde{g}(\xi, \xi)\alpha(\xi) + \widetilde{g}(\xi, \sharp_\pi(\alpha)) \\
&= \widetilde{g}(\xi, \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)).
\end{aligned}$$

Comme $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie, donc un isomorphisme, alors $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$. ■

Proposition 3.3.1 *Soit (M, π, ξ) une variété de Jacobi et soit g une métrique pseudo-riemannienne contravariante sur M associée au couple (π, ξ). Alors l'algébroïde alterné $(T^*M, \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]^g_{\pi,\xi})$ est un algébroïde de Lie isomorphe à l'algébroïde tangent de M.*

Preuve. Le couple (π, ξ) est de Jacobi et, comme la métrique g est associée, d'après le lemme ci-dessus, on a $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$. La proposition est donc une conséquence du corollaire 3.1.1 en tenant compte de la remarque 3.1.1. ■

3.3.2 Dérivée de Levi-Civita associée au triplet (π, ξ, g)

On appelle la dérivée de Levi-Civita contravariante associée au triplet (π, ξ, g) la dérivée contavariante $\mathcal{D} : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow \Omega^1(M)$, symétrique et compatible avec la métrique, définie par la formule :

$$\begin{aligned} 2g\left(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma\right) &= \sharp_{\pi,\xi}(\alpha) \cdot g(\beta, \gamma) + \sharp_{\pi,\xi}(\beta) \cdot g(\alpha, \gamma) - \sharp_{\pi,\xi}(\gamma) \cdot g(\alpha, \beta) \\ &\quad -g([\beta, \gamma]^g_{\pi,\xi}\,, \alpha) - g([\alpha, \gamma]^g_{\pi,\xi}\,, \beta) + g([\alpha, \beta]^g_{\pi,\xi}\,, \gamma), \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

Remarque 3.3.1 *Dans le cas où $\xi = 0$, la dérivée $\mathcal{D}$ n'est rien d'autre que la dérivée de Levi-Civita contravariante D associée au couple (π, g).*

Proposition 3.3.2 *Sopposons que le couple (π, ξ) est une structure de Jacobi sur M et que $\widetilde{g}$ est une métrique associée. Alors*

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(\mathcal{D}_\alpha\beta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\sharp_{\pi,\xi}(\beta).$$

où ∇ est la connexion de Levi-Civita (covariante) associée à $\widetilde{g}$.

Preuve. D'après le lemme ci-dessus, on a $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$, et puisque on a supposé que (π, ξ) est une structure de Jacobi, alors, d'après le corollaire 3.1.1,

$$\sharp_{\pi,\xi}([\alpha, \beta]^g_{\pi,\xi}) = [\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)]$$

quelles que soient les formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Comme on a supposé aussi que $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie, la formule (3.3.1) s'écrit alors

$$\begin{aligned} 2\widetilde{g}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\mathcal{D}_\alpha\beta), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right) &= \sharp_{\pi,\xi}(\alpha) \cdot \widetilde{g}(\sharp_{\pi,\xi}(\beta), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)) + \sharp_{\pi,\xi}(\beta) \cdot \widetilde{g}(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)) \\ &\quad -\sharp_{\pi,\xi}(\gamma) \cdot \widetilde{g}(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)) - \widetilde{g}([\sharp_{\pi,\xi}(\beta), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)]\,, \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)) \\ &\quad -\widetilde{g}([\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)]\,, \sharp_{\pi,\xi}(\beta)) + \widetilde{g}([\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)]\,, \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)). \end{aligned}$$

De cette dernière égalité et de la formule de Koszul relative à la connexion de Levi-Civita $\boldsymbol{\nabla}$ de $\widetilde{g}$ on déduit que

$$g^*\left(\sharp_{\pi,\xi}(\mathcal{D}_\alpha\beta), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right) = g\left(\nabla_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\sharp_{\pi,\xi}(\beta), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right)$$

quelles que soient les formes $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Comme $\sharp_{\pi,\xi}$ est un isomorphisme, il vient que

$$\sharp_{\pi,\xi}(\mathcal{D}_\alpha\beta) = \boldsymbol{\nabla}_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\sharp_{\pi,\xi}(\beta)$$

quelles que soient les formes $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. ∎

3.3.3 Algébroïde alterné associé à une variété riemannienne presque de contact

Soit M une variété différentiable de dimension $2n+1$, $n \in \mathbb{N}^*$. Une structure presque de contact sur M est la donnée d'un triplet (Φ, ξ, η) composé d'une 1-forme η, d'un champ de vecteurs ξ et d'un champ de $(1,1)$-tenseurs Φ (i. e., $\Phi \in End(TM)$) sur M tels que

$$\Phi^2 = -Id + \eta \otimes \xi \quad \text{et} \quad \eta(\xi) = 1.$$

On dit également que M est munie d'une (Φ, ξ, η)-structure. Il résulte de la définition ci-dessus, voir par exemple [4, Th. 4.1], que

$$\Phi(\xi) = 0, \qquad \eta \circ \Phi = 0$$

et le rang de Φ est $2n$.

Soit $(M, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne munie d'une (Φ, ξ, η)-structure. On dit que $(M, \Phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ est une variété pseudo-riemannienne presque de contact ou que $\widetilde{g}$ est associée à (Φ, ξ, η) si

$$\widetilde{g}\,(\Phi(X), \Phi(Y)) = \widetilde{g}(X, Y) - \eta(X)\eta(Y), \tag{3.3.2}$$

pour tous $X, Y \in \chi(M)$. Si de plus la métrique $\widetilde{g}$ est définie positive, on dit que $(M, \Phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ est une variété riemannienne presque de contact. Remarquons que si on met $Y = \xi$ dans la formule (3.3.2), on déduit que si $\widetilde{g}$ est une métrique pseudo-riemannienne associée à une structure presque de contact (Φ, ξ, η) alors

$$\widetilde{g}(X, \xi) = \eta(X),$$

pour tout $X \in \chi(M)$, i.e. $\flat_g(\xi) = \eta$. En particulier, $\widetilde{g}(\xi, \xi) = 1$.

Proposition 3.3.3 *Soit $(M, \Phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne presque de contact. L'application $\pi : \Omega^1(M) \times \Omega^1(M) \longrightarrow C^\infty(M)$ définie par*

$$\pi(\alpha, \beta) = \widetilde{g}(\sharp_g(\alpha), \Phi(\sharp_g(\beta)))$$

est un champ de bivecteurs sur M et le morphisme de fibrés $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie.

Preuve. Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$ et posons $X = \sharp_g(\alpha)$. En utilisant (3.3.2) et $\eta \circ \Phi = 0$, il vient que

$$\pi(\alpha, \alpha) = \widetilde{g}(\Phi(X), \Phi^2(X)),$$

et comme $\Phi^2 = -\mathrm{Id} + \eta \otimes \xi$ et $\widetilde{g}(\Phi(X), \xi) = \eta \circ \Phi(X) = 0$, il vient que

$$\pi(\alpha, \alpha) = -\widetilde{g}(\Phi(X), X) + \eta(X)\widetilde{g}(\Phi(X), \xi) = -\widetilde{g}(\Phi(X), X) = -\pi(\alpha, \alpha),$$

et donc $\pi(\alpha, \alpha) = 0$ et π est un champ de bivecteurs. Montrons que $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie. Soit $\alpha \in \Omega^1(M)$. Rappelons que par définition, on a $\sharp_{\pi,\xi}(\alpha) = \sharp_\pi(\alpha) + \alpha(\xi)\xi$. Comme on a d'un côté $\alpha(\xi) = \widetilde{g}(\sharp_g(\alpha), \xi) = \eta(\sharp_g(\alpha))$ et d'un autre, pour tout $\beta \in \Omega^1(M)$,

$$\beta(\sharp_\pi(\alpha)) := \pi(\alpha, \beta) = \widetilde{g}(\sharp_g(\alpha), \Phi(\sharp_g(\beta))) = -\widetilde{g}(\Phi(\sharp_g(\alpha)), \sharp_g(\beta)) = -\beta(\Phi(\sharp_g(\alpha))),$$

c'est-à-dire $\sharp_\pi(\alpha) = -\Phi(\sharp_g(\alpha))$, on déduit que

$$\sharp_{\pi,\xi}(\alpha) = -\Phi(\sharp_g(\alpha)) + \eta(\sharp_g(\alpha))\xi. \tag{3.3.3}$$

Soient $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. De la formule (3.3.3) et du fait qu'on a $\widetilde{g}(\Phi(X), \xi) = \eta \circ \Phi(X) = 0$ et $\widetilde{g}(\xi, \xi) = 1$, on déduit que

$$\widetilde{g}(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)) = \widetilde{g}(\Phi(\sharp_g(\alpha)), \Phi(\sharp_g(\beta))) + \eta(\sharp_g(\alpha))\eta(\sharp_g(\beta)).$$

En utilisant la formule (3.3.2), on obtient $\widetilde{g}(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)) = \widetilde{g}(\sharp_g(\alpha), \sharp_g(\beta)) = g(\alpha, \beta)$. ■

Remarquons que d'après la formule (3.3.3) on a

$$\sharp_{\pi,\xi}(\eta) = -\Phi(\sharp_g(\eta)) + \eta(\xi)\xi = \xi.$$

Aussi, on a $\Phi = -J$ où J est le champ d'endomorphismes associé au couple (π, g), donc on a $J\xi = 0$. Comme $\widetilde{g}(\xi, \xi) = 1$, alors $\lambda = \flat_g(\xi) = \eta$ et par conséquent $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \sharp_{\pi,\xi}(\eta) = \xi$.

Corollaire 3.3.1 *Soit $(M, \Phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne presque de contact et π le champ de bivecteurs associé, c'est-à-dire défini dans la proposition 3.3.3. Si le couple (π, ξ) définit une structure de Jacobi sur M, alors*

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(\mathcal{D}_\alpha \beta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. On a $\sharp_{\pi,\xi}(\eta) = \xi$ et, d'après la proposition 3.3.3 ci-dessus, le morphisme $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie. Comme on a supposé que le couple (π, ξ) est une structure de Jacobi, alors il suffit d'appliquer la proposition 3.3.2. ■

Soient (M, η) une variété de contact, ξ le champ de Reeb associé et $\widetilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne sur M. On dit que $(M, \eta, \widetilde{g})$ est une variété pseudo-riemannienne de contact, ou que $\widetilde{g}$ (ou sa cométrique g) est associée à la forme de contact η, s'il existe un champ d'endomorphismes Φ de TM tel que $(\Phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ est une structure pseudo-riemannienne presque de contact et que

$$\widetilde{g}(X, \Phi(Y)) = d\eta(X, Y).$$

Si de plus la métrique est définie positive, on dit que $(M, \eta, \widetilde{g})$ est une variété riemannienne de contact. Étant donné une forme de contact η sur une variété (pseudo-)riemannienne $(M, \widetilde{g})$, le couple $(\eta, \widetilde{g})$ définit une structure (pseudo-)riemannienne de contact sur M si et seulement s'il existe $\Phi \in End(TM)$ tel que

$$1/\ \Phi^2 = -\mathrm{Id} + \eta \otimes \xi, \qquad 2/\ \widetilde{g}\,(X, \xi) = \eta(X), \qquad 3/\ \widetilde{g}\,(X, \Phi(Y)) = d\eta(X, Y),$$

pour tous $X, Y \in \chi(M)$. En effet, il est facile de vérifier que la relation (3.3.2) se déduit des trois relations ci-dessus. On appelle Φ le champ d'endomorphismes associé à $(M, \eta, \widetilde{g})$.

Théorème 3.3.1 *Soit $(M, \eta, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne de contact. On a*

$$\sharp_\eta\left(\mathcal{D}_\alpha \beta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\sharp_\eta(\alpha)}\left(\sharp_\eta(\beta)\right),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. Soit $(M, \eta, \widetilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne de contact. Soit $(\Phi, \xi, \eta, \widetilde{g})$ la structure pseudo-riemannienne presque de contact associée et soit (π, ξ) la structure de Jacobi associée à η. D'après le corollaire ci-dessus, il suffit de montrer que $\pi(\alpha, \beta) = \widetilde{g}(\sharp_g(\alpha), \Phi(\sharp_g(\beta)))$ pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. D'un côté, on a

$$(i_X d\eta)(Y) = d\eta(X, Y) = \widetilde{g}(X, \Phi(Y)) = -\widetilde{g}(\Phi(X), Y) = -\flat_g(\Phi(X))(Y),$$

pour tous $X, Y \in \chi(M)$. Ainsi

$$\Phi(X) = -\sharp_g(i_X d\eta).$$

pour tout $X \in \chi(M)$. D'un autre côté, on a

$$\begin{aligned} d\eta(\Phi(X), \Phi(Y)) &= \widetilde{g}(\Phi(X), \Phi^2(Y)) \\ &= \widetilde{g}(\Phi(X), -Y + \eta(Y)\xi) \\ &= -\widetilde{g}(\Phi(X), Y) + \eta(Y)\widetilde{g}(\Phi(X), \xi) \\ &= \widetilde{g}(X, \Phi(Y)) + \eta(Y)(\eta \circ \Phi)(X) \\ &= d\eta(X, Y). \end{aligned}$$

pour tous $X, Y \in \chi(M)$. Soient maintenant $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, et $X = \sharp_\eta(\alpha)$, $Y = \sharp_\eta(\beta)$. On a

$$\sharp_g(\alpha) = \sharp_g(\flat_\eta(X)) = -\sharp_g(i_X d\eta) + \eta(X)\xi = \Phi(X) + \eta(X)\xi$$

et de même $\sharp_g(\beta) = \Phi(Y) + \eta(Y)\xi$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\pi(\alpha, \beta) &:= d\eta(X, Y) \\
&= d\eta(\Phi(X), \Phi(Y)) \\
&= d\eta(\sharp_g(\alpha) - \eta(X)\xi, \sharp_g(\beta) - \eta(Y)\xi) \\
&= d\eta(\sharp_g(\alpha), \sharp_g(\beta)) \\
&= \widetilde{g}(\sharp_g(\alpha), \Phi(\sharp_g(\beta))).
\end{aligned}$$

■

3.3.4 Métrique riemannienne associée à une structure localement conformément symplectique

Définition 3.3.2 *Soit $\omega \in \Omega^2(M)$ une 2-forme non dégénérée et soit $\theta \in \Omega^1(M)$. On dit qu'une métrique pseudo-riemmannienne $\widetilde{g}$ sur M est associée au couple (ω, θ) si*

$$\widetilde{g}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right) = g(\alpha, \beta),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. Soit g la cométrique de $\widetilde{g}$, on dit que g est associée au couple (ω, θ) si $\widetilde{g}$ l'est.

Théorème 3.3.2 *Supposons que (ω, θ) est une structure localement conformément symplectique et $\widetilde{g}$ est une métrique associée. On a*

$$\sharp_{\omega,\theta}\left(\mathcal{D}_\alpha \beta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\sharp_{\omega,\theta}(\alpha)}\left(\sharp_{\omega,\theta}(\beta)\right),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. D'après les propositions 3.3.2 et 3.1.3, il suffit de prouver que $\lambda = \theta$. D'une part, on a $\sharp_{\pi,\xi}(\theta) = \xi$. D'autre part, pour tout $\alpha \in \Omega^1(M)$, on a

$$\begin{aligned}
\widetilde{g}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\lambda), \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\right) &= \widetilde{g}\left(\sharp_g(\lambda), \sharp_g(\alpha)\right) \\
&= \widetilde{g}(\xi, \xi)\, \alpha(\xi) + \widetilde{g}\left(\xi, J\sharp_g(\alpha)\right) \\
&= \widetilde{g}(\xi, \xi)\, \alpha(\xi) + \widetilde{g}\left(\xi, \sharp_\pi(\alpha)\right) \\
&= \widetilde{g}\left(\xi, \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\right).
\end{aligned}$$

Comme $\widetilde{g}$ est une isométrie, donc un isomorphisme, alors $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$. ■

3.4 Structures de Jacobi-Codazzi

Dans la suite de ce chapitre, au triplet (π, ξ, g), composé d'un champ de bivecteurs π, d'un champ de vecteurs ξ et d'une métrique (pseudo-)riemannienne contravariante g, on associe le champ de tenseurs défini par

$$g^{\pi,\xi}(\alpha, \beta) := g(J_{\pi,\xi}\alpha, J_{\pi,\xi}\beta)$$

et la 1-forme λ définie par

$$\lambda = \widetilde{g}(\xi, \xi)\,\xi - \flat_g(J\xi), \tag{3.4.1}$$

où $\tilde{g}$ est la métrique (pseudo-)riemannienne dont g est la cométrique, $J_{\pi,\xi} = \flat_g \circ \sharp_{\pi,\xi}$ et $J = \sharp_g \circ J_\pi \circ \flat_g$; on note $[.,.]^g_{\pi,\xi}$ le crochet $[.,.]^\lambda_{\pi,\xi}$. Ainsi, sauf mention contraire, lorsqu'on parle d'une connexion contravariante, relativement au couple (π, ξ), symétrique ou plate ça va être relativement à ce λ, ou relativement au triplet (π, ξ, g) par abus de langage.

Par analogie à la notion de connexion de Levi-Civita contravariante associée au couple (π, g) (voir [5]), on définit dans [2] la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au triplet (π, ξ, g) comme étant l'unique connexion contravariante symétrique vérifiant $\mathcal{D}g = 0$. Elle est entièrement caractérisée par la formule

$$\begin{aligned} 2g(\mathcal{D}_\alpha\beta, \gamma) &= \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(g(\beta,\gamma)) + \sharp_{\pi,\xi}(\beta)(g(\alpha,\gamma)) - \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(g(\alpha,\beta)) \\ &\quad + g\left([\gamma,\alpha]^g_{\pi,\xi}, \beta\right) + g\left([\gamma,\beta]^g_{\pi,\xi}, \alpha\right) + g\left([\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}, \gamma\right), \end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

3.4.1 Variétés de Jacobi-Codazzi

Définition 3.4.1 *Une **structure presque de Jacobi-Codazzi** sur M est un quadruplet (π, ξ, g, D), tel que D est une connexion contravariante symétrique et*

$$D_\alpha g(\beta, \gamma) = D_\beta g(\alpha, \gamma), \tag{3.4.2}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.
*On dit également que (M, π, ξ, g, D) est une **variété presque de Jacobi-Codazzi**.*
*Un **variété de Jacobi-Codazzi** est une variété presque de Jacobi-Codazzi (M, π, ξ, g, D) telle que (π, ξ) est une structure de Jacobi sur M et*

$$D(J_{\pi,\xi}) = \mathcal{D}(J_{\pi,\xi}) = 0.$$

Exemple 3.4.1 *Si* $\xi = 0$ *alors* $\lambda = 0$, $\sharp_{\pi,\xi} = \sharp_\pi$, $[.,.]^g_{\pi,\xi} = [.,.]_\pi$ *et* $\mathcal{D}$ *est la connexion de Levi-Civita contravariante associée au couple* (π, g), *on retrouve les notions de structure presque de Poisson-Codazzi et structure de Poisson-Codazzi respectivement.*

Définition 3.4.2 ***Variétés de Jacobi quasi-Codazzi***
On dit que (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi quasi-Codazzi si* (M, π, ξ) *est une variété de Jacobi,* g *une métrique contravariante sur* M *et* D *une dérivée contravariante symétrique tels que*

$$D_\alpha g^{\pi,\xi}(\beta, \gamma) = D_\beta g^{\pi,\xi}(\alpha, \gamma), \tag{3.4.3}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

Remarque 3.4.1 *Si* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi-Codazzi telle que*

$$D\xi = 0,$$

alors (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi quasi-Codazzi. En effet, comme*

$$g(J_{\pi,\xi}\alpha, \beta) = -g(\alpha, J_{\pi,\xi}\beta) + 2\alpha(\xi)\beta(\xi),$$

on trouve

$$g^{\pi,\xi}(D_\alpha\beta, \gamma) = -g\left(D_\alpha\beta, J^2_{\pi,\xi}\gamma\right) + 2D_\alpha\beta(\xi)(J_{\pi,\xi}\gamma)(\xi),$$

et de l'égalité $D(J_{\pi,\xi}) = 0$ *on a*

$$g^{\pi,\xi}(\beta, D_\alpha\gamma) = -g\left(\beta, D_\alpha\left(J^2_{\pi,\xi}\gamma\right)\right) + 2\beta(\xi)D_\alpha(J_{\pi,\xi}\gamma)(\xi).$$

Ainsi

$$D_\alpha g^{\pi,\xi}(\beta, \gamma) = -D_\alpha g\left(\beta, J^2_{\pi,\xi}\gamma\right) + 2(J_{\pi,\xi}\gamma)(\xi)\beta(D_\alpha\xi) + 2\beta(\xi)(J_{\pi,\xi}\gamma)(D_\alpha\xi).$$

Mais $D\xi = 0$ *par hypothèse, d'où*

$$D_\alpha g^{\pi,\xi}(\beta, \gamma) = -D_\alpha g\left(\beta, J^2_{\pi,\xi}\gamma\right).$$

Il suffit alors d'appliquer l'identité (3.4.2).

Théorème 3.4.1 *Soient* (M, π, ξ) *une variété de Jacobi et* g *est métrique pseudo-riemannienne contravariante sur* M. *Supposons que* $\sharp_{\pi,\xi}$ *est une isométrie. Soit* ∇ *une connexion sur* M *et soit* D *la connexion associée à* ∇ *par la formule (3.2.1). Alors* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi quasi-Codazzi si et seulement si* $(M, \nabla, \tilde{g})$ *est une variété de Codazzi.*

Preuve. Comme $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie alors d'après le lemme 3.3.1 on a $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$. Il vient du théorème 3.2.1 que D est symétrique si et seulement ∇ est symétrique. D'un autre côté, comme pour $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$ et $X = \sharp_{\pi,\xi}(\alpha), Y = \sharp_{\pi,\xi}(\beta), Z = \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)$, on a

$$g^{\pi,\xi}(\beta,\gamma) = \tilde{g}(Y,Z) \qquad \text{et} \qquad g^{\pi,\xi}(D_\alpha\beta,\gamma) = \tilde{g}(\nabla_X Y, Z).$$

D'où

$$D_\alpha g^{\pi,\xi}(\beta,\gamma) = \nabla_X \tilde{g}(Y,Z).$$

Le théorème découle alors de la formule (3.4.3). ■

Remarque 3.4.2 *Si (M,π,ξ,g,D) est une variété de Jacobi-Codazzi telle que $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie, alors $(M,\nabla,\tilde{g})$ est une variété de Codazzi. En effet, comme $\sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie, on a $g^{\pi,\xi} = g$. Il suffit alors de remplacer $g^{\pi,\xi}$ par g dans la démonstration ci-dessus.*

Exemple 3.4.2 ***Variétés de contact de Codazzi***
Soient $(M,\eta,\tilde{g})$ une variété pseudo-riemannienne de contact et ∇ une connexion sur M. Soit (π,ξ) la structure de Jacobi associée à la forme de contact η. D'après la proposition 3.3.3 et la démonstration du théorème 3.3.1, le morphisme $\sharp_{\pi,\xi} = \sharp_\eta$ est une isométrie. Soit D la connexion associée à ∇ par la formule (3.2.1). On dit que $(M,\eta,\tilde{g},\nabla)$ est une variété de contact de Codazzi si (M,π,ξ,g,D) est une variété de Jacobi-Codazzi.

Exemple 3.4.3 ***Variétés localement conformément symplectiques de Codazzi***
Soient (M,ω,θ) une variété localement conformément symplectique, $\tilde{g}$ une métrique pseudo-riemannienne et ∇ une connexion sur M. Soit (π,ξ) la structure de Jacobi associée à (ω,θ). Supposons que la métrique $\tilde{g}$ est associée au couple (ω,θ), c'est-à-dire que $\sharp_{\omega,\theta} = \sharp_{\pi,\xi}$ est une isométrie. Soit D la connexion associée à ∇ par la formule (3.2.1). On dit que $(M,\omega,\theta,\tilde{g},\nabla)$ est une variété localement conformément symplectique de Codazzi si (M,π,ξ,g,D) est une variété de Jacobi-Codazzi.

3.4.2 Structure de Jacobi-Codazzi duale

Théorème 3.4.2 ***Dualité de Amari-Chentsov pour les variétés presque de Jacobi-Codazzi.***
Soient π un champ de bivecteurs, ξ un champ de vecteurs, g une métrique pseudo-riemannienne contravariante et D une connexion contravariante sur M. On considère la connexion D^* définie par

$$g(D^*_\alpha\beta,\gamma) = \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(g(\beta,\gamma)) - g(\beta, D_\alpha\gamma), \tag{3.4.4}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. *La variété* (M, π, ξ, g, D^*) *est une variété presque de Jacobi-Codazzi si et seulement si* (M, π, ξ, g, D) *est une variété presque de Jacobi-Codazzi. Auquel cas, nous aurions*

$$D^* = 2\mathcal{D} - D.$$

Preuve. La formule (3.4.4) peut s'écrire sous la forme

$$g\left(D^*_\alpha \beta, \gamma\right) = g\left(D_\alpha \beta, \gamma\right) + D_\alpha g\left(\beta, \gamma\right).$$

D'où

$$g\left(T^{D^*}(\alpha, \beta), \gamma\right) = g\left(T^D(\alpha, \beta), \gamma\right) + D_\alpha g(\beta, \gamma) - D_\beta g(\alpha, \gamma).$$

Supposons que (M, π, ξ, g, D) est une variété presque de Jacobi-Codazzi. Ainsi, de la formule (3.4.2) et du fait que $T^D = 0$, on déduit que la connexion contravariante D^* est sans torsion. Ensuite, de l'identité (3.4.4) on déduit que

$$(D^*)^* = D,$$

ainsi, comme $T^D = T^{D^*} = 0$ alors $D^*_\alpha g(\beta, \gamma) = D^*_\beta g(\alpha, \gamma)$, pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. La réciproque découle du fait que $(D^*)^* = D$.
D'autre part, de la formule (3.4.4) on montre que g est parallèle relativement à la connexion contravariante

$$\frac{1}{2}(D + D^*).$$

Comme cette dernière est sans torsion, par unicité de la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}$ associée au triplet (π, ξ, g), on conclut que $D^* = 2\mathcal{D} - D$. ■

Corollaire 3.4.1 ***Dualité de Amari-Chentsov pour les variétés de Jacobi-Codazzi***
Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème ci-dessus, (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi-Codazzi si et seulement si* (M, π, ξ, g, D^*) *est une variété de Jacobi-Codazzi.*

Preuve. En effet, si $\mathcal{D}(J_{\pi,\xi}) = D(J_{\pi,\xi}) = 0$ alors de la relation $D^* = 2\mathcal{D} - D$, on déduit que $D^*(J_{\pi,\xi}) = 0$. La réciproque découle du fait que $(D^*)^* = D$. ■

Définition 3.4.3 ***La structure (presque) de Jacobi-Codazzi duale.***
Soit (M, π, ξ, g, D) *une variété (presque) de Jacobi-Codazzi. La structure (presque) de Jacobi-Codazzi* (π, ξ, g, D^*) *est appelée la structure (presque) de Jacobi-Codazzi duale de* (π, ξ, g, D) *sur la variété* M.

Exemple 3.4.4 *Soient (M,π,ξ) une variété de Jacobi, g une métrique contravariante sur M et $\mathcal{D}$ la connexion de Levi-Civita contravariante associée au triplet (π,ξ,g). Si $\mathcal{D}(J_{\pi,\xi}) = 0$, alors $(\pi,\xi,g,\mathcal{D})$ est une structure de Jacobi-Codazzi auto-duale sur M.*

Dans les deux cas particuliers où la structure de Jacobi est associée à une structure de contact ou à une structure localement conformément symplectique, on a le résultat suivant.

Proposition 3.4.1 *Si $(M,\eta,\tilde{g},\nabla)$ (resp. $(M,\omega,\theta,\tilde{g},\nabla)$) est une variété de contact de Codazzi (resp. une variété localement conformément symplectique de Codazzi) et ∇^* la connexion duale de ∇ relativement à la métrique $\tilde{g}$, alors $(M,\eta,\tilde{g},\nabla^*)$ (resp. $(M,\omega,\theta,\tilde{g},\nabla^*)$) est une variété de contact de Codazzi (resp. une variété localement conformément symplectique de Codazzi).*

Preuve. Soit (M,π,ξ,g,D) la variété de Jacobi-Codazzi associée à la variété de contact de Codazzi $(M,\eta,\tilde{g},\nabla)$ dans l'exemple 3.4.2 (resp. à la variété localement conformément symplectique de Codazzi $(M,\omega,\theta,\tilde{g},\nabla)$ dans l'exemple 3.4.3). On note $\boldsymbol{\nabla}$ la connexion de Levi-Civita de la métrique $\tilde{g}$ et (π,ξ,g,D^*) la structure de Jacobi-Codazzi duale de (π,ξ,g,D).
D'après le théorème 3.3.1 (resp. le théorème 3.3.2), on a

$$\mathcal{D}_\alpha\beta = \sharp_\eta^{-1}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\sharp_\eta(\alpha)}\sharp_\eta(\beta)\right) \qquad \text{(resp.} \qquad \mathcal{D}_\alpha\beta = \sharp_{\omega,\theta}^{-1}\left(\boldsymbol{\nabla}_{\sharp_{\omega,\theta}(\alpha)}\sharp_{\omega,\theta}(\beta)\right)\text{)}.$$

D'où, du fait que $\nabla^* = 2\boldsymbol{\nabla} - \nabla$, on déduit que

$$D^*_\alpha\beta = \sharp_\eta^{-1}\left(\nabla^*_{\sharp_\eta(\alpha)}\sharp_\eta(\beta)\right) \qquad \text{(resp.} \qquad D^*_\alpha\beta = \sharp_{\omega,\theta}^{-1}\left(\nabla^*_{\sharp_{\omega,\theta}(\alpha)}\sharp_{\omega,\theta}(\beta)\right)\text{)},$$

pour tous $\alpha,\beta \in \Omega^1(M)$. Il suffit d'appliquer le corollaire 3.4.1. ■

Définition 3.4.4 *Soit $(M,\eta,\tilde{g},\nabla)$ (resp. $(M,\omega,\theta,\tilde{g},\nabla)$) est une variété de contact de Codazzi (resp. une variété localement conformément symplectique de Codazzi). La strucutre de contact de Codazzi $(\eta,\tilde{g},\nabla^*)$ (resp. localement conformément symplectique de Codazzi $(\omega,\theta,\tilde{g},\nabla^*)$) est appelée la structure de contact de Codazzi (resp. la structure localement conformément symplectique de Codazzi) duale de $(\eta,\tilde{g},\nabla)$ (resp. $((\omega,\theta,\tilde{g},\nabla))$) sur M.*

3.4.3 Courbure hessienne d'une variété de Jacobi-Codazzi

Définition 3.4.5 ***Courbure hessienne d'une variété presque de Jacobi-Codazzi***
La courbure hessienne d'une variété presque de Jacobi-Codazzi (M,π,ξ,g,D) est le champ

de tenseurs Q *défini par* $Q = D\Lambda$*, où* Λ *est le champ de tenseurs* $\Lambda = \mathcal{D} - D$*. Le tenseur hessien* $\mathcal{Q}$ *de* (M, π, ξ, g, D) *est défini par*

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = g(Q(\alpha, \beta, \gamma), \delta),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$.

Afin d'établir certaines propriétés de la courbure hessienne d'une variété presque de Jacobi-Codazzi, nous allons démontrer un résultat préliminaire.

Lemme 3.4.1 *Soient* π *un champ de bivecteurs,* ξ *un champ de vecteurs,* g *une métrique pseudo-riemannienne contravariante et* D *une connexion contravariante symétrique sur* M*. Les affirmations suivantes sont équivalentes :*

1. (M, π, ξ, g, D) *est une variété presque de Jacobi-Codazzi.*
2. *Le champ de tenseurs* Λ *vérifie*
$$g(\Lambda_\gamma \alpha, \beta) = g(\alpha, \Lambda_\gamma \beta), \tag{3.4.5}$$
pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.
3. *On a l'identité*
$$g(\Lambda_\alpha \beta, \gamma) = \frac{1}{2} D_\alpha g(\beta, \gamma), \tag{3.4.6}$$
pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

Preuve. La preuve est similaire à celle du lemme 2.2.1. ∎

Proposition 3.4.2 *Soit* (M, π, ξ, g, D) *une variété presque de Jacobi-Codazzi.*

1. *On a*
$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) - \mathcal{Q}(\alpha, \delta, \gamma, \beta) = 2g(\Lambda_\gamma(\Lambda_\alpha \beta) - \Lambda_\alpha(\Lambda_\gamma \beta), \delta),$$
pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$.
2. *Le champ de tenseurs* $\mathcal{Q}$ *vérifie*
$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \mathcal{Q}(\alpha, \gamma, \beta, \delta),$$
pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. La preuve est analogue à celle de la proposition 2.2.1. ■

La proposition suivante montre le lien existant entre la courbure hessienne d'une structure presque de Jacobi-Codazzi et celle de sa structure duale.

Proposition 3.4.3 *Soient* (M, π, ξ, g, D) *une variété presque de Jacobi-Codazzi et* (π, ξ, g, D^*) *la structure duale de* (π, ξ, g, D). *Si* Q^* *(resp.* $\mathcal{Q}^*$*) est la courbure hessienne (resp. le tenseur hessien) de* (M, π, ξ, g, D^*), *alors*

$$Q^* = Q - 2\mathcal{D}\Lambda$$

et

$$\mathcal{Q}^* (\alpha, \beta, \gamma, \delta) = -\mathcal{Q} (\alpha, \beta, \delta, \gamma) + 2g (\Lambda_\alpha \beta, \Lambda_\gamma \delta),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1 (M)$.

Preuve. La preuve est identique à celle de la proposition 2.2.2. ■

Proposition 3.4.4 *Sous les mêmes hypothèses et notations que la remarque 3.4.2. On note* $\widetilde{Q}$ *la courbure hessienne de la variété de Codazzi* $(M, \nabla, \tilde{g})$. *On a*

$$\widetilde{Q} (X, Y, Z) = \sharp_{\pi,\xi} (Q (\alpha, \beta, \gamma)),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1 (M)$ *où* $X = \sharp_{\pi,\xi} (\alpha), Y = \sharp_{\pi,\xi} (\beta), Z = \sharp_{\pi,\xi} (\gamma)$.

Preuve. Découle du fait que $D (J_{\pi,\xi}) = 0$ et $\Lambda (J_{\pi,\xi}) = 0$. ■

3.5 Structures de Jacobi hessiennes

Définition 3.5.1 *Une* ***variété (presque) de Jacobi hessienne*** (M, π, ξ, g, D) *est une variété (presque) de Jacobi-Codazzi telle que la courbure de la connexion contravariante* D *est nulle.*
Une ***variété de Jacobi quasi-hessienne*** (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi quasi-Codazzi telle que la courbure de la connexion contravariante* D *est nulle.*

Remarque 3.5.1 *Une variété (presque) de Poisson hessienne est une variété (presque) de Jacobi hessienne pour laquelle* $\xi = 0$. *De même, une variété de Poisson quasi-hessienne est une variété de Jacobi quasi-hessienne pour laquelle* $\xi = 0$.

Théorème 3.5.1 *Sous les hypothèses et notations que le théorème 3.4.1. La variété* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi Quasi-hessienne si et seulement* $(M, \nabla, \widetilde{g})$ *est une variété hessienne. Aussi, si* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi hessienne alors* $(M, \nabla, \widetilde{g})$ *est une variété hessienne.*

Preuve. Découle du théorème 3.4.1, la remarque 3.4.2 et le théorème 3.2.1. ■

Exemple 3.5.1 ***Variétés de contact hessiennes***
Sous les mêmes hypothèses et notations de l'exemple 3.4.2. On dit que $(M, \eta, \tilde{g}, \nabla)$ *est une variété de contact hessienne si* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi hessienne.*

Exemple 3.5.2 ***Variétés localement conformément symplectiques hessiennes***
Sous les mêmes hypothèses et notations de l'exemple 3.4.3. On dit que $(M, \omega, \theta, \tilde{g}, \nabla)$ *est une variété localement conformément symplectique hessienne si* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi hessienne.*

Définition 3.5.2 ***Structures de Jacobi quasi-hessiennes de type Koszul***
Une variété de Jacobi quasi-hessienne (M, π, ξ, g, D) *est dite de type Koszul s'il existe un champ de vecteurs* ζ *sur* M *tel que* $g^{\pi,\xi} = D\zeta$*, c'est-à-dire*

$$g^{\pi,\xi}(\alpha, \beta) = \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(\beta(\zeta)) - D_\alpha \beta(\zeta).$$

On dit que le champ ζ *est un champ de Koszul de* (M, π, ξ, g, D)*.*
Une variété de Jacobi quasi-hessienne de type Koszul (M, π, ξ, g, D) *est dite exacte s'il existe une fonction* $\varphi \in \mathcal{C}^\infty(M)$ *telle que* $\zeta = \xi(\varphi)\xi - \sharp_\pi(d\varphi)$*, c'est-à-dire telle que*

$$g^{\pi,\xi}(\alpha, \beta) = H_D^\varphi(\alpha, \beta) := \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(\varphi)) - \sharp_{\pi,\xi}(D_\alpha \beta)(\varphi).$$

Une telle fonction φ *est appelée un potentiel de* (M, π, ξ, g, D)*.*

Remarque 3.5.2 *Soit* (M, π, ξ, g, D) *une variété de Jacobi quasi-hessienne. L'identité (3.4.3) montre que* $g^{\pi,\xi}$ *est un* 2*-cocycle du complexe de Boyom de la structure presque de Jacobi localement plate sous-jacente. Dire que* (M, π, ξ, g, D) *est de type Koszul voudrait dire que* $g^{\pi,\xi}$ *est un* 2*-cobord de ce complexe de Boyom* $(g^{\pi,\xi} = \delta_1(-\zeta))$*.*

Proposition 3.5.1 *Sous les mêmes hypothèses et notations du théorème 3.4.1, si* (M, π, ξ, g, D) *est une variété de Jacobi quasi-hessienne de Koszul, alors le triplet* $(M, \nabla, \tilde{g})$ *est une variété hessienne de Koszul.*

Preuve. Soit $\vartheta \in \Omega^1(M)$. Soient $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$ et posons $X = \sharp_{\pi,\xi}(\alpha), Y = \sharp_{\pi,\xi}(\beta)$. On a

$$\vartheta(Y) = \vartheta(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)) = \pi(\beta, \vartheta) + \vartheta(\xi)\beta(\xi) = \beta(\zeta),$$

où

$$\zeta = \vartheta(\xi)\xi - \sharp_\pi(\vartheta).$$

D'où

$$\vartheta(\nabla_X Y) = D_\alpha \beta(\zeta).$$

Ainsi, si $g = D\zeta$ alors $\tilde{g} = \nabla\vartheta$. ■

Proposition 3.5.2 ***Dualité de Amari-Chentsov pour les variétés de Jacobi hessiennes***
Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème 3.4.2, si on a $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$ alors la variété (M, π, ξ, g, D^*) est une variété de Jacobi hessienne si et seulement si (M, π, ξ, g, D) est une variété de Jacobi hessienne.

Preuve. En s'appuyant sur la preuve du théorème 3.4.2 et celle du corollaire 3.4.1 qui le suit, il ne reste qu'à montrer que D est plate si et seulement si sa connexion duale D^* est plate, or ceci découle immédiament de la formule

$$g\left(R^{D^*}(\alpha, \beta)\gamma, \delta\right) = -g\left(R^D(\alpha, \beta)\delta, \gamma\right),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$. ■

Définition 3.5.3 ***La structure de Jacobi hessienne duale.***
Soit (M, π, ξ, g, D) une variété de Jacobi-Codazzi telle que $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$. La structure de Jacobi-Codazzi (π, ξ, g, D^*) est appelée la structure de Jacobi-Codazzi duale de (π, ξ, g, D) sur la variété M.

Proposition 3.5.3 ***Courbure d'une variété presque de Jacobi hessienne***
Soit (M, π, ξ, g, D) une variété de Jacobi hessienne telle que $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$. On note R la courbure de la dérivée de Levi-Civita contravriante $\mathcal{D}$ associée au triplet (π, ξ, g) et $\Lambda = \mathcal{D} - D$. On a

$$R(\alpha, \beta)\gamma = \Lambda_\beta(\Lambda_\alpha\gamma) - \Lambda_\alpha(\Lambda_\beta\gamma),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

Preuve. On pose $\Omega_{\alpha,\beta} = \mathcal{D}_\alpha \circ \Lambda_\beta - \Lambda_\beta \circ \mathcal{D}_\alpha + \Lambda_\alpha \circ \mathcal{D}_\beta - \mathcal{D}_\beta \circ \Lambda_\alpha$, en utilisant la formule (3.4.5) et le fait que $\mathcal{D}g = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} g\left(\mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta \gamma\right) - \Lambda_\beta\left(\mathcal{D}_\alpha \gamma\right), \delta\right) &= g\left(\mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta \gamma\right), \delta\right) - g\left(\mathcal{D}_\alpha \gamma, \Lambda_\beta \delta\right) \\ &= \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(g\left(\Lambda_\beta \gamma, \delta\right)\right) - g\left(\Lambda_\beta \gamma, \mathcal{D}_\alpha \delta\right) \\ &\quad -\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(g\left(\gamma, \Lambda_\beta \delta\right)\right) + g\left(\gamma, \mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta \delta\right)\right) \\ &= g\left(\gamma, \mathcal{D}_\alpha\left(\Lambda_\beta \delta\right)\right) - g\left(\Lambda_\beta \gamma, \mathcal{D}_\alpha \delta\right). \end{aligned}$$

Ainsi

$$g^{\pi,\xi}\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right) = g^{\pi,\xi}\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\delta), \gamma\right).$$

Par ailleurs, comme la connexion D est plate, il vient que

$$\begin{aligned} D_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}} &= \mathcal{D}_\alpha \circ \mathcal{D}_\beta - \mathcal{D}_\beta \circ \mathcal{D}_\alpha + \Lambda_\alpha \circ \Lambda_\beta - \Lambda_\beta \circ \Lambda_\alpha - \Omega_{\alpha,\beta} \\ &= R(\alpha,\beta) + \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}} + \left[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta\right] - \Omega_{\alpha,\beta}. \end{aligned}$$

Ce qui implique que

$$g\left(D_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\gamma, \delta\right) = g\left(R(\alpha,\beta)\gamma, \delta\right) + g\left(\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\gamma, \delta\right) + g\left(\left[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta\right]\gamma, \delta\right) - g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right).$$

Or, la formule (3.4.5) montre que

$$g\left(\left[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta\right]\delta, \gamma\right) = -g\left(\left[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta\right]\gamma, \delta\right).$$

De même, de (3.1.4) il vient que

$$g\left(R(\alpha,\beta)\gamma, \delta\right) = -g\left(\gamma, R(\alpha,\beta)\delta\right).$$

Ainsi et en permutant γ et δ dans cette dernière formule, on trouve

$$g\left(\gamma, D_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\delta\right) = -g\left(R(\alpha,\beta)\gamma, \delta\right) + g\left(\gamma, \mathcal{D}_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\delta\right) - g\left(\left[\Lambda_\alpha, \Lambda_\beta\right]\gamma, \delta\right) - g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right).$$

En additionant ces deux dernières identités, il vient que

$$D_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}} g(\gamma, \delta) = 2g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right).$$

De la formule (3.4.6) on déduit que

$$g\left(\Omega_{\alpha,\beta}(\gamma), \delta\right) = g\left(\Lambda_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\gamma, \delta\right) = g\left(\mathcal{D}_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\gamma, \delta\right) - g\left(D_{[\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}}\gamma, \delta\right).$$

Ce qui montre l'identité recherchée. ■

Corollaire 3.5.1 *Soit* (M, π, ξ, g, D) *une variété de Jacobi hessienne telle que* $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$*. La courbure* R *de la connexion de Levi-Civita contravaraınte* $\mathcal{D}$ *est liée à la courbure hessienne* Q *par*

$$\mathcal{Q}(\alpha, \beta, \gamma, \delta) - \mathcal{Q}(\alpha, \delta, \gamma, \beta) = 2g(R(\alpha, \gamma)\beta, \delta),$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \Omega^1(M)$*.*

Preuve. Découle de la proposition ci-dessus et de la proprosition 3.4.2. ■

4

Structures géométriques induites par des modèles statistiques

4.1 Structures de Codazzi induites par des modèles statistiques

Soient (Σ, μ) un espace mesuré et M une variété différentiable. Soit

$$\begin{array}{rccc} P: & \Sigma \times M & \longrightarrow & \mathbb{R}^{+} \\ & (\sigma, x) & \longmapsto & P(\sigma, x) \end{array}$$

une application. On suppose que

1. L'application P est différentiable par rapport à x, mesurable par rapport à σ, et

$$\int_{\Sigma} P(\sigma, x) \, d\mu(\sigma) = 1,$$

pour tout x dans M.

2. L'intégrale commute avec la derivation, i.e., pour tout x dans M et tout $\xi \in T_x M$ on a

$$\xi\left(\int_{\Sigma} f(\sigma, x) \, d\mu(\sigma)\right) = \int_{\Sigma} \xi(f(\sigma, x)) \, d\mu(\sigma), \tag{4.1.1}$$

où $f : \Sigma \times M \longrightarrow \mathbb{R}$ différentiable par rapport à x et intégrable par rapport à σ.

Par la suite, on note $P_\sigma = P(\sigma, .)$ et $l_\sigma = \ln P_\sigma$, pour tout $\sigma \in \Sigma$.

Lemme 4.1.1 *Soit X un champ de vecteurs sur M, on a*

$$\int_{\Sigma} X\left(P_{\sigma}\right)(x)\, d\mu\left(\sigma\right)=0,$$

pour tout $x \in M$.

Preuve. Découle immédiatement de la formule (4.1.1). ■

Rappelons que si ∇ est une connexion affine sur M alors, pour tout $f \in \mathcal{C}^{\infty}(M)$, la notation $\nabla^2 f$ désigne le champ de tenseurs

$$\nabla^2 f:(X,Y)\longmapsto X\left(Y\left(f\right)\right)-\nabla_X Y\left(f\right).$$

On a

$$\nabla^2 f\left(Y,X\right)-\nabla^2 f\left(X,Y\right)=\left(T^{\nabla}\left(X,Y\right)\right)\left(f\right).$$

Ainsi, si ∇ est sans torsion alors $\nabla^2 f$ est symétrique.

Définition 4.1.1 ***Information de Fisher***
On associe à P l'information de Fisher $\tilde{g}$ définie par

$$\tilde{g}\left(X,Y\right)=-\int_{\Sigma} P_{\sigma}\nabla^2 l_{\sigma}\left(X,Y\right)d\mu\left(\sigma\right),$$

pour tout couple (X,Y) de champ de vecteurs sur M, où ∇ est une connexion affine sans torsion sur M.

Proposition 4.1.1 *L'information de Fisher $\tilde{g}$ est indépendante du choix de la connexion ∇. Plus exactement, on a*

$$\tilde{g}\left(X,Y\right)=\int_{\Sigma} P_{\sigma}X\left(l_{\sigma}\right)Y\left(l_{\sigma}\right)d\mu\left(\sigma\right), \tag{4.1.2}$$

pour tous $X,Y \in \chi\left(M\right)$.

Preuve. Soient X,Y deux champs de vecteurs sur M. Comme $X\left(l_{\sigma}\right)=P_{\sigma}X\left(P_{\sigma}\right)$, alors on a

$$\begin{aligned} P_{\sigma}\nabla^2 l_{\sigma}\left(X,Y\right) &= P_{\sigma}X\left(Y\left(l_{\sigma}\right)\right)-P_{\sigma}\nabla_X Y\left(l_{\sigma}\right) \\ &= X\left(Y\left(P_{\sigma}\right)\right)-\left(\nabla_X Y\right)\left(P_{\sigma}\right)-\frac{X\left(P_{\sigma}\right)Y\left(P_{\sigma}\right)}{P_{\sigma}} \\ &= X\left(Y\left(P_{\sigma}\right)\right)-\nabla_X Y\left(P_{\sigma}\right)-X\left(l_{\sigma}\right)Y\left(P_{\sigma}\right), \end{aligned}$$

pour tout $\sigma \in \Sigma$. Par conséquent

$$\begin{aligned} \tilde{g}\left(X,Y\right) &= \int_{\Sigma}\left(X\left(l_{\sigma}\right)Y\left(P_{\sigma}\right)-X\left(Y\left(P_{\sigma}\right)\right)\right)d\mu\left(\sigma\right) \\ &= \int_{\Sigma} P_{\sigma}X\left(l_{\sigma}\right)Y\left(l_{\sigma}\right)d\mu\left(\sigma\right). \end{aligned}$$

Ce qui montre que $\tilde{g}$ est indépendant du choix de la connexion ∇. ■

Définition 4.1.2 *Si l'information de Fisher $\tilde{g}$ associée à un modèle statistique P sur (Σ, μ) paramétrée par M est partout non dégénérée, on l'appelle la métrique (riemannienne) de Fisher de P.*

Proposition 4.1.2 *Supposons que $\tilde{g}$ est une métrique de Fisher. La connexion de Levi-Civita $\boldsymbol{\nabla}$ de $\tilde{g}$ est déterminée par la formule*

$$\tilde{g}\left(\boldsymbol{\nabla}_X Y, Z\right) = \frac{1}{2}\int_\Sigma P_\sigma X\left(l_\sigma\right) Y\left(l_\sigma\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right) + \int_\Sigma P_\sigma X\left(Y\left(l_\sigma\right)\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right),$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$.

Preuve. Soient $X, Y, Z \in \chi(M)$, de la relation (4.1.1) on a

$$\begin{aligned} X\left(\tilde{g}\left(Y, Z\right)\right) &= \int_\Sigma P_\sigma X\left(l_\sigma\right) Y\left(l_\sigma\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right) + \int_\Sigma P_\sigma X\left(Y\left(l_\sigma\right)\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right) \\ &\quad + \int_\Sigma P_\sigma Y\left(l_\sigma\right) X\left(Z\left(l_\sigma\right)\right) d\mu\left(\sigma\right). \end{aligned}$$

D'un autre côté, on a

$$\tilde{g}\left(\left[X, Y\right], Z\right) = \int_\Sigma P_\sigma X\left(Y\left(l_\sigma\right)\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right) - \int_\Sigma P_\sigma Y\left(X\left(l_\sigma\right)\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right).$$

Ensuite, le résultat découle de la formule de Koszul. ∎

Théorème 4.1.1 ***Une famille à un paramètre de variétés de Codazzi induites par un modèle statistique***

Supposons que $\tilde{g}$ est une métrique de Fisher. Pour $t \in \mathbb{R}$, on définit ∇^t par

$$\tilde{g}\left(\nabla^t_X Y, Z\right) = \frac{1-t}{2}\int_\Sigma P_\sigma X\left(l_\sigma\right) Y\left(l_\sigma\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right) + \int_\Sigma P_\sigma X\left(Y\left(l_\sigma\right)\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right),$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\left(M, \nabla^t, \tilde{g}\right)$ est une variété de Codazzi dont la variété de Codazzi duale est $\left(M, \nabla^{-t}, \tilde{g}\right)$.

Preuve. Pour tous $X, Y, Z \in \chi(M)$, on pose

$$T\left(X, Y, Z\right) = \frac{1}{2}\int_\Sigma P_\sigma X\left(l_\sigma\right) Y\left(l_\sigma\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right).$$

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\tilde{g}\left(\nabla^t_X Y, Z\right) = \tilde{g}\left(\boldsymbol{\nabla}_X Y, Z\right) - tT\left(X, Y, Z\right).$$

Comme T est un champ de tenseurs covariants symétriques et que la connexion de Levi-Civita $\boldsymbol{\nabla}$ de $\tilde{g}$ est sans torsion, alors

$$\tilde{g}\left(\nabla^t_X Y - \nabla^t_Y X, Z\right) = \tilde{g}\left(\boldsymbol{\nabla}_X Y - \boldsymbol{\nabla}_Y X, Z\right) = \tilde{g}\left(\left[X, Y\right], Z\right),$$

ce qui montre que ∇^t est sans torsion. De plus, on a

$$\begin{aligned}\nabla^t_X \tilde{g}\left(Y, Z\right) &= \boldsymbol{\nabla}_X \tilde{g}\left(Y, Z\right) + 2tT\left(X, Y, Z\right) \\ &= 2tT\left(X, Y, Z\right) \\ &= \nabla^t_Y \tilde{g}\left(X, Z\right).\end{aligned}$$

On conclut donc que $\left(M, \nabla^t, \tilde{g}\right)$ est une variété de Codazzi, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour la dualité entre ∇^t et ∇^{-t} il suffit d'utiliser (4.1.1), ainsi

$$\begin{aligned}\tilde{g}\left(\nabla^{-t}_X Y, Z\right) + g\left(Y, \nabla^t_X Z\right) &= \int_\Sigma P_\sigma X\left(l_\sigma\right) Y\left(l_\sigma\right) Z\left(l_\sigma\right) d\mu\left(\sigma\right) \\ &\quad + \int_\Sigma P_\sigma \left\{X\left(Y\left(l_\sigma\right)\right) Z\left(l_\sigma\right) + Y\left(l_\sigma\right) X\left(Z\left(l_\sigma\right)\right)\right\} d\mu\left(\sigma\right) \\ &= X(\tilde{g}\left(Y, Z\right)),\end{aligned}$$

pour tous $X, Y, Z \in \chi\left(M\right)$. ∎

4.2 Structures de Poisson quasi-Codazzi induites par un modèle statistique

Dans tout ce qui suit, on suppose que $\tilde{g}$ est la métrique de Fisher associée au modèle statistique P. On note g la cométrique de $\tilde{g}$ et π un champ de bivecteurs sur M.

Proposition 4.2.1 *On a*

$$g^\pi\left(\alpha, \beta\right) = -\int_\Sigma P_\sigma H^{l_\sigma}_D\left(\alpha, \beta\right) d\mu\left(\sigma\right),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1\left(M\right)$, où D est une connexion contravariante sans torsion sur $\left(M, \pi\right)$ et $H^{l_\sigma}_D$ est le champ de tenseurs hessien contravariant de la fonction $l_\sigma := \ln P_\sigma$ relativement à D, pour tout $\sigma \in \Sigma$, voir [1].

Preuve. Soient α, β deux 1-formes différentielles sur M. On a

$$\begin{aligned}P_\sigma H^{l_\sigma}_D\left(\alpha, \beta\right) &= P_\sigma \sharp_\pi\left(\alpha\right)\left(\sharp_\pi\left(\beta\right)\left(l_\sigma\right)\right) - P_\sigma \sharp_\pi\left(D_\alpha \beta\right)\left(l_\sigma\right) \\ &= \sharp_\pi\left(\alpha\right)\left(\sharp_\pi\left(\beta\right)\left(P_\sigma\right)\right) - \sharp_\pi\left(D_\alpha \beta\right)\left(P_\sigma\right) - P_\sigma\left(\sharp_\pi\left(\alpha\right)\left(l_\sigma\right)\right)\left(\sharp_\pi\left(\beta\right)\left(l_\sigma\right)\right),\end{aligned}$$

pour tout $\sigma \in \Sigma$. Par conséquent et en vertu du lemme 4.1.1, on a

$$\begin{aligned}
-\int_{\Sigma} \left(P_{\sigma} H_{D}^{l_{\sigma}}(\alpha,\beta)\right) d\mu(\sigma) &= \int_{\Sigma} P_{\sigma}\left(\sharp_{\pi}(\alpha)(l_{\sigma})\right)\left(\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\right) d\mu(\sigma) \\
&= \tilde{g}\left(\sharp_{\pi}(\alpha), \sharp_{\pi}(\beta)\right) \\
&= g^{\pi}(\alpha,\beta).
\end{aligned}$$

Remarquons au passage que

$$g^{\pi}(\alpha,\beta) = \int_{\Sigma} P_{\sigma}\left(\sharp_{\pi}(\alpha)(l_{\sigma})\right)\left(\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\right) d\mu(\sigma), \tag{4.2.1}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^{1}(M)$. ■

Dans le cas particulier où π induit une structure symplectique sur la variété M, on a les deux résultats suivants.

Proposition 4.2.2 *On suppose que π est un tenseur de Poisson partout non dégénéré (ce qui implique que g^{π} est une métrique riemannienne contravariante), alors la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}^{\pi}$, associée au couple (π, g^{π}), est entièrement déterminée par la formule*

$$\begin{aligned}
g^{\pi}\left(\mathcal{D}_{\alpha}^{\pi}\beta, \gamma\right) &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\alpha)(l_{\sigma})\,\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\,\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\, d\mu(\sigma) \\
&\quad + \int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\right)\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\, d\mu(\sigma),
\end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^{1}(M)$.

Preuve. En utilisant la formule (4.2.1) et le lemme 4.1.1, on a d'une part

$$\begin{aligned}
\sharp_{\pi}(\alpha)\left(g^{\pi}(\beta,\gamma)\right) &= \int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\alpha)(l_{\sigma})\,\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\,\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\, d\mu(\sigma) \\
&\quad + \int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\right)\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\, d\mu(\sigma) \\
&\quad + \int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\,\sharp_{\pi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\right) d\mu(\sigma).
\end{aligned}$$

Or π est un tenseur de Poisson, ce qui montre que

$$g^{\pi}\left([\alpha,\beta]_{\pi}, \gamma\right) = \int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi}(\beta)(l_{\sigma})\right)\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\, d\mu(\sigma) - \int_{\Sigma} P_{\sigma}\sharp_{\pi}(\beta)\left(\sharp_{\pi}(\alpha)(l_{\sigma})\right)\sharp_{\pi}(\gamma)(l_{\sigma})\, d\mu(\sigma).$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^{1}(M)$. Le résultat découle alors de la formule de Koszul définissant la connexion de Levi-Civita contravariante $\mathcal{D}^{\pi}$, voir [5]. ■

Théorème 4.2.1 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition ci-dessus. Pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on définit* D^t *par*

$$\begin{aligned} g^\pi\left(D^t_\alpha\beta,\gamma\right) &= \frac{1-t}{2}\int_\Sigma P_\sigma \sharp_\pi(\alpha)(l_\sigma)\,\sharp_\pi(\beta)(l_\sigma)\,\sharp_\pi(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma) \\ &\quad + \int_\Sigma P_\sigma \sharp_\pi(\alpha)\left(\sharp_\pi(\beta)(l_\sigma)\right)\sharp_\pi(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma), \end{aligned}$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$. *Ainsi, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, (M,π,g^π,D^t) *est une variété presque de Poisson-Codazzi et* (π,g^π,D^{-t}) *est la structure presque de Poisson-Codazzi duale de* (π,g^π,D^t) *sur* M.

Preuve. Pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$, on pose

$$\Phi(\alpha,\beta,\gamma) = \frac{1}{2}\int_\Sigma P_\sigma \sharp_\pi(\alpha)(l_\sigma)\,\sharp_\pi(\beta)(l_\sigma)\,\sharp_\pi(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma).$$

Remarquons alors que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$g^\pi\left(D^t_\alpha\beta,\gamma\right) = g^\pi\left(\mathcal{D}^\pi_\alpha\beta,\gamma\right) - t\Phi(\alpha,\beta,\gamma).$$

Comme Φ est un champ de tenseurs contravariants symétriques et que $\mathcal{D}^\pi$ est sans torsions, alors

$$g^\pi\left(D^t_\alpha\beta - D^t_\beta\alpha,\gamma\right) = g^\pi\left(\mathcal{D}^\pi_\alpha\beta - \mathcal{D}^\pi_\beta\alpha,\gamma\right) = g^\pi\left([\alpha,\beta]_\pi,\gamma\right),$$

ce qui montre que D^t est sans torsion. De plus, comme $\mathcal{D}^\pi g^\pi = 0$ alors on a

$$\begin{aligned} D^t_\alpha g^\pi(\beta,\gamma) &= 2t\Phi(\alpha,\beta,\gamma) \\ &= D^t_\beta g^\pi(\alpha,\gamma). \end{aligned}$$

Ce qui précède montre que (M,π,g^π,D^t) est une variété presque de Poisson-Codazzi.
On conclut donc que $\left(M,\nabla^t,\tilde{g}\right)$ est une variété de Codazzi, pour tout $t \in \mathbb{R}$. Pour établir la dualité entre D^t et D^{-t} il suffit d'utiliser la symétrie de Φ, ainsi

$$\begin{aligned} g^\pi\left(D^t_\alpha\beta,\gamma\right) + g^\pi\left(\beta,D^{-t}_\alpha\gamma\right) &= g^\pi\left(\mathcal{D}^\pi_\alpha\beta,\gamma\right) + g^\pi\left(\beta,\mathcal{D}^\pi_\alpha\gamma\right) - t\Phi(\alpha,\beta,\gamma) + t\Phi(\alpha,\gamma,\beta) \\ &= g^\pi\left(\mathcal{D}^\pi_\alpha\beta,\gamma\right) + g^\pi\left(\beta,\mathcal{D}^\pi_\alpha\gamma\right) \\ &= \sharp_\pi(\alpha)\left(g^\pi(\beta,\gamma)\right), \end{aligned}$$

pour tous $\alpha,\beta,\gamma \in \Omega^1(M)$. ■

Remarque 4.2.1 *Si on note* ω *la forme symplectique définie par le tenseur de Poisson* π, *dans le cas où* $(\omega,\widetilde{g})$ *est une structure presque hermitienne sur* M *on a* $g^\pi = g$ *et* $\mathcal{D}^\pi = \mathcal{D}$. *De plus, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on a*

$$\sharp_\pi\left(D^t_\alpha\beta\right) = \nabla^t_{\sharp_\pi(\alpha)}\left(\sharp_\pi(\beta)\right),$$

où ∇^t *est la conexion définie par le théorème (théorème 4.1.1). Ainsi, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, $\left(M, \omega, \nabla^t, \widetilde{g}\right)$ *est une variété presque symplectique de Codazzi.*

Corollaire 4.2.1 *Sous les mêmes hypothèses et notations de la proposition 1.2.2, du théorème et de la remarque ci-dessus,* $(\Theta, \pi, g^\pi, D^1)$ *est une variété presque de Poisson hessienne et* $\left(\Theta, \omega, \nabla^1, \widetilde{g}\right)$ *est une variété presque symplectique hessienne.*

Preuve. Le fait que $\left(\Theta, \omega, \nabla^1, \widetilde{g}\right)$ est une variété presque symplectique hessienne est justifié par le fait que ∇^1 est de courbure nulle. Par ailleurs, comme π est un tenseur de Poisson, la relation

$$\sharp_\pi \left(D^1_\alpha \beta\right) = \nabla^1_{\sharp_\pi(\alpha)} \left(\sharp_\pi (\beta)\right)$$

montre que la courbure de D^1 est nulle. ■

Revenons au cas plus général où π est un champ de bivecteurs sur M. On a le théorème suivant.

Théorème 4.2.2 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 4.1.1, pour tout* $t \in \mathbb{R}$, *on pose*

$$\mathbf{D}^t_\alpha \beta = \nabla^t_{\sharp_\pi(\alpha)} \beta,$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. *Alors si* $\nabla^t \pi = 0$, *pour un certain* t, *on a* $(M, \pi, g, \mathbf{D}^t)$ *est une variété de Poisson quasi-Codazzi.*

Preuve. Comme $\nabla^t \pi = 0$ alors on a

$$g^\pi \left(\mathbf{D}^t_\alpha \beta, \gamma\right) = \tilde{g} \left(\nabla^t_{\sharp_\pi(\alpha)} \left(\sharp_\pi (\beta)\right), \sharp_\pi (\gamma)\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} \mathbf{D}^t_\alpha g^\pi (\beta, \gamma) &= \nabla^t_{\sharp_\pi(\alpha)} \tilde{g} \left(\sharp_\pi (\beta), \sharp_\pi (\gamma)\right), \\ &= \nabla^t_{\sharp_\pi(\beta)} \tilde{g} \left(\sharp_\pi (\alpha), \sharp_\pi (\gamma)\right), \\ &= \mathbf{D}^t_\alpha g^\pi (\beta, \gamma), \end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Reste à appliquer la proposition 2.1.1 pour établir le fait que $\mathbf{D}^t$ est sans torsion. ■

Corollaire 4.2.2 ***Structure presque de Poisson quasi-hessienne induite par un modèle statistique***

Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème ci-dessus et que la proposition 1.2.2, alors $(\pi, g, \mathbf{D}^1)$ *est une structure presque de Poisson quasi-hessienne induite, par la famille exponentielle* P, *sur le domaine* Θ *de* $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 2.1.1. ■

4.3 Structures presque de Jacobi-Codazzi induites par un modèle statistique

Comme pour la section précedente, on suppose que l'information de Fisher $\tilde{g}$, associée à P, est non dégénérée. On note g la cométrique de la métrique de Fisher $\tilde{g}$. On considère une structure de Jacobi (π, ξ) sur M telle que $\sharp_{\pi,\xi}$ est inversible et soit λ la 1-forme dont l'image par $\sharp_{\pi,\xi}$ est le champ ξ.

Proposition 4.3.1 *Sous les mêmes notations ci-dessus, on a*

$$g^{\pi,\xi}(\alpha, \beta) = -\int_{\Sigma} \left(P_\sigma H_D^{l_\sigma}(\alpha, \beta)\right) d\mu(\sigma),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$*, où* D *est une connexion contravariante (associée au triplet* (π, ξ, λ)*) sans torsion sur* M*, voir [2], et* $H_D^{l_\sigma}$ *est le champ 2-tenseurs contravariants associé à* $l_\sigma = \ln P_\sigma$*, d'une manière analogue à [1] ; plus précisement, on a*

$$H_D^{l_\sigma}(\alpha, \beta) := \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\, l_\sigma\right) - \sharp_{\pi,\xi}(D_\alpha \beta)\, l_\sigma,$$

pour tous $\sigma \in \Sigma, \alpha, \beta \in \Omega^1(M)$.

Preuve. La preuve est analogue à celle de la proposition 4.2.1, en remplaçant $\sharp_\pi$ par $\sharp_{\pi,\xi}$. Ainsi, on peut donc constater que

$$g^{\pi,\xi}(\alpha, \beta) = \int_{\Sigma} P_\sigma \left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(l_\sigma)\right)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\right) d\mu(\sigma), \tag{4.3.1}$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$. ■

On se place à présent dans le cas où $J_{\pi,\xi}$ est une isométrie, c'est-à-dire

$$g(\alpha, \beta) = g(J_{\pi,\xi}\alpha, J_{\pi,\xi}\beta),$$

pour tous $\alpha, \beta \in \Omega^1(M)$, autrement dit $g^{\pi,\xi} = g$. Ainsi la forme λ peut-être définie également par la formule (3.4.1).

Proposition 4.3.2 *Sous les deux hypothèses cités ci-dessus, la connexion de Levi-Civita contravariante* $\mathcal{D}^{\pi,\xi}$ *associée au triplet* (π, ξ, g) *est définie par*

$$\begin{aligned} g\left(\mathcal{D}_\alpha^{\pi,\xi}\beta, \gamma\right) &= \frac{1}{2}\int_{\Sigma} P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(l_\sigma)\, \sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\, \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\, d\mu(\sigma) \\ &\quad + \int_{\Sigma} P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\right) \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\, d\mu(\sigma), \end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$.

Preuve. De la formule (4.3.1) et en utilisant le lemme 4.1.1, on obtient

$$\begin{aligned}\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(g^{\pi,\xi}(\beta,\gamma)\right) &= \int_\Sigma P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(l_\sigma)\,\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\,\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma) \\ &\quad + \int_\Sigma P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\right)\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma) \\ &\quad + \int_\Sigma P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\,\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\right)d\mu(\sigma).\end{aligned}$$

Comme l'hypothèse $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$ implique que $\sharp_{\pi,\xi} : \left(\Omega^1(M), [.,.]^g_{\pi,\xi}\right) \longrightarrow (\chi(M), [.,.])$ est un morphisme d'algèbres de Lie (i.e., $\sharp_{\pi,\xi}$ vérifie la formule (3.1.4)), alors

$$\begin{aligned}g^{\pi,\xi}\left([\alpha,\beta]^g_{\pi,\xi}, \gamma\right) &= \widetilde{g}\left([\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\beta)], \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right) \\ &= \int_\Sigma P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)(l_\sigma)\right)\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma) \\ &\quad - \int_\Sigma P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\beta)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)(l_\sigma)\right)\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)(l_\sigma)\,d\mu(\sigma),\end{aligned}$$

et le résultat en découle. ■

Théorème 4.3.1 *Sous les mêmes hypothèses que la proposition ci-dessus. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on définit D^t par*

$$\begin{aligned}g\left(D^t_\alpha \beta, \gamma\right) &= \frac{1-t}{2}\int_\Sigma P_\sigma\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\,l_\sigma\right)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\,l_\sigma\right)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\,l_\sigma\right)d\mu(\sigma) \\ &\quad + \int_\Sigma P_\sigma \sharp_{\pi,\xi}(\alpha)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\,l_\sigma\right)\left(\sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\,l_\sigma\right)d\mu(\sigma),\end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, (M, π, ξ, g, D^t) est une variété presque de Jacobi-Codazzi et (π, ξ, g, D^{-t}) est la structure presque de Jacobi-Codazzi duale de (π, ξ, g, D^t) sur M.

Preuve. La preuve est analogue de celle du théorème 4.2.1 en tenant compte du fait que $g^{\pi,\xi} = g$. ■

Remarque 4.3.1 *Remarquons que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a*

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(D^t_\alpha \beta\right) = \nabla^t_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right),$$

où ∇^t est la conexion définie par le théorème (théorème 4.1.1). En particulier

$$\sharp_{\pi,\xi}\left(\mathcal{D}^{\pi,\xi}_\alpha \beta\right) = \boldsymbol{\nabla}_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right),$$

où l'on rappelle que $\boldsymbol{\nabla}$ est la connexion de Levi-Civita de la métrique de Fisher $\widetilde{g}$ de P.

Corollaire 4.3.1 *Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème ci-dessus etla proposition 1.2.2, alors* $(\Theta, \pi, \xi, g, D^1)$ *est une variété presque de Jacobi hessienne induite par la famille exponentielle* P.

Preuve. Comme ∇^1 est de courbure nulle, D^1 l'est également car $\sharp_{\pi,\xi}$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie. ■

En restant dans le même contexte ci-dessus, on a les deux exemples remarquables suivants.

Exemple 4.3.1 *Soit* η *une forme de contact sur* M *telle que* $(M, \widetilde{g}, \eta)$ *est une variété riemannienne de contact et soit* (π, ξ) *la structure de Jacobi associée à* (M, η). *On considère l'algébroïde cotangente* $\left(T^*M, \sharp_\eta := \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]_\eta := [.,.]^\eta_{\pi,\xi}\right)$ *à la variété de contact* (M, η). *Comme* $\sharp_{\pi,\xi}(\eta) = \xi$ *et* $\sharp_{\pi,\xi}$ *est un isomorphisme d'algèbres Lie alors* (M, π, ξ, g, D^t) *est une variété presque de Jacobi-Codazzi, pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *L'on obtient ainsi une famille à un paramètre de variétés presque de Jacobi-Codazzi induite sur la variété de contact* (M, η) *par le modèle statistique* P.

Exemple 4.3.2 *De la même manière, soit* (ω, θ) *une structure localement conformément symplectique sur* M *telle que la métrique de Fisher* $\widetilde{g}$ *de* P *est associée au couple* (ω, θ). *Soient* (π, ξ) *la structure de Jacobi associée à* (ω, θ) *et* $\left(T^*M, \sharp_{\omega,\theta} := \sharp_{\pi,\xi}, [.,.]_{\omega,\theta} := [.,.]^\theta_{\pi,\xi}\right)$ *l'algèbroïde cotangente à la variété localemet conformément symplectique* (M, ω, θ). *Comme* $\sharp_{\pi,\xi}(\theta) = \xi$ *et* $\sharp_{\pi,\xi}$ *est un isomorphisme d'algèbres Lie alors* (M, π, ξ, g, D^t) *est une variété presque de Jacobi-Codazzi, pour tout* $t \in \mathbb{R}$. *L'on obtient ainsi une famille à un paramètre de variétés presque de Jacobi-Codazzi induite sur la variété localement conformément symplectique* (M, ω, θ) *par le modèle statistique* P.

En omettant l'hypothèse $g^{\pi,\xi} = g$, on a le résultat suivant.

Théorème 4.3.2 *Sous les mêmes hypothèses que le théorème 4.1.1, si* $\nabla^t(\sharp_{\pi,\xi}) = 0$ *pour un certain* t, *alors* (M, π, g, D^t) *est une variété de Jacobi quasi-Codazzi.*

Preuve. Comme $\nabla^t(\sharp_{\pi,\xi}) = 0$ alors on a

$$g^{\pi,\xi}\left(D^t_\alpha\beta, \gamma\right) = \tilde{g}\left(\nabla^t_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta)\right), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right).$$

D'où

$$\begin{aligned} D^t_\alpha g^{\pi,\xi}(\beta,\gamma) &= \nabla^t_{\sharp_{\pi,\xi}(\alpha)}\tilde{g}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\beta), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right), \\ &= \nabla^t_{\sharp_{\pi,\xi}(\beta)}\tilde{g}\left(\sharp_{\pi,\xi}(\alpha), \sharp_{\pi,\xi}(\gamma)\right), \\ &= D^t_\alpha g^{\pi,\xi}(\beta,\gamma), \end{aligned}$$

pour tous $\alpha, \beta, \gamma \in \Omega^1(M)$. Comme $\sharp_{\pi,\xi}(\lambda) = \xi$ on a la formule (3.1.4), il ne reste alors qu'appliquer la proposition 3.2.1 et le corollaire qui suit pour établir le fait que D^t est sans torsion. ■

Corollaire 4.3.2 ***Structure presque de Poisson quasi-hessienne induite par un modèle statistique***
Sous les mêmes hypothèses et notations que le théorème ci-dessus et la proposition 1.2.2, alors (π, ξ, g, D^1) est une structure de Jacobi quasi-hessienne induite, par la famille exponentielle P, sur le domaine Θ de $\mathbb{R}^n$.

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition 1.2.2. ■

Bibliographie

[1] Y. Aït Amrane, R. Nasri, A. Zeglaoui, *Warped Poisson brackets on warped products*, Journal of Geometric Mechanics, Vol. 6, N° 3, (2014), 279-296.

[2] Y. Aït Amrane, A. Zeglaoui, *Compatibility of Riemannian structures and Jacobi structures*, Journal of Geometry and Physics, 133 (2018), 71-80.

[3] S. I. Amari, H. Nagaouka, *Methods of Information Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, vol. 191, American Mathematical Soc., 2007.

[4] D. E. Blair, *Riemannian geometry of contact and symplectic manifolds*, Progress in mathematics, vol. 203, 2nd ed., Birkhäuser, 2010.

[5] M. Boucetta, *Compatibilité des structures pseudo-riemanniennes et des structures de Poisson*, C. R. Acad. Sci. Paris, Ser. I 333 (2001), 763-768.

[6] M. Boucetta, *Poisson manifolds with compatible pseudo-metric and pseudo-Riemannian Lie algebras*, Differential Geometry and its Applications, 20 (2004), 279-291.

[7] J.-P. Dufour, N. T. Zung, *Poisson structures and their normal forms*, Progress in mathematics, vol. 242., Birkhäuser Verlag 2005.

[8] R. L. Fernandes, *Lie algebroids, holonomy and characteristic classes*, Adv. Math., 170, (2002), 119-179.

[9] C.-M. Marle, *On Jacobi manifolds and Jacobi bundles*, in "Symplectic geometry, groupoids, and integrable systems", Séminaire Sud Rhodanien de Géométrie à Berkeley (1989), Math. Sci. Res. Inst. Publ. 20, Springer-Verlag, New York, 1991, pp 227-246.

[10] M. Nguiffo Boyom, *The cohomology of Koszul-Vinberg algebras*, Pacific Journal of Mathematics, vol. 225, N° 1, 2006, pp 119-153. DOI: 10.2140/pjm.2006.225.119.

[11] M. Nguiffo Boyom, *Foliations-Webs-Hessian Geometry-Information Geometry and Cohomology*, Entropy 2016, 18, 433.

[12] H. Shima, *The geometry of hessian structures*, World Scientific Singapore Co. Pte. Ltd., NJ 07601, 2007.

[13] I. Vaisman, *Lectures on the geometry of Poisson manifolds*, Progress in Mathematics, vol 118, Birkhäuser, Berlin, 1994.