

N° d'ordre : 95/2021-C/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présenté pour l'obtention du diplôme de Doctorat LMD en mathématiques

Spécialité : Analyse : Control optimal des EDP

par : **DJAIDJA Imane**

Thème

**Stabilisation d'une poutre viscoélastique d'Euler-Bernoulli
en mouvement rotatif**

Soutenu publiquement, le 15/07/2021 devant le jury composé de :

M. MEDJDEN	Professeur	USTHB	Président
A. KHEMMOUDJ	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
M. BOUSSELSAL	Professeur	ENS Kouba	Examineur
A. CHOUTRI	Professeur	ENS Kouba	Examineur
A. TOUZALINE	Professeur	USTHB	Examineur

REMERCIEMENTS

En premier lieu, je tiens à remercier chaleureusement **Mr. Ammar KHEMMOUDJ** pour sa disponibilité, son dynamisme et sa gentillesse. Il a su me guider avec un enthousiasme constant et communicatif, et m'encourager pendant ces années. Il ma témoigné sa confiance. Ses grandes qualités scientifiques et humaines ont été indispensables à l'élaboration de cette thèse. Pour tout cela, je ne l'en remercierai jamais assez.

Je remercie **Prof. M. MEDJDEN**, pour l'honneur qu'il m'a fait en présidant le jury de cette thèse. Je remercie également **Prof. M. BOUSSELSAL**, **Prof. A. CHOUTRI**, **Prof. A. TOUZALINE**, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, et je les en remercie sincèrement.

Durant mes quatre années de recherche dans le Laboratoire SDG à l'USTHB, le cadre de travail était idéal et l'ambiance conviviale. Je remercie en particulier le Professeur **Amor KESSAB**, directeur de ce laboratoire, pour avoir su créer un climat propice à la recherche.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes professeurs qui, tout au long de mes études, ont aiguillonné mon goût pour les mathématiques.

Un grand merci à tous les doctorants avec qui j'ai pris un réel plaisir à partager, non seulement, des discussions scientifiques, mais aussi des moments plus personnels. Je souhaite dédier ce travail à ma petite famille pour l'aide constante qu'elle m'a apporté à tout moment.

Enfin, toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse est vivement remerciée.

Résumé

L'objet principal de notre travail est d'étudier l'existence et unicité de la solution ainsi que la stabilisation d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli. Une extrémité de la poutre est fixée à un moteur rotatif dans un plan horizontal et une masse dynamique est attachée à l'extrémité libre de la poutre.

Par la méthode de Galerkin, nous avons étudié l'existence globale et l'unicité de la solution faible du problème.

Ensuite, nous avons utilisé la méthode de Lyapunov pour démontrer la décroissance optimale de la poutre du système considéré sous des conditions raisonnables sur les données.

Mots-clés : Décroissance optimale, poutre de type Euler-Bernoulli, viscoélasticité, fonction de noyau, Solution globale.

Abstract

The main object of our work is to study the existence and uniqueness of the solution as well as the stabilization of a viscoelastic beam of the Euler-Bernoulli type. One end of the beam is attached to a rotary motor in a horizontal plane and a dynamic mass is attached to the free end of the beam.

By the method of Galerkin, we studied the global existence and the uniqueness of the weak solution of the problem.

Then, we used Lyapunov's method to demonstrate the optimal decay of the beam of the considered system under reasonable conditions on the data.

Keywords : Optimal decay, Euler-Bernoulli beam, viscoelasticity, kernel function, Global solution.

Table des matières

Notations	1
Introduction générale	3
0.1 Notes historiques	5
0.1.1 Les travaux de C. S. Morawetz	5
0.1.2 Les travaux de G. Chen et J. Lagnese	6
0.1.3 Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani	6
0.1.4 Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua	6
0.1.5 Les travaux de J. Lions	7
0.1.6 Stabilisation de quelques problèmes viscoélastiques	7
0.1.7 Stabilisation des poutres : Cas rotatif	11
0.1.8 Stabilisation des poutres : Cas non rotatif	13
0.2 But du travail	15
0.3 Méthodologie	17
0.4 Organisation de la thèse	18
1 Rappels sur les matériaux viscoélastiques	20
1.1 Problèmes viscoélastiques	20
1.1.1 Elasticité, viscosité	20
1.1.2 Matériau viscoélastique	21
1.1.3 Viscoélasticité linéaire	21
1.2 Théorie des poutres	22
1.2.1 Définition d'une poutre	22

1.2.2	Cas d'une poutre viscoélastique	23
2	Rappels et notions générales d'analyse fonctionnelle	26
2.1	Quelques espaces fonctionnels	26
2.1.1	Espaces réflexif	26
2.1.2	Espaces séparable	27
2.1.3	Espaces $L^p(\Omega)$	28
2.1.4	Espaces de Sobolev	31
2.2	Topologie faible et topologie faible*	35
2.2.1	Topologie faible $\sigma(E, E')$	35
2.2.2	Topologie faible* $\sigma(E', E)$	36
2.3	Quelques inégalités utiles	38
3	Etude de l'existence et l'unicité d'une solution faible globale	41
3.1	Hypothèses sur le noyau q	41
3.2	Le modèle étudié	43
3.3	Le problème équivalent	43
3.3.1	Energie du système	45
3.4	Principe de la méthode de Galerkin	46
3.5	Existence et l'unicité d'une solution faible globale	47
4	Stabilisation d'une poutre viscoélastique d'Euler-Bernoulli en mouvement rotatif	56
4.1	Quelques lemmes techniques	56
4.2	Comportement asymptotique	60
	Conclusion et perspectives	85

Notations

Dans toute la thèse, nous utiliserons les conventions suivantes :

- Ω : ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma$.
- $\bar{\Omega}$: adhérence de Ω .
- $\eta := (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$: le vecteur normal unitaire orienté vers l'extérieur Γ .
- \mathcal{H} : espace de Hilbert.
- $C^k(\Omega)$: espace des fonctions k fois continûment différentiables sur Ω (k entier positif).
- $C_c^k(\Omega)$: espace des fonctions de $C^k(\Omega)$ à support compact.
- $C_0^\infty(\Omega)$: espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.
- $L^p(\Omega)$: espace de Lebesgue $1 \leq p \leq \infty$.
- $\mathcal{D}'(\Omega)$: espace des distributions.
- $W^{m,p}(\Omega)$: espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$.
- $W_0^{m,p}(\Omega)$: adhérence de $C_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.
- $H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega)$.
- $H^{-m}(\Omega)$: espace dual de $H^m(\Omega)$.
- E' : espace dual de E .
- $D(A)$: domaine de définition de l'opérateur A .
- $|x| := \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}$ norme euclidienne, $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.
- $\|\cdot\|_p$: norme de $L^p(\Omega)$, pour tout $p \in [1, +\infty)$.
- $\langle \cdot, \cdot \rangle$: produit scalaire de dual.
- φ^* : fonction conjuguée de φ .
- $\sigma(E, E')$: topologie faible définie sur E .
- $\sigma(E', E)$: topologie faible* définie sur E' .

\rightharpoonup :	convergence faible.
$\overset{*}{\rightharpoonup}$:	convergence faible*.
$f * g$:	produit de convolution entre les deux fonctions f et g .
\oplus_n :	somme hilbertienne d'ordre n .
$l_2 =$	$\left\{ (\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}} / \sum_{n \geq 0} \alpha_n ^2 < +\infty \right\}$. $\Delta = \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}$:
laplacien.	
$\nabla f(x) =$	$\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n} \right)$, gradient de la fonction f en $x \in \mathbb{R}^n$.
$u' = \frac{\partial u}{\partial t} = u_t$:	dérivée de u par rapport à t .
$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = u_{tt}$:	dérivée d'ordre 2 de u par rapport à t .
D^α :	dérivée d'ordre α au sens des distributions.
EDP :	Equations aux Dérivées Partielles.
EDO :	Equations Différentielles Ordinaires.
p.p. :	Presque partout.

Introduction générale

Le phénomène des vibrations apparaît pratiquement dans toutes les structures mécaniques, qui sont un phénomène scientifique (physique) large et intéressant, ils concernent les mouvements d'oscillation mécanique autour d'une position d'équilibre stable ou d'une trajectoire moyenne. Lorsque vous entendez le mot " vibration ", il vient à l'esprit, comme quelque chose de mal et doit être éliminée, mais en général ce n'est pas vrai. Parfois, les ingénieurs créent des vibrations pour une tâche précise, comme les vibrations de portable, vibreur à béton, vibreur masseur..., mais certains systèmes (qui ne contenant pas de vibreur 1) en fonctionnement normal, génèrent des vibrations désagréables, pour l'utilisateur et la machine elle-même, ce qui rend leur élimination inévitable.

La Théorie du Contrôle des Équations aux Dérivées Partielles intervient dans différents contextes et de plusieurs manières. Les problèmes de contrôlabilité, d'observabilité et de stabilité des équations aux Dérivées Partielles ont fait l'objet, récemment, de nombreux travaux.

Le problème de contrôlabilité peut se formuler simplement de la manière suivante : on considère un système d'évolution décrit par les équations aux dérivées partielles et un intervalle de temps $[0, T]$. Peut-on amener les solutions d'un état initial (au temps $t = 0$) à un état final (au temps $t = T$) en agissant par un contrôle approprié appliqué sur le bord ou dans une partie du domaine dans laquelle l'équation évolue?

Il y a eu d'importantes recherches sur le sujet durant ces dernières années. Voir par exemple J.-L. Lions [85, 86], Lasiecka et Triggiani [77], Fattorini [49], Russell [116] et Zuazua [120, 121]....

Dans un cadre fonctionnel approprié, le problème de contrôlabilité est équivalent à celui d'observabilité, qui consiste à analyser si l'énergie totale des solutions peut être évaluée au moyen de mesures partielles sur un sous-ensemble du domaine ou du bord. Pour obtenir des

estimées d'observabilité, il existe diverses méthodes, comme la technique des multiplieurs [69, 85], l'analyse micro locale [9, 15], les inégalités de Carleman [22, 50, 51, 81] ou encore les critères fréquentiels [16, 97], les critères spectraux [88, 113] ou les inégalités d'Ingham [57, 60, 70].

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations, elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisément, le problème de stabilisation auquel nous nous intéressons revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que nous notons par $E(t)$, à étudier sa limite afin de déterminer si cette dernière est nulle ou pas, et, si cette limite est nulle, à donner une estimation de la vitesse de décroissance de l'énergie vers zéro. On peut noter des différences entre les problèmes de contrôlabilité et ceux de stabilisation. D'une part, dans les premiers cas le temps varie dans un intervalle fini $[0, T]$, alors que pour les problèmes de stabilisation le temps t tend vers l'infini.

Malgré cela, les liens entre les problèmes de stabilisation et de contrôlabilité sont étroits et l'on démontre certaines implications entre ces deux problèmes (voir par exemple [86, 105, 116]). Cependant, la stabilisation ne peut pas toujours être obtenue comme conséquence de la contrôlabilité, et c'est pour cette raison que son étude est souvent faite indépendamment et directement.

Il existe plusieurs types de stabilité que l'on peut étudier, le premier type consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire

$$E(t) \rightarrow 0 \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty,$$

c'est ce que l'on appelle **la stabilisation forte**. Souvent, le calcul direct de la limite de $E(t)$ lorsque t tend vers l'infini est très difficile. Une autre méthode pratique, c'est de majorer $E(t)$ par une fonction $\phi : [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$, c'est-à-dire

$$E(t) \leq \phi(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{0.0.1}$$

telle que $\lim_{t \rightarrow +\infty} \phi(t) = 0$. Différents types de stabilité sont envisagés selon la fonction $\phi(t)$. Nous citons trois types de stabilité, ordonné de la plus forte jusqu'à la plus faible : la stabilité de type exponentielle, la stabilité de type polynomiale de type logarithmique.

i) Stabilité de type exponentielle : C'est le cas pour $\phi(t) = Ae^{-\alpha t}$ où A et α sont des constantes positives, la formule (0.0.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$E(t) \leq Ae^{-\alpha t}, \quad \forall t > 0,$$

que l'on peut démontrer par la méthode directe de Lyapunov, dite de l'énergie, qui est basée sur la recherche d'une fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\alpha E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \beta E(t), \quad \forall t \geq 0 \quad (0.0.2)$$

et

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\mu E(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (0.0.3)$$

où α , β et μ sont des constantes positives.

ii) Stabilité de type polynomiale : Pour $\phi(t) = B/(1+t)^\alpha$, la formule (0.0.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$E(t) \leq \frac{B}{(1+t)^\alpha}, \quad \forall t \geq 0,$$

où B et α sont des constantes positives.

C'est une stabilité moins rapide que celle du type exponentielle.

iii) Stabilité de type logarithmique : Lorsque $\phi(t) = C/(\log(2+t))^\alpha$, la formule (0.0.1) devient

$$E(t) \leq \frac{C}{(\log(2+t))^\alpha}, \quad \forall t \geq 0,$$

où C et α sont des constantes positives.

C'est une stabilité moins rapide que celle du type polynomiale.

0.1 Notes historiques

Nous allons rappeler d'une manière brève quelques phases qu'a connue la notion de stabilisation sans vraiment rentrer dans les détails.

0.1.1 Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation d'ondes dans un domaine non borné de \mathbb{R}^3 , C. Wilcox [119] a réussi

à montrer que l'énergie locale décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Avec des hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz [98] a montré que l'énergie locale décroît comme l'inverse du temps. En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips [79] ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation d'ondes dans un domaine de \mathbb{R}^3 , extérieur à un domaine étoilé décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

0.1.2 Les travaux de G. Chen et J. Lagnese

En se basant sur les travaux C. S. Morawetz [98] sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell [115] a conjecturé, en 1974 un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné. Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen [37]. Ensuite, en adaptant la technique des multiplicateurs utilisée par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. R. Alston, dans les domaines extérieurs, C. Chen [38]) a amélioré les résultats obtenus dans [37]). Voir aussi Lagnese [71]).

0.1.3 Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani [75] ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord.

0.1.4 Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition aux bords de G. Chen en la remplaçant par une autre condition, ce qui a permis, en principe de généraliser les résultats de Chen et Lagnese au domaine à bords réguliers et connexes, mais au prix de modifier la condition aux limites.

0.1.5 Les travaux de J. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables. Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle et de la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni l'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

0.1.6 Stabilisation de quelques problèmes viscoélastiques

Appleby J. A. D et al. [8] ont étudié l'équation intégral-différentielle linéaire

$$u'' + Au(t) + \int_{-\infty}^t k(t-s) Au(s) = 0 \quad t > 0,$$

où le symbole ' désigne la dérivée partielle par rapport au temps ($\frac{\partial}{\partial t}$), et A est un opérateur positif sur un espace de Hilbert X , avec domaine dense $D(A)$, ils ont établis des résultats concernant la décroissance exponentielle des solutions fortes dans un espace de Hilbert. Vittorino Pata [111] a étudié les propriétés de décroissance du semi-groupe engendré par une équation intégral-différentielle linéaire dans un espace de Hilbert, qui est une version abstraite de l'équation

$$u''(t) - \Delta u(t) + \int_0^\infty \mu(s) \Delta u(t-s) = 0$$

décrivant la dynamique des corps viscoélastiques linéaires et il a établi les conditions nécessaires et suffisantes pour avoir la stabilité exponentielle.

Pour le cas de l'histoire finie, Cavalcanti et al. [27] ont étudié le problème viscoélastique suivant

$$\begin{cases} u'' - \Delta u + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - g * \frac{\partial u}{\partial \nu}(t) + h(u_t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x), \quad (u'(x, 0) = u_1(x), & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (0.1.1)$$

où Ω est un domaine borné dans \mathbb{R}^n avec une frontière régulière $\partial\Omega = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ où Γ_0, Γ_1 sont des sous ensembles fermés et disjoints, avec $mesure(\Gamma_0) > 0$ et ν représente la normale unitaire extérieure à $\partial\Omega$, g et h sont des fonctions spécifiques. Ils ont montré un résultat

d'existence globale pour les solutions fortes et faibles. De même, des résultats sur le taux de la décroissance uniforme ont été prouvés avec des hypothèses assez restrictives sur le feedback h et le noyau g .

En effet, la fonction g devait se comporter exactement comme e^{-mt} , $m > 0$, et la fonction h avait un comportement polynomiale au voisinage de zéro. Plus tard, Cavalcanti et al. [30] ont considéré (0.1.1) sans imposer une hypothèse de croissance sur h et sous des conditions plus faibles sur g . Ils ont amélioré le résultat obtenu dans l'article [27] et ils ont assuré la stabilité uniforme. En particulier, ils ont obtenu des taux de décroissance explicites pour certains cas spéciaux. Ce résultat a été récemment amélioré par Messaoudi et Mustapha [93]. Voir aussi [48] où les auteurs ont considéré

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta(\tau) d\tau + u' = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty)$$

et ils ont montré que la décroissance exponentielle de la fonction de relaxation est une condition nécessaire pour avoir la décroissance exponentielle de l'énergie de la solution. La présence du terme mémoire peut empêcher la décroissance exponentielle. Ils ont également obtenu un résultat similaire pour le cas de la décroissance polynomiale.

Cavalcanti et al. [26], ont considéré

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta(\tau) d\tau + a(x) u' + |u|^\gamma u = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty)$$

où $a : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^+$ est une fonction qui peut s'annuler sur une partie de Ω . Sous certaines restrictions géométriques sur ω et pour

$$\begin{aligned} a(x) &\geq a_0 > 0, \quad \forall x \in \omega, \quad \omega \subset \Omega \\ -\xi_1 g(t) &\leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t), \quad t \geq 0. \end{aligned}$$

Les auteurs ont établi un taux de décroissance exponentielle. Berrimi et Messaoudi [11] ont amélioré le résultat de Cavalcanti en introduisant une fonctionnelle différente qui leur a permis d'affaiblir les conditions à la fois sur a et sur g . Par ailleurs, Berrimi et al. [12] ont considéré

$$u'' - \Delta u + \int_0^t g(t - \tau) \Delta(\tau) d\tau = |u|^{p-2} u, \quad \text{dans } \Omega \times (0, \infty)$$

dans un domaine borné et $p > 2$. Ils ont établi l'existence locale, et ils ont montré sous des conditions plus faibles que celles de [26], que la solution locale est globale et décroît uniformément si les données initiales sont assez petites.

Cavalcanti et Oquendo [35] ont considéré

$$u'' - k_0 \Delta u + \int_0^t g(t-s) \operatorname{div}[a(x)g(t-s)\nabla u(s)]ds + b(x)h(u') + f(u) = 0,$$

dans $\Omega \times \mathbb{R}_+$, où Ω est un domaine borné de $\mathbb{R}^n (n \geq 1)$ et $b : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_+$ une fonction qui peut être nulle sur une partie du domaine Ω . Sous les conditions $b(x) \geq b_0 > 0$ sur $\omega \subset \Omega$ et ω vérifiant certaines restrictions géométriques, $a(x) + b(x) \geq \rho > 0$, pour tout $x \in \Omega$, et g vérifiant

$$-\xi_1 g(t) \leq g'(t) \leq -\xi_2 g(t), \quad t \geq 0.$$

Ils ont amélioré le résultat obtenu par M.M. Cavalcanti et al. [34] en établissant la stabilité exponentielle dans le cas où g décroît exponentiellement avec h linéaire et la stabilité polynomiale dans le cas où g décroît polynomialement et h non linéaire.

Pour les équations viscoélastiques quasilineaires, Cavalcanti et al. [24] ont étudié l'équation suivante

$$|u'|^\rho u'' - \Delta u - \Delta u'' + \int_0^t g(t-s) \Delta u(s) ds - \gamma \Delta u' = 0, \quad \rho > 0,$$

ils ont démontré l'existence globale pour $\gamma \geq 0$ et la décroissance exponentielle pour $\gamma > 0$. De même, Messaoudi et Tatar [94], [95] ont prouvé pour $\gamma = 0$ la décroissance exponentielle avec ou sans terme source.

Les problèmes de stabilisation par des termes mémoires dans Ω et d'autres dissipations sur une partie du bord Γ ont été étudié par Cavalcanti et al. [24, 33]. Aassila, Cavalcanti et Soriano [1] ont étudié la stabilisation de l'équation des ondes avec des termes mémoires et une dissipation frictionnelle non linéaire sur le bord.

Plusieurs modèles constitutifs des matériaux viscoélastiques conduisent à des équations de mouvement, ayant la forme d'une E. D.P linéaire hyperbolique, perturbée par un terme intégral dissipatif de type Volterra et ayant un noyau de convolution non négatif, décroissant, voir par exemple [42], [43].

Pour plus de détails concernant les phénomènes physiques qui sont modélisés par les équations différentielles avec des termes mémoires, voir [47]. L'existence et l'unicité des solutions ont été étudiées par J. Prüss [112].

P. Cannarsa et D. Sforza [19] ont étudié la stabilité de l'équation intégró-différentielle non linéaire suivante

$$u''(t) + F(u(t), u'(t)) + Au(t) - \int_0^t \beta(t-s)Au(s)ds = f(t), \quad t \geq 0 \quad (0.1.2)$$

où A est un opérateur positif sur un espace de Hilbert X , avec domaine dense $D(A)$, F est une fonctionnelle définie sur $D(A^\theta)$, $0 < \theta \leq \frac{1}{2}$. Dans ce cas, le noyau β n'est pas supposé être absolument continue mais juste intégrable. Les auteurs ont supposé que $k(t) := \int_0^\infty \beta(s)ds$ est un noyau de type positif vérifiant $k(0) < 1$. Ils ont montré que la solution décroît exponentiellement à l'infini.

Il est important de mentionner que P. Cannarsa et D. Sforza [20], ont étudié l'équation intégró-différentielle semilinéaire suivante

$$u''(t) + Au(t) - \int_0^t g(t-s)Au(s)ds = \nabla F(u(t)), \quad t \in (0, \infty), \quad (0.1.3)$$

où A est un opérateur qui vérifit les mêmes hypothèses que celle du problème (0.1.2), ∇F représente le gradient de la différentiabilité au sens de Gâteaux de la fonctionnelle $F : D(A^{1/2}) \rightarrow \mathbb{R}$, et g est un noyau qui décroît exponentiellement à l'infini et possédant des primitives fortement définies positives. Ils ont obtenu la stabilisation exponentielle des solutions faibles.

F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa et D. Sforza [6] ont prouvé la décroissance exponentielle et polynomiale de l'énergie pour le problème (0.1.3) en affaiblissant les hypothèses sur g . Ils ont supposé que $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ est une fonction localement absolument continue vérifiant, pour $p \in (2, \infty]$,

$$g(0) > 0, \quad \int_0^\infty g(t)dt < 1, \quad g'(t) \leq -kg(t)^{1+\frac{1}{p}}.$$

Les résultats de décroissance de l'énergie à l'infini de toute solution mild du problème (0.1.3), avec des données initiales suffisamment petites, sont obtenus avec le même taux de décroissance que g (exponentielle où polynômiale).

0.1.7 Stabilisation des poutres : Cas rotatif

Au cours des dernières décennies, le contrôle d'une poutre en mouvement rotatif d'Euler-Bernoulli a attiré une attention considérable de nombreux chercheurs, en raison de ses nombreuses applications en génie mécanique. De nombreuses méthodes ont été proposées pour supprimer et / ou réduire les vibrations d'une poutre rotative.

Citons quelques résultats connus liés aux poutres rotatives d'Euler-Bernoulli, Morgül [99] a étudié le mouvement d'un corps rigide avec une poutre flexible fixée dessus. Plus précisément, il a étudié le système suivant

$$\begin{cases} I_h S_{tt}(t) = EI(-bv_{xxxx}(0,t) + v_{xx}(0,t))\tau(t), & \forall t \geq 0, \\ \rho v_{tt}(x,t) + EIv_{xxxx}(x,t) + \rho(b+x)S_{tt}(t) - \rho S_t^2(x,t) = 0, \\ \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases}$$

avec les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} v(0,t) = v_x(0,t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ EIv_{xxx}(L,t) = -\alpha v_t(L,t), & \forall t \geq 0, \\ EIv_{xx}(L,t) = -\beta v_{xt}(L,t), & \forall t \geq 0, \end{cases}$$

où α et β sont deux constantes positives. En utilisant la théorie des semi-groupes, l'auteur a étudié l'existence de la solution et il a montré la décroissance exponentielle de l'énergie sous le contrôle

$$\tau(t) = EI(bv_{xxx}(0,t) - v_{xx}(0,t)) - k_1 S_t(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Nguyen et Egeland [107] ont étudié la stabilité d'une poutre d'Euler-Bernoulli motorisé décrite par le modèle suivant

$$\begin{cases} I_h S_{tt}(t) + EI r_0 v_{xxx}(0,t) - EI v_{xx}(0,t) + (L+r_0)F_L(t) = \tau(t), & \forall t \geq 0, \\ \rho[(r_0+x)S_{tt}(t) + v_{tt}(x,t)] + EIv_{xxxx}(x,t) = 0, & \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (0.1.4)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v(0,t) = v_x(0,t) = EIv_{xx}(L,t) = 0, & \forall t \geq 0, \\ EIv_{xxx}(L,t) = F_L(t), & \forall t \geq 0, \end{cases} \quad (0.1.5)$$

où r_0 est le rayon du moteur et $F_L(t)$ est la force de contrôle au bord générée par l'actionneur de force à l'extrémité de la poutre. Ils ont établi une stabilité exponentielle, en utilisant la théorie des semi-groupes sous le contrôle au bord et les forces suivantes

$$\begin{aligned} F_L(t) &= k_d v_t(L, t), \quad \forall t \geq 0, \\ \tau(t) &= I_h \frac{d}{dt^2} S_d(t) + K_d \frac{d}{dt} (S_d(t) - S(t)) + K_p (S_d(t) - S(t)) \\ &\quad + EI r_0 (v_{xxx}(0, t) - v_{xx}(0, t)) + (L + r_0) F_L(L), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

où k_d , K_p et K_d sont des gains positifs de contrôle et $\frac{d}{dt^2} S_d(t)$, $\frac{d}{dt} S_d(t)$ et $S_d(t)$ représentent les trajectoires.

Dans Nguyen et Egeland [107], les mêmes auteurs ont amélioré ces résultats en attachant une masse m à l'extrémité libre de la poutre avec un contrôle frontière F_L appliqué à la Masse. Ils ont étudié l'existence, l'unicité et la stabilité exponentielle des problèmes (0.1.4) et (0.1.5) avec

$$\begin{aligned} F_L(t) &= -k_d v_t(L, t), \quad t \geq 0, \\ \tau(t) &= I_h \frac{d}{dt^2} S_d(t) + K_d \frac{d}{dt} (S_d(t) - S(t)) + K_p (S_d(t) - S(t)), \\ &\quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{0.1.6}$$

Aussi, lorsque $q \equiv 0$ (c'est-à-dire en l'absence d'amortissement viscoélastique) dans la deuxième équation de (0.2.1), Guo et Song [53] ont considéré le système (0.2.1)-(0.2.3) et ils ont montré que le système est bien posé. De plus, ils ont établi la stabilité du système si $I_h = 0$ sous le contrôle non linéaire

$$\tau(t) = -\alpha v_x(0, t) - f(y_{xt})(t), \quad \forall t \geq 0, \tag{0.1.7}$$

où $\alpha > 0$ et $f \in C(\mathbb{R})$ est une fonction croissante telle que $f(0) = 0$ et $sf(s) > 0$ pour $s \neq 0$. De plus, le même auteur qui est cité en premier dans [52] a amélioré le résultat dans Guo et Song [53], pour $I_h \neq 0$, il a établi l'observabilité et la contrôlabilité du système sous la loi de contrôle

$$\tau(t) = -\alpha v_x(0, t) + \beta v_{xt}(t) - k v_{xxt}(0, t), \quad \alpha > 0, \quad \beta, k \in \mathbb{R}, t \geq 0. \tag{0.1.8}$$

Pour des problèmes similaires traitant de la théorie de la stabilité de la poutre d'Euler-Bernoulli en rotation avec d'autres types de dissipations, le lecteur est renvoyé à [18, 20, 21].

0.1.8 Stabilisation des poutres : Cas non rotatif

D'autre part, la stabilisation frontière et le contrôle frontière de la poutre d'Euler-Bernoulli sans rotation (cas non rotatif) en utilisant des limites différentes amortisseurs ont été considérés par plusieurs auteurs, et de nombreux résultats ont été obtenus à cet égard. Nous tenons à mentionner ce qui suit [10, 23, 28, 31, 32, 41, 43, 63, 64, 82, 117] et une longue liste de références.

Pour la stabilisation et le contrôle des poutres viscoélastiques sans rotation (cas non rotatif), on peut citer les travaux de [83, 61, 108, 109].

On note également que dans [30], Cavalcanti et al. ont traité le système suivant

$$u_{tt} + \Delta^2 u - \int_0^t q(t - \tau) \Delta^2 u(\tau) d\tau = 0 \text{ dans } \Omega \times (0, \infty),$$

avec les conditions aux limites non linéaires suivantes

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{dans } \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ \Delta u - \int_0^t q(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = 0, & \text{dans } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ \frac{\partial(\Delta u)}{\partial \nu} - \int_0^t q(t - \tau) \frac{\partial(\Delta u(\tau))}{\partial \nu} d\tau = f(u) + a(t) u_t & \text{dans } \Gamma_1 \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u^0(x), u_t(x, 0) = u^1(x), & \forall x \in \Omega, \end{array} \right.$$

où Ω est un domaine borné de \mathbb{R}^n , $n \geq 1$, avec une frontière lisse $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

En plus de l'existence et l'unicité de la solution, il ont établi un taux de décroissance uniforme de l'énergie en implémentant une rétroaction non linéaire et non locale agissant sur la frontière. Le noyau q est de type exponentiel. Plus précisément, ils ont supposé que

$$\left\{ \begin{array}{l} \exists \xi_0, \xi_1, \xi_2 > 0 : -\xi_0 q(t) \leq q_t(t) \leq -\xi_1 k(t), \\ 0 < q_{tt}(t) \leq \xi_2 q(t), \quad \forall t \geq 0. \end{array} \right.$$

Dans [26], Cavalcanti et al. ont obtenu un taux de décroissance exponentiel en supposant que le noyau q décroît de façon exponentielle. Ce travail a ensuite été amélioré par Berrimi et Messaoudi [12] en introduisant une autre fonctionnelle qui leur a permis d'affaiblir les conditions sur q .

Pour une classe plus large de fonctions de relaxation, Messaoudi [91, 92] a considéré

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t q(t - \tau) \Delta u(\tau) d\tau = b |u|^\gamma u \tag{0.1.9}$$

pour $\gamma > 0$ et $b = 0$ ou $b = 1$ et la fonction de relaxation vérifie

$$q'(t) \leq -\zeta(t) q(t), \quad (0.1.10)$$

où ζ est une fonction différentiable, positive et décroissante. Ils ont établi un résultat de décroissance, plus général duquel les résultats la décroissance exponentielle et polynomiale habituelle ne sont que des cas particuliers. Une telle condition a ensuite été employée dans une série d'articles, voir par exemple [55, 102, 103, 110].

Récemment, Mustafa et Messaoudi [101] ont étudié le problème (0.1.9) avec $b = 0$ pour les fonctions de relaxation vérifiant

$$q'(t) \leq -H(q(t)), \quad (0.1.11)$$

où H est une fonction positive, avec $H(0) = H'(0) = 0$ et H est strictement croissante et strictement convexe sur $]0, k[$ pour certains $k > 0$. Les auteurs ont montré une relation générale entre le taux de décroissance de l'énergie et celui de la fonction de relaxation q sans imposer d'hypothèses sur le comportement de q à l'infini.

D'autre part, une condition de la forme (0.1.11) où H est une fonction convexe satisfaisant certaines propriétés a été introduit par Alabau-Boussouira et Cannarsa [5] et elle a été utilisé ensuite par plusieurs auteurs avec des approches différentes. Nous nous référons à [78] où le résultat est non seulement général mais aussi optimal a été établi par Lasiecka et Wang.

En ce qui nous concerne, il y a peu de travaux qui traitent le comportement asymptotique de la solution du problème (0.2.1)-(0.2.3), et le présent travail semble être parmi les pionniers dans l'étude de la stabilité générale du problème (0.2.1)-(0.2.3).

Notre but est d'étudier le système (0.2.1)-(0.2.3) pour des fonctions de relaxation q de type plus général que ceux en (0.1.10) et (0.1.11). Nous considérons la condition

$$q'(t) \leq -\zeta(t) H(q(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (0.1.12)$$

où H est une fonction croissante et convexe près de l'origine et ζ est une fonction décroissante avec seulement des hypothèses plus générales sur le comportement de q à l'infini, nous établissons des résultats optimaux de décroissance d'énergie explicites et générales à partir desquels nous pouvons récupérer les taux exponentiels et polynomiaux optimaux.

Pour démontrer les estimations de décroissance, nous utilisons une méthode de l'énergie et certaines propriétés des fonctions convexes. les paramètres de convexité ont été introduits et développés dans [4, 25, 44, 45, 73, 74, 89].

0.2 But du travail

Dans cette thèse, nous considérons une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli dont l'une des extrémités est fixée à un moteur rotatif dans un plan horizontal et une masse dynamique est attachée à l'extrémité libre de la poutre. La dynamique du problème est également modélisée comme suit :

$$\begin{cases} I_h S_{tt}(t) + \rho \int_0^L (x(xS + v(x,t)))_{tt} dx + m_p L(LS(t) + v(L,t))_{tt} \\ + J_p (S(t) + v_x(L,t))_{tt} = \tau(t), \quad \forall t \geq 0, \\ \rho v_{tt}(t) + EI v_{xxxx}(t) - EI(q * v_{xxxx})(t) = -\rho x S_{tt}(t), \quad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (0.2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v(0,t) = v_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ EI v_{xxx}(L,t) - EI \int_0^t q(t-s) v_{xxx}(L,s) ds = m_p (LS(t) + v(L,t))_{tt}, \quad t \geq 0, \\ EI v_{xx}(L,t) - EI \int_0^t q(t-s) v_{xx}(L,s) ds = -J_p (S(t) + v_x(L,t))_{tt}, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (0.2.2)$$

et les conditions initiales

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad S(0) = S_0, \quad S_t(0) = S_1, \quad x \in (0,L), \quad (0.2.3)$$

comme le montre la figure suivante :

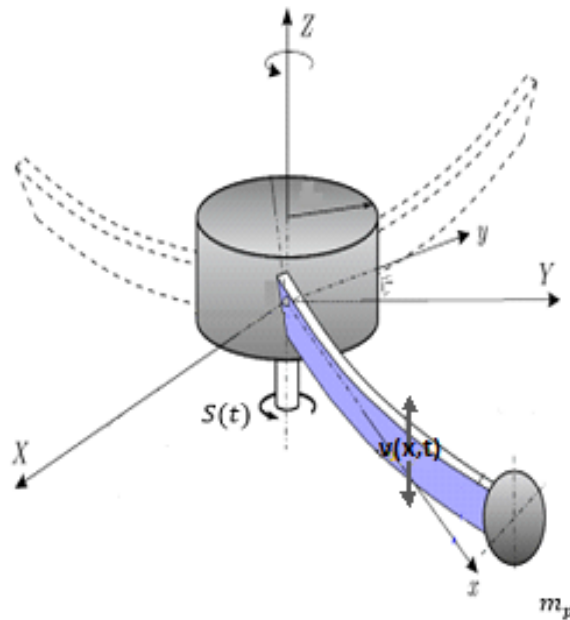


Figure 4.2 : Une poutre viscoélastique d'Euler-Bernoulli en mouvement rotatif.

où $S(t)$: est l'angle de rotation du moyen,

$v(x, t)$: est la déflexion de la poutre au point x et au temps t ,

$\tau(t)$: est une force extérieure,

ρ : est la densité linéaire de la poutre,

L : est la longueur de la poutre,

EI : est la rigidité de flexion de la poutre,

m_p : est la masse attachée à l'extrémité libre,

J_p : est l'inertie rotative du corps rigide à l'extrémité libre de la poutre,

I_h : est le moment d'inertie du moteur

et l'opérateur de convolution $(q * f)(t)$ est défini par

$$(q * f)(t) = \int_0^t q(t-s)f(x, s)ds.$$

Dans la deuxième équation de (0.2.1), le terme $EI(q*v_{xxxx})(t)$ représente l'amortissement viscoélastique. Ce terme apparaît dans la relation constitutive entre la contrainte et la déformation selon le principe de Boltzmann (voir [40, 36]). Le noyau q s'appelle la fonction de relaxation et sera précisé ultérieurement. La première équation (différentielle ordinaire) de (0.2.1) représente la dynamique du moteur, et par conséquent, la fonction $S(t)$ est supposée différent de zéro, et la deuxième équation (intégré-différentielle) représente la dynamique de la poutre, et par conséquent, la fonction $v(x; t)$ est supposée petite.

0.3 Méthodologie

Dans cette thèse, nous utilisons deux méthodes de travail la première pour démontrer l'existence et l'unicité de la solution et la deuxième pour démontrer la stabilité générale de l'énergie associée au problème:

Méthode de Galerkin : Il s'agit d'une méthode de compacité. On écrit le problème considéré sous forme variationnelle. On choisit des espaces fonctionnels dans lesquels on introduit un problème approché en dimension fini, en utilisant des bases dans ces espaces. On établit des estimations à priori afin d'obtenir la majoration des solutions approchées qui convergent vers une solution, en utilisant le théorème de compacité (Abin-Lions).

Méthode de Lyapunov : C'est une méthode qui joue un rôle important dans la théorie de la stabilité des équations différentielles, elle est utilisé aussi pour l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires. Cette méthode a été étendue pour donner des critères pour le comportement asymptotique des systèmes d'équations d'évolution lorsque la dissipation physique (perte d'énergie par une friction, un contrôle aux bords, ou un matériau viscoélastique) est présent. Ce fait peut être exprimé du point de vue mathématiques par l'existence d'un ensemble borné absorbant. Elle permet, sans calculer explicitement une solution de système, de tirer des conclusions sur le comportement de la solution d'un système donné.

Pour la démonstration de la stabilité du système, on commence par définir l'énergie modifiée du système, où la modification de l'énergie du système, se fait pour obtenir un signe négatif de la dérivée de l'énergie, ce qui signifie que le système est dissipatif, puis en suivant un raisonnement par analogie aux systèmes similaires afin de construire une fonctionnelle de Lyapunov, de façon que $L(t)$ vérifie (1.2.2) et vérifie une variante de la formule (1.2.3),

$$\frac{dL}{dt}(t) \leq -CE(t) + c \|g_1(u_t)\|_2^2 + c(h \square \nabla u)(t), \quad \text{pour } t \geq t_1, \quad (0.3.1)$$

où C , c et t_1 sont des constantes positives. Dans cette étape, on exploite certaines propriétés des fonctions convexes introduites dans [101] pour estimer les deux derniers termes dans (0.3.1). Après quelques manipulations, on obtient le résultat principal de notre travail.

- Le contenu de dernier chapitre a fait l'objet d'une publication internationale parue dans la revue **Communication on pure and applied analysis**, intitulée : **General decay for a viscoelastic rotating Euler-Bernoulli beam**. Doi : **10.3934/cpaa.2020154**. **Juillet 2020**, (voir [66]).

0.4 Organisation de la thèse

La thèse est composée de quatre chapitres

- **Dans le chapitre 1** : on fait des rappels sur la théorie des poutres et les propriétés des matériaux viscoélastiques et leur rôle dans l'atténuation des vibrations dans les systèmes mécaniques et on discute l'importance de ces matériaux.
- **Dans le chapitre 2** : on rappelle quelques notions d'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans notre travail.
- **Dans le chapitre 3** : on démontre un résultat d'existence globale et l'unicité d'une solution faible du système considéré, en utilisant la méthode de Galerkin.
- **Dans le chapitre 4** : on étudie le comportement asymptotique de la solution et on démontre la décroissance générale de l'énergie de notre système par la méthode de Lyapunov qui consiste à estimer une fonctionnelle équivalente à l'énergie.

On termine cette thèse avec une conclusion générale et on présentera quelques perspectives de recherche sur la stabilisation des équations d'Euler-Bernoulli.

Chapitre 1

Rappels sur les matériaux viscoélastiques

1.1 Problèmes viscoélastiques

1.1.1 Élasticité, viscosité

L'élasticité est la tendance d'un matériau solide à retrouver sa forme d'origine après avoir été déformée. La déformation élastique est une déformation réversible. Un matériau solide se déforme lorsque des forces lui sont appliquées.

Un matériau élastique retrouve sa forme et sa taille initiale quand ces forces ne s'exercent plus. Les raisons physiques du comportement élastique peuvent être quelque peu différentes d'un matériau à un autre. Pour les métaux, les treillis atomiques changent de taille et de forme quand des forces leur sont appliquées (ajout d'énergie au système). Quand les forces sont supprimées, le système revient à son état initial où l'énergie est la plus faible. Pour le caoutchouc et d'autres polymères, l'élasticité est due à l'extension des chaînes de polymère, lorsque les forces sont appliquées. L'élasticité linéaire concerne les petites déformations proportionnelles à la sollicitation.

Dans cette gamme, l'allongement est proportionnel à la force dans le cas d'un étirement, selon le module de Young, et l'angle est proportionnel au couple dans le cas d'une torsion. D'autre part, la viscosité est une propriété interne d'un fluide qui offre une résistance à

l'écoulement. Un liquide visqueux n'a pas de forme définie, il s'écoule de manière irréversible sous l'action de forces externes. Cependant, il existe des matériaux dont les propriétés sont intermédiaires entre l'élasticité et la viscosité.

1.1.2 Matériau viscoélastique

Un matériau viscoélastique est défini comme ayant un comportement à la fois visqueux et élastique. Cette dernière propriété se retrouve chez des solides et la première quant à elle est liée aux liquides. Les propriétés mécaniques observées sont généralement dépendantes du temps et des quantités qui en dérivent, ceci à cause du fait que lorsqu'une déformation est appliquée à un matériau viscoélastique ce dernier donne comme réponse un couplage entre la réponse d'un solide élastique et celle d'un fluide visqueux. La réponse du solide élastique étant une contrainte qui est proportionnelle à la déformation et celle du fluide visqueux une contrainte proportionnelle à la vitesse de déformation ; et vice versa, une contrainte appliquée donne comme réponse une déformation. Ainsi on peut en déduire que les caractéristiques mécaniques d'un matériau viscoélastique sont fonction du temps et des différentes sollicitations. Pour pouvoir caractériser le comportement viscoélastique des matériaux dans le domaine temporel, plusieurs essais sont utilisés ; notamment les essais de fluage, de relaxation et de recouvrance.

Du point de vue mathématique, ces effets d'amortissement sont modélisés par des opérateurs intégral-différentiels, par exemple $\int_0^t q(t-s) \Delta(s) ds$; où q représente le noyau dans l'expression du terme mémoire, le terme intégral exprime le fait que les contraintes dépendent à tout moment, non seulement de la valeur instantanée, mais de toute l'histoire passée des contraintes que le matériau a subi.

1.1.3 Viscoélasticité linéaire

La viscoélasticité linéaire se caractérise par le comportement élastique et dissipatif d'un matériau pour les petites déformations. En rhéologie le comportement d'un matériau viscoélastique linéaire est intermédiaire entre celui d'un solide élastique idéal symbolisé par un ressort de module E et celui d'un liquide visqueux newtonien symbolisé par un amortis-

seur de viscosité. L'élasticité d'un matériau traduit sa capacité à conserver et restituer de l'énergie après déformation.

La viscosité d'un matériau traduit sa capacité à dissiper de l'énergie. Les polymères, et la plupart des matériaux ont un comportement viscoélastique. La partie viscoélastique provoque une décroissance de l'énergie associée. La partie élastique donne une équation conservatrice par contre la partie viscoélastique produit un mécanisme de dissipation qui agit sur une partie du domaine pour donner une décroissance de l'énergie associée à la solution en vue de ramener le système à l'état d'équilibre.

1.2 Théorie des poutres

La théorie des poutres, ou théorie d'Euler-Bernoulli, est un modèle utilisé dans le domaine de la résistance des matériaux.

1.2.1 Définition d'une poutre

Le terme " poutre " désigne un objet dont la longueur est grande par rapport aux dimensions transverses (section fine). Une poutre est un élément de structure utilisé pour la construction dans les bâtiments, les navires et autres véhicules, et dans la fabrication de machines. Cependant, le modèle des poutres peut être utilisé pour des pièces très diverses à condition qu'elles respectent certaines conditions. Il est à noter que ce type d'élément appelé élément "barre" quand les forces extérieures sont axiales, et il est appelé "arbre" quand il est soumis

à la torsion, ou quand il a un mouvement de rotation.

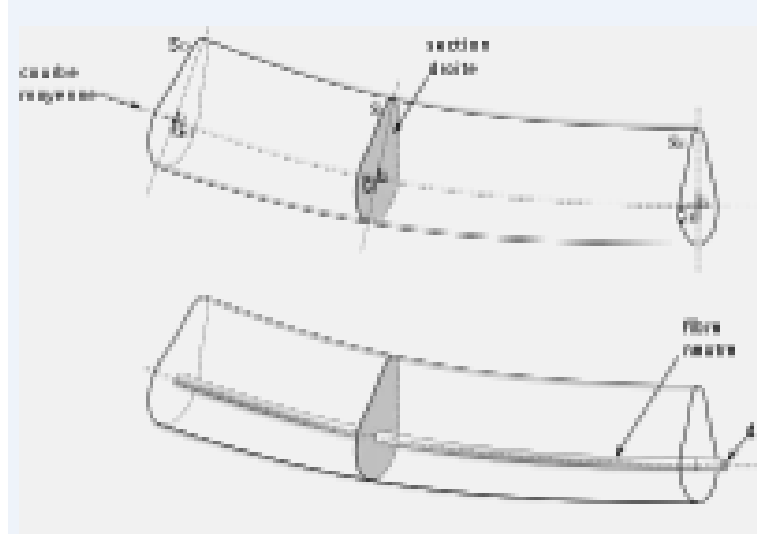


Figure 1.1 : Poutre de courbe
moyenne

1.2.2 Cas d'une poutre viscoélastique

La stabilisation d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli a été étudiée par plusieurs chercheurs. Nous citons ici quelques uns, dans [109] Park et Kim ont considéré la poutre de type Euler-Bernoulli avec une dissipation viscoélastique : une extrémité de la poutre est fixée tandis que l'autre extrémité est soumise à une force de contrôle non linéaire f . Ils ont considéré l'équation suivante :

$$\xi_{tt} + \xi_{xxxx} - \int_0^t q(t-s)\xi_{xxxx}(s) ds + g(\xi_t) = 0, \quad (x, t) \in]0, L[\times \mathbb{R}^+, \quad (1.2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \xi(0, t) = \xi_x(0, t) = \xi_{xx}(0, t) = \xi_{xx}(L, t) = \xi_{xxx}(0, t) = 0, & \forall t > 0, \\ \xi_{xxx}(L, t) - \int_0^t q(t-s)\xi_{xxx}(L, s) ds = f(\xi(L, t)), & \forall t > 0, \\ \xi(x, 0) = \xi^0(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi^1(x), & 0 \leq x \leq L, \end{cases} \quad (1.2.2)$$

où $g(\xi_t)$ est une dissipation. Le terme d'intégral dans l'équation de (1.2.1) représente le terme mémoire ou le terme d'amortissement viscoélastique. Il est dérivé de la relation entre

la contrainte et l'historique de la déformation selon le principe de Boltzmann. Pour le cas $q = f = 0$ et $g(\xi_t) = a(x)\xi_t$ le système (1.2.1)-(1.2.2) a été étudié par Kim dans [68] où l'auteur a démontré la stabilité du système en présence de la dissipation visqueuse. Pour $q \neq 0$, $\tau \neq 0$ et $g(\xi_t) \neq a(x)\xi_t$, l'auteur a montré un résultat d'existence d'une solution en utilisant la méthode de Galerkin. De même, un résultat sur le taux de décroissance uniforme a été prouvé sous l'action de la dissipation viscoélastique, une dissipation fractionnelle de la forme $g(\xi_t)$ et une force de contrôle f en utilisant la technique des multiplicateurs sous certaines hypothèses sur le noyau q et les fonctions g et f . Plus précisément, g et f sont des fonctions continûment différentiables et vérifient :

$$\begin{aligned} \langle f(s), s \rangle - f(s) &\geq 0, & \forall s \in \mathbb{R}, \\ g(0) = 0, \langle g(r) - g(s), r - s \rangle &\geq \rho |r - s|^2, & \forall s, r \in \mathbb{R}, \end{aligned} \quad (1.2.3)$$

où ρ est une constante positive et le noyau q vérifie :

$$\begin{aligned} -c_0 q(t) &\leq q_t(t) \leq -c_1 q(t) & \forall t \in [0, t_0], \\ |q_t(t)| &\leq c_2 q(t) & \forall t \in [0, t_0], \\ 0 &\leq q_{tt} \leq c_3 q(t), & \forall t \in [0, t_0], \end{aligned} \quad (1.2.4)$$

où c_i , $i = 0, \dots, 3$ sont des constantes strictement positives.

Plus tard, Park et al. dans [108] ont étudié l'équation (1.2.1) avec les conditions suivantes

:

$$\begin{cases} \xi(0, t) = \xi_x(0, t) = \xi_{xx}(L, t) = 0, & \forall t > 0, \\ \xi_{xxx}(L, t) - \int_0^t q(t-s)\xi_{xxx}(L, s) ds = f(t), & \forall t > 0, \\ \xi(x, 0) = \xi^0(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi^1(x), & 0 \leq x \leq L, \\ \xi_{out}(t) = \xi_t(L, t), \end{cases}$$

où $f(t)$ est un contrôle frontière agissant sur l'extrémité libre de la poutre et $\xi_{out}(t)$ représente le signal mesuré du système à l'instant t . En supposant que la fonction g et le noyau q vérifient les hypothèses (1.2.3)–(1.2.4), les auteurs ont prouvé l'existence de la solution ainsi que la stabilité exponentielle avec le contrôle frontière $f(t)$ suivant :

$$\begin{cases} f(t) = h(t)\xi_t(L, t), \\ h_t(t) = r\xi_t^2(L, t), \quad h(0) = h_0 > 0, \quad r > 0. \end{cases}$$

Un résultat similaire a été obtenu dans [62] par Kang et al. lorsque l'extrémité libre de la poutre est contrôlée par une force $f(t)$ avec une perturbation harmonique et une amplitude

θ avec :

$$\begin{cases} f(t) = h(t) \xi_t(L, t) + \theta(t) \sin t, & t \geq 0, \\ h_t(t) = r \xi_t^2(L, t), \quad h(0) = h_0 > 0, \quad r > 0, & t \geq 0, \\ \theta_t(t) = \xi_t(L, t) \sin t, \quad \theta(0) = \theta_0, & t \geq 0. \end{cases}$$

Enfin, dans [80] Lazzari et Nibbi ont étudié le problème suivant :

$$\xi_{tt}(x, t) + \xi_{xxxx}(x, t) = 0, \quad (x, t) \in]0, 1[\times \mathbb{R}^+, \quad (1.2.5)$$

avec

$$\begin{cases} \xi(0, t) = \xi_x(0, t) = \xi_{xx}(1, t), & t \geq 0, \\ \xi_{xxx}(1, t) = \phi(t), & t \geq 0, \end{cases} \quad (1.2.6)$$

où $\phi(t)$ est une force de contrôle de type viscoélastique appliquée à l'extrémité libre de la poutre définie par :

$$\phi(t) = \gamma_0 \xi_t(1, t) + \int_0^\infty \lambda(s) \xi_t(1, t-s) ds,$$

où $\gamma_0 \in \mathbb{R}^+$ et λ est un noyau non négatif qui vérifie $\lambda'(t) < 0$, $\lambda''(t) > 0$ et $t \in \mathbb{R}^+$. Sous l'action d'un contrôle frontière ϕ , les auteurs ont obtenu un résultat de stabilité pour le système (1.2.5)–(1.2.6).

Chapitre 2

Rappels et notions générales d'analyse fonctionnelle

Le but de ce chapitre est de rappeler certaines notions indispensables pour la suite de notre travail, ainsi, nous définissons quelques notions de topologie, d'analyse fonctionnelle et d'analyse générale.

On désigne par Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et E un \mathbb{k} -espace vectoriel, $\mathbb{k} = \mathbb{C}$ ou \mathbb{R} .

2.1 Quelques espaces fonctionnels

2.1.1 Espaces réflexif

Définition 2.1.1 *Soit E un espace de Banach et soit J l'injection canonique de E dans E'' (le bidual de E). On dit que E est réflexif si $J(E) = E''$.*

Lorsque E est réflexif, on identifie implicitement E et E'' (à l'aide de l'isomorphisme J).

Théorème 1 (Kakutani) *Soit E un espace de Banach, alors E est réflexif si et seulement si la boule unité de E est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Preuve. Voir [14]. ■

Remarque 2.1.1 *Les espaces de dimension finie sont réflexifs.*

Proposition 2.1.1 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $M \subset E$ un sous-espace vectoriel fermé, alors M (muni de la norme induite par E) est réflexif.*

Preuve. Voir [14]. ■

Corollaire 2.1.1 *Soit E un espace de Banach, alors E est réflexif si et seulement si E' est réflexif.*

Preuve. Voir [14]. ■

Corollaire 2.1.2 *Soit E un espace de Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous-ensemble convexe, fermé et borné, alors K est compact pour la topologie $\sigma(E, E')$.*

Preuve. Voir [14]. ■

2.1.2 Espaces séparable

Définition 2.1.2 *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous-ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense dans E .*

Proposition 2.1.2 *Soit E un espace métrique séparable et soit F un sous-ensemble de E , alors F est séparable.*

Preuve. Voir [14]. ■

Théorème 2 *Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable, alors E est séparable.*

Preuve. Voir [14]. ■

Remarque 2.1.2 *La réciproque n'est pas vraie. Il existe des espaces de Banach E séparables tels que E' ne soit pas séparable; par exemple $E = L^1(\Omega)$.*

Corollaire 2.1.3 *Soit E un espace de Banach, alors*

E est réflexif et séparable si et seulement si E' est réflexif et séparable.

Preuve. Voir [14]. ■

Théorème 3 Soit E un espace de Banach tel que E' soit séparable et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E , alors il existe une sous-suite extraite (u_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Preuve. Voir [14]. ■

Théorème 4 Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E , alors il existe une sous-suite extraite (u_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E, E')$.

Preuve. Voir [14]. ■

Remarque 2.1.3 La réciproque du théorème (4) est aussi vraie. Plus précisément on a le théorème suivant :

Théorème 5 (Eberlein-émulian) Soit E un espace de Banach tel que toute suite bornée $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ possède une sous-suite extraite (u_{n_k}) convergente pour la topologie $\sigma(E, E')$, alors E est réflexif.

Preuve. Voir [14]. ■

2.1.3 Espaces $L^p(\Omega)$

Dans toute la suite Ω désigne un ouvert de \mathbb{R}^N muni de la mesure de Lebesgue dx .

Définition et propriétés élémentaires des espaces L^p

Définition 2.1.3 On définit $L^p(\Omega)$, ($p \in [1, +\infty]$) par

- Si $p \in [1, +\infty[$

$$L^p(\Omega) = \left\{ f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}; \quad f \text{ mesurable et } \int_{\Omega} |f(x)|^p dx < \infty \right\}.$$

On définit sur $L^p(\Omega)$ la norme :

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left[\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right]^{\frac{1}{p}}.$$

- Si $p = +\infty$:

$$L^\infty(\Omega) = \{f : (\Omega) \longrightarrow \mathbb{R} : \exists C > 0, \text{ telle que } f \text{ est mesurable et } |f(x)| \leq C \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Cet espace vectoriel est complet pour la norme :

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \text{Inf} \{M > 0 : |f(x)| \leq M \text{ p.p. sur } \Omega\}.$$

Théorème 6 $L^p(\Omega)$ est un espace vectoriel et $\|\cdot\|_{L^p}$ est une norme pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Preuve. Voir [14]. ■

Proposition 2.1.3 1. Si $p \in [1, +\infty]$, alors $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach.

2. $L^2(\Omega)$ est un espace de Hilbert avec le produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} = \int_{\Omega} f(x)g(x)dx.$$

Preuve. Voir [14]. ■

Théorème 7 Soient (f_n) une suite de $L^p(\Omega)$ et $f \in L^p(\Omega)$, tels que $\|f_n - f\|_{L^p} \rightarrow 0$, alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) telle que

- $f_{n_k}(x) \rightarrow f(x)$ p.p. sur Ω ,
- $\forall k \in \mathbb{N}, |f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ p.p. sur Ω avec $h \in L^p$.

Preuve. Voir [14]. ■

Théorème 8 (Fubini [14]) On suppose que $F \in L^1(\Omega_1 \times \Omega_2)$, alors pour presque tout $x \in \Omega_1$,

$$F(x, y) \in L^1_y(\Omega_2) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_2} F(x, y) dy \in L^1_x(\Omega_1).$$

De même, pour presque tout $y \in \Omega_2$,

$$F(x, y) \in L^1_x(\Omega_1) \quad \text{et} \quad \int_{\Omega_1} F(x, y) dx \in L^1_y(\Omega_2).$$

De plus, on a

$$\int_{\Omega_1} dx \int_{\Omega_2} F(x, y) dy = \int_{\Omega_2} dy \int_{\Omega_1} F(x, y) dx = \int \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} F(x, y) dx dy.$$

Réflexivité. Séparabilité. Dual de L^p

Proposition 2.1.4 *Pour $1 < p < +\infty$ et pour toute mesure, L^p est réflexif et son dual topologique s'identifie à l'espace L^q , où q est l'exposant conjugué de p .*

Le dual de L^1 est L^∞ et le dual de L^∞ contient strictement L^1 .

Preuve. Voir [14]. ■

Remarque 2.1.4 $L^1([0, 1])$ n'est le dual d'aucun espace.

Proposition 2.1.5 *Si $p \in [1, +\infty[$ alors $L^p(\Omega)$ est séparable.*

Preuve. Voir [14]. ■

Remarque 2.1.5 *Soit $L^1(\Omega)$ un espace séparable et soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans $L^\infty(\Omega)$, donc on peut extraire une sous-suite (u_{n_k}) qui converge dans $L^\infty(\Omega)$ pour la topologie faible* $\sigma(L^\infty(\Omega); L^1(\Omega))$.*

La convolution

Théorème 9 *Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^n)$ et $g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors pour presque tout $x \in \mathbb{R}^n$, la fonction $y \mapsto f(x - y)g(y)$ est intégrable sur \mathbb{R}^n .*

On pose

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x - y)g(y) dy.$$

*Alors $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ et*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Preuve. Voir [14]. ■

Proposition 2.1.6 *Dans le cas d'une seule variable, si f et g sont deux fonctions de classe au moins C^1 et que f' et g' appartiennent à L^1 alors on a*

$$(f * g)' = f' * g = f * g'.$$

Plus généralement dans les cas de fonctions de plusieurs variables on a

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (f * g) = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g = f * \frac{\partial g}{\partial x_i}.$$

Preuve. Voir [14]. ■

2.1.4 Espaces de Sobolev

Définition 2.1.4 (Dérivée faible) On dit que f est dérivable au sens faible dans $L^2(\Omega)$, s'il existe une fonction $\omega \in L^2(\Omega)$, telle que $\forall v \in C_0^\infty(\Omega)$ on ait

$$\int_{\Omega} f(x) \frac{dv}{dx}(x) = - \int_{\Omega} v(x) \omega(x) dx.$$

Cela revient à dire que $\frac{df}{dx}(x) = \omega(x)$ au sens des distributions.

Soient Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , m un entier ($m \geq 2$), $k \in \mathbb{N}$ et p un nombre réel avec $1 \leq p \leq +\infty$.

L'espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$

Définition 2.1.5 On définit l'espace de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$ par:

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ f \in L^p(\Omega); \text{ tel que } : \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^p(\Omega) \text{ pour tout } i = 1, \dots, n \right\}.$$

où $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ est la dérivée au sens des distributions. Dans le cas où $p = 2$, on désigne par $H^1(\Omega)$ au lieu de $W^{1,2}(\Omega)$.

Notation 2.1.1 L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)},$$

(ou parfois, si $1 < p < \infty$, de la norme équivalente $\left(\|f\|_{L^p(\Omega)}^p + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}^p \right)^{\frac{1}{p}}$).
L'espace H^1 est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^1(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^n \left\langle \frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial g}{\partial x_i} \right\rangle_{L^2(\Omega)},$$

la norme associée

$$\|f\|_{H^1(\Omega)} = \left(\|f\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^n \left\| \frac{\partial f}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

est équivalente à la norme de $W^{1,2}(\Omega)$.

Proposition 2.1.7 1. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est un espace de Banach pour $1 \leq p \leq +\infty$,

2. L'espace $W^{1,p}(\Omega)$ est réflexif pour $1 < p < +\infty$ est séparable pour $1 \leq p < +\infty$,

3. L'espace $H^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Preuve. Voir [14]. ■

Proposition 2.1.8 Soient f et g deux fonctions de $W^{1,p}(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $fg \in W^{1,p}(\Omega)$ et

$$(fg)' = f'g + fg'.$$

De plus on a la formule d'intégration par partie

$$\int_y^x f'(s)g(s)ds = f(x)g(x) - f(y)g(y) - \int_y^x f(s)g'(s)ds, \quad \forall x, y \in \bar{\Omega}.$$

Preuve. Voir [14]. ■

Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Définition 2.1.6 On définit l'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ par

$$W^{m,p}(\Omega) = \{f \in L^p(\Omega); D^k f \in L^p(\Omega); |k| \leq m\},$$

où $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{N}^n$, $|k| = k_1 + \dots + k_n$ et $D^k f$ sont les dérivées d'ordre k de f au sens de distributions, et on note par

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega).$$

L'espace $W^{m,p}(\Omega)$ est muni de la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\Omega)} = \|f\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{|k| \leq m} \|D^k f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty,$$

$$\|f\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} = \max_{|k| \leq m} \|D^k f\|_{L^\infty(\Omega)}^p, \quad \text{si } p = +\infty,$$

et l'espace $H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$\langle f, g \rangle_{H^m(\Omega)} = \langle f, g \rangle_{L^2(\Omega)} + \sum_{|k| \leq m} \langle D^k f, D^k g \rangle_{L^2(\Omega)}.$$

L'espace de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$

En général $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. On note alors $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Notation 2.1.2 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n et $m \in \mathbb{N}$, alors on note

$$H_0^m(\Omega) = W_0^{m,2}(\Omega).$$

$H_0^1(\Omega)$ est un espace de Hilbert, il désigne l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $H^1(\Omega)$, i.e.

$$H_0^1(\Omega) = \{ f \in H^1(\Omega), \quad f|_{\Gamma} = 0 \},$$

muni du produit scalaire de $H^1(\Omega)$ et de la norme

$$\|f\|_{H_0^1(\Omega)} = \|\nabla f\|_{L^2(\Omega)}.$$

L'espaces dual de $(W_0^{1,p}(\Omega))$ ($1 \leq p < \infty$)

Pour $p = 2$, $W_0^{1,p}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$.

Notation. On désigne par $W^{-1,q}(\Omega)$ l'espace dual de $W_0^{1,p}(\Omega)$ et par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de $H_0^1(\Omega)$ tel que q est l'exposant conjugué de p .

Injections de Sobolev

On a les injections continues suivantes

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow H^{-1}(\Omega)$$

et

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Si Ω n'est pas borné on a seulement

$$W_0^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega) \hookrightarrow W^{-1,q}(\Omega), \quad 1 \leq p \leq 2.$$

Théorème 10 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , on a les inclusions suivantes.

1. Si $1 \leq p < +\infty$, $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ avec

1. injection compacte pour $q \in [1, p^*[,$
2. injection continue pour $q \in [1, p^*],$

où

$$\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}.$$

2. Si $p = n$, $W^{1,n}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ avec injection compacte pour $q \in [1, +\infty[.$

3. Si $p > n$, $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\bar{\Omega})$ avec injection compacte.

Preuve. Voir [14]. ■

L'injection compacte permet de passer de la convergence faible à la convergence forte comme suit :

Théorème 11 (Rellich-Kondrachov) Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite convergente faiblement vers f dans $W^{1,p}(\Omega)$, alors pour une sous-suite (f_j) , on a :

- Si $1 \leq p < n$, alors

$$f_j \rightarrow f \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega) \quad \text{avec } 1 \leq q < \frac{np}{n-p},$$

- Si $p = n$, alors

$$f_j \rightarrow f \quad \text{fortement dans } L^q(\Omega) \quad \text{avec } 1 \leq q < +\infty,$$

- Si $p > n$, alors

$$f_j \rightarrow f \quad \text{fortement dans } L^\infty(\Omega).$$

Preuve. Voir [14]. ■

Proposition 2.1.9 Si Ω est borné, on a ainsi $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ avec injection compacte.

Preuve. Voir [14]. ■

2.2 Topologie faible et topologie faible*

Soit E un espace de Banach, soit E' son dual (muni de la norme dual

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x \in E, \|x\| \leq 1} | \langle f, x \rangle | \text{ et soit } E'' \text{ son bidual, i.e. le dual de } E', \text{ muni de la norme}$$

$$\|\xi\|_E = \sup_{f \in E', \|f\| \leq 1} | \langle \xi, f \rangle |.$$

2.2.1 Topologie faible $\sigma(E, E')$

Soit E un espace de Banach et soit $f \in E'$ (E' l'espace dual de E). On désigne par $\phi_f : E \rightarrow \mathbb{R}$ l'application définie par $\phi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f parcourt E' on obtient une famille $(\phi_f)_{f \in E'}$ d'applications de E dans \mathbb{R} .

Définition 2.2.1 La topologie faible

$\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications $(\phi_f)_{f \in E'}$.

Proposition 2.2.1 *La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée.*

Preuve. Voir [14]. ■

Définition 2.2.2 *Soit E un espace de Banach. Une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E$ converge au sens de la topologie faible (ou converge faiblement) vers x dans E si*

$$\forall f \in E', \quad \langle f, x_n - x \rangle \rightarrow 0.$$

Proposition 2.2.2 *Soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de E , on a*

- (i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E')] \Leftrightarrow [\langle f, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall f \in E']$,
- (ii) *Si $x_n \rightarrow x$, alors $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$,*
- (iii) *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$, alors $\|x_n\|$ est bornée,*
- (iv) *Si $x_n \rightharpoonup x$ pour $\sigma(E, E')$ et si $f_n \rightarrow f$ dans E' (i.e. $\|f_n - f\|_{E'} \rightarrow 0$), alors*

$$\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle.$$

Preuve. Voir [14]. ■

Proposition 2.2.3 *Lorsque E est de dimension finie la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie usuelle coïncident. En particulier une suite $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge faiblement si et seulement si elle converge fortement.*

Preuve. Voir [14]. ■

Proposition 2.2.4 *Soit E un espace de Banach réflexif et soit $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une suite bornée dans X , alors il est possible d'extraire de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ une sous-suite de $(x_{n_k})_{k \in \mathbb{N}^*}$ qui converge faiblement dans X , i.e. :*

$$\forall f \in X', \langle f, x_{n_k} \rangle_{X' \times X} \longrightarrow \langle f, x \rangle_{X' \times X} \quad \text{quand } k \longrightarrow +\infty.$$

Preuve. Voir [14]. ■

2.2.2 Topologie faible* $\sigma(E', E)$

Définition 2.2.3 *Soit E un espace vectoriel normé.*

Une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \in E'$ converge au sens de la topologie faible vers $f \in E'$ si :*

$$\forall x \in E, \langle f_n - f, x \rangle \rightarrow 0.$$

Proposition 2.2.5 *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite sur E' , on a*

(i) $\left[f_n \xrightarrow{*} f \text{ pour } \sigma(E', E) \right] \Leftrightarrow [\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle, \forall x \in E],$

(ii) *Si $f_n \rightarrow f$ alors $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$,*

si $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$ alors $f_n \xrightarrow{} f$ pour $\sigma(E, E')$,*

(iii) *Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ alors $\|f_n\|$ est bornée,*

(iv) *Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ et si $x_n \rightarrow x$ fortement dans E , alors $\langle f_n, x_n \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.*

Preuve. Voir [14]. ■

Remarque 2.2.1 Si $f_n \xrightarrow{*} f$ pour $\sigma(E', E)$ (ou même si $f_n \rightarrow f$ pour $\sigma(E', E'')$) et si $x_n \rightarrow x$ pour $\sigma(E, E')$ on ne peut pas conclure que $\langle f_n, x \rangle \rightarrow \langle f, x \rangle$.

Corollaire 2.2.1 Soit E un espace de Banach séparable et soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée dans E' , alors il existe une sous-suite extraite (f_{n_k}) qui converge pour la topologie $\sigma(E', E)$.

Théorème 12 (Bochner) Une fonction mesurable $f : [0, T] \rightarrow V$ est sommable dans $[0, T]$, si et seulement si la fonction réelle $t \rightarrow \|f(t)\|_V$ est sommable dans $[0, T]$. De plus

$$\left\| \int_0^T f(t) dt \right\|_V \leq \int_0^T \|f(t)\|_V dt, \quad (2.2.1)$$

et

$$\left\langle u, \int_0^T f(t) dt \right\rangle_V = \int_0^T \langle u, f(t) \rangle_V dt, \quad \forall u \in V. \quad (2.2.2)$$

Preuve. Voir [96]. ■

Théorème 13 (Convergence dominée de Lebesgue)

Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonction de $L^1(\Omega)$. On suppose que

* $f_n(x) \rightarrow f(x)$, p.p. sur Ω .

* Il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ tel que pour chaque n

$$|f_n(x)| \leq g(x), \quad \text{p.p. sur } \Omega,$$

alors

$$f \in L^1(\Omega) \quad \text{et} \quad \|f_n - f\|_{L^1(\Omega)} \rightarrow 0.$$

Preuve. Voir [14]. ■

Définition 2.2.4 (Suite de fonctions uniformément bornées)

On dit qu'une suite de fonctions $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'un espace métrique E dans \mathbb{R}^n est **uniformément bornée** s'il existe une constante positive M telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in E, \quad \|f_n(x)\| \leq M.$$

Définition 2.2.5 Soient V un espace de Hilbert séparable et $\{V_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ une famille d'espace vectoriels de dimension finie vérifiant les axiomes

1. $V_n \subset V$, $\dim V_n < +\infty$,
2. $V_n \rightarrow V$ quand $n \rightarrow +\infty$.

Au sens suivant : il existe V_n sous-espace dense dans V , tel que pour tout $u \in V$ on peut trouver une suite $\{u_n\}_{n \in \mathbb{N}^*}$ vérifiant pour tout n , $u_n \in V_n$ et $u_n \rightarrow u$ dans V lorsque $n \rightarrow +\infty$. L'espace V_n s'appelle une approximation de Galerkin d'ordre n .

2.3 Quelques inégalités utiles

Notation 2.3.1 Soit $1 \leq p \leq \infty$; on désigne par q l'exposant conjugué de p i.e. $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Inégalité de Hölder ([3])

Théorème 14 Soient $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^q(\Omega)$ avec $1 \leq p \leq +\infty$, alors $fg \in L^1(\Omega)$ et on a

$$\|fg\|_{L^1(\Omega)} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}. \quad (2.3.1)$$

$$\text{i.e.} \begin{cases} \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| dx \leq \left(\int_{\Omega} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |g(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{si } p, q \in]1, +\infty[, \\ \int_{\Omega} |f(x)| |g(x)| dx \leq \|g\|_{\infty} \left(\int_{\Omega} |f(x)| dx \right), & \text{si } p = 1, q = +\infty. \end{cases}$$

Inégalité de Cauchy-Schwartz

Théorème 15 Dans le cas où $p = q = 2$ l'inégalité (2.3.1) est appelée l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

$$\|uv\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u\|_{L^2(\Omega)} \|v\|_{L^2(\Omega)}.$$

Inégalité de Young ([46])

Théorème 16 Soient $p, q \in]1, \infty[$ et $a, b \geq 0$, alors pour tout $\varepsilon > 0$ assez petit, on a :

$$ab \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon) b^q \quad (2.3.2)$$

où

$$C(\varepsilon) = \frac{1}{q(\varepsilon p)^{\frac{p}{q}}}.$$

Remarque 2.3.1 • Si $p = q = 2$, l'inégalité (2.3.2) s'écrit

$$ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

• Si $\varepsilon = \frac{1}{2}$, l'inégalité précédente sera

$$ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}. \quad (2.3.3)$$

Inégalité de Poincaré

Théorème 17 Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n , alors il existe une constante $C_p = C_p(\Omega, p)$ telle que:

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \leq C_p \|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}, \quad \text{pour tout } f \in W_0^{1,p}(\Omega), \quad 1 \leq p < \infty.$$

Autrement dit, sur $W_0^{1,p}(\Omega)$ la quantité $\|\nabla f\|_{L^p(\Omega)}$ est une norme équivalente à la norme de $W^{1,p}(\Omega)$.

Preuve. Voir [14]. ■

L'inégalité de Jensen ([114])

Théorème 18 Soient F une fonction convexe sur $[a, b]$, $f : \Omega \rightarrow [a, b]$ et h une fonction intégrable sur Ω , $h(x) \geq 0$, et $\int_{\Omega} h(x) dx = k > 0$, alors l'inégalité de Jensen déclare que

$$F\left[\frac{1}{k} \int_{\Omega} f(x)h(x) dx\right] \leq \frac{1}{k} \int_{\Omega} F[f(x)]h(x) dx. \quad (2.3.4)$$

Formules de Green ([29])

Théorème 19 Soit Ω un ouvert borné régulier de \mathbb{R}^n .

Pour tout $f \in H^2(\Omega)$ et $g \in H^1(\Omega)$ on a la formule suivante:

$$\int_{\Omega} \Delta f g dx = \int_{\Gamma} \frac{\partial u f}{\partial \nu} g d\sigma - \int_{\Omega} \nabla f \nabla g dx.$$

où $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)$ est la normale unitaire extérieure à Γ .

Formule de Leibniz

Théorème 20 Soit $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^n$, telle que les fonctions f et $\frac{df}{dx}$ sont continues sur \mathbb{R}^2 et soient φ et ψ deux fonctions dérivables de \mathbb{R} dans \mathbb{R} , alors l'intégrale paramétrique (généralisée) F définit sur \mathbb{R} par

$$F(x) = \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} f(x, y) dy,$$

est dérivable et

$$F'(x) = \varphi'(x)f(x, \varphi(x)) - \psi'(x)f(x, \psi(x)) + \int_{\psi(x)}^{\varphi(x)} \frac{df}{dx}(x, y) dy.$$

Preuve. Voir [90]. ■

Chapitre 3

Etude de l'existence et l'unicité d'une solution faible globale

Dans ce chapitre, nous étudions l'existence et l'unicité de la solution faible globale d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli dont l'une des extrémité est fixée à un moteur rotatif dans un plan horizontal et l'autre fixée à une masse, en utilisant la méthode de Galerkin. Pour montrer notre résultat d'existence globale on fait les hypothèses suivantes :

3.1 Hypothèses sur le noyau q

Pour montrer notre résultat, nous supposons que le noyau $q :]0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^+$ vérifie les hypothèses suivantes

(**A₁**) q est une fonction de $L^1(\mathbb{R}^+) \cap C^2(\mathbb{R}^+)$ vérifiant $q(0) > 0$ et

$$1 - \int_0^{\infty} q(s) ds := 1 - \kappa > 0. \quad (3.1.1)$$

Soit $t_* > 0$ et posons $\int_0^{t_*} q(s) ds = q_* > 0$.

(**A₂**) Il existe une fonction H de classe C^1 tel que $H : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ qui est linéaire ou strictement décroissante et strictement convexe et de classe C^2 sur $[0, r)$ ($r \leq q(0)$) avec $H(0) = H'(0) = 0$ et telle que

$$q'(t) \leq -\zeta(t)H(q(t)), \quad \forall t \geq 0, \quad (3.1.2)$$

où ζ est une fonction positive, différentiable et décroissante.

Remarque 3.1.1 (1) De (\mathbf{A}_1) - (\mathbf{A}_2) on déduit $\lim_{t \rightarrow +\infty} q(t) = 0$, ceci implique que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-q'(t))$ ne peut être égale à un nombre positif. Alors, il est naturel de supposer que $\lim_{t \rightarrow +\infty} (-q'(t)) = 0$.

En conséquence, il existe $t_1 > 0$ suffisamment grand tel que $q(t_1) > 0$ et

$$\max \{q(t), -q'(t)\} < \min \{r, H(r), H_0(r)\}, \quad \forall t \geq t_1,$$

où $H_0(t) = H(D(t))$ à condition que D est une fonction positive de classe C^1 telle que $D(0) = 0$, pour laquelle H_0 est une fonction strictement croissante, strictement convexe, de classe C^2 sur $(0, r]$ et

$$\int_0^{+\infty} \frac{q(s)}{H_0^{-1}(-q'(s))} ds < +\infty. \quad (3.1.3)$$

(2) En outre, comme q est une fonction décroissante, $q(0) > 0$ et $q(t_1) > 0$, on a

$$0 < q(t_1) \leq q(t) \leq q(0), \quad \forall t \in [0, t_1].$$

Une combinaison de cela avec la continuité de la fonction H donne

$$a \leq H(q(t)) \leq b, \quad \forall t \in [0, t_1],$$

pour deux constantes $a, b > 0$.

$$q'(t) \leq -\zeta(t)H(q(t)) \leq -a\zeta(t) = -\frac{a}{q(0)}\zeta(t)q(0) \leq -\frac{a}{q(0)}\zeta(t)q(t).$$

Donc,

$$\zeta(t)q(t) \leq -\frac{q(0)}{a}q'(t), \quad \forall t \in [0, t_1]. \quad (3.1.4)$$

Les systèmes (3.2.1)-(3.2.3) ont une large application en génie mécanique comme les liaisons du robot [13] et bras des satellites.

3.2 Le modèle étudié

Notre objectif dans cette thèse est l'étude de l'existence et l'unicité d'une solution faible globale et leur comportement asymptotique du problème suivant :

$$\begin{cases} I_h S_{tt}(t) + \rho \int_0^L (x(xS + v(x, t)))_{tt} dx + m_p L (LS(t) + v(L, t))_{tt} \\ + J_p (S(t) + v_x(L, t))_{tt} = \tau(t), \quad \forall t \geq 0, \\ \rho v_{tt}(t) + EI v_{xxxx}(t) - EI(q * v_{xxxx})(t) = -\rho x S_{tt}(t), \quad \forall (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.2.1)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v(0, t) = v_x(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ EI v_{xxx}(L, t) - EI \int_0^t q(t-s) v_{xxx}(L, s) ds = m_p (LS(t) + v(L, t))_{tt}, \quad t \geq 0, \\ EI v_{xx}(L, t) - EI \int_0^t q(t-s) v_{xx}(L, s) ds = -J_p (S(t) + v_x(L, t))_{tt}, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (3.2.2)$$

et les conditions initiales

$$v(x, 0) = v_0(x), \quad v_t(x, 0) = v_1(x), \quad S(0) = S_0, \quad S_t(0) = S_1, \quad x \in (0, L). \quad (3.2.3)$$

3.3 Le problème équivalent

Pour simplifier notre étude, on utilise le changement de fonction suivant :

$$\xi(x, t) = xS(t) + v(x, t), \quad t \geq 0. \quad (3.3.1)$$

Par conséquent, le système (3.2.1)–(3.2.3) est équivalent :

$$\begin{cases} \xi_x(0, t) = S(t), \quad \xi_{xt}(0, t) = S_t(t), \quad \xi_{xtt}(0, t) = S_{tt}(t), \\ \xi_t(x, t) = xS_t(t) + v_t(x, t), \quad \xi_{tt}(x, t) = xS_{tt}(t) + v_{tt}(x, t), \\ \xi_x(x, t) = S(t) + v_x(x, t), \quad \xi_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t), \\ \xi_{xxx}(x, t) = v_{xxx}(x, t), \quad \xi_{xxxx}(x, t) = v_{xxxx}(x, t), \\ \xi(x, 0) = xS_0 + v_0(x) = \xi_0(x), \quad \xi_t(x, 0) = xS_1 + v_1(x) = \xi_1(x). \end{cases} \quad (3.3.2)$$

En utilisant (3.3.1), (3.3.2) et l'intégration par partie. Par conséquent, le système (3.2.1)–(3.2.3) est équivalent à

$$\begin{cases} I_h \xi_{xtt}(0, t) + \rho \int_0^L x \xi_{tt}(x, t) dx + m_p L \xi_{tt}(L, t) + J_p \xi_{xtt}(L, t) = \tau(t), & t \geq 0, \\ \rho \xi_{tt}(x, t) + EI \xi_{xxxx}(x, t) - EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xxxx}(s) ds = 0, & \forall (x, t) \in (0, L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (3.3.3)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} \xi(0, t) = 0, \\ EI \xi_{xxx}(L, t) - EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xxx}(L, s) ds = m_p \xi_{tt}(L, t), \\ EI \xi_{xx}(L, t) - EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(L, s) ds = -J_p \xi_{xtt}(L, t), & \forall t \in [0, \infty) \end{cases} \quad (3.3.4)$$

et les conditions initiales

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi_1(x), \quad x \in (0, L). \quad (3.3.5)$$

Ensuite, en substituant la deuxième équation de (3.3.3) dans la première équation de (3.3.3) et en utilisant une intégration par partie avec les conditions aux limites (3.3.4), l'équation du mouvement au point $x = 0$ devient

$$I_h \xi_{xtt}(0, t) - EI \xi_{xx}(0, t) + EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(0, s) ds = \tau(t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.6)$$

Pour stabiliser le problème (3.3.3)-(3.3.6), nous proposons la fonction du contrôle $\tau(t)$ suivante :

$$\tau(t) = -K \xi_{xt}(0, t) - \xi_x(0, t), \quad t \geq 0, \quad (3.3.7)$$

où K est une constante positive. Plus, nous utiliserons le lemme suivant :

Lemme 3.3.1 (Voir Hardy et al. [58]) *Sous les conditions aux limites (3.3.5), on a*

$$v^2(x, t) \leq L \|v_x\|_2^2, \quad v^2(x, t) \leq L^3 \|v_{xx}\|_2^2, \quad v_x^2(x, t) \leq L \|v_{xx}\|_2^2, \quad \forall x \in [0, L] \quad (3.3.8)$$

et

$$\|v\|_2^2 \leq L^2 \|v_x\|_2^2 \leq L^4 \|v_{xx}\|_2^2 \quad \forall x \in [0, L], \quad (3.3.9)$$

où $\| \cdot \|$ est la norme de $L^2(0, L)$.

Dans la suite, on note par \square et \diamond les opérateurs binaires définis respectivement, par

$$(q\square v)(t) := \int_0^t q(t-s) \left(v(x,t) - v(x,s) \right)^2 ds, \quad \forall t \geq 0$$

et

$$(q\diamond v)(t) := \int_0^t q(t-s) \left(v(0,t) - v(0,s) \right)^2 ds, \quad \forall t \geq 0.$$

3.3.1 Énergie du système

On définit l'énergie associée au problème (3.3.3)-(3.3.6) par

$$2E(t) = I_h \xi_{xt}^2(0,t) + \rho \|\xi_t\|_2^2 + EI \|\xi_{xx}\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L,t) + J_P \xi_{xt}^2(L,t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.10)$$

Lemme 3.3.2 *L'énergie $E(t)$ donné par (3.3.10) vérifie*

$$E'(t) = EI \int_0^L \xi_{xxt}(t) \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(s) ds dx + \tau(t) \xi_{xt}(0,t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.11)$$

Preuve. En multipliant la deuxième équation de (3.3.3) par $\xi_t(x,t)$, en intégrant l'équation sur $(0,L)$ et en utilisant les conditions aux limites (3.3.4)-(3.3.6), on obtient (3.3.11). Ceci achève la preuve du lemme (3.3.2). ■

Nous définissons l'énergie modifiée associée au problème (3.3.3)-(3.3.6) par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} \left\{ I_h \xi_{xt}^2(0,t) + \rho \|\xi_t\|_2^2 + EI \left(1 - \int_0^t q(s) ds \right) \|\xi_{xx}\|_2^2 + EI \int_0^L (q\square \xi_{xx}) dx \right. \\ \left. + m_p \xi_t^2(L,t) + J_P \xi_{xt}^2(L,t) \right\}, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.3.12)$$

Lemme 3.3.3 *La dérivée de l'énergie modifiée $\mathcal{E}(t)$ est donnée par*

$$\mathcal{E}'(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L (q'\square \xi_{xx}) dx - \frac{EI}{2} q(t) \|\xi_{xx}\|_2^2 + \tau(t) \xi_{xt}(0,t), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.3.13)$$

Preuve. En multipliant la deuxième équation de (3.3.3) par $\xi_t(x, t)$, en intégrant l'équation sur $(0, L)$ et en utilisant les conditions aux limites (3.3.4)-(3.3.6) et l'égalité suivante

$$2 \int_0^L \xi_{xxt}(t) \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(s) ds dx = \int_0^L (q' \square \xi_{xx}) dx - q(t) \|\xi_{xx}\|_2^2 - \frac{d}{dt} \left(\int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx - \left(\int_0^t q(s) ds \right) \|\xi_{xx}\|_2^2 \right).$$

On obtient (3.3.13). ■

3.4 Principe de la méthode de Galerkin

La méthode de Galerkin est une méthode d'approximative utilisée pour étudier l'existence et l'unicité des solutions des équations aux dérivées partielles d'évolution.

Soit (P) un problème, pour lequel on cherche à montrer l'existence d'une solution dans un espace de Hilbert séparable infinie V .

Le principe de cette méthode est basé sur l'idée de remplacer l'espace V par un autre V_m de dimension finie, le problème approché est posé sur V_m où l'on s'est ramené à la solution simple d'un système d'équations différentielles ordinaires non linéaire, par ailleurs on peut choisir le mode de construction de V_m de manière à ce que le sous-espace V_m soit dense dans V et que la solution ξ_m du problème approché (P_m) dans V_m soit un approximation de la solution exacte ξ du problème exact (P) dans V .

Cette méthode, en plus de son intérêt numériquement qu'elle est très utile du point de vue théorique, notamment pour l'étude des problèmes non linéaires.

Le déroulement d'étude est alors le suivant :

étape 1 On définit la solution ξ_m du problème (P_m) .

étape 2 On établit des estimations sur ξ_m (dites estimation a priori) pour montrer que ξ_m est uniformément bornée.

étape 3 Par utilisation des résultats que ξ_m est uniformément bornée, il est possible d'extraire une sous suite $(\xi_{m_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui a une limite dans la topologie faible des espaces qui interviennent dans les estimations de l'étape 2.

Soit alors ξ la limite obtenue.

étape 4 On montre que ξ est solution du problème (P).

étape 5 résultats de convergences fortes.

étape 6 On convient de montrer l'unicité de la solution ξ précédente de manière classique.

Notre objectif est de construire un procédé d'approximation qui nous fournit à la limite une démonstration de l'existence globale de la solution faible, ce procédé revient à approcher ξ_m comme combinaison linéaire des fonctions de base ω_i de V_m telle que

$$\xi_m(x, t) = \sum_{i=1}^m r_i(t) \omega_i(x, t), \quad \forall (x, t) \in \Omega \times [0, T].$$

3.5 Existence et l'unicité d'une solution faible globale

Maintenant, on démontre l'existence de la solution du problème (3.3.3)-(3.3.6) qui sera prouvé en utilisant la méthode Galerkin. Pour cela, nous considérons l'espace de Hilbert suivant :

$$V = \{v \in H^2(0, L), \quad v(0) = 0\}.$$

Commençons par donner la définition d'une solution faible du système (3.3.3)-(3.3.6).

Définition 3.5.1 Une solution faible du système (3.3.3)-(3.3.6) est une fonction

$$\xi \in C([0, T[; V), \quad \xi_t \in C([0, T[; L^2(0, L)),$$

telle que, pour tout $v \in V$ et pour tout $t \in [0, T[$, nous avons

$$\begin{aligned} & \rho \langle \xi_{tt}, v \rangle + EI \langle \xi_{xx}, v_{xx} \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}(s), v_{xx}(t) \rangle ds + J_p \xi_{xtt}(L, t) v_x(L, t) \\ & + m_p \xi_{tt}(L, t) v(L, t) + I_h \xi_{xtt}(0, t) v_x(0, t) + v_x(0, t) (K \xi_{xt}(0, t) + \xi_x(0, t)) = 0, \end{aligned}$$

avec les conditions initiales

$$\xi(x, 0) = \xi_0(x), \quad \xi_t(x, 0) = \xi_1(x).$$

Notre résultat d'existence et d'unicité est donné par :

Théorème 21 *Supposons que $(\xi_0, \xi_1) \in V \cap H^4(0, L) \times V$ et les hypothèses (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) sont satisfaites, alors il existe une solution faible unique du problème (3.3.3)-(3.3.6) telle que*

$$\xi \in L^\infty(0, T; V \cap H^4(0, L)), \quad \xi_t \in L^\infty(0, T; V), \quad \xi_{tt} \in L^2(0, T; L^2(0, L)),$$

De plus, nous avons

$$\xi \in C(0, T; V), \quad \xi_t \in C(0, T; L^2(0, L)),$$

pour tout $T > 0$.

Preuve.

1/ Démonstration d'existence globale de la solution La preuve est basée sur la méthode de Galerkin.

Etape 1 Solution approchée

Soit $\{v^i\}_{i=1}^\infty$ un système orthonormal dans $L^2(0, L)$. Pour chaque $n \in \mathbb{N}^*$, on note par

$V_n = \text{span} \{v^1, v^2, \dots, v^n\}$ un espace de dimension finie V_n sont

$$\xi_0^n(x) = \sum_{j=1}^n a^j v^j(x) \quad \text{et} \quad \xi_1^n(x) = \sum_{j=1}^n b^j v^j(x)$$

et vérifient

$$\xi_0^n \rightarrow \xi_0 \quad \text{dans} \quad V \cap H^4(0, L) \quad \text{et} \quad \xi_1^n \rightarrow \xi_1 \quad \text{dans} \quad V,$$

où a^j et b^j , $j = 1, \dots, n$ sont des scalaires.

On cherche une fonction $\xi^n(x, t)$ de la forme

$$\xi^n(x, t) = \sum_{j=1}^n \lambda_j(t) v^j(x), \quad x \in (0, L), \quad t \geq 0$$

une solution approchée dans V_n du problème suivant

$$\begin{cases} \rho \langle \xi_{tt}^n, v^j \rangle + EI \langle \xi_{xx}^n, v_{xx}^j \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), v_{xx}^j(t) \rangle ds \\ + J_p \xi_{xtt}^n(L, t) v_x^j(L, t) + m_p \xi_{tt}^n(L, t) v^j(L, t) + I_h \xi_{xtt}^j(0, t) v_x^j(0, t) \\ + v_x^j(0, t) (K \xi_{xt}(0, t) + \xi_x(0, t)) = 0, \quad \forall v^j \in V_n, \quad j = \overline{1, n}, \\ \xi^n(x, 0) = \xi_0^n(x), \quad \xi_t^n(x, 0) = \xi_1^n(x). \end{cases} \quad (3.5.1)$$

L'équation (3.5.1) conduit à un système d'équations différentielles ordinaires avec n fonctions, λ_j inconnues où $j = \overline{1, n}$. D'après la théorie standard des équations différentielles ordinaires on peut prouver l'existence d'une solution locale

$$\lambda_j : [0, t_n) \rightarrow \mathbb{R}, \quad j = \overline{1, n},$$

qui vérifie (3.5.1) pour presque tout $t \in (0, t_n)$ tel que $0 < t_n < T$. On obtient donc une solution locale ξ^n dans un intervalle $[0, t_n)$. L'étape qui suit montrer que $t_n = T$. Les estimations a priori ci-dessous permettent de prolonger la solution à l'intervalle $]0, T[$, pour tout $T > 0$ donné.

Etape 2 Première estimation a priori

En multipliant l'équation (3.5.1) par $\lambda'_j(t)$ et en sommant la somme par rapport l'indice j où $j = \overline{1, n}$, on trouve

$$\begin{aligned} & \rho \langle \xi_{tt}^n, \xi_t^n \rangle + EI \langle \xi_{xx}^n, \xi_{xxt}^n \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(t) \rangle ds \\ & + J_p \xi_{xxt}^n(L, t) \xi_{xt}^n(L, t) + m_p \xi_{tt}^n(L, t) \xi_t^n(L, t) + I_h \xi_{xxt}^n(0, t) \xi_{xt}^n(0, t) \\ & = -K [\xi_{xt}^n(0, t)]^2 - \xi_{xt}^n(0, t) \xi_x^n(0, t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.5.2)$$

Soit la fonctionnelle $\mathcal{F}^n(t)$ définit par :

$$\mathcal{F}^n(t) = \mathcal{E}^n(t) + K \int_0^t [\xi_{xt}^n(0, s)]^2 ds + \frac{1}{2} [\xi_x^n(0, t)]^2,$$

où

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^n(t) = \frac{1}{2} \left\{ I_h [\xi_{xt}^n(0, t)]^2 + \rho \|\xi_t^n\|_2^2 + EI \left(1 - \int_0^t q(s) ds \right) \|\xi_{xx}^n\|_2^2 \right. \\ \left. + EI \int_0^L (q \square \xi_{xx}^n) dx + m_p [\xi_t^n(L, t)]^2 + J_p [\xi_{xt}^n(L, t)]^2 \right\}, \quad t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.5.3)$$

En dérivant $\mathcal{F}^n(t)$ par rapport au temps t , on arrive à

$$\mathcal{F}_t^n(t) = \mathcal{E}_t^n(t) + K [\xi_{xt}^n(0, t)]^2 + \xi_{xt}^n(0, t) \xi_t^n(0, t). \quad (3.5.4)$$

L'équation (3.5.2) nous donne

$$\mathcal{E}_t^n(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L (q' \square \xi_{xx}^n) dx - \frac{EI}{2} q(t) \|\xi_{xx}^n\|_2^2 - K [\xi_{xt}^n(0, t)]^2 - \xi_{xt}^n(0, t) \xi_t^n(0, t), \quad t \geq 0. \quad (3.5.5)$$

D'après (3.5.4) et (3.5.5), on trouve

$$\mathcal{F}_t^n(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L (q' \square \xi_{xx}^n) dx - \frac{EI}{2} q(t) \|\xi_{xx}^n\|_2^2,$$

pour tout $t \in (0, t_n)$. Ce que signifie

$$\mathcal{F}_t^n(t) \leq 0. \quad (3.5.6)$$

On intègre (3.5.6) sur $(0, t)$, $\forall t \in (0, t_n)$, on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{F}^n(t) &\leq \mathcal{F}^n(0) \\ &\leq C, \end{aligned}$$

tel que C une constante.

Tenant compte du fait que (ξ_0^n) et (ξ_1^n) pour tout $n \geq 1$ sont bornées dans V et L^2

$$\|\xi_t^n\|_2^2 + \|\xi_{xx}^n\|_2^2 + \int_0^L (q' \square \xi_{xx}^n) dx + \int_0^t [\xi_x^n(0, s)]^2 ds + \int_0^t \int_0^z |\xi_{xt}^n|$$

Deuxième estimation a priori

En multipliant l'équation (3.5.1) par $\lambda_j''(t)$ et en sommant sur l'indice j où $j = \overline{1, n}$, on trouve

$$\begin{aligned} \rho \|\xi_{tt}^n\|_2^2 + EI \langle \xi_{xx}^n, \xi_{xxtt}^n \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxtt}^n(t) \rangle ds + J_p [\xi_{xtt}^n(L, t)]^2 \\ + m_p [\xi_{tt}^n(L, t)]^2 + I_h [\xi_{xxtt}^n(0, t)]^2 = -\xi_{xxtt}^n(0, t) (K \xi_{xt}^n(0, s) + \xi_x^n(0, s)), \quad t \in (0, t_n). \end{aligned} \quad (3.5.8)$$

Il est clair que :

$$EI \langle \xi_{xx}^n, \xi_{xxtt}^n \rangle = EI \frac{d}{dt} \langle \xi_{xx}^n, \xi_{xxt}^n \rangle - EI \langle \xi_{xxt}, \xi_{xxt}^n \rangle, \quad t \in (0, t_n) \quad (3.5.9)$$

et

$$\begin{aligned} &EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxtt}^n(t) \rangle ds \\ &= EI \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(t) \rangle ds \right) - g(0) EI \langle \xi_{xx}^n(t), \xi_{xxt}^n(t) \rangle \\ &\quad - EI \int_0^t g'(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(t) \rangle ds, \quad t \in (0, t_n). \end{aligned} \quad (3.5.10)$$

Remplaçant les relations (3.5.9) et (3.5.10) dans (3.5.8) et en intégrant sur $(0, t)$, $\forall t \in (0, t_n)$, on obtient :

$$\begin{aligned}
& \rho \int_0^t \|\xi_{tt}^n(s)\|_2^2 ds + EI \langle \xi_{xx}^n, \xi_{xxt}^n \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(t) \rangle ds \\
& + J_p \int_0^t [\xi_{xtt}^n(L, s)]^2 ds + I_h \int_0^t [\xi_{xtt}^n(0, s)]^2 ds + m_p \int_0^t [\xi_{tt}^n(L, s)]^2 ds \\
& = - \int_0^t \xi_{xtt}^n(0, s) (K \xi_{xt}^n(0, s) + \xi_x^n(0, s)) ds + EI \int_0^t \|\xi_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds \\
& - EI \int_0^t \int_0^z g'(z-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(z) \rangle ds dz \\
& - g(0) EI \int_0^t \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(s) \rangle ds, \quad t \in (0, t_n).
\end{aligned} \tag{3.5.11}$$

On estime maintenant les termes de (3.5.11). En vertu de l'estimation (3.5.7), le deuxième terme du membre de droite de l'inégalité (3.5.11) est évalué comme suit :

$$\langle \xi_{xx}^n, \xi_{xxt}^n \rangle \leq \eta \|\xi_{xx}^n\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\xi_{xxt}^n\|_2^2 \leq \eta \|\xi_{xx}^n\|_2^2 + C_1(T, \eta), \quad \forall t \in (0, t_n), \tag{3.5.12}$$

où $C_1(T, \eta)$ est une constante positive. Pour le troisième, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
& \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(t) \rangle ds \leq \eta \|\xi_{xxt}^n\|_2^2 + \frac{1-\kappa}{4\eta} \int_0^t g(t-s) \|\xi_{xx}^n(s)\|_2^2 ds, \\
& \forall t \in (0, t_n).
\end{aligned} \tag{3.5.13}$$

D'après (3.5.7), la relation (3.5.13) est estimée par

$$\int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(t) \rangle ds \leq \eta \|\xi_{xxt}^n\|_2^2 + C_2(T, \eta), \quad \forall t \in (0, t_n), \tag{3.5.14}$$

où $C_2(T, \eta)$ est une constante positive. Pour les termes dans le membre droite de l'inégalité (3.5.11), on a

$$\begin{aligned}
& - \int_0^t \xi_{xtt}^n(0, s) (K \xi_{xt}^n(0, s) + \xi_x^n(0, s)) ds \\
& \leq \eta \int_0^t [\xi_{xtt}^n(0, s)]^2 ds + \frac{1}{2\eta} \int_0^t \{K^2 [\xi_{xt}^n(0, s)]^2 + [\xi_x^n(0, s)]^2\} ds.
\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

En utilisant (3.5.7) de nouveau, on arrive à

$$- \int_0^t \xi_{xtt}^n(0, s) (K \xi_{xt}^n(0, s) + \xi_x^n(0, s)) ds \leq \eta \int_0^t [\xi_{xtt}^n(0, s)]^2 ds + C_3(T, \eta), \tag{3.5.16}$$

pour tout $t \in (0, t_n)$ où $C_3(T, \eta)$ est une constante positive.

$$- \int_0^t \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(s) \rangle ds \leq \eta \int_0^t \|\xi_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t \|\xi_{xx}^n(s)\|_2^2 ds \leq C_4(\eta), \tag{3.5.17}$$

où $C_4(\eta)$ est une constante positive.

Le terme intégral dans le membre de gauche de l'inégalité (3.5.11) est estimé par

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^t \int_0^z g'(z-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(z) \rangle ds dz \\
 & \leq \eta \int_0^t \|\xi_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds + \frac{1}{4\eta} \int_0^t \left(\int_0^z |g'(z-s)| ds \right) \int_0^z |g'(z-s)| \|\xi_{xx}^n(s)\|_2^2 ds dz, \quad \forall t \in [0, T].
 \end{aligned} \tag{3.5.18}$$

Et comme

$$\int_0^z |g'(z-s)| ds = - \int_0^z g'(s) ds = g(0) - g(z),$$

le dernier terme de (3.5.18) est estimé comme suit

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \left(\int_0^z |g'(z-s)| ds \right) \int_0^z |g'(z-s)| \|\xi_{xx}^n(s)\|_2^2 ds dz \\
 & \leq g(0) \int_0^t \int_0^z |g'(z-s)| \|\xi_{xx}^n(s)\|_2^2 ds dz \\
 & \leq T g^2(0) \sup_{0 \leq s \leq T} \|\xi_{xx}^n(s)\|_2^2, \quad \forall t \in (0, t_n).
 \end{aligned}$$

En utilisant l'estimation (3.5.7) et la relation

$$\langle \xi_{xx}^n(0), \xi_{xxt}^n(0) \rangle \leq \eta \|\xi_{xxt}^n(t)\|_2^2 + \frac{1}{4\eta} \|\xi_{xx}^n(0)\|_2^2 \leq C_5(\eta), \quad \forall t \in (0, t_n),$$

on obtient

$$- \int_0^t \int_0^z g'(z-s) \langle \xi_{xx}^n(s), \xi_{xxt}^n(z) \rangle ds dz \leq C_5(T, \eta), \quad \forall t \in (0, t_n), \tag{3.5.19}$$

pour une certaine constante positive $C_5(T, \eta)$.

Des relations (3.5.11)-(3.5.17) et (3.5.19), en tenant compte de l'estimation (3.5.7) et en choisissant η assez petite, nous déduisons

$$\begin{aligned}
 & \int_0^t \|\xi_{tt}^n(s)\|_2^2 ds + \|\xi_{xxt}^n\|_2^2 + \int_0^t \|\xi_{xxt}^n(s)\|_2^2 ds + \int_0^t [\xi_{xtt}^n(L, s)]^2 ds \\
 & + \int_0^t [\xi_{xtt}^n(0, s)]^2 ds + \int_0^t [\xi_{xtt}^n(L, s)]^2 ds \leq M_2, \quad \forall t \in (0, t_n),
 \end{aligned} \tag{3.5.20}$$

où M_2 est une constante positive.

D'après les estimations (3.5.7) et (3.5.20), nous concluons que

$$\left\{ \begin{array}{ll} (\xi_{xx}^n) & \text{est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), L^2(0, L)), \\ (\xi_{tt}^n) & \text{est uniformément bornée dans } L^2((0, T), L^2(0, L)), \\ (\xi_{xxt}^n(L, t)) & \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T), \\ (\xi_x^n(0, t)) & \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T), \\ (\xi_{xt}^n(0, t)) & \text{est uniformément bornée dans } L^\infty(0, T), \\ (\xi_{tt}^n(L, t)) & \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T), \\ (\xi_{xxt}^n(0, t)) & \text{est uniformément bornée dans } L^2(0, T). \end{array} \right. \quad (3.5.21)$$

On a

$$\|\xi^n\|_2^2 \leq 2L [\xi_x^n(0, t)]^2 + 2L^4 \|\xi_{xx}^n\|_2^2. \quad (3.5.22)$$

Maintenant, d'après (3.5.21)₁, (3.5.21)₄ et (3.5.22) nous déduisons que

$$(\xi^n) \text{ est uniformément bornée dans } L^\infty((0, T), V). \quad (3.5.23)$$

Par conséquent, les assertions (3.5.21) et (3.5.23) impliquent qu'il existe une sous-suite (ξ^k) de (ξ^n) pour tout $n \geq 1$ vérifiant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \xi^k \xrightarrow{*} \xi & \text{dans } L^\infty((0, T), V), \\ \xi_{xx}^k \xrightarrow{*} \xi_{xx} & \text{dans } L^\infty((0, T), L^2(0, L)), \\ \xi_{tt}^k \rightharpoonup \xi_{tt} & \text{dans } L^2((0, T), L^2(0, L)), \\ \xi_{xxt}^k(L, t) \rightharpoonup \xi_{xxt}(L, t) & \text{dans } L^2(0, T), \\ \xi_x^k(0, t) \rightharpoonup \xi_x(0, t) & \text{dans } L^2(0, T), \\ \xi_{xt}^k(0, t) \xrightarrow{*} \xi_{xt}(0, t) & \text{dans } L^\infty(0, T), \\ \xi_{tt}^k(L, t) \rightharpoonup \xi_{tt}(L, t) & \text{dans } L^2(0, T), \\ \xi_{xxt}^k(0, t) \rightharpoonup \xi_{xxt}(0, t) & \text{dans } L^2(0, T). \end{array} \right. \quad (3.5.24)$$

D'après le théorème d'Aubin-Lions, pour tout $T > 0$,

$$\xi^k \rightarrow \xi \text{ fortement dans } C([0, T], V). \quad (3.5.25)$$

Ces résultats suffisent pour passer à la limite dans (3.5.1), pour obtenir :

$$\begin{aligned} & \rho \langle \xi_{tt}, v \rangle + EI \langle \xi_{xx}, v_{xx} \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle \xi_{xx}(s), v_{xx}(t) \rangle ds \\ & + J_p \xi_{xxt}(L, t) v_x(L, t) + v_x(0) (K \xi_{xt}(0, t) + \xi_x(0, t)) \\ & + I_h \xi_{xxt}(0, t) v_x(0, t) + m_p \xi_{tt}(0, t) v_x(0, t) = 0, \end{aligned} \quad (3.5.26)$$

pour tout $v \in V$.

En utilisant (3.5.1), (3.5.25) et l'inégalité

$$\|\xi(x, t) - \xi_0(x)\|_V \leq \|\xi - \xi^n\|_V + \|\xi^n - \xi^n(0)\|_V + \|\xi^n(0) - \xi_0\|_V.$$

On obtient la première condition initiale immédiatement. D'une manière analogue, nous montrons la deuxième condition initiale.

Soient $\xi^{(1)}$ et $\xi^{(2)}$ deux solutions du problème (3.3.3)–(3.3.6) telles que :

$$\begin{aligned} \xi^{(i)} &\in L^\infty((0, T), V \cap H^4(0, L)), \quad \xi_t^{(i)} \in L^\infty((0, T), V), \\ \xi_{tt}^{(i)} &\in L^2((0, T), L^2(0, L)), \quad i = 1, 2. \end{aligned}$$

Alors $y = \xi^{(1)} - \xi^{(2)}$ vérifie :

$$\begin{aligned} &\rho \langle y_{tt}, v \rangle + EI \langle y_{xx}, v_{xx} \rangle - EI \int_0^t g(t-s) \langle y_{xx}(s), v_{xx}(t) \rangle ds \\ &+ J_p y_{xtt}(L, t) v_x(L, t) + v_x(0, t) (K y_{xt}(0, t) + y_x(0, t)) \\ &+ m_p y_{tt}(L, t) v(L, t) + I_h y_{xtt}(0, t) v_x(0, t) = 0, \end{aligned} \tag{3.5.27}$$

pour $v \in L^2((0, T), V)$ avec $y(x, 0) = 0$ et $y_t(x, 0) = 0$.

En remplaçant v par y_t dans (3.5.27), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \frac{d}{dt} [\rho \|y_t\|_2^2 + EI \|y_{xx}\|_2^2 + I_h y_{xt}^2(0, t) + J_p y_{xt}^2(L, t) + m_p y_t^2(L, t)] \\ &- EI \int_0^t g(t-s) \langle y_{xx}(s), y_{xxt}(t) \rangle ds = -K y_{xt}^2(0, t) - y_{xt}(0, t) y_x(0, t). \end{aligned} \tag{3.5.28}$$

Remarquons que

$$\begin{aligned} &-\int_0^t g(t-s) \langle y_{xx}(s), y_{xxt}(t) \rangle ds \\ &= \int_0^t g(t-s) \langle y_{xxt}(s), y_{xx}(t) - y_{xx}(s) \rangle ds \\ &\quad - \left(\int_0^t g(s) ds \right) \langle y_{xxt}(t), y_{xx}(t) - y_{xx}(t) \rangle \\ &= \frac{1}{2} \int_0^t g(t-s) \frac{d}{dt} \langle y_{xxt}(s), y_{xx}(t) - y_{xx}(s) \rangle ds - \frac{1}{2} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \frac{d}{dt} \|y_{xx}\|_2^2 \\ &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (g \square y_{xx})(t) - \frac{1}{2} (g' \square y_{xx})(t) - \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \left(\int_0^t g(s) ds \right) \|y_{xx}\|_2^2 \\ &\quad + \frac{1}{2} g(t) \|y_{xx}\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.5.29}$$

On pose

$$X(t) = Z(t) + \frac{1}{2}y_x^2(0, t),$$

où

$$\begin{aligned} 2Z(t) = & \rho \|y_t\|_2^2 + EI \left(1 - \int_0^t g(s) ds \right) \|y_{xx}\|_2^2 + EI (g \square y_{xx}) dx \\ & + m_p y_t^2(L, t) + I_h y_{xt}^2(0, t) + J_p y_{xt}^2(L, t) + y_x^2(0, t). \end{aligned}$$

La différentiation de X par rapport au temps t , nous donne

$$X'(t) = Z'(t) + y_{xt}(0, t) y_x(0, t).$$

D'après (3.5.28) et (3.5.29) la dérivée totale de $Y(t)$ vérifie

$$X'(t) = Z'(t) = \frac{EI}{2} \int_0^L (g' \square y_{xx}) dx - \frac{EI}{2} g(t) \|y_{xx}\|_2^2 - K y_{xt}^2(0, t).$$

D'après l'hypothèse **(A₂)**, on déduit que

$$Z'(t) \leq 0, \quad \forall t \in [0, T].$$

Ce qui implique que

$$Z(t) = 0, \quad \forall t \in [0, T]$$

et d'où l'on tire $\xi^{(1)} = \xi^{(2)}$. Ceci achève la démonstration du théorème.

■

Chapitre 4

Stabilisation d'une poutre viscoélastique d'Euler-Bernoulli en mouvement rotatif

4.1 Quelques lemmes techniques

Dans ce chapitre nous nous intéressons à l'étude du comportement asymptotique de la solution d'une poutre viscoélastique d'Euler-Bernoulli dont l'une des extrémités est fixée à un moteur rotatif dans un plan horizontal et l'autre fixée à une masse. Pour une large classe de noyaux q , plus précisément, $q'(t) \leq -\zeta(t)H(q(t))$, $\forall t \geq 0$, où H est une fonction croissante et convexe près de l'origine et ζ est une fonction décroissante. Notre objectif est l'étude de la stabilisation générale du système (3.3.3)-(3.3.6) par la méthode de Lyapunov qui est une des méthodes fondamentales pour la stabilité des systèmes dynamiques (Voir [65]). C'est un ensemble de résultats mathématiques basés sur la décroissance de l'énergie totale d'un système donné. Elle est très largement utilisée pour l'étude de stabilité de différentes équations différentielles (EDO et EDP).

La grande difficulté pour cette méthode est de construire une fonctionnelle \mathcal{L} , qui vérifiée les propriétés (0.0.2) et (0.0.3). Généralement, pour construire une telle fonctionnelle, on suit un raisonnement analogue à d'autres systèmes similaires. Pour cela, nous proposons la

fonctionnelle de Lyapunov suivante :

$$\mathcal{L}(t) := \mathcal{E}(t) + \sum_{i=1}^4 \lambda_i \psi_i(t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.1.1)$$

où λ_i , $i = 1, \dots, 4$ sont des constantes positives qui seront déterminées par la suite sachant que $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$ et où

$$\begin{aligned} \psi_1(t) = & \rho \int_0^L \xi \xi_t dx + I_h \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \\ & + m_p \xi_t(L, t) \xi(L, t) + J_p \xi_{xt}(L, t) \xi_x(L, t), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) = & -\rho \int_0^L \xi_t(t) \int_0^t q(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx \\ & - I_h \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\ & - m_p \xi_t(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\ & - J_p \xi_{xt}(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.1.3)$$

$$\psi_3(t) := \frac{1}{2} (q \diamond \xi_x) + \frac{1}{2} \xi_x^2(0, t), \quad \forall t \geq 0 \quad (4.1.4)$$

et

$$\psi_4(t) := \int_0^t q_\beta(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s))^2 ds, \quad \forall t \geq 0,$$

avec

$$q_\beta(t) = e^{-\beta t} \int_t^\infty q(s) e^{\beta s} ds, \quad \forall t \geq 0,$$

où β une constante positive.

Le premier résultat donne une équivalence entre $\mathcal{L}(t)$ et $\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)$.

Proposition 4.1.1 *Il existe deux constantes positives $\alpha_i > 0$, $i = 1, 2$ telles que*

$$\alpha_1 (\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 (\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)), \quad (4.1.5)$$

pour tout $t \geq 0$.

Preuve. Commençons par montrer la première partie (celle du membre droite) dans l'inégalité (4.1.5). Pour la fonctionnelle $\psi_1(t)$, on constate que

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &\leq \frac{\rho}{2} \|\xi_t\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \|\xi\|_2^2 + \frac{I_h}{2} \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{I_h}{2} \xi_x^2(0, t) + \frac{m_p}{2} \xi_t^2(L, t) \\ &\quad + \frac{m_p}{2} \xi^2(L, t) + \frac{J_p}{2} \xi_{xt}^2(L, t) + \frac{J_p}{2} \xi_x^2(L, t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

D'après (3.3.2), on a $\xi(x, t) = xS(t) + v(x, t) = x\xi_x(0, t) + v(x, t)$. De plus, en utilisant les deux inégalités (3.3.8) et (3.3.9), on obtient

$$\begin{aligned} \|\xi\|_2^2 &\leq \frac{2}{3} L^3 \xi_x^2(0, t) + 2 \|v\|_2^2 \leq \frac{2}{3} L^3 \xi_x^2(0, t) + 2L^4 \|v_{xx}\|_2^2, \quad \forall t \geq 0, \\ \xi^2(L, t) &\leq 2L^2 \xi_x^2(0, t) + 2v^2(L, t) \leq 2L^2 \xi_x^2(0, t) + 2L^3 \|v_{xx}\|_2^2, \quad \forall t \geq 0 \end{aligned}$$

et

$$\xi_x^2(L, t) \leq 2\xi_x^2(0, t) + 2v_x^2(L, t) \leq 2\xi_x^2(0, t) + 2L \|v_{xx}\|_2^2, \quad \forall t \geq 0.$$

Comme $\xi_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t)$, on trouve

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &\leq \frac{\rho}{2} \|\xi_t\|_2^2 + \left(\frac{\rho L^3}{3} + \frac{I_h}{2} + m_p L^2 + J_p \right) \xi_x^2(0, t) + \frac{I_h}{2} \xi_{xt}^2(0, t) \\ &\quad + \frac{J_p}{2} \xi_{xt}^2(L, t) + \frac{m_p}{2} \xi_t^2(L, t) + (\rho L^4 + m_p L^3 + J_p L) \|\xi_{xx}\|_2^2, \\ &\quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \tag{4.1.6}$$

Pour la fonctionnelle $\psi_2(t)$, on a pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &\leq \frac{\rho}{2} \|\xi_t\|_2^2 + \frac{\rho}{2} \left(\int_0^t q(s) ds \right) \int_0^L \int_0^t q(t-s) (\xi(t) - \xi(s))^2 ds dx \\ &\quad + \frac{I_h}{2} \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{I_h}{2} \left(\int_0^t q(s) ds \right) \int_0^L \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s))^2 ds \\ &\quad + \frac{m_p}{2} \xi_t^2(L, t) + \frac{m_p}{2} \left(\int_0^t q(s) ds \right) \int_0^t q(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s))^2 ds \\ &\quad + \frac{J_p}{2} \xi_{xt}^2(L, t) + \frac{J_p}{2} \left(\int_0^t q(s) ds \right) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s))^2 ds. \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

En utilisant de (3.3.8) et de (3.3.9), on trouve pour tout $t \geq 0$

$$\int_0^L \int_0^t q(t-s) \left(\xi(x,t) - \xi(x,s) \right)^2 ds dx \leq \frac{2}{3} L^3 (q \diamond \xi_x) + 2L^4 \int_0^L (q \square v_{xx}) dx, \quad (4.1.8)$$

$$\int_0^t q(t-s) \left(\xi(L,t) - \xi(L,s) \right)^2 ds \leq 2L^2 (q \diamond \xi_x) + 2L^3 \int_0^L (q \square v_{xx}) dx, \quad (4.1.9)$$

et

$$\int_0^t q(t-s) \left(\xi_x(L,t) - \xi_x(L,s) \right)^2 ds \leq 2(q \diamond \xi_x) + 2L \int_0^L (q \square v_{xx}) dx. \quad (4.1.10)$$

D'autre part, le fait que $\xi_{xx}(x,t) = v_{xx}(x,t)$, et en substituant (4.1.8)–(4.1.10) dans (4.1.7), on trouve pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \psi_2(t) &\leq \frac{\rho}{2} \|\xi_t\|_2^2 + \frac{I_h}{2} \xi_{xt}^2(0,t) + (\rho L^4 + m_p L^3 + J_p L) \kappa \int_0^L (q \square v_{xx}) dx \\ &\quad + \frac{m_p}{2} \xi_t^2(L,t) + \left(\frac{\rho L^3}{3} + \frac{I_h}{2} + m_p L^2 + J_p \right) \kappa (q \diamond \xi_x) + \frac{J_p}{2} \xi_{xt}^2(L,t). \end{aligned} \quad (4.1.11)$$

En utilisant la définition (3.3.12) de $\mathcal{E}(t)$, (4.1.6) et (4.1.11), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(t) &\leq (1 + \lambda_1 + \lambda_2) \left[\frac{\rho}{2} \|\xi_t\|_2^2 + \frac{I_h}{2} \xi_{xt}^2(0,t) + \frac{m_p}{2} \xi_t^2(L,t) + \frac{J_p}{2} \xi_{xt}^2(L,t) \right] \\ &\quad + \psi_4(t) + \left[\frac{1}{2} + \lambda_1 \left(\frac{\rho L^3}{3} + \frac{I_h}{2} + m_p L^2 + J_p \right) \right] \xi_x^2(0,t) \\ &\quad + \left[\frac{EI}{2} \left(1 - \int_0^t q(s) ds \right) + \lambda_1 \left(\rho L^3 + m_p L^3 + \frac{J_p L}{2} \right) \right] \|\xi_{xx}\|_2^2 \\ &\quad + \left[\frac{1}{2} + \lambda_2 \left(\frac{\rho L^3}{3} + \frac{I_h}{2} + m_p L^2 + J_p \right) k \right] (q \diamond \xi_x) \\ &\quad + \left[\frac{EI}{2} + \lambda_2 (\rho L^4 + m_p L^3 + J_p L) k \right] \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Ce qui donne, il existe une constante strictement positive telle que

$$\mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 (\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

D'autre part, en tenant compte de (3.3.12), (4.1.6) et (4.1.11) et le fait que

$1 - \int_0^t q(s)ds > 1 - \kappa$, on aboutit à

$$\begin{aligned}
2\mathcal{L}(t) &\geq (1 - \lambda_1 - \lambda_2) \left[\rho \|\xi_t\|_2^2 + \frac{I_h}{2} \xi_{xt}^2(0, t) + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t) \right] \\
&\quad + 2\psi_4(t) + \left[1 - \lambda_1 \left(\frac{2\rho L^3}{3} + I_h + 2m_p L^2 + 2J_p \right) \right] \xi_x^2(0, t) \\
&\quad + \left[\frac{EI}{2} (1 - \kappa) - \lambda_1 (2\rho L^3 + 2m_p L^3 + J_p L) \right] \|\xi_{xx}\|_2^2 \\
&\quad + \left[1 - 2\lambda_2 \left(\frac{\rho L^3}{3} + \frac{I_h}{2} + m_p L^2 + J_p \right) k \right] (q \diamond \xi_x) \\
&\quad + [EI - 2\lambda_2 (\rho L^4 + m_p L^3 + J_p L) k] \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx, \quad \forall t \geq 0.
\end{aligned}$$

Ce qui donne, il existe une constante strictement positive telle que

$$\mathcal{L}(t) \geq \alpha_1 (\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)), \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent,

$$\alpha_1 (\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)) \leq \mathcal{L}(t) \leq \alpha_2 (\mathcal{E}(t) + \psi_3(t) + \psi_4(t)), \quad \forall t \geq 0$$

où α_1 et α_2 sont des constantes positives, à condition que

$$\lambda_1 < \min \left[1, \frac{1}{\frac{2\rho L^3}{3} + I_h + 2m_p L^2 + 2J_p}, \frac{EI(1 - \kappa)}{2\rho L^4 + 2m_p L^3 + J_p} \right]$$

et

$$\lambda_2 < \min \left[1 - \lambda_1, \frac{EI}{(2\rho L^4 + 2m_p L^3 + J_p) \kappa}, \frac{1}{\left(\frac{4\rho L^3}{3} + I_h + 2m_p L^2 + 2J_p L \right) \kappa} \right].$$

Et ceci achève la démonstration.

■

4.2 Comportement asymptotique

Dans ce qui suit, nous établissons plusieurs lemmes nécessaires pour prouver le théorème 22 qui montre la stabilisation générale de l'énergie d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli en mouvement rotatif.

Lemme 4.2.1 *En tenant compte des deux conditions (A₁) et (A₂), la fonctionnelle $\psi_1(t)$ définie par (4.1.2), vérifie*

$$\begin{aligned} \psi'_1(t) &\leq \rho \|\xi_t\|_2^2 - \frac{EI}{2}(1 - \kappa) \|\xi_{xx}\|_2^2 + \left(I_h + \frac{1}{4\eta_1} \right) \xi_{xt}^2(0, t) \\ &\quad - (1 - K^2\eta_1) \xi_x^2(0, t) + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t) \\ &\quad + \frac{EIC_\alpha}{2(1 - \kappa)} \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

pour tout $0 < \alpha < 1$ et $\eta_1 > 0$, où

$$C_\alpha = \int_0^\infty \frac{q^2(s)}{\alpha q(s) - q'(s)} ds \text{ et } h(t) = \alpha q(t) - q'(t). \quad (4.2.2)$$

Preuve. En utilisant (3.3.3)–(3.3.7) ainsi que l'expression du contrôle $\tau(t)$ défini par (3.3.7), la différentiation de la fonctionnelle $\psi_1(t)$ donne

$$\begin{aligned} \psi'_1(t) &= I_1 + I_2 + J_p \xi_{xt}^2(L, t) - K \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) + \rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) \\ &\quad - \xi_x^2(0, t) + m_p \xi_{tt}(L, t) \xi(L, t) + J_p \xi_{xtt}(L, t) \xi_x(L, t) + I_h \xi_t^2(0, t) \\ &\quad + \left(EI \xi_{xx}(0, t) - EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(0, s) ds \right) \xi_x(0, t), \end{aligned} \quad (4.2.3)$$

pour tout $t \geq 0$ où

$$I_1 = -EI \int_0^L \xi \xi_{xxxx} dx$$

et

$$I_2 = EI \int_0^L \xi(t) \int_0^t q(t-s) \xi_{xxx}(s) ds dx.$$

On intègre deux fois par parties, pour avoir

$$\begin{aligned} I_1 &= -EI \xi_{xxx}(L, t) \xi(L, t) + EI \xi_{xx}(L, t) \xi_x(L, t) \\ &\quad - EI \xi_{xx}(0, t) \xi_x(0, t) - EI \|\xi_{xx}\|_2^2, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
 I_2 &= EI\xi(L, t) \int_0^t q(t-s)\xi_{xxx}(L, s) ds \\
 &\quad - EI\xi_x(L, t) \int_0^t q(t-s)\xi_{xx}(L, s) ds \\
 &\quad + EI\xi_x(0, t) \int_0^t q(t-s)\xi_{xx}(0, s) ds \\
 &\quad + EI \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s)\xi_{xx}(s) ds dx, \quad \forall t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Pour tout $t \geq 0$, l'injection de (4.2.4) et (4.2.5) dans (4.2.3), et tenant compte des conditions aux limites (3.3.4), on arrive à

$$\begin{aligned}
 \psi'_1(t) &= \rho \|\xi_t\|_2^2 - EI(1-\kappa) \|\xi_{xx}\|_2^2 - \xi_x^2(0, t) \\
 &\quad + I_h \xi_{xt}^2(0, t) + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t) \\
 &\quad + EI \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds dx \\
 &\quad - K \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t).
 \end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Ensuite, en estimant les termes du membre droite de la relation (4.2.6). En commençant par le septième terme, on trouve pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 &EI \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds dx \\
 &\leq EI \frac{1-\kappa}{2} \|\xi_{xx}\|_2^2 + \frac{EI}{2(1-\kappa)} \int_0^L \left(\int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds \right)^2 dx.
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \left(\int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds \right)^2 dx \\
 &= \int_0^L \left(\int_0^t \frac{q(t-s) \sqrt{\alpha q(t-s) - q'(t-s)}}{\sqrt{\alpha q(t-s) - q'(t-s)}} (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds \right)^2 dx \\
 &\leq \left(\int_0^t \frac{q^2(s)}{\alpha q(s) - q'(s)} ds \right) \int_0^L \int_0^t [\alpha q(t-s) - q'(t-s)] \times \\
 &\quad (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t))^2 ds dx \\
 &\leq C_\alpha \int_0^L (h \square \xi_{xx})(t) dx, \quad \forall t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

En ce qui concerne le huitième terme, nous adoptons l'estimation suivante

$$K \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \leq \frac{1}{4\eta_1} \xi_{xt}^2(0, t) + \eta_1 K^2 \xi_x^2(0, t), \quad \eta_1 > 0, \quad \forall t \geq 0.$$

La combinaison de toutes les estimations ci-dessus donne (4.2.1). ■

Lemme 4.2.2 *Sous les hypothèses (A₁) et (A₂), la fonctionnelle $\psi_2(t)$ définie par (4.1.3) satisfait*

$$\begin{aligned}
 \psi_2'(t) &\leq (\eta_2 - q_*) [\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)] \\
 &\quad + \left[\frac{K}{2} + I_h(\eta_2 - q_*) \right] \xi_{xt}^2(0, t) + \eta_3 \xi_x^2(0, t) + \eta_2 EI \|\xi_{xx}\|_2^2 \\
 &\quad + \frac{\kappa}{4\eta_3} (q \diamond \xi_x) + C_1 \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx + C_2 (h \diamond \xi_x),
 \end{aligned} \tag{4.2.8}$$

pour tous $t \geq t_* > 0$ et $\eta_2, \eta_3 > 0$, où

$$C_1 := \frac{c}{\eta_2} (J_p L + m_p L^3) (1 + C_\alpha) + \frac{c\rho}{\eta_2} L^3 (1 + LC_\alpha) + C_\alpha \left(\frac{EIc}{\eta_2} + 1 \right)$$

et

$$C_2 := \frac{c}{\eta_2} (m_p L^2 + I_h) (C_\alpha + 1) + \frac{c\rho}{\eta_2} L^2 (1 + LC_\alpha) + \frac{KC_\alpha}{2}.$$

Preuve. La dérivée de la fonctionnelle $\psi_2(t)$, le long de la solution de (3.3.3)-(3.3.6) vérifie pour tout $t \geq 0$

$$\begin{aligned}
 \psi_2'(t) = & I_3 + I_4 - \left(\int_0^t q(s) ds \right) [\rho \|\xi_t\|_2^2 + I_h \xi_{xt}^2(0, t) + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)] \\
 & - EI \left(\xi_{xx}(0, t) - \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(0, s) ds \right) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & - \rho \int_0^L \xi_t \int_0^t q'(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx \\
 & - I_h \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & - m_p \xi_{tt}(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\
 & - m_p \xi_t(L, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\
 & - J_p \xi_{xtt}(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds \\
 & - \tau(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & - J_p \xi_{xt}(L, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds, \tag{4.2.9}
 \end{aligned}$$

où

$$I_3 = EI \int_0^L \xi_{xxxx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx$$

et

$$I_4 = -EI \int_0^L \int_0^t q(t-s) \xi_{xxxx}(s) ds \int_0^t q(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx.$$

Une intégration par parties dans I_3 et I_4 , on trouve

$$\begin{aligned}
 I_3 = & EI\xi_{xxx}(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\
 & - EI\xi_{xx}(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds \\
 & + EI\xi_{xx}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & + EI \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(s)) ds dx, \quad \forall t \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

et

$$\begin{aligned}
 I_4 = & -EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xxx}(L, s) ds \int_0^t q(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\
 & + EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(L, s) ds \int_0^t q(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds \\
 & - EI \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(0, s) ds \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & - EI \int_0^L \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}(s) ds \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(s)) ds dx, \quad \forall t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.11}$$

En substituant les relations (4.2.10) et (4.2.11) dans (4.2.9) et en tenant compte des conditions aux limite (3.3.4) et l'expression du contrôle $\tau(t)$ défini par (3.3.7) après avoir annulé des termes similaires, on déduit que

$$\begin{aligned}
 \psi'_2(t) = & - \left(\int_0^t q(s) ds \right) [\rho \|\xi_t\|_2^2 + I_h \xi_{xt}^2(0, t) + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)] \\
 & + EI \left(1 - \int_0^t q(s) ds \right) \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(s)) ds dx \\
 & + EI \int_0^L \left[\int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(s)) ds \right]^2 dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \xi_x(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & + K \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & - \rho \int_0^L \xi_t \int_0^t q'(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx \\
 & - I_h \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & - m_p \xi_t(L, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\
 & - J_p \xi_{xt}(L, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds, \quad t \geq 0. \tag{4.2.12}
 \end{aligned}$$

Maintenant, nous estimons les termes du membre droite de l'expression (4.2.12). Nous commençons par le cinquième terme

$$\begin{aligned}
 & \left(1 - \int_0^t q(s) ds\right) \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(s)) ds dx \\
 & \leq \eta_2 \|\xi_{xx}\|_2^2 + \frac{c}{\eta_2} C_\alpha \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx, \quad t \geq 0. \tag{4.2.13}
 \end{aligned}$$

Le septième terme est estimé par

$$\begin{aligned}
 \xi_x(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds & \leq \eta_3 \xi_x^2(0, t) + \frac{\kappa}{4\eta_3} (q \diamond \xi_x) \\
 & , \quad \eta_3 > 0, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.2.14}
 \end{aligned}$$

Pour le huitième terme, il est facile de voir que

$$\begin{aligned}
 & \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & \leq \frac{1}{2} \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{1}{2} \left(\int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \right)^2, \quad \forall t \geq 0. \tag{4.2.15}
 \end{aligned}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on obtient

$$\begin{aligned}
 & \left(\int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \right)^2 \\
 &= \left(\int_0^t \frac{q(t-s)}{\sqrt{\alpha q(t-s) - q'(t-s)}} \sqrt{\alpha q(t-s) - q'(t-s)} (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \right)^2 \\
 &\leq \left(\int_0^t \frac{q^2(s)}{\alpha q(s) - q'(s)} ds \right) \int_0^t [\alpha q(t-s) - q'(t-s)] (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s))^2 ds \\
 &\leq C_\alpha (h \diamond \xi_x)(t) dx, \quad \forall t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.16}$$

En combinant (4.2.15) et (4.2.16), on trouve

$$\xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \leq \frac{1}{2} \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{C_\alpha}{2} (h \diamond \xi_x), \quad \forall t \geq 0. \tag{4.2.17}$$

Comme $\xi_{xx}(x, t) = v_{xx}(x, t)$, en utilisant l'inégalité de Young, on arrive à

$$\begin{aligned}
 (\xi(x, t) - \xi(x, s))^2 &= [x (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) + (v(x, t) - v(x, s))]^2 \\
 &\leq 2x^2 (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s))^2 + 2(v(x, t) - v(x, s))^2,
 \end{aligned} \tag{4.2.18}$$

D'après la relation (3.3.9), le neuvième terme est estimé par

$$\begin{aligned}
 & - \int_0^L \xi_t \int_0^t q'(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx \\
 & = \int_0^L \xi_t \int_0^t h(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx - \int_0^L \xi_t \int_0^t \alpha q(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds dx \\
 & \leq \eta_2 \|\xi_t\|_2^2 + \frac{1}{2\eta_2} \int_0^L \left(\int_0^t \sqrt{h(t-s)} \sqrt{h(t-s)} (\xi(t) - \xi(s)) ds \right)^2 dx \\
 & \quad + \frac{\alpha^2}{2\eta_2} \int_0^L \left(\int_0^t q(t-s) (\xi(t) - \xi(s)) ds \right)^2 dx \\
 & \leq \eta_2 \|\xi_t\|_2^2 + \frac{\left(\int_0^t h(s) ds \right)}{2\eta_2} \int_0^L (h \square \xi) dx + \frac{\alpha^2 C_\alpha}{2\eta_2} \int_0^L (h \square \xi) dx \\
 & \leq \eta_2 \|\xi_t\|_2^2 + \frac{cL^2}{\eta_2} (1 + LC_\alpha) (h \diamond \xi_x) + \frac{cL^3}{\eta_2} (1 + LC_\alpha) \int_0^L (h \square \xi_{xx})(t) dx, \quad \forall t \geq 0 \quad (4.2.19)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
 & - \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & = \xi_{xt}(0, t) \int_0^t h(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & \quad - \alpha \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\
 & \leq \eta_2 \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{c}{\eta_2} (C_\alpha + 1) (h \diamond \xi_x), \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2.20)
 \end{aligned}$$

De même, en utilisant (3.3.8), les relations

$$\begin{aligned}
 (\xi(L, t) - \xi(L, s))^2 & = [L (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) + (v(L, t) - v(L, s))]^2 \\
 & \leq 2L^2 (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s))^2 + 2(v(L, t) - v(L, s))^2, \quad (4.2.21)
 \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s))^2 &= [L(\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) + (v_x(L, t) - v_x(L, s))]^2 \\ &\leq 2(\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) + 2(v_x(L, t) - v_x(L, s))^2. \end{aligned} \quad (4.2.22)$$

De même (4.2.21) et (4.2.22) impliquent que

$$\begin{aligned} & -\xi_t(L, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\ &= \xi_t(L, t) \int_0^t h(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds - \alpha \xi_t(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi(L, t) - \xi(L, s)) ds \\ &\leq \eta_2 \xi_t^2(L, t) + \frac{cL^2}{\eta_2} (1 + C_\alpha) (h \diamond \xi_x) + \frac{cL^3}{\eta_2} (1 + C_\alpha) \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.2.23)$$

et

$$\begin{aligned} & -\xi_{xt}(L, t) \int_0^t q'(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds \\ &= \xi_{xt}(L, t) \int_0^t h(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds \\ &\quad - \alpha \xi_{xt}(L, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(L, t) - \xi_x(L, s)) ds \\ &\leq \eta_2 \xi_{xt}^2(L, t) + \frac{cL}{\eta_2} (1 + C_\alpha) \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.24)$$

Enfin, l'assertion (4.2.8) découle des relations (4.2.13)-(4.2.24). ■

Lemme 4.2.3 *La dérivé de la fonctionnelle $\psi_3(t)$ définie par (4.1.4), satisfait*

$$\begin{aligned} \psi_3'(t) &\leq \frac{1}{2}(q' \diamond \xi_x) + \eta_5 \xi_x^2(0, t) + \kappa \eta_4 (q \diamond \xi_x) + \left(\frac{1}{4\eta_4} + \frac{1}{4\eta_5} \right) \xi_{xt}^2(0, t), \\ &, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

où η_4 et η_5 sont des constantes positives.

Preuve. La dérivée de $\psi_3(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \psi_3'(t) &= \frac{1}{2}(q' \diamond \xi_x) + \xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \\ &\quad + \xi_{xt}(0, t)\xi_x(0, t), \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Il suffit de voir que pour tout $t \geq 0$

$$\xi_{xt}(0, t) \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \leq \frac{1}{4\eta_4} \xi_{xt}^2(0, t) + \kappa\eta_4(q \diamond \xi_x), \quad \eta_4 > 0 \quad (4.2.27)$$

et

$$\xi_{xt}(0, t)\xi_x(0, t) \leq \frac{1}{4\eta_5} \xi_{xt}^2(0, t) + \eta_5 \xi_x^2(0, t), \quad \eta_5 > 0. \quad (4.2.28)$$

En substituant les estimations (4.2.27) et (4.2.28) dans (4.2.26), (4.2.25) est établie. ■

Lemme 4.2.4 *Pour la fonctionnelle $\psi_4(t)$, on a*

$$\psi_4'(t) \leq -(\beta - 2\eta_6 \bar{q}_\beta) \psi_4(t) - (q \diamond \xi_x) + \frac{1}{2\eta_6} \xi_{xt}^2(0, t), \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2.29)$$

où $\bar{q}_\beta = \int_0^\infty e^{\beta s} q(s) ds$ et pour η_6 une constante positive.

Preuve. Un calcul direct donne

$$\begin{aligned} \psi_4'(t) &= -\beta \psi_4(t) - \int_0^t q(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s))^2 ds \\ &\quad + 2\xi_{xt}(0, t) \int_0^t Q_\beta(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.30)$$

en utilisant l'inégalité de Young pour estimer le dernier terme du membre droite de (4.2.30), on trouve pour tout $t \geq 0$

$$2\xi_{xt}(0, t) \int_0^t Q_\beta(t-s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, s)) ds \leq \frac{1}{2\eta_6} \xi_{xt}^2(0, t) + 2\eta_6 \bar{q}_\beta \psi_4(t),$$

pour toute constante $\eta_6 > 0$, où

$$\bar{q}_\beta = \int_0^\infty e^{\beta s} q(s) ds.$$

Ceci achève la démonstration. ■

Lemme 4.2.5 *Sous les hypothèses (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) , la fonctionnelle $\psi_5(t)$ définie par*

$$\psi_5(t) := \int_0^L \int_0^t f(t-s) \xi_{xx}^2(s) ds dx, \quad \forall t \geq 0, \quad (4.2.31)$$

où $f(t) = \int_t^\infty q(s) ds$, satisfait l'estimation suivante

$$\psi_5'(t) \leq -\frac{1}{2} \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx + 3\kappa \|\xi_{xx}\|_2^2, \quad \forall t \geq 0. \quad (4.2.32)$$

Preuve. En utilisant l'inégalité de Young ainsi que le fait $f'(t) = -q(t)$, observons que

$$\begin{aligned} \psi_5'(t) &= f(0) \int_0^L \xi_{xx}^2(t) dx - \int_0^L \int_0^t q(t-s) \xi_{xx}^2(s) ds dx \\ &= - \int_0^L \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t))^2 ds dx + f(t) \int_0^L \xi_{xx}^2(t) dx \\ &\quad - 2 \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (4.2.33)$$

En estimant le troisième terme du membre droite de la relation (4.2.33), on arrive à

$$\begin{aligned} &- 2 \int_0^L \xi_{xx}(t) \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t)) ds dx \\ &\leq 2\kappa \|\xi_{xx}\|_2^2 + \frac{\int_0^t q(s) ds}{2\kappa} \int_0^L \int_0^t q(t-s) (\xi_{xx}(s) - \xi_{xx}(t))^2 ds dx, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Ensuite, en tenant compte de $f(t) \leq f(0) = \kappa$ et $\int_0^t q(s) ds \leq \kappa$, il est facile de voir (4.2.32). ■

Les lemmes précédents sont utilisés pour obtenir la preuve de notre résultat principal.

Lemme 4.2.6 *Pour un choix approprié des scalaires positifs λ_1 et λ_2 et avec $\lambda_3 = \lambda_4 = 1$, la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$ défini par (4.1.1) vérifie*

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -\sigma_1 \xi_x^2(0, t) - \sigma_2 (\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)) \\ &\quad - \sigma_3 \|\xi_{xx}\|_2^2 - \sigma_4 \xi_{xt}^2(0, t) - \sigma_5 (q \diamond \xi_x) - \lambda_4 \beta \psi_4(t) \\ &\quad + \frac{\alpha EI}{2} \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned} \quad (4.2.34)$$

où

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = \lambda_2 (q_* - \varepsilon) \left(\frac{11}{16} - K^2 \eta_1 \right), \\ \sigma_2 = \frac{\varepsilon}{2} \lambda_2, \\ \sigma_3 = \frac{EI}{2} \lambda_2 [q_* (1 - \kappa) - \varepsilon (2 - \kappa)], \\ \sigma_4 = K \left(1 - \frac{\lambda_2}{2} \right) + \frac{\lambda_2 I_h \varepsilon}{2} - \frac{\lambda_2 (q_* - \varepsilon)}{4 \eta_1} - \frac{8}{(q_* - \varepsilon) \lambda_2} \\ \quad - 4 \kappa - \frac{2 \bar{q}_\beta}{\beta}, \\ \sigma_5 = \frac{15}{16} - \frac{\lambda_2 \kappa}{q_* - \varepsilon} - \frac{\alpha}{2}. \end{array} \right. \quad (4.2.35)$$

Preuve. Une utilisation des estimations (3.3.13), (4.2.1), (4.2.8), (4.2.25) et (4.2.29) et l'injection de (3.3.7) et en rappelant que $q'(t) = \alpha q(t) - h(t)$, il est facile de voir pour tout $t \geq t_* > 0$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) &\leq -[\lambda_1 (1 - K^2 \eta_1) - \lambda_2 \eta_3 - \eta_5] \xi_x^2(0, t) \\ &\quad - [\lambda_2 (q_* - \eta_2) - \lambda_1] (\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) \\ &\quad + J_p \xi_{xt}^2(L, t)) - EI \left[\frac{\lambda_1 (1 - \kappa)}{2} - \lambda_2 \eta_2 \right] \|\xi_{xx}\|_2^2 \\ &\quad - (\beta - 2 \eta_6 \bar{q}_\beta) \psi_4(t) - \left\{ K \left(1 - \frac{\lambda_2}{2} \right) + \lambda_2 I_h (q_* - \eta_2) \right. \\ &\quad \left. - \lambda_1 \left(I_h + \frac{1}{4 \eta_1} \right) - \frac{1}{4 \eta_4} - \frac{1}{2 \eta_5} - \frac{1}{2 \eta_6} \right\} \xi_{xt}^2(0, t) \\ &\quad - \left\{ 1 - \left[\frac{\lambda_2}{4 \eta_3} + \frac{\alpha}{2 \kappa} + \eta_4 \right] \kappa \right\} (q \diamond \xi_x) \\ &\quad - \left\{ \frac{EI}{2} - \left[\frac{\lambda_1 EIC_\alpha}{2(1 - \kappa)} + \lambda_2 C_1 \right] \right\} \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx \\ &\quad - \left(\frac{1}{2} - \lambda_2 C_2 \right) (h \diamond \xi_x) + \frac{\alpha EI}{2} \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx. \end{aligned}$$

On commence maintenant par sélectionner les différents paramètres de sorte que tous les coefficients de (4.2.35) soient négatifs.

Premièrement, prenons $\varepsilon < \frac{q_*(1-\kappa)}{2-\kappa}$, donc $q_* - \varepsilon > 0$. Ensuite, on choisit $\lambda_1 = (q_* - \varepsilon) \lambda_2$, $\eta_2 = \frac{\varepsilon}{2}$, $\eta_3 = \frac{(q_* - \varepsilon)}{4}$, $\eta_4 = \frac{1}{16\kappa}$, $\eta_5 = \frac{\lambda_1}{16}$ et $\eta_6 = \frac{\beta}{4\bar{q}_\beta}$, on obtient pour tout $t \geq t_* > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq -\lambda_2 (q_* - \varepsilon) \left(\frac{11}{16} - K^2 \eta_1 \right) \xi_x^2(0, t) \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \lambda_2 [\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)] - \frac{\beta}{2} \psi_4(t) \\
 &\quad - \frac{EI}{2} \lambda_2 [q_* (1 - \kappa) - \varepsilon (2 - \kappa)] \|\xi_{xx}\|_2^2 + \frac{\alpha EI}{2} \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx \\
 &\quad - \left\{ K \left(1 - \frac{\lambda_2}{2} \right) + \frac{\lambda_2 I_h \varepsilon}{2} - \frac{\lambda_2 (q_* - \varepsilon)}{4\eta_1} - \frac{8}{(q_* - \varepsilon) \lambda_2} \right. \\
 &\quad \left. - 4\kappa - \frac{2\bar{q}_\beta}{\beta} \right\} \xi_{xt}^2(0, t) - \left(\frac{15}{16} - \frac{\lambda_2 \kappa}{q_* - \varepsilon} - \frac{\alpha}{2} \right) (q \diamond \xi_x) \\
 &\quad - \left\{ \frac{EI}{2} - \lambda_2 \left[C_1 + \frac{(q_* - \varepsilon) EIC_\alpha}{2(1-\kappa)} \right] \right\} \int_0^L (h \square \xi_{xx}) dx \\
 &\quad - \left(\frac{1}{2} - \lambda_2 C_2 \right) (h \diamond \xi_x).
 \end{aligned}$$

Ensuite, on sélectionne λ_2 assez petit pour avoir

$$\begin{cases} \frac{15}{16} - \frac{\lambda_2 \kappa}{q_* - \varepsilon} - \frac{\alpha}{2} > 0, \\ \frac{EI}{2} - \lambda_2 \left[C_1 + \frac{(q_* - \varepsilon) EIC_\alpha}{2(1-\kappa)} \right] > 0, \\ \frac{1}{2} - \lambda_2 C_2 > 0. \end{cases}$$

On obtient finalement $t \geq t_* > 0$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq -\lambda_2 (q_* - \varepsilon) \left(\frac{11}{16} - K^2 \eta_1 \right) \xi_x^2(0, t) \\
 &\quad - \frac{\varepsilon}{2} \lambda_2 [\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)] - \frac{\beta}{2} \psi_4(t) \\
 &\quad - \frac{EI}{2} \lambda_2 [q_* (1 - \kappa) - \varepsilon (2 - \kappa)] \|\xi_{xx}\|_2^2 + \frac{\alpha EI}{2} \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx \\
 &\quad - \left\{ K \left(1 - \frac{\lambda_2}{2} \right) + \frac{\lambda_2 I_h \varepsilon}{2} - \frac{\lambda_2 (q_* - \varepsilon)}{4\eta_1} - \frac{8}{(q_* - \varepsilon) \lambda_2} \right. \\
 &\quad \left. - 4\kappa - \frac{2\bar{q}_\beta}{\beta} \right\} \xi_{xt}^2(0, t) - \left(\frac{15}{16} - \frac{\lambda_2 \kappa}{q_* - \varepsilon} - \frac{\alpha}{2} \right) (q \diamond \xi_x).
 \end{aligned}$$

Ce qui achève la démonstration. ■

Nous sommes maintenant en mesure d'établir et de démontrer notre résultat principal de stabilisation, qui est donné par le théorème suivant :

Théorème 22 *Supposons que (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) sont vérifiées, alors il existe des constantes strictement positives k_1 et k_2 telles que l'énergie du système (3.3.3)-(3.3.6) satisfait*

$$\mathcal{E}(t) \leq k_2 H_1^{-1} \left(k_1 \int_{q^{-1}(r)}^t \zeta(s) ds \right), \quad (4.2.36)$$

où $k_1 \leq 1$ et $H_1(t) = \int_t^r \frac{1}{sH'(s)} ds$ est une fonction strictement croissante et convexe sur $]0, r]$ avec $\lim_{t \rightarrow 0} H_1(t) = +\infty$.

Preuve. On commence par utilisation de la propriété décroissante de ζ et des estimations (3.1.4), (3.3.13), (4.2.25) et (4.2.29) pour déduire pour tout $t \geq t_1 > 0$

$$\begin{aligned}
 & \int_0^L \int_0^{t_1} q(s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 ds dx \\
 & + \int_0^{t_1} q(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \\
 & \leq \frac{1}{\zeta(t_1)} \int_0^L \int_0^{t_1} \zeta(s) q(s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 ds dx \\
 & \quad + \frac{1}{\zeta(t_1)} \int_0^{t_1} \zeta(s) q(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \\
 & \leq -\frac{q(0)}{a\zeta(t_1)} \int_0^L \int_0^{t_1} q'(s) (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 ds dx \\
 & \quad - \frac{q(0)}{a\zeta(t_1)} \int_0^{t_1} q'(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \\
 & \leq -\frac{q(0)}{a\zeta(t_1)} \int_0^t q'(s) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 ds dx + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \\
 & \quad - \frac{q(0)}{a\zeta(t_1)} \int_0^t q'(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds + \frac{15}{16} (q \diamond \xi_x) \\
 & \quad + \frac{\beta}{2} \psi_4(t) + \left[K - 4\kappa - \frac{2\bar{q}_\beta}{\beta} \right] \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{EI}{2} q(t) \|\xi_{xx}\|_2^2.
 \end{aligned}$$

Alors,

$$\begin{aligned}
 & \int_0^{t_1} q(s) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \\
 & + \int_0^{t_1} q(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds \\
 & \leq -c(\mathcal{E}' + \psi'_3 + \psi'_4)(t), \quad \forall t \geq 0.
 \end{aligned} \tag{4.2.37}$$

Maintenant, en ajoutant et retranchant les deux termes $2\xi_{xt}(0, t)\xi_x(0, t)$ et $(q\Diamond\xi_x)$ dans le deuxième membre droite de l'inégalité (4.2.34) et utilisant l'inégalité

$$\xi_{xt}(0, t)\xi_x(0, t) \leq \frac{1}{4\eta_5}\xi_{xt}^2(0, t) + \eta_5\xi_x^2(0, t), \quad \eta_5 > 0, \quad \forall t \geq 0,$$

on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & - \left[\sigma_1 - \frac{\lambda_2(q_* - \varepsilon)}{16} \right] \xi_x^2(0, t) - \sigma_2(\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) \\ & + J_p \xi_{xt}^2(L, t)) - \sigma_3 \|\xi_{xx}\|_2^2 - \frac{\beta}{2} \psi_4(t) - (\sigma_5 + 1)(q\Diamond\xi_x) \\ & - \left(\sigma_4 - \frac{4}{\lambda_2(q_* - \varepsilon)} \right) \xi_{xt}^2(0, t) + \frac{\alpha EI}{2} \int_0^L (q\Box\xi_{xx}) dx \\ & + (q\Diamond\xi_x) + 2\xi_{xt}(0, t)\xi_x(0, t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Utilisant (4.2.35), on trouve

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq & -\lambda_2(q_* - \varepsilon) \left(\frac{5}{8} - K^2\eta_1 \right) \xi_x^2(0, t) - \sigma_2(\rho \|\xi_t\|_2^2 \\ & + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)) - \sigma_3 \|\xi_{xx}\|_2^2 - \frac{\beta}{2} \psi_4(t) \\ & - \left(\left(K \left(1 - \frac{\lambda_2}{2} \right) + \frac{\lambda_2 I_h \varepsilon}{2} - \frac{\lambda_2(q_* - \varepsilon)}{4\eta_1} \right) \right. \\ & \left. - \frac{12}{(q_* - \varepsilon)\lambda_2} - 4\kappa - \frac{2\bar{q}_\beta}{\beta} \right) \xi_{xt}^2(0, t) - (\sigma_5 + 1)(q\Diamond\xi_x) \\ & + \frac{\alpha EI}{2} \int_0^L (q\Box\xi_{xx}) dx + (q\Diamond\xi_x) + 2\xi_{xt}(0, t)\xi_x(0, t), \quad \forall t \geq 0. \end{aligned}$$

Maintenant, en prenant $\eta_1 = \frac{1}{2K^2}$ de manière que

$$\lambda_2(q_* - \varepsilon) \left(\frac{5}{8} - K^2\eta_1 \right) > 0.$$

Ensuite, on choisit le paramètre K assez grand de tel sorte que

$$K \left(1 - \frac{\lambda_2}{2} \right) + \frac{\lambda_2 I_h \varepsilon}{2} - \frac{\lambda_2(q_* - \varepsilon)}{4\eta_1} - \frac{12}{(q_* - \varepsilon)\lambda_2} - 4\kappa - \frac{2\bar{q}_\beta}{\beta} > 0.$$

Par conséquent

$$\begin{aligned}
 \mathcal{L}'(t) &\leq -m(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) + c \left[\int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx + (q \diamond \xi_x) \right. \\
 &\quad \left. + 2\xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \right] \\
 &\leq -m(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) - c(\mathcal{E}' + \psi_3' + \psi_4')(t) \\
 &\quad + c \left[\int_{t_1}^t q(s) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^t q(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \right].
 \end{aligned}$$

Ensuite, on établit $F(t) = \mathcal{L}(t) + c(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t)$ qui est clairement équivalent à $(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t)$. Par conséquent, on obtient pour un certain $m > 0$

$$\begin{aligned}
 F'(t) &\leq -m(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) \\
 &\quad + c \left[\int_{t_1}^t q(s) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds \right. \\
 &\quad \left. + \int_{t_1}^t q(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds + \xi_{xt}(0, t) \xi_x(0, t) \right]. \tag{4.2.38}
 \end{aligned}$$

On considère les deux cas suivant

Cas n°1 La fonction $H(t)$ est linéaire

Grâce à (4.2.37), on obtient de (4.2.38)

$$F'(t) \leq -m(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) - c(\mathcal{E}' + \psi_3' + \psi_4')(t). \tag{4.2.39}$$

En multipliant (4.2.39) par $\zeta(t)$, on obtient

$$\zeta(t)F'(t) \leq -m\zeta(t)(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) - c\zeta(t)(\mathcal{E}' + \psi_3' + \psi_4')(t).$$

En tenant compte la propriété de la décroissance de $\zeta(t)$, on a pour tout $t \geq t_1 > 0$

$$[\zeta(t)F(t) + c\zeta(t)(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)]'(t) \leq -m\zeta(t)(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t).$$

Par conséquent, en utilisant le fait que $\zeta(t)F(t) + c\zeta(t)(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) \sim (\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t)$, il est facile de voir que

$$(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t) \leq c'e^{-m \int_{t_1}^t \zeta(s) ds}.$$

Cas n°2 La fonction $H(t)$ est non linéaire Premièrement, on utilise (3.3.13) et (4.2.32) pour conclure

$$L(t) = \mathcal{L}(t) + \lambda_5 \psi_5(t),$$

est positive et il satisfait pour un choix approprié d'une constante positive λ_5

$$\begin{aligned} L'(t) \leq & -\frac{\lambda_5 - \alpha EI}{2} \int_0^L (q \square \xi_{xx}) dx - \sigma_5 (q \diamond \xi_x) - (\sigma_3 - 3\lambda_5 \kappa) \|\xi_{xx}\|_2^2 \\ & - \sigma_1 \xi_x^2(0, t) - \sigma_2 (\rho \|\xi_t\|_2^2 + m_p \xi_t^2(L, t) + J_p \xi_{xt}^2(L, t)) \\ & - \frac{\beta}{2} \psi_4(t) - \sigma_4 \xi_{xt}^2(0, t), \quad t \geq t_1 > 0. \end{aligned}$$

D'autre part, on choisit λ_5 et α suffisamment petites, on trouve

$$L'(t) \leq -b(\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t), \quad \forall t \geq 0,$$

avec b une constance positive, on obtient

$$b \int_{t_1}^t (\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(s) ds \leq L(t_1) - L(t) \leq L(t_1).$$

Ce qui implique

$$\int_0^\infty (\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(s) ds < \infty. \quad (4.2.40)$$

Ensuite, on définit la fonction $I(t)$ par

$$\begin{aligned} I(t) := & \mu \left[\int_{t_1}^t \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds, \right. \\ & \left. + \int_{t_1}^t (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds \right] \end{aligned}$$

où (4.2.40) permet une constante $0 < \mu < 1$ choisie de sorte que pour tout $t \geq t_1 > 0$,

$$0 < I(t) < 1. \quad (4.2.41)$$

Aussi, on définit la fonction $\lambda(t)$ par

$$\begin{aligned} \lambda(t) := & \int_{t_1}^t q'(s) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds \\ & + \int_{t_1}^t q'(s) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds. \end{aligned}$$

En utilisant (3.3.13), (4.2.25) et (4.2.29), on obtient

$$\begin{aligned} (\mathcal{E}' + \psi'_3 + \psi'_4)(t) \leq & \frac{EI}{2} \int_0^L (q' \square \xi_{xx}) dx + \frac{1}{2} (q' \diamond \xi_x) - \frac{\beta}{2} \psi_4(t) \\ & - \left[K - 4\kappa - \frac{2\bar{q}_\beta}{\beta} \right] \xi_{xt}^2(0, t) - \frac{15}{16} (q \diamond \xi_x) \\ & - \frac{EI}{2} q(t) \|\xi_{xx}\|_2^2, \quad \forall t \geq t_1 > 0. \end{aligned} \quad (4.2.42)$$

En appuyant sur l'estimation précédente, on arrive

$$(\mathcal{E}' + \psi'_3 + \psi'_4)(t) \leq \frac{EI}{2} \int_0^L (q' \square \xi_{xx}) dx + \frac{1}{2} (q' \diamond \xi_x) \leq 0, \quad (4.2.43)$$

on implique que

$$\lambda(t) \leq -c(\mathcal{E}' + \psi'_3 + \psi'_4)(t).$$

Comme H une fonction strictement convexe sur $]0, r[$ et $H(0) = 0$, alors

$$H(Sx) \leq SH(x),$$

à condition de $0 < S < 1$ et $x \in]0, r[$. D'après les deux hypothèses (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) et

l'inégalité de Jensen conduit à

$$\begin{aligned}
 \lambda(t) &= \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^t \mu I(t) (-q'(s)) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^t \mu I(t) (-q'(s)) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds \right] \\
 &\geq \frac{1}{\mu} \left[\frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^t \mu I(t) \zeta(s) H(q(s)) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^t \mu I(t) \zeta(s) H(q(s)) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds \right] \\
 &\geq \frac{\zeta(t)}{\mu I(t)} \int_{t_1}^t \mu H(I(t)q(s)) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds \\
 &\quad + \frac{\zeta(t)}{I(t)} \int_{t_1}^t \mu H(I(t)q(s)) (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 ds, \\
 &\geq \frac{\zeta(t)}{qI(t)} H \left(\int_{t_1}^t I(t)q(s) \mu \left(\int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 \right) ds \right) \\
 &\geq \frac{\zeta(t)}{\mu} H \left(\frac{1}{I(t)} \int_{t_1}^t I(t)q(s) \mu \left(\int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 \right) ds \right) \\
 &= \frac{\zeta(t)}{\mu} H \left(\mu \int_{t_1}^t q(s) \left(\int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 \right) ds \right) \\
 &= \frac{\zeta(t)}{\mu} \overline{H} \left(\mu \int_{t_1}^t q(s) \left(\int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + (\xi_x(0, t) - \xi_x(0, t-s))^2 \right) ds \right),
 \end{aligned}$$

où \bar{H} l'extension de la fonction H sachant que \bar{H} est une fonction de classe C^2 ($]0, \infty[$) strictement croissante et strictement convexe.

Ce qui implique

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^t q(s) \int_0^L (\xi_{xx}(t) - \xi_{xx}(t-s))^2 dx ds + \int_{t_1}^t q(s) (\xi_x(0,t) - \xi_x(0,t-s))^2 ds \\ & \leq \frac{1}{\mu} \bar{H}^{-1} \left(\frac{q\lambda(t)}{\zeta(t)} \right), \end{aligned}$$

et d'après l'estimation (4.2.38) on peut déduire que

$$F'(t) \leq -mE(t) + c\bar{H}^{-1} \left(\frac{\mu\lambda(t)}{\zeta(t)} \right), \quad \forall t \geq t_1 > 0, \quad (4.2.44)$$

où $E(t) = (\mathcal{E} + \psi_3 + \psi_4)(t)$.

Pour un certain $\varepsilon_0 < r$ on définit la fonction F_1 par

$$F_1(t) := \bar{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) F(t) + E(t),$$

est équivalente avec la fonctionnelle $E(t)$, on la dérive par rapport à t et grâce à (4.2.43) et (4.2.44) et le fait que $\bar{H}' > 0$ et $\bar{H}'' > 0$, on obtient

$$\begin{aligned} F_1'(t) &= \varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \bar{H}'' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) F(t) \\ & \quad + \bar{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) F'(t) + E'(t) \\ & \leq -mE(t) \bar{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ & \quad + c\bar{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \bar{H}^{-1} \left(\frac{\mu\lambda(t)}{\zeta(t)} \right) \\ & \quad + E'(t). \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Soit \bar{H}^* le conjugué convexe de \bar{H} dans le sens de Young défini par

$$\bar{H}^*(s) = s \left(\bar{H}' \right)^{-1} (s) - \bar{H} \left[\left(\bar{H}' \right)^{-1} (s) \right], \quad (4.2.46)$$

et elle satisfait l'inégalité de Young suivante

$$AB \leq \bar{H}^*(A) + \bar{H}(B), \quad (4.2.47)$$

avec $A = \overline{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right)$ et $B = \overline{H}^{-1} \left(\frac{\mu\lambda(t)}{\zeta(t)} \right)$, en utilisant (3.3.13), (4.2.25), (4.2.29) et (4.2.45)-(4.2.47), on arrive à

$$\begin{aligned} F_1'(t) &\leq -mE(t)\overline{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c\overline{H}^* \left(\overline{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \right) + c \frac{\mu\lambda(t)}{\zeta(t)} \\ &\quad + E'(t) \\ &\leq -mE(t)\overline{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \overline{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c \frac{\mu\lambda(t)}{\zeta(t)} + E'(t). \end{aligned}$$

Ensuite, en multipliant l'inégalité précédente par $\zeta(t)$ et on utilise le fait que

$$\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} < r \quad \text{et} \quad \overline{H}' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) = H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right),$$

on aboutit à

$$\begin{aligned} \zeta(t) F_1'(t) &\leq -m\zeta(t) E(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \zeta(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c\mu\lambda(t) + \zeta(t) (\mathcal{E}' + \psi_3' + \psi_4') (t) \\ &\leq -m\zeta(t) E(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad + c\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \zeta(t) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &\quad - c(\mathcal{E}' + \psi_3' + \psi_4') (t). \end{aligned}$$

Par conséquent, avec la fonction $F_2(t) = \zeta(t) F_1(t) + cE(t)$ qui satisfait pour un certain $\beta_1, \beta_2 > 0$,

$$\beta_1 F_2(t) \leq E(t) \leq \beta_2 F_2(t), \quad (4.2.48)$$

et avec un choix approprié de ε_0 , on obtient pour un certain $k > 0$

$$\begin{aligned} F_2'(t) &\leq -k\zeta(t) \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right) H' \left(\varepsilon_0 \frac{E(t)}{E(0)} \right) \\ &= -k\zeta(t) H_2 \left(\frac{E(t)}{E(0)} \right), \quad t \geq t_1 > 0, \end{aligned} \quad (4.2.49)$$

avec $H_2(t) = tH'(\varepsilon_0 t)$.

Comme $H_2'(t) = H'(\varepsilon_0 t) + \varepsilon_0 t H''(\varepsilon_0 t)$, ensuite, en utilisant la convexité stricte de H sur $]0, r]$, on conclure que $H_2'(t)$ et $H_2(t) > 0$ sur $]0, 1]$.

Par conséquent

$$R(t) = \frac{\beta_1 F_2(t)}{E(0)},$$

en tenant compte les deux estimations (4.2.48) et (4.2.49), on obtient l'équivalence suivant

$$R(t) \sim E(t). \quad (4.2.50)$$

D'après ce qui précède, on a pour tout $k_1 > 0$,

$$R'(t) \leq -k_1 \zeta(t) H_2(R(t)), \quad \forall t \geq t_1 > 0.$$

Ensuite, en intégrant sur $]t_1, t[$, il est facile de voir que

$$\int_{t_1}^t \frac{-R'(s)}{H_2(R(s))} ds \geq k_1 \int_{t_1}^t \zeta(s) ds \Rightarrow \int_{\varepsilon_0 R(t)}^{\varepsilon_0 R(t_1)} \frac{1}{s H'(s)} ds \geq k_1 \int_{t_1}^t \zeta(s) ds,$$

par conséquent,

$$R(t) \leq \frac{1}{\varepsilon_0} H_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \zeta(s) ds \right), \quad \forall t \geq t_1 > 0 \quad (4.2.51)$$

où k_1 et ε_0 sont deux constantes positives et $H_1(t) = \int_t^r \frac{1}{s H'(s)} ds$. De $R(t) \sim E(t)$ et (4.2.51), on a

$$\mathcal{E}(t) \leq k_2 H_1^{-1} \left(k_1 \int_{t_1}^t \zeta(s) ds \right), \quad \forall t \geq t_1 > 0,$$

où $k_2 > 0$. L'estimation (4.2.36) est obtenu en rappelant les propriétés de H_1 est une fonction strictement décroissante sur $]0, r]$ et $\lim_{t \rightarrow 0} H_1(t) = +\infty$. La preuve du théorème (22) est achevée.

■

Exemple 1 On considère $q(t) = ae^{-t^q}$ et pour $0 < q < 1$, supposons que (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) sont vérifiées sur $(0, r]$ pour tout $0 < r < a$, alors $q'(t) = -H(q(t))$ où $H(t) = \frac{q^t}{[\ln(\frac{a}{t})]^{\frac{1}{q}-1}}$, depuis que

$$H'(t) = \frac{1 - q + q \ln(\frac{a}{t})}{[\ln(\frac{a}{t})]^{\frac{1}{q}}} \quad \text{et} \quad H''(t) = \frac{(1 - q) \left[\ln(\frac{a}{t}) + \frac{1}{q} \right]}{[\ln(\frac{a}{t})]^{\frac{1}{q}+1}}.$$

En conséquence, on peut directement conclure que $E(t) \leq \bar{k} e^{-kt^q}$.

Exemple 2 D'autre part, si q est une autre fonction qui satisfait les hypothèses (\mathbf{A}_1) et (\mathbf{A}_2) , alors nous devrions utiliser (4.2.36) où

$$\begin{aligned} H_1(t) &= \int_t^r \frac{1}{sH'(s)} ds = \int_t^r \frac{[\ln \frac{a}{s}]^{\frac{1}{q}}}{s [1 - q + q \ln(\frac{a}{s})]} ds = \int_{\ln \frac{a}{r}}^{\ln \frac{a}{t}} \frac{u^{\frac{1}{q}}}{1 - q + qu} du \\ &= \frac{1}{q} \int_{\ln \frac{a}{r}}^{\ln \frac{a}{t}} u^{\frac{1}{q}-1} \left[\frac{u}{\frac{1-q}{q} + u} \right] du \leq \frac{1}{q} \int_{\ln \frac{a}{r}}^{\ln \frac{a}{t}} u^{\frac{1}{q}-1} du \leq \left[\ln \frac{a}{t} \right]^{\frac{1}{q}} \\ &\Rightarrow H_1^{-1}(t) \leq ae^{-t^q} \\ &\Rightarrow E(t) \leq ak_2 e^{-k_3 t^q}. \end{aligned}$$

Considérant la fonction $q(t) = \frac{a}{(t+e)[\ln(t+e)]^p}$ où $p > 1$ qui a choisi de sorte que (3.1.1) soit satisfait. Nous pouvons voir que $q'(t) = \frac{-a[\ln(t+e)+p]}{(t+e)^2[\ln(t+e)]^{p+1}}$ peut être écrit comme

$$q'(t) = \frac{-[\ln(t+e)+p]}{(t+e)[\ln(t+e)]} q(t)$$

$$\Rightarrow E(t) \leq ke^{-k_1 \int_0^t \frac{\ln(t+e)+p}{(t+e)[\ln(t+e)]} ds} = \frac{k}{[(t+e)[\ln(t+e)]^p]^{k_1}},$$

comme $k_1 \leq 1$, il peut également être écrit comme

$$q'(t) = \frac{-[\ln(t+e)+p]}{a^{\frac{1}{p}}(t+e)^{1-\frac{1}{p}}} (q(t))^{1+\frac{1}{p}},$$

donc

$$E(t) \leq \bar{k} \left(1 + \int_0^t \frac{\ln(t+e)+p}{a^{\frac{1}{p}}(t+e)^{1-\frac{1}{p}}} ds \right)^{-p} \leq \frac{\bar{k}}{(t+e)[\ln(t+e)]^p}.$$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons établi l'existence et l'unicité de la solution ainsi que la stabilisation d'une poutre viscoélastique d'Euler-Bernoulli. Une extrémité de la poutre est fixée à un moteur rotatif dans un plan horizontal et une masse dynamique est attachée à l'extrémité libre de la poutre. Pour une large classe de noyau q , plus précisément, $q'(t) \leq -\zeta(t)H(q(t))$, $\forall t \geq 0$ où H est une fonction croissante et convexe près de l'origine et ζ est une fonction décroissante.

Il est intéressant d'étudier la stabilisation générale d'une poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation, le système s'écrit sous la forme :

$$\begin{cases} I_h S_{tt}(t) + \rho \int_0^L (x(xS + v(x,t)))_{tt} dx + m_p L(LS(t) + v(L,t))_{tt} \\ + J_p (S(t) + v_x(L,t))_{tt} = \tau(t), \quad t \geq 0, \\ \rho v_{tt}(t) + EI v_{xxxx}(t) - EI(q * v_{xxxx})(t) = -\rho x S_{tt}(t), \quad \forall (x,t) \in (0,L) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \quad (4.2.52)$$

avec les conditions aux limites

$$\begin{cases} v(0,t) = v_x(0,t) = 0, \quad t \geq 0, \\ EI v_{xxx}(L,t) - EI \int_0^t q(t-s)v_{xxx}(L,s) ds = m_p (LS(t) + v(L,t))_{tt}, \quad t \geq 0, \\ EI v_{xx}(L,t) - EI \int_0^t q(t-s)v_{xx}(L,s) ds = -J_p (S(t) + v_x(L,t))_{tt}, \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (4.2.53)$$

et les conditions initiales

$$v(x,0) = v_0(x), \quad v_t(x,0) = v_1(x), \quad S(0) = S_0, \quad S_t(0) = S_1, \quad x \in (0,L), \quad (4.2.54)$$

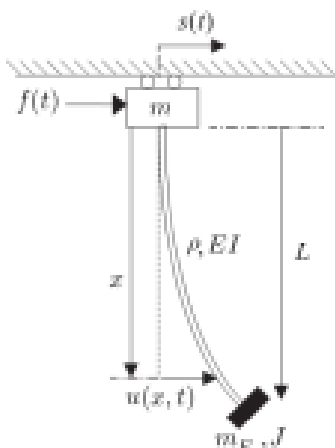


Figure 4.1 : Poutre viscoélastique de type Euler-Bernoulli fixée à une base en mouvement de translation.

Il est intéressant aussi d'étudier le comportement asymptotique de l'énergie du système de Timoshenko. Les équations du mouvement dans ce cas s'écrivent sous la forme :

$$\begin{cases} m\xi_{tt}(t) + \rho_1 \int_0^L (\xi_{tt}(t) + \omega_{tt}(x, t)) dx + m_E (\xi_{tt}(t) + \omega_{tt}(L, t)) = \Phi(t), \\ \rho_1 (\xi_{tt}(t) + \omega_{tt}(x, t)) - k (\omega_{xx}(x, t) + \psi_x(x, t)) = 0, \\ \rho_2 \psi_{tt}(x, t) - b\psi_{xx}(x, t) + \int_0^t g(t - \tau)\psi_{xx}(\tau) d\tau = -\rho x \xi_{tt}(t), \end{cases} \quad (4.2.55)$$

pour tout $x \in (0, L)$ et $t \geq 0$ avec les conditions aux bords

$$\begin{cases} \omega(0, t) = \psi(0, t) = 0, \quad t \geq 0, \\ -k (\omega_x(L, t) + \psi(L, t)) = m_E (\omega_{tt}(L, t) + \xi_{tt}(L, t)), \quad t \geq 0, \\ b\psi_x(L, t) - \int_0^t g(t - \tau)\psi_x(L, \tau) d\tau = -J\psi_{tt}(L, t), \quad t \geq 0, \end{cases} \quad (4.2.56)$$

et les conditions initiales

$$\begin{cases} \xi(0) = \xi^0, \quad \xi_t(0) = \xi^1, \quad \omega(x, 0) = \omega^0(x), \quad \psi(x, 0) = \psi^0(x), \\ \omega_t(x, 0) = \omega^1(x), \quad \psi_t(x, 0) = \psi^1, \quad x \in (0, L), \end{cases} \quad (4.2.57)$$

où les fonctions ξ , ω , ψ , Φ et g désignent, respectivement, le déplacement de la base en mouvement, le déplacement transversal au point x et à l'instant t de la poutre par rapport à la base, l'angle de rotation d'un filament, la force extérieure agissant sur la base et la fonction de relaxation. Les coefficients ρ_1 , ρ_2 , b et k sont des constantes positives

caractérisant les propriétés élastiques des matériaux. Physiquement, ρ_1 est la densité linéaire de la masse, ρ_2 est le moment d'inertie de la masse, b est le coefficient de rigidité et k est le module d'élasticité de cisaillement. Les constantes L , m et m_E représentent la longueur de la poutre, la masse de la base en mouvement de translation et la masse avec moment d'inertie J est attachée à l'extrémité libre de la poutre, respectivement.

Nous serions intéressés d'étudier le taux de décroissance générale de la solution du système (4.2.55)-(4.2.57) sous l'hypothèse suivante sur le noyau

$$q'(t) \leq -\zeta(t)H(q(t)), \quad \forall t \geq 0,$$

où H est une fonction croissante et convexe près de l'origine et ζ est une fonction décroissante.

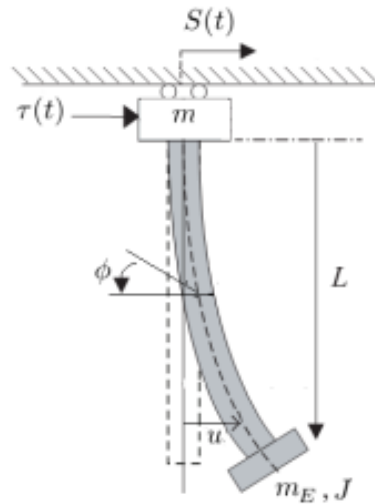


Figure 4.2 : Poutre de Timoshenko fixée à une base en mouvement de translation.

Bibliographie

- [1] M. Aassila, M. M. Cavalcanti and J. A. Soriano, Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of the wave equation with memory in a star-shaped domain, *SIAM J Control and Optim*, 2000;38(5):1581–1602.
- [2] M. Aassila, M. M. Cavalcanti and V. N. Domingos Cavalcanti, Existence and uniform decay of the wave equation with nonlinear boundary damping and boundary memory source term, *Calc Var Partial Differ Equ*, 2002;15:155–180.
- [3] R. A. Adams and J. F. Fourier, Sobolev Spaces, *Calc Var Partial Differ Equ*, 2003, Academic Press.
- [4] F. Alabau-Boussouira, Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems, *Appl. Math. Optim*, 51 (2005), 61-105.
- [5] F. Alabau-Boussouira and P. Cannarsa, A general method for proving sharp energy decay rates for memory dissipative evolution equations, *C. R. Acad. Sci. Paris*, Ser. I 347 (2009) 867–872.
- [6] F. Alabau-Boussouira, P. Cannarsa and D. Sforza, Decay estimates for second order evolution equations with memory, *J. Funct. Anal.* 254:1342-1372, 2008.
- [7] V. I. Arnold, *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, New York: Springer-Verlag 1989.

-
- [8] J. A. D. Appleby, M. Fabrizio, B. Lazzari and D. W. Reynolds, On exponential asymptotic stability in linear viscoelasticity, *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences*, 16 (10): p. 1677-1694, 2006.
- [9] C. Bardos, G. Lebeau and J. Rauch, Sharp sufficient conditions for the observation, control, and stabilization of waves from the boundary. *SIAM J. Control Optim.*, 30(5):1024-1065, 1992.
- [10] A. Berkani, Stabilization of a viscoelastic rotating Euler-Bernoulli beam, *J. Math. Phys.*, 52:013502,2011.
- [11] S. Berrimi and S. A. Messaoudi, Exponential decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping. *Elect J. Diff. Eqns*, (88): p. 1-10, 2004.
- [12] S. Berrimi and S. A. Messaoudi, Existence and decay of solutions of a viscoelastic equation with a nonlinear source, *Nonlinear Analysis: Theory, Methods and Applications*, Vol. 64 (2006), pp.2314–2331.
- [13] W. J. Book, Modeling, design, and control of exible manipulator arms: a tutorial review, *In : Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control Honolulu*, 1990; Hawaii. 500-506.
- [14] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle, theorie et applications*, Masson, 1987.
- [15] N. Burq, Contrôlabilité exacte des ondes dans des ouverts peu réguliers, *Asymptot. Anal*, 14(2) :157-191, 1997.
- [16] N. Burq and M. Zworski, Geometric control in the presence of a black box, *J. Amer. Math. Soc*, 17(2) : 443-471, 2004.
- [17] E. L. Cabanillas and J. E. Munoz Rivera, Decay rates of solutions of an anisotropic inhomogeneous n-dimensional viscoelastic equation with polynomial decaying kernels, *Comm. Math. Phys*, 1996;177:583-602.
- [18] H. Canbolat, D. Dawson, C. Rahn and P. Vedagarbha, Boundary control of a cantilevered flexible beam with point-mass dynamics at the free end, *Mechatronics*, 1998;8:163-186.

-
- [19] P. Cannarsa and D. Sforza, A stability result for a class of nonlinear integrodifferential equations with L^1 kernels, *Appl. Math. (Warsaw)* 35 :395-430, 2008.
- [20] P. Cannarsa and D. Sforza, Integro-differential equations of hyperbolic type with positive definite kernels, *J. Differ. Equ.*, 2011;250:4289-4335.
- [21] R. H. Cannon and E. Schmitz, Initial experiments on the end-point control of a flexible one-link robot, *Inter. J. Robotics Res.*, 1984;3:62-75.
- [22] T. Carleman, Sur un problème d'unicité pour systèmes d'équations aux érivées partielles à deux variables indépendantes. *Ark. Mat., Astr. Fys.*, 26(17) : 9, 1939.
- [23] M. M. Cavalcanti, Existence and uniform decay for the Euler-Bernoulli viscoelastic equation with nonlocal boundary dissipation, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2002;8:675-695.
- [24] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti and J. Ferreira, Existence and uniform decay for a nonlinear viscoelastic equation with strong damping, *Math Methods Appl Sci*, 2001;24:1043–1053.
- [25] M. M. Cavalcanti, V. D. Cavalcanti and I. Lasiecka, Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction, *Journal of Differential Equations*, Vol. 236,(2007), pp.407-459.
- [26] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti and J. A. Soriano, Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping *Electronic Journal of Differential Equations*, Vol. 2002, pp.1–14.
- [27] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, J. S. Prates Filho and J. A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. *Diff. Integ. Eqs.*, 14 (1): p. 85-116, 2001.
- [28] M. M. Cavalcanti and H. P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semilinear wave equation, *SIAM J Control Optim.*, 2003;42(4):1310-1324.

-
- [29] M. M. Cavalcanti and V. N. D. Cavalcanti, *Introdução à teoria das distribuições e aos espaços de Sobolev*, Editora da Universidade Estadual de Maringá (Eduem), Maringá, 2009. 452 pp. ISBN: 978-85-7628-195-5.
- [30] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti and P. Martinez, General decay rate estimates for viscoelastic dissipative systems, *Nonlinear Anal*, 2008;68:177-193.
- [31] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, I. Lasiecka and F. A. Nascimento, Intrinsic decay rate estimates for the wave equation with competing viscoelastic and frictional dissipative effects, *Discrete Contin Dyn Syst Ser B*, 2014;19(7):1987-2012.
- [32] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, I. Lasiecka and X. Wang, Existence and sharp decay rate estimates for a von Karman system with long memory, *Nonlinear Anal: RealWorld Application*, 2015;22:289-306.
- [33] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, J. S. Prates Filho, and J. A. Soriano, Existence and uniform decay rates for viscoelastic problems with nonlinear boundary damping. *Di . Int. Eqs.*, 14 : 85-116, 2001.
- [34] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, J. A. Soriano, Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping, *Electron. J. Differential Equations* 44 : 1-14, 2002.
- [35] M. M. Cavalcanti, H. P. Oquendo, Frictional versus viscoelastic damping in a semi-linear wave equation, *SIAM J. Control Optim.* 42 (4): 1310-1324, 2003.
- [36] B. D. Coleman and W. Noll, Foundations of linear viscoelasticity, *Rev Modern Phys.*, 1961;33:239-249.
- [37] A. Chen, Energy decay estimates and exact boundary value controlability for the wave equation in a bounded domain, *. Math, pures, Appl.*, 58, 249-274, 1979.
- [38] A. Chen, A note on the boundary stabilization of the wave equation, *S.I.A.M. J. Control. opt*, 19, 106-113, 1981.
- [39] G. Choquet, *Cours d'Analyse. Topologie*, Masson, 1964.

-
- [40] R. M. Christensen, Theory of Viscoelasticity, An Introduction, *New York/London: Academic Press*, 1982.
- [41] F. Conrad and Ö. Morgül, On the stabilization of a flexible beam with a tip mass, *SIAM J Control Optim*, 1998;36:1962-1986.
- [42] C. M. Dafermos, Asymptotic stability in viscoelasticity, *Arch Ration Mech Anal*, 1970;37:297-308.
- [43] C. M. Dafermos, On abstract Volterra equations with applications to linear viscoelasticity, *J. Differ. Equ*, 1970;7:554-569.
- [44] M. Daoulatli, I. Lasiecka and D. Toundykov, Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions *Discrete and Continuous Dynamical Systems*, Vol. 2,(2009), pp.67-95.
- [45] M. Eller, J. E. Lagnese and S. Nicaise, Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping, *Computational and Applied Mathematics*, 21 (2002), 135-165.
- [46] L. C. Evans, Partial Differential Equations, Graduate Studies in Mathematics, AMS, 1998.
- [47] M. Fabrizio, C. Giorgi and V. Pata, A new approach to equations with memory, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 198 : 189-232, (2010).
- [48] M. Fabrizio and S. Polidoro, Asymptotic decay for some differential systems with fading memory, *Appl. Anal.*, 81 (6): p. 1245-1264, 2002.
- [49] H. O. Fattorini, Infinite-dimensional optimization and control theory, volume 62 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.
- [50] E. Fernández-Cara and E. Zuazua, The cost of approximate controllability for heat equations : the linear case, *Adv. Differential Equations*, 5(4-6) :465-514, 2000.

-
- [51] A. V. Fursikov and O. Y. Imanuvilov, Controllability of evolution equations, volume 34 of Lecture Notes Series, Seoul National University Research Institute of Mathematics Global Analysis Research Center, Seoul, 1996.
- [52] B. Z. Guo, Riesz basis approach to the tracking control of a flexible beam with a tip rigid body without dissipativity, *Optim Methods Softw.* 2002;17:655-681.
- [53] B. Z. Guo and Q. Song, Tracking control of a flexible beam by nonlinear boundary feedback, *OJ. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 1995;8:47-58.
- [54] B. Z. Guo and Q. Zhang, On harmonic disturbance rejection of an undamped Euler-Bernoulli beam with rigid tip body, *ESAIM Control Optim Calc Var.*, 2004;10:615-623.
- [55] Xi. Han and M. Wang, General decay of energy for a viscoelastic equation with nonlinear damping, *Math. Methods Appl. Sci.*, 32(3) (2009) 346–358.
- [56] J. H. Hassan and S. A. Messaoudi, General decay rate for a class of weakly dissipative second-order systems with memory, *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2019, 1-12. <https://doi.org/10.1002/mma.5554>.
- [57] A. Haraux, Quelques propriétés des séries lacunaires utiles dans l'étude des vibrations élastiques, In Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France Seminar, Vol. XII (Paris, 1991-1993), volume 302 of Pitman Res. Notes Math. Ser., pages 113-124. Longman Sci. Tech., Harlow, 1994.
- [58] G. H. Hardy, J. E. Littlewood and G. Polya, Inequalities, Cambridge, *U.K.: Cambridge Univ Press*, 1959.
- [59] W. J. Hrusa and M. Renardy, A model equation for viscoelasticity with a strongly singular kernel, *J. Differ. Equ.*, SIAM J. Math. Anal, 19 (1988), 257-269.
- [60] A. E. Ingham, Some trigonometrical inequalities with applications to the theory of series, *Math. Z.*, 41(1) : 367-379, 1936.
- [61] K. P. Jin, J. Liang and T. J. Xiao, Coupled second order evolution equations with fading memory: optimal energy decay rate, *J. Differ. Equ.*, 2014;257:1501-1528.

-
- [62] Y. H. Kang, J. Y. Park and J. A. Kim, A memory type boundary stabilization for an Euler-Bernoulli beam under boundary output feedback control, *J. Korean Math. Soc.*, 49(5) :947–964, 2012.
- [63] A. Kelleche, N. E. Tatar and A. Khemmoudj, Uniform stabilization of an axially moving Kirchhoff string by a boundary control of memory type, *J. Dyn. Control. Syst*, doi:10.1007/s10883-016-9310-2 (2016).
- [64] A. Kelleche, N. E. Tatar and A. Khemmoudj, Stability of an axially moving viscoelastic beam, *J. Dyn. Control Syst*, 23 (2017), 283-299.
- [65] H-K. Khalil, Nonlinear systems, In : Prentice-Hall, New Jersey 2.5 (1996).
- [66] A. Khemmoudj and I. Djaidja, General decay for a viscoelastic rotation Euler-Bernoulli beam, *Communication on pure and applied analysis*, vol 19 (2020), pp 3531-3557.
- [67] A. Khemmoudj and Y. Mokhtari, General decay of the solution to a nonlinear viscoelastic modified Von-Karman system with delay, *Discrete and Continuous Dynamical Systems-A*, 2019, 39 (7), 3839-3866.
- [68] J. U. Kim, Exponential decay of the energy of a one-dimensional nonhomogeneous medium, *J. Control Optim.*, 29:368–380, 1991.
- [69] V. Komornik, Exact controllability and stabilization, *RAM : Research in Applied Mathematics*, Masson, Paris, 1994. The multiplier method.
- [70] V. Komornik and P. Loreti, Fourier series in control theory, *Springer Monographs in Mathematics*, Springer-Verlag, New York, 2005.
- [71] J. Lagnese, Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation, *J. Diff. Equations*, 50: 163-182, 1983.
- [72] I. Lasiecka, *Mathematical Control Theory of Coupled PDE's (CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics)*, SIAM, Philadelphia, PA, (2002).

-
- [73] I. Lasiecka and D. Doundykov, Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and a nonlinear source, *Nonlinear Analysis*, Vol. 64, (2006), p.p.1757-1797.
- [74] I. Lasiecka and D. Tataru, Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping, *Differential and Integral Equations*, Vol. 6 (1993), 507–533.
- [75] I. Lasiecka and R. Triggiani, Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0, T, L^2(\Sigma))$ feedback control in the Dirichlet boundary conditions, *J. Diff. Equations*, 66 :1340-390, 1987.
- [76] I. Lasiecka, R. Triggiani, and P. F. Yao, Inverse/Observability Estimates for Second-Ordre Hyperbolic Equations with Variable Coefficients, *J. Math. Anal. Appl.* 235 : no. 1, 13-57, 1999.
- [77] I. Lasiecka and R. Triggiani, Control theory for partial differential equations : continuous and approximation theories, I, volume 74 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, Cambridge, 2000. Abstract parabolic systems.
- [78] I. Lasiecka, X. Wang, Intrinsic decay rate estimates for semilinear abstract second order equations with memory, *in: New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations, in: Springer INdAM*, vol.10, 2014, pp.271–303.
- [79] P. D. Lax, C. S. Moraetz, R. S. Phillips, Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of star-shaped obstacle, *Appl. Math*, vol 16, 477-489, 1963.
- [80] B. Lazzari and R. Nibbi, On the exponential decay of the Euler-Bernoulli beam with boundary energy dissipation, *J. Math. Anal. Appl.* 389 :1078–1085, 2012.
- [81] G. Lebeau and L. Robbiano, Stabilisation de l'équation des ondes par le bord, *Duke Math. J.*, 86(3) :465-491, 1997.
- [82] B. Lekdim and A. Khemmoudj, General decay of energy to a nonlinear viscoelastic two dimensional beam, *Appl. Math. Mech. Engl. Ed*, 39, issue 11 (2018),1661–1678.

-
- [83] S. Li, Y. Wang and Z. Liang, Stabilization of vibrating beam with a tip mass controlled by combined feedback forces, *J. Math. Anal. Appl.*, 2001;256:13-38.
- [84] J. L. Lions, Quelques methodes de resolution des problemes aux limites non lineaires, *Dunod, Paris*, (in French) (1969).
- [85] J. L. Lions, Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués, Tome 1, volume 8 of *Recherches en Mathématiques Appliquées* [Research in Applied Mathematics]. Masson, Paris, 1988.
- [86] J. L. Lions, Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed systems, *SIAM Rev.*, 30(1) :1-68, 1988.
- [87] J. Lions and L. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes et applications, *Dunod, Paris*, volume1. Dunod Paris, 1968.
- [88] K. Liu, Z. Liu and B. Rao, Exponential stability of an abstract nondissipative linear system, *SIAM J. Control Optim.*, 40(1) :149-165, 2001.
- [89] W. J. Liu and E. Zuazua, Decay rates for dissipative wave equations, *Ricerche Mat.*, 48 (1999),61–75.
- [90] J. Mawhin, *Analyse, fondements, techniques, évolution*, De Boeck Université, 1997, 2^e éd, 808 p. (ISBN 978-8041-2489-2).
- [91] S. A. Messaoudi, General decay of the solution energy in a viscoelastic equation with a nonlinear source, *Nonlinear Analysis*, Vol. 69, (2008), pp.2589–2598.
- [92] S. A. Messaoudi, General decay of solutions of a viscoelastic equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, 341, 1457–1467.
- [93] S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa, On convexity for energy decay rates of a viscoelastic equation with boundary feedback, *Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications*, 72 : p. 3602-3611, 2010.

-
- [94] S. A. Messaoudi and N. E. Tatar, Global existence and uniform stability of solutions for a quasilinear viscoelastic problem, *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 30 (6): p. 665-680, 2007.
- [95] S. A. Messaoudi and N. E. Tatar, Exponential and polynomial decay for a quasilinear viscoelastic equation, *Nonlinear Analysis-Theory Methods and Applications*, 68 (4): p. 785-793, 2008.
- [96] J. Mikusiński, *The Bochner Integral*, Springer Basel AG, 1978.
- [97] L. Miller, Controllability cost of conservative systems : resolvent condition and transmutation, *J. Funct. Anal.*, 218(2) :425-444, 2005.
- [98] C. S. Moraetz, Exponential decay of solutions of the wave equation, *Comm. Pure. Appl. Math*, vol 19:539-444, 1966.
- [99] Ö. Morgül, On a perturbed kernel in viscoelasticity. Dynamic boundary control of a Euler-Bernoulli beam, *IEEE Trans Autom Control*, 1992;37:639-642.
- [100] J. E. Munoz Rivera and F. P. Quispe Gomez, Existence and decay in non linear viscoelasticity, *Boll Unione Mat Ital.*, 2003;6-B:1-37.
- [101] M. I. Mustafa and S. A. Messaoudi, General stability result for viscoelastic wave equations, *J. Math. Phys*, **53**(5), 053702 (2012)
- [102] M. I. Mustafa, Optimal decay rates for the viscoelastic wave equation, *Math Meth Appl Sci.*, 2017;1–13. DOI: 10.1002/mma.4604.
- [103] M. I. Mustapha, General decay result for nonlinear viscoelastic equation, *J. Math. Anal. Appl.*, 457 (2018) 134–152
- [104] M. I. Mustapha, Laminated Timoshenko beams with viscoelastic damping, *J. Math. Anal. Appl.*, 466 (2018) 619–641
- [105] S. Nicaise, Stability and controllability of an abstract evolution equation of hyperbolic type and concrete applications, *Rend. Mat. Appl.* (7), 23(1) :83-116, 2003.

-
- [106] S. Nicaise and C. Pignotti, *Stability and Instability Results of the Wave Equation with a Delay Term in the Boundary or Internal Feedbacks*, SIAM Journal on Control and Optimization, 45 (2006), 1561-1585.
- [107] T. D. Nguyen and O. Egeland, Tracking and observer design for a motorized Euler-Bernoulli Beam, *In: Proc. IEEE International Conference on Decision and Control*, 2003, Maui, Hawaii. 3325-3330.
- [108] P. Y. Park, K. H. Kang and J. A. Kim, Existence and exponential stability for a Euler-Bernoulli beam equation with memory and boundary output feedback control term, *Acta Appl Math*, 2008;104:287-301.
- [109] P. Y. Park and J. A. Kim, Existence and uniform decay for Euler-Bernoulli beam equation with memory term, *Math. Meth. Appl. Sci*, 2004;27:1629-1640.
- [110] J. Y. Park and S. H. Park, General Decay for Quasilinear Viscoelastic Equations with Nonlinear Weak Damping, *Journal of Mathematical Physics*, 50 (2009), Article ID: 083505.
- [111] V. Pata, Stability and exponential stability in linear viscoelasticity, *Milan Journal of Mathematics*, 77 (1): p. 333-360, 2009.
- [112] J. Prüss, *Evolutionary Integral Equations and Applications*, Monogr. Math., vol. 87, Birkhäuser Verlag, Basel, 1993.
- [113] K. Ramdani, T. Takahashi, G. Tenenbaum and M. Tucsnak, A spectral approach for the exact observability of infinite-dimensional systems with skew-adjoint generator, *J. Funct. Anal*, 226(1) :193-229, 2005.
- [114] W. Rudin, *Real and complex analysis*, third edition, McGraw-Hill, New York. (1987).
- [115] D. L. Russel, Exact boundary value controllability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in *differential games and control theory*, Raxin. Liu and Sternberg, Eds, Maeruel Dekker Inc, New York 1974.

- [116] D. L. Russell, Controllability and stabilizability theory for linear partial differential equations : recent progress and open questions, *SIAM Rev*, 20(4) :639-739, 1978.
- [117] L. Seghour, A. Khemmoudj and N. E. Tatar, Control of a riser through the dynamic of the vessel, *Appl. Anal.*, 95(9):1957–1973 (2016).
- [118] N-e. Tatar, Arbitrary decays in linear viscoelasticity, *J. Math. Phys.*, 2011;52:013502-1–013502-12.
- [119] C. Wilcox, The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary, *Amer. Math. Soc. Not. Abstract* 564-20, Voc 6, 1959.
- [120] E. Zuazua, Some problems and results on the controllability of partial differential equations. In *European Congress of Mathematics, Vol. II (Budapest, 1996)*, volume 169 of *Progr. Math.*, pages 276-311. Birkhäuser, Basel, 1998.
- [121] E. Zuazua, Controllability of partial differential equations and its semi-discrete approximations, *Discrete Contin. Dyn. Syst*, 8(2) :469-513, 2002, *Current developments in partial differential equations (Temuco, 1999)*.