N° d'ordre : 109/2021-C/MT

République algérienne démocratique et populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur

En : Mathématiques

Spécialité : **Analyse : Contrôle optimal des EDP**

Par : **IHADDADENE Lila**

THÈME

Décroissance générale de l'énergie pour un problème de Wentzell avec dissipations et retards non linéaires

Soutenue publiquement, le 27/09/2021, devant le jury composé de :

M.	**M.**	**MEDJDEN**	Professeur à l'USTHB	Président
M.	**A.**	**KHEMMOUDJ**	Professeur à l'USTHB/FMT	Directeur de thèse
M.	**A.**	**CHOUTRI**	Professeur à l'ENS-Kouba	Examinateur
M.	**M.**	**BOUSSELSSAL**	Professeur à l'ENS-Kouba	Examinateur
M.	**A.**	**TOUZALINE**	Professeur à l'USTHB/FMT	Examinateur
M.	**A.**	**AINOUZ**	MCB à l'USTHB/FMT	Invité

Remerciements

Je tiens en premier lieu à remercier chaleureusement Monsieur **A. Khemmoudj**, mon directeur de thèse, Professeur à l'USTHB, qui m'a proposé ce sujet de recherche, m'a encadré tout au long de cette thèse et qui m'a transmis tout son brillant savoir. Je le remercie pour sa grande gentillesse, sa disponibilité permanente, pour ses précieux encouragements et multiples conseils qu'il m'a donné, c'est grâce à lui que j'ai élaboré ce travail. Pour tout cela, je ne le remercierai jamais assez.

Je remercie Professeur **M. Medjden**, pour l'honneur qu'il me fait en présidant le jury de cette thèse. Je remercie également, Professeur **M. Bousselsal**, Professeur **A. Choutri** et Professeur **A. Touzaline**, d'avoir accepté d'examiner ce travail et faire partie du jury, aussi je remercie Monsieur **A. Ainouz**, (Maître de Conférence classe B) qui me fait l'honneur d'être invité parmis les membres du jury. Je les en remercie sincèrement.

J'ai une pensée reconnaissante pour tous mes enseignants de la faculté de mathématiques, qui m'ont formé tout au long de mes études.

Mes remerciements vont aussi à tous mes amis et doctorants, avec qui on a partagé nos connaissances et de bons souvenirs.

Je tiens à remercier ma famille : en particulier mon père et ma mère, qui m'ont toujours soutenue et encouragée. C'est grâce à eux que j'ai pu entreprendre mes études dont cette thèse est l'aboutissement. Merci à mes soeurs et mon petit frère, mes très chers grands parents, mes tantes, mes oncles et mes cousins, pour leur soutien et encouragement.

Enfin, je remercie toute personne ayant aidé de près ou de loin à la réalisation de cette thèse.

Ihaddadene Lila

Résumé

L'objectif principal de cette thèse est d'étudier l'existence, l'unicité d'une solution faible globale et le comportement asymptotique de cette solution d'une équation d'ondes dans un ouvert borné Ω de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, avec un bord régulier $\Gamma = \partial\Omega$, divisé en deux sous-ensembles ouverts disjoints Γ_0 et Γ_1.

Sur Γ_0, on considère une condition de Dirichlet homogène et sur Γ_1, on considère une condition aux limites de type Wentzell dynamique. Deux dissipations et deux retards non linéaires sont localisés à l'intérieur de Ω et sur la partie Γ_1 de sa frontière.

Dans un premier temps, on démontre l'existence et l'unicité d'une solution faible, globale du problème, en utilisant la méthode standard de Faedo-Galerkin. Ensuite, on analyse l'influence des amortisseurs et termes de retard sur le taux de décroissance de l'énergie associée au système. Pour cela, on utilise la méthode de l'énergie perturbée en introduisant une fonctionnelle de Lyapunov convenable, sous des hypothèses appropriées sur les fonctions des amortisseurs et termes de retard et en exploitant certaines propriétés des fonctions convexes, on obtient un taux de décroissance de type général, à partir duquel les décroissances exponentielle et polynomiale ne sont que des cas particuliers. Enfin pour illustrer cette décroissance, on termine par un exemple d'application.

Mots-clés : Equation d'ondes, condition de Wentzell dynamique, amortisseurs non linéaires, termes de retard non linéaires, fonction de Lyapunov, convexité, décroissance générale.

Abstract

The main objective of this thesis is to study the existence and the uniqueness of a global weak solution and the asymptotic behavior of a wave equation in a bounded open Ω of $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, with a smooth boundary $\Gamma = \partial\Omega$, divided into two open disjoint subsets Γ_0 and Γ_1. On Γ_0, we consider a homogeneous Dirichlet condition and on Γ_1, we consider a dynamic Wentzell type boundary condition. Two dissipations and non linears delay terms are localised in Ω and on Γ_1.

In a first step, we prove the existence and uniqueness of a weak, global solution to the problem, using the standard Faedo-Galerkin method. Next, we analyze the influence of the dampings and delay terms on the rate of energy decay associated with the system. For this, we use the disturbed energy method by introducing a suitable Lyapunov functional, under appropriate assumptions on the functions of the dampings and delay terms and by exploiting certain properties of the convex functions, we have obtained a general decay rate, from which exponential and polynomial decays are only special cases. Finally, to illustrate this decay, we end with an example of application.

Keywords : Wave equation, dynamic Wentzell condition, nonlinear dampings, nonlinear delay terms, Lyapunov function, convexity, general decay.

Notations

Dans tout ce qui suit, on utilisera les notations suivantes :

Ω : un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière règulière $\Gamma = \partial\Omega$.

Γ_0, Γ_1 : forment une partition de la frontière Γ, avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\emptyset = \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1}$.

$\nu = (\nu_1, \nu_2, ..., \nu_n)$: le vecteur unitaire normal à Γ, orienté vers l'extérieur de Ω.

$\nabla u = \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)$: le gradient de la fonction u.

$\triangle u = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i^2}$: le Laplacien de la fonction u.

$\partial_\nu u$: est la dérivée normale de la fonction u.

v : est la fonction u sur la frontière $\Gamma\,(u = v, \quad \text{sur } \Gamma)$.

$\nabla_T v = \left(\frac{\partial_T v}{\partial x_1}, \frac{\partial_T v}{\partial x_2}, ..., \frac{\partial_T v}{\partial x_n}\right)$: le gradient tangentiel de la fonction v.

$div_T \nabla_T v$: est la divergence du champ vectoriel $\nabla_T v$.

$\Delta_T v$: l'opérateur Laplace Beltrami avec $\Delta_T v = div_T \nabla_T v$ sur Γ_1.

$\mathcal{C}^k(\Omega)$: espaces des fonctions k fois continûments différentiables sur Ω, $(k \in \mathbb{N})$.

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$: espaces des fonctions indéfiniment dérivables à support compact.

$L^p(\Omega)$: espace de Lebesgue $0 \leq p \leq \infty$.

$\mathcal{D}'(\Omega)$: espace des distributions.

$W^{m,p}(\Omega)$, $H^m(\Omega)$: espaces de Sobolev, $0 \leq p \leq \infty$; $m \in \mathbb{N}$; $(H^m(\Omega) := W^{m,2}(\Omega))$.

$W_0^{m,p}(\Omega)$, $H_0^m(\Omega)$: L'adhérance de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$, respectivement dans $H^m(\Omega)$.

$H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$, $H^1(\Gamma_1)$: sont des espaces de Sobolev.

$(.,.)$, $(.,.)_{\Gamma_1}$: sont les produits scalaires usuels des espaces $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_1)$, respectivement.

$\|.\|$, $\|.\|_{\Gamma_1}$: désignent les normes usuelles des espaces $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_1)$, respectivement.

$\to$: la convergence forte.

$\rightharpoonup$: la convergence faible.

$\overset{*}{\rightharpoonup}$: la convergence faible étoile.

$\hookrightarrow$: injection continue.

$\hookrightarrow_c$: injection compacte.

$\Leftrightarrow$: équivalence.

$p.p$: presque partout.

$\forall$: pour tout.

Table des Matières

Introduction générale

Le fonctionnement des structures mécaniques crée un phénomène de vibrations. Généralement, ces vibrations sont indésirables, car elles ont une mauvaise influence sur le fonctionnement et la durée de vie des structures. Elles peuvent engendrer des fractures, de mauvais fonctionnements, une usure ou même l'endommagement des structures. De plus, elles peuvent constituer un danger pour l'utilisateur. Les excitations dynamiques causant ces vibrations sont nombreuses. Elles proviennent, soit de l'environnement extérieur (sol, atmosphère, eau, contacts ou chocs avec d'autres structures), soit de dispositifs internes mobiles (machines intégrées à la structure...). La suppression ou au moins la réduction de ces vibrations est un problème majeur dans les domaines de l'ingénierie, notamment la robotique. Au cours des dernières années, la stabilisation des équations aux dérivées partielles, modélisant ces phénomènes, a attiré l'attention de nombreux auteurs et est devenue un domaine de recherche très actif.

Un problème d'équations aux dérivées partielles consiste à se donner, en plus des équations proprement dites, soit des conditions initiales, soit des conditions aux limites, soit les deux, à voir si une solution existe, si elle est unique, si elle dépend régulièrement des données et à chercher des algorithmes de calculs. On parle alors, suivant les différentes situations, de problème de Cauchy bien posé ou de problème bien posé au sens de Hadamard.

Dans cette thèse, on étudie la stabilisation de l'équation d'ondes non linéaire avec une condition aux limites de type Wentzell dynamique (WBC en abrégé), soumise à un retard non linéaire dans un feedback (amortisseur) non linéaire. Elle décrit les vibrations dans un corps flexible avec une fine couche limite de haute rigidité sur sa frontière. On cherche à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie, notée par $E(t)$, étudier sa limite afin de déterminer si cette dernière est nulle ou pas et si cette limite est nulle, donner une estimation de la vitesse de sa décroissance vers zéro. Il existe plusieurs types de stabilité, le premier type consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, c'est-à-dire :

$$E(t) \to 0 \quad \text{lorsque} \;\; t \to +\infty,$$

c'est ce qu'on appelle *la stabilité asymptotique forte.* Cette notion a été utilisée par : C. M. Dafermos [21], F. Conrad et M. Pierre [20], A. Haraux [32]. Souvent, le calcul direct de la limite de $E(t)$ lorsque t tend vers l'infini est très difficile. Une autre méthode pratique, est de majorer $E(t)$ par une fonction $\phi : [0, +\infty[\longrightarrow [0, +\infty[$, c'est-à-dire :

$$E(t) \leq \phi(t) \quad \text{pour tout} \;\; t \geq 0, \tag{0.1}$$

telle que $\lim\limits_{t\to+\infty} \phi(t) = 0$. C'est ce qu'on appelle *la stabilité uniforme.* Différents types de stabilité sont envisagés selon la fonction $\phi(t)$. Cette notion a été utilisée par V. Komornik [44], J. E. Lagnese [48], M. Tucsnak [75].

On cite trois types de stabilité, ordonnés de la plus forte jusqu'à la plus faible : *la stabilité de type exponentielle*, *la stabilité de type polynomiale* et *la stabilité de type logarithmique.*

Guesmia [30] a étudié ces types de stabilité et à montrer quelques inégalités intégrales utiles pour l'application à la stabilisation des systèmes distribués non dissipatifs.

i) Stabilité de type exponentielle : C'est le cas pour $\phi(t) = A \exp(-\alpha t)$, où A et α sont des constantes positives. La formule (0.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$E(t) \leq A \exp(-\alpha t) \quad \text{pour tout} \;\; t \geq 0,$$

que l'on peut démontrer par la méthode directe de Lyapunov, dite de l'énergie, qui est basée sur la recherche d'une fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$, qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\lambda_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq \lambda_2 E(t) \quad \text{pour tout} \;\; t \geq 0, \tag{0.2}$$

et

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\delta E(t) \quad \text{pour tout} \;\; t \geq 0, \tag{0.3}$$

où λ_1, λ_2 et δ sont des constantes positives.

ii) Stabilité de type polynomiale : C'est pour $\phi(t) = \frac{B}{(1+t)^\beta}$, la formule (0.1) s'écrit sous la forme suivante :

$$E(t) \leq \frac{B}{(1+t)^\beta} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0, \tag{0.4}$$

où B et β sont des constantes positives. C'est une stabilité moins rapide que celle du type exponentielle. La formule (0.4) est obtenue en considérant (0.2) et la formule suivante :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\delta E^p(t) \quad \text{pour tout } t \geq 0,$$

où $\delta > 0$ et $p > 1$.

iii) Stabilité de type logarithmique : C'est lorsque $\phi(t) = \frac{C}{(\log(2+t))^\gamma}$, la formule (0.1) devient

$$E(t) \leq \frac{C}{(\log(2+t))^\gamma} \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0, \tag{0.5}$$

où C et $\gamma > 0$. C'est une stabilité moins rapide que celle du type polynomiale. La formule (0.5) est obtenue par la considération de (0.3) et la formule suivante :

$$\mathcal{L}'(t) \leq -\delta E^{p+1}(t) \exp\left(-\frac{\omega}{E^p(t)}\right) \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0,$$

où δ, $\omega > 0$ et $p \geq 1$.

Dans notre travail, on considère des dissipations de type assez général dans lesquelles ces trois types de stabilité, ne sont que des cas particuliers.

Il est intéressant et important d'explorer les comportements asymptotiques quantitatifs des solutions pour une équation d'ondes avec la condition aux limites de Wentzell, sous réserve d'amortissements non linéaires et termes de retard.

On mentionne ici qu'à notre connaissance, il n'y a pas de résultats d'existence et de décroissance générale concernant l'équation d'ondes avec des conditions aux limites de type Wentzell dynamiques, en présence de termes de retard non linéaires.

0.1 Notes historiques

On rappelle d'une manière brève quelques phases qu'a connu la notion de stabilisation sans vraiment rentrer dans les détails, on prétend que cet aperçu historique est exhaustif.

0.1.1 Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation d'ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox [78] a réussi à montrer que l'énergie locale décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Avec des hypothèses plus générales que celle de C. Wilcox, en 1961, C. S. Morawetz [63] a montré que l'énergie locale décroît comme l'inverse du temps. En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips [53] ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation d'ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé décroît de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

0.1.2 Les travaux de G. Chen et J. Lagnese

En se basant sur les travaux de C. S. Morawetz [63] sur l'équation d'ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell [72] a conjecturé, en 1974 un phénomène analogue pour l'équation d'ondes dans un domaine borné. Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen [17]. Ensuite, en adaptant la technique des multiplicateurs utilisée par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. R. Alston, dans les domaines extérieurs, G. Chen [16] a amélioré les résultats obtenus dans [17]. (Voir aussi Lagnese [47]).

0.1.3 Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, en utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani [51] ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation d'ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord.

0.1.4 Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition aux bords de G. Chen en la remplaçant par une autre condition, ce qui a permis, en principe de généraliser les résultats de Chen et Lagnese au domaine à bords réguliers et connexes, mais au prix de modifier la condition aux limites.

0.1.5 Les travaux de J. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables. Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle et de la méthode de pénalisation. Mais il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni l'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

0.2 Les problèmes de Wentzell

Les problèmes de Wentzell sont caractérisés par la présence d'opérateurs différentiels de même ordre que l'opérateur principal. Ces problèmes interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes :

- Mécaniques comme l'élasticité.
- Physiques comme les processus de diffusion ou la propagation des ondes.

Les conditions de Wentzell sont obtenues par des méthodes asymptotiques à partir de problèmes de transmission, voir [54]. La condition

$$\partial_\nu u - \Delta_T u = g \qquad \text{sur} \;\; \Gamma$$

pour l'équation

$$-\Delta u + u = f \qquad \text{dans} \;\; \Omega$$

a été introduite par Wentzell (Ventcel) pour des processus de diffusion [77]. Elle fait intervenir des dérivées tangentielles d'ordre deux. Elle modélise l'échange thermique du corps Ω avec le milieu ambiant en présence d'une fine pellicule, très bonne conductrice, sur la surface du corps.

La question de la stabilité des solutions des problèmes de Wentzell a beaucoup attiré l'attention, au cours des trois dernières décennies. A cet effet, voir par exemple, les travaux suivants [13, 14, 15, 18, 19, 33, 40, 42, 43, 58, 65, 76, 79, 80] et les références qui figurent pour les travaux associés.

Le problème de Wentzell a été étudié par Khemmoudj et Medjden [42]. Dans cet article, les auteurs ont prouvé la stabilité exponentielle en considérant un feedback linéaire localisé $a(x)u_t$, agissant dans la première équation, en suivant les idées introduites par Zuazua [85] combinées avec de nouveaux outils.

Les résultats précédents mentionnés ci-dessus, ont été développés par Cavalcanti, Khemmoudj et Medjden [13], en considérant un problème de Wentzell avec des coefficients variables

$$\begin{cases} u_{tt} + \mathcal{A}u + a(x)g_1(u_t) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + \mathcal{A}_T v + g_2(v_t) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u = v, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), & \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1), & \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma, \end{cases}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$, $a(x) \geq a_0 > 0$ $p.p$ dans ω, $\omega \subset \Omega$ est un sous-ensemble ouvert non vide de Ω, a_0 est une constante,

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = -div_0(A(x).\nabla u), \\ \mathcal{A}_T u = -div_{0T}(A_T(x).\nabla u), \quad [x_1, ..., x_n], \end{cases}$$

$A = (a_{i,j})$ est une fonction matricielle, $a_{i,j} = a_{j,i}$ sont des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = \sum_{i,j=1}^n a_{i,j} \frac{\partial u}{\partial x_j} \nu_i$, $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)^T$ est la normale unitaire de Γ, pointant vers l'extérieur de Ω, et $\nu_{\mathcal{A}} = A.\nu$, ils ont supposé que les opérateurs différentiels du second ordre $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}_T$ satisfont certaines conditions d'ellipticité uniformes, et ils ont obtenu une stabilisation uniforme en utilisant des méthodes de géométrie riemannienne. Cela a été fait en combinant de nouvelles estimations d'énergie avec des méthodes géométriques riemanniennes dues à Lasiecka, Triggianai et Yao; voir, par exemple [82] et [52].

Cavalcanti et al. [11] ont étudié la stabilisation de l'équation d'ondes avec des conditions aux limites de type Cauchy-Ventcel :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,x) = u_0, \ u_t(0,x) = u_1, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$ avec une frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$. Soient Γ_0 et Γ_1 des sous ensembles fermés, non vides et disjoints de Γ, tels que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$. Ce modèle décrit les vibrations d'un corps avec une couche mince d'une grande rigidité sur sa frontière. Un tel système a été d'abord étudié par Lemrabet [55], puis par Lemrabet et Teniou [56].

D'autre part, Cavalcanti, Lasiecka et Toundykov [15] ont étudié

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)g(u_t) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T u + u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,x) = u_0, \ u_t(0,x) = u_1, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où Ω désigne un domaine borné de classe $\mathcal{C}^2$ dans $\mathbb{R}^3$, avec une frontière Γ; Δ_T est l'opérateur Laplace-Beltrami sur Γ. La fonction de feedback g est monotone croissante continue, $g(0) = 0$ et $a(x) \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction régularisante non négative restreignant l'effet de g à un sous-ensemble du domaine et les auteurs ont trouvé un problème dans un sous-ensemble de la frontière statique de Wentzell, parce que la condition uniforme de Lopatinsky n'est pas satisfaite par un tel système.

Dans le cas de la frontière de Wentzell, la situation est plus difficile, puisque l'énergie "naturelle" inclut la norme H^1 de Sobolev de la solution sur la frontière pour surmonter la présence de l'opérateur de la frontière de Neumann, mais aussi pour établir une estimation de coercivité de type inverse sur la norme de trace H^1 de la solution.

Dans [58], Li et Xiao ont étudié l'équation d'ondes linéaire avec des conditions aux limites Wentzell de type dynamique, où une seule force de retour de vitesse agit sur la limite de Wentzell, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u = 0, & \text{dans} \quad \Omega, \quad t \geq 0, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0, \quad t \geq 0, \\ u_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - a\Delta_T u + u_t = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1, \quad t \geq 0, \\ u(0,x) = u_0, \quad u_t(0,x) = u_1, & \text{dans} \quad \Omega. \end{cases}$$

En utilisant la théorie des semi-groupes fortement continus d'opérateurs linéaires, ils ont prouvé que les énergies des solutions sont fortement stables.

Dans [33], Heminna a montré que le feedback naturel n'est pas suffisant pour garantir la décroissance exponentielle de l'énergie $E(t)$ dans le cas de l'équation d'ondes aux conditions de Wentzell.

Plus tard, Kasri et Heminna [39] ont considéré un système couplé ondes/Maxwell avec des conditions de Wentzell :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \xi curlE = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ \epsilon E_t - curlH - \xi curlu_t = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ \mu H_t + curlE = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ div(\epsilon E) = div(\mu H) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ H \times \nu + \xi u_t \times \nu + (E \times \nu) \times \nu = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times (0, +\infty), \\ \partial_\nu u - \Delta_T u + au + u_t = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times (0, +\infty), \\ u(0) = u_0, \ u_t(0) = u_1, \ E(0) = E_0, \ H(0) = H_0, & \text{dans} \quad \Omega, \end{cases}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^3$ avec une frontière $\Gamma = \partial\Omega$ de classe $\mathcal{C}^2$. u, E et $H \in \mathbb{R}^3$, représentent respectivement, le vecteur de déplacement, le champ éléctrique et le champ magnétique. Il ont prouvé que l'énergie du système décroît exponentiellement, si Ω est strictement étoilé par rapport à l'origine. Leur méthode de preuve est basée sur la validité de certaines estimations de stabilité, qui est obtenue en utilisant la méthode multiplicateur, et en utilisant les idées de Eller, Lagnese et Nicaise [27].

Li, Liang et Xiao [57] ont considéré le problème suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \gamma(t)a(x)g_0(u_t) + f(u) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ u_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T u + g_1(u_t) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, +\infty). \end{cases}$$

Ici, Ω est un domaine borné dans $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, avec une frontière régulière Γ, divisée en deux sous ensembles fermés et disjoints Γ_0 et Γ_1, ν est le vecteur normal unitaire, exterieur à Γ, $f(u)$ représente un terme de force non linéaire et

$$a(x) \in L^\infty(\Omega), \quad \gamma(t) \in \mathcal{W}^{1,\infty}_{loc}\left(\mathbb{R}^+\right)$$

sont des coefficients non négatifs du terme d'amortissement $g_0(u_t)$.

Les auteurs ont obtenu des taux de décroissance uniformes de l'énergie des solutions du problème en termes d'exposants, associés à l'amortissement variant dans le temps. Ils ont montré que la dynamique du comportement des solutions est stable sans aucune bifurcation ni chaos et pour illustrer leurs résultats théoriques, ils ont proposé quelques simulations numériques. En outre, dans [83], Zhang et Guo ont considéré l'équation d'onde semi-linéaire avec un amortissement interne local et des conditions aux limites de Wentzell dynamiques avec un terme mémoire :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + f(u_t) + \varphi_1(u) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, \infty), \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0, \infty), \\ u_{tt} + \partial_\nu u - c^2 \Delta_T u + u_t + \int_0^t g(t-s)\Delta_T u(s)ds + \varphi_2(u) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0, \infty). \end{cases}$$

L'estimation de stabilisation est plus difficile à obtenir car l'énergie physique du système contient non seulement la norme H^1 de Sobolev de la solution mais dépend également du terme mémoire sur la frontière. Ils ont obtenu une stabilisation exponentielle, en construisant de nouvelles fonctionnelles de Lyapunov et en utilisant des méthodes de multiplicateur.

Tout récemment, Khemmoudj et Aries [40] ont aussi étudié la décroissance uniforme de l'équation d'ondes avec des conditions aux limites de Wentzell dynamiques avec un terme mémoire localisé interne et un amortisseur de frottement sur une partie du bord :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \int_0^t g(t-s)div[a(x)\nabla u(s)]ds = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0,+\infty)\,, \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + v_t = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,+\infty)\,, \\ u = v, & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,+\infty)\,, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,+\infty)\,, \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0)\,, & \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1)\,, & \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma, \end{cases}$$

où $a : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction non-négative et $a \in \mathcal{C}^1(\Omega)$ telle que

$$a \in L^\infty(\Omega)\,, \quad a(x) \geq a_0 > 0, \quad p.p \text{ dans } \omega,$$

$\omega \subset \Omega$ est un sous-ensemble ouvert non vide de Ω, a_0 est une constante et

$$|\nabla a(x)|^2 \leq \alpha_1^2 |a(x)|\,, \quad \forall x \in \omega,$$

pour une constante positive α_1. Ils ont montré qu'un terme mémoire localisé agissant dans la première équation combiné avec une dissipation frictionnelle agissant dans la deuxième équation sont suffisamment fort, via le processus de transmission ($u|_\Gamma = v$), pour assurer la stabilité exponentielle de l'ensemble du système, en construisant une fonctonnelle de Lyapunov convenable.

0.3 Les problèmes avec des effets de retard

Le retard est la propriété d'un système physique par lequel la réponse à une force appliquée est retardée dans son effet, (voir Shinskey [73]). Chaque fois que du matériel, des informations ou de l'énergie sont physiquement transmis d'un endroit à un autre, il y a un retard présent, un retard dans la loi de feedback modélisant le décalage mécanique au temps. Des retards surviennent si souvent dans de nombreux problèmes physiques, phénomènes chimiques, biologiques et économiques, (voir Hadeler [31]).

Dans de nombreux cas, des retards arbitrairement petits dans le feedback peuvent déstabiliser le système (voir Nicaise et Pignotti [66], Nicaise et Valein [68], Nicaise et Pignotti [67], Xu et al. [81]). Dans Nicaise et Pignotti [66], les auteurs ont examiné le problème suivant dans la situation linéaire :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + a(x)[\mu_1 u_t + \mu_2 u_t(t-\tau)] = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_D \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_N \times (0, +\infty), \\ u(x,0) = u_0(x), \ u_t(x,0) = u_1(x), & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_t(x, t-\tau) = g_0(x, t-\tau), & \text{dans} \quad \Omega \times (0, \tau), \end{cases} \tag{0.6}$$

où $a \in L^\infty(\Omega)$ est une fonction telle que

$$a(x) \geq 0 \quad p.p \text{ dans } \Omega,$$

et

$$a(x) > a_0 > 0 \quad p.p \text{ dans } \omega,$$

où $\omega \subset \Omega$ est un voisinage ouvert de Γ_N. Ils ont déterminé des relations convenables entre μ_1 et μ_2, pour lesquelles la stabilité ou alternativement l'instabilité a lieu. Plus précisément, ils ont montré que l'énergie est exponentiellement stable si $\mu_2 < \mu_1$ et ils ont trouvé une suite de retard pour laquelle la solution correspondante de (0.6) sera instable si $\mu_2 \geq \mu_1$. La principale approche utilisée est une inégalité d'observabilité obtenue avec une estimation de Carleman. Les mêmes résultats ont été obtenus si à la fois l'amortissement et le retard agissaient dans la frontière du domaine.

On rappelle également le résultat de Xu et al. [81], où les auteurs ont prouvé le même résultat que dans Nicaise et Pignotti [66] en dimension 1, en adoptant l'approche d'analyse spectrale.

Datko et al. [23] ont montré qu'un petit retard dans un contrôle sur le bord pouvait transformer un système hyperbolique bien stable en un système perturbé et donc, le retard devient une source d'instabilité. Cependant, il peut parfois également améliorer les performances des systèmes (voir Suh et Bien [74]).

Très récemment, il y a eu aussi beaucoup de travaux concernant la stabilité de l'équation d'ondes avec des effets de retard linéaires, voir Benaissa et al. [7], Remil et Hakem [70], Feng [28], Feng et Soufiyane [29], Kafini et Messaoudi [35, 36, 37], Park [69], Barros et al. [5].

Benaissa et Louhibi [9] ont étendu le résultat de Nicaise et Pignotti [66] au cas non linéaire. Ils ont considéré l'équation d'ondes dans un domaine borné Ω avec un terme de retard dans un feedback interne :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 g(u_t) + \mu_2 g(u_t(t-\tau)) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times \mathbb{R}^+, \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma \times \mathbb{R}^+, \\ u(0,x) = u_0,\ u_t(0,x) = u_1, & \text{dans} \quad \Omega, \\ u_t(x,t-\tau) = f_0(x,t-\tau), & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\tau)\,, \end{cases}$$

et ils ont prouvé l'existence globale de ses solutions dans des espaces de Sobolev, par moyen de la méthode de l'énergie combinée avec la procédure de Faedo-Galerkin. De plus, les auteurs ont étudié le comportement asymptotique des solutions, en utilisant la méthode multiplicateur et des inégalités intégrales générales à poids.

Un peu plus tard, Benaissa et al. [8] ont considéré l'équation suivante :

$$u_{tt} - \Delta u + \int_0^t h\,(t-s)\,\Delta u\,(s)\,ds + \mu_1 g_1\,(u_t\,(x,t)) + \mu_2 g_2\,(u_t\,(x,t-\tau)) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times]0,+\infty[\,,$$

où ils ont utilisé la méthode de Faedo-Galerkin pour prouver l'existence globale de la solution faible et ils ont obtenu une décroissance générale en introduisant une fonctionnelle de Lyapunov convenable, sous certaines hypothèses sur la fonction de relaxation h et les constantes μ_1 et μ_2.

D'autre part, Benaissa et Bahlil [6] ont considéré le système de Timoshenko avec un terme de retard dans la friction interne non linéaire :

$$\begin{cases} \rho_1 \varphi_{tt} - k\,(\varphi_x + \psi)_x = 0, \quad \text{dans }]0,1[\, \times \mathbb{R}^+, \\ \rho_2 \psi_{tt} - b\psi_{xx} + k\,(\varphi_x + \psi)\,\psi_{xx} \\ +\mu_1 g_1\,(\psi_t) + \mu_2 g_2\,(\psi_t\,(t-\tau)) = 0, \quad \text{dans }]0,1[\, \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{0.7}$$

où g_1 et g_2 sont des fonctions non-linéaires. Ils ont prouvé un résultat d'existence globale en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin. De plus, ils ont établit une estimation générale du taux de décroissance de l'énergie en introduisant une fonctionnelle de Lyapunov appropriée. Très récemment, Bahlil [4] a obtenu ces résultats en ajoutant au système (0.7), un terme mémoire et en variant μ_1 et μ_2 par rapport au temps t. En outre, la poutre de Bresse avec des effets de retard non linéaires a été considérée récemment par Khemmoudj et Khadraoui [41], où la poutre de Timoshenko n'est qu'un cas particulier.

En restant dans les problèmes à effets de retard non linéaires, il y a les travaux de Mezouar et al. [62], concernant les plaques et Liu et Zhung [60] pour les ponts suspendus.

0.4 But du travail

Dans cette thèse, on considère un système couplé ondes/Wentzell, en présence de deux amortisseurs de friction non linéaires et de deux termes de retard non linéaires, localisés à l'intérieur de Ω et sur la partie Γ_1 de sa frontière :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 k_1(u_t(t-\tau)) = 0, & \text{dans } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u = v, & \text{sur } \ \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \ \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + \mu_1' g_2(v_t) + \mu_2' k_2(v_t(t-\tau)) = 0, & \text{sur } \ \Gamma_1 \times (0,\infty). \end{cases}$$

Munis des conditions initiales :

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \qquad \text{dans } \ \Omega \times \Gamma,$$

$$(u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1), \qquad \text{dans } \ \Omega \times \Gamma,$$

et les termes de retard :

$$u_t(x, t-\tau) = f_{0_1}(x, t-\tau), \qquad \text{dans } \ \Omega \times (0,\tau),$$

$$v_t(x, t-\tau) = f_{0_2}(x, t-\tau), \qquad \text{sur } \ \Gamma_1 \times (0,\tau).$$

Pour une explication bien détaillée des termes qui apparaissent dans les équations précédentes, voir la Section 2.1 du Chapitre 2.

Notre but dans cette thèse, est d'étudier l'existence et l'unicité d'une solution et de donner une estimation de la décroissance de cette solution à notre problème. On analyse l'influence des termes de retards dans les amortissements frictionnels, sur le taux de décroissance des solutions, en utilisant la méthode de l'énergie, dans laquelle on introduit une fonctionnelle de Lyapunov convenable et en exploitant quelques propriétés des fonctions convexes, sous certaines hypothèses sur les constantes μ_1, μ_2, μ_1' et μ_2', on obtient une décroissance de l'énergie de type général.

0.5 Organisation de la thèse

Cette thèse se compose d'une introduction générale, de quatres chapitres, d'une conclusion et des perspectives :

- **Chapitre 0 :** on discute sur quelques travaux antérieurs sur les problèmes de Wentzell et à effets de retard, en citant certaines littératures liées à notre problème.

- **Chapitre 1 :** est consacré aux définitions et aux rappels de quelques notions de bases d'analyse fonctionnelle.

- **Chapitre 2** : on cite les hypothèses sur notre problème, puis on présente un résultat d'existence et d'unicité d'une solution faible globale du système considéré et on le démontre en utilisant la méthode standard de Faedo-Galerkin.

- **Chapitre 3 :** on étudie le comportement asymptotique de la solution. En première étape, on définit une fonctionnelle de Lyapunov et on vérifie son équivalence avec la fonctionnelle de l'énergie. En deuxième étape, on estime la dérivée de la fonctionnelle de Lyapunov.

On termine cette thèse, en donnant une conclusion générale et en présentant quelques perspectives sur la stabilisation de l'équation d'ondes avec des conditions aux limites de type Wentzell dynamiques, munies de retards.

0.6 Méthodologie

Dans cette thèse, on utilise les deux méthodes suivantes :

Méthode de Faedo-Galerkin :

Il s'agit d'une méthode de compacité. On écrit le problème considéré sous une forme variationnelle. On choisit des espaces fonctionnels dans lesquels on introduit un problème approché en dimension finie, en utilisant les théorèmes d'existence d'équations différentielles ordinaires, on démontre l'existence d'une solution en dimension finie. Puis, on établit des estimations à priori afin d'obtenir une majoration des solutions approchées qui seront convergentes vers une solution, en utilisant le théorème de compacité (Aubin-Lions).

Méthode de Lyapunov :

C'est une méthode qui joue un rôle important dans la théorie de la stabilité des systèmes d'équations différentielles non linéaires. Cette méthode a été étendue pour donner des critères sur le comportement dynamique des systèmes d'équations d'évolution lorsque la dissipation physique (perte d'énergie par une friction, un contrôle aux bords, ou un matériau viscoélastique) est présente. Ce fait peut être exprimé du point de vue mathématique par l'existence d'un ensemble borné absorbant. Elle permet, sans calculer explicitement une solution de système, de tirer des conclusions sur le comportement d'un système donné.

Pour la démonstration de la stabilité d'un système, on commence par définir l'énergie du système afin d'obtenir un signe bien défini (signe négatif) de la dérivée de l'énergie, ce qui signifie que le système est dissipatif. En deuxième étape, on construit une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$, d'une façon qu'elle vérifie (0.2) et vérifie une variante de la formule (0.3),

$$\begin{aligned} \mathcal{L}'(t) \leq -dE(t) + \tilde{c}_1 \int_\Omega \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx \\ + \tilde{c}_2 \int_{\Gamma_1} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma, \quad \text{pour tout } t \geq 0, \end{aligned} \tag{0.8}$$

où d, $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ sont des constantes positives. Dans cette étape, on exploite certaines propriétés des fonctions convexes introduites et développées par Cavalcanti et Lasiecka [12], Daoulatli et al. [22], Lasiecka et Toundykov [50], Lasiecka et Tataru [49] et utilisées par Liu et Zuazua

[61], Eller et al. [26], Alabau-Boussaouira [2] et Mustafa et Messaoudi [64], pour estimer les derniers termes dans (0.8). Après un certain nombres d'opérations, on obtient notre résultat de stabilité.

Le contenu de cette thèse, a fait l'objet d'une publication internationale parue dans la revue **International Journal of Control,** intitulée : *General decay for a wave equation with Wentzell boundary conditions and nonlinear delay terms.*

DOI : 10.1080/00207179.2021.1919318. (voir [34]).

Chapitre 1

Rappel de quelques outils mathématiques

Pour rendre le contenu de cette thèse lisible, on présente quelques notions essentielles d'analyse fonctionnelle, qui seront utiles pour la suite. L'un des procédés le plus fréquent de l'analyse fonctionnelle est d'associer à chaque espace normé X l'espace dual X'. Dans ce chapitre, E désigne un espace de Banach muni de la norme $\|.\|_E$.

1.1 Espace dual

Définition 1.1 *On appelle le dual de E, l'ensemble des formes linéaires continues sur E. On note le dual de E par E'. Soient $f \in E'$ et $x \in E$. La forme bilinéaire $< .,. >$ définie par :*

$$\begin{array}{rcccl} < .,. >: & E' \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} & \\ & (f,x) & \longmapsto & f(x) & =< f,x >, \end{array}$$

s'appelle le crochet de dualité entre E' et E. Le dual E' sera muni de la norme duale

$$\|f\|_{E'} = \sup_{x\in E,\ \|x\|\leq 1} |< f,x >| .$$

Définition 1.2 *Le dual de E', s'appelle le bidual de E et est noté E'' et est muni de la norme*

$$\|\xi\|_{E''} = \sup_{f \in E',\ \|f\| \leq 1} |< \xi, f >| .$$

On peut définir une injection dite canonique

$$\begin{array}{rccc} J: & E & \longrightarrow & E'' \\ & x & \longmapsto & Jx \end{array}$$

comme suit :

On fixe $x \in E$, et l'image de x par l'application J, notée Jx, donnée par la relation suivante

$$< Jx, f >_{E'', E'} = < f, x >_{E', E} \qquad \forall f \in E'.$$

1.2 Topologie faible

Le concept de la convergence d'une suite d'éléments d'un espace est liée à la topologie considérée, c'est-à-dire : on peut obtenir la convergence ou la divergence pour la même suite, selon la topologie considérée. Le procédé de faiblir une topologie est de la rendre moins fine que la topologie de départ, afin d'obtenir une certaine convergence vers une limite qui sera, en général, la solution d'un problème donné.

Définition 1.3 *La topologie faible $\sigma(E, E')$ sur E est la topologie la moins fine sur E rendant continues toutes les applications*

$$\varphi_f(x) = \ < f, x >, \qquad f \in E'.$$

Au contraire, la topologie de la norme s'appelle la topologie forte.

La topologie faible $\sigma(E, E')$ est séparée. Par conséquent, la limite faible lorsqu'elle existe est unique.

Notation 1.1 *Soit (x_n) une suite de E, on désigne par $x_n \rightharpoonup x$ la convergence de x_n vers x*

pour la topologie faible $\sigma(E, E')$. *On désigne par* $x_n \to x$ *la convergence en norme de* x_n *vers* x, *c'est- à-dire* $\|x_n - x\|_E \to 0$.

La proposition suivante donne une caractéristique de la convergence faible et quelques propriétés.

Proposition 1.1 *Soit* (x_n) *une suite de* E. *On a*

(i) $[x_n \rightharpoonup x \text{ pour } \sigma(E, E')] \Leftrightarrow [< f, x_n > \to < f, x > \forall f \in E']$.

(ii) Si $x_n \to x$ *fortement, alors* $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$.

(iii) Si $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$, *alors* $\|x_n\|$ *est bornée et* $\|x\| \leq \liminf \|x_n\|$.

(iv) Si $x_n \rightharpoonup x$ *faiblement pour* $\sigma(E, E')$, *et si* $f_n \to f$ *fortement dans* E', *alors* $< f_n, x_n > \to < f, x >$.

Preuve. Voir [10]. ■

1.3 Topologie faible étoile

On peut encore affaiblir la topologie faible $\sigma(E', E'')$ en une topologie qui est moins fine que $\sigma(E', E'')$ (strictement si E n'est pas réflexif). C'est l'objet de la définition suivante :

Définition 1.4 *La topologie faible* $*$ *sur* E' *désignée par* $\sigma(E', E)$ *est la topologie la moins fine rendant continues toutes les applications*

$$\varphi_f(x) = \ < f, x >, \qquad x \in E.$$

Une suite (f_n) *qui converge vers* f *pour la topologie* $\sigma(E', E)$ *est notée par* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$.

La topologie faible $*$ $\sigma(E', E)$ est séparée. Par conséquent, la limite faible $*$ lorsqu'elle existe est unique. On a la caractéristique de la convergence faible $*$ et les propriétés suivantes :

Proposition 1.2 *Soit* (f_n) *une suite de* E'. *On a* *i)* $\left[x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x \text{ pour } \sigma(E', E)\right] \Leftrightarrow [< f_n, x > \to < f, x > \forall x \in E]$.

ii) Si $f_n \to f$ *fortement, alors* $f_n \rightharpoonup f$ *faiblement pour* $\sigma(E', E'')$.

iii) Si $f_n \rightharpoonup f$ *pour* $\sigma(E', E'')$, *alors* $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$.

iv) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$, *alors* $\|f_n\|$ *est bornée et* $\|f\| \leq \liminf \|f_n\|$.

v) Si $f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f$ *pour* $\sigma(E', E)$ *et si* $x_n \to x$ *fortement dans* E, *alors* $< f_n, x_n > \to < f, x >$.

Preuve. Voir [10]. ■

Définition 1.5 *Soit* E *un espace de Banach, on dit que* E *est séparable s'il existe un sous ensemble* $D \subset E$ *dénombrable et dense.*

Lemme 1.1 *Soit* E *un espace de Banach séparable de dimension infinie. Il existe une famille libre dénombrable* $\{v_i\}_{i \in \mathbb{N}}$, $v_i \in E$, *telle que les combinaisons linéaires finies des* v_i *sont denses dans* E.

Proposition 1.3 *Soit* E *un espace de Banach séparable et soit* (f_n) *une suite bornée dans* E'. *Alors, il existe une sous-suite extraite* (f_{n_k}) *qui converge pour la topologie* $\sigma(E', E)$.

Preuve. Voir [10]. ■

Définition 1.6 *Soit* E *un espace de Banach et soit* J *l'injection canonique de* E *dans* E''. *On dit que* E *est réflexif si* $J(E) = E''$. *Lorsque* E *est réflexif on identifie implicitement* E *et* E'' *(à l'aide de l'isomorphisme* J*).*

Théorème 1.1 *Soit* E *un espace de Banach réflexif et soit* (x_n) *une suite bornée dans* E. *Alors, il existe une sous-suite extraite* (x_{n_k}) *qui converge pour la topologie* $\sigma(E, E')$.

Preuve. Voir [10]. ■

1.4 Espaces de Lebesgue $L^p(\Omega)$

Définition 1.7 *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 1)$, si $p \in [0, +\infty[$, on désigne par $L^p(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et telle que $|u|^p$ est intégrable au sens de Lebesgue sur Ω,*

$$L^p(\Omega) = \left\{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \int_\Omega |u(x)|^p \, dx < +\infty \right\},$$

muni de la norme

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |u(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{P}}.$$

Si $p = +\infty$, on note $L^\infty(\Omega)$ l'espace vectoriel des (classes de) fonctions $u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ mesurables sur Ω et essentiellement bornées sur Ω.

$$L^\infty(\Omega) = \{ u : \Omega \longrightarrow \mathbb{R} \text{ tel que } \exists M \in \mathbb{R} : \ |u(x)| \leq M, \ p.p \text{ sur } \Omega \}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\|u\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} ess \, |u(x)| = \inf \{ M > 0, \ \text{tel que } |u(x)| \leq M, \ p.p \text{ sur } \Omega \}.$$

Définition 1.8 *On note $L^p_{loc}(\Omega)$ l'ensemble des fonctions f telles que, pour tout compact K de Ω, on a $f 1_K \in L^p(\Omega)$, où 1_K est la fonction indicatrice sur K.*

La proposition suivante est due à Riesz et Fisher.

Proposition 1.4 *Pour tout $p \in [1, +\infty]$, $L^p(\Omega)$ est un espace de Banach. En particulier, l'espace $L^2(\Omega)$ muni du produit scalaire*

$$(u, v) = \int_\Omega u(x) v(x) dx, \quad \text{pour tout } u, \ v \in L^2(\Omega)$$

est un espace de Hilbert.

Définition 1.9 *On note $\mathcal{D}(\Omega)$ l'espace des fonctions $\mathcal{C}^{\infty}(\Omega)$ à support compact dans Ω.*

Les espaces $L^p(\Omega)$ ont les propriétés suivantes :

Proposition 1.5 (Voir [46]) *On a*

1) Si $1 \leq p < +\infty$, alors $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

2) Si $1 < p < +\infty$, alors $L^p(\Omega)$ est réflexif.

3) $L^1(\Omega)$ n'est pas réflexif.

4) Si $1 \leq p < +\infty$, alors $L^p(\Omega)$ est séparable.

5) $L^{\infty}(\Omega)$ n'est ni réflexif ni séparable.

Théorème 1.2 (Théorème de représentation de Riesz) *Soient $1 < p < +\infty$, $p\prime$ un réel tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ et $\varphi \in (L^p(\Omega))'$. Alors, il existe $u \in L^{p'}(\Omega)$ unique tel que*

$$< \varphi, f >= \int_{\Omega} u(x) f(x) dx, \quad \forall f \in L^p(\Omega).$$

De plus, on a

$$\|u\|_{L^{p'}} = \|\varphi\|_{(L^p)'}.$$

Preuve. Voir [10]. ■

Remarque 1.1 *Par ce théorème on définit une application $\varphi \longmapsto u$ qui est un opérateur linéaire isométrique et surjectif qui permet d'identifier le dual de $L^p(\Omega)$ avec $L^{p'}(\Omega)$ et on écrit*

$$(L^p(\Omega))' = L^{p'}(\Omega).$$

Théorème 1.3 *Soit $\varphi \in (L^1(\Omega))'$. Alors, il existe $u \in L^\infty(\Omega)$ unique tel que*

$$< \varphi, f >= \int_\Omega u(x)f(x)dx, \quad \forall f \in L^1(\Omega).$$

On a, de plus

$$\|u\|_{L^\infty} = \|\varphi\|_{(L^1)'} .$$

Remarque 1.2 *De la même façon que dans la Remarque 1.1, on identifie $(L^1(\Omega))'$ et $L^\infty(\Omega)$ et on écrit*

$$(L^1(\Omega))' = L^\infty(\Omega).$$

1.5 Espaces de Sobolev

1.5.1 Espaces de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$

Historiquement, la résolution des équations aux dérivées partielles à rencontrer plusieurs difficultés, ce qui a conduit de nombreux mathématiciens à chercher un nouveau concept de la dérivée. La définition suivante est attribuée à Sobolev. Soit $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ un multi-indice, on note

$$|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_n$$

et

$$D^\alpha = \frac{\partial^{\alpha_1+...+\alpha_n}}{\partial x_1^{\alpha_1}...\partial x_n^{\alpha_n}}.$$

Définition 1.10 *Soient f, $g \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $\alpha \in \mathbb{N}^n$. On dit que $g = D^\alpha f$ au sens faible, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$*

$$\int_\Omega f D^\alpha \varphi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_\Omega g\varphi dx.$$

Remarque 1.3 *On déduit que :*

1) Si $g = D^{\alpha}f$ au sens classique, alors $g = D^{\alpha}f$ au sens faible.

2) Soit $f \in L^1_{loc}(\Omega)$. Pour toute permutation $\sigma : \{1, ..., n\} \longrightarrow \{1, ..., n\}$, on a

$$\frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} f}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}} = \frac{\partial^{\alpha_1 + ... + \alpha_n} f}{\partial x_{\sigma(1)}^{\alpha_{\sigma(1)}} ... \partial x_{\sigma(n)}^{\alpha_{\sigma(n)}}} \text{ au sens faible.}$$

3) On a l'inclusion suivante : $L^p(\Omega) \subset L^1_{loc}(\Omega)$, pour tout $1 \leq p \leq +\infty$.

Définition 1.11 *Soient $m \geq 1$ et $1 \leq p \leq +\infty$. L'espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ est défini par*

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) : \text{pour tout } |\alpha| \leq m, \ D^{\alpha}u \in L^p(\Omega)\}.$$

Cet espace est muni de la norme

$$\begin{aligned} \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} &= \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|^p_{L^p(\Omega)} \right)^{\frac{1}{P}}, \quad \text{si } 1 \leq p < +\infty, \\ \|u\|_{W^{m,\infty}(\Omega)} &= \max_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)}, \quad \text{si } p = \infty. \end{aligned}$$

On pose

$$H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega),$$

$H^m(\Omega)$ est muni du produit scalaire

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq m} \int_{\Omega} D^{\alpha}u D^{\alpha}v dx, \quad \forall u, \ v \in H^m(\Omega).$$

Proposition 1.6 *Soient $m \geq 1$ et l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ muni de la norme $\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. Alors*

1) Pour tout $1 \leq p \leq \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

2) Pour tout $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est réflexif.

3) Pour tout $1 \leq p < \infty$, $W^{m,p}(\Omega)$ est séparable.

En particulier $H^m(\Omega)$ est un espace de Hilbert séparable.

Définition 1.12 *Soient X et Y deux espaces vectoriels normés.*

1) On dit que X s'injecte continûment dans Y s'il existe une injection continue i de X dans Y, c'est-à-dire : une injection i et une constante $C > 0$, telle que

$$\forall x \in X, \quad \|i(x)\|_Y \leq C \|x\|_X .$$

On note alors

$$X \hookrightarrow Y.$$

2) On dit que cette injection continue est compacte si i est un opérateur compact, ce qui signifie qu'elle transforme tout borné de X en un ensemble relativement compact de Y.

On note alors

$$X \hookrightarrow_c Y.$$

Remarque 1.4 *La notion de l'injection continue est une généralisation de la notion d'inclusion usuelle qui est le cas pour $i(x) = x$, où le sous-espace muni de la norme induite, cette généralisation se fait afin d'obtenir des liens entre les espaces fonctionnels, où l'inclusion est insuffisante. On a*

1) Si $X \hookrightarrow Y$, alors pour toute suite $(x_n)_n$ convergente dans X pour la topologie forte, la suite $y_n = i(x)_n$ converge pour la topologie forte de Y.

2) Si $X \hookrightarrow_c Y$, alors pour toute suite bornée $(x_n)_n$ de X, on peut extraire de la suite $(y_n)_n$ définie par $y_n = i(x_n)$, une sous-suite qui converge pour la topologie forte de Y.

Théorème 1.4 *Soit Ω un ouvert borné et lipschitzien. Soit $mp > N$ et $j = [N/p] + 1$. Alors*

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow_c C^{m-j}\left(\bar{\Omega}\right),$$

où

$$C^k\left(\bar{\Omega}\right) = \left\{u \in C^k(\Omega) \ : \forall\alpha, \ \ |\alpha| \leq k, \ \ D^\alpha u \text{ admet un prolongement continu sur } \bar{\Omega}\right\}.$$

Remarque 1.5 *On note que ce théorème est fondamental, parce qu'il donne un sens aux conditions aux limites pour un problème d'équations aux dérivées partielles. Pour une étude plus profonde de ces théorèmes d'injections, on renvoie les lecteurs à [24].*

1.5.2 Espaces de Sobolev $W_0^{m,p}(\Omega)$

En général, $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Définition 1.13 *Soient $m \geq 1$, et $1 \leq p < \infty$. On note $W_0^{m,p}(\Omega)$ l'espace défini par*

$$W_0^{m,p}(\Omega) = \overline{\mathcal{D}(\Omega)}^{W^{m,p}(\Omega)},$$

c'est-à-dire : l'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$ au sens de la norme $\|.\|_{W^{m,p}(\Omega)}$. L'espace $W_0^{m,2}(\Omega)$ est noté $H_0^m(\Omega)$.

Théorème 1.5 *On suppose que Ω est de classe $\mathcal{C}^1$. Soit*

$$u \in W^{1,p}(\Omega) \cap \mathcal{C}(\bar{\Omega}) \quad \text{avec} \ \ 1 \leq p < +\infty.$$

Alors, les propriétés suivantes sont équivalentes :

1) $u = 0$ *sur* $\partial\Omega$.

2) $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$.

Théorème 1.6 *L'application trace*

$$\begin{array}{rccc} \gamma_0 : & H^1(\Omega) & \longrightarrow & H^{\frac{1}{2}}(\Gamma = \partial\Omega) \\ & u & \longmapsto & u|_\Gamma \end{array}$$

est linéaire continue et surjective.

Proposition 1.7 *L'espace* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$ *est un espace de Hilbert pour la norme*

$$\|v\|_{H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)} = \inf_{u \in H^1(\Omega),\ \gamma_0(u) = v} \|u\|_{H^1(\Omega)}.$$

Définition 1.14 *On suppose que* Ω *est un ouvert borné de* $\mathbb{R}^n$ *de frontière* $\partial\Omega = \Gamma$ *de classe* $\mathcal{C}^1$ *par morceaux. Alors* $H_0^1(\Omega)$ *est le noyaux de* γ_0, *application trace sur* Γ *de* $H^1(\Omega)$ *dans* $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, *i.e.,*

$$H_0^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega)\,; \quad \gamma_0(u) = 0 \right\}.$$

Théorème 1.7 $\mathcal{D}(\Omega)$ *est dense dans* $H_0^1(\Omega)$.

Lemme 1.2 (Inégalité de Sobolev-Poincaré, voir [1]) *Soit* Ω *un ouvert borné dans une direction. Il existe une constante dépendante du diamètre de* Ω *(optimale) :* $C_p > 0$, *telle que*

$$\forall u \in H_0^1(\Omega)\,; \qquad \|u\|_{L^2(\Omega)} \leq C_p \|\nabla u\|_{L^2(\Omega)}. \tag{1.1}$$

Définition 1.15 *On note* $H^{-1}(\Omega)$ *le dual de* $H_0^1(\Omega)$, *espace de Hilbert pour la norme duale suivante :*

$$\|f\|_{H^{-1}(\Omega)} = \sup_{u \in H_0^1(\Omega),\ u \neq 0} \frac{\langle f, u \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)}}{\|u\|_{H^1(\Omega)}}.$$

Du fait que $\mathcal{D}(\Omega)$ est dense dans $H_0^1(\Omega)$. On peut identifier les éléments de $H^{-1}(\Omega)$ à des distributions. On dit alors que $H^{-1}(\Omega)$ est un espace de distributions.

Théorème 1.8 *Soit U un espace défini par :*

$$U = \left\{u \in H^1(\Omega), \quad \Delta u \in L^2(\Omega)\right\},$$

alors l'application

$$\begin{array}{rccc} \gamma : & U & \longrightarrow & H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) \\ & u & \longmapsto & \partial u.\nu \end{array}$$

est linéaire continue, avec $H^{-\frac{1}{2}}(\Gamma) = \left(H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)\right)'$.

1.6 Espaces de fonctions à valeurs vectorielles

La majorité des problèmes rencontrés dépendent du temps, aussi propose-t-on la résolution de problèmes d'évolution, ce qui nécessite l'introduction des espaces de distributions à valeurs vectorielles. Dans cette section, on présente brièvement quelques résultats utiles sur les espaces de fonctions à valeurs dans un espace de Banach X.

Soit $T > 0$, on définit les espaces suivants :

Définition 1.16 *Soit X un espace de Banach, $1 \leq p \leq \infty$. On appelle espace de Lebesgue à valeurs dans X et on note : $L^p(0,T;X)$, l'espace des (classes de) fonctions*

$$\begin{array}{rccc} u : &]0,T[& \longrightarrow & X \\ & t & \longmapsto & u(t), \end{array}$$

tel que pour $1 \leq p < \infty$,

$$L^p(0,T;X) = \left\{u :]0,T[\longrightarrow X \text{ mesurables, telles que } \int_0^T \|u(t)\|_X^p \, dt < \infty\right\}$$

et

$$L^\infty(0,T;X) = \left\{u :]0,T[\longrightarrow X \text{ mesurables, telles que } \sup_{t \in]0,T[} ess \, \|u(t)\|_X < \infty\right\},$$

où

$$\sup_{t\in]0,T[} ess \|u(t)\|_X = \inf\{M>0,\ \textit{tel que}\ \|u(t)\|_X \leq M,\quad p.p\ t\in]0,T[\}.$$

$L^p(0,T;X)$ *est muni de la norme*

$$\begin{aligned}\|u\|_{L^p(0,T;X)} &= \left(\int_0^T \|u(t)\|_X^p\ dt\right)^{\frac{1}{p}}, \qquad si\ 1\leq p<\infty,\\ \|u\|_{L^\infty(0,T;X)} &= \sup_{t\in]0,T[} ess \|u(t)\|_X, \qquad si\ p=\infty.\end{aligned}$$

En particulier, si X *est un espace de Hilbert et* $p=2$, $L^2(0,T;X)$ *muni du produit scalaire*

$$(u,v)_{L^2(0,T;X)} = \int_0^T (u(t),v(t))_X\, dt.$$

Proposition 1.8 *Soit* $L^p(0,T;X)$ *muni de la norme* $\|.\|_{L^p(0,T;X)}$. *On a les propriétés suivantes*

1) $L^p(0,T;X)$ *est un espace de Banach pour tout* $1\leq p\leq\infty$.

2) Si X *est un espace de Hilbert, alors* $L^2(0,T;X)$ *est un espace de Hilbert.*

3) Si X *est un Banach, alors* $L^p(0,T;X)$ *est un Banach pour* $1\leq p<\infty$.

4) Si X *est séparable alors* $L^p(0,T;X)$ *est séparable pour* $1\leq p<\infty$.

5) Si X *est réflexif alors* $L^p(0,T;X)$ *est réflexif pour* $1<p<\infty$.

6) Si $X\hookrightarrow Y$, *alors* $L^p(0,T;X)\hookrightarrow L^p(0,T;Y)$.

Remarque 1.6 *En général, si* $X\hookrightarrow_c Y$, *on a pas forcément* $L^p(0,T;X)\hookrightarrow_c L^p(0,T;Y)$.

Définition 1.17 *Soient X un espace de Banach, $u \in L^1_{loc}(0,T;X)$ et $m \in \mathbb{N}^*$. Par définition, $v = \frac{d^m u}{dt^m}$ au sens faible, si pour tout $\varphi \in \mathcal{D}(]0,T[)$,*

$$\int_\Omega u \frac{d^m \varphi}{dt^m} dx = (-1)^m \int_\Omega v \varphi dx.$$

On utilise la notation suivante pour la $m^{ième}$ dérivée de u par rapport à t de manière interchangeable

$$\frac{d^m u}{dt^m} \ ou \ \frac{\partial^m u}{\partial t^m}.$$

Le lemme d'Aubin-Lions donne une légitimité à la remarque précédente sous des conditions supplémentaires, c'est un critère de compacité très utile dans l'étude des équations aux dérivées partielles évolutives non linéaires.

Lemme 1.3 (Aubin-Lions, voir [59]) *Soient X_0, X et X_1 trois espaces de Banach avec*

$$X_0 \hookrightarrow_c X \hookrightarrow X_1.$$

On suppose que X_0 et X_1 sont réflexifs. Pour $1 < p, q < +\infty$, soit

$$W = \{u \in L^p(0,T;X_0) \mid u_t \in L^q(0,T;X_1)\}.$$

Alors

$$W \hookrightarrow_c L^p(0,T;X)$$

et

$$W \hookrightarrow C([0,T];X_1).$$

Remarque 1.7 *On remarque que :*

1) D'après la Remarque 1.4, de toute suite bornée $(x_n)_n$ de W, on peut extraire de la suite $(x_n)_n$ une sous-suite qui converge pour la topologie forte de $L^p(0,T;X)$.

2) Si $u \in W$, l'injection $W \hookrightarrow C([0,T];X_1)$ donne un sens à la condition initiale $u(0) = u_0$, d'un problème d'équations aux dérivées partielles. De même, si $u_t \in W$, il y'a un sens pour la condition initiale $u_t(0) = u_1$, car $W \hookrightarrow C^1([0,T];X_1)$.

1.7 Rappels sur la géométrie différentielle pour les surfaces

On s'intéresse dans ce paragraphe aux notions fondamentales permettant de calculer la dérivée d'une fonction, d'un champ de vecteurs, où d'un endomorphisme défini sur une surface.

1.7.1 Paramétrisaton

Soit Γ une surface plongée dans l'espace $\mathbb{R}^3$ dans lui-même rapporté à une base orthonormée, on transforme un ouvert $\widehat{\Gamma}$ du plan (O,ξ^1,ξ^2) en la surface Γ par une carte régulière $\varphi = (\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3)$.

1.7.2 La normale et le plan tangent

En chaque point m de Γ, on définit deux vecteurs tangents à Γ par :

$$a_\alpha(m) = \frac{\partial\varphi}{\partial\xi^\alpha}\left(\varphi^{-1}(m)\right) \qquad \alpha = 1,2.$$

Les vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$ sont linéairement indépendants. La normale unitaire à Γ en chaque point m est définie par :

$$\nu(m) = \nu = \frac{a_1 \wedge a_2}{\|a_1 \wedge a_2\|},$$

où $\wedge$ (respectivement $\|.\|$) désigne le produit vectoriel (respectivement la norme euclidienne). Le plan tangent à Γ en m engendré par les vecteurs $a_1(m)$ et $a_2(m)$ est noté $T_m(\Gamma)$.

1.7.3 Base duale

En général, la base $\{a^\alpha(m)\} = \{a^1(m), a^2(m)\}$ du plan tangent $T_m(\Gamma)$ n'est ni orthogonale, ni normée. On est donc amené à utiliser la cobase ou base duale notée $\{a^\alpha(m)\} = \{a^1(m), a^2(m)\}$ définie par :

$$a^\alpha(m) . a_\beta(m) = \delta_\beta^\alpha,$$

où δ_β^α est le symbole de Kronecker, $\alpha, \beta = 1, 2$. $a^\alpha(m)$, $\alpha = 1, 2$ est une forme linéaire sur le plan tangent, mais on peut l'identifier avec un vecteur du plan tangent.

1.7.4 Tenseur métrique

On définit le tenseur métrique de la surface Γ associé à la carte φ par :

$$g_{\alpha\beta} = (a_\alpha, a_\beta)_{\mathbb{R}^3} \qquad \alpha, \beta = 1, 2,$$

où $(.,.)_{\mathbb{R}^3}$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$. On note $|g|$ le déterminant de ce tenseur.

1.7.5 La transposée d'un vecteur

Soit $q = q^1 a_1 + q^2 a_2$ un vecteur arbitraire du plan tangent $T_m(\Gamma)$; on lui associe par le produit scalaire de $\mathbb{R}^3$ une forme linéaire (vecteur transposé) :

$$\overline{q} = q_1 a^1 + q_2 a^2.$$

Les q^α sont les composantes contravariantes et les q_α sont les composantes covariantes.

On a

$$q_\alpha = g_{\alpha 1} q^1 + g_{\alpha 2} q^2 \qquad \alpha = 1, 2.$$

En effet, on a

$$\overline{q}.a_\alpha = q_\beta a^\beta . a_\alpha = q_\beta \delta_\alpha^\beta = q_\alpha,$$

d'où

$$\begin{aligned} q_\alpha &= (q, a_\alpha)_{\mathbb{R}^3} \\ &= g_{\alpha\beta} q^\beta \\ &= g_{\alpha 1} q^1 + g_{\alpha 2} q^2 \qquad \alpha = 1, 2, \end{aligned}$$

où $(.,.)_{\mathbb{R}^3}$ désigne le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^3$.

1.7.6 Dérivation sur une surface

Dérivation d'une fonction scalaire

Soit f une fonction définie sur Γ et suffisamment régulière ; sa dérivée est une forme linéaire sur l'espace tangent, définie par

$$\partial_m f = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial f}{\partial \xi^\alpha} a^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{2} f_\alpha a^\alpha.$$

La transposée de $\partial_m f$ noté $\overline{\partial_m f}$ est un vecteur appelé gradient tangentiel de f défini par :

$$\overline{\partial_m f} = \sum_{\alpha=1}^{2} q^\alpha a_\alpha = \nabla_T f$$

avec

$$q^\alpha = \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} \frac{\partial f}{\partial \xi^\beta} = \sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} f_\beta,$$

où $g^{\alpha\beta}$ est le tenseur métrique dual de $g_{\alpha\beta}$ tel que

$$\sum_{\beta=1}^{2} g^{\alpha\beta} g_{\beta\mu} = \delta_\mu^\alpha \qquad \alpha, \mu = 1, 2.$$

1.7.7 Dérivée d'un champ tangentiel

Soit q_T un champ régulier de vecteur tangent à Γ :

$$m \in \Gamma \longmapsto q_T(m) = q^\alpha(m)\, a_\alpha(m) \in T_m(m)\,.$$

On définit la dérivée de q_T sur Γ par :

$$\partial_m q_T = \sum_{\alpha=1}^{2} \frac{\partial q_T}{\partial \xi^\alpha}.a^\alpha.$$

C'est un endomorphisme qui applique le plan tangent dans $\mathbb{R}^3$ et non pas dans le plan tangent lui même.

1.7.8 Dérivée d'un champ normal

On note par $q_\nu \nu$ le champ normal, on a par définition :

$$\partial_m (q_\nu \nu) = \nu \partial_m q_\nu + q_\nu . \partial_m \nu.$$

1.7.9 Expression de la divergence

Expression de la divergence d'un champ de vecteurs sur une surface Γ

La divergence du champ de vecteurs tangents à Γ :

$$q_T = q^1 a_1 + q^2 a_2$$

est un champ scalaire défini sur Γ par :

$$\int_\Gamma div\,(q_T)\, zdm = -\int_\Gamma \partial_m z q_T dm, \qquad \text{pour tout } z \in \mathcal{D}(\Gamma),$$

où $\mathcal{D}(\Gamma)$ désigne l'ensemble des fonctions indéfiniment dérivables sur Γ à support compact (le support d'une fonction est le complémentaire du plus grand ensemble ouvert sur lequel elle est identiquement nulle).

Expression de la divergence d'un champ d'endomorphisme sur une surface Γ

On désigne par ζ_T un champ d'endomorphismes du plan tangent à la surface Γ.

Posons :

$$\zeta_t = \zeta^\alpha_\beta . a^\beta a_\alpha.$$

(on a utilisé la convention de sommation par indices répétés).

La divergence tangentielle du champ ζ_t est un champ de formes linéaires sur $T_m(\Gamma)$, noté $div\zeta_t$ et défini par :

$$\int_\Gamma div\zeta_t.q_T dm = -\int_\Gamma tr_2\left(\zeta_t.\pi\partial_m q_T\right) dm \qquad \text{pour tout } q_T \in \mathcal{D}\left(\Gamma, T\left(\Gamma\right)\right),$$

où tr_2 désigne la trace d'un endomorphisme du plan tangent dans lui même et $\mathcal{D}\left(\Gamma, T\left(\Gamma\right)\right)$ désigne l'espace des champs tangents à Γ dont les composantes dans la base de $T_m(\Gamma)$ sont $\{a_\alpha\}$ $\alpha = 1, 2$ sont dans $\mathcal{D}(\Gamma)$.

1.8 Quelques lemmes utiles

Lemme 1.4 (Formule de Green) *Soient Ω un ouvert borné régulier de $\mathbb{R}^n$ et $u \in H^2(\Omega)$. Alors*

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u \nabla v dx \quad \textit{pour tout } v \in H^1(\Omega),$$

où $\nu = (\nu_1, ..., \nu_n)$ est la normale unitaire orientée vers l'extérieur de Ω.

Inégalité de Young

Lemme 1.5 (Voir [10]) *Soient $p, q \in \left]1, +\infty\right[$ tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ et soient $a, b \geq 0$. Alors*

$$ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

Pour une autre écriture, on pose $a = \alpha(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}$ et $b = \frac{\beta}{(\varepsilon p)^{\frac{1}{p}}}$, avec $\varepsilon > 0$, donc

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^p + C(\varepsilon)\beta^q \quad \textit{pour tout } \alpha,\ \beta \geq 0, \tag{1.2}$$

où $C(\varepsilon) = \frac{1}{q(\varepsilon p)^{\frac{q}{p}}}$. En particulier, si $p = q = 2$, l'inégalité (1.2) s'écrit

$$\alpha\beta \leq \varepsilon\alpha^2 + \frac{\beta^2}{4\varepsilon}. \tag{1.3}$$

En outre, on peut généraliser l'inégalité de Young comme suit :

Lemme 1.6 *On désigne par* Φ^*, *la fonction conjuguée de la fonction convexe* $\Phi : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, *i.e.,*

$$\Phi^*(s) = \sup_{t\in\mathbb{R}^+}(st - \Phi(t)).$$

Alors Φ^* *est la transformée de Legendre de* Φ, *qui est donnée par*

$$\Phi^*(s) = s(\Phi')^{-1}(s) - \Phi[(\Phi')^{-1}(s)], \quad \textit{pour tout } s \geq 0 \tag{1.4}$$

et satisfait l'inégalité suivante (voir [3] p. 61-62; [22, 50], pour plus d'informations) :

$$sr \leq \Phi^*(s) + \Phi(r), \quad \textit{pour} \;\; s,\; r \geq 0. \tag{1.5}$$

Lemme 1.7 (L'inégalité de Jensen, voir [71]) *Soit* F *une fonction convexe sur* $[a, b]$, $f : \Omega \longrightarrow [a, b]$ *et* $h : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}_+$ *sont des fonctions intégrables sur* Ω *et* $\int_\Omega h(x)dx = k > 0$, *alors*

$$F\left(\frac{1}{k}\int_\Omega f(x)h(x)dx\right) \leq \frac{1}{k}\int_\Omega F\left(f(x)\right)h(x)dx.$$

Lemme 1.8 (L'inégalité de Gronwall, voir [25]) *Soient* φ, ψ *et* w *trois fonctions positives définies sur* $[0, T]$ *continues par morceaux et vérifiant l'inégalité*

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)w(s)ds,$$

alors

$$w(t) \leq \varphi(t) + \int_0^t \psi(s)w(s)\exp\left(\int_s^t \psi\left(\tau\right)d\tau\right)ds.$$

Chapitre 2

Etude de l'existence et l'unicité d'une solution faible globale du problème

Dans ce chapitre, on énonce et on démontre en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin, un résultat d'existence et d'unicité globale d'une solution faible, pour un problème de type Wentzell avec des termes de retard non linéaires dans des amortisseurs non linéaires internes et sur une partie de la frontière du domaine.

2.1 Le modèle étudié

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $(n \geq 2)$, de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$, divisée en deux sous ensembles ouverts disjoints Γ_0 et Γ_1, tels que

$$\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1,$$

$$\emptyset = \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1}.$$

On considère le système couplé ondes/Wentzell, en présence de deux amortisseurs de friction non linéaires et de deux termes de retard non linéaires, localisés à l'intérieur de Ω et sur la partie Γ_1 de sa frontière :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 k_1(u_t(t-\tau)) = 0, & \text{dans } \ \Omega \times (0,\infty), \\ u = v, & \text{sur } \ \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \ \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + \mu_1' g_2(v_t) + \mu_2' k_2(v_t(t-\tau)) = 0, & \text{sur } \ \Gamma_1 \times (0,\infty). \end{cases} \tag{2.1}$$

Munis des conditions initiales

$$(u(0), v(0)) = (u_0, v_0), \qquad \text{dans } \ \Omega \times \Gamma, \tag{2.2}$$

$$(u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1), \qquad \text{dans } \ \Omega \times \Gamma, \tag{2.3}$$

et les termes de retard

$$u_t(x, t-\tau) = f_{0_1}(x, t-\tau), \qquad \text{dans } \ \Omega \times (0,\tau), \tag{2.4}$$

$$v_t(x, t-\tau) = f_{0_2}(x, t-\tau), \qquad \text{sur } \ \Gamma_1 \times (0,\tau). \tag{2.5}$$

μ_1, μ_2, μ_1' et μ_2' sont des nombres réels positifs, g_1, g_2, k_1 et k_2 sont quatres fonctions, $\tau > 0$ est un retard et les données initiales u_0, u_1, v_0, v_1, f_{0_1} et f_{0_2} appartiennent à des espaces fonctionnels convenables que l'on définira par la suite.

On désigne par ν, le champ unitaire normal à la frontière Γ, extérieur à Ω, et par ∂_ν l'opérateur de dérivation dans cette direction. On note par ∂_T la dérivée tangentielle.

On sait que si $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ est une fonction régulière, le vecteur transposé $\partial_T \varphi$, est le gradient tangentiel de φ, noté par $\nabla_T \varphi$. On a

$$\nabla \varphi = \partial_\nu \varphi . \nu + \nabla_T \varphi, \ \text{ sur } \ \Gamma_1 \tag{2.6}$$

et l'opérateur Laplace Beltrami Δ_T d'une fonction $\varphi : \Gamma_1 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$ est défini par

$$\Delta_T \varphi = div_T \nabla_T \varphi \ \text{ sur } \ \Gamma_1, \tag{2.7}$$

où $div_T \nabla_T \varphi$ est la divergence du champ vectoriel $\nabla_T \varphi$.

Pour tout φ, $\psi \in H^1(\Gamma_1)$, on définit l'opérateur linéaire continu $-\triangle_T : H^1(\Gamma_1) \longrightarrow (H^1(\Gamma_1))'$

$$\langle -\triangle_T \varphi, \psi \rangle_{(H^1(\Gamma_1))' \times H^1(\Gamma_1)} = -\int_{\Gamma_1} \Delta_T \varphi . \psi d\sigma = \int_{\Gamma_1} \nabla_T \varphi . \nabla_T \psi d\sigma \tag{2.8}$$

et en particulier

$$\langle -\triangle_T \varphi, \varphi \rangle_{(H^1(\Gamma_1))' \times H^1(\Gamma)} = \int_{\Gamma_1} |\nabla_T \varphi|^2 d\sigma. \tag{2.9}$$

On considère l'espace :

$$H^1_{\Gamma_0}(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega) \, / , \quad u|_{\Gamma_0} = 0 \right\},$$

doté de la même structure de Hilbert induite par $H^1(\Omega)$.

Dans tout ce qui suit, on note par $(.,.)$ et $(.,.)_{\Gamma_1}$, les produits scalaires dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_1)$, respectivement, et

$$\|u\|^2 = \int_\Omega |u|^2 dx, \qquad \|v\|^2_{\Gamma_1} = \int_{\Gamma_1} |v|^2 d\sigma.$$

Ainsi, on considère les normes canoniques de $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ et $H^1(\Gamma_1)$

$$\|u\|^2_{H^1_{\Gamma_0}(\Omega)} = \|\nabla u\|^2, \qquad \|v\|^2_{H^1(\Gamma_1)} = \|\nabla_T v\|^2_{\Gamma_1}.$$

On note par $\lambda_0^2 > 0$, la plus petite constante positive, qui satisfait l'immersion

$$\|u\|^2_{\Gamma_1} \leq \lambda_0^2 \|\nabla u\|^2, \qquad \forall u \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega). \tag{2.10}$$

Cette constante existe grâce à la continuité de l'opérateur trace de $H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ dans $L^2(\Gamma_1)$.

2.1.1 Hypothèses sur les amortisseurs g_i et termes de retard k_i, pour $i = 1, 2$

Pour montrer notre résultat d'existence et d'unicité d'une solution, on pose les hypothèses suivantes :

(H1) $g_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, telle qu'il existe ϵ', m_i, $M_i > 0$, pour $i = 1, 2$ et une fonction convexe, croissante $H : \mathbb{R}_+ \longrightarrow \mathbb{R}_+$, de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R}_+) \cap \mathcal{C}^2(]0, \infty[)$ vérifiant $H(0) = 0$ et H est linéaire sur $[0, \epsilon']$ ou ($H'(0) = 0$ et $H'' > 0$ sur $]0, \epsilon']$), tels que

$$m_i\,|s| \leq |g_i(s)| \leq M_i\,|s| \qquad \text{si } \ |s| \geq \epsilon', \tag{2.11}$$

$$s^2 + g_i^2(s) \leq H^{-1}(s g_i(s)) \quad \text{si } \ |s| \leq \epsilon'. \tag{2.12}$$

(**H2**) $k_i : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est une fonction impaire, croissante de classe $\mathcal{C}^1(\mathbb{R})$, telle qu'il existe β, α_1, $\alpha_2 > 0$, pour $i = 1, 2$

$$|k_i'(s)| \leq \beta, \tag{2.13}$$

$$\alpha_1 s k_i(s) \leq K_i(s) \leq \alpha_2 s g_i(s), \tag{2.14}$$

où

$$K_i(s) = \int_0^s k_i(r)dr.$$

(**H3**) $\alpha_2\mu_2 < \alpha_1\mu_1$ et $\alpha_2\mu_2' < \alpha_1\mu_1'$.

Pour démontrer l'existence et l'unicité du système (2.1)-(2.5), écrivant-le sous la forme équivalante suivante.

2.1.2 Transformation du système

Changement de fonctions :

On utilise une technique introduite par Dafermos [21], Nicaise et Pignotti [66] qui consiste à considérer le changement de fonctions suivantes :

$$\begin{cases} z_1(x,\rho,t) = u_t(x, t-\rho\tau), & x \in \Omega, \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0, \\ z_2(x,\rho,t) = v_t(x, t-\rho\tau), & x \in \Gamma_1, \quad \rho \in (0,1), \quad t > 0, \end{cases}$$

où $\tau > 0$ est un retard.

Il est facile de vérifier que les fonctions z_1 et z_2 vérifient :

$$\begin{cases} \tau z_{1t}(x,\rho,t) + z_{1\rho}(x,\rho,t) = 0, & \text{dans } \ \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ \tau z_{2t}(x,\rho,t) + z_{2\rho}(x,\rho,t) = 0, & \text{sur } \ \Gamma_1 \times (0,1) \times (0,\infty), \end{cases}$$

où $z_{it} = \frac{\partial z_i}{\partial t}$ et $z_{i\rho} = \frac{\partial z_i}{\partial \rho}$, pour $i = 1, 2$.

Par conséquent, le problème (2.1)-(2.5) s'écrit comme :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 k_1(z_1(x,1,t)) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + \mu_1' g_2(v_t) + \mu_2' k_2(z_2(x,1,t)) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \tau z_{1t}(x,\rho,t) + z_{1\rho}(x,\rho,t) = 0, & \text{dans} \quad \Omega \times (0,1) \times (0,\infty), \\ \tau z_{2t}(x,\rho,t) + z_{2\rho}(x,\rho,t) = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,1) \times (0,\infty), \\ u = v, & \text{sur} \quad \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sur} \quad \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ z_1(x,0,t) = u_t(x,t), & \text{dans} \quad \Omega \times (0,\infty), \\ z_2(x,0,t) = v_t(x,t), & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), & \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1), & \text{dans} \quad \Omega \times \Gamma, \\ z_1(x,\rho,0) = f_{0_1}(x, -\rho\tau), & \text{dans} \quad \Omega \times (0,1), \\ z_2(x,\rho,0) = f_{0_2}(x, -\rho\tau), & \text{sur} \quad \Gamma_1 \times (0,1). \end{cases} \tag{2.15}$$

On considère ξ et ζ deux constantes strictement positives, telles que

$$\tau \frac{\mu_2(1-\alpha_1)}{\alpha_1} < \xi < \tau \frac{\mu_1 - \alpha_2 \mu_2}{\alpha_2}, \tag{2.16}$$

$$\tau \frac{\mu_2'(1-\alpha_1)}{\alpha_1} < \zeta < \tau \frac{\mu_1' - \alpha_2 \mu_2'}{\alpha_2}, \tag{2.17}$$

où les α_i, pour $i = 1, 2$ sont données dans l'hypothèse (**H2**) et les μ_i, μ_i' pour $i = 1, 2$ sont données dans l'hypothèse (**H3**).

2.1.3 L'énergie du système

En multipliant la première équation du problème (2.15) par u_t, la deuxième par v_t et en intégrant sur Ω et Γ_1, respectivement, on obtient

$$(u_{tt}, u_t) - (\Delta u, u_t) + \mu_1(g_1(u_t), u_t) + \mu_2(k_1(z_1(x,1,t)), u_t) = 0,$$

$$(v_{tt}, v_t)_{\Gamma_1} + (\partial_\nu u, v_t)_{\Gamma_1} - (\Delta_T v, v_t)_{\Gamma_1} + \mu_1'(g_2(v_t), v_t)_{\Gamma_1} + \mu_2'(k_2(z_2(x,1,t)), v_t)_{\Gamma_1} = 0.$$

La première équation donne, après une intégration sur Ω

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx - \int_\Omega \Delta u u_t dx + \mu_1 \int_\Omega u_t g_1(u_t) dx + \mu_2 \int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t)) dx = 0 \tag{2.18}$$

et la deuxième donne, après une intégration sur Γ_1

$$\int_{\Gamma_1} v_{tt}v_t d\sigma + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v_t d\sigma - \int_{\Gamma_1} \Delta_T v v_t d\sigma + \mu_1' \int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t) d\sigma + \mu_2' \int_{\Gamma_1} v_t k_2(z_2(x,1,t)) d\sigma = 0. \tag{2.19}$$

En appliquant la formule de Green, l'égalité (2.18) devient

$$\int_\Omega u_{tt}u_t dx + \int_\Omega \nabla u \nabla u_t dx - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v_t d\sigma + \mu_1 \int_\Omega u_t g_1(u_t) dx = -\mu_2 \int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t)) dx,$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2 + \frac{1}{2}\|\nabla u\|^2\right\} - \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v_t d\sigma + \mu_1 \int_\Omega u_t g_1(u_t) dx = -\mu_2 \int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t)) dx. \tag{2.20}$$

De même pour la deuxième équation (2.19), on obtient

$$\int_{\Gamma_1} v_{tt}v_t d\sigma + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v_t d\sigma + \int_{\Gamma_1} \nabla_T v \nabla_T v_t d\sigma + \mu_1' \int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t) d\sigma + \mu_2' \int_{\Gamma_1} v_t k_2(z_2(x,1,t)) d\sigma = 0,$$

ce qui donne

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|v_t\|_{\Gamma_1}^2 + \frac{1}{2}\|\nabla_T v\|_{\Gamma_1}^2\right\} + \int_{\Gamma_1} \partial_\nu u v_t d\sigma + \mu_1' \int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t) d\sigma = -\mu_2' \int_{\Gamma_1} v_t k_2(z_2(x,1,t)) d\sigma. \tag{2.21}$$

En sommant (2.20) et (2.21), on trouve

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\left(\|u_t\|^2 + \|\nabla u\|^2 + \|v_t\|_{\Gamma_1}^2 + \|\nabla_T v\|_{\Gamma_1}^2\right)\right\} + \mu_1 \int_\Omega u_t g_1(u_t) dx + \mu_1' \int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t) d\sigma \\ = \; & -\mu_2 \int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t)) dx - \mu_2' \int_{\Gamma_1} k_2(z_2(x,1,t)) d\sigma. \end{aligned} \tag{2.22}$$

Maintenant, en multipliant la troisième équation du problème (2.15) par $\xi k_1(z_1(x,\rho,t))$, la quatrième équation par $\zeta k_2(z_2(x,\rho,t))$ et en intégrant sur $\Omega \times (0,1)$ et $\Gamma_1 \times (0,1)$, respectivement, on obtient

$$\int_\Omega \int_0^1 \left[\tau z_{1t}(x,\rho,t) + z_{1\rho}(x,\rho,t)\right] \xi k_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx = 0,$$

$$\int_{\Gamma_1} \int_0^1 \left[\tau z_{2t}(x,\rho,t) + z_{2\rho}(x,\rho,t)\right] \zeta k_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho d\sigma = 0,$$

c'est-à-dire :

$$\xi \int_\Omega \int_0^1 \tau z_{1t}(x,\rho,t) k_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx = -\xi \int_\Omega \int_0^1 z_{1\rho}(x,\rho,t) k_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx,$$

$$\zeta \int_{\Gamma_1} \int_0^1 \tau z_{2t}(x,\rho,t) k_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho d\sigma = -\zeta \int_{\Gamma_1} \int_0^1 z_{2\rho}(x,\rho,t) k_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho d\sigma,$$

qui sont équivalentes aux équations suivantes

$$\begin{aligned}
\xi \int_\Omega \int_0^1 z_{1t}(x,\rho,t) k_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx &= -\frac{\xi}{\tau} \int_\Omega \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx \\
&= -\frac{\xi}{\tau} \int_\Omega \left[K_1(z_1(x,1,t)) - K_1(u_t)\right] dx,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\zeta \int_{\Gamma_1} \int_0^1 z_{2t}(x,\rho,t) k_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho d\sigma &= -\frac{\zeta}{\tau} \int_{\Gamma_1} \int_0^1 \frac{\partial}{\partial \rho} K_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho d\sigma \\
&= -\frac{\zeta}{\tau} \int_{\Gamma_1} \left[K_2(z_2(x,1,t)) - K_2(v_t)\right] d\sigma,
\end{aligned}$$

ce qui nous donne

$$\xi \frac{d}{dt} \int_\Omega \int_0^1 K_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx = -\frac{\xi}{\tau} \int_\Omega K_1(z_1(x,1,t)) dx + \frac{\xi}{\tau} \int_\Omega K_1(u_t) dx, \tag{2.23}$$

$$\zeta \frac{d}{dt} \int_{\Gamma_1} \int_0^1 K_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho d\sigma = -\frac{\zeta}{\tau} \int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t)) d\sigma + \frac{\zeta}{\tau} \int_{\Gamma_1} K_2(v_t) d\sigma. \tag{2.24}$$

En combinant (2.22), (2.23) et (2.24), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left\{\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|v_t\|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\|\nabla_T v\|^2_{\Gamma_1}+\xi\int_\Omega\left(\int_0^1 K_1(z_1(x,\rho,t))d\rho\right)dx\right.\\
&\left.+\zeta\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^1 K_2(z_2(x,\rho,t))d\rho\right)d\sigma\right\}\\
= \quad & -\mu_1\int_\Omega u_t g_1(u_t)dx-\mu_1'\int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma-\mu_2\int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t))dx-\mu_2'\int_{\Gamma_1} v_t k_2(z_2(x,1,t))d\sigma\\
&-\frac{\xi}{\tau}\int_\Omega K_1(z_1(x,1,t))dx+\frac{\xi}{\tau}\int_\Omega K_1(u_t)dx-\frac{\zeta}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t))d\sigma+\frac{\zeta}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(v_t)d\sigma. \quad (2.25)
\end{aligned}$$

D'après la formule (2.25), on déduit que l'énergie est donnée par :

$$\begin{aligned}
E(t)=&\frac{1}{2}\|u_t\|^2+\frac{1}{2}\|\nabla u\|^2+\frac{1}{2}\|v_t\|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\|\nabla_T v\|^2_{\Gamma_1}\\
&+\xi\int_\Omega\left(\int_0^1 K_1(z_1(x,\rho,t))d\rho\right)dx+\zeta\int_{\Gamma_1}\left(\int_0^1 K_2(z_2(x,\rho,t))d\rho\right)d\sigma. \quad (2.26)
\end{aligned}$$

2.1.4 Décroissance de l'énergie

Le lemme suivant montre que le système (2.15) est dissipatif.

Lemme 2.1 *Soit (u,v,z_1,z_2) une solution du problème (2.15). Alors, la fonctionnelle de l'énergie définie par (2.26) satisfait*

$$\begin{aligned}
E'(t) \quad \leq \quad & -a_1\int_\Omega u_t g_1(u_t)dx-a_2\int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma\\
&-a_3\int_\Omega z_1(x,1,t))k_1(z_1(x,1,t))dx\\
&-a_4\int_{\Gamma_1} z_2(x,1,t))k_2(z_2(x,1,t))d\sigma\\
\leq \quad & 0 \qquad\qquad \textit{pour tout } t\geq 0, \quad (2.27)
\end{aligned}$$

où $a_1=\left(\mu_1-\frac{\xi}{\tau}\alpha_2-\mu_2\alpha_2\right)$, $a_2=\left(\mu_1'-\frac{\zeta}{\tau}\alpha_2-\mu_2'\alpha_2\right)$, $a_3=\left(\alpha_1\frac{\xi}{\tau}-\mu_2(1-\alpha_1)\right)$ *et* $a_4=\left(\alpha_1\frac{\zeta}{\tau}-\mu_2'(1-\alpha_1)\right)$.

Preuve. D'après (2.26), on a

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &= -\mu_1\int_\Omega u_t g_1(u_t)dx - \mu_1'\int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma - \mu_2\int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t))dx - \mu_2'\int_{\Gamma_1} v_t k_2(z_2(x,1,t))d\sigma \\
&\quad -\frac{\xi}{\tau}\int_\Omega K_1(z_1(x,1,t))dx + \frac{\xi}{\tau}\int_\Omega K_1(u_t)dx - \frac{\zeta}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t))d\sigma + \frac{\zeta}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(v_t)d\sigma.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.14), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\le -\left(\mu_1 - \frac{\xi\alpha_2}{\tau}\right)\int_\Omega u_t g_1(u_t)dx - \left(\mu_1' - \frac{\zeta\alpha_2}{\tau}\right)\int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma - \mu_2\int_\Omega u_t k_1(z_1(x,1,t))dx \\
&\quad -\mu_2'\int_{\Gamma_1} v_t k_2(z_2(x,1,t))d\sigma - \frac{\xi}{\tau}\int_\Omega K_1(z_1(x,1,t))dx - \frac{\zeta}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t))d\sigma.
\end{aligned}$$

De la définition de K_i et en utilisant le Lemme 1.6, on trouve pour $i = 1, 2$

$$K_i^*(s) = s(K_i')^{-1}(s) - K_i[(K_i')^{-1}(s)] \qquad \forall s \ge 0,$$

par conséquent

$$\begin{aligned}
K_i^*(k_i(z_i(x,1,t))) &= z_i(x,1,t)k_i(z_i(x,1,t)) - K_i(z_i(x,1,t)) \\
&\le (1-\alpha_1)\, z_i(x,1,t)k_i(z_i(x,1,t)). \qquad (2.28)
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant (2.14) et (1.5), avec une fois $s = k_1(z_1(x,1,t))$, $r = u_t(x,t)$ et une deuxième fois $s = k_2(z_2(x,1,t))$, $r = v_t(x,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}E(t) &\le -\left(\mu_1 - \frac{\xi\alpha_2}{\tau}\right)\int_\Omega u_t g_1(u_t)dx - \left(\mu_1' - \frac{\zeta\alpha_2}{\tau}\right)\int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma - \frac{\xi}{\tau}\int_\Omega K_1(z_1(x,1,t))dx \\
&\quad -\frac{\zeta}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t))d\sigma + \mu_2\int_\Omega (K_1(u_t) + K_1^*(k_1(z_1(x,1,t)))dx \\
&\quad +\mu_2'\int_{\Gamma_1} (K_2(v_t) + K_2^*(k_2(z_2(x,1,t)))d\sigma \\
&\le -\left(\mu_1 - \frac{\xi\alpha_2}{\tau} - \mu_2\alpha_2\right)\int_\Omega u_t g_1(u_t)dx - \left(\mu_1' - \frac{\zeta\alpha_2}{\tau} - \mu_2'\alpha_2\right)\int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma \\
&\quad -\left(\alpha_1\frac{\xi}{\tau} - \mu_2(1-\alpha_1)\right)\int_\Omega z_1(x,1,t)k_1(z_1(x,1,t))dx \\
&\quad -\left(\alpha_1\frac{\zeta}{\tau} - \mu_2'(1-\alpha_1)\right)\int_{\Gamma_1} z_2(x,1,t)k_2(z_2(x,1,t))d\sigma.
\end{aligned}$$

Les hypothèses (2.16) et (2.17) impliquent que

$$\begin{cases} \left(\mu_1 - \frac{\xi\alpha_2}{\tau} - \mu_2\alpha_2\right) < 0, \\ \left(\mu_1' - \frac{\zeta\alpha_2}{\tau} - \mu_2'\alpha_2\right) < 0, \\ \left(\alpha_1\frac{\xi}{\tau} - \mu_2\left(1-\alpha_1\right)\right) < 0, \\ \left(\alpha_1\frac{\zeta}{\tau} - \mu_2'\left(1-\alpha_1\right)\right) < 0. \end{cases}$$

Ainsi, on obtient (2.27), donc on déduit que $E'(t) \leq 0$, d'où le système (2.15) est dissipatif. Ce qui termine la preuve du Lemme 2.1. ■

2.2 Existence globale

Dans cette section, on présente et on démontre en utilisant la méthode d'approximation de Faedo-Galerkin, un résultat d'existence et d'unicité de la solution du système (2.15).

Théorème 2.1 *Soient* $(u_0, u_1, v_0, v_1) \in [H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \times H^1_{\Gamma_0}(\Omega)] \times [H^2(\Gamma_1) \times H^1(\Gamma_1)]$, $f_{0_1} \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega; H^1(0,1))$ *et* $f_{0_2} \in H^1(\Gamma_1; H^1(0,1))$, *vérifiant la condition de compatibilté suivante*

$$\begin{cases} \partial_\nu u_0 - \Delta_T v_0 + \mu_1' g_2(v_1) = 0, & sur \quad \Gamma_1, \\ f_{0_1}(.,0) = u_t, & dans \quad \Omega, \\ f_{0_2}(.,0) = v_t, & sur \quad \Gamma_1. \end{cases} \tag{2.29}$$

On suppose que $(\mathbf{H1})-(\mathbf{H3})$ *sont vérifiées, alors le problème (2.15) possède une unique solution faible globale satisfaisant pour tout* $T > 0$

$$\begin{aligned} (u, u_t, u_{tt}) &\in L^\infty(0,T; \left[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right]^2 \times L^2(\Omega)), \\ (v, v_t, v_{tt}) &\in L^\infty(0,T; \left[H^1(\Gamma_1)\right]^2 \times L^2(\Gamma_1)). \end{aligned}$$

Preuve. On suppose que $(u_0, v_0) \in (H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)) \times (H^2(\Gamma_1) \cap H^1(\Gamma_1))$, $(u_1, v_1) \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \times H^1(\Gamma_1)$, $f_{0_1} \in H^1_{\Gamma_0}(\Omega; H^1(0,1))$ et $f_{0_2} \in H^1(\Gamma_1; H^1(0,1))$.

Pour chaque $n \in \mathbb{N}$, on note par U_n et V_n, les deux espaces de dimension finie, définis par $U_n = [w_1, w_2, ..., w_n]$ et $V_n = [\widetilde{w}_1, \widetilde{w}_2, ..., \widetilde{w}_n]$, respectivement, où $\{w_i\}_{1\leq i\leq n}$ et $\{\widetilde{w}_i\}_{1\leq i\leq n}$ sont des bases dans les espaces $H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)$ et $H^2(\Gamma_1) \cap H^1(\Gamma_1)$, respectivement.

On définit pour $1 \leq i \leq n$, les suites $\phi_i(x,\rho)$ et $\widetilde{\phi}_i(x,\rho)$ comme suit :

$$\begin{cases} \phi_i(x,0) = w_i, \\ \widetilde{\phi}_i(x,0) = \widetilde{w}_i. \end{cases}$$

Alors, on prolonge $\phi_i(x,0)$ par $\phi_i(x,\rho)$ sur $L^2(\Omega \times (0,1))$ et $\widetilde{\phi}_i(x,0)$ par $\widetilde{\phi}_i(x,\rho)$ sur $L^2(\Gamma_1 \times (0,1))$ et on note par Z_n, $\widetilde{Z}_n$, les espaces linéaires générés par $\{\phi_1, \phi_2, ..., \phi_n\}$ et $\left\{\widetilde{\phi}_1, \widetilde{\phi}_2, ..., \widetilde{\phi}_n\right\}$, respectivement.

On définit les suites d'approximations u^n, v^n, z_1^n et z_2^n par

$$u^n(t) = \sum_{i=1}^n a_i^n(t) w_i, \; v^n(t) = \sum_{i=1}^n b_i^n(t)\widetilde{w}_i, \; z_1^n(t) = \sum_{i=1}^n c_i^n(t)\phi_i, \; z_2^n(t) = \sum_{i=1}^n d_i^n(t)\widetilde{\phi}_i,$$

où a_i^n, b_i^n, c_i^n et d_i^n sont de classe $\mathcal{C}^2$ et déterminées par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{aligned} &(u_{tt}^n, w_i) + (\nabla u^n, \nabla w_i) + \mu_1(g_1(u_t^n), w_i) + \mu_2(k_1(z_1^n(x,1,t)), w_i) \\ &+(v_{tt}^n, \widetilde{w}_i)_{\Gamma_1} + (\nabla_T v^n, \nabla_T \widetilde{w}_i)_{\Gamma_1} + \mu_1'(g_2(v_t^n), \widetilde{w}_i)_{\Gamma_1} \\ &+\mu_2'(k_2(z_2^n(x,1,t)), \widetilde{w}_i)_{\Gamma_1} = 0, \qquad\qquad 1 \leq i \leq n, \end{aligned} \tag{2.30}$$

$$\int_\Omega \int_0^1 (\tau(z_1^n)_t + (z_1^n)_\rho)\phi_i d\rho dx = 0, \qquad 1 \leq i \leq n \tag{2.31}$$

et

$$\int_{\Gamma_1} \int_0^1 (\tau(z_2^n)_t + (z_2^n)_\rho)\widetilde{\phi}_i d\rho d\sigma = 0, \qquad 1 \leq i \leq n, \tag{2.32}$$

avec les données initiales suivantes :

$$\begin{cases} u^n(0) = u_0^n = \sum_{i=1}^n a_i^n(0) w_i \to u_0 \text{ dans } \left(H^2(\Omega) \cap H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right), \\ u_t^n(0) = u_1^n = \sum_{i=1}^n (a_i^n)_t(0) w_i \to u_1 \text{ dans } H^1_{\Gamma_0}(\Omega), \\ v^n(0) = v_0^n = \sum_{i=1}^n b_i^n(0)\widetilde{w}_i \to v_0 \text{ dans } (H^2(\Gamma_1) \cap H^1(\Gamma_1)), \\ v_t^n(0) = v_1^n = \sum_{i=1}^n (b_i^n)_t(0)\widetilde{w}_i \to v_1 \text{ dans } H^1(\Gamma_1), \\ z_1^n(\rho,0) = z_{0_1}^n = \sum_{i=1}^n c_i^n(0)\phi_i \to f_{0_1} \text{ dans } H^1_{\Gamma_0}(\Omega; H^1(0,1)), \\ z_2^n(\rho,0) = z_{0_2}^n = \sum_{i=1}^n d_i^n(0)\widetilde{\phi}_i \to f_{0_2} \text{ dans } H^1(\Gamma_1; H^1(0,1)). \end{cases} \tag{2.33}$$

L'existence locale des solutions régulières du système (2.30)-(2.33) est standard par la théorie des équations différentielles ordinaires, on peut conclure qu'il existe un $t_n > 0$, tel que dans $[0, t_n]$, le système (2.30)-(2.33) a une unique solution locale, qui peut être prolonger à un intervalle maximal $[0, T]$ (avec $0 < T \leq \infty$) par le lemme de Zorn, dès que les termes non linéaires dans (2.30) sont localement Lipschitz continus.

On peut utiliser un argument de compacité standard, pour limiter la procédure et il suffit de dériver certaines estimations à priori pour (u^n, v^n, z_1^n, z_2^n).

2.2.1 Estimations à priori

Première estimation :

Puisque les suites $(u_0^n)_n$, $(u_1^n)_n$, $(v_0^n)_n$, $(v_1^n)_n$, $(z_{0_1}^n)_n$ et $(z_{0_2}^n)_n$ convergent, des calculs standars en utilisant (2.30)-(2.33), similaires à ceux utilisés pour dériver (2.27), donne une constante M_1, indépendante de n, telle que

$$\begin{aligned}
& E_n(t) + a_1 \int_0^t \int_\Omega u_t^n g_1(u_t^n) dx ds + a_3 \int_0^t \int_\Omega z_1^n(x,1,s) k_1(z_1^n(x,1,s)) dx ds \\
& + a_2 \int_0^t \int_{\Gamma_1} v_t^n g_2(v_t^n) d\sigma ds + a_4 \int_0^t \int_{\Gamma_1} z_2^n(x,1,s) k_2(z_2^n(x,1,s)) d\sigma ds \\
\leq \; & E_n(0) \leq M_1, \qquad (2.34)
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
E_n(t) \; = \; & \frac{1}{2} \left(\|u_t^n\|^2 + \|\nabla u^n\|^2 + \|v_t^n\|_{\Gamma_1}^2 + \|\nabla_T v^n\|_{\Gamma_1}^2 \right) \\
& + \xi \int_\Omega \left(\int_0^1 K_1(z_1^n(x,\rho,t) d\rho \right) dx + \zeta \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 K_2(z_2^n(x,\rho,t) d\rho \right) d\sigma.
\end{aligned}$$

L'estimation (2.34) implique que la solution $(v^n, v^n, z_1^n, z_2^n)_n$ existe globalement dans $[0, +\infty)$ et donne pour tout $T > 0$

$$u^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0, T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right), \qquad (2.35)$$

$$v^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0, T; H^1(\Gamma_1)\right), \qquad (2.36)$$

$$u_t^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.37}$$

$$v_t^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \tag{2.38}$$

$$u_t^n g_1(u_t^n) \text{ est bornée dans } L^1(\Omega\times(0,T)), \tag{2.39}$$

$$v_t^n g_2(v_t^n) \text{ est bornée dans } L^1(\Gamma_1\times(0,T)), \tag{2.40}$$

$$K_1(z_1^n)) \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^1(\Omega\times(0,1))\right), \tag{2.41}$$

$$K_2(z_2^n)) \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^1(\Gamma_1\times(0,1))\right), \tag{2.42}$$

$$z_1^n(x,1,t)k_1(z_1^n(x,1,t)) \text{ est bornée dans } L^1(\Omega\times(0,T)), \tag{2.43}$$

$$z_2^n(x,1,t)k_2(z_2^n(x,1,t)) \text{ est bornée dans } L^1(\Gamma_1\times(0,T)). \tag{2.44}$$

Seconde estimation :

On estime $u_{tt}^n(0)$ et $v_{tt}^n(0)$ dans les normes $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_1)$, respectivement.

En prenant $t=0$ et en considérant $w_i = u_{tt}^n(0)$ et $\widetilde{w}_i = v_{tt}^n(0)$ dans (2.30), on obtient

$$\begin{aligned}
& \|u_{tt}^n(0)\|^2 + (\nabla u_0^n, \nabla u_{tt}^n(0)) + \mu_1(g_1(u_1^n), u_{tt}^n(0)) + \mu_2(k_1(z_{0_1}^n), u_{tt}^n(0)) \\
& + \|v_{tt}^n(0)\|_{\Gamma_1}^2 + (\nabla_T v_0^n, \nabla_T v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} + \mu_1'(g_2(v_1^n), v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} + \mu_2'(k_2(z_{0_2}^n), v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} \\
= \;& 0.
\end{aligned} \tag{2.45}$$

On a les égalités suivantes :

$$(\nabla u_0^n, \nabla u_{tt}^n(0)) = -(\Delta u_0^n, u_{tt}^n(0)) + (\partial_\nu u_0^n, v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1}, \tag{2.46}$$

$$(\nabla_T v_0^n, \nabla_T v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} = -(\Delta_T v_0^n, v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1}. \tag{2.47}$$

En employant l'inégalité de Young (1.3) sur (2.46) et (2.47) et en utilisant le fait que si $u_0^n \in \left(H_{\Gamma_0}^1(\Omega)\cap H^2(\Omega)\right)$, alors $\partial_\nu u_0^n \in H^{1/2}(\Gamma_1) \hookrightarrow L^2(\Gamma_1)$, par conséquent $\partial_\nu u_0^n \in L^2(\Gamma_1)$ et donc on obtient

$$\begin{aligned}
(\nabla u_0^n, \nabla u_{tt}^n(0)) &= -(\Delta u_0^n, u_{tt}^n(0)) + (\partial_\nu u_0^n, v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} \\
&\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\Delta u_0^n\right\|^2 + \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\partial_\nu u_0^n\right\|_{\Gamma_1}^2 + \varepsilon\left\|u_{tt}^n(0)\right\|^2 + \varepsilon\left\|v_{tt}^n(0\right\|_{\Gamma_1}^2, \qquad (2.48) \\
-(\Delta_T v_0^n, v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} &\leq \frac{1}{4\varepsilon}\left\|\Delta_T v_0^n\right\|_{\Gamma_1}^2 + \varepsilon\left\|v_{tt}^n(0)\right\|_{\Gamma_1}^2, \qquad (2.49) \\
\mu_1(g_1(u_1^n), u_{tt}^n(0)) &\leq \frac{\mu_1^2}{4\varepsilon}\left\|g_1(u_1^n)\right\|^2 + \varepsilon\left\|u_{tt}^n(0)\right\|^2, \qquad (2.50) \\
\mu_1'(g_2(v_1^n), v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} &\leq \frac{(\mu_1')^2}{4\varepsilon}\left\|g_2(v_1^n)\right\|_{\Gamma_1}^2 + \varepsilon\left\|v_{tt}^n(0)\right\|_{\Gamma_1}^2, \qquad (2.51) \\
\mu_2(k_1(z_{0_1}^n), u_{tt}^n(0)) &\leq \frac{\mu_2^2}{4\varepsilon}\left\|k_1(z_{0_1}^n)\right\|^2 + \varepsilon\left\|u_{tt}^n(0)\right\|^2, \qquad (2.52) \\
\mu_2'(k_2(z_{0_2}^n), v_{tt}^n(0))_{\Gamma_1} &\leq \frac{(\mu_2')^2}{4\varepsilon}\left\|k_2(z_{0_2}^n)\right\|_{\Gamma_1}^2 + \varepsilon\left\|v_{tt}^n(0)\right\|_{\Gamma_1}^2. \qquad (2.53)
\end{aligned}$$

En substituant (2.48)-(2.53) dans (2.45), avec un bon choix de ε et puisque $(g_1(u_1^n))_n$, $(k_1(z_{0_1}^n))_n$ et $(g_2(v_1^n))_n$, $(k_2(z_{0_2}^n))_n$ sont bornées dans $L^2(\Omega)$ et $L^2(\Gamma_1)$, respectivement, par (**H1**), (**H2**) et les données initiales (2.33), on obtient

$$\left\|u_{tt}^n(0)\right\| + \left\|v_{tt}^n(0)\right\|_{\Gamma_1} \leq M_2, \qquad (2.54)$$

où M_2 est une constante positive indépendante de n et dépend des données initiales.

Ensuite, en dérivant (2.30) par rapport à t, en multipliant l'équation résultante par $(a_i^n)_{tt}(t)$ dans Ω et par $(b_i^n)_{tt}(t)$ sur Γ_1 et sommant sur i de 1 à n, on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\left\|u_{tt}^n\right\|^2 + \left\|\nabla u_t^n\right\|^2 + \left\|v_{tt}^n\right\|_{\Gamma_1}^2 + \left\|\nabla_T v_t^n\right\|_{\Gamma_1}^2\right\} \\
&+\mu_1\int_\Omega \left|u_{tt}^n\right|^2 (g_1)_t(u_t^n)dx + \mu_2\int_\Omega u_{tt}^n(z_1^n)_t(x,1,t)(k_1)_t(z_1^n(x,1,t))dx \\
&+\mu_1'\int_{\Gamma_1} \left|v_{tt}^n\right|^2 (g_2)_t(v_t^n)d\sigma + \mu_2'\int_{\Gamma_1} v_{tt}^n(z_2^n)_t(x,1,t)(k_2)_t(z_2^n(x,1,t))d\sigma \\
=\; &0. \qquad (2.55)
\end{aligned}$$

En dérivant (2.31) par rapport au temps t, en multipliant le résultat par $(c_i^n)_t(t)$ et en sommant sur i, de 1 à n, on obtient

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\left\|(z_1^n)_t\,(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left\|(z_1^n)_t\,(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}=0. \tag{2.56}$$

De manière analogue, en dérivant (2.32) par rapport au temps t, en multipliant le résultat par $(d_i^n)_t(t)$ et en sommant sur i, de 1 à n, on trouve

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\left\|(z_2^n)_t\,(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left\|(z_2^n)_t\,(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}=0. \tag{2.57}$$

En prenant la somme de (2.55), (2.56) et (2.57), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|^2+\|v_{tt}^n\|^2_{\Gamma_1}+\|\nabla_T v_t^n\|^2_{\Gamma_1}\\
&+\tau\left\|(z_1^n)_t\,(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\tau\left\|(z_2^n)_t\,(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}\Big\}\\
&+\mu_1\int_\Omega |u_{tt}^n|^2\,(g_1)_t(u_t^n)dx+\frac{1}{2}\int_\Omega |(z_1^n)_t(x,1,t)|^2\,dx\\
&+\mu_1'\int_{\Gamma_1} |v_{tt}^n|^2\,(g_2)_t(v_t^n)d\sigma+\frac{1}{2}\int_{\Gamma_1} |(z_2^n)_t(x,1,t)|^2\,d\sigma\\
=\;&\frac{1}{2}\|u_{tt}^n\|^2-\mu_2\int_\Omega u_{tt}^n(z_1^n)_t(x,1,t)(k_1)_t(z_1^n(x,1,t))dx\\
&+\frac{1}{2}\|v_{tt}^n\|^2_{\Gamma_1}-\mu_2'\int_{\Gamma_1} v_{tt}^n(z_2^n)_t(x,1,t)(k_2)_t(z_2^n(x,1,t))d\sigma.
\end{aligned} \tag{2.58}$$

Et en utilisant (2.13) et l'inégalité de Young (1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
&\mu_2\int_\Omega u_{tt}^n(z_1^n)_t(x,1,t)(k_1)_t(z_1^n(x,1,t))dx\\
\leq\;&\varepsilon\int_\Omega |(z_1^n)_t(x,1,t)|^2\,dx+\frac{(\mu_2\beta)^2}{4\varepsilon}\|u_{tt}^n\|^2,
\end{aligned} \tag{2.59}$$

$$\begin{aligned}
&\mu_2'\int_{\Gamma_1} v_{tt}^n(z_2^n)_t(x,1,t)(k_2)_t(z_2^n(x,1,t))d\sigma\\
\leq\;&\varepsilon\int_{\Gamma_1} |(z_2^n)_t(x,1,t)|^2\,d\sigma+\frac{(\mu_2'\beta)^2}{4\varepsilon}\|v_{tt}^n\|^2_{\Gamma_1}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

En substituant (2.59) et (2.60) dans (2.58) et en choisissant ε suffisamment petit, on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|^2+\|v_{tt}^n\|_{\Gamma_1}^2+\|\nabla_T v_t^n\|_{\Gamma_1}^2\right.\\
& \left.+\tau\left\|(z_1^n)_t(\rho,t)\right\|_{L^2(\Omega\times(0,1))}^2+\tau\left\|(z_2^n)_t(\rho,t)\right\|_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}^2\right\}\\
& +\mu_1\int_\Omega|u_{tt}^n|^2(g_1)_t(u_t^n)dx+c\int_\Omega|(z_1^n)_t(x,1,t)|^2dx\\
& +\mu_1'\int_{\Gamma_1}|v_{tt}^n|^2(g_2)_t(v_t^n)d\sigma+c\int_{\Gamma_1}|(z_2^n)_t(x,1,t)|^2d\sigma\\
\leq\ & c'\left\{\|u_{tt}^n\|^2+\|v_{tt}^n\|_{\Gamma_1}^2\right\}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette dérnière inégalité sur $(0,t)$, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\left\{\|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|^2+\|v_{tt}^n\|_{\Gamma_1}^2+\|\nabla_T v_t^n\|_{\Gamma_1}^2\right.\\
& \left.+\tau\left\|(z_1^n)_t(\rho,t)\right\|_{L^2(\Omega\times(0,1))}^2+\tau\left\|(z_2^n)_t(\rho,t)\right\|_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}^2\right\}\\
& +\mu_1\int_0^t\int_\Omega|u_{tt}^n|^2(g_1)_t(u_t^n)dxds+c\int_0^t\int_\Omega(z_1^n)_t\left|(x,1,s)\right|^2dxds\\
& +\mu_1'\int_0^t\int_{\Gamma_1}|v_{tt}^n|^2(g_2)_t(v_t^n)d\sigma ds+c\int_0^t\int_{\Gamma_1}|(z_2^n)_t(x,1,s)|^2d\sigma ds\\
\leq\ & \frac{1}{2}\left\{\|u_{tt}^n(0)\|^2+\|v_{tt}^n(0)\|_{\Gamma_1}^2+\|\nabla u_1^n\|^2+\|\nabla_T v_1^n\|_{\Gamma_1}^2\right.\\
& \left.+\tau\left\|(z_1^n)_t(x,\rho,0)\right\|_{L^2(\Omega\times(0,1))}^2+\tau\left\|(z_2^n)_t(x,\rho,0)\right\|_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}^2\right\}\\
& +c'\left\{\int_0^t\|u_{tt}^n(s)\|^2ds+\int_0^t\|v_{tt}^n(s)\|_{\Gamma_1}^2ds\right\}.
\end{aligned}$$

En utilisant (2.33), (2.54) et le lemme de Gronwall, il s'ensuit que

$$\begin{aligned}
& \|u_{tt}^n\|^2+\|\nabla u_t^n\|^2+\|v_{tt}^n\|_{\Gamma_1}^2+\|\nabla_T v_t^n\|_{\Gamma_1}^2+\tau\left\|(z_1^n)_t(\rho,t)\right\|_{L^2(\Omega\times(0,1))}^2\\
& +\tau\left\|(z_2^n)_t(\rho,t)\right\|_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}^2+\mu_1\int_0^t\int_\Omega|u_{tt}^n|^2(g_1)_t(u_t^n)dxds\\
& +c\int_0^t\int_\Omega(z_1^n)_t\left|(x,1,s)\right|^2dxds+\mu_1'\int_0^t\int_{\Gamma_1}|v_{tt}^n|^2(g_2)_t(v_t^n)d\sigma ds\\
& +c\int_0^t\int_{\Gamma_1}|(z_2^n)_t(x,1,s)|^2d\sigma ds\\
\leq\ & M_3,
\end{aligned}$$

où M_3 est indépendante de n et pour tout $t \in [0,T]$. Par conséquent, on conclut que

$$u_t^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right), \tag{2.61}$$

$$v_t^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1(\Gamma_1)\right), \tag{2.62}$$

$$u_{tt}^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.63}$$

$$v_{tt}^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \tag{2.64}$$

$$(z_1^n)_t \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times(0,1)), \tag{2.65}$$

$$(z_2^n)_t \text{ est bornée dans } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1\times(0,1)). \tag{2.66}$$

Estimation pour $(z_1^n)_n$ et $(z_2^n)_n$:

En remplaçant ϕ_i par $-\Delta\phi_i$ dans (2.31), en multipliant l'équation résultante par $c_i^n(t)$ et en sommant sur i, de 1 à n, on obtient

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla z_1^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left\|\nabla z_1^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}=0. \tag{2.67}$$

De même, en remplaçant $\widetilde{\phi}_i$ par $-\Delta_T\widetilde{\phi}_i$ dans (2.32), en multipliant l'équation résultante par $d_i^n(t)$ et en sommant sur i, de 1 à n, il s'ensuit que

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla_T z_2^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}+\frac{1}{2}\frac{d}{d\rho}\left\|\nabla_T z_2^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}=0. \tag{2.68}$$

En combinant (2.67) et (2.68), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla z_1^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\left\|\nabla_T z_2^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}\\
&+\frac{1}{2}\left\{\int_\Omega\left|\nabla z_1^n(x,1,t)\right|^2dx+\int_{\Gamma_1}\left|\nabla_T z_2^n(x,1,t)\right|^2d\sigma\right\}\\
=\;&\frac{1}{2}\left\{\|\nabla u^n\|^2+\|\nabla_T v^n\|^2_{\Gamma_1}\right\}.
\end{aligned}$$

En intégrant cette dérnière égalité sur $(0,t)$ et en utilisant le lemme de Gronwall, on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{\tau}{2}\left\|\nabla z_1^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\frac{\tau}{2}\left\|\nabla_T z_2^n(\rho,t)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}\\
\leq\;& e^{cT}\left\{\frac{\tau}{2}\left\|\nabla z_1^n(x,\rho,0)\right\|^2_{L^2(\Omega\times(0,1))}+\frac{\tau}{2}\left\|\nabla_T z_2^n(x,\rho,0)\right\|^2_{L^2(\Gamma_1\times(0,1))}\right\},
\end{aligned}$$

pour tout $t\in[0,T]$. Alors, on conclut que

$$z_1^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega;L^2(0,1)\right)\right), \tag{2.69}$$

$$z_2^n \text{ est bornée dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Gamma_1;L^2(0,1)\right)\right). \tag{2.70}$$

2.2.2 Le passage à la limite

En appliquant le théorème de Dunford-Petti, on conclut de (2.35)-(2.44), (2.61)-(2.66), (2.69) et (2.70) qu'il existe des sous-suites de $(u^n)_n$, $(v^n)_n$, $(z_1^n)_n$ et $(z_2^n)_n$ qu'on note encore par $(u^n)_n$, $(v^n)_n$, $(z_1^n)_n$ et $(z_2^n)_n$, respectivement, telles que

$$\begin{aligned}
(u^n,u_t^n,u_{tt}^n) &\rightharpoonup (u,u_t,u_{tt}) \text{ faible étoile dans } L^\infty\left(0,T;\left[H^1_{\Gamma_0}(\Omega)\right]^2\times L^2(\Omega)\right), && (2.71)\\
(v^n,v_t^n,v_{tt}^n) &\rightharpoonup (v,v_t,v_{tt}) \text{ faible étoile dans } L^\infty\left(0,T;\left[H^1(\Gamma_1)\right]^2\times L^2(\Gamma_1)\right), && (2.72)\\
g_1(u_t^n) &\rightharpoonup \chi_1 \text{ faible étoile dans } L^2((0,T)\times\Omega), && (2.73)\\
g_2(v_t^n) &\rightharpoonup \chi_2 \text{ faible étoile dans } L^2((0,T)\times\Gamma_1), && (2.74)\\
z_1^n &\rightharpoonup z_1 \text{ faible étoile dans } L^\infty\left(0,T;H^1_{\Gamma_0}\left(\Omega;L^2(0,1)\right)\right), && (2.75)\\
z_2^n &\rightharpoonup z_2 \text{ faible étoile dans } L^\infty\left(0,T;H^1\left(\Gamma_1;L^2(0,1)\right)\right), && (2.76)\\
(z_1^n)_t &\rightharpoonup (z_1)_t \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Omega\times(0,1))), && (2.77)\\
(z_2^n)_t &\rightharpoonup (z_2^n)_t \text{ faible étoile dans } L^\infty(0,T;L^2(\Gamma_1\times(0,1))), && (2.78)\\
k_1(z_1^n(x,1,t)) &\rightharpoonup \Psi_1 \text{ faible étoile dans } L^2((0,T)\times\Omega), && (2.79)\\
k_2(z_2^n(x,1,t)) &\rightharpoonup \Psi_2 \text{ faible étoile dans } L^2((0,T)\times\Gamma_1). && (2.80)
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de Aubin-Lions, (voir Lions [59]), on déduit qu'il existe des sous-suites qu'on note encore $(u^n)_n$, $(v^n)_n$, $(z_1^n)_n$ et $(z_2^n)_n$, telles que

$$u^n \to u \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.81}$$

$$u_t^n \to u_t \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right), \tag{2.82}$$

$$v^n \to v \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \tag{2.83}$$

$$v_t^n \to v_t \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right), \tag{2.84}$$

$$z_1^n \to z_1 \text{ fortement dans } L^2\left(\Omega\times(0,1)\times(0,T)\right), \tag{2.85}$$

$$z_2^n \to z_2 \text{ fortement dans } L^2\left(\Gamma_1\times(0,1)\times(0,T)\right). \tag{2.86}$$

2.2.3 Analyse des termes non linéaires

On note par $Q=\Omega\times(0,T)$ et $\Sigma=\Gamma_1\times(0,T)$.

On peut déduire de (2.82) et (2.84) que

$$u_t^n \to u_t \text{ presque partout dans } Q, \tag{2.87}$$

$$v_t^n \to v_t \text{ presque partout sur } \Sigma, \tag{2.88}$$

et

$$\begin{aligned} z_1^n &\to z_1 \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right) \text{ et } p.p \text{ dans } Q,\\ z_2^n &\to z_2 \text{ fortement dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right) \text{ et } p.p \text{ sur } \Sigma. \end{aligned}$$

A présent, on montre que $g_1(u_t)$, $k_1(z_1(.,1,.))$ sont bornés dans $L^1(Q)$ et que $g_2(v_t)$, $k_2(z_2(.,1,.))$ sont bornés dans $L^1(\Sigma)$. C'est l'objet du lemme suivant :

Lemme 2.2 *Pour chaque $T>0$, $g_1(u_t)$, $k_1(z_1(.,1,.))\in L^1(Q)$, $g_2(v_t)$, $k_2(z_2(.,1,.))\in L^1(\Sigma)$ et on a*

$$\|g_1(u_t)\|_{L^1(Q)}, \|k_1(z_1(.,1,.))\|_{L^1(Q)} \le A_1$$

et

$$\|g_2(v_t)\|_{L^1(\Sigma)}, \|k_2(z_2(.,1,.))\|_{L^1(\Sigma)} \leq A_2,$$

où A_1 et A_2 sont des constantes indépendantes de t.

Preuve. Grâce à l'hypothèse (**H1**), (2.87) et (2.88), on a

$$\begin{aligned} g_1\left(u_t^n(x,t)\right) &\to g_1\left(u_t(x,t)\right) \text{ presque partout dans } Q, \\ g_2(v_t^n(x,t)) &\to g_2(v_t(x,t)) \text{ presque partout sur } \Sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 &\leq u_t^n(x,t)\, g_1\left(u_t^n(x,t)\right) \to u_t(x,t)\, g_1\left(u_t(x,t)\right) \text{ presque partout dans } Q, \\ 0 &\leq v_t^n(x,t)\, g_2(v_t^n(x,t)) \to v_t(x,t)\, g_2(v_t(x,t)) \text{ presque partout sur } \Sigma. \end{aligned}$$

Par conséquent de (2.39), (2.40) et le lemme de Fatou, on a pour tout $T > 0$

$$\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t)\, g_1\left(u_t(x,t)\right) dxdt \leq D_1, \tag{2.89}$$

$$\int_0^T \int_{\Gamma_1} v_t(x,t)\, g_2(v_t(x,t)) d\sigma dt \leq D_2. \tag{2.90}$$

Maintenant, on peut estimer $\int_0^T \int_\Omega |g_1\left(u_t(x,t)\right)| dxdt$ et $\int_0^T \int_{\Gamma_1} |g_2(v_t(x,t))| d\sigma dt$. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz et en utilisant (2.89), (2.90), on obtient

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega |g_1\left(u_t(x,t)\right)| dxdt &\leq c\,|Q|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t)\, g_1\left(u_t(x,t)\right) dxdt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\,|Q|^{\frac{1}{2}}\, D_1^{\frac{1}{2}} \equiv A_1, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Gamma_1} |g_2(v_t(x,t))| d\sigma dt &\leq c\,|\Sigma|^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^T \int_{\Gamma_1} v_t(x,t)\, g_2(v_t(x,t)) d\sigma dt\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leq c\,|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\, D_2^{\frac{1}{2}} \equiv A_2, \end{aligned}$$

où $|Q|$ et $|\Sigma|$ sont les mesures de Q et Σ, respectivement.

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_\Omega |k_1(z_1(x,1,t))|\,dxdt &\leq c\,|Q|^{\frac{1}{2}}\,D_1^{\frac{1}{2}} \equiv A_1, \\
\int_0^T \int_{\Gamma_1} |k_2(z_2(x,1,t))|\,d\sigma dt &\leq c\,|\Sigma|^{\frac{1}{2}}\,D_2^{\frac{1}{2}} \equiv A_2.
\end{aligned}$$

Ce qui termine la preuve du Lemme 2.2. ■

Ensuite, le lemme ci-dessous, montre que $g_1(u_t^n)$, $k_1(z_1^n)$ convergent vers $g_1(u_t)$, $k_1(z_1)$, respectivement, dans $L^1(Q)$ et que $g_2(v_t^n)$, $k_2(z_2^n)$ convergent vers $g_2(v_t)$, $k_2(z_2)$, respectivement, dans $L^1(\Sigma)$:

Lemme 2.3 *On a les convergences suivantes*

$$\begin{cases}
g_1(u_t^n) \to g_1(u_t) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0,T)), \\
g_2(v_t^n) \to g_2(v_t) \text{ dans } L^1(\Gamma_1 \times (0,T)),
\end{cases}$$

$$\begin{cases}
k_1(z_1^n) \to k_1(z_1) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0,T)), \\
k_2(z_2^n) \to k_2(z_2) \text{ dans } L^1(\Gamma_1 \times (0,T)).
\end{cases}$$

Preuve. Soient $E \subset \Omega \times [0,T]$, $\tilde{E} \subset \Gamma_1 \times [0,T]$ et

$$\begin{aligned}
E_1 &= \left\{(x,t) \in E : |g_1(u_t^n(x,t))| \leq \frac{1}{\sqrt{|E|}}\right\}, \qquad E_2 = E \backslash E_1, \\
\tilde{E}_1 &= \left\{(x,t) \in \tilde{E} : |g_2(v_t^n(x,t))| \leq \frac{1}{\sqrt{\left|\tilde{E}\right|}}\right\}, \qquad \tilde{E}_2 = \tilde{E} \backslash \tilde{E}_1,
\end{aligned}$$

où $|E|$ et $\left|\tilde{E}\right|$ sont les mesures de E et $\tilde{E}$, respectivement.

Si $M(r) = \inf \{|s| : s \in \mathbb{R} \text{ et } |g_i(s)| \geq r, \text{ pour } i = 1, 2\}$, on a

$$\begin{aligned}
\int_E |g_1(u_t^n)|\, dxdt &= \int_{E_1} |g_1(u_t^n)|\, dxdt + \int_{E_2} |g_1(u_t^n)|\, dxdt \\
&\leq \int_{E_1} \frac{1}{\sqrt{|E|}} dxdt + \int_{E_2} |g_1(u_t^n)|\, dxdt \\
&\leq \frac{|E_1|}{\sqrt{|E|}} + \frac{1}{\inf\left\{|u_t^n| : u_t^n \in \mathbb{R} \text{ et } |g_1(u_t^n)| \geq \frac{1}{\sqrt{|E|}}\right\}} \int_{E_2} |u_t^n|\, |g_1(u_t^n)|\, dxdt \\
&\leq c\sqrt{|E|} + \left(M\left(\frac{1}{\sqrt{|E|}}\right)\right)^{-1} \int_{E_2} |u_t^n|\, |g_1(u_t^n)|\, dxdt,
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\tilde{E}} |g_2(v_t^n)|\, d\sigma dt &= \int_{\tilde{E}_1} |g_2(v_t^n)|\, d\sigma dt + \int_{\tilde{E}_2} |g_2(v_t^n)|\, d\sigma dt \\
&\leq c\sqrt{\left|\tilde{E}\right|} + \left(M\left(\frac{1}{\sqrt{\left|\tilde{E}\right|}}\right)\right)^{-1} \int_{\tilde{E}_2} |v_t^n|\, |g_2(v_t^n)|\, d\sigma dt.
\end{aligned}$$

En appliquant (2.39) et (2.40), on trouve que

$$\begin{aligned}
\sup_n \int_E |g_1(u_t^n)|\, dxdt &\to 0 \text{ lorsque } |E| \to 0, \\
\sup_n \int_{\tilde{E}} |g_2(v_t^n)|\, d\sigma dt &\to 0 \text{ lorsque } \left|\tilde{E}\right| \to 0.
\end{aligned}$$

Grâce au théorème de convergence de Vitali , on déduit que

$$\begin{aligned}
g_1(u_t^n) &\to g_1(u_t) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0,T)), \\
g_2(v_t^n) &\to g_2(v_t) \text{ dans } L^1(\Gamma_1 \times (0,T)).
\end{aligned}$$

De même, on obtient

$$\begin{aligned}
k_1(z_1^n(x,1,t)) &\to k_1(z_1(x,1,t)) \text{ dans } L^1(\Omega \times (0,T)), \\
k_2(z_2^n(x,1,t)) &\to k_2(z_2(x,1,t)) \text{ dans } L^1(\Gamma_1 \times (0,T)).
\end{aligned}$$

Ceci termine la démonstration du Lemme 2.3. ■

Par conséquent, le Lemme 2.3 donne

$$\begin{cases} g_1\left(u_t^n\right) \rightharpoonup \chi_1 = g_1\left(u_t\right) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ g_2\left(v_t^n\right) \rightharpoonup \chi_2 = g_2\left(v_t\right) \text{ faiblement dans } L^2(\Gamma_1 \times (0,T)), \end{cases} \tag{2.91}$$

et

$$\begin{cases} k_1(z_1^n(x,1,t)) \rightharpoonup \Psi_1 = k_1\left(z_1(x,1,t)\right) \text{ faiblement dans } L^2(\Omega \times (0,T)), \\ k_2(z_2^n(x,1,t)) \rightharpoonup \Psi_2 = k_2\left(z_2(x,1,t)\right) \text{ faiblement dans } L^2(\Gamma_1 \times (0,T)). \end{cases} \tag{2.92}$$

2.2.4 Vérification que la limite est une solution du problème

Maintenant, en retournant à (2.30) et en utilisant les arguments standards, on peut montrer des estimations précédentes que

$$u_{tt} - \triangle u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 k_1(z_1(.,1,.)) = 0, \quad \text{dans } \mathcal{D}'\left(\Omega \times (0,T)\right). \tag{2.93}$$

Puisque u_{tt}, $g_1(u_t)$ et $k_1(z_1(.,1,.)) \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right)$, on obtient de l'identité (2.93)

$$\triangle u \in L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right),$$

par conséquent (2.93), donne

$$u_{tt} - \triangle u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 k_1(z_1(.,1,.)) = 0, \quad \text{dans } L^2\left(0,T;L^2(\Omega)\right). \tag{2.94}$$

En prenant (2.94) en compte et en utilisant la formule de Green, on trouve

$$\partial_\nu u - \Delta_T v = -\mu_1' g_2(v_t) - \mu_2' k_2(z_2(.,1,.)) - v_{tt}, \quad \text{dans } \mathcal{D}'\left(0,T;H^{-\frac{1}{2}}\left(\Gamma_1\right)\right)$$

et dès que v_{tt}, $g_2(v_t)$ et $k_2(z_2(.,1,.)) \in L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right)$, on déduit que

$$\partial_\nu u - \Delta_T v = -\mu_1' g_2(v_t) - \mu_2' k_2(z_2(.,1,.)) - v_{tt}, \quad \text{dans } L^2\left(0,T;L^2(\Gamma_1)\right),$$

c'est-à-dire :

$$v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + \mu_1' g_2(v_t) + \mu_2' k_2(z_2(.,1,.)) = 0, \quad \text{dans} \quad L^2\left(0,T; L^2(\Gamma_1)\right).$$

En exploitant les convergences (2.75), (2.76), (2.77), (2.78), (2.85) et (2.86), on passe à la limite dans (2.31) et (2.32) pour obtenir

$$\int_0^T \int_0^1 \int_\Omega (\tau(z_1)_t + (z_1)_\rho)\vartheta_1 dx d\rho dt = 0, \qquad \forall \vartheta_1 \in L^2\left(0,T; H^1_{\Gamma_0}(\Omega\times(0,1))\right),$$

$$\int_0^T \int_0^1 \int_{\Gamma_1} (\tau(z_2)_t + (z_2)_\rho)\vartheta_2 d\sigma d\rho dt = 0, \qquad \forall \vartheta_2 \in L^2\left(0,T; H^1(\Gamma_1\times(0,1))\right).$$

2.2.5 Unicité de la solution

Soient (u,v,z_1,z_2) et $(\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)$ deux solutions du problème (2.15). Alors, $(U,V,Z_1,Z_2) = (u,v,z_1,z_2) - (\widetilde{u},\widetilde{v},\widetilde{z}_1,\widetilde{z}_2)$ vérifies le système d'équations suivantes :

$$\begin{cases} U_{tt} - \Delta U + \mu_1 g_1(u_t) - \mu_1 g_1(\widetilde{u}_t) & & \\ \quad +\mu_2 k_1(z_1(x,1,t)) - \mu_2 k_1(\widetilde{z}_1(x,1,t)) = 0, & \text{dans} & \Omega \times (0,\infty), \\ V_{tt} + \partial_\nu U - \Delta_T V + \mu_1' g_2(v_t) - \mu_1' g_2(\widetilde{v}_t) & & \\ \quad +\mu_2' k_2(z_2(x,1,t)) - \mu_2' k_2(\widetilde{z}_2(x,1,t)) = 0, & \text{sur} & \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ \quad \tau Z_{1t}(x,\rho,t) + Z_{1\rho}(x,\rho,t) = 0, & \text{dans} & \Omega\times(0,1)\times(0,\infty), \\ \quad \tau Z_{2t}(x,\rho,t) + Z_{2\rho}(x,\rho,t) = 0, & \text{sur} & \Gamma_1\times(0,1)\times(0,\infty), \\ U = V, & \text{sur} & \Gamma\times(0,\infty), \\ U = 0, & \text{sur} & \Gamma_0\times(0,\infty), \\ Z_1(x,0,t) = U_t(x,t), & \text{dans} & \Omega\times(0,\infty), \\ Z_2(x,0,t) = V_t(x,t), & \text{sur} & \Gamma_1\times(0,\infty), \\ (U(0),V(0)) = (0,0), & \text{dans} & \Omega\times\Gamma, \\ (U_t(0),V_t(0)) = (0,0), & \text{dans} & \Omega\times\Gamma, \\ Z_1(x,\rho,0) = 0, & \text{dans} & \Omega\times(0,1), \\ Z_2(x,\rho,0) = 0, & \text{sur} & \Gamma_1\times(0,1). \end{cases} \tag{2.95}$$

En multipliant la première et deuxième équation dans (2.95) par U_t et V_t, respectivement, en intégrant sur Ω et Γ_1 et en sommant le résultat, on obtient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|U_t\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla U\|^2+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|V_t\|^2_{\Gamma_1}+\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\nabla_T V\|^2_{\Gamma_1} \\
& +\mu_1(g_1(u_t)-g_1(\widetilde{u}_t),U_t)+\mu_1'\left(g_2(v_t)-g_2(\widetilde{v}_t),V_t\right)_{\Gamma_1} \\
& +\mu_2\left(k_1(z_1(x,1,t))-k_1(\widetilde{z}_1(x,1,t)),U_t\right) \\
& +\mu_2'\left(k_2(z_2(x,1,t))-k_2(\widetilde{z}_2(x,1,t)),V_t\right)_{\Gamma_1} \\
= {} & 0. \qquad (2.96)
\end{aligned}$$

De même, en multipliant la troisième et quatrième équation dans (2.95) par respectivement Z_1 et Z_2 et en intégrant le résultat sur $\Omega\times(0,1)$ et $\Gamma_1\times(0,1)$, on obtient

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\|Z_1(x,\rho,t)\|^2\,d\rho+\frac{1}{2}\left\{\|Z_1(x,1,t)\|^2-\|U_t(x,t)\|^2\right\}=0, \qquad (2.97)$$

$$\frac{\tau}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1\|Z_2(x,\rho,t)\|^2_{\Gamma_1}\,d\rho+\frac{1}{2}\left\{\|Z_2(x,1,t)\|^2_{\Gamma_1}-\|V_t(x,t)\|^2_{\Gamma_1}\right\}=0. \qquad (2.98)$$

De (2.96), (2.97), (2.98) et en utilisant Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\Big\{\|U_t\|^2+\|\nabla U\|^2+\|V_t\|^2_{\Gamma_1}+\|\nabla_T V\|^2_{\Gamma_1} \\
& +\tau\int_0^1\|Z_1(x,\rho,t)\|^2\,d\rho+\tau\int_0^1\|Z_2(x,\rho,t)\|^2_{\Gamma_1}\,d\rho\Big\} \\
& +\mu_1(g_1(u_t)-g_1(\widetilde{u}_t),U_t)+\mu_1'\left(g_2(v_t)-g_2(\widetilde{v}_t),V_t\right)_{\Gamma_1} \\
= {} & -\mu_2\left(k_1(z_1(x,1,t))-k_1(\widetilde{z}_1(x,1,t)),U_t\right) \\
& -\mu_2'\left(k_2(z_2(x,1,t))-k_2(\widetilde{z}_2(x,1,t)),V_t\right)_{\Gamma_1} \\
& +\frac{1}{2}\|U_t(x,t)\|^2+\frac{1}{2}\|V_t(x,t)\|^2_{\Gamma_1} \\
\leq {} & \frac{1}{2}\|U_t(x,t)\|^2+\|k_1(z_1(x,1,t))-k_1(\widetilde{z}_1(x,1,t))\|^2\|U_t(x,t)\|^2 \\
& +\frac{1}{2}\|V_t(x,t)\|^2_{\Gamma_1}+\|k_2(z_2(x,1,t))-k_2(\widetilde{z}_2(x,1,t))\|^2_{\Gamma_1}\|V_t(x,t)\|^2_{\Gamma_1},
\end{aligned}$$

ensuite, de la condition (2.13) et l'inégalité de Young (1.3), on obtient

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left\{\|U_t\|^2+\|\nabla U\|^2+\|V_t\|_{\Gamma_1}^2+\|\nabla_T V\|_{\Gamma_1}^2\right.\\
&\left.+\tau\int_0^1\|Z_1(x,\rho,t)\|^2\,d\rho+\tau\int_0^1\|Z_2(x,\rho,t)\|_{\Gamma_1}^2\,d\rho\right\}\\
\leq\ & c\left\{\|U_t(x,t)\|^2+\|V_t(x,t)\|_{\Gamma_1}^2+\|Z_1(x,1,t)\|^2+\|Z_2(x,1,t)\|_{\Gamma_1}^2\right\},
\end{aligned}$$

où $c>0$, donc en intégrant cette dernière sur $(0,t)$ et en utilisant le lemme de Gronwall, on conclut que

$$\begin{aligned}
&\|U_t\|^2+\|\nabla U\|^2+\|V_t\|_{\Gamma_1}^2+\|\nabla_T V\|_{\Gamma_1}^2\\
&+\tau\int_0^1\|Z_1(x,\rho,t)\|^2\,d\rho+\tau\int_0^1\|Z_2(x,\rho,t)\|_{\Gamma_1}^2\,d\rho\\
=\ & 0,
\end{aligned}$$

ce qui implique que $(U,V,Z_1,Z_2)=0$.

Ceci achève la preuve du Théorème 2.1. ■

Chapitre 3

Comportement asymptotique de la solution

3.1 Introduction

Dans ce chapitre, on démontre la stabilité d'une équation d'ondes dans un domaine borné, en présence d'un terme de retard non linéaire qui agit sur un amortissement interne non linéaire, avec une condition de type Dirichlet homogène, sur une partie de la frontière du domaine et une condition de type Wentzell dynamique, sur l'autre partie de la frontière, soumise elle aussi à un amortisseur non linéaire et terme de retard non linéaire. En introduisant la fonctionnelle d'énergie $E(t)$, une fonctionnelle de Lyapunov $\mathcal{L}(t)$ appropriée et en estimant cette dernière, on obtient

$$\mathcal{L}'(t) \leq -dE(t) + \tilde{c}_1 \int_\Omega \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx + \tilde{c}_2 \int_{\Gamma_1} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma, \quad \text{pour tout } \; t \geq 0,$$

où d, $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ sont des constantes positives. En prenant en considération des hypothèses adéquates, on établie un résultat de décroissance général à partir duquel la décroissance exponentielle et la décroissance polynomiale ne sont que des cas particuliers, notamment

$$E(t) \leq \omega_1 H_1^{-1}\left(\omega_2 t + \omega_3\right), \qquad \text{pour tout } t \geq 0, \tag{3.1}$$

où H_1^{-1} est une fonction dans laquelle la formule précédente (3.1) vérifie (0.1), avec $H_1^{-1}(t) = \phi(t)$, où $\phi(t)$ est une fonction arbitraire.

3.2 Décroissance générale de l'énergie

3.2.1 Fonctionnelle de type Lyapunov $\mathcal{L}(t)$

La méthode de Lyapunov est basée sur la construction d'une fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$, qui vérife les propriétés (0.2) et (0.3). On pose

$$\mathcal{L}(t) = NE(t) + F(t) + I_1(t) + I_2(t),$$

où

$$F(t) = \int_\Omega u_t u dx + \int_{\Gamma_1} v_t v d\sigma, \tag{3.2}$$

$$I_1(t) = \int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho \right) dx, \tag{3.3}$$

$$I_2(t) = \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_2(z_2(x,\rho,t)) d\rho \right) d\sigma \tag{3.4}$$

et N est une constante positive appropriée à choisir dans la suite.

3.2.2 Equivalence entre $\mathcal{L}(t)$ et l'énergie $E(t)$

En utilisant l'inégalité (2.10), l'inégalité de Young (1.3) et celle de Sobolev-Poincaré (1.1), on montre une équivalence entre l'énergie $E(t)$ et la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$.

Lemme 3.1 *Pour N assez grand, il existe deux constantes positives B_1 et B_2, telles que*

$$B_1 E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq B_2 E(t) \quad \textit{pour tout} \;\; t \geq 0. \tag{3.5}$$

Preuve. On considère la fonctionnelle $\mathcal{H}$ définie par :

$$\begin{aligned}
\mathcal{H}(t) &= \mathcal{L}(t) - NE(t) \\
&= F(t) + I_1(t) + I_2(t)
\end{aligned}$$

et on montre que

$$|\mathcal{H}(t)| \leq \widehat{C}E(t),$$

où $\widehat{C}$ est une constante positive.

En utilisant (3.2), (3.3) et (3.4), on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}(t)| \;\leq\; & \left|\int_\Omega u_t u dx\right| + \left|\int_{\Gamma_1} v_t v d\sigma\right| \\
& + \left|\int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)d\rho\right) dx\right| \\
& + \left|\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_2(z_2(x,\rho,t)d\rho\right) d\sigma\right|.
\end{aligned}$$

Ensuite grâce à l'inégalité de Young (1.3), Sobolev-Poincaré (1.1) et (2.10), on obtient

$$\begin{aligned}
|\mathcal{H}(t)| \;\leq\; & \frac{1}{2}\left\{\|u_t\|^2 + C_p \|\nabla u\|^2 + \|v_t\|_{\Gamma_1}^2 + \lambda_0^2 \|\nabla u\|^2\right\} \\
& + \int_\Omega \left(\int_0^1 K_1(z_1(x,\rho,t)d\rho\right) dx + \int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 K_2(z_2(x,\rho,t)d\rho\right) d\sigma \\
\leq\; & \widehat{C}E(t),
\end{aligned}$$

où $\widehat{C} = \max\left\{1, (C_p + \lambda_0^2), \frac{1}{\xi}, \frac{1}{\zeta}\right\}$.

C'est-à-dire :

$$|\mathcal{L}(t) - NE(t)| \leq \widehat{C}E(t),$$

qui s'écrit comme

$$(N - \widehat{C})E(t) \leq \mathcal{L}(t) \leq (N + \widehat{C})E(t).$$

Par conséquent, en choisissant N suffisamment grand, tel que $B_1 = N - \widehat{C} > 0$ et $B_2 = N + \widehat{C} > 0$, on déduit (3.5). Ceci achève la démonstration du Lemme 3.1. ■

3.2.3 Résultats préliminaires

Les trois lemmes suivants nous donnent des estimations de $F'(t)$, $I_1'(t)$ et $I_2'(t)$.

Les estimations des dérivées des fonctionnelles $F(t)$, $I_1(t)$ et $I_2(t)$, nous permettent d'obtenir une estimation de la dérivée de la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$.

Estimation de la dérivée de $F(t)$:

Lemme 3.2 *Soit (u, v, z_1, z_2) la solution de (2.15). On suppose que* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont vérifiées. Alors, la fonctionnelle $F(t)$ définie par (3.2), vérifie pour tout $t \geq 0$, l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} F'(t) \leq & \left\|u_t\right\|^2 + \left\|v_t\right\|_{\Gamma_1}^2 - c\left\|\nabla u\right\|^2 - \left\|\nabla_T v\right\|_{\Gamma_1}^2 \\ & + c_1 \int_\Omega \left|g_1(u_t)\right|^2 dx + \hat{c}_1 \int_\Omega \left|k_1(z_1(x,1,t))\right|^2 dx \\ & + c_2 \int_{\Gamma_1} \left|g_2(v_t)\right|^2 d\sigma + \hat{c}_2 \int_{\Gamma_1} \left|k_2(z_2(x,1,t))\right|^2 d\sigma, \end{aligned} \tag{3.6}$$

où c, c_1, c_2, $\hat{c}_1$ et $\hat{c}_2$ sont des constantes positives.

Preuve. En dérivant la fonctionnelle $F(t)$, on obtient

$$F'(t) = \int_\Omega u_{tt} u dx + \left\|u_t\right\|^2 + \int_{\Gamma_1} v_{tt} v d\sigma + \left\|v_t\right\|_{\Gamma_1}^2 .$$

En remplaçant u_{tt} et v_{tt} par leurs expressions données dans (2.15) et en intégrant par parties, on obtient l'égalité suivante :

$$\begin{aligned} F'(t) = & \left\|u_t\right\|^2 + \left\|v_t\right\|_{\Gamma_1}^2 - \left\|\nabla u\right\|^2 - \left\|\nabla_T v\right\|_{\Gamma_1}^2 \\ & -\mu_1 \int_\Omega u g_1(u_t) dx - \mu_2 \int_\Omega u k_1(z_1(x,1,t)) dx \\ & -\mu_1' \int_{\Gamma_1} v g_2(v_t) d\sigma - \mu_2' \int_{\Gamma_1} v k_2(z_2(x,1,t)) d\sigma. \end{aligned} \tag{3.7}$$

En utilisant les inégalités de Young (1.3) et de Sobolev-Poincaré (1.1), (3.7) est estimée pour tout $\varepsilon > 0$, par

$$\begin{aligned}
F'(t) \quad \leq \quad & \|u_t\|^2 + \|v_t\|^2_{\Gamma_1} - \|\nabla_T v\|^2_{\Gamma_1} \\
& - \left[1 - \varepsilon(C_p(\mu_1 + \mu_2) + \lambda_0^2(\mu_1' + \mu_2'))\right] \|\nabla u\|^2 \\
& + \frac{\mu_1}{4\varepsilon} \int_\Omega |g_1(u_t)|^2 \, dx + \frac{\mu_2}{4\varepsilon} \int_\Omega |k_1(z_1(x,1,t))|^2 \, dx \\
& + \frac{\mu_1'}{4\varepsilon} \int_{\Gamma_1} |g_2(v_t)|^2 \, d\sigma + \frac{\mu_2'}{4\varepsilon} \int_{\Gamma_1} |k_2(z_2(x,1,t))|^2 \, d\sigma, \qquad (3.8)
\end{aligned}$$

en choisissant $0 < \varepsilon < \frac{1}{C_p(\mu_1+\mu_2)+\lambda_0^2(\mu_1'+\mu_2')}$, (3.8) nous donne (3.6). Ce qui termine la preuve du Lemme 3.2. ■

Estimation de la dérivée de $I_1(t)$:

Lemme 3.3 *Soit (u, v, z_1, z_2) la solution de (2.15). On suppose que* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont vérifiées. Alors, la fonctionnelle $I_1(t)$ définie par (3.3), vérifie pour tout $t \geq 0$, l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned}
I_1'(t) \leq & -2 \int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho \right) dx \\
& - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_\Omega K_1(z_1(x,1,t)) dx + \frac{1}{\tau} \int_\Omega K_1(u_t) dx. \qquad (3.9)
\end{aligned}$$

Preuve. En dérivant $I_1(t)$ et en utilisant la troisième équation dans (2.15), on obtient

$$\begin{aligned}
I_1'(t) \quad = \quad & \int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} (z_1)_t(x,\rho,t) k_1(z_1(x,1,t)) d\rho \right) dx \\
= \quad & -\frac{1}{\tau} \int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} (z_1)_\rho(x,\rho,t) k_1(z_1(x,1,t)) d\rho \right) dx \\
= \quad & -\frac{1}{\tau} \int_\Omega \int_0^1 e^{-2\tau\rho} \frac{\partial}{\partial\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx \\
= \quad & -\frac{1}{\tau} \int_\Omega \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial\rho} (e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) + 2\tau e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) \right] d\rho dx \\
= \quad & -\frac{1}{\tau} \int_\Omega \left[e^{-2\tau} K_1(z_1(x,1,t)) - K_1(u_t) \right] dx - 2 \int_\Omega \int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t)) d\rho dx,
\end{aligned}$$

qui s'écrit comme

$$\begin{aligned} I_1'(t) \le & -2\int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t))d\rho\right) dx \\ & - \frac{e^{-2\tau}}{\tau}\int_\Omega K_1(z_1(x,1,t))dx + \frac{1}{\tau}\int_\Omega K_1(u_t)dx. \end{aligned}$$

D'où (3.9). Ceci achève la preuve du Lemme 3.3. ■

Estimation de la dérivée de $I_2(t)$:

Lemme 3.4 *Soit (u, v, z_1, z_2) la solution de (2.15). On suppose que* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont vérifiées. Alors, la fonctionnelle $I_2(t)$ définie par (3.4), vérifie pour tout $t \ge 0$, l'estimation suivante :*

$$\begin{aligned} I_2'(t) \le & -2\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_2(z_2(x,\rho,t))d\rho\right) d\sigma \\ & - \frac{e^{-2\tau}}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t))d\sigma + \frac{1}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(v_t)d\sigma. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Preuve. Elle s'obtient de la même manière que celle du Lemme 3.3. ■

Une estimation de la dérivée de la fonctionnelle $\mathcal{L}(t)$:

En combinant le lemme 3.2, le lemme 3.3 et le lemme 3.4, on obtient

Lemme 3.5 *Soit (u, v, z_1, z_2) la solution de (2.15). On suppose que* $(\mathbf{H1}) - (\mathbf{H3})$ *sont vérifiées. Alors, $\mathcal{L}'(t)$ vérifie l'estimation suivante :*

$$\mathcal{L}'(t) \le -dE(t) + \tilde{c}_1 \int_\Omega \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx + \tilde{c}_2 \int_{\Gamma_1} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma, \quad \text{pour tout } t \ge 0 \tag{3.11}$$

où d, $\tilde{c}_1$ et $\tilde{c}_2$ sont des constantes positives.

Preuve. D'après (2.27), (3.6), (3.9) et (3.10), on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) &= NE'(t) + F'(t) + I_1'(t) + I_2'(t) \\
&\leq -Na_1 \int_\Omega u_t g_1(u_t)dx - Na_2 \int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma \\
&\quad -Na_3 \int_\Omega z_1(x,1,t))k_1(z_1(x,1,t))dx - Na_4 \int_{\Gamma_1} z_2(x,1,t))k_2(z_2(x,1,t))d\sigma \\
&\quad - \|\nabla_T v\|_{\Gamma_1}^2 - c\|\nabla u\|^2 + c_1 \int_\Omega \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx \\
&\quad +\hat{c}_1 \int_{\Gamma_1} |k_1(z_1(x,1,t))|^2 dx + c_2 \int_{\Gamma_1} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma \\
&\quad +\hat{c}_2 \int_{\Gamma_1} |k_2(z_2(x,1,t))|^2 d\sigma - 2\int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t))d\rho \right) dx \\
&\quad -2\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_2(z_2(x,\rho,t))d\rho \right) d\sigma - \frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_\Omega K_1(z_1(x,1,t))dx \\
&\quad -\frac{e^{-2\tau}}{\tau} \int_{\Gamma_1} K_2(z_2(x,1,t))d\sigma + \frac{1}{\tau}\int_\Omega K_1(u_t)dx + \frac{1}{\tau}\int_{\Gamma_1} K_2(v_t)d\sigma.
\end{aligned}$$

Ensuite, en utilisant (2.13) et (2.14), on obtient

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'(t) \leq &-\left(Na_1 - \frac{\alpha_2}{\tau}\right) \int_\Omega u_t g_1(u_t)dx - \left(Na_2 - \frac{\alpha_2}{\tau}\right) \int_{\Gamma_1} v_t g_2(v_t)d\sigma \\
&- \left(Na_3 + \alpha_1 \frac{e^{-2\tau}}{\tau} - \hat{c}_1\beta\right) \int_\Omega z_1(x,1,t))k_1(z_1(x,1,t))dx \\
&- \left(Na_4 + \alpha_1 \frac{e^{-2\tau}}{\tau} - \hat{c}_2\beta\right) \int_{\Gamma_1} z_2(x,1,t))k_2(z_2(x,1,t))d\sigma \\
&- \|\nabla_T v\|_{\Gamma_1}^2 - c\|\nabla u\|^2 - 2\int_\Omega \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_1(z_1(x,\rho,t))d\rho \right) dx \\
&- 2\int_{\Gamma_1} \left(\int_0^1 e^{-2\tau\rho} K_2(z_2(x,\rho,t))d\rho \right) d\sigma + c_1 \int_\Omega \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx \\
&+ c_1 \int_{\Gamma_1} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma.
\end{aligned}$$

En choisissant N suffisamment grand tel que

$$\begin{cases}
\left(Na_1 - \frac{\alpha_2}{\tau}\right) > 0, \\
\left(Na_2 - \frac{\alpha_2}{\tau}\right) > 0, \\
\left(Na_3 + \alpha_1 \frac{e^{-2\tau}}{\tau} - \hat{c}_1\beta\right) > 0, \\
\left(Na_4 + \alpha_1 \frac{e^{-2\tau}}{\tau} - \hat{c}_2\beta\right) > 0,
\end{cases}$$

on déduit (3.11), où $d = 2\min\left(1, c, \frac{e^{-2\tau}}{\xi}, \frac{e^{-2\tau}}{\zeta}\right)$.
Ceci achève la démonstration du Lemme 3.5. ■

Il reste à estimer les termes $\int_\Omega \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx$ et $\int_{\Gamma_1} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma$. Pour cela, comme dans [45], on considère les partitions de Ω et Γ_1 suivantes :

$$\begin{cases} \Omega^+ = \{x \in \Omega \ : \ |u_t| \geq \epsilon'\}, \quad \Omega^- = \{x \in \Omega \ : \ |u_t| \leq \epsilon'\}, \\ \Gamma_1^+ = \{x \in \Gamma_1 \ : \ |v_t| \geq \epsilon'\}, \quad \Gamma_1^- = \{x \in \Gamma_1 \ : \ |v_t| \leq \epsilon'\}, \end{cases} \tag{3.12}$$

où ϵ' est un réel positif, défini dans l'hypothèse (**H1**).

Maintenant, on est en mesure d'énoncer et de démontrer le résultat principal du comportement asymptotique.

Théorème 3.1 *Supposons que les hypothèses* (**H1**) − (**H3**) *sont vérifiées. Alors, il existe des constantes positives* ω_1, ω_2, ω_3 *et* ε_0, *telles que pour toute solution* (u, v, z_1, z_2) *de (2.15), l'énergie correspondante* $E(t)$ *satisfait :*

$$E(t) \leq \omega_1 H_1^{-1}(\omega_2 t + \omega_3), \qquad \textit{pour tout} \quad t \geq 0, \tag{3.13}$$

où

$$H_1(t) = \int_t^1 \frac{1}{H_2(s)} ds, \tag{3.14}$$

H_1 *est strictement décroissante et convexe sur* $(0, \epsilon']$ *avec* $\lim_{t \longrightarrow 0} H_1(t) = +\infty$ *et*

$$H_2(t) = \begin{cases} t & \textit{si} \quad H \textit{ est linéaire sur } [0, \epsilon'], \\ tH'(\varepsilon_0 t) & \textit{si} \quad H'(0) = 0 \textit{ et } H'' > 0 \textit{ sur }]0, \epsilon']. \end{cases}$$

Preuve. De la partition (3.12), en utilisant (2.11) et (2.27), il s'ensuit que

$$\int_{\Omega^+} \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx \leq \eta_1 \int_{\Omega^+} u_t g_1(u_t) dx \leq -\eta_1 E'(t), \tag{3.15}$$

$$\int_{\Gamma_1^+} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma \leq \eta_2 \int_{\Gamma_1^+} v_t g_2(v_t) d\sigma \leq -\eta_2 E'(t), \tag{3.16}$$

où η_1 et η_2 sont deux constantes positives.

Cas 1 : H est linéaire sur $[\mathbf{0}, \epsilon']$.

Dans ce cas, on peut facilement vérifier qu'il existe deux constantes positives β_1 et β_2, telles que

$$\beta_1 |s| \leq |g_i(s)| \leq \beta_2 |s|, \forall |s| \leq \epsilon', \quad i = 1, 2,$$

par conséquent, en utilisant cette double inégalité, on obtient

$$\int_{\Omega^-} \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx \leq \eta_1' \int_{\Omega^-} u_t g_1(u_t) dx \leq -\eta_1' E'(t), \tag{3.17}$$

où η_1' est une constante positive.

De la même manière, on trouve pour $\eta_2' > 0$

$$\int_{\Gamma_1^-} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma \leq \eta_2' \int_{\Gamma_1^-} v_t g_2(v_t) d\sigma \leq -\eta_2' E'(t). \tag{3.18}$$

En réinjectant (3.15), (3.16), (3.17) et (3.18) dans (3.11), on déduit

$$[\mathcal{L}(t) + \eta E(t)]' \leq -d H_2(E(t)) \text{ pour tout } \quad t \geq 0, \tag{3.19}$$

où $\eta = \tilde{c}_1(\eta_1 + \eta_1') + \tilde{c}_2(\eta_2 + \eta_2')$ et d est donnée dans la preuve du Lemme 3.5.

Dans tout ce qui suit, on prend C_i, $\widetilde{C}_i$ et C_i' des constantes génériques positives $\forall i = 1, ..., 5$.

Cas 2 : $H'(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ et $H'' > \mathbf{0}$ sur $]\mathbf{0}, \epsilon']$.

Comme H est convexe et croissante, H^{-1} est concave et croissante. En vertue de (2.12), l'inégalité de Jensen inversée pour une fonction concave et (2.27), il s'ensuit que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^-} \left[|u_t|^2 + |g_1(u_t)|^2\right] dx &\leq \int_{\Omega^-} H^{-1}(u_t g_1(u_t)) dx, \\ &\leq |\Omega| H^{-1}\left(\frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega^-} u_t g_1(u_t) dx\right), \\ &\leq C_1 H^{-1}(-C_1' E'(t)). \end{aligned} \tag{3.20}$$

De même, on obtient

$$\int_{\Gamma_1^-} \left[|v_t|^2 + |g_2(v_t)|^2\right] d\sigma \leq C_2 H^{-1}(-C_2' E'(t)). \tag{3.21}$$

Une combinaison de (3.11), (3.15), (3.16), (3.20) et (3.21), donne

$$[\mathcal{L}(t) + \eta_3 E(t)]' \leq -dE(t) + C_3 H^{-1}(-C_3' E'(t)) \qquad t \geq 0, \tag{3.22}$$

où $\eta_3 = \tilde{c}_1\eta_1 + \tilde{c}_1\eta_2$.

En rappelant que $E'(t) \leq 0$, $H''(t) \geq 0$ sur $]0, \epsilon']$ et en utilisant (3.22), on obtient

$$\begin{aligned}
& [H'(\varepsilon_0 E(t)) \{\mathcal{L}(t) + \eta_3 E(t)\} + C_3 C_3' E(t)]' \\
= \; & \varepsilon_0 E'(t) H''(\varepsilon_0 E(t)) (\mathcal{L}(t) + \eta_3 E(t)) \\
& + H'(\varepsilon_0 E(t)) \{\mathcal{L}'(t) + \eta_3 E'(t)\} + C_3 C_3' E'(t) \\
\leq \; & -dH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + C_3 H'(\varepsilon_0 E(t)) H^{-1}(-C_3' E'(t)) + C_3 C_3' E'(t).
\end{aligned}$$

Ensuite grâce au Lemme 1.6 avec

$$H^*(s) = s(H')^{-1}(s) - H[(H')^{-1}(s)], \quad \text{pour tout } s \geq 0,$$

la fonction conjuguée de H dans le sens de Young, on trouve

$$\begin{aligned}
& [H'(\varepsilon_0 E(t)) \{\mathcal{L}(t) + \eta_3 E(t)\} + C_3 C_3' E(t)]' \\
\leq \; & -dH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + C_3 H^* \left(H'(\varepsilon_0 E(t))\right).
\end{aligned}$$

Maintenant, de la relation (1.4) dans le Lemme 1.6 avec H^*, le fait que $H'(0) = 0$ et $(H')^{-1}$, H sont des fonctions croissantes, cela donne

$$H^*(s) \leq s(H')^{-1}(s), \qquad \forall s \geq 0, \tag{3.23}$$

par conséquent, en utilisant (3.23), on obtient pour $\varepsilon_0 > 0$ assez petit

$$\begin{aligned} & [H'(\varepsilon_0 E(t))\{\mathcal{L}(t) + \eta_3 E(t)\} + C_3 C_3' E(t)]' \\ \leq\ & -dH'(\varepsilon_0 E(t))E(t) + C_3 H'(\varepsilon_0 E(t))\varepsilon_0 E(t) \\ \leq\ & -C_4 H'(\varepsilon_0 E(t))E(t) = -C_4 H_2(E(t)). \end{aligned} \tag{3.24}$$

Soit

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) = \begin{cases} \mathcal{L}(t) + \eta E(t), & \text{si } H \text{ est linéaire sur } [0, \epsilon'], \\ H'(\varepsilon_0 E(t))\{\mathcal{L}(t) + \eta_3 E(t)\} + C_3 C_3' E(t), & \text{si } H'(0) = 0 \text{ et } H'' > 0 \text{ sur }]0, \epsilon']. \end{cases}$$

Grâce à (3.19) et (3.24), il s'ensuit que

$$\widetilde{\mathcal{L}}'(t) \leq -C_5 H_2(E(t)), \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.25}$$

D'un autre côté, après avoir choisis $N > 0$ suffisamment grand, on peut obsérver du Lemme 3.1 que $\mathcal{L}(t)$ est équivalente à $E(t)$. Donc, $\widetilde{\mathcal{L}}(t)$ est aussi équivalente à $E(t)$.
Par le fait que H_2 est croissante, on obtient

$$\widetilde{\mathcal{L}}'(t) \leq -\widetilde{C}_5 H_2(\widetilde{\mathcal{L}}(t)), \qquad \forall t \geq 0. \tag{3.26}$$

Notant que $H_1' = -\frac{1}{H_2}$, on déduit de (3.26)

$$\widetilde{\mathcal{L}}'(t) H_1'\left(\widetilde{\mathcal{L}}(t)\right) \geq \widetilde{C}_5, \qquad \forall t \geq 0.$$

Une simple intégration sur $(0, t)$, donne

$$H_1(\widetilde{\mathcal{L}}(t)) \geq H_1(\widetilde{\mathcal{L}}(0)) + \widetilde{C}_5 t, \quad \forall t \geq 0,$$

ensuite, en exploitant le fait que H_1^{-1} est décroissante, on trouve

$$\widetilde{\mathcal{L}}(t) \leq H_1^{-1}\left[H_1(\widetilde{\mathcal{L}}(0)) + \widetilde{C}_5 t\right], \quad \forall t \geq 0.$$

Par conséquent, l'équivalence entre $\mathcal{L}$, $\widetilde{\mathcal{L}}$ et E, donne l'estimation

$$E(t) \leq \omega_1 H_1^{-1}(\omega_2 t + \omega_3), \qquad \forall t \geq 0.$$

Ceci achève la preuve du Théorème 3.1. ■

3.3 Exemple d'application

Pour illustrer notre résultat de stabilité (Théorème 3.1), on donne l'exemple suivant :
Soient g_1 et g_2, les fonctions définies dans l'hypothèse (**H1**), données par :

$$g_1(s) = g_2(s) = sp(-\ln s)q,$$

où $p \geq 1$ et $q \in \mathbb{R}$ sur $(0, \epsilon']$, avec ϵ' le réel positif, défini dans l'hypothèse (**H1**).
Alors,

$$g_1'(s) = g_2'(s) = s^{p-1}(-\ln s)^{q-1}(p(-\ln s) - q),$$

qui sont des fonctions croissantes dans le voisinage de droite de 0 (si $q = 0$, on peut prendre $\epsilon' = 1$).
La fonction H est définie dans le voisinage de 0 par

$$H(s) = cs^{\frac{p+1}{2}}\left(-\ln\sqrt{s}\right)^q.$$

On a

$$H'(s) = cs^{\frac{p-1}{2}}\left(-\ln\sqrt{s}\right)^{q-1}\left(\frac{p+1}{2}\left(-\ln\sqrt{s}\right) - \frac{q}{2}\right) \quad \text{quand } s \text{ est dans le voisinage de } 0.$$

Donc

$$H_2(s) = cs^{\frac{p+1}{2}}\left(-\ln\sqrt{s}\right)^{q-1}\left(\frac{p+1}{2}\left(-\ln\sqrt{s}\right) - \frac{q}{2}\right) \quad \text{quand } s \text{ est dans le voisinage de } 0.$$

De cette dernière égalité et d'après la formule (3.14), on obtient que

$$\begin{aligned} H_1(t) &= c\int_t^1 \frac{1}{s^{\frac{p+1}{2}}\left(-\ln\sqrt{s}\right)^{q-1}\left(\frac{p+1}{2}\left(-\ln\sqrt{s}\right)-\frac{q}{2}\right)}ds \\ &= c\int_1^{\frac{1}{\sqrt{t}}} \frac{z^{p-2}}{(\ln z)^{q-1}\left(\frac{p+1}{2}\ln z-\frac{q}{2}\right)}dz \quad \text{quand } t \text{ est dans le voisinage de } 0. \end{aligned} \tag{3.27}$$

Par conséquent, (3.27) nous donne dans un voisinage de 0 :

$$H_1(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^{\frac{p-1}{2}}(-\ln t)^q} & \text{si } \ p>1, \\ c(-\ln t)^{1-q} & \text{si } \ p=1,\ q<1, \\ c(\ln(-\ln t)) & \text{si } \ p=1,\ q=1, \end{cases}$$

ce qui implique que dans un voisinage de $+\infty$, on obtient

$$H_1^{-1}(t) = \begin{cases} ct^{-\frac{2}{p-1}}(\ln t)^{-\frac{2q}{p-1}} & \text{si } \ p>1, \\ ce^{-t^{\frac{1}{1-q}}} & \text{si } \ p=1,\ q<1, \\ ce^{-e^t} & \text{si } \ p=1,\ q=1. \end{cases}$$

Ainsi, d'après (3.13), on déduit

$$E(t) \leq \begin{cases} ct^{-\frac{2}{p-1}}(\ln t)^{-\frac{2q}{p-1}} & \text{si } \ p>1, \\ ce^{-t^{\frac{1}{1-q}}} & \text{si } \ p=1,\ q<1, \\ ce^{-e^t} & \text{si } \ p=1,\ q=1. \end{cases}$$

Conclusion et perspectives

Conclusion

Dans cette thèse, on a stabilisé dans un ouvert borné, une équation d'ondes avec un retard non linéaire agissant sur un amortisseur interne non linéaire, avec une condition dynamique de type Wentzell, en présence elle aussi d'amortisseur et retard non linéaires sur une partie du bord et sur l'autre partie, on a considéré une condition de Dirichlet homogène. Sous des hypothèses convenables sur les données initiales (déplacements u_0 et v_0, les vitesses initiales u_1 et v_1 et l'historique de la vitesse f_{0_1} et f_{0_2}), sur les coefficients d'amortissement μ_1 et μ_1' et les coefficients de retard μ_2 et μ_2', on a démontré :

(i) L'existence globale et l'unicité d'une solution faible pour le système considéré dans des espaces fonctionels convenables.

(ii) Une stabilité de type général, en utilisant la méthode de Lyapunov, on a démontré l'existence de trois constantes positives ω_1, ω_2 et ω_3, dépendantes uniquement des données u_0, u_1, v_0, v_1, f_{0_1} et f_{0_2} telles que l'énergie du système vérifie l'estimation

$$E(t) \leq \omega_1 H_1^{-1}(\omega_2 t + \omega_3), \quad \text{pour tout} \quad t \geq 0.$$

Perspectives

En ce qui concerne les perspectives, de nombreuses questions sont encore ouvertes.

(i) Il serait intéressant de poursuivre cette étude pour le problème de Wentzell dans le cas particulier d'un amortisseur de friction au bord linéaire suivant :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 g_2(u_t(t-\tau)) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + v_t = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = v, & \text{sur } \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1), & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ u_t(x, t-\tau) = f_0(x, t-\tau), & \text{dans } \Omega \times (0,1), \end{cases} \tag{3.28}$$

avec

$$\mu_2 < \mu_1 \tag{3.29}$$

et les mêmes hypothèses sur Ω et sa frontière Γ ainsi que les fonctions g_1 et g_2, posées dans [34].

(ii) On propose d'étudier le système couplé ondes/Wentzell avec amortisseurs et termes de retards non linéaires mais cette fois-ci, en considérant les mêmes fonctions pour les amortisseurs et retards, c'est-à-dire :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_1 g_1(u_t) + \mu_2 g_1(u_t(t-\tau)) = 0, & \text{dans } \Omega \times (0,\infty), \\ v_{tt} + \partial_\nu u - \Delta_T v + \mu_1' g_2(v_t) + \mu_2' g_2(v_t(t-\tau)) = 0, & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,\infty), \\ u = v, & \text{sur } \Gamma \times (0,\infty), \\ u = 0, & \text{sur } \Gamma_0 \times (0,\infty), \\ (u(0), v(0)) = (u_0, v_0), & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u_1, v_1), & \text{dans } \Omega \times \Gamma, \\ u_t(x, t-\tau) = f_{0_1}(x, t-\tau), & \text{dans } \Omega \times (0,1), \\ v_t(x, t-\tau) = f_{0_2}(x, t-\tau), & \text{sur } \Gamma_1 \times (0,1), \end{cases} \tag{3.30}$$

avec

$$\begin{cases} \mu_2 & < & \mu_1 \\ \mu_2' & < & \mu_1' \end{cases} \tag{3.31}$$

et Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$ de frontière régulière $\Gamma = \partial\Omega$, Γ_0 et Γ_1 forment une partition de la frontière Γ, avec $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ et $\emptyset = \overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1}$ et des hypothèses sur g_i pour $i = 1, 2$, introduites dans [9].

(iii) En plus, on propose d'étudier le comportement asymptotique de la solution (si elle existe) du système :

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta u + \mu_0 g_1 (u_t) + \displaystyle\int_{\tau_1}^{\tau_2} \mu (s)\, g_2 (u_t (x, t-s))\, ds + f_1 (u) = 0 \quad \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} + \frac{\partial u}{\partial \nu} - \Delta_T v + \lambda_0 g_1 (v_t) + \displaystyle\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \lambda (s)\, g_2 (v_t (x, t-s))\, ds + f_2 (v) = 0 \quad \text{dans } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 \quad \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v \quad \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u (x, 0) = u_0 (x), \quad u_t (x, 0) = u_1 (x) \quad \text{dans } \Omega, \\ v (x, 0) = v_0 (x), \quad v_t (x, 0) = v_1 (x) \quad \text{dans } \Gamma_1, \\ u_t (x, -t) = h_0 (x, t) \quad \text{dans } \Omega \times]0, \tau_2[, \\ v_t (x, -t) = h_1 (x, t) \quad \text{dans } \Gamma_1 \times]0, \sigma_2[, \end{cases} \tag{3.32}$$

où Ω est un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, avec un bord régulier $\partial\Omega$, $0 \leq \tau_1 < \tau_2$, $0 \leq \sigma_1 < \sigma_2$, μ_0 et λ_0 sont deux constantes positives, μ et λ sont deux fonctions bornés. Les fonctions $u_i (x)$, $v_i (x)$, $h_i (x, t)$, $i = 0, 1$, appartiennent à des espaces convenables. Par exemple, on peut prendre le cas particulier suivant pour les fonctions f_1 et f_2, globalement Lipschitziennes, i.e., $f_i \in C^1(\mathbb{R})$, $i = 1, 2$, et il existe des constantes c_1, $c_2 > 0$, $p > 1$ et $(n-2)p \leq n$, telles que :

$$\begin{cases} \text{pour tout } s_1,\ s_2 \in \mathbb{R}, \\ |f_1(s_1) - f_1(s_2)| \leq c_1(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})\, |s_1 - s_2|, \\ |f_2(s_1) - f_2(s_2)| \leq c_2(1 + |s_1|^{p-1} + |s_2|^{p-1})\, |s_1 - s_2|. \end{cases} \tag{3.33}$$

Bibliographie

[1] Adams. R. A., *Sobolev spaces,* Academic press, Pure and Applied Mathematics, (1978), 65.

[2] Alabau-Boussouira. F., *Convexity and weighted integral inequalities for energy decay rates of nonlinear dissipative hyperbolic systems*, Applied Mathematics and Optimization, (2005), 51(1): 61-105.

[3] Arnold. V. I., *Mathematical Methods of Classical Mechanics*, Springer-Verlag, New York, (1989).

[4] Bahlil. M., *Global existence and energy decay of solutions to a viscoelastic Timoshenko beam system with a nonlinear time varying delay term in the weakly nonlinear internal feedbacks*, Electronic Journal of Mathematical Analysis and Applications, (2017), 5(1): 219-241.

[5] Barros. V., Nonato. C., Rapaso. C., *Global existence and energy decay of solutions for a wave equation with non-constant delay and nonlinear weights*, Electronic Research Archive, (2020), 205-220.

[6] Benaissa. A., Bahlil. M., *Global existence and energy decay of solutions to a nonlinear timoshenko beam system with a delay term*, Taiwanese Journal of Mathematics, (2014), Vol. 18, No. 5, pp. 1411-1437. DOI: 10.11650/tjm.18.2014.3586

[7] Benaissa. A., Benguessoum. A., and Messaoudi. S. A., *Energy decay of solutions for a wave equation with a constant weak delay and a weak internal feedback*, Electronic Journal of Qualitative Theory of Differential Equations, (2014), 11: 1-13.

[8] Benaissa. A., Benguessoum. A., and Messaoudi. S. A., *Global existence and energy decay of solutions to a viscoelastic wave equation with a delay term in the non-linear internal feedback*, International Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, (2014), 5(1): 1-26.

[9] Benaissa. A., Louhibi. N., *Global existence and energy decay of solutions to a nonlinear wave equation with a delay term*, Georgian Mathematical Journal, (2013), 20: 1-24.

[10] Brezis. H., *Analyse fonctionnelle théorie et applications*, Dunod, Paris (1999).

[11] Cavalcanti. M. M., Cavalcanti. V. D., Fukuoka. R., and Toundykov. D., *Stabilization of the damped wave equation with Cauchy-Ventcel boundary conditions*, Journal of Evolution Equations, (2009), 9: 143-169.

[12] Cavalcanti. M. M., Cavalcanti. V. D., Lasiecka. I., *Well-posedness and optimal decay rates for the wave equation with nonlinear boundary damping-source interaction*, Journal of Differential Equations, (2007), 236: 407-459.

[13] Cavalcanti. M. M., Khemmoudj. A., Medjden. M., *Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel Problem with variable coefficients and dynamic boundary condition,* Journal of Mathematical Analysis and Applications, (2007), Volume 328, Issue 2, p. p. 900-930.

[14] Cavalcanti. M. M., Lasiecka. I., Toundykov. D., *Geometrically constrained stabilization of wave equations with Wentzell boundary conditions*, Applicable Analysis, (2012), 91(8): 1427-1452.

[15] Cavalcanti. M. M., Lasiecka. I., Toundykov. D., *Wave equation with damping affecting only a subset of static wentzell boundary is uniformly stable*, Transactions of the American Mathematical Society, 364 (11) (2012), 5693-5713.

[16] Chen. G., *A note on the boundary stabilization of the wave equation*, S.I.A.M. Journal on Control and Optimization, (1981), 19: 106-113.

[17] Chen. G., *Energy decay estimates and exact boundary value controlability for the wave equation in a bounded domain*, J. Math, pures, Appl. (1979), 58: 249-274.

[18] Coclite. G. M., Goldstein. G. R., Goldstein. J. A., *Stability estimates for nonlinear hyperbolic problems with nonlinear Wentzell boundary conditions*, Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik, (2013), 64: 733-753.

[19] Coclite. G. M., Goldstein. G. R., Goldstein. J. A., *Well-posedness of nonlinear parabolic problems with nonlinear Wentzell boundary conditions,* Advances in Differential Equations, (2011), 16(9-10): 895-916.

[20] Conrad. F., Pierre. M., *Stabilization of second order evolution equation by unbounded nonlinear feedbacks,* Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire, (1994), 11: 485-515.

[21] Dafermos. C. M., *Asymptotic behavior of solutions of evolution equations*, Nonlinear Evolution Equations, M. G. Crandall Ed., Academic press, New York, (1978), 103-123.

[22] Daoulatli. M., Lasiecka. I., Toundykov. D., *Uniform energy decay for a wave equation with partially supported nonlinear boundary dissipation without growth restrictions,* Discrete and Continuous Dynamical Systems, (2009), 2: 67-95.

[23] Datko. R., Lagnese. J., Polis. M. P., *An example on the effect of time delays in boundary feedback stabilization of wave equations*, SIAM Journal on Control and Optimization, (1986), 24: 152-156.

[24] Demengel. F., Demengel. G., *Espaces fonctionnels, Utilisation dans la résolution des équations aux dérivées partielles*, EDP Sciences, Les Ulis, (2007).

[25] Dieudonné. J. A., *Calcul infinitésimal*, Hermann, Collection Méthodes, Paris, (1980).

[26] Eller. M., Lagnese. J. E., Nicaise. S., *Decay rates for solutions of a Maxwell system with nonlinear boundary damping*, Computational and Applied Mathematics, (2002), 21: 135-165.

[27] Eller. M., Lagnese. J. E., Nicaise. S., *Stabilization of heterogeneous Maxwell's equations by linear or nonlinear boundary feedbacks,* Electronic Journal of Differential Equations, (2002), 21: 1-26.

[28] Feng. B., *General decay for a viscoelastic wave equation with density and time delay term in R^n*, Taiwanese Journal Of Mathematics, Vol. 22, No. 1,(2018), pp. : 205-223.

[29] Feng. B., Soufiyane. A., *Optimal decay rates of a nonlinear time-delayed viscoelastic wave equation*, Differential Integral Equations, (2020), 33(1/2): 43-65.

[30] Guesmia. A., *Nouvelles inégalités intégrales et application à la stabilisation des systèmes distribuées non dissipatifs*, Comptes Rendus Mathematique, Acad. Sci. Paris, (2003), 336(10): 801-804.

[31] Hadeler. K. P., *Delay equations in biology*, Functional Differential Equations and Approximation of Fixed Points, Proc. Summer School and Conf, University of Bonn, volume 730 of Lecture Notes in Math, pages 136-156, Springer, Berlin, (1979).

[32] Haraux. A., *Comportement à l'infni pour une équation d'ondes non linéaire dissipative,* C. R. Acad. Sci. Paris, S er. A, (1978), 287: 507-509.

[33] Heminna. A., *Stabilisation frontière de problèmes de Ventcel*, ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, (2000), 5: 591-622.

[34] Ihaddadene. L., Khemmoudj. A., *General decay for a wave equation with Wentzell boundary conditions and nonlinear delay terms*, International Journal of Control, (2021).

[35] Kafini. M., Messaoudi. S., *A blow-up result in a nonlinear wave equation with delay,* Mediterranean Journal of Mathematics, Springer Basel, (2016).

[36] Kafini. M., Messaoudi. S., *Local existence and blow-up of solutions to a logarithmic nonlinear wave equation with delay*, Applicable Analysis, (2020), 99(3): 530-547.

[37] Kafini. M., Messaoudi. S., *On the decay and global nonexistence of solutions to a damped wave equation with variable-exponent nonlinearity and delay*, Annales Polonici Mathematici, (2019), 1-122.

[38] Kang. J. R., *Global nonexistence of solutions for viscoelastic wave equation with delay*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, (2018).

[39] Kasri. H., Heminna. A., *Exponential stability of a couple system with Wentzell conditions*, Evolution Equations and Control Theory, (2016), 5: 235-250.

[40] Khemmoudj. A., Aries. M. E., *Stabilisation of a wave equation with localised memory term and boundary frictional damping*, International Journal of Control, volume 92, issue 10, (2019).

[41] Khemmoudj. A., Khadraoui. A., *Global existence and energy decay of solutions to a viscoelastic Bresse-type system with a nonlinear delay term*, International Journal of Control, (2020). https://doi.org/10.1080/00207179.2020.1855476

[42] Khemmoudj. A., Medjden. M., *Exponential Decay for the Semilinear Damped Cauchy-Ventcel Problem,* Boletim da Sociedade Paranaense de Matemca, (2004), 97-116.

[43] Khemmoudj. A., Seghour. L., *Exponential stabilization of a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions*, Nonlinear Differential Equations and Applications, (2015), 22: 1259-1286.

[44] Komornik. V., *Decay estimates for the wave equation with internal damping*, International Series of Numerical Mathematics, (1994), 118: 253-266.

[45] Komornik. V., *Exact Controllability and Stabilization,* The Multiplier Method, Masson Wiley, Paris, (1994).

[46] Lacroix-Sonrier. M. T., *Distributions*, *Espaces de Sobolev*, *Applications*, Mathématiques 2e cycle, Ellipses, Editions Marketing S.A., 32 rue Bargue, Paris 15e, (1998).

[47] Lagnese. J., *Decay of solutions of the wave equation in a boundary region with boundary dissipation*, Journal of Differential Equations, (1983), 50: 163-182.

[48] Lagnese. J. E., *Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, (1991), 16: 35-54.

[49] Lasiecka. I., Tataru. D., *Uniform boundary stabilization of semilinear wave equations with nonlinear boundary damping,* Differential and Integral Equations, (1993), 6: 507-533.

[50] Lasiecka. I., Toundykov. D., *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms*, Nonlinear Analysis: Theory, Methods Applications, (2006), 64: 1757-1797.

[51] Lasiecka. I., Triggiani. R., *Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0, T, L^2(\Sigma))$ feedback control in the Dirichlet boundary conditions*, Journal of Differential Equations, (1987), 66: 1340-390.

[52] Lasiecka. I., Triggiani. R., Yao. P. F., *Exact controllability for second-order hyperbolic equations with variable coefficients-principal part and first-order term*, Nonlinear Analysis Theory Methods and Application, (1997), 30(1): 111-122.

[53] Lax. P. D., Morawetz. C. S., Phillips. R. S., *Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of start-shaped obstacle*, Appl. Math, 1963, 16: 477-489.

[54] Lemrabet. K., *Etude de divers problèmes aux limites de Ventcel d'origine physique ou mécanique dans des domaines non réguliers*, USTHB, Alger, (1987).

[55] Lemrabet. K., *Problème de Ventcel pour le système de l'élasticité dans un domaine de* R^3, Comptes rendus de l'Académie des sciences, Série 1, Mathematics, Paris, (1987), 304: 151-154.

[56] Lemrabet. K., Teniou. D. E., *Un problème d'évolution de type Ventcel (an evolution problem of Ventcel type)*, Rev. Maghr Math, (1992), 1: 15-29.

[57] Li. C., Liang. J., Xiao. T. J., *Dynamical behaviors of solutions to nonlinear wave equations with vanishing local damping and Wentzell boundary conditions*, Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik, Springer, (2018), 69-102. https://doi.org/10.1007/s00033-018-0996-8

[58] Li. C., Xiao. T., *Asymptotics for wave equations with Wentzell boundary conditions and boundary damping,* Semigroup Forum, (2016).

[59] Lions. J. L., *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*, Dunod, Paris, (1969).

[60] Liu. W., Zhuang. H., *Global attractor for a suspension bridge problem with a nonlinear delay term in the internal feedback*, Discrete and continuous dynamical systems, (2021).

[61] Liu. W. J., Zuazua. E., *Decay rates for dissipative wave equations,* Ricerche di Matematica, (1999), 48: 61-75.

[62] Mezouar. N., Abdelli. M., Rachah. A., *Existence of global solutions and decay estimates for a viscoelastic Petrovsky equation with a delay term in the non-linear internal feedback*, Electronic Journal of Differential Equations, (2017), No. 58: 1-25.

[63] Morawetz. C. S., *Exponential decay of solutions of the wave equation*, Communications on Pure and Applied, (1966), vol 19: 539-444.

[64] Mustafa. M. I., Messaoudi. S. A., *General stability result for viscoelastic wave equations*, Journal of Mathematical Physics, (2012), 53(5): 053702.

[65] Nicaise. S., Laoubi. K., *Polynomial stabilization of the wave equation with ventcel boundary conditions,* Mathematische Nachrichten, (2010), 283: 1428-1438.

[66] Nicaise. S., Pignotti. C., *Stability and instability results of the wave equation with a delay term in the boundary or internal feedbacks,* SIAM Journal on Control and Optimization, (2006), 45: 1561-1585.

[67] Nicaise. S., Pignotti. C., *Stabilization of the wave equation with boundary or internal distributed delay*, Differential and Integral Equations, (2008), 21 No. 9-10, 935-958.

[68] Nicaise. S., Valein. J., *Stabilization of the wave equation on 1-D networks with a delay term in the nodal feedbacks*, Networks and Heterogeneous Media, (2007), 2(3): 425-479.

[69] Park. S. H., *Global existence, energy decay and blow-up of solutions for wave equations with time delay and logarithmic source*, Advances in Difference Equations, (2020).

[70] Remil. M., Hakem. A., *Global existence and asymptotic behavior of solutions to the viscoelastic wave equation with a constant delay term*, Facta Universitatis (NIS) Series: Mathematics and Informatics, Vol. 32, No 4 (2017), 485-502.

[71] Rudin. W., *Real and complex analysis*, third edition, McGraw-Hill, New York, (1987).

[72] Russel. D. L., *Exact boundary value controlability theorems for wave and heat processes in star-complemented regions, in differential games and control theory*, Raxin. Liu and Sternberg, Eds, Maervel Dekker Inc, New York, (1974).

[73] Shinskey. F. G., *Process Control Systems*, McGraw-Hill, (1967).

[74] Suh. I. H., Bien. Z., *Use of time delay action in the controller design*, IEEE Transactions on Automatic Control, (1980), 25: 600-603.

[75] Tucsnak M., *Boundary stabilization for the stretched string equation,* Differential Internal Equations, (1993), 6: 925-935.

[76] Vazquez. J. L., Vitillaro. E., *Wave equation with second-order non-standard dynamical boundary conditions,* Mathematical Models and Methods in Applied Sciences, (2008), 18: 2019-2054.

[77] Wentzell (Ventcel). A. D., *On boundary conditions for multidimentional diffusion processes,* Theory of Probability and Its Applications, 4 (1959), 164-177.

[78] Wilcox. C., *The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary*, Amer. Math. Soc. Not. Abstract 564-20, Voc 6, (1959).

[79] Xiao. T. J., Liang. J., *Complete second order differential equations in Banach spaces with dynamic boundary conditions,* Journal of Differential Equations, (2004), 200: 105-136.

[80] Xiao. T. J., Liang. J., *Second order differential operators with Feller-Wentzell type boundary conditions,* Journal of Functional Analysis, (2008), 254: 1467-1486.

[81] Xu. C. Q., Yung. S. P., Li. L. K., *Stabilization of the wave system with input delay in the boundary control,* ESAIM: Control, Optimisation and Calculus of Variations, (2006), Vol. 12: 770-785.

[82] Yao. P. F., *On the observability inequality for exact controllability of wave equations with variable coefficients*, SIAM Journal on Control and Optimization, (1999), 37: 1568-1599.

[83] Zhang. Z., Guo. D., *Uniform stabilization of semilinear wave equations with localized internal damping and dynamic Wentzell boundary conditions with a memory term*, Zeitschrift fr angewandte Mathematik und Physik, Springer, (2019), 70-160. https://doi.org/10.1007/s00033-019-1204-1

[84] Zhong. Q. C., *Robust Control of Time-Delay Systems*, Springer, London, (2006).

[85] Zuazua. E., *Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping*, Communications in Partial Differential Equations, (1990), 15(2): 205-235.