

N° D'ORDRE : 18/2021-D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de Technologie Houari Boumediène
Faculté de Mathématiques



THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour L'obtention du grade de **DOCTEUR**
EN : MATHÉMATIQUES
Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : YOUNSI Née ABBACI Leila

Thème

***Optimisation sur l'ensemble efficient d'un problème
multi-objectifs stochastique discret***

Soutenue publiquement, le 02/12/2021, devant le jury composé de :

M. M. ABBAS	Professeur	à l'USTHB, Alger	Président de jury.
M. M. MOULAÏ	Professeur	à l'USTHB, Alger	Directeur de thèse.
M. M. AÏDENE	Professeur	à l'UMMTO, Tizi-Ouzou	Examinateur.
M. M.C. BOUZID	Maitre de Conférence/A	à ENST, Alger	Examinateur.
M. N. ZOUGAB	Maitre de Conférence/A	à l'UAMB, Bejaia	Examinateur.

Avant-propos

DANS cet avant-propos, je tiens à remercier, comme il se doit, certaines personnes qui ont fortement collaboré à l'aboutissement de ce travail, par leur présence et leur soutien.

MON directeur de recherche, Professeur Moulaï Mustapha, qui a su me diriger vers la bonne voie, avec patience, dextérité et professionnalisme.

JE suis très reconnaissant à Messieurs.
M. ABBAS, Professeur à l'USTHB d'Alger ;
M. AÏDENE Professeur à l'USTHB d'Alger ;
M.C. BOUZID, Maitre de conférence à l'ENST, Alger ;
N. ZOUGAB, Maitre de conférence à l'UAMB de Bejaia.
pour l'honneur qu'ils m'ont fait en participant au jury de cette thèse.

MES amis, ici et ailleurs, qui m'ont soutenus moralement et psychologiquement lors des moments difficiles. Ceux sans lesquels je ne saurais être. Je les remercie pour la joie et le bonheur qu'ils m'ont apportés.

IL me sera impossible, enfin de ne pas adresser toute mon affection à ma famille :

TOUT d'abord, je dédie cette thèse à la mémoire de mon cher père, mon grand père et à ma chère mère ainsi que ma belle mère. Qu'ils trouvent dans cet humble travail le fruits de leurs longues années de patience et de sacrifices.

ENSUIT à mon frère, mes soeurs et mes neveux ainsi que mes nièces et ma belle famille pour leur soutien.

FINALEMENT, à mon époux et mes deux trésors, mon grand Boudjema et ma princesse Hana Alicia, n'ont pas cessé de m'encourager et de me soutenir. Ma reconnaissance envers eux est inexprimable.

Table des matières

Liste des figures	5
Liste des tables	6
Introduction	1
1 Programmation linéaire fractionnaire	4
1.1 Introduction	4
1.2 Domaines d'applications des problèmes fractionnaires	4
1.3 Programmation linéaire fractionnaire	5
1.4 Résultats et définitions	6
1.5 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire	6
1.6 La résolution directe	8
1.6.1 Résolution d'un programme linéaire fractionnaire continu	8
1.6.2 Résolution d'un programme linéaire fractionnaire en nombres entiers	9
1.7 La résolution par paramétrisation	13
1.8 La résolution d'un programme équivalent à objectif non fractionnaire	14
1.9 Conclusion	14
2 Programmation multi-objectifs	16
2.1 Introduction	16
2.2 Position du problème	16
2.3 Concepts de base	17
2.3.1 Concept de dominance et efficacité	18
2.3.2 Degré de dominance	18
2.3.3 Points de référence	19
2.3.4 Structure du front Pareto	19
2.3.5 Fonctions scalarisantes	20
2.4 Optimisation multi-objectifs et aide à la décision	21
2.4.1 Approches multicritères	22
2.4.2 Méthodes de résolution	22
2.5 Programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers	24
2.5.1 Méthodes de résolution des problèmes MOILP	24
2.6 Programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs	27
2.6.1 Formulation du problème	27
2.7 Résolution du problème (MOILFP)	29
2.7.1 Méthodes de Abbas et Moulai [1]	30
2.7.2 Méthode de Chergui et Moulai [2]	32
2.8 Conclusion	33

3	Optimisation stochastique	34
3.1	Introduction	34
3.2	Moments d'une variable aléatoire	34
3.2.1	Espérance mathématique	34
3.2.2	Variance d'une variable aléatoire	35
3.3	Loi de Laplace-Gauss ou loi normale	36
3.3.1	Densité de probabilité de la loi normale	36
3.3.2	Loi normale centrée réduite	37
3.3.3	Loi log-normale	38
3.4	Programmes linéaires stochastiques	39
3.4.1	Programmation stochastique avec recours	39
3.4.2	Modèles de recours à 2-niveaux (en 2-étapes) :	39
3.4.3	Méthode de décomposition L-Shaped	41
3.4.4	Test de faisabilité	41
3.4.5	Test d'optimalité	42
3.4.6	Programmation sous contrainte en probabilité	43
3.4.7	Contraintes probabilistes jointes	44
3.4.8	Contraintes probabilistes indépendantes	44
3.5	Programmation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers	45
3.6	Quelques concepts de solutions efficaces	45
3.6.1	Problème déterministe équivalent à MOSILP	46
3.7	Optimisation avec intervalle arithmétique	49
3.7.1	Arithmétique des intervalles réels	49
3.7.2	Notations et Définitions	49
3.8	Programmation fractionnaire linéaire à valeurs intervalles	52
3.9	Problèmes d'optimisation à valeurs intervalles	54
3.10	Exemple numérique	55
3.11	Conclusion	56
4	Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace	57
4.1	Introduction	57
4.2	Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace continu	58
4.2.1	Notations et résultats théoriques	58
4.2.2	La méthode de Yamamoto, 2002[3]	59
4.2.3	Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace discret	60
4.3	L'algorithme de la méthode	65
4.4	Conclusion	66
5	Résolution du problème de la programmation stochastique multi-objectifs fractionnaire linéaire à valeurs intervalles en nombres entiers	67
5.1	Introduction	67
5.2	Fonction à valeur intervalle	68
5.3	Programme stochastique multi-objectifs fractionnaires linéaires à valeurs intervalles en nombres entiers	68
5.3.1	Contraintes déterministes équivalentes aux contraintes probabilistes :	70
5.4	Exemple numérique	74
5.5	Conclusion	77

6 Optimisation stochastique sur le front de pareto par la norme augmentée de Tchebycheff	78
6.1 Introduction	78
6.1.1 Le problème déterministe équivalent de MOSILP	79
6.1.2 Faisabilité	80
6.1.3 Optimalité	81
6.2 Norme Thebycheff	81
6.3 Description générale de l’algorithme	82
6.3.1 Algorithme [4]	84
6.4 Exemple d’illustration	85
6.5 Conclusion	99
Conclusion générale et perspectives	100
Bibliographie	102
Abstract	109

Table des figures

1.1	Graphe de l'exemple.	8
1.2	Principe de Branch and Bound	12
2.1	L'espace de décisions et l'espace des objectifs d'un problème de deux fonctions objectifs	17
2.2	Illustration des différentes définitions	19
2.3	La représentation de la surface de compromis	20
2.4	Représentation des différents types de solutions	21
3.1	Densité de la loi normale.	37
3.2	Fonction de répartition de la loi normale	37
3.3	Densité de la loi log-normale.	38
3.4	Exemples de vecteurs d'intervalles de dimensions 1, 2 et 3	49
6.1	Domaine d'admissibilité D^1 avec ensemble efficace.	87
6.2	Domaine d'admissibilité pour le deuxième problème	88
6.3	l'ensemble d'itérations	98
6.4	Espace de décision.	99

Liste des tableaux

5.1	Moyennes, variances et niveaux de probabilité spécifiés.	75
5.2	Moyennes, variances et niveaux de probabilité spécifiés.	75
5.3	Résultats de l'optimisation en faisant varier les poids w_1 et w_2	77
6.1	Les itérations avec leur résultat obtenu	98
*		

Introduction

La majorité des problèmes d'optimisation issus du monde réel sont de nature multi-objectifs et exigent la considération simultanée de plusieurs critères généralement conflictuels. Chaque critère correspond à une fonction objectif à optimiser (maximiser ou minimiser), qui relève de la modélisation du problème traité ; tels problèmes d'optimisation sont réputés pour être particulièrement difficiles à résoudre que le problème mono-objectif.

Lors de la modélisation ou la formulation mathématique d'une expérience ; ou d'un problème d'optimisation ; ou de décision qui se ramène à un programme mathématique, on a tendance à supposer que les données sont déterministes. Cette hypothèse est peu réaliste compte tenu du fait que ces dernières peuvent être imprécises avec une imprécision de nature aléatoire, c'est ce qui a motivé l'introduction de la programmation stochastique. Beaucoup de travaux ont été réalisés en programmation stochastique ([5], [6],[7]). L'optimisation multi-objectifs stochastique auxquels cette thèse est consacrée, traite le cas de la présence simultanée de plusieurs objectifs, en présence de variables aléatoires dans les contraintes et les coefficients des fonctions objectifs.

Dans de nombreuses situations pratiques, il est nécessaire d'utiliser des variables discrètes dans la modélisation du problème. En fait, dans la majorité des applications concrètes de programmation mathématique, la présence des variables entières est inévitable, on parle alors d'optimisation discrète ou programmation en nombres entiers. De ce fait, la programmation mathématique multi-objectifs en nombres entiers représente le cadre général de notre travail dans cette thèse.

Dans cette thèse, nous traiterons principalement de la résolution de problèmes multi-objectifs stochastiques linéaires discrets et non linéaires discrets.

1) Le premier objectif fut de réaliser une étude détaillée sur l'optimisation multi-objectifs stochastique linéaire fractionnaire dont les coefficients des fonctions objectifs sont des intervalles et le second membre des contraintes sont des variables aléatoires de distribution log-Normal. Comme première contribution dans le domaine de l'optimisation stochastique non linéaire multi-objectifs, cette étude nous a conduits à la résolution d'un problème stochastique multi-objectifs fractionnaire avec coefficients intervalle en présence de variables entières sous contraintes probabilistes voir (Younsi-Abbaci et Moulai) [8]. En s'appuyant sur des approches pour transformer le problème stochastique vers un problème déterministe et en utilisant la méthode de la somme pondérée en vue d'aboutir à un passage possible de l'aspect multicritère à l'aspect unicritère. Ce travail a fait l'objet d'une première publication dans la revue " Asian-European Journal of Mathematics ". L'ensemble efficient d'un problème multi-objectifs peut être généralement très vaste et même infini dans le cas continu. Dans certaines situations, les décideurs n'ont pas besoin de l'ensemble de toutes les solutions efficaces d'un problème de programmation multi-objectifs mais uniquement de solutions efficaces qui réalisent l'optimum

d'un objectif différent des objectifs déjà fixés. Ceci, nous mène vers la recherche de solution optimale d'un critère sur l'ensemble des solutions efficaces, comme un outil pour mesurer les préférences des décideurs et distinguer parmi les nombreuses solutions efficaces.

2) Le second objectif de cette thèse consiste à étudier le problème d'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble des points efficaces d'un problème multi-objectifs stochastique linéaire en variables entières (MOSILP). Ce problème est en principe très difficile à résoudre, ceci est dû principalement à la non-convexité de son ensemble réalisable et le problème appartient alors à la classe des problèmes d'optimisation globale ou non convexe. Cependant, nous nous sommes rendus compte que les publications traitant l'optimisation d'un critère sur l'ensemble des points efficaces d'un problème multi-objectifs linéaire en variables entières (MOILP) sont relativement très peu nombreuses et quasi- inexistantes pour le problème multi-objectifs stochastique discret (MOSILP). Cet état de choses, bien que source de difficultés potentielles, nous a d'avantage motivé pour explorer cette classe de problèmes.

Le noyau du deuxième objectif fut de réaliser un algorithme qui consiste à optimiser un critère stochastique sur le front de Pareto d'un problème de programmation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers. En utilisant le modèle de recours à 2-niveaux pour transformer le problème stochastique vers un problème déterministe, nous a permis de mettre au point une méthode exacte pour la résolution d'un problème d'optimisation d'un critère linéaire à coefficients aléatoires sur l'ensemble efficient discret d'un problème stochastique multi-objectifs linéaire (MOSILP) voir [4]. Cette approche est basée principalement sur la théorie de la norme de Tchebychev et sur la réduction progressive du domaine de recherche. Cette extension a fait l'objet d'une deuxième publication dans la revue " Journal of Computational Technologies " volume 26, No. 3 (2021) [4].

Cette thèse est organisée de la façon suivante :

- Dans le premier chapitre, l'essentiel des éléments de l'optimisation mathématique fractionnaire est relaté en détail et nous nous sommes focalisé plus particulièrement sur l'optimisation en nombres entiers.
- Le chapitre 2, pose le contexte multi-objectifs du travail. Pour cela les principales définitions liées à l'optimisation mathématique multi-objectifs sont présentées. Puis, les problématiques spécifiques à ce domaine sont exposées et étudiées. Parmi ces problématiques nous parlerons en particulier de la structure de l'ensemble des solutions de compromis (solution Pareto).
- Le chapitre 3, pose le contexte stochastique du travail. Pour cela les principales définitions liées à l'optimisation stochastique sont présentées. Puis, les différents modèles de prise en compte de l'incertitude sont présentés, à savoir les modèles de recours et les contraintes probabilistes. La méthode de décomposition de Benders concernant la résolution des problèmes pouvant être modélisés en tant que modèles de recours en deux étapes est présentée. Nous présentons aussi l'optimisation avec intervalle arithmétique plus exactement la programmation fractionnaire linéaire à valeurs-intervalle.
- Le quatrième chapitre est consacré à l'optimisation d'un critère linéaire sur l'ensemble efficace, nous étudions les problèmes dans le cas continu et le cas discret en exposant quelques méthodes de résolution.
- Le cinquième chapitre expose notre première contribution qui consiste à la résolution d'un problème stochastique multi-objectifs linéaire fractionnaire, où les coefficients des fonctions objectifs numérateurs et dénominateurs sont des intervalles et le second membre des contraintes sont des variables aléatoires de distribution log-Normal.
- Dans le sixième chapitre, nous abordons notre deuxième contribution dans le domaine

stochastique multi-objectifs en mettant au point, une méthode exacte de résolution d'un problème d'optimisation stochastique d'un critère linéaire sur le front de Pareto d'un problème stochastique multi-objectifs linéaire discret .

- Enfin, la thèse s'achèvera par une conclusion générale et quelques perspectives de recherche.

1

Programmation linéaire fractionnaire

1.1 Introduction

En optimisation mathématique, la programmation linéaire fractionnaire est une généralisation de la programmation linéaire. Alors que la fonction objectif dans un programme linéaire est une fonction linéaire, la fonction objectif dans un programme linéaire fractionnaire est un rapport de deux fonctions linéaires.

Le terme programmation fractionnaire est utilisé pour désigner un type de problèmes d'optimisation où la fonction objectif est un quotient $f(x)/g(x)$, soumis à un ensemble de contraintes.

Différentes versions de ce modèle, en variable entières, en mixtes, en continues ou en variables bivalentes ont plusieurs applications à savoir l'ingénierie, l'optimisation combinatoire, la programmation stochastique, l'informatique et l'économie [9, 10, 11, 12, 13].

1.2 Domaines d'applications des problèmes fractionnaires

Comme domaines d'applications des problèmes fractionnaires soumis à un ensemble de contraintes, nous pouvons citer par exemple :

- Le domaine des finances où il est souvent question d'optimiser un rapport de deux fonctions telles que [dette/ capitaux propres], [rendement/employé], [coût effectif/ coût standard], [bénéfice/coût], [inventaire/ventes], [risque des actifs/capital].
- Le domaine de l'économie offre une large éventail d'applications. En effet, la mesure de l'efficacité des systèmes étudiés s'exprime sous forme de rapports entre les critères techniques et/ou économiques. Par exemple, [rendement/risque],[rendement/investissement], [coût/temps], [dette/capitaux propres], [inventaire/ventes].
- Le domaine de la santé comme la planification dans un hopital [coût/patient], [infirmière/patient], [docteur/patient],...etc

- Les processus de décision de Markov peuvent également mener à la maximisation du rapport de la moyenne et l'écart type.
- Dans la théorie de l'information, la capacité d'un canal de transmission peut être définie comme étant le taux maximal de transmission sur toutes les probabilités.
- Programmation stochastique : Dans un programme linéaire, en supposant que les composantes de l'objectif sont non constantes, indépendantes et varient suivant une loi de probabilité donnée. La programmation stochastique se propose de maximiser la probabilité pour que la valeur de l'objectif soit supérieure à une valeur donnée. Lorsque les composantes des fonctions objectifs considérées comme des variables aléatoires, suivant une loi de Gauss ; Bereanu [14] a montré que le programme stochastique est équivalent à un programme déterministe fractionnaire linéaire convexe en variables continues.

1.3 Programmation linéaire fractionnaire

Les programmes fractionnaires consistent à optimiser un objectif mis sous forme d'un rapport de deux fonctions linéaires ou non linéaires, soumis à un ensemble de contraintes. Étant donné f, h et g_j pour $j \in \{1, \dots, m\}$, des fonctions réelles définies sur \mathbb{R}^n dans \mathbb{R} , avec h ne s'annulant pas sur un sous-ensemble X de \mathbb{R}^n . Un problème de programmation fractionnaire est donc de la forme suivante :

$$(P_F) \begin{cases} \max \text{ ou } (\min) & \frac{f(x)}{h(x)} \\ \text{s.t} & x \in S, \end{cases} \quad (1.1)$$

où $S = \{x \in X \subset \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0 \text{ pour } j \in \{1, \dots, m\}\}$.

En vérifiant les hypothèses classiques suivantes :

- Les fonctions f, h et g_j pour $j \in \{1, \dots, m\}$ sont continues sur \mathbb{R}^n :
- S est un domaine non vide et borné de \mathbb{R}^n ;
- $h(x) > 0 \quad \forall x \in S$.

Lorsque la fonction f est concave et les fonctions h et $g_j, j = 1, \dots, m$, sont convexes, (P_F) est désigné par programme fractionnaire concave-convexe. (P_F) est dit fractionnaire linéaire, ou encore hyperbolique, lorsque f, h et $g_j, j = 1, \dots, m$, sont des fonctions linéaires ou affines de la variable $x \in \mathbb{R}_+^n$. Il se modélise alors comme suit :

$$(P_{FL}) \begin{cases} \min \text{ ou } (\max) & Z(x) = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ \text{s.c} & x \in S, \end{cases} \quad (1.2)$$

où

- $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$, avec α et β sont des réels, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, p et q des vecteurs de $\mathbb{R}^{1 \times n}$.
- S borné et non vide.
- $qx + \beta \neq 0 \quad \forall x \in S$.

Il est clair que si q est un vecteur nul avec $\beta \neq 0$ alors, (PFL) n'est autre qu'un problème de programmation linéaire. Si de plus, les variables sont astreintes à ne prendre que des valeurs entières ($x \in \mathbb{Z}^n$), on parle dans ce cas de problème de programmation linéaire fractionnaire en nombre entiers ou encore problème hyperbolique discret, noté (ILFP), qui fait une partie d'objet de nos préoccupations dans la suite de ce travail.

1.4 Résultats et définitions

Définition 1.4.1. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite concave si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 1.4.2. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est dite convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y)$$

Définition 1.4.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^n . Alors, f est dite pseudo-concave si et seulement si : $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x)(y - x) \leq 0$, on a : $f(y) \leq f(x)$.

Définition 1.4.4. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction différentiable sur \mathbb{R}^n . Alors, f est dite pseudo-convexe si et seulement si : $(x, y) \in \mathbb{R}^n$ tel que $\nabla f(x)(y - x) \geq 0$, on a : $f(y) \geq f(x)$.

Définition 1.4.5. On dit qu'une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est quasi-convexe si et seulement si :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n, \forall \lambda \in [0, 1], f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

Lemme 1.4.1. Si $\frac{f}{h}$ est une fonction fractionnaire linéaire sur un ensemble D de \mathbb{R}^n telle que $\forall x \in D : h(x) > 0$, alors :

- pour chaque couple $(x, y) \in D$, on a :
 - $\frac{f(x)}{h(x)} \leq \frac{f(y)}{h(y)}$ si et seulement si $\nabla[\frac{f(x)}{h(x)}](y - x) \geq 0$
 - $\frac{f(x)}{h(x)} < \frac{f(y)}{h(y)}$ si et seulement si $\nabla[\frac{f(x)}{h(x)}](y - x) > 0$
- f/h est simultanément pseudo-concave et pseudo-convexe.

Preuve 1.4.1. Voir [15]

1.5 Géométrie de la programmation fractionnaire linéaire

Comme l'a noté Steuer[16], les programmes linéaires fractionnaires présentent un intérêt particulier mis en évidence par la linéarité des courbes niveaux de leurs fonctions critères. En effet, pour illustrer cet aspect, considérons une Z-courbe niveau quelconque de la fonction critère :

$$\bar{Z} = \frac{px + \alpha}{qx + \beta}$$

après simplification, nous obtenons :

$$\bar{Z}(qx + \beta) = (px + \alpha)$$

Ce qui donne : $\bar{Z}\beta - \alpha = (p - \bar{Z}q)x$, qui est une expression linéaire de la z-courbe niveau de la

fonction objectif.

On voit que chaque courbe niveau du critère fractionnaire linéaire est expression linéaire sur D , avec \bar{Z} quelconque, à condition que le dénominateur ne soit pas nul sur D . Donc, si un programme fractionnaire linéaire unicritère possède une solution optimale, alors au moins un point extrême de D est optimal.

En dépit de la linéarité de la courbe niveau de la fonction objectif, les courbes niveaux ne sont pas parallèles (lorsque $p \neq 0, q \neq 0$ et $p \neq wq$ pour tout $w \in \mathbb{R}$) comme ils le sont en programmation linéaire. L'ensemble rotation est l'ensemble de tous les points d'intersection entre la 0-courbe niveau du numérateur et la 0-courbe niveau du dénominateur.

L'ensemble rotation est appelé *point de rotation* dans \mathbb{R}^2 et axe de rotation dans \mathbb{R}^3 . Les points de cet ensemble sont déterminés par la résolution du système suivant :

$$p'x = -\alpha$$

$$q'x = -\beta$$

Exemple illustratif

Considérons le programme fractionnaire linéaire suivant :

$$(LFP) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad Z = \frac{x_1 + x_2 - 1}{5x_1 + x_2 - 1} \\ (LFP) \text{ t.q} \quad 3x_1 + 2x_2 \geq 6 \\ \quad \quad \quad x_1 \leq 3 \\ \quad \quad \quad x_2 \leq 3 \\ \quad \quad \quad x_1, x_2 > 0 \end{array} \right. \quad (1.3)$$

dont le graphe est donné par la Figure- 1.1

Donc la courbe de niveau \bar{Z} est l'ensemble des points $x = (x_1, x_2)$ satisfaisant l'équation :

$$(1 - 5\bar{Z})x_1 + (1 - \bar{Z})x_2 = 1 - \bar{Z}$$

Donc pour :

- $\bar{Z} = 0$, on a $x_1 + x_2 = 1$: courbe de niveau 0.
- $\bar{Z} = 1$, on a $x_1 = 0$: courbe de niveau 1.

Les lignes discontinues représentent les 0-courbes niveaux du numérateur et du dénominateur dont l'intersection est le point de rotation $r = (0, 1)$. La flèche circulaire dénote le gradient de la fonction fractionnaire linéaire critère et indique le sens et l'angle avec lesquels se déplacent les courbes de niveaux. p et q représente respectivement les gradients des courbes de

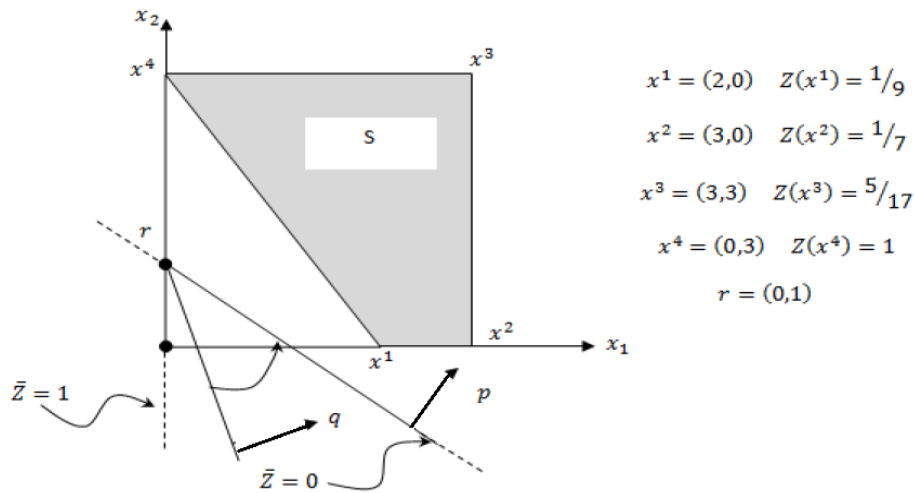


FIGURE 1.1 – Graphe de l'exemple.

niveau 0 du numérateur et du dénominateur respectivement.

Donc, en faisant déplacer la courbe de niveau 0 autour du point de rotation r suivant le sens de rotation trigonométrique, nous pouvons voir que le point optimal $x^4 = (0, 3)$ de valeur optimale $Z^* = 1$ est l'intersection du domaine S avec la courbe de niveau 1 et il correspond à la solution optimale du problème (1.3).

1.6 La résolution directe

Dans cette stratégie de résolution, le programme fractionnaire est traité sous sa forme originale, c'est à dire sans modifier ni l'objectif ni l'ensemble des contraintes.

Cette approche est utilisée pour résoudre les programmes fractionnaires hyperboliques en variables continues, en variables entières, en variables bivalentes 0 – 1 et en variables mixtes, voir par exemple (Bitran et al.) [17], (Granot et al.) [18], Grunspan [19], (Cambini et al.) [20], (Abbas et al.) [21, 22]

1.6.1 Résolution d'un programme linéaire fractionnaire continu

Méthode de A. Cambini et al[20] On considère le programme fractionnaire linéaire continu (LFP : Linear Fractional Programming) :

$$(P_{LFP}) \begin{cases} \max & Z = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ \text{s.t} & x \in S \end{cases}$$

Où $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, x \geq 0\}$ avec α et β sont des réels, p et x sont des vecteurs de $\mathbb{R}^{1 \times n}$, q un vecteur non nul de $\mathbb{R}^{1 \times n}$, A est une matrice réelle de format $(m \times n)$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m . L'ensemble S est supposé borné non vide et $qx + \beta > 0 \quad \forall x \in S$.

Définition 1.6.1. *Un point réalisable x^* est une solution niveau optimale pour le problème (P_{LFP}) si x^* est une solution optimale pour le programme linéaire suivant :*

$$(P_{x^*}) \max \{px + \alpha \mid qx = qx^*; x \in S\}$$

Si de plus x^* est un point extrême de S , x^* est dit solution niveau optimale de base.

L'algorithme de Cambini et al. génère une séquence finie de solutions niveau optimales dont la première x^* est une solution optimale du programme linéaire :

$$(P_0) \{ \min qx + \beta \mid x \in S \}$$

- Si x^0 est unique, alors elle aussi est une solution niveau optimale de base pour (P_{LFP}) .
- Sinon résoudre le programme linéaire (P_{x^*}) pour obtenir une solution niveau optimale de base.

Théorème 1.6.1. [23] *Le point x^0 de S est une solution optimale du problème fractionnaire (P_{LFP}) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\hat{\gamma} = \hat{\beta}p - \hat{\alpha}q$ est tel que $\hat{\gamma}_j \leq 0$ pour tout indice hors base $j \in \mathbb{N}_k$.*

Algorithme de (Cambini et al.)

Étape 1 Trouver la solution optimale niveau x^1 .

Si une telle solution n'existe pas, alors $\sup \left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in S \right\} = +\infty$, terminer.

Sinon, poser $k = 1$ et aller à l'étape 2.

Étape 2

Si $J = \{j \in N \mid \hat{q}_j > 0\} = \emptyset$, terminer, x^k est une solution optimale du problème (LFP).

Sinon, soit s tel que $\frac{\hat{p}_s}{\hat{q}_s} = \max_{j \in J} \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j}$

Si $\hat{\gamma}_s > 0$, aller à l'étape 3. Sinon, terminer, x^k est une solution optimale de (LFP).

Étape 3 La variable hors base x_s entre dans la base au moyen d'une opération pivot, poser $k = k + 1$ et aller à l'étape 2. Si une telle opération n'est pas possible, terminer : sup

$$\left\{ \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \mid x \in S \right\} = \frac{\hat{p}_j}{\hat{q}_j},$$

1.6.2 Résolution d'un programme linéaire fractionnaire en nombres entiers

La programmation en nombres entiers est un problème d'optimisation mathématique ou un problème de faisabilité, dans lequel une partie ou la totalité des variables sont des entiers, ou certaines d'entre ces dernières ne peuvent être que des entiers.

De nombreux auteurs ont résolu le problème de la programmation fractionnaire linéaire en nombres entiers par la méthode directe en utilisant différents algorithmes tels par exemple les

techniques de séparation et évaluation progressive et les méthodes des coupes [24, 21, 22], nous en présentons quelques-unes d'entre elles :

Méthode des coupes de Gomory [25]

Le principe de fonctionnement de cette méthode est de commencer par résoudre le problème relaxé du problème original, c-à-d, résoudre un problème de programmation fractionnaire linéaire en variables réelles. On cherche une solution de base optimale en utilisant la méthode du simplexe [26], si elle existe, on choisit une variable de base non entière et on génère une inégalité sur la contrainte associée à cette variable afin de couper la région de faisabilité courante. Une coupe peut être ajoutée au programme fractionnaire linéaire relaxé. Ce processus est répété jusqu'à ce qu'une solution entière optimale soit trouvée.

La contrainte correspondant à x_r (i^{me} ligne du tableau optimal) s'écrit :

$$x_r + \sum_{j \in N} \bar{a}_{i,j} x_j = \bar{b}_i \quad (1.4)$$

Où

$x_r, r \in B$ est une variable de base B et les x_j sont les variables non basiques. $\bar{a}_{i,j}$ est un élément de la matrice optimale des contraintes \bar{A} .

N : est l'ensemble des indices hors base.

Étant donné un nombre réel α , on désigne par $[\alpha]$: le plus grand entier inférieur ou égal à α .

$\langle \alpha \rangle = \alpha - [\alpha]$ est appelée la partie fractionnaire de α et $[\alpha]$ sa partie entière.

Puisque toutes les variables sont positives ou nulles, on a :

$$\sum_{j \in N} [\bar{a}_{i,j}] x_j \leq \sum_{j \in N} \bar{a}_{i,j} x_j$$

De l'équation (1.4) on a :

$$x_r + \sum_{j \in N} [\bar{a}_{i,j}] x_j \leq \bar{b}_i$$

Comme le membre gauche est entier dans cette inégalité, la partie droite (second membre) peut être remplacée par sa partie entière :

$$x_r + \sum_{j \in N} [\bar{a}_{i,j}] x_j \geq [\bar{b}_i] \quad (1.5)$$

En soustrayant (1.4) de (1.5) on obtient :

$$\sum_{j \in N} \langle \bar{a}_{i,j} \rangle x_j \leq \langle \bar{b}_i \rangle$$

En ajoutant une variable d'écart x_s à cette dernière inéquation on obtient la coupe de Gomory définie par :

$$-\sum_{j \in N} \langle \bar{a}_{i,j} \rangle x_j + x_s = -\langle \bar{b}_i \rangle$$

Cette contrainte est introduite dans le tableau simplexe optimal et le nouveau problème formé peut être résolu en utilisant la méthode duale du simplexe. Après un nombre fini d'itérations, ou bien on obtient une solution optimale entière, ou bien le problème devient irréalisable.

Méthode par séparation et évaluation "Branch & Bound" : La méthode par séparation et évaluation "Branch-and-Bound" a été développée par Land et Doig [27], spécialement élaborée pour des problèmes en nombres entiers.

Le principe de cette méthode (B&B) consiste à construire noeud par noeud l'arbre d'énumération de l'ensemble des solutions du problème ILFP d'une manière intelligente, tout en faisant usage des bornes inférieure et supérieure afin d'éviter la génération de tous les noeuds de l'arbre. Il s'agit principalement de diviser récursivement le problème initial en sous-problèmes plus petits et plus faciles à résoudre : c'est la phase de séparation (branching). Quand à la phase d'évaluation (bound), elle consiste à identifier les sous-ensembles qui peuvent contenir la solution optimale et à supprimer ceux qui ne la contiennent pas.

L'algorithme de B&B construit et parcourt l'arbre de recherche. Sa racine est le domaine réalisable du problème initial, le modèle IP, tandis que les noeuds représentent les domaines réalisables des sous-problèmes.

À chaque itération, l'algorithme de B&B résout la relaxation du sous-problème courant. Cette dernière fournit une borne inférieure sur la valeur optimale du sous-problème courant. Différents cas peuvent être rencontrés :

- Le sous-problème n'est pas réalisable, cela signifie qu'il n'y a pas de solution dans cette branche. Elle est exclue.
- La borne inférieure du noeud est supérieure à la meilleure solution réalisable obtenue par l'algorithme de B&B : on peut alors affirmer que la solution optimale globale ne peut pas être contenue dans le sous ensemble de solutions représenté par ce noeud. On l'élague.
- La solution de la relaxation continue du noeud devient la meilleure solution réalisable du problème initial si elle est entière, et que sa valeur optimale est inférieure à celle obtenue par l'algorithme de B&B jusqu'à présent.
- Finalement, si la borne inférieure obtenue est meilleure que la dernière valeur obtenue par l'algorithme de B&B, mais sa solution n'est pas entière, le problème sera divisé en sous-problèmes.

La méthode sera appliquée récursivement au reste des noeuds, et elle s'arrête lorsqu'il n'y a plus de noeud à évaluer.

Méthode de Granot et al[18] L'algorithme de Granot et al. s'applique directement au programme (ILFP) suivant :

$$(ILFP) \begin{cases} \max & Z = \frac{px + \alpha}{qx + \beta} \\ s.t & \\ & x \in S = \{x \in \mathbb{R}^n ; | Ax = b, x \geq 0\}. \quad x \quad \text{entier} \end{cases}$$

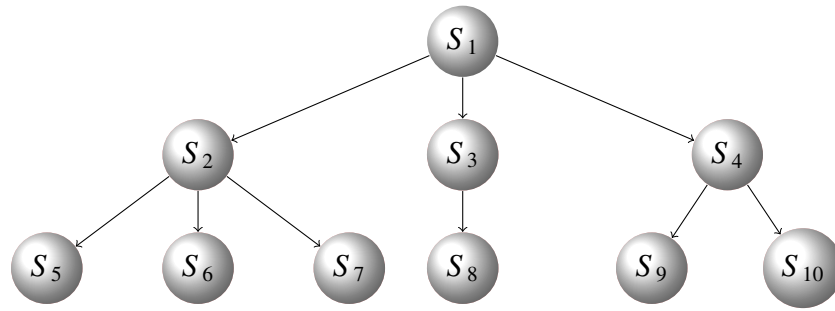


FIGURE 1.2 – Principe de Branch and Bound

où α et β sont des réels, p et x sont des vecteurs de \mathbb{R}^n , q un vecteur non nul de \mathbb{R}^n , A est une matrice réelle de format $(m \times n)$ et b un vecteur de \mathbb{R}^m . L'ensemble S est supposé borné non vide et $qx + \beta > 0 \quad \forall x \in S$

Dans cette methode, la structure originale des contraintes est maintenue et les itérations sont réalisées dans un tableau du simplexe augmenté qui comprend $m + 3$ lignes supplémentaires. Les m premières lignes correspondent aux contraintes d'origine, les lignes $(m + 1)$, $(m + 2)$ correspondent au numérateur et dénominateur de la fonction objectif fractionnaire du problème (ILFP) et la ligne $(m + 3)$ correspond au vecteur du gradient réduit $\hat{\gamma}_j$ de la fonction objectif où $\hat{\gamma} = \beta \hat{p}_j - \alpha \hat{q}_j, \forall j \in \{1, \dots, m\}$.

A chaque itération de l'algorithme, les $(m + 2)$ lignes sont modifiées à travers les opérations ordinaires de pivot, par contre la dernière ligne est modifiée selon la formule du gradient réduit citée ci-dessus.

Une fois les valeurs du gradient réduit pour les variables hors base calculées, on teste :

- Si $\hat{\gamma}_j \leq 0$, pour tout indice hors base j , alors la solution obtenue est une solution optimale du problème (ILFP).
- Sinon, il existe un indice $s, s \in N$ (N étant l'ensemble des indices hors base) pour lequel $\hat{\gamma}_s > 0$. Soit θ_r tel que :

$$\theta_r = \min\left\{\frac{\hat{b}_i}{\hat{A}_i^s} \mid \hat{A}_i^s > 0\right\}$$

alors la ligne r sert comme une ligne pivot pour générer une coupe de Gomory de la forme :

$$v + \sum_{j \in N} \left\lfloor \frac{\hat{A}_{rj}}{\hat{A}_r^s} \right\rfloor x_j = \left\lfloor \frac{\hat{b}_j}{\hat{A}_r^s} \right\rfloor, \quad v \geq 0.$$

Cette coupe est rajoutée au tableau du simplexe pour servir comme ligne pivot, avec la colonne s comme colonne pivot. Sachant que la valeur du pivot dans ce cas est de 1, les nouveaux coefficients obtenus après l'exécution des opérations pivot usuelles sont tous des nombres entiers.

1.7 La résolution par paramétrisation

Cette méthode a été utilisée pour résoudre les différents type de programmes fractionnaires, linéaires ou non linéaires, en variables continues ou en variables discrètes, sur des domaines bornés. A l'inverse de la résolution directe, on construit un problème à objectif simplifié, combinaison linéaire du numérateur et du dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre, tout en gardant inchangé l'ensemble des contraintes. Une séquence de résolutions de ce type de problème fournit une solution optimale du programme fractionnaire.

Afin de simplifier l'objectif du programme fractionnaire, un paramètre est introduit permettant de ramener un programme hyperbolique en un programme linéaire paramétré, ou bien un programme non-linéaire fractionnaire en un programme non-linéaire paramétré, tout en gardant l'ensemble des contraintes inchangées. Ainsi le programme obtenu peut être résolu "paramétriquement", une séquence de résolution de tels programmes à objectif simplifié engendre une suite de solutions convergeables vers une solution optimale du programme fractionnaire initial. Autour de cette approche, plusieurs algorithmes ont été proposés, nous citons entre autres : l'algorithme de Isbell et Marlow [28] en 1956 pour les programmes hyperboliques, l'algorithme généralisé de Dinkelbach [11] en 1967 pour les programmes fractionnaires non linéaires et l'algorithme de Seshan et Tikekar [29] pour les problèmes de programmation linéaires fractionnaires en nombres entiers.

L'algorithme de Dinkelbach

Considérons le problème de programmation fractionnaire suivant :

$$(PF) \begin{cases} \max & F(x) = \frac{f(x)}{h(x)} \\ s.t & \\ & x \in S \end{cases}$$

L'ensemble S est supposé non vide, compact dans \mathbb{R}^n , les fonctions f et h sont des fonctions continues à valeurs réelles dans S , $h(x) > 0$, $\forall x \in S$. Le problème paramétré associé $Q(\lambda)$ consiste à simplifier l'objectif en combinant linéairement le numérateur et le dénominateur par l'intermédiaire d'un paramètre réel λ .

$$(Q(\lambda)) \begin{cases} \max & v(\lambda) = f(x) - \lambda h(x) \\ s.t & \\ & x \in S, \lambda \in \mathbb{R} \end{cases}$$

En notant λ^* la valeur optimale de (PF), le resultat fondamental liant le programme fractionnaire au programme paramétré associé est donné par :

Théorème 1.7.1. [11] *Toute solution optimale λ^* du problème $Q(\lambda^*)$ est une solution optimale du problème (PF).*

En tant que fonction de la variable λ , la valeur optimale $v(\lambda)$ du programme paramétré vérifie quelques propriétés [11] que nous résumons ci-après :

Proposition 1.7.1. [11] *La fonction $\lambda \rightarrow v(\lambda)$ est continue, strictement décroissante, convexe $v(0) > 0$ et $v(\lambda)$ tend vers $-\infty$ quand λ tend vers $+\infty$.*

Si de plus le programme est hyperbolique, alors v est linéaire par morceaux.

En particulier, l'équation $v(\lambda) = 0$ admet une solution unique λ^* , plus précisément :

Proposition 1.7.2. [11]

- $v(\lambda) = 0 \iff \lambda = \lambda^*$
- $v(\lambda) > 0 \iff \lambda < \lambda^*$
- $v(\lambda) < 0 \iff \lambda > \lambda^*$

Ainsi la résolution du programme fractionnaire (LFP) revient à trouver la racine de l'équation non linéaire à une seule variable, $v(\lambda) = 0$.

Pour ce faire, un catalogue d'algorithmes de la littérature est présenté dans Nagih et al. [30]. Il inclut des algorithmes de résolution itératifs (Newton, interpolation linéaire) et dichotomiques (recherche dichotomique, recherche dichotomique modifiée et interpolation convexe) ainsi qu'un algorithme ε -approchant.

1.8 La résolution d'un programme équivalent à objectif non fractionnaire

Un changement de variables permet lui aussi de simplifier l'objectif, mais en transportant la difficulté sur l'ensemble des contraintes [30]. Par exemple, un programme fractionnaire concave-convexe est transformé en un programme concave, et un programme hyperbolique en un programme à objectif linéaire, avec des contraintes additionnelles. La transformation du programme linéaire fractionnaire en un programme équivalent à objectif non fractionnaire est obtenu par un changement de variables. A l'inverse de l'approche paramétrée, ce changement de variables induit l'ajout d'une contrainte et d'une variable. Plus précisément, cette transformation, proposée par Charnes et al.[31] s'applique au programme hyperbolique (LFP) en variables continues et s'effectue en introduisant deux nouvelles variables :

$$z = \frac{1}{qx + \beta} \quad \text{et} \quad y = zx$$

pour obtenir un programme linéaire équivalent :

$$(P_{eq}) \left\{ \begin{array}{l} \max = py + \alpha z \\ s.c \quad Ay - bz = 0 \\ \quad \quad \quad qy + \beta z = 1 \\ \quad \quad \quad y, z \geq 0 \end{array} \right.$$

Proposition 1.8.1. [31] Si y^*, z^* est une solution optimale de (P_{eq}) , alors $z^* > 0$ et $x^* = \frac{y^*}{z^*}$ est une solution optimale de (LFP).

1.9 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté les résultats de base de la programmation linéaire fractionnaire ainsi que les principales approches de résolution d'un problème de programmation

linéaire fractionnaire à variables continues et particulièrement à variables entières qui représente le noyau de notre thèse.

2

Programmation multi-objectifs

2.1 Introduction

L'optimisation multi-objectifs est un domaine fondamental de l'aide à la décision multicritères, auquel de nombreux milieux scientifiques et industriels se doivent faire face. Au cours des dernières années, un grand nombre de travaux, à la fois théoriques et appliqués, ont été publiés dans ce domaine.

La résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs consiste à trouver les solutions de meilleur compromis entre les critères à optimiser, connues par les solutions Pareto optimales, qui correspondent mieux aux préférences du décideur. L'une des questions les plus difficiles est donc liée à l'identification de ces solutions ou d'une approximation de celles-ci pour des problèmes complexes.

Ce chapitre présente le contexte de l'optimisation multi-objectifs qui sera le cadre de travail de cette thèse. Nous introduisons les principales définitions telles que la dominance, la surface de compromis ainsi les principales approches de résolution.

Enfin, nous présentons les problèmes de programmation multi-objectifs fractionnaire en nombres entiers.

2.2 Position du problème

Un problème d'optimisation multi-objectifs consiste à optimiser p fonctions objectifs simultanément ($p \geq 2$). Il est défini sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \text{''Minimiser''} & Z(x) = (z^1(x), z^2(x), \dots, z^p(x)) \\ \text{s.t} & x \in S \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $p \geq 2$ représente le nombre d'objectifs à optimiser, x représente un vecteur des variables

de décision, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid g_j(x) \leq 0, x \geq 0\}$ est l'ensemble de solutions réalisables associé à des contraintes d'égalité, d'inégalité et des bornes explicites (espace des décisions) et $z(x)$ est le vecteur des objectifs à optimiser. z^k et g_j , des fonctions à valeurs réelles $k = 1, 2, \dots, p$, $j = 1, 2, \dots, m$. Lorsque les objectifs z^k et les fonctions g_j sont linéaires, on obtient un problème de programmation linéaire multi-objectifs (MOLP) écrit comme suit :

$$\begin{cases} \text{"Minimiser"} & Z^k(x) = C^k x, & k = 1, \dots, p \\ \text{s.t} & x \in S \end{cases} \quad (2.2)$$

$C^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, \dots, p$ et l'ensemble S est constitué de contraintes (inéquations, équations) linéaires $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$; $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$. À chaque solution $x \in S$ est associé une image $z \in Z$ dite vecteur objectif (voir la figure- 2.1).

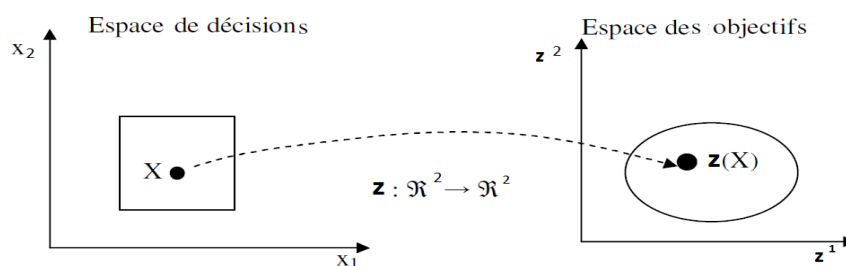


FIGURE 2.1 – L'espace de décisions et l'espace des objectifs d'un problème de deux fonctions objectifs

La recherche de la solution optimale pour un problème d'optimisation multi-objectifs soulève quelques réflexions par rapport à la notion même de l'optimalité. En effet, il est irréalisable de trouver une solution optimale unique pour un problème multi-objectifs, car il n'y a aucune combinaison des variables de décisions qui minimise (ou maximise) toutes les composantes du vecteur Z simultanément. Les problèmes multi-objectifs ont en général un ensemble de solutions optimales dont les valeurs des fonctions sont en fait les meilleurs compromis possibles dans l'espace des fonctions objectifs. Il faut donc utiliser une autre définition de la "meilleure solution", afin de déterminer exactement quelle solution peut être considérée meilleure par rapport à une autre. Le concept de "l'optimalité de Pareto" (Pareto, 1896)[32] est ainsi utilisé pour établir une hiérarchie entre les solutions d'un problème multi-objectifs en vue de déterminer si une solution appartient réellement à l'ensemble des meilleurs compromis.

2.3 Concepts de base

Pour mieux comprendre le concept de l'optimalité de Pareto, nous introduisons d'abord la notion de "dominance de Pareto". La notion de dominance a été introduite par [Pareto, 1897] et initialement utilisée en économie. Elle est désormais utilisée dans d'autres domaines à l'instar de l'optimisation multi-objectifs. Cette notion exprime une idée assez intuitive : voulant choisir entre deux vecteurs v_1 et v_2 , nous choisirons celui qui est meilleur ou égal sur toutes les composantes tout en étant strictement meilleur sur au moins une d'entre elles. Si un tel choix ne peut être fait alors les vecteurs seront considérés non-dominés entre eux. Ainsi, partant d'un en-

semble de décisions x , l'objectif est d'introduire un ordre total¹ entre les solutions de manière à pouvoir faire un choix. Une solution non-dominée est aussi désignée par **solution de Pareto** ou bien **solution efficace**.

2.3.1 Concept de dominance et efficacité

Comme nous l'avons évoqué précédemment, l'optimisation multi-objectifs nécessite de définir la notion d'ensemble de solutions "efficaces". En effet, étant donné que les objectifs sont généralement conflictuels il n'existe pas forcément de solution qui serait simultanément optimale pour chaque objectif. De ce fait, il n'est pas évident de définir un ordre total entre les solutions comme c'est le cas en optimisation mono-objectif. Ainsi, une relation d'ordre partiel est généralement définie, il s'agit de la relation de Pareto dominance.

Définition 2.3.1. Soient deux solutions réalisables x et y pour un problème multi-objectifs donné, $x = (x_1, \dots, x_n)$ et $y = (y_1, \dots, y_n)$: y est dit dominé par x , ou bien x domine y si et seulement si les conditions suivantes sont vérifiées :

$$z^1(x) \leq z^1(y), \dots, z^p(x) \leq z^p(y) \text{ et } \exists k \in \{1, \dots, p\} \text{ tel que } z^k(x) < z^k(y)$$

Ou de façon alternative $x < y$.

Ainsi, une solution qui n'est dominée par aucune autre solution est dite Pareto optimale, et inversement, si une solution est dominée par au moins une seule autre solution, alors elle ne peut être considérée Pareto optimale, d'où la définition suivante :

Définition 2.3.2. Une solution $x^* \in S$ est dite solution efficace (ou Pareto optimale) si et seulement s'il n'existe pas de solution $y \in S$ telle que $z^k(y) \leq z^k(x^*)$, $k \in \{1, \dots, p\}$ et $\exists j \in \{1, \dots, p\} / z^j(y) < z^j(x^*)$.

2.3.2 Degré de dominance

Définition 2.3.3. (Dominance faible de Pareto) Une solution $x^* \in S$ est faiblement efficace si et seulement s'il n'existe pas de solution $y \in S$ telle que $z^k(y) \leq z^k(x^*)$, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$.

Soient deux solutions x et y , on dit que x domine faiblement (au sens faible) y , si et seulement si, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ on a : $z^k(x) \leq z^k(y)$ tel que $\exists k \in \{1, \dots, p\}$ tel que $z^k(x) < z^k(y)$.

Définition 2.3.4. (Dominance stricte de Pareto) Soient deux solutions x et y , on dit que x domine strictement (au sens strict) y , si et seulement si, $\forall k \in \{1, \dots, p\}$ $z^k(x) < z^k(y)$.

Par abus de langage, la dominance stricte est souvent désignée par dominance de Pareto. L'ensemble de solutions optimales de Pareto est aussi désigné par **front de Pareto**, on parle de **cône de Pareto** si les solutions sont toutes strictement non-dominées.

1. On appelle relation d'ordre total sur un ensemble S toute relation d'ordre telle que tout élément de S soit comparable avec tout autre élément de S .

2.3.3 Points de référence

1. Tout d'abord, le **point idéal** z^{Id} est le point qui a comme valeur pour chaque objectif la valeur optimale de l'objectif considéré.

$$z^{Id} \text{ tel que } \forall k \in \{1 \dots p\}, Z_k^{Id} = \min_{x \in S} Z_k(x)$$

Ce point ne correspond pas à une solution réalisable car si c'était le cas, cela sous-entendrait que les objectifs ne sont pas contradictoires et qu'une solution optimisant un objectif, optimise simultanément tous les autres, ce qui ramènerait le problème à un problème ayant une seule solution Pareto optimale.

2. De ce point idéal peut être défini le **point utopique** z^U de la façon suivante :

$$z^U = z^{Id} - \epsilon U$$

où $\epsilon > 0$ et U est le vecteur unitaire ($U = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$). Il est clair, de par sa définition, que ce point n'est pas réalisable.

3. Le **point Nadir** Les coordonnées du point Nadir μ correspondent aux maximums de chaque objectif des points du front Pareto.

$$\mu^k = \max_{x \in E} Z^k(x) \text{ pour } k \in \{1, \dots, p\}$$

où : E est l'ensemble des solutions efficaces 2.2.

Une visualisation de l'ensemble de ces définitions est donnée sur la figure 2.2

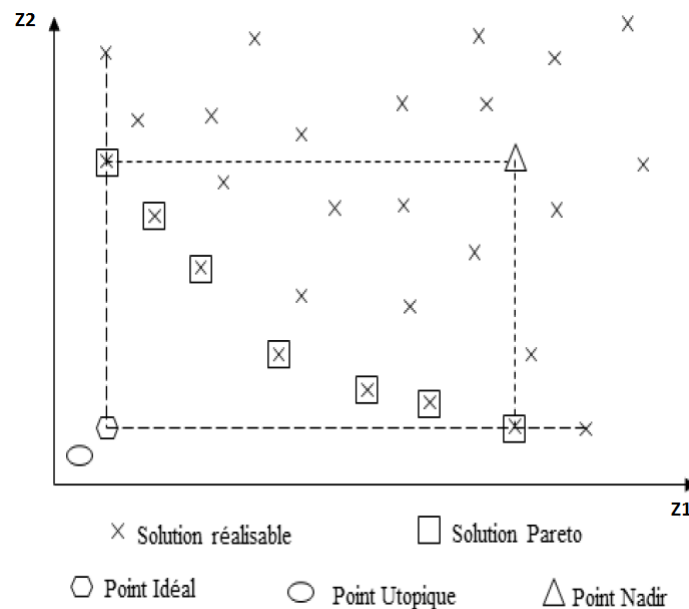


FIGURE 2.2 – Illustration des différentes définitions

2.3.4 Structure du front Pareto

L'objectif est donc de fournir aux décideurs un ensemble de solution de Pareto, afin qu'ils puissent ensuite choisir les solutions qui les intéressent le plus.

Représentation du front Pareto

Toutes les représentations de surface de compromis ou front de Pareto ne sont pas équivalentes. En effet, la représentation idéale du front Pareto devra être constituée de points "solution" de notre problème répartis de manière uniforme sur la surface de compromis (voir figure 2.3).

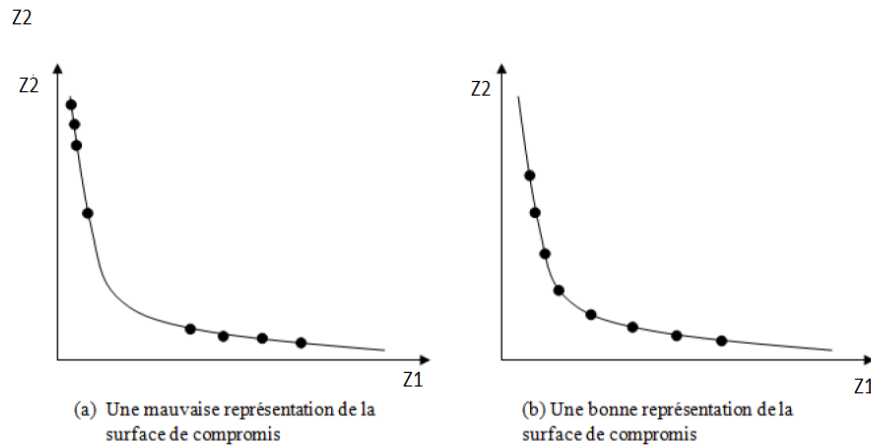


FIGURE 2.3 – La représentation de la surface de compromis

Solution supportées/ non supportées

Sur le front Pareto, deux types de solutions peuvent être différenciées : les *solutions supportées* et les *solutions non supportées*. Les premières sont celles situées sur l'enveloppe convexe (le plus petit ensemble convexe contenant S) de l'image de l'ensemble des solutions (voir figure 2.4) et peuvent donc être trouvées à l'aide d'une agrégation linéaire des objectifs [33]. Elles sont donc plus simples à obtenir que les solutions non supportées. D'ailleurs, les premiers travaux en optimisation multi-objectifs se sont pour la plupart focalisés sur la recherche de ces solutions supportées en optimisant des combinaisons linéaires des objectifs utilisant différents vecteurs de poids.

Alors pourquoi ne pas se satisfaire des solutions supportées ? Tout d'abord parce que ces solutions peuvent ne représenter qu'un petit sous-ensemble des solutions efficaces. De plus, ces solutions supportées ne sont pas forcément bien réparties le long du front et ne représentent pas toujours un bon compromis. Donc, si l'on veut obtenir des solutions de bon compromis entre les objectifs, il est nécessaire de considérer les solutions Pareto non supportées.

2.3.5 Fonctions scalarisantes

Le choix d'une solution efficace parmi toutes les solutions réalisables exige une certaine connaissance de la structure de préférence. Cette information est obtenue directement ou indirectement et peut parfois se traduire en terme de paramètre de préférence. Les plus courantes sont :

1. Les poids λ_k , $k = 1, 2, \dots, p$ qui reflètent l'importance relative de chaque objectif.
2. Le point de référence qui est défini par des niveaux de réservation (valeurs souhaitables) sur chaque objectif.

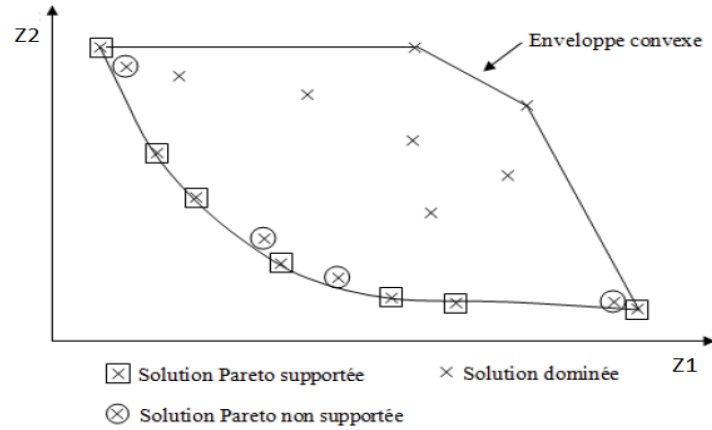


FIGURE 2.4 – Représentation des différents types de solutions

- Le point de réservation qui est défini par des niveaux (valeurs non souhaitables) sur chaque objectif.

La fonction scalarisante est définie par $U(z, \lambda) : \mathbb{R}^p \times \Lambda \rightarrow \mathbb{R}$; où Λ est l'ensemble des paramètres. Les fonctions scalarisantes les plus courantes sont les suivantes :

- Somme pondérée des objectifs (particulièrement utilisée dans le cas linéaire) :

$$U_1(Z, \lambda) = \sum_{k=1}^p \lambda_k Z^k, \lambda \in \Lambda,$$

ou bien,

$$U_2(Z, \lambda) = \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z^k - Z_{id}^k|, \lambda \in \Lambda,$$

Où Z_{id}^k est la k^{me} composante du point idéal

- Norme L_p pondérée :

$$U_3(Z, \lambda) = \left[\sum_{k=1}^p \lambda_k |Z^k - Z_{id}^k|^p \right]^{\frac{1}{p}}, \lambda \in \Lambda, p \in \mathbb{Z}_+^*.$$

- Norme L_∞ pondérée de Tchebycheff :

$$U_4(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \lambda_k |Z^k - Z_{id}^k| \right\}, \lambda \in \Lambda.$$

- Norme composée (Tchebycheff pondérée augmentée) :

$$U_5(Z, \lambda) = \max_{1 \leq k \leq p} \left\{ \lambda_k |Z^k - Z_{id}^k| \right\} + \rho \sum_{k=1}^p \lambda_k |Z^k - Z_{id}^k|, \rho > 0.$$

2.4 Optimisation multi-objectifs et aide à la décision

Cette section a pour but de donner une vue d'ensemble des approches existantes pour la résolution de problèmes d'optimisation multi-objectifs. Pour ce faire, nous allons tout d'abord présenter une classification des approches de résolution en fonction de la place accordée au décideur.

2.4.1 Approches multicritères

Les approches multicritères visent à proposer aux décideurs une ou plusieurs solution Pareto optimales. On peut ranger ces approches dans les trois familles suivantes :

1. *Les approches à priori* : (**approches agréger puis comparer**) avec ces approches, le décideur est sollicité avant le lancement de la méthode, ceci pour définir ses préférences. Par la suite, le problème est transformé en un problème avec un unique objectif. Dans ce cas, soit une agrégation des critères est appliquée, sinon, on désigne un unique critère à minimiser tandis que les autres sont injectés dans le problème sous forme de contraintes.
2. *Les approches a posteriori* : Dans ce type d'approches, on cherche à fournir au décideur un ensemble de bonnes solutions bien réparties. Il peut ensuite, au regard de l'ensemble des solutions, sélectionner celle qui lui semble la plus appropriée. Ainsi, il n'est plus nécessaire de modéliser les préférences du décideur (ce qui peut s'avérer être très difficile), ce qui peut également être difficile et requérir un temps de calcul important (mais ne nécessite pas la présence du décideur).
3. *Les approches interactives* : Dans ces approches, il existe une interaction directe et progressive entre le décideur et la méthode de résolution. Ainsi, à partir des connaissances acquises, le décideur peut définir ses préférences de manière compréhensible. Les échanges sont itérés plusieurs fois jusque satisfaction du décideur. Cette approche permet donc de bien prendre en compte les préférences du décideur, mais nécessite sa présence tout au long du processus de recherche.

Chacune de ces approches possède des avantages et des inconvénients. En pratique, le choix du type d'approche utilisé dépend de la nature du problème.

2.4.2 Méthodes de résolution

Soit le problème d'optimisation multi-objectifs défini en (2.2). Nous présentons dans cette section, une revue de littérature des méthodes de résolution de problème d'optimisation multi-objectifs.

Approche ε -contrainte

Cette approche est basée sur le théorème suivant [34]

Théorème 2.4.1. *Toute solution optimale du problème mono-objectif*

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z^k \\ s.t \\ z^i(x) \leq Q_i, \quad \forall i \neq k \\ x \in S \end{array} \right. \quad (2.3)$$

est aussi faiblement non-dominée pour le problème multi-objectifs (2.1), et l'ensemble des solutions optimales de (2.3) contient au moins une solution efficace de (2.1).

Où $Q = (Q_1, \dots, Q_{k-1}, Q_{k+1}, \dots, Q_p)$.

L'objectif z^k représente l'objectif primaire ou l'objectif préféré. L'ensemble Pareto optimal est généré en faisant varier le vecteur Q . Ce résultat permet de définir le problème minimisant un unique objectif sous contrainte d'une borne supérieure (cas de minimisation) sur tous les autres

objectifs. Si la solution résultante n'est pas Pareto optimale pour le problème multi-objectifs, alors elle n'est pas optimale pour le problème mono-objectif.

Afin d'énumérer toutes les solutions de Pareto il suffit d'attribuer aux bornes $Q_i, i = 1, \dots, p$, toutes les valeurs possibles. Cette technique est bien évidemment naïve, mais il existe des études qui proposent des procédures plus efficaces permettant d'obtenir le front total de Pareto en un minimum d'itérations.

Méthode des sommes pondérées

Cette méthode de résolution d'un problème d'optimisation multi-objectifs est la plus évidente et, probablement, la plus couramment utilisée en pratique. Elle consiste à transformer un problème multi-objectifs en un problème qui combine les différentes fonctions objectif du problème en une seule fonction U de façon linéaire, l'idée de cette méthode est d'associer une pondération λ_k à chaque objectif z^k et de résoudre le problème P_λ suivant :

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad U(x) = \sum_{k=1}^p \lambda_k z^k(x) \\ s.t \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \\ \quad \quad x \in S \\ \quad \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1 \end{array} \right. \quad (2.4)$$

où les poids λ_k sont compris dans l'intervalle $[0, 1]$. Différents poids fournissent différentes solutions. La solution de ce problème est une solution Pareto optimale. Il a été montré que pour toute solution supportée x^* il existe un vecteur λ telle que x^* soit une solution de P_λ . Une solution supportée étant une solution appartenant à fermeture convexe de l'ensemble des solutions. En revanche, les solutions non supportées ne peuvent être trouvées par cette méthode. Ainsi, pour les problèmes pour lesquels le front Pareto est convexe il sera possible de trouver l'ensemble du front Pareto avec cette méthode.

Méthode dite "but programmé ou Goal programming"

Cette méthode, qui relève d'une théorie très avancée dans le domaine des problèmes multi-objectifs, a été initialement conçue par (Charnes et Cooper [35] dans le cas linéaire ; elle a été extension par des travaux d'Ijiri [36] et d'Ignizio [37] dans le cas non linéaire). Dans cette approche, le décideur doit définir des buts B_k ou préférences qu'il désire atteindre pour chaque objectif z^k . Ces valeurs sont introduites dans la formulation du problème, le transformant en un problème mono-objectif. La nouvelle fonction objectif est modifiée de façon à minimiser les écarts entre les résultats et les buts à atteindre, le problème revient à considérer la forme suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad (\sum_{k=1}^p |B_k - z^k(x)|^r)^{\frac{1}{r}}, \quad \text{avec } r \geq 1 \\ s.c. \quad x \in S \end{array} \right. \quad (2.5)$$

La méthode est facile à mettre en oeuvre mais la définition des poids et des objectifs à atteindre est une question délicate qui détermine l'efficacité de la méthode.

Autres méthodes de résolution

Au cours des dernières années, un ensemble de techniques d'optimisation approchantes, connues sous le nom métaheuristiques. Ces méthodes peuvent être considérées comme des stratégies de haut niveau qui guident un ensemble de techniques plus simples dans la recherche d'un optimum [38]. Parmi ces techniques, les techniques évolutives pour résoudre les MOPs sont très populaires dans l'optimisation multi-objectifs, ce qui donne lieu à une grande variété d'algorithmes, tels que NSGA-II [39] SPEA2 [40] et bien d'autres [41, 42]

2.5 Programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers

Un problème de programmation linéaire multi-objectifs en nombre entiers (MOILP²) est constitué d'un espace de décisions discret non convexe défini par un ensemble de contraintes linéaires sur lequel plusieurs critères souvent conflictuels sont optimisés. Mathématiquement, ce problème peut être formulé par :

$$\begin{cases} \text{'' max ''} & Z^k(x) = C^k x, & k = 1, \dots, p \\ \text{s.t} & x \in D \end{cases} \quad (2.6)$$

Où $D = S \cap \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} étant l'ensemble des nombres entiers relatifs, $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq 0\}$, $A \in \mathbb{R}^{n \times m}$, $b \in \mathbb{R}^n$, C est une matrice de dimension $p \times n$ d'éléments réels avec des vecteurs lignes $c^k \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$.

2.5.1 Méthodes de résolution des problèmes MOILP

De la même façon que dans le contexte mono-objectif, les programmes multi-objectifs en variables entières ou mixtes nécessitent d'énumérer des solutions admissibles. Le cadre de cette thèse étant les programmes non convexes, nous précisons dès maintenant notre propos aux problèmes dont les variables sont discrètes. Dans la suite de ce chapitre, nous nous étendons plus particulièrement sur les deux méthodes de résolution à savoir l'algorithme multi-objectifs de Sylva et Crima et la méthode D. Klein et E. Hannan, car ces deux méthodes et la méthode de Steuer et Choo (méthodes basée sur un point de référence), qui sera présentée dans le dernier chapitre, sont centrales dans la proposition algorithmique de la thèse.

Méthode de D. Klein et E. Hannan

La technique proposée par Klein et Hannan [43] peut être utilisée aussi bien pour identifier l'ensemble de toutes les solutions efficaces que pour en caractériser une partie seulement. Elle consiste à résoudre progressivement une séquence de programmes linéaires mono-objectif en nombres entiers avec des contraintes ajoutées à chaque étape. Les contraintes supplémentaires éliminent les solutions efficaces déjà trouvées, et font en sorte que les nouvelles solutions générées soient efficaces.

2. MOILP : Multi-Objective Integer Linear Program

Algorithme 1: L'algorithme de D. Klein et E. Hannan

Étape1 : Choisir arbitrairement un critère k , $k \in \{1, 2, \dots, p\}$ et résoudre le problème unicritère (P_1) suivant :

$$(P_1) : \max\{Z^k = c^k x : x \in D\}$$

Cas 1. Si la solution optimale de (P_1) , x^1 , est unique alors elle est efficace pour (P) .

Cas 2. Sinon, déterminer toutes les solutions alternatives à x^1 et par comparaison deux à deux des vecteurs critères associés, garder uniquement celles qui sont efficaces pour construire l'ensemble $X_{SE}(P_1)$ des solutions efficaces générées à l'étape 1.

Étape générale j : A l'étape j , soit le problème (P_j) à résoudre, il est défini comme suit :

$$(P_j) \begin{cases} \max & Z_k = C^k x \\ \text{t.q} & x \in D \\ & \bigwedge_{i=1}^r (\bigvee_{s=1, s \neq k}^p (C^s x \geq C^k \tilde{x}_i + \epsilon^s)) \end{cases} \quad (2.7)$$

Avec $0 < \epsilon^s \leq 1$ et \tilde{x}_i ($i=1, \dots, r$) les points efficaces obtenus aux étapes $1, \dots, j-1$.

Si $X_{SE}(P_j)$ est l'ensemble des solutions efficaces obtenues à l'étape j et Y^j l'ensemble des points efficaces accumulés à la fin de l'étape j , alors $Y^j = Y^{j-1} \cup X_{SE}(P_j)$ pour $j \geq 2$ avec $Y^1 = X_{SE}(P_1)$.

Étape finale : La procédure s'arrête lorsque le problème (P_j) est irréalisable.

Méthode de Sylva et Crema (2004)

L'algorithme de Sylva et Crema [44] génère tous les vecteurs non dominés, initialement l'algorithme sélectionne un vecteur poids positif $\lambda > 0$. l'algorithme s'arrête si le problème $(MOILP_\lambda)$ (défini dans la proposition 2.5.1) est irréalisable c'est-à-dire le problème n'a aucune solution efficace. Sinon le modèle $(MOILP_\lambda)$ est mis à jour par l'ajout de p variables binaires et $(p + 1)$ contraintes qui réduit le domaine réalisable par la solution non dominée obtenue par $(MOILP_\lambda)$. Si on a l solutions non dominées, alors on résout le $(MOILP_{\lambda(l)})$ pour trouver $(l + 1)^{\text{ème}}$ solutions non dominées.

Proposition 2.5.1. [44] Soient x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème MOILP. Posons $D_s = \{x \in Z^n | C^k x \leq C^k x^s, \forall s = 1, \dots, l\}$. Si x^* est une solution optimale pour le problème mono objectif :

$$(MOILP_{\lambda(l)}) \begin{cases} \text{Max} & \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \\ \text{tq} & x \in (D \cup_{s=1}^l D_s) \\ & 0 \leq \lambda \leq 1, \quad \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \end{cases}$$

pour certaines valeurs du vecteur $\lambda \in \mathbb{R}^p$ $\lambda > 0$, alors x^* est une solution efficace pour le problème MOILP.

Proposition 2.5.2. [44] Soient x^1, x^2, \dots, x^l des solutions efficaces du problème MOILP (2.6). Posons $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid C^k x \leq C^k x^s, \forall s = 1, \dots, l\}$. Si x^* solution efficace pour le problème :

$$(P_l) \begin{cases} \text{Max} & C^k x \\ \text{tq} & x \in (D \cup_{s=1}^l D_s) \end{cases} \quad (2.8)$$

alors x^* est une solution efficace pour le problème MOILP. De plus, si le problème (2.8) est irréalisable, alors $\{(C^k x^s)_{s=1}^l\}$ est l'ensemble de toutes les solutions non dominées du problème MOILP.

A la fin, on obtient l'ensemble de toutes les solutions efficaces ou seulement une partie qui intéresse le décideur.

Pour les problèmes de grande taille, la détermination de l'ensemble de toutes les solutions non dominées devient très coûteuse en terme du temps de calcul. Pour cela, une étape d'interaction avec le décideur peut être intéressante de l'intégrer à la procédure. Cette étape a pour objectif d'éliminer des solutions efficaces que le décideur juge insatisfaisantes. Dans ce cas le problème (P_{l+1}) devient :

$$(P_{(l+1)}) \begin{cases} \text{Max} & \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \\ \text{tq} & x \in D \\ & C^k x \geq (C^k x^s + f_k) y_k^s - M_k (1 - y_k^s) \\ & \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1 \quad y_k^s \in \{0, 1\} \text{ pour } k = 1, \dots, p, s = 1, \dots, l \end{cases}$$

Où f_k représente l'amélioration minimale dans la $i^{\text{ème}}$ fonction objectif fixée par le décideur, $f_k > 1$ (entier).

Algorithme 2: Algorithme de la méthode de Sylva et Crema

Étape1 : Après avoir fixé le vecteur poids $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_p)$ à des valeurs strictement positives et $l = 1$, la première étape de l'algorithme consiste en la résolution du problème :

$$(P_1) : \text{Max} \left\{ \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \mid x \in D \right\}.$$

Deux cas se présentent :

Cas 1. Si (P_1) n'admet pas de solutions, alors le problème MOILP n'en admet pas non plus.

Cas 2. Sinon, une solution x^l est trouvée et elle est efficace.

Ensuite, une suite de programmes linéaires en nombres entiers augmentés par certaines contraintes sont résolus progressivement.

Après k étapes du processus :

Cas 1. Si (P_l) est irréalisable, alors l'algorithme prend fin.

Cas 2. Sinon, une nouvelle solution efficace, soit x^l , est trouvée et le nouveau problème (P_{l+1}) est défini à partir de (P_l) en lui éliminant toutes les solutions vérifiant $C^k x \leq C^k x^l, \forall k = 1, \dots, p$. Ceci peut être traduit par le rajout des contraintes suivantes :

$$\begin{cases} C^k x \geq (C^k x^l + 1)y_k^l - M_k(1 - y_k^l), & k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^l \geq 1, y_k^l \in \{0, 1\}, & k = 1, \dots, p \end{cases}$$

Où $-M_k$ est la borne inférieure pour les valeurs réalisables de la k^{me} fonction objectif (Par exemple, dans le cas où la matrice des critères C est positive, M_k peut être fixée à 0 pour tout k).

Étape générale $(l + 1)$: Résoudre le problème (P_{l+1})

$$(P_{l+1}) \begin{cases} \text{Max} & \sum_{k=1}^p \lambda_k C^k x \\ \text{tq} & x \in D \\ & C^k x \geq (C^k x^s + 1)y_k^s - M_k(1 - y_k^s) \\ & \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1 \quad y_k^s \in \{0, 1\} \text{ pour } k = 1, \dots, p, s = 1, \dots, l \end{cases}$$

Étape finale n : La procédure continue jusqu'à ce que le problème (P_n) devient irréalisable.

2.6 Programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs

2.6.1 Formulation du problème

Le problème de la programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs (MOLFP :Multiple Objective Linear Fractional Programming problem) est l'un des modèles les plus populaire

utilisés dans la prise de décision à critères multiples. La formule générale de ce problème peut être donnée comme suit :

$$(MOILFP) \left\{ \begin{array}{l} \min Z^1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \min Z^2(x) = \frac{c^2 x + \alpha^2}{d^2 x + \beta^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \min Z^p(x) = \frac{c^p x + \alpha^p}{d^p x + \beta^p} \\ s.c. \\ Ax \leq b, \quad x > 0 \end{array} \right. \quad (2.9)$$

où le nombre d'objectifs est $p \geq 2$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, et pour chaque fonction objectif Z^k , $k \in 1, 2, \dots, p$, on a $c^k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_n^k) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $d^k = (d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k) \in \mathbb{R}^{1 \times n}$, $\alpha^p = (\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^p) \in \mathbb{R}^p$, $\beta^p = (\beta^1, \beta^2, \dots, \beta^p) \in \mathbb{R}^p$ sont des scalaires réels.

On suppose que la région admissible non vide $S = \{x \in \mathbb{R}^n / Ax \leq b, x \geq 0\}$ est bornée, et la fonction $d^k x + \beta^k$ est positif sur S pour chaque $k \in 1, 2, \dots, p$.

Dans de nombreuses situation réelles modélisables par la programmation mathématique, les variables intervenant dans la modélisation sont soumises à être totalement en nombre entiers, on parle de problème de programmation multi-objectifs linéaire fractionnaire en nombre entiers (MOILFP : Multiple Objective integer Linear Fractional Programming problem)

$$(MOILFP) \left\{ \begin{array}{l} \min Z^1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \min Z^2(x) = \frac{c^2 x + \alpha^2}{d^2 x + \beta^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \min Z^p(x) = \frac{c^p x + \alpha^p}{d^p x + \beta^p} \\ s.c. \\ x \in D \end{array} \right. \quad (2.10)$$

où $D = S \cap \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} est l'ensemble des entiers relatifs.

Comme pour les problèmes de programmation linéaire multi-objectifs, la résolution des problèmes de programmation linéaire fractionnaire multi-objectifs est de déterminer toutes les solution efficaces.

Considérons le problème (P_R) :

$$(P_R) \left\{ \begin{array}{l} \min Z^1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \min Z^2(x) = \frac{c^2 x + \alpha^2}{d^2 x + \beta^2} \\ \cdot \\ \cdot \\ \min Z^p(x) = \frac{c^p x + \alpha^p}{d^p x + \beta^p} \\ s.c. \\ x \in S, \end{array} \right.$$

Théorème 2.6.1. [33] Soit le problème unicritère linéaire suivant :

$$(P_\lambda) \left\{ \begin{array}{l} \min \sum_{k=1}^p \lambda_k Z^k(x) \\ s.c. \\ x \in S, \quad et \quad \lambda_k \in \Lambda, \quad \forall k \in 1, \dots, p \end{array} \right.$$

La solution x^* est efficace pour le problème (P_R) si et seulement si x^* est une solution optimale du problème paramétrique (P_λ) ($\Lambda = \{\lambda_k : \sum_{k=1}^K \lambda_k = 1 \quad et \quad 0 \leq \lambda_k \leq 1 \quad \lambda_k > 0, \forall k \in 1, \dots, p\}$).

D'après ce théorème, l'ensemble efficient du problème (P_R) sans les contraintes d'intégrité est bien caractérisé par les solutions du problème paramétrique (P_λ) , $\lambda \in \Lambda$. Ces solutions se trouvent sur la frontière de S , elles sont appelées solutions supportées.

Différemment du cas continu, la difficulté principale rencontrée lorsqu'on traite les problèmes multi-objectifs à variables discrètes est l'existence de solutions efficaces pour (P) qui ne sont pas optimales pour (P_λ) et ce en raison de non-convexité du domaine réalisable, ces solutions efficaces sont dites solutions non supportées (le front Pareto de (P) est l'union de l'ensemble des solutions non supportées de (P)).

La nature des problèmes de programmation linéaire en variables continues et les problèmes de programmation linéaire en variables discrètes est différente. Contrairement à la programmation linéaire continue où on s'intéresse seulement aux solutions sommets du polyèdre, les solutions optimales du problème discret peuvent se trouver à l'intérieur du polyèdre et par conséquent la recherche d'une solution optimale d'un problème de programmation en nombres entiers est souvent NP-complet et peut être même NP-difficile [45].

Il faut noter cependant que, si un problème d'optimisation combinatoire est facile à résoudre, il n'est pas forcément de même pour sa version multi-objectifs.

2.7 Résolution du problème (MOILFP)

Le problème de la programmation multi-objectifs linéaire fractionnaire (MOLFP) a été largement étudié par plusieurs auteurs. De nombreuses études et applications ont été rapportées dans la littérature, nous citons entre autre [46, 47]. Cependant, le problème multi-objectifs linéaire fractionnaire à variables entières (MOILFP) n'a pas reçu autant d'attention que le problème (MOLFP). On ne trouve que très peu de méthodes dédiées au problème (MOILFP), voir par exemple [1, 2, 48].

2.7.1 Méthodes de Abbas et Moulai [1]

La méthode proposée par (Abbas et Moulai) pour résoudre le problème (MOILFP) est une généralisation de leur méthode du problème (MOILP), détaillée dans [49].

Afin de résoudre le problème (2.10) une approche consistant à résoudre une séquence finie de problèmes de programmation fractionnaire linéaire discrète est présentée [1].

Considérons le problème de programmation linéaire fractionnaire entier mono-objectif donné sous la forme suivante.

$$\begin{cases} \max & Z^1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \text{s.c.} & \\ & Ax \leq b, \quad x > 0 \quad \text{entier} \end{cases} \quad (2.11)$$

Remarque 2.7.1. Notons qu'à la place de Z^1 , on peut de façon similaire considérer une autre fonction objectif Z^k pour tout $k \in \{2, \dots, p\}$

La recherche des solutions réalisables entières du problème (2.11) nécessite l'introduction des notations suivantes :

- $S_1 = \{x \in \mathbb{R}^{n_1} / A_1 x \leq b_1, A_1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times n_1}, b_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, x \geq 0\}$. S_1 est la région tronquée courante de S obtenue par des coupes de Gomory successives ;
- $x_1^1 = (x_{1,j}^1)$ est la solution optimale entière donnant Z_1^1 obtenue sur S_1 ;
- B_1^1 est une base de S_1 ;
- $a_{1,j}^1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times 1}$ sont les vecteurs activités de $(x_{1,j}^1)$ appropriés à la région tronquée courante S_1 ;
- $y_{1,j}^1 = x_{1,kj}^1 = (B_1^1)^{-1} a_{1,j}^1$ où $y_{1,j}^1 \in \mathbb{R}^{m_1 \times 1}, k \in \mathbb{R}^p$;
- $I_1 = \{j / a_{1,j}^1 \in B_1^1\}$; et $N_1 = \{j / a_{1,j}^1 \notin B_1^1\}$;
- c_j^1 est la j^{me} composante du vecteur c^1 , d_j^1 est la j^{me} composante du vecteur d^1 ;
- $c_{1,1}^1 = \sum_{k \in I_1} c_k^1 y_{1,kj}^1$ et $d_{1,1}^1 = \sum_{k \in I_1} d_k^1 y_{1,kj}^1$;
- $Z^1(x_1^1) = \frac{Z_{1,1}^1}{Z_{1,2}^1}$ où $Z_{1,1}^1 = c^1 x_1^1 + \alpha^1$ et $Z_{1,2}^1 = d^1 x_1^1 + \beta^1$;
- $\bar{\gamma}_{1,j}^1 = Z_{1,2}^1 (c_j^1 - c_{1,j}^1) - Z_{1,1}^1 (d_j^1 - d_{1,j}^1)$ le coût réduit relatif à la j^{me} composante du vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}_1^1$;
- $\Gamma_1 = \{j / j \in N_1 \text{ et } \bar{\gamma}_{1,j}^1 = 0\}$

Pour $l \geq 2$

- $S_l = \{x \in \mathbb{R}^{n_l} / A_l x < b_l, A_l \in \mathbb{R}^{m_l \times n_l}, b_l \in \mathbb{R}^{m_l}, x \geq 0\}$. S_l est la région tronquée courante de S obtenue par application de la coupe des coupes $\sum_{j \in N_{l-1} \setminus \{j_{l-1}\}} x_j \geq 1$ où $j_{l-1} \in \Gamma_{l-1}$ et par des coupes de Gomory successives éventuellement ;
- $x_l^1 = (x_{l,j}^1)$ est la l^{me} solution optimale entière du problème (2.11) obtenue sur S_l à l'étape (l) ;
- B_l^1 est une base de S_l ;
- $a_{l,j}^1 \in \mathbb{R}^{m_l \times 1}$ sont les vecteurs activités de $(x_{l,j}^1)$ appropriés à la région tronquée courante S_l ;
- $y_{l,j}^1 = x_{l,kj}^1 = (B_l^1)^{-1} a_{l,j}^1$ où $y_{l,j}^1 \in \mathbb{R}^{m_l \times 1}$;
- $I_l = \{j / a_{l,j}^1 \in B_l^1\}$; et $N_l = \{j / a_{l,j}^1 \notin B_l^1\}$;

- c_j^1 est la jème composante du vecteur c^1 , d_j^1 est la jème composante du vecteur d^1 ;
- $c_{l,j}^1 = \sum_{k \in I_l} c_k^1 y_{l,kj}^1$ et $d_{l,1}^1 = \sum_{k \in I_l} d_k^1 y_{l,kj}^1$;
- $Z^1(x_l^1) = \frac{Z_{l,1}^1}{Z_{l,2}^1}$ où $Z_{l,1}^1 = \frac{c^1 x_l^1 + \alpha^1}{d^1 x_l^1 + \beta^1}$;
- $x_l^u = (x_{l,j}^u)$ sont les $t_l - 1$ solutions entières adjacentes à x_l^1 , lorsqu'elles existent, où t_l est un nombre entier et $u \in \{2, 3, \dots, t_l\}$
- $\bar{\gamma}_{l,j}^1 = Z_{l,2}^1(c_j^1 - c_{l,j}^1) - Z_{l,1}^1(d_j^1 - d_{l,j}^1)$ le coût réduit relatif à la jème composante du vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}_l^1$;
- $\Gamma_l = \{j \in N_l / \bar{\gamma}_{l,j}^1 = 0\}$

Théorème 2.7.1. [23] *Le point x_l^1 de S est une solution optimale du problème fractionnaire (2.11) si et seulement si le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}$ est tel que $\bar{\gamma}_{l,j}^1 \leq 0$ pour tout indice $j \in N_l$.*

Corollaire 2.7.1. [23] *La solution x_l^1 du problème (2.11) est unique si et seulement si le vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}$ est tel que $\bar{\gamma}_{l,j}^1 < 0$ pour tout indice $j \in N_l$.*

Définition 2.7.1. *Soit x_l^1 une solution optimale du problème (2.11). Supposons que $j_l \in N_l$, une arête E_{j_l} incidente à la solution x_l^1 est définie par l'ensemble :*

$$E_{j_l} = \left\{ x = x_k \in S_l : \begin{cases} x_k = x_k^1 - \theta_{j_l} y_{l,kj_l}^1 & \forall k \in I_l \\ x_{j_l} = \theta_{j_l} \\ x_v = 0 & \forall v \in N_l \setminus \{j_l\} \end{cases} \right. \quad (2.12)$$

où $0 \leq \theta_{j_l} \leq \min_{k \in I_l} \left\{ \frac{x_k^1}{y_{l,kj_l}^1} \mid y_{l,kj_l}^1 > 0 \right\}$, θ_{j_l} est un entier positif et $\theta_{j_l} y_{l,kj_l}^1$ est un entier pour tout $k \in I_l$, si de telles valeurs de θ_{j_l} existent.

Remarque 2.7.2. *Il peut arriver que la solution optimale x^0 du problème (2.11) ne soit pas unique, dans ce cas, il existe une autre solution réalisable $x^1 \neq x^0$ avec $Z^1(x^1) = Z^1(x^0)$. On dit alors que x^1 est une solution optimale alternative de x^0 . La relation (2.12) précédente permet de déterminer cette solution alternative.*

Algorithme de la méthode

Pour résoudre un problème fractionnaire linéaire en nombres entiers à objectifs multiples (2.10), une procédure basée sur une technique de coupe plane est présentée dans les étapes suivantes :

Étape(1) : Résoudre le problème (2.11) par n'importe quelle méthode directe de la programmation fractionnaire discrète. Soit x_l^1 sa solution optimale entière sur S_l , construire l'ensemble Γ_l .

Étape (2) : 1. - Si $\bar{\gamma}_{l,j}^1 < 0$ pour tout indice $j \in N_l$, x_l^1 est l'unique solution optimale sur S_l . Enregistrer le premier vecteur efficace (non dominé) par $(Z^1(x_l^1), \dots, Z^p(x_l^1))$ pour construire l'ensemble des points efficaces Eff_0 . Tronquer le point x_l^1 par la coupe de Dantzig $\sum_{j \in N_l} x_j \geq 1$.

Par application de la méthode duale du simplexe relative à la programmation fractionnaire, on obtient une solution réalisable entière $x_l^2 = (x_{l,j}^2)$ dans la région tronquée S_2 . Rajouter le vecteur correspondant $(Z^1(x_l^2), \dots, Z^p(x_l^2))$ à Eff_0 s'il n'est pas

dominé par l'un des précédents vecteurs critères efficaces (non dominés). Enregistrer l'ensemble Eff_1 .

é

2. -Sinon, il existe un indice $j_1 \in N_1$ pour lequel $\bar{\gamma}_{l,j}^1 = 0$. Déterminer dans ce cas toutes les solutions qui lui sont alternatives, éliminer celles qui ne sont pas efficaces et mettre à jour l'ensemble Eff_0 . Appliquer la coupe $\sum_{j \in N_1 \setminus \{j_1\}} x_j \geq 1$ pour tronquer l'arête $E_{j,l-1}$.

Étape ($l \geq 2$) : Choisir un indice $j_{l-1} \in \Gamma_{l-1}$ et explorer l'arête $E_{j,l-1}$ pour déterminer d'éventuelles solutions entières réalisables x_{l-1}^1 . Augmenter l'ensemble Eff_{l-2} par les vecteurs critères non dominés correspondants pour construire Eff_{l-1} . Tronquer l'arête $E_{j,l-1}$ par la coupe $\sum_{j \in N_{l-1} \setminus \{j,l-1\}} x_j \geq 1$

Étape finale : Le procédé s'arrête lorsque la méthode duale du simplexe est infaisable, indiquant ainsi que la région tronquée courante ne contient aucun point réalisable entier et que l'ensemble des point efficaces est complètement déterminé.

2.7.2 Méthode de Chergui et Moulaï [2]

L'approche adoptée dans cette méthode [2] pour générer toutes les solutions efficaces du problème (MOILFP) est basée sur la résolution du programme linéaire fractionnaire (2.13) suivant, à chaque étape (l) de l'algorithme :

$$\begin{cases} \max & Z^1(x) = \frac{c^1 x + \alpha^1}{d^1 x + \beta^1} \\ \text{s.c.} & \\ & x \in S_l \end{cases} \quad (2.13)$$

où $S_0 = S$ et sans contraintes d'intégrité des variables.

Soit x_l^* la solution entière obtenue après résolution du problème (2.13), on note B_l l'ensemble des indices des variables de base et N_l l'ensemble des indices des variables hors base de x_l^* .

Soit $\bar{\gamma}_j^k$ la jème composante du vecteur gradient réduit $\bar{\gamma}^k$ défini pour chaque critère k , $k \in \{1, \dots, p\}$ par :

$\bar{\gamma}^k = \bar{\beta}^k \bar{c}^k - \bar{\alpha}^k \bar{d}^k$ où \bar{c}^k , \bar{d}^k , $\bar{\beta}^k$ et $\bar{\alpha}^k$ sont les valeurs mises à jour de c^k , d^k , β^k et α^k respectivement.

On définit l'ensemble H_l en x_l^* par :

$$H_l = \{j \in N_l, |\exists k \in \{1, \dots, p\} : \bar{\gamma}_j^k > 0\} \cup \{j \in N_l, |\bar{\gamma}_j^k = 0, \forall k \in \{1, \dots, p\}\}$$

Ainsi, l'ensemble S_{l+1} est défini par $S_{l+1} = \{x \in S_l | \sum_{j \in H_l} x_j \geq 1\}$.

Algorithme de la méthode L'algorithme de génération de toutes les solutions entières efficaces du programme(MOILFP) est présenté dans les étapes suivantes :

Étape(0) : Initialisation : Créer le premier noeud avec le programme (2.13) ($Eff = \emptyset$, Eff étant l'ensemble des des solutions efficaces du problème multi-objectifs (MOILFP)).

Étape(1) :Étape générale : Tant qu'il existe un noeud l non encore sondé qui correspond à la région S_l , faire :

Résoudre le programme linéaire fractionnaire correspondant (2.13) par la méthode duale

du simplexe (la méthode de Cambini et al. [20]), est utilisée juste au début pour la résolution du programme initial (2.13) (c'est à dire pour $S_0 = S$).

- Si le programme (2.13) n'a pas de solutions réalisables, alors le noeud correspondant est sondé.
- Sinon, soit \bar{x}_l la solution optimale. Si \bar{x}_l n'est pas entière, aller à l'étape (a), sinon aller à l'étape (b).

Étape(1.a) : Séparation Choisir une coordonnée non entière $\bar{x}_{l,j}$ de \bar{x}_l et séparer le noeud l actuel en deux noeuds r , $r \geq l + 1$, et $h = r + 1$;

Dans le tableau courant du simplexe, la contrainte $x_j \leq \lfloor \bar{x}_{l,j} \rfloor$ est rajoutée et un nouveau domaine est considéré au noeud r et de façon similaire, la contrainte $x_j \geq \lfloor \bar{x}_{l,j} \rfloor + 1$ est rajoutée pour obtenir un autre domaine au noeud $h = r + 1$ (chaque programme créé doit être résolu en utilisant le même processus jusqu'à ce qu'une solution entière réalisable soit trouvée).

Étape(1.b) : Mise à jour de l'ensemble Eff Si le vecteur $Z(\bar{x}_l)$ n'est pas dominé par le vecteur $Z(x)$ pour toute solution $x \in Eff$, alors $Eff = Eff \cup \{\bar{x}_l\}$.

S'il existe $x \in Eff$ tel que $Z(\bar{x}_l)$ domine $Z(x)$, $Eff = Eff \setminus \{x\} \cup \{\bar{x}_l\}$.

Déterminer les ensembles N_l et H_l ;

- Si $H_l = \emptyset$, alors le noeud correspondant est sondé. Aller à l'étape (1) ;

- Sinon, rajouter la coupe $\sum_{j \in H_l} x_j \geq 1$ au programme (2.13). Aller à l'étape (1).

2.8 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons abordé les concepts fondamentaux de l'optimisation multi-objectifs tel que la notion de dominance ; la structure de la surface compromis et la définition des solutions Pareto optimal, Ensuite, une classification des méthodes de résolution est présentée selon l'intervention du décideur dans le processus de résolution. Nous avons cité quelques méthodes classiques scalarisantes qui transforment le problème multi-objectifs en problème mono-objectif. Dans une deuxième partie de ce chapitre, nous avons présenté les méthodes exactes pour résoudre des programmes multi-objectifs fractionnaires linéaires en nombres entiers.

3

Optimisation stochastique

3.1 Introduction

Lors de la formulation mathématique d'un problème de décision ou d'optimisation qui se ramène à un programme linéaire mono-objectif ou multi-objectifs, supposer, que les données sont déterministes ou constantes est une hypothèse peu réaliste compte tenu du fait qu'elles peuvent être aléatoires de par leur variabilités et des expériences précédentes, donc représentées par des variables aléatoires. Ce qui a donné naissance à la programmation stochastique mono-objectif ou multi-objectifs.

La programmation stochastique est la branche de la programmation mathématique dans laquelle on étudie la théorie et les méthodes pour résoudre des problèmes d'optimisation qui dépendent de paramètres incertains ayant des distributions de probabilités connues. L'optimisation stochastique est parfois appelée optimisation sous incertitude. En raison de la présence de paramètres aléatoires, la théorie de la programmation stochastique combine les concepts d'optimisation avec la théorie des probabilités et des statistiques.

3.2 Moments d'une variable aléatoire

Les différents modèles stochastiques existents dans la littérature utilisent quelques concepts de la théorie statistique que nous allons définir dans ce qui suit :

3.2.1 Espérance mathématique

– **Variable aléatoire discrète :**

Soit X une variable aléatoire réelle prenant un ensemble fini ou dénombrable de valeurs sur un espace probabilisé (Ω, Ξ, Pr) .

α_i ($i \in I$) est l'ensemble des valeurs prises par X avec les probabilités

$$p_i = Pr(X = \alpha_i), \quad i \in I$$

L'espérance mathématique de X , notée $\mathbf{E}(X)$ est définie par :

$$\mathbf{E}(X) = \sum_{i \in I} p_i \alpha_i \quad (3.1)$$

– **Variable aléatoire continue :**

Soit X une variable aléatoire continue prenant ses valeurs sur un ensemble infini non dénombrable de points. L'espérance mathématique de la variable aléatoire X , définie sur l'espace probabilisé (Ω, Ξ, Pr) , est donnée par l'intégrale, si elle converge :

$$\mathbf{E}(X) = \int_{\Omega} X dPr = \int_{\Omega} x Pr_x dx$$

que l'on peut écrire, si f est la densité de probabilité de X :

$$\mathbf{E}(x) = \int_{\Omega} x f(x) dx \quad (3.2)$$

■ **Propriétés de l'espérance mathématique**

– X et Y sont deux variables aléatoires admettant chacune une espérance mathématique,

$$\mathbf{E}(a) = a$$

a et b sont deux constantes : $\mathbf{E}(aX + b) = a\mathbf{E}(X) + b$

$$\mathbf{E}(X + Y) = \mathbf{E}(X) + \mathbf{E}(Y)$$

– une variable aléatoire est dite centrée si son espérance mathématique est nulle :

$$\mathbf{E}(X) = 0$$

3.2.2 Variance d'une variable aléatoire

Définition 3.2.1. La variance est une mesure de dispersion des valeurs d'une variable aléatoire, notée σ_x^2 ou $Var(x)$. la variance est calculée comme la moyenne des écarts quadratiques d'une variable aléatoire par rapport à son espérance.

$$\sigma_x^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \mathbf{E}(x))^2 = \mathbf{E}(x^2) - \mathbf{E}(x)^2 \quad (3.3)$$

Définition 3.2.2. La racine carrée de la variance d'une variable aléatoire x est son écart-type, noté σ_x .

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2} \quad (3.4)$$

■ **Propriétés de la variance**

– Si a et b sont des constantes :

$$Var(b) = 0$$

$$Var(aX + b) = a^2 Var(X)$$

– $V(X) = 0$ implique que X est presque sûrement égale à une constante.

– Si X est une variable aléatoire de carré intégrable, on définit une variable aléatoire U centrée réduite, associée à X , par la relation :

$$U = \frac{X - \mathbf{E}(X)}{\sigma}$$

$$\mathbf{E}(U) = 0 \quad Var(U) = 1$$

– Variance d'une somme algébrique de variables aléatoires

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i) + 2 \sum_{i \neq j, i < j} a_i a_j \text{Cov}(X_i, X_j)$$

les coefficients a_i étant des constantes, et $\text{Cov}(X_i, X_j)$ est la covariance de X_i et X_j .
Si les variables aléatoires X_i sont indépendantes, on obtient

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i\right) = \sum_{i=1}^n a_i^2 \text{Var}(X_i)$$

la covariance de deux variables aléatoires indépendantes est égale à 0.

3.3 Loi de Laplace-Gauss ou loi normale

3.3.1 Densité de probabilité de la loi normale

En théorie des probabilités et en statistique, les lois normales sont parmi les lois de probabilité les plus utilisées pour modéliser des phénomènes naturels issus de plusieurs événements aléatoires. Elles sont en lien avec de nombreux objets mathématiques dont le mouvement brownien, le bruit blanc gaussien ou d'autres lois de probabilité. Elles sont également appelées lois gaussiennes, lois de Gauss ou lois de Laplace-Gauss des noms de Laplace (1749-1827) et Gauss (1777-1855), deux mathématiciens, astronomes et physiciens qui l'ont étudiée.

Plus formellement, une loi normale est une loi de probabilité absolument continue qui dépend de deux paramètres : son espérance, un nombre réel noté μ , et son écart type, un nombre réel positif noté σ . La densité de probabilité de la loi normale d'espérance μ , et d'écart type σ est donnée par :

$$f(x) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2}$$

Cette loi est notée, en général $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. On dit indifféremment qu'une variable suivant une telle loi est une variable normale ou gaussienne.

Fonction de répartition :

$$\text{Pr}(X < a) = \frac{1}{\sigma \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^a e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} dx$$

Cette intégrale n'ayant pas d'expression mathématique simple, des tables donnent les valeurs de la fonction de répartition.

Sur la courbe représentant la densité de probabilité d'une variable gaussienne, la valeur de $F(a)$ est représentée par la partie non hachurée. Cette courbe a un axe de symétrie vertical pour $x = \mu$ et du fait de sa forme, elle est souvent appelée «courbe en cloche».

Remarque 3.3.1. *Espérance et variance : $\mathbf{E}(X) = \mu$ et $\text{Var}(X) = \sigma^2$. Ces résultats justifient le choix des deux paramètres figurant dans l'expression de la densité.*

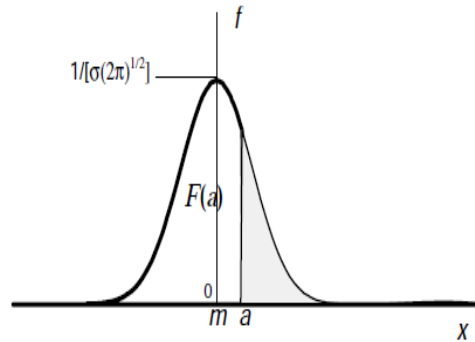


FIGURE 3.1 – Densité de la loi normale.

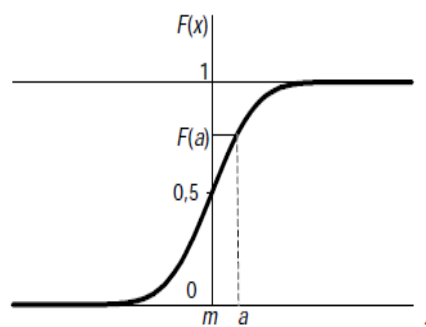


FIGURE 3.2 – Fonction de répartition de la loi normale

3.3.2 Loi normale centrée réduite

La loi normale centrée réduite est la loi de probabilité absolument continue dont la densité de probabilité est donnée par la fonction $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^+$ définie par :

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}t^2}, \quad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}. \quad (3.5)$$

Cette loi est dite centrée puisque son espérance vaut 0 et réduite puisque sa variance vaut 1, tout comme son écart type. Le graphe de la densité f est appelé fonction gaussienne, courbe de Gauss ou courbe en cloche. Cette loi est notée grâce à la première lettre de « normal », une variable aléatoire X qui suit la loi normale centrée réduite est notée :

$$X \sim \mathcal{N}(0, 1)$$

Remarques et propriétés

1. Si la variable aléatoire X suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0, 1)$, alors la variable aléatoire $\sigma X + \mu$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ de moyenne μ et de variance σ^2 . Réciproquement, si Y suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors $\frac{Y-\mu}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite.

Cette première propriété permet d'obtenir la formule très utile

$$Pr(Y \leq x) = Pr\left(\frac{Y-\mu}{\sigma} \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right) = Pr\left(X \leq \frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

2. Plus généralement, si $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ alors $aX + b \sim \mathcal{N}(a\mu + b, a^2\sigma^2)$

Si U et V sont deux variables aléatoires indépendantes distribuées normalement, toute combinaison linéaire des deux de la forme $aU + bV$ est distribuée normalement. Sa moyenne vaut $a\mu_U + b\mu_V$. Sa variance vaut $a^2\sigma_U^2 + b^2\sigma_V^2$.

3. La densité f est symétrique par rapport à μ .
4. Le maximum de la fonction f est atteint en μ et vaut $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}$.

3.3.3 Loi log-normale

Une variable aléatoire X est dite suivre une loi log-normale de paramètres μ et σ^2 si la variable $Y = \ln(X)$ suit une loi normale d'espérance μ et de variance σ^2 .

La loi log-normale de paramètres μ et σ admet pour densité de probabilité

$$f_Y(x) = \frac{1}{x\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln x - \mu}{\sigma}\right)^2} \quad (3.6)$$

Moments :

L'espérance est :

$$\mathbf{E}(X) = e^{\frac{\mu + \sigma^2}{2}}$$

et la variance est :

$$\text{Var}(X) = (e^{\sigma^2} - 1)e^{2\mu + \sigma^2}$$

Des relations équivalentes permettent d'obtenir μ et σ étant données l'espérance et l'écart-type :

$$\begin{cases} \mu = \ln(\mathbf{E}(X)) - \frac{1}{2}\sigma^2 \\ \sigma = \ln\left(1 + \frac{\text{Var}(X)}{(\mathbf{E}(X))^2}\right) \end{cases}$$

Remarque 3.3.2. Quand l'écart-type σ est petit, la loi de X est proche d'une loi normale

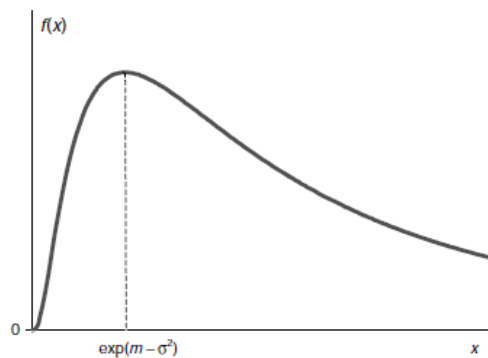


FIGURE 3.3 – Densité de la loi log-normale.

3.4 Programmes linéaires stochastiques

Dans la programmation linéaire stochastique, il se peut que l'on connaisse certains aspects du phénomène aléatoire à travers un historique, ou bien par des lois de probabilités, ou soit par les moments de la variable aléatoire, ou par des scénarios qui peuvent être créés à partir des historiques, ou bien par des experts qui peuvent prévoir le comportement du phénomène aléatoire. L'objectif dans les problèmes d'optimisations est de prendre la meilleure décision vis-à-vis des situations qui comportent l'incertitude.

Le modèle général de la programmation stochastique est défini comme suit :

$$\begin{cases} \min & Z = C(\xi)x \\ \text{s.c} & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.7)$$

Où

- $x \in \mathbb{R}^n$, ($T(\xi)$, $C(\xi)$ et $h(\xi)$) sont des vecteurs aléatoires de dimensions ($m_1 \times n$), ($1 \times n$) et ($m_1 \times 1$) respectivement, définis sur l'espace de probabilités (Ω, Ξ, Pr).
- $D = \{Ax \leq b : x \in \mathcal{N}\}$ un polyèdre convexe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes de dimensions ($m \times n$), ($m \times 1$) respectivement.

Les approches qui dominent sur la modélisation et la résolution des problèmes de la programmation stochastique sont les suivantes :

- Modèles avec contraintes probabilistes.
- Modèles de recours.

Les travaux de [50] et [51] présentent l'état de l'art de la programmation stochastique, alors que [52] se focalise aux méthodes de résolution de programmation stochastique en nombres entiers. La littérature autour de la programmation stochastique devient de plus en plus riche, les ouvrages les plus importants dans le domaine étant ceux de [53] et [54].

3.4.1 Programmation stochastique avec recours

La programmation stochastique s'intéresse essentiellement à des problèmes où on doit prendre une décision sur le champ sous présence d'incertitude, sans attendre la réalisation de certaines variables aléatoires. On fait souvent appel à ce type de problèmes sous le nom de "here and now problems". Dans cette famille on est obligé de déterminer au moment t_0 certaines valeurs x_0^j qui ne peuvent plus changer dans la suite, quoi qu'il arrive aux instants ultérieurs.

Le problème peut s'étendre en plusieurs étapes suivant le but de l'étude, mais nous considérons le cas de deux étapes seulement dans ce chapitre.

3.4.2 Modèles de recours à 2-niveaux (en 2-étapes) :

Les variables de la première étape sont considérées comme étant des variables structurantes, stratégiques qui ne peuvent plus changer à la seconde étape. La décision à la première étape doit être prise en respectant des contraintes propres à cette étape. La seconde étape comprend des

actions (pénalisantes) qui peuvent être entreprises afin de satisfaire des contraintes qui font intervenir des variables de la première étape. La difficulté consiste alors à trouver les valeurs des variables primaires x qui minimisent l'espérance du coût total du problème. Cela se modélise sous la forme générale suivante :

$$\begin{cases} \min_x Z = C^T x + \mathbf{E}_\xi(\min_y \{q(\xi)^T y(\xi)\}) \\ Ax = b \\ T(\xi)x + Wy(\xi) = h(\xi), \quad \forall \xi \in \Omega \\ x \geq 0 \quad y \geq 0. \end{cases} \quad (3.8)$$

Il est possible de réécrire 3.8 sous une forme condensée, appelée forme déterministe équivalente :

$$\begin{cases} \min Z = C^T x + \mathbf{Q}(x) \\ Ax = b \\ x \geq 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

La fonction $x \rightarrow \mathbf{Q}(x)$ est appelée fonction de recours. Elle représente l'espérance des meilleurs recours possibles pour x donné.

$$\begin{cases} \text{avec } \mathbf{Q}(x) = \mathbf{E}_\xi(\mathbf{Q}(x, \xi)) = \sum_i p^i \mathbf{Q}(x, \xi^i) \\ \mathbf{Q}(x, \xi) = \min_y \{q(\xi)^T y \mid Wy = h(\xi) - T(\xi)x, y \geq 0\} \end{cases} \quad (3.10)$$

où p^i est la probabilité pour $\tilde{\xi} = (\xi)^r$, la i^{eme} réalisation de $\tilde{\xi}$, $W(\xi)$ est la matrice de recours de dimension $(m_1 \times n_1)$.

$h(\xi) = h_0 + H\xi = h_0 + \sum_i h_i \xi_i$, $T(\xi) = T_0 + \sum_i t_i \xi_i$ et $q(\xi) = q_0 + \sum_i q_i \xi_i$ et $\mathbf{Q}(x, \xi)$ représente la valeur optimale du recours et $\mathbf{E}_\xi(\mathbf{Q}(x, \xi))$ représente l'espérance mathématique du coût de recours.

Le problème (3.9) constitue le premier niveau, qui doit être résolu sans les contraintes aléatoires et le problème (3.10) constitue le problème du second niveau pour une décision x , déterminée et une réalisation de ξ .

Les différents types de recours

Dans la littérature, il existe plusieurs types de recours. Dans notre thèse, on citera les recours les plus utilisés, comme le recours fixe, le recours complet et le recours simple.

1. Recours fixe

Définition 3.4.1. *Le recours est considéré comme étant fixe ou déterministe si les valeurs q et W d'un programme avec recours (3.9) ne dépendent pas de ξ , leurs valeurs sont donc a priori connues.*

2. Recours complet

Définition 3.4.2. *Le recours fixe est complet si $x \in \mathbb{R}^n$ il existe $y \geq 0$, tels que $\mathbf{Q}(x, \xi) < +\infty, \forall \xi \in \Xi$.*

3. Recours relativement complet

Définition 3.4.3. *Le recours fixe est relativement complet si $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$ il existe $y \geq 0$, tels que $Q(x, \xi) < +\infty, \forall \xi \in \Xi$.*

La différence entre les deux types de recours porte sur l'ensemble des x pour lesquels il existe une solution au second niveau. Si cet ensemble est le domaine de définition de x , alors à la première étape le recours est relativement complet. Cependant si le domaine est \mathbb{R}^n alors le recours est complet.

4. Recours simple

Définition 3.4.4. *c'est un cas particulier de recours fixe complet, il correspond au cas où la matrice de recours $W = (I, -I)$ où I représente la matrice d'identité d'ordre m_1*

3.4.3 Méthode de décomposition L-Shaped

Dans cette section, on décrit la méthode de décomposition L-shaped de Van et Wets [55], aussi connue sous la forme de la méthode de décomposition de Benders [56]. Le principe de cette méthode consiste à décomposer le problème en deux étapes. Les variables du premier niveau sont les variables dont la valeur doit être fixée avant la réalisation des variables aléatoires et ne peut en aucun cas être modifiée suivant la réalisation de la variable aléatoire. D'autre part, les variables du second niveau (les variables de recours) sont autorisées à dépendre des variables aléatoires et des variables du premier niveau. Le principe de la méthode L-Shaped est que l'on tient compte de toute information disponible afin de prendre des décisions, mais en même temps, il est irréaliste de tenir compte des événements inconnus, qui n'existent, au moment de la décision, que dans un espace probabiliste.

3.4.4 Test de faisabilité

On introduit une autre définition pour la faisabilité. Si on dispose d'une solution du premier niveau $x = x^0$ du problème (3.9), comment décider si cette solution est réalisable pour le problème (3.10) et pour toutes les valeurs possibles de ξ , dans le cas où on ne peut pas savoir si le recours est relativement complet.

Lemme 3.4.1. *(lemme de dualité de Farkas [54])*

$$\left\{ y / Wy = h \quad y \geq 0 \right\} = \emptyset$$

si et seulement si

$$W^T u \geq 0 \quad \text{implique que} \quad h^T u \geq 0$$

En changeant le signe de u , la seconde partie de l'équivalent peut être réécrite comme suit :

$$W^T u \leq 0 \quad \implies \quad h^T u \leq 0$$

Ou de façon équivalente :

$$h^T u \geq 0 \quad \text{quand} \quad t \in \left\{ u/W^T u \geq 0 \right\}$$

Cependant, cela peut être reformulée comme :

$$\begin{aligned} \left\{ u/W^T u \geq 0 \right\} &= \left\{ u/u^T W y \leq 0, \quad \forall y \leq 0 \right\} \\ \left\{ u/W^T u \geq 0 \right\} &= \left\{ u/u^T h \leq 0, \quad \forall h \in \text{pos}W \right\} \end{aligned} \quad (3.11)$$

l'expression (3.11) définit le cône polaire de $\text{pos}W$:

$$\text{polpos}W = \left\{ u/u^T h \leq 0, \quad \forall h \in \text{pos}W \right\}$$

Dans le cas où nous ne connaissons pas toutes les valeurs de $\text{polpos}W$, et nous ne sommes pas au courant du recours relativement complet, pour un x^0 donné et pour tous x^0 nous devons vérifier la faisabilité.

Nous aimerions trouver σ tel que :

$$\sigma t \leq 0 \quad \forall t \in \text{pos}W$$

Ceci est équivalent à exiger que les $\sigma^T W \leq 0$. En d'autres termes, σ doit être dans le cône $\text{polpos}W$, nous devrions en même temps exiger que $\sigma^T [h(\xi) - T(\xi)x^0] \geq 0$, car si on peut rajouter la contrainte $\sigma^T [h(\xi) - T(\xi)x] \leq 0$ dans le problème (3.7), nous devons exclure $[h(\xi) - T(\xi)x^0]$ sans exclure des solutions réalisables. Ainsi nous résolvons le problème suivant :

$$\max_{\sigma} \left\{ \sigma^T (h(\xi) - T(\xi)x^0) / \sigma^T W \leq 0, \quad \|\sigma\| \leq 1 \right\} \quad (3.12)$$

La dernière contrainte est introduite pour borner σ , sinon la valeur maximale sera égale à $+\infty$, et cela ne nous intéresse pas car on cherche une direction bien définie par σ . Si pour un certain ξ_j on a trouvé que $[h_j - T_j x^0] \sigma > 0$ alors pour ce ξ_j la solution du premier niveau $x = x^0$ ne génère pas le problème du second niveau réalisable, par conséquent on doit exclure cette solution x^0 , en créant alors la coupe d'admissibilité

$$\sigma^T [h_j - T_j x] \leq 0 \quad (3.13)$$

3.4.5 Test d'optimalité

En supposant qu'on dispose d'un recours relatif complet ou bien des coupes d'admissibilité, le problème de deuxième étape :

$$\min \left\{ q(\xi)^T y / W y = h(\xi) - T(\xi)x, \quad y \geq 0 \right\} \quad (3.14)$$

est réalisable et son problème dual est donné par :

$$\max_{\pi} \left\{ \pi^T (h(\xi) - T(\xi)x) / \pi^T W \leq q(\xi)^T \right\} \quad (3.15)$$

Le problème (3.9) peut être réécrit en introduisant une nouvelle variable θ

$$\begin{cases} \min & C^T x + \theta \\ \text{s.c} & Ax = b \\ & \sigma^T T x \geq \sigma^T h \\ & \theta \geq \mathbf{Q}(x) \\ & x \geq 0 \end{cases} \quad (3.16)$$

x^0 une solution admissible du premier niveau et θ^0 initialement fixé à $-\infty$, la valeur de $\mathbf{Q}(x^0)$ est calculée à partir du problème dual (3.15)

$$\mathbf{Q}(x^0) = \sum_j^N p^j \mathbf{Q}(x^0, \xi^j) = \sum_j^N p^j \pi_j^T (h_j - T_j x^0)$$

Si $\mathbf{Q}(x^0) < \theta^0$, alors x^0 est une solution optimale, sinon on exclut la solution x^0 et on crée la coupe d'optimalité

$$\theta \geq \sum_j^N p^j \pi_j^T (h_j - T_j x) \quad (3.17)$$

3.4.6 Programmation sous contrainte en probabilité

Un des outils les plus utilisés pour l'optimisation sous incertitude est la programmation à base de contraintes en probabilité (CCP¹). La CCP s'appuie sur l'hypothèse qu'il est possible de décrire toute incertitude quant à une variable, par une loi de probabilité clairement définie. Sous ces conditions, la CCP impose qu'une certaine contrainte soit satisfaite avec une probabilité supérieure à un seuil de confiance β . Ces modèles sont apparus pour la première fois dans les travaux de Charnes et Cooper [57]. Nous admettons que la fonction de coût ne dépend pas de la variable aléatoire ξ . Donc, tout Programme Linéaire (PL) pourrait être formalisé en CCP ainsi :

$$\begin{cases} \min & Z = Cx \\ \text{s.c} & Pr(T_j(\xi)x \leq h_j(\xi)) \geq \rho_j \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.18)$$

ρ étant une probabilité réglée par l'utilisateur qui reflète une tolérance acceptable pour la violation des contraintes aléatoires.

Soit on impose un seuil de probabilité ρ_j pour chaque contrainte aléatoire, $j = 1, \dots, m$, avec $\rho_j \in [0, 1]$. Ou bien, un seuil de probabilité global ρ , pour l'ensemble des contraintes. Le choix entre les deux modélisations dépendra du fait que les contraintes sont indépendantes les unes des autres ou non. Ceci est imposé par le problème lui-même. Essentiellement il y a deux versions différentes de la programmation sous contraintes probabilistes : i) Contraintes probabilistes indépendantes et ii) contraintes probabilistes jointes.

1. CCP : Chance-Constrained Programming

3.4.7 Contraintes probabilistes jointes

Remplace l'ensemble des contraintes par la probabilité (joint) de leurs réalisations simultanées au moins égale à un seuil convenablement choisi par le décideur.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Z = Cx \\ \text{s.c} \quad \Pr \left\{ \begin{array}{l} (T_j(\xi)x \leq h_j(\xi)) \\ j = 1, \dots, m \end{array} \right\} \geq \rho \\ x \in D \end{array} \right. \quad (3.19)$$

où ρ est le seuil de toutes les contraintes simultanément.

La convexité des contraintes jointes n'est pas triviale voir [54], mais elle peut être assurée dans certains cas [27] où la distribution jointe des éléments de la matrice T est normale.

3.4.8 Contraintes probabilistes indépendantes

Remplace chaque contrainte par la probabilité de sa réalisation au moins égale à un seuil choisi par le décideur (les contraintes probabilités sont indépendantes entre elles).

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Z = Cx \\ \text{s.c} \quad \Pr(T_j(\xi)x \leq h_j(\xi)) \geq \rho_j, j = 1, \dots, m \\ x \in D \end{array} \right. \quad (3.20)$$

ρ_j étant une probabilité réglée par l'utilisateur qui reflète une tolérance acceptable pour la violation des contraintes aléatoires.

Le problème qui se pose dans cette approche est que l'ensemble des solutions des problèmes (3.19) et (3.20) généralement n'est pas convexe, de plus ce problème de convexité des ensembles

$$D(\rho) = \{x \in \mathbb{R}^n, \Pr(T(\xi)x \leq h(\xi)) \geq \rho\}$$

$$D(\rho_j) = \{x \in \mathbb{R}^n, \Pr(T_j(\xi)x \leq h_j(\xi)) \geq \rho_j\}$$

dépend de la nature aléatoire de T , h et aussi des seuils de probabilité ρ_j et ρ , pour résoudre ce problème citons quelques conditions de convexité des ensembles $D(\rho_j)$ ou $D(\rho)$ voir, ([54]).

Cas 1 : T et h sont des variables aléatoires normales.

Cas 1.1 T et h ne sont pas indépendantes :

Pour ce cas général, on suppose que $(T_j; h_j)$ est un vecteur normalement distribué de moyenne $\mu_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ et de matrices des covariances V_j . En vertu de la théorie des probabilités, la variable aléatoire $t_j(x) = T_j x - h_j$ a une distribution normale de moyenne $m_j(x) = \sum_{i=1}^n \mu_{ji} x_i - \mu_{j,n+1}$ et de variance $\sigma_j^2 = X^t V_j X$ avec $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, -1)^t$ et $\sigma_j^2 > 0, \forall x$ car $x_{n+1} = -1$.

$$\begin{aligned} D(\rho_j) &= \{x \in \mathbb{R}^n | \Pr(t_j(x) \leq 0) \geq \rho_j\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | \Pr\left(\frac{t_j(x) - m_j(x)}{\sigma_j(x)} \leq \frac{-m_j(x)}{\sigma_j(x)}\right) \geq \rho_j\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | \Phi\left(\frac{-m_j(x)}{\sigma_j(x)}\right) \geq \rho_j\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n | m_j(x) + \Phi^{-1}(\rho_j) \sigma_j(x) \leq 0\} \end{aligned}$$

$D(\rho_j)$ est convexe si est seulement si $\rho \geq \frac{1}{2}$

Cas 1.2 T et h sont indépendantes :

Soit les distributions des variables T et h

$$T_{ji} \sim \mathcal{N}(\mu_{ji}, v_{ji}^2), h_j \sim \mathcal{N}(m_j, \sigma_j^2)$$

alors la variable $T_j x - h_j$ a pour distribution :

$$\mathcal{N}\left(\sum_{i=1}^n \mu_{ji} x_i - m_j, \sum_{i=1}^n v_{ji}^2 x_j^2 + \sigma_j^2\right)$$

$$D(\rho_j) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \sum_{i=1}^n \mu_{ji} x_i - m_j + \Phi^{-1}(\rho_j) \sqrt{\sum_{i=1}^n v_{ji}^2 x_j^2 + \sigma_j^2} \leq 0\}$$

Cas 2 : T est déterministe et h est aléatoire.

Dans ce cas le problème est simple. Soit F_j la fonction de répartition de h_j , alors :

$$\begin{aligned} D(\rho_j) &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid \Pr(T_j x \leq h_j(\xi)) \geq \rho_j\} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid F_j(T_j x) \geq (1 - \rho_j)\} \quad D(\rho_j) \text{ est un ensemble de contraintes linéaires} \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n \mid T_j x \leq F_j^{-1}(1 - \rho_j)\} \end{aligned}$$

en x , donc il est convexe.

3.5 Programmation linéaire stochastique multi-objectifs en nombres entiers

Un problème de programmation linéaire stochastique multicritère (MOSILP ; Multiple Objective Stochastic Integer Linear Programming) est défini, en général, comme suit :

$$\begin{cases} \min & Z_k = C_k(\xi)x, \quad k = 2, \dots, p \\ \text{s.c} & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.21)$$

Où $p \geq 2$ le nombre de fonctions objectifs, et $D = S \cap \mathbb{Z}^n$, avec $C_k(\xi)$, $T(\xi)$, $h(\xi)$ sont des vecteurs aléatoires de dimensions respectives $(1 \times n)$, $(m_1 \times n)$, $(m_1 \times 1)$, définis sur l'espace de probabilités (Ω, Ξ, Pr) , $D = \{Ax = b : x \geq 0 \text{ entiers}\}$, un polyèdre convexe et déterministe des décisions x , A et b sont des vecteurs déterministes de dimensions $(m \times n)$, $(m \times 1)$ respectivement. La plupart des méthodes de résolution des MOSILP transforment d'abord le problème (3.21) en un problème déterministe et puis le résolvent par une méthode interactive, dans ce contexte, nous citons la méthode STRANGE [58] et PROMISE [59]. La méthode STRANGE-MOMIX développée par Teghem [60] traite le problème (MOSILP), ce cas a été aussi considéré par Moulaï et Amrouche dans [61] et par Abbas et Bellahcene qui ont proposé dans [62] une méthode basée sur la méthode des coupes planes [49] et la technique L-Shaped.

3.6 Quelques concepts de solutions efficaces

Le concepts de solutions efficaces pour les problèmes stochastiques multi-objectifs a été abordée dans plusieurs travaux, nous citons à titre d'exemple les travaux de Ben Abdelaziz dans

[63, 64], Caballero et al [65], Slowinski et Teghem [66].

Définition 3.6.1. (Solution efficace en espérance)

$x^* \in D$ est une solution efficace en moyenne du problème (3.21), si elle est efficace pour le problème multi-objectifs :

$$\begin{cases} \min & \mathbf{E}[C_k(\xi)x], \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c} & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.22)$$

où $E[C_k(\xi)x]$ est l'espérance de la k^{me} fonction objectif.

Définition 3.6.2. (Solution efficace en variance minimum)

$x^* \in D$ est une solution efficace avec une variance minimum du problème (3.21), si elle est efficace pour le problème :

$$\begin{cases} \min & \sigma^2[C_k(\xi)x], \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c} & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.23)$$

où $\sigma^2[C_k(\xi)x]$ est la variance de la k^{me} fonction objectif.

Définition 3.6.3. (Solution efficace à risque minimum de niveaux μ_1, \dots, μ_p)

$x^* \in D$ est une solution efficace à risque minimum de niveaux μ_1, \dots, μ_p du problème (3.21), si elle est efficace pour le problème :

$$\begin{cases} \max & Pr[C_k(\xi)x \leq \mu_k], \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c} & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.24)$$

où $\sigma^2[C_k(\xi)x]$ est la variance de la k^{me} fonction objectif.

Définition 3.6.4. (Solution β -efficace)

$x^* \in D$ est une solution efficace avec probabilités β_1, \dots, β_p (où une solution β -efficace) du problème (3.21), s'il existe $\mu^* = (\mu_1, \dots, \mu_p)$ tel que (x^*, μ^*) est une efficace pour le problème :

$$\begin{cases} \min_{x, \mu} & \mu_k, \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c} & Pr[C_k(\xi)x \leq \mu_k] \geq \beta_k, \quad k = 1, \dots, p \\ & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \in D \end{cases} \quad (3.25)$$

où β_1, \dots, β_p sont les seuils de probabilité qui sont fixés à priori par le décideur.

3.6.1 Problème déterministe équivalent à MOSILP

Considérons une distribution discrète et finie $\{(\xi^r, P^r), e = 1, \dots, R\}$ des données aléatoires où S es le nombre de réalisations.

1. Nous associons à chaque scénario ξ^r , un critère Z_k^r , une matrice T^r et un vecteur h^r , en prenant en considération les scénarios différents qui affectent les P objectifs et les contraintes stochastiques.

2. Le même principe du recours utilisé dans la programmation stochastique mono-objectif avec la matrice de recours déterministe W , nous supposons que le décideur peut préciser les coûts des pénalités, $q^r = q(\xi^r)$, des variables violées y^r des contraintes, tout en préservant la dimension raisonnable du problème déterministe. Nous ajoutons, à chaque critère Z_k^r , la fonction de recours $\mathbf{Q}(x, \xi^r)$,

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}(x) &= \min q_s^T y_s \\ \text{s.c. } & W y^r = h^r - T^s x, y^r \geq 0 \end{aligned}$$

Alors le décideur doit réduire au minimum la valeur d'espérance de tous les coûts :

$$\bar{Z}_k = \mathbf{E}[Z_k + \mathbf{Q}(x, \xi)], \quad k = 1, \dots, p$$

Nous obtenons le problème déterministe suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{"min"} \quad \bar{Z}_k = \bar{Z}_k + \mathbf{Q}(x), \quad k = 1, \dots, p \\ \text{s.c.} \quad Ax = b \\ \quad \quad x \in D \\ \text{avec} \quad \mathbf{Q}(x) = \mathbf{E}[\mathbf{Q}(x, \xi)] = \sum_{r=1}^R p_i(\mathbf{Q}(x, \xi^r)) \end{array} \right. \quad (3.26)$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{Z}_k = \mathbf{E}[Z_k] = \sum_{s=1}^P p_i C_k(\xi_i) x \\ \quad \quad \quad = \mathbf{E}[C_k(\xi)x], \end{array} \right.$$

Faisabilité

Supposons que la matrice du recours W est fixée. Nous clarifions la question "comment décider si une donnée $x = x^0$ est faisable pour la seconde étape du problème", pour toutes les réalisations possibles de ξ . Alors, il est plus simple de travailler avec le dual du programme de la deuxième étape :

$$\max_{\pi} \{ \pi [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] : \pi^T W \leq (q^r)^T \} \quad (3.27)$$

L'ensemble des contraintes $\Upsilon = \{ \pi : \pi^T W \leq (q^r)^T \}$ est indépendant de x . Soit $\{ \pi^T : T \in I \}$ l'ensemble des points extrêmes de Υ et $\{ \sigma^\delta : \delta \in \Delta \}$ l'ensemble des arêtes extrêmes [67].

- (a) Si $\Upsilon = \emptyset$ alors $\mathbf{Q}(x^0, \xi^r)$ est illimité ($\mathbf{Q}(x^0, \xi^r) = -\infty$) ou non réalisable.
- (b) Si $\Upsilon \neq \emptyset$ alors $\mathbf{Q}(x^0, \xi^r)$ est réalisable ou admet une solution optimale.

D'après le lemme de Farkas :

$$\{ z / Wz = h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0 : z \leq 0 \} \neq \emptyset$$

si et seulement si

$$W^T(\xi^r)\sigma_r \leq 0 \implies \sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] \leq 0$$

Nous concluons que , $\mathbf{Q}(x^0, \xi^r)$ est non réalisable si et seulement si Υ a un rayon extrême σ tel que $\sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] > 0$; autrement, la valeur optimale de $\mathbf{Q}(x^0, \xi^r)$ est donnée par $\pi^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0]$, où π est un point extrême. Puis nous vérifions la faisabilité pour le problème de la deuxième étape, nous devons trouver une direction σ en résolvant le programme suivant :

$$\max_{\sigma} \{ \sigma^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] : \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1 \} \quad (3.28)$$

La contrainte $\|\sigma\|_1 \leq 1$ est ajoutée pour borner la valeur de σ , sinon la valeur maximale soit égale à $+\infty$.

Si pour un certain $\xi^r, r \in \{1, \dots, R\}$ $\sigma_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0] > 0$, alors $\hat{\sigma}_r$ est la solution optimale de (3.28), nous avons trouvé ξ^r pour lequel x^0 n'est pas une solution réalisable du problème de la deuxième étape. Dans ce cas-ci, nous ajoutons au (3.26) **la coupe de faisabilité**

$$\hat{\sigma}_r^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)] \leq 0 \quad (3.29)$$

au programme (3.26) et le nouveau programme est résolu en utilisant la méthode duale simplexe.

Efficacité (Optimalité)

Supposons que toutes les coupes de faisabilité déterminées au problème (3.26), nous pouvons le reformulé en présentant une nouvelle variable θ telle que nous résultons le problème suivant :

$$\begin{cases} \min & \tilde{Z}_k = \bar{Z}_k + \theta, \quad k = 1, \dots, P \\ \text{s.c} & \theta \geq \mathbf{Q}(x) \\ & x \in S \\ & x \text{ entier.} \end{cases} \quad (3.30)$$

avec $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \sigma_r^T T(\xi^r) \geq \sigma_r^T h(\xi^r), \quad r \in \{1, \dots, R\}\}$ nous traitons un problème de recherche de l'ensemble efficace de toutes les solutions entières de (3.30) qui sont efficaces dans le sens de la définition suivante :

Définition 3.6.5. Une solution $x^0 \in S$ est une solution efficace pour (3.30) s'il n'existe pas de solution $x^1 \in S$ tel que $\tilde{Z}_k(x^1) \leq \tilde{Z}_k(x^0), k \in \{1, \dots, P\}$ et $\tilde{Z}_k(x^1) < \tilde{Z}_k(x^0)$ pour au moins une valeur de $k \in \{1, \dots, P\}$ et pour toute réalisation $\xi^r, r = 1, \dots, R$.

Les solutions optimales ($\hat{\pi}_r, r = 1, \dots, R$) du dual (3.27) sont utilisées pour calculer l'espérance de la fonction du recours $\mathbf{Q}(x^0)$ donnée par :

$$\mathbf{Q}(x^0) = \sum_{r=1}^R Pr(\pi_r)^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x^0].$$

Si $\theta^0 \geq \mathbf{Q}(x^0)$, x^0 est optimale pour (3.30), sinon **la coupe d'optimalité**

$$\theta \geq \sum_{r=1}^R Pr(\pi_r)^T [h(\xi^r) - T(\xi^r)x]$$

est ajoutée au programme (3.30) et le nouveau programme est résolu en utilisant la méthode duale simplexe.

3.7 Optimisation avec intervalle arithmétique

3.7.1 Arithmétique des intervalles réels

Les intervalles sont des sous-ensembles fermés connexes de \mathbb{R} . On notera \mathbb{I} l'ensemble des intervalles de \mathbb{R} ($\mathbb{I} \in P(\mathbb{R})$).

Par exemple, on peut tenir compte d'une erreur de mesure en remplaçant une valeur mesurée α avec une incertitude ε par l'intervalle $[\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon]$.

On peut les généraliser en plusieurs dimensions : un vecteur intervalle $x \in \mathbb{I}^n$ est un vecteur dont les n composantes sont des intervalles et une matrice intervalle $A \in \mathbb{I}^{m \times n}$ est une matrice dont les composantes sont des intervalles.

Une représentation graphique d'un vecteur de \mathbb{I}^1 , \mathbb{I}^2 et \mathbb{I}^3 est donnée dans la figure- 3.4. Elle illustre le fait qu'un vecteur intervalle est un ensemble parallélépipédique de vecteurs aux côtés parallèles aux axes du repère, cela justifie que par la suite on utilisera indifféremment les termes de vecteur intervalle, de pavé ou de boîte ou même d'intervalle.

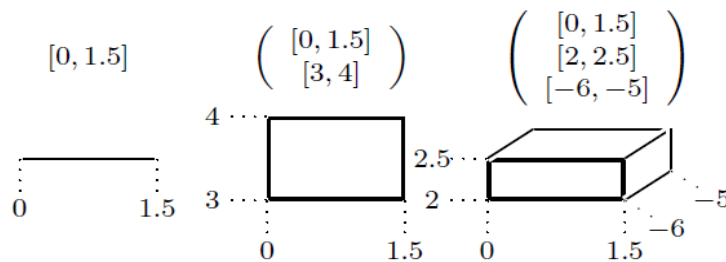


FIGURE 3.4 – Exemples de vecteurs d'intervalles de dimensions 1, 2 et 3

3.7.2 Notations et Définitions

Soit \mathbb{R} l'ensemble des nombres réels et soit $\mathbb{I} = \{[a; b] / (a; b) \in \mathbb{R}^2, a \leq b\}$, l'ensemble des intervalles compacts réels.

Un intervalle A appartenant à \mathbb{I} est caractérisé par sa borne inférieure a_L et sa borne supérieure a_R : $A = [a_L; a_R]$.

Tout nombre réel x sera confondu avec l'intervalle $[x; x]$ correspondant. Les intervalles auront pour notation des caractères majuscules et les caractères minuscules désigneront des nombres réels.

On définit un vecteur d'intervalles dans I_n comme un n -uplets d'intervalles et une matrice d'intervalle dans \mathbb{I}^n comme une matrice de taille $M(m \times n)$ dont les composantes sont des intervalles.

Définition 3.7.1. (Centre d'intervalle)

On appelle Centre d'intervalle, noté $\text{mid}(A)$, toute fonction définie de \mathbb{I} dans \mathbb{R} , ou dans le cas

de fonction vectorielles de \mathbb{I}^n dans \mathbb{R}^n , tel que :

$$\text{mid}(A) = \frac{a_L + a_R}{2}, \quad A \in \mathbb{I}$$

Par extension aux formes vectorielles, nous obtenons :

$$\text{mid}(X) = (\text{mid}(X_1), \dots, \text{mid}(X_n)), \quad X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{I}^n$$

Définition 3.7.2. (Largeur d'un intervalle)

On appelle largeur d'un intervalle, notée $w(A)$, toute fonction de \mathbb{I} dans \mathbb{R} , ou dans le cas de fonctions vectorielles de \mathbb{I}^n dans \mathbb{R}^n , tel que :

$$w(A) = a_R - a_L, \quad a \in \mathbb{I};$$

Par extension aux formes vectorielles nous obtenons :

$$w(X) = (w(X_1), \dots, w(X_n)), \quad X = (X_1, \dots, X_n) \in \mathbb{I}^n.$$

Remarque 3.7.1. $X \in \mathbb{I}^n$ est un vecteur dont chacune de ses composantes est un intervalle. On désignera souvent par les termes "pavé" ou boîte un élément de \mathbb{I}^n .

Définition 3.7.3. Soit $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, f possède une expression explicite si l'expression analytique de f est connue de façon explicite, c'est à dire qu'elle peut s'écrire en n'utilisant que des variables, des fonctions et des opérateurs élémentaires tels que $+$, $-$, \times , \lg , \exp , \cos , \sin , On dit que f est une fonction explicite.

Définition 3.7.4. Un problème explicite est un problème dans lequel toutes les fonctions possèdent des expressions explicites et les contraintes n'utilisent que les relations standards (\leq , $<$, \geq , $>$, $=$).

Les opérations sur l'arithmétique des intervalles sont définies de la façon suivante :

$$\text{Pour tout } (A, B) \in \mathbb{I}^2, \quad A \circ B = \{x_a \circ x_b \mid x_a \in A, \quad x_b \in B\}$$

Le symbole \circ étant l'une des opérations usuelles $+$, $-$, \times , \div comme suit :

1. $[a_L, a_R] + [b_L, b_R] = [a_L + b_L, a_R + b_R]$,
2. $[a_L, a_R] - [b_L, b_R] = [a_L - b_L, a_R - b_R]$,
3. $K[a_L, a_R] = \begin{cases} [Ka_L, Ka_R]; & \text{if } K \geq 0 \\ [Ka_R, Ka_L]; & \text{if } K < 0 \end{cases}$ ou K est un réel.

Définition 3.7.5. Si $A = [a_L, a_R]$ et $B = [b_L, b_R]$, des intervalles réels bornés, on définit la multiplication de A et B comme suit :

$$A \times B = [a_L, a_R] \times [b_L, b_R] = [\min(S), \max(S)]$$

,

où $S = \{a_L b_L, a_L b_R, a_R b_L, a_R b_R\}$. Par exemple, si A et B sont des intervalles positifs (c-à-d $0 \leq a_L \leq a_R$ et $0 \leq b_L \leq b_R$) alors nous avons :

$$A \times B = [a_L b_L, a_R b_R]$$

et si $0 \leq a_L \leq a_R$ et $b_L \leq 0 \leq b_R$ alors nous avons :

$$A \times B = [a_L b_R, a_R b_L]$$

Définition 3.7.6. Soient $A = [a_L, a_R]$ et $B = [b_L, b_R]$ deux intervalles réels, alors nous définissons :

$$A/B = [a_L, a_R] \div [b_L, b_R] = \{t \in \mathbb{R} \mid \exists a \in A, b \in B \text{ tel que, } b \neq 0, t = \frac{a}{b}\}$$

Nous observons que le quotient de deux intervalles est un ensemble qui peut ne pas être lui-même un intervalle. Étant donné la définition 3.7.6, la formule de Ratz [68] est donnée par le théorème suivant :

Théorème 3.7.1. [68] Soient $A = [a_L, a_R]$ et $B = [b_L, b_R]$ deux intervalles réels bornés non vides.

Alors si $0 \notin [b_L, b_R]$ nous avons :

$$A/B = [a_L, a_R] \left[\frac{1}{b_L}, \frac{1}{b_R} \right]$$

Théorème 3.7.2. [69] Si A et B sont des intervalles réels non vides, bornés, alors il en est de même pour $A + B$, $A - B$ et AB . De plus, si B ne contient pas zéro, alors A/B est également un intervalle réel borné non vide.

Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}$ est appelée fonction à valeur intervalle (car pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $f(x)$ est un intervalle fermé dans \mathbb{R}). Semblable à la notation d'intervalle, nous désignons la fonction de valeur d'intervalle f avec :

$$f(x) = [f_L(x), f_R(x)]$$

où pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, $f_L(x)$, $f_R(x)$ sont des valeurs réelles de la fonction et $f_L(x) \leq f_R(x)$.

Proposition 3.7.1. [70] Soit f une fonction à valeur intervalle définie sur \mathbb{R}^n . Alors f est continue en c si et seulement si f_L et f_R sont continues en c .

Définition 3.7.7. Soit X un ensemble ouvert dans \mathbb{R} . Une fonction à valeur intervalle $f : X \rightarrow \mathbb{I}$ avec $f(x) = [f_L(x), f_R(x)]$ est appelée faiblement différentiable en x_0 , si les valeurs réelles de la fonction, f_L et f_R sont différentiables (différentiabilité usuelle) à x_0 .

Définition 3.7.8. On définit une fonction linéaire fractionnaire f comme suit :

$$f(x) = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta}$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ et α, β sont scalaires réels.

Pour plus de détails sur le sujet de l'analyse d'intervalle, nous renvoyons à Moore [71, 72] et Alefeld et Herzberger [73].

Remarque 3.7.2. Notez que chaque nombre réel $a \in \mathbb{R}$ peut être considéré comme un intervalle $[a, a] \in \mathbb{I}$

Définition 3.7.9. Pour interpréter la signification de l'optimisation de la fonction à valeur intervalle, nous introduisons un ordre partiel \leq sur \mathbb{I} .

Soit $A = [a_L, a_R]$, $B = [b_L, b_R]$ deux intervalles réels fermés, bornés, alors on dit que $A \leq B$, si et seulement si $a_L \leq b_L$ et $a_R \leq b_R$. On écrit aussi $A < B$, si et seulement si $A \leq B$ et $A \neq B$. En les autres termes, on dit $A < B$ si et seulement si :

$$\left\{ \begin{array}{l} a_L < b_L \\ a_R \leq b_R \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_L \leq b_L \\ a_R < b_R \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} a_L < b_L \\ a_R < b_R \end{array} \right.$$

3.8 Programmation fractionnaire linéaire à valeurs intervalles

Considérez le problème de programmation fractionnaire linéaire suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad z = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta} \\ s.t \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Considérons d'abord le problème de programmation fractionnaire linéaire (3.31). Supposons que

$$c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n, \quad d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$$

Où $c_j, d_j \in \mathbb{I}$, $j = 1, 2, \dots, n$ nous dénotons c_{L_j} et d_{R_j} les bornes inférieures des intervalles c_j et d_j respectivement (c-à-d $c_L = (c_{L_1}, c_{L_2}, \dots, c_{L_n})$ et aussi $d_L = (d_{L_1}, d_{L_2}, \dots, d_{L_n})$) où c_{L_j} et d_{R_j} sont de scalaires réels pour $j = 1, 2, \dots, n$ et $x \in \mathbb{R}^n$, de même nous pouvons définir c_L et d_L . Également $\alpha = [\alpha_L, \alpha_R]$, $\beta = [\beta_L, \beta_R]$.

On peut donc réécrire (3.31) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}, \\ s.t \\ \quad Ax = b \\ \quad x \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.32)$$

où $p(x)$ et $q(x)$ sont des fonctions linéaires à valeurs intervalles comme $p(x) = [p_L(x), p_R(x)] = [c_L x + \alpha_L, c_R x + \alpha_R]$ et $q(x) = [q_L(x), q_R(x)] = [d_L x + \beta_L, d_R x + \beta_R]$. Donc par exemple nous avons $p_L = c_L x + \alpha_L$, $p_R = c_R x + \alpha_R$ et $q_L = d_L x + \beta_L$, $q_R = d_R x + \beta_R$. Enfin, à partir de (3.33) nous avons :

$$\begin{cases} \min & f(x) = \frac{[c_Lx + \alpha_L, c_Rx + \alpha_R]}{[d_Lx + \beta_L, d_Rx + \beta_R]}, \\ \text{s.t} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases} \quad (3.33)$$

Pour introduire un problème de programmation fractionnaire linéaire à valeurs intervalles, nous pouvons considérer un autre type de problème de programmation fractionnaire linéaire possible comme suit :

$$\begin{cases} \min & f(x) = [f_L, f_R], \\ \text{s.t} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases} \quad (3.34)$$

où f_L et f_R sont des fonctions fractionnaires linéaires.

Théorème 3.8.1. [70] *Tout problème qui s'écrit sous forme (3.33) sous certaines hypothèses peut être converti en problème sous la forme (3.34).*

Preuve 3.8.1. *La fonction objectif dans (3.33) est un quotient de deux fonctions à valeurs intervalles ($p(x)$ et $q(x)$). Pour convertir (3.33) en la forme (3.34), on suppose que $0 \notin q(x)$ pour chaque point réalisable x , donc nous devrions avoir :*

$$0 < q_L(x) \leq q_R(x). \quad (3.35)$$

où

$$q_L(x) \leq q_R(x) < 0. \quad (3.36)$$

Pour chaque point réalisable x , en utilisant le théorème 3.7.1 parce que le dénominateur ne contient pas zéro, nous pouvons réécrire la fonction objectif dans (3.33) comme suit :

$$f(x) = [c_Lx + \alpha_L, c_Rx + \alpha_R] \left[\frac{1}{d_Rx + \beta_R}, \frac{1}{d_Lx + \beta_L} \right]$$

Maintenant, nous pouvons considérer deux cas possibles :

Cas(1) : *Quand $0 < q_L(x) \leq q_R(x)$, on a deux possibilités :*

1. *Quand $0 < p_L(x) \leq p_R(x)$, en utilisant le théorème 3.7.1 on a :*

$$f(x) = \left[\frac{c_Lx + \alpha_L}{d_Rx + \beta_R}, \frac{c_Rx + \alpha_R}{d_Lx + \beta_L} \right] \quad (3.37)$$

2. *Quand $p_L(x) < 0 < p_R(x)$, en utilisant le théorème 3.7.1 on a :*

$$f(x) = \left[\frac{c_Lx + \alpha_L}{d_Lx + \beta_L}, \frac{c_Rx + \alpha_R}{d_Lx + \beta_L} \right] \quad (3.38)$$

Cas(2) : Quand $q_L(x) \leq q_R(x) < 0$, on a deux possibilités :

1. Quand $0 < p_L(x) \leq p_R(x)$, en utilisant le théorème 3.7.1 on a :

$$f(x) = \left[\frac{c_R x + \alpha_R}{d_R x + \beta_R}, \frac{c_L x + \alpha_L}{d_L x + \beta_L} \right] \quad (3.39)$$

2. Quand $p_L(x) < 0 < p_R(x)$, en utilisant le théorème 3.7.1 on a :

$$f(x) = \left[\frac{c_R x + \alpha_R}{d_R x + \beta_R}, \frac{c_L x + \alpha_L}{d_R x + \beta_R} \right] \quad (3.40)$$

Remarque 3.8.1. le sous-cas $p_L(x) \leq p_R(x) < 0$ peut facilement être dérivé des cas ci-dessus, car dans ce cas, $p_L(x) \leq p_R(x) < 0$ cela implique que $-p_L(x) \geq -p_R(x) \geq 0$.

Maintenant, selon le théorème 3.7.2, et en considérant les cas ci-dessus, la fonction objectif dans (3.33) peut être réécrite comme suit :

$$\begin{cases} \min & f(x) = [f_L, f_R], \\ \text{s.t} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases} \quad (3.41)$$

où la fonction objectif est une fonction à valeurs intervalles, et f_L et f_R sont des fonctions fractionnaires linéaires (selon le cas correspondant ((4.1)-(3.40)) et cela complète la preuve.

Définition 3.8.1. [74] Soit x^* une solution réalisable du problème (3.41). Nous disons que x^* est une solution non-dominée du problème (3.41), s'il n'existe pas de solution réalisable x telle que $f(x) < f(x^*)$. Dans ce cas on dit que $f(x^*)$ est la valeur objective non-dominée de f .

3.9 Problèmes d'optimisation à valeurs intervalles

Considérons les deux problèmes de programmation mathématique suivants **M1** et **M2** où, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{I}$ et $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.

$$\mathbf{M1} : \begin{cases} \min & f(x) = [f_L(x), f_R(x)] \\ \text{s.t} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases} \quad \mathbf{M2} : \begin{cases} \min & g(x) = f_L(x) + f_R(x) \\ \text{s.t} & \\ & Ax = b \\ & x \geq 0, \end{cases}$$

En utilisant le théorème suivant pour résoudre le problème **M1** :

Théorème 3.9.1. [74] Si x^* est la solution optimale du problème **M2**, alors x^* est la solution non-dominée du problème **M1**.

Preuve 3.9.1. Nous voyons que les problèmes (M1) et (M2) ont les mêmes ensembles réalisables. Supposons que x^* n'est pas une solution non-dominée pour le problème (M1), c'est-à-dire qu'il existe une solution réalisable \bar{x} telle que $f(x^*) < f(\bar{x})$ ce qui signifie que l'une des conditions suivantes est vérifiée.

$$\left\{ \begin{array}{l} f_L(\bar{x}) < f_L(x^*) \\ f_R(\bar{x}) \leq f_R(x^*) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_L(\bar{x}) \leq f_L(x^*) \\ f_R(\bar{x}) < f_R(x^*) \end{array} \right. \quad \text{ou} \quad \left\{ \begin{array}{l} f_L(\bar{x}) < f_L(x^*) \\ f_R(\bar{x}) < f_R(x^*) \end{array} \right.$$

Dans chaque cas, $g(\bar{x}) < g(x^*)$ ce qui contredit l'optimalité de x^* pour (M2). Nous complétons la preuve.

3.10 Exemple numérique

Considérons le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(x) = \frac{[1, 2]x_1 + [3, 7]x_2 + [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]x_3 + [\frac{7}{2}, 4]}{[\frac{1}{2}, 1]x_1 + [\frac{3}{4}, 1]x_2 + [\frac{7}{8}, 2]x_3 + [\frac{1}{2}, 1]} \\ s.t \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 6, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1, x_2, x_3, \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.42)$$

On voit que :

$$p(x) = [p_L(x), p_R(x)] = [1, 2]x_1 + [3, 7]x_2 + [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]x_3 + [\frac{7}{2}, 4]$$

et

$$q(x) = [q_L(x), q_R(x)] = [\frac{1}{2}, 1]x_1 + [\frac{3}{4}, 1]x_2 + [\frac{7}{8}, 2]x_3 + [\frac{1}{2}, 1]$$

Alors, parce que $x_1, x_2, x_3, \geq 0$ on a $0 < q_L(x) \leq q_R(x)$ et aussi $0 < p_L(x) \leq p_R(x)$, donc nous devrions appliquer le cas (1). Enfin nous aurons le problème d'optimisation transformé suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad f(x) = \left[\frac{x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1}, \quad \frac{2x_1 + 7x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}} \right] \\ s.t \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 6, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 13, \\ x_1, x_2, x_3, \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.43)$$

Nous utilisons le théorème 3.9.1 et résolvons le problème d'optimisation suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad g(x) = \frac{x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1} + \frac{2x_1 + 7x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}} \\ s.t \quad \\ \quad x_1 + 2x_2 - 3x_3 \leq 6, \\ \quad -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 8, \\ \quad x_1 + x_2 + x_3 \leq 13, \\ \quad x_1, x_2, x_3, \geq 0, \end{array} \right. \quad (3.44)$$

Enfin une solution non-dominée pour la problème (3.42) est

$x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1.6667, 0, 11.3333)$ avec $g(x^*) = 4.0454$ qui est la solution optimale de (3.44)

3.11 Conclusion

Ce chapitre avait pour objectif d'introduire dans un premier temps, Les concepts probabilistes fondamentaux. Puis, nous avons abordé les principaux modèles dans le cadre de l'optimisation stochastique. Nous sommes concentrés sur l'optimisation stochastique en nombres entiers avec recours à deux niveaux et la programmation avec contrainte probabiliste et nous terminerons avec la programmation fractionnaire à valeurs intervalles.

4

Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace

4.1 Introduction

Dans certaines situations pratiques, l'énumération de tout l'ensemble des solutions efficaces d'un problème multi-objectifs n'est pas toujours recommandée, car il peut s'avérer que cet ensemble efficace soit très grand et devient impossible pour le décideur de choisir le meilleur compromis en termes de ses préférences. L'optimisation d'un critère, qui exprime les préférences du décideur, sur l'ensemble des solutions efficaces constitue, dès lors, un sujet de recherche essentiel dans ce domaine. Ce type de problème a été étudié la première fois en 1972 par Philip [75] et depuis plusieurs chercheurs, citons en particulier : Benson [76, 77, 78, 79, 80], Isermann [81], Yamamoto [3], Ecker et Song [82], motivés par de nombreuses applications [76], [83] se sont intéressés à l'optimisation d'une fonction sur l'ensemble efficace d'un problème multi-objectifs linéaires. En 2006, un algorithme évitant l'énumération explicite de tous les points efficaces dans l'espace des variables de décision, est proposé par Abbas et Chaabane [84], où différents types de coupes sont imposées de telle manière que l'amélioration de la valeur optimale de la fonction objectif soit garantie à chaque itération. En 2008, Jorge [85] développe un algorithme basé sur l'analyse d'un ordre approprié de problèmes linéaires en nombres entiers pour éliminer successivement les solutions moins bonnes sur le critère principal. En 2010, Chaabane et Pirlot [86] proposent une méthode de résolution dans l'espace des critères dans laquelle la valeur de la fonction objectif principal est améliorée en optimisant une somme pondérée des critères à chaque itération. En 2012, Chaabane et al. [87] proposent une méthode de résolution dans l'espace des critères dans laquelle la norme pondérée de Tchebychev est optimisée progressivement pour rapprocher du point idéal et améliorer la valeur du critère principale. D'autre part, le domaine de faisabilité est réduit en éliminant les solutions réalisables moins bonnes dans le sens de Pareto. Une extension de cette dernière au cas stochastique, qui est le noyau de notre thèse.

4.2 Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace continu

Soit le problème linéaire multi-objectifs suivant :

$$\max_{x \in S} c^k x \quad k = 1, \dots, p \quad (4.1)$$

où $c^k \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, $k = 1, \dots, p$,

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax \leq b, x \geq 0\}, \quad (4.2)$$

A est une matrice de dimension $m \times n$ et $b \in \mathbb{R}^m$.

On note par C la $n \times p$ matrice, et X l'ensemble réalisable de problème (4.1), Notons par S_E l'ensemble des solutions efficaces du problème 4.1.

L'une des plus importante et intéressante approche en optimisation multicritère est considérée comme suit :

Soit le problème suivant :

$$\max\{f(x) : x \in S_E\}, \quad (4.3)$$

où f une fonction réelle et S_E est non vide, et supposons que f est une fonction linéaire qui peut être défini comme suit $f(x) = \phi = d^t x$, $d \in \mathbb{R}^n$. Le problème (4.3) devient

$$(P_E) : \max\{\phi = d^t x : x \in S_E\},$$

Notons que l'ensemble des *solutions efficaces* S_E est en général non convexe. Le problème (P_E) rentre alors dans le cadre de la programmation non convexe.

4.2.1 Notations et résultats théoriques

- \mathbb{R}^p désigne l'ensemble des vecteurs colonnes réels d'ordre p
- $\mathbb{R}_+^p = \{x \in \mathbb{R}^p; x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{++}^p = \{x \in \mathbb{R}^p; x > 0\}$;
- \mathbb{R}_p désigne l'ensemble des vecteurs lignes réels d'ordre p
- $\mathbb{R}_{p+} = \{x \in \mathbb{R}_p, x \geq 0\}$, $\mathbb{R}_{p++} = \{x \in \mathbb{R}_p, x > 0\}$;
- e est le vecteur ligne de composantes égales à 1 ;
- $\mathbf{1}$ est le vecteur colonne de composantes égales à 1 ;
- S_v désigne l'ensemble des sommets ou point extrêmes du polyèdre S ;
- S_w : l'ensemble des solutions faiblement efficaces de (MOLP) ;
- \mathcal{Y}_w : l'ensemble des points faiblement non dominés de (MOLP) ;

Définition 4.2.1.

- Rappelons que l'ensemble $Y = CX = \{y \in \mathbb{R}^p; y = Cx \mid x \in S\}$ est appelé l'image de S ;
- L'ensemble $Y^{\leq} = Y + \mathbb{R}_-^p = \{y \in \mathbb{R}^p; y \leq Cx \mid x \in S\}$ est appelé partie inférieure de Y ;
- L'ensemble $Y^{<} = Y + \mathbb{R}_{--}^p = \{y \in \mathbb{R}^p; y < Cx \mid x \in S\}$ est appelé partie inférieure strictement de Y ;

Définition 4.2.2. Pour $\lambda \in \mathbb{R}_{p++}$ et $x \in S$, la fonction définie par $g_\lambda(x) = \max\{\lambda Cx' \mid x' \in S; Cx' \geq Cx\} - \lambda Cx$ est appelée "fonction lacune"

Remarque 4.2.1. Soit $x \in S$. $x \in S_E$ si et seulement si $g_\lambda(x) = 0$, et de plus un point x' qui résout $\max\{\lambda Cx' \mid x' \in X; Cx' \geq Cx\}$ appartient à S_E .

Lemme 4.2.1. Si $Cx = Cx'$ alors $g_\lambda(x) = g_\lambda(x')$.

Le théorème suivant rappelle quelques caractérisations bien connues de l'ensemble des solutions efficaces S_E du problème linéaire multi-objectifs (MOLP).

Théorème 4.2.1. [3]

$$\begin{aligned} S_E &= \{x \mid x \in S : \exists \lambda \in \mathbb{R}_{p++} \text{ tel que } \lambda Cx \geq \lambda Cx', \forall x' \in S\} \\ &= \{x \mid x \in S : \nexists x' \in \mathbb{R}^n \text{ tel que } Cx' \geq 0, Cx' \neq 0, Ax' \leq b, x'_i \geq 0 \text{ pour } i \text{ avec } x'_i = 0\} \\ &= \{x \mid x \in S : \exists (\lambda, \mu, \nu) \in \mathbb{R}_{p++} \times \mathbb{R}_m \times \mathbb{R}_{n+} \text{ tel que } \lambda C - \mu A + \nu = 0, \nu x = 0\} \\ &= \{x \mid x \in S : \exists (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_{p++} \times \mathbb{R}_m \text{ tel que } \lambda C - \mu A \leq 0; \lambda Cx - \mu b = 0\} \\ &= \{x \mid x \in X : g_\lambda(x) = 0\} \end{aligned}$$

Plusieurs méthodes ont été développées où plusieurs formulations équivalentes au problème (P_E) ont été proposées. Il existe dans la littérature une diversité d'algorithmes pour résoudre ce problème. Yamamoto, 2002 [3] a classifié ces méthodes en différentes catégories à savoir :

- les algorithmes de recherche de sommets adjacents ;
- les algorithmes de recherche de sommets non adjacents ;
- les algorithmes basés sur la méthode de "branch and bound" ;
- les algorithmes basés sur la méthode de relaxation Lagrangienne ;
- les algorithmes basés sur la méthode duale ;
- les algorithmes basés sur la bisection.

4.2.2 La méthode de Yamamoto, 2002[3]

Notons par $H = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax = \alpha\}$ l'hyperplan déterminé par les deux demi-espaces $H_+ = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \geq \alpha\}$ et $H_- = \{x \in \mathbb{R}^n \mid ax \leq \alpha\}$; H_{++} et H_{--} sont respectivement leurs intérieures. Soit S_v l'ensemble des points extrêmes (sommets) du polyèdre S . Pour $x, x' \in S_v$ $[x, x']$ dénote l'arête qui relie x et x' . Pour $x \in S_v \cap S_E$, on note par $N_E(x)$ l'ensemble des sommets liés à x par une arête efficace tel que : $N_E(x) = \{x' \mid x' \in S_v \cap S_E; [x, x'] \subset S_E\}$.

Lemme 4.2.2. Si ϕ est quasi-convexe et $x \in S_v \cap S_E$. Supposons que $\{x' \mid x' \in N_E(x); \phi(x') > \phi(x)\} = \emptyset$ alors x est un maximum local pour le problème P_E .

Ce lemme caractérise la solution optimale de P_E si elle existe. Il est utilisé dans l'algorithme ci-dessous pour exécuter le cycle secondaire (Boucle sur k).

L'algorithme de la méthode

Étape <0> (Initialisation)

- Poser $p = k = 0$, $S^0 = S$ et Chercher $x^0 \in S_v \cap S_E$.
- Si $N_E(x^0) \neq \emptyset$ alors x^0 est optimale pour le problème P_E . Sinon aller à l'étape < p >.

Étape <1> (Boucle principale < p >)

- < $p.1$ > Si $\{x \mid x \in N_E(x^p); \phi(x) > \phi(x^p)\} \neq \emptyset$ choisir x^{p+1} dans cet ensemble et poser $p = p + 1$ et aller à l'étape < $p.2$ >.
- < $p.2$ > Sinon. Poser $L^p = \{x \mid \phi(x) \leq \phi(x^p)\}$ et aller à la boucle secondaire < k >.

Étape <2> (Boucle secondaire < k >)

- $\langle k.1 \rangle$ Chercher $v^k \in \operatorname{argmax} \{ \phi(x) \mid x \in S^k \}$. Si $\phi(x^p) \geq \phi(v^k) - \epsilon$, pour une certaine tolérance fixée $\epsilon > 0$ arrêter avec x^p comme une v -approximation de la solution optimale du problème P_E . Sinon, aller à la sous-étape $\langle k.2 \rangle$.
- $\langle k.2 \rangle$ Chercher un hyperplan H^k de L^p tel que $L^p \subseteq H^k_+$ et $v^k \in H^k_-$.
- $\langle k.3 \rangle$ Si elle existe une arête efficace $[\mu', \mu'']$ telle que $[\mu', \mu''] \cap H^k \neq \emptyset$ et $\max \{ \phi(\mu'), \phi(\mu'') \} > \phi(x^p)$ poser $x^{p+1} = \mu$ avec $\phi(\mu) \equiv \max \{ \phi(\mu'), \phi(\mu'') \}$ et $\mu \in \{ \mu', \mu'' \}$ et poser $p = p + 1$ et aller la boucle principale $\langle p \rangle$. Sinon, aller à la sous-étape $\langle k.4 \rangle$.
- $\langle k.4 \rangle$ Poser $S^{k+1} = S^k \cap H^k_+, k = k + 1$ et aller à la boucle secondaire $\langle k \rangle$

4.2.3 Optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble efficace discret

Dans cette section nous nous intéressons à l'optimisation d'une fonction linéaire sur l'ensemble des solutions efficaces d'un problème (MOILP) qui se formule par :

$$(MOILP) \begin{cases} \max & Cx \\ \text{s.c} & x \in D. \end{cases} \quad (4.4)$$

avec $D = S \cap \mathbb{Z}$, \mathbb{Z} étant l'ensemble des nombres entiers relatifs. S est supposé borné et convexe $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax \leq b, \}$, $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $b \in \mathbb{R}^m$, C est une matrice de dimension $p \times n$ d'éléments entiers, et ses vecteurs lignes $c^i \in \mathbb{R}^n$, $k = 1, 2, \dots, p$.

Le problème de l'optimisation d'une fonction linéaire (P_E) sur l'ensemble des solutions efficaces S_E de (MOILP) est :

$$(P_E) \begin{cases} \max & \phi = d^t x \\ \text{s.c} & x \in S_E \end{cases} \quad (4.5)$$

Le problème relaxé de (P_E) est (P_R) défini par :

$$(P_R) \begin{cases} \max & \phi = d^t x \\ \text{s.c} & x \in D \end{cases} \quad (4.6)$$

Soit le problème mono-critère ($P_k(D)$), $k \in \{1, \dots, p\}$

$$(P_k(D)) \begin{cases} \max & c^k x \\ \text{s.c} & x \in D \end{cases} \quad (4.7)$$

Le problème ($P_k(D)$) peut avoir plusieurs solutions optimales, nous rappelons la notion de solution alternative dans la définition suivante.

Définition 4.2.3. Soit x^* une solution optimale du problème ($P_k(D)$), une solution réalisable $\bar{x} \in D$ est dite solution alternative à x^* si $C^k x^* = C^k \bar{x}$.

Considérons le problème paramétrique (P_λ) :

$$(P_\lambda) \begin{cases} \max & z_\lambda = \sum_{k=1}^p \lambda_k c^k x, \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.c} & x \in \mathcal{D} \end{cases} \quad (4.8)$$

Où λ est un vecteur de

$$\Lambda = \{ \lambda \in \mathbb{R}^p, \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1, \lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p \}$$

Résultats fondamentaux

Théorème 4.2.2. *Si \hat{x} est une solution optimale du problème paramétrique (P_λ) pour un certain $\lambda > 0$, alors \hat{x} est efficace pour le problème (MOILP).*

Test d'efficacité : Son principe est simple est décrit dans le théorème suivant.

Théorème 4.2.3. [88] *Soit x^* une solution réalisable de D , x^* est une solution efficace du (MOILP) si et seulement si la valeur optimale de la fonction objectif Θ^* est nulle dans le programme linéaire suivant :*

$$P(x^*) \left\{ \begin{array}{l} \max \quad \Theta = \sum_{k=1}^p \psi_k \\ \text{s.c} \quad c^k x - \psi_k = c^k x^*, \quad k = 1, \dots, p \\ \quad \quad x \in D \\ \quad \quad \psi_k \in \mathbb{R}_+, \quad k = 1, \dots, p \end{array} \right.$$

Méthode de Jorge, 2009 [85]

L'algorithme proposé consiste à produire une solution optimale globale de (P_E) sans devoir énumérer l'ensemble de toutes les solutions efficaces E_X , la procédure commence à résoudre le problème relaxé (P_R) , sa solution est testée pour l'efficacité, évidemment, seulement dans un nombre limité de cas spéciaux la solution optimale de (P_R) fournit une solution optimale de (P_E) . Ainsi, si ce n'était pas le cas, une solution efficace qui domine la solution optimale de (P_R) est alors générée par le programme linéaire de test d'efficacité défini dans le théorème(4.2.3). Par suite, dans chaque itération, le critère principal est optimisé sur le domaine restreint $D - D_s$ en incluant progressivement des contraintes pour éliminer les solutions dominées par la solution efficace courante, afin de fournir une solution non dominée par les solutions détectées antérieurement jusqu'à ce qu'une solution optimale et efficace soit finalement trouvée.

L'algorithme de la méthode :

Étape 0 (Initialisation)

- Poser $\phi_{inf} = -\infty$, $\phi_{sup} = +\infty$ et $l = 1$
- Résoudre le PL relaxé (P_R)
 - Si (P_R) est irréalisable, terminer le PL (P_E) est aussi irréalisable ;
 - Sinon, soit x^l une solution optimale de (P_R)

Étape 1

- Si x^l est efficace. Terminer $x_{opt} = x^l$ et $\phi_{opt} = dx^l$
- Sinon, poser $\phi_{sup} = dx^l$ et aller à l'étape (2)

Étape 2

Soit \hat{x}^l une solution optimale du test d'efficacité dont le vecteur critère domine celui de x^l . Dans l'espace des critères, plusieurs solutions peuvent avoir le même vecteur critère que \hat{x}^l , pour cela le problème $(\mathcal{T}_l) \equiv \max\{dx^l \mid z(x) = (\hat{x}^l), x \in D\}$ est résolu pour trouver les solutions équivalentes à \hat{x}^l .

Soit \bar{x}^l une solution optimale de (\mathcal{T}_l)

- Si $d\bar{x}^l > \phi_{inf}$, poser $\phi_{inf} = d\bar{x}^l$ et $x_{opt} = \bar{x}^l$
- $\phi_{inf} = \phi_{sup}$, terminer, x_{opt} est optimale pour (P_E)

Étape 3

Résoudre le problème $(P_l) \equiv \max\{dx \mid x \in D - \bigcup_{s=1}^l D_s\}$ où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid z(x) \leq z(\bar{x}^s)\}$ avec $\bar{x}^1, \bar{x}^2, \dots, \bar{x}^l$ sont respectivement les solutions optimales de $(\mathcal{T}_1), (\mathcal{T}_2), \dots, (\mathcal{T}_l)$.

- Si (P_l) n'est pas réalisable, terminer x_{opt} est optimale pour (P_E)
- Sinon, soit x^{l+1} une solution optimale de (P_l)
 - Si $dx^{l+1} \leq \phi_{inf}$. terminer x_{opt} est optimale pour (P_E)
 - Sinon, poser $l = l + 1$ et aller à l'étape (1)

Méthode de Chaabane et al [87]

La méthode proposée consiste à choisir une solution non dominée la plus proche possible du point idéal améliorant le critère principal d'une itération à une autre. Une fois une solution efficace est mise à jour, le domaine de faisabilité est réduit en éliminant les solutions réalisables moins bonnes dans le sens de Pareto. La norme pondérée augmentée de Tchebycheff est utilisée pour minimiser la distance entre la solution réalisable courante et le point idéal. Le résultat de Bowman (4.10) est appliqué afin d'éviter une minimisation d'une fonction non linéaire (la norme de Tchebycheff) par la résolution d'un programme linéaire équivalent qui semble comme une alternative au test d'efficacité, sa résolution nous assure l'obtention d'une solution efficace à partir d'une solution réalisable.

La théorie de la norme de Tchebycheff

Soit l'espace des vecteurs de préférences noté Δ (appelé aussi vecteur poids) tel que :

$$\Delta = \left\{ \beta \in \mathbb{R}^p \mid 0 < \beta_i < 1, \sum_{i=1}^p \beta_i = 1 \right\}$$

Définition 4.2.4. La norme pondérée de Tchebycheff relativement à un point de référence, le point idéal est donnée par :

$$\|z^{id} - z\|_{\beta} = \max_{k=1, \dots, p} \{ \beta_k |z_k^{id} - z_k| \}$$

Définition 4.2.5. La norme pondérée de Tchebycheff dans \mathbb{R}^p relativement à un point de référence, le point utopian, est définie comme suit :

$$\|z^U - z\|_{\beta} = \max_{k=1, \dots, p} \{ \beta_k |z_k^U - z_k| \}$$

Définition 4.2.6. La norme augmentée de Tchebycheff est définie comme suit :

$$\|z^{id} - z\|_{\beta, \rho} = \max_{k=1, \dots, p} \{ \beta_k |z_k^{id} - z_k| \} + \rho \sum_{k=1}^p (|z_k^{id} - z_k|)$$

Définition 4.2.7. La norme augmentée de Tchebycheff relativement à un point de référence, le point utopian, est définie comme suit :

$$\|z^U - z\|_{\beta, \rho} = \max_{k=1, \dots, p} \{ \beta_k |z_k^U - z_k| \} + \rho \sum_{k=1}^p (|z_k^U - z_k|)$$

Avec ρ est un petit réel positif.

La norme de Tchebycheff est souvent utilisée pour calculer la distance pondérée entre n'importe quel point de Z est le point d'aspiration z^U . En effet, il s'agit de trouver les points réalisables dont la distance est la plus petite du point idéal z^U , pour se faire on doit résoudre les problèmes suivants :

$$\min_{z \in Z} \{ \| z^U - z \|_{\beta, \rho} \} \quad (4.9)$$

Le problème équivalent à (4.9) appelé programme de la norme pondérée de Tchebycheff "Weighted Tchebycheff Program"(WTP), noté $P(\beta)$, proposé par Bowman [89], est donné par :

$$P(\beta) \begin{cases} \min \omega \\ \omega \geq \beta_k (z_k^{id} - z_k), 1 \leq k \leq p, \beta \in \Delta; \\ x \in D \\ \omega \geq 0. \end{cases}$$

où

$$\beta_k = \frac{1}{z_k^{id} - z_k} \left[\sum_{k=1}^p \frac{1}{z_k^{id} - z_k} \right]^{-1}, \quad \forall 1 \leq k \leq p$$

Les théorèmes suivants présentent quelques conditions pour caractériser une solution non dominée.

Théorème 4.2.4. [90] Si Z est fini et soit $M = \{z \in Z | (x, z, \omega) \text{ une solution optimale pour } P(\beta) \text{ pour un certain } \beta \in \Delta\}$, alors il existe $\bar{z} \in M$ tel que \bar{z} est un point Pareto.

Théorème 4.2.5. [89] Si x^* est une solution efficace alors x^* est une solution optimale de $P(\beta)$ pour un certain $\beta \in \Delta$

Théorème 4.2.6. [89] Si l'ensemble des solutions efficaces du problème (4.4) est fortement efficace alors toute solution optimale du programme $P(\beta)$ est une solution efficace du problème (4.4) pour certain vecteur $\beta \in \Delta$

Le programme linéaire sous la norme augmentée de tchebycheff est défini par :

$$P_\rho(\beta) \begin{cases} \min \omega + \rho \sum_{k=1}^p (| z_k^{id} - \bar{z}_k |) \\ \omega \geq \beta_k (z_k^{id} - z_k), 1 \leq k \leq p, \beta \in \Delta; \\ x \in D; \\ \omega \geq 0. \end{cases} \quad (4.10)$$

Description de la méthode

La méthode proposée consiste à trouver une solution efficace optimale du problème principal, sans passer explicitement par toutes les solutions efficaces du problème (4.4). L'algorithme s'articule autour de deux étapes : En première partie, un vecteur non dominé est caractérisé par la résolution du problème (4.10) pour une valeur de $\rho > 0$ suffisamment petite. En deuxième partie, la réduction progressive du domaine d'admissibilité est effectuée en ajoutant des contraintes issues de la définition de solution "Pareto Optimale". Initialement, on détermine le point utopique z^U , puis on résout le problème relaxé (4.6). Une solution optimale est obtenue et une borne supérieure du critère principal est mise à jour pour des valeurs très petites de ρ . On résout le problème (4.10) afin de trouver un vecteur non dominé \bar{z} le plus proche possible du vecteur

utopique z^U .

Comme dans l'espace des critères plusieurs solutions efficaces peuvent avoir le même vecteur \bar{z} (solution efficace équivalente), donc un autre programme est résolu pour choisir la meilleure solution équivalente sur le critère principal. Une nouvelle solution efficace par conséquent est générée et ajouté à la liste courante, le critère principal ϕ est évalué et la région d'admissibilité courante est réduite par les contraintes (4.11). L'algorithme prend fin quant la région d'admissibilité courante devient vide ou la borne inférieure du critère principal coïncide avec la borne supérieure.

$$D - \bigcup_{s=1}^l D_s = \begin{cases} C^k x \geq (C^k x^l + 1)y_k^s - M_k(1 - y_k^s), & k = 1, \dots, p \\ \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1, y_k^s \in \{0, 1\}, & k = 1, \dots, p \\ x \in D. \end{cases} \quad (4.11)$$

où M_k est la borne inférieure du k^{me} critère, $\{x^s; s = 1, \dots, l\}$ sont les solutions obtenues à la s^{me} itération.

4.3 L'algorithme de la méthode

Algorithme 3: Chaabane et al [87]

1 Entrées

- 2 ↓ $A_{(m \times n)}$: matrice des contraintes. ;
- 3 ↓ $b_{(m \times 1)}$: vecteur ; ↓ $d_{(1 \times n)}$: vecteur du critère principal. ;
- 4 ↓ $C_{(p \times n)}$: matrice des critères. ;

5 Sorties

- 6 ↑ x_{opt} : Solution optimale du problème (P_E).
- 7 ↑ ϕ_{opt} : valeur optimale du critère principal ϕ

8 Initialisation

- pour $k = 1, \dots, p$, résoudre $z_k^* = \max\{c^k x, x \in D\}$; avec $z_k^U = z_k^* + 1$ et poser la borne inférieure $M_k := \min\{c^k x, x \in D\}$.
- $\phi_{sup} := +\infty$ et $\phi_{inf} := -\infty$: la borne superieur et inferieure de la fonction ϕ respectivement ;
- $i = 1, E_1 := \emptyset; \bar{D} := D$
- $fin = faux$

début

Tant que $fin = faux$ **Faire**

résoudre ($P_R^i \equiv \max\{dx, x \in \bar{D}\}$;

si (P_R^i est irréalisable ou $\phi_{inf} \geq \phi_{sup}$ **alors**

| x_{opt} est la solution optimale de (P_E) ; $fin = vrai$: **l'algorithme prend fin**

sinon

soit x^i la solution optimale du (P_R^i).

soit $\phi_{sup} = dx^i$, calculer le vecteur préférence β^i of $z^i = Cx^i$

soit (\hat{x}^i, \hat{z}^i) la solution optimale du $P_p(\beta^i)$

si $d\hat{x}^i = \phi_{sup}$ **alors**

| $x_{opt} = \hat{x}^i, \phi_{opt} = \phi_{sup}$; $fin = vrai$ **l'algorithme prend fin**

sinon

résoudre $Q(\hat{z}^i) \equiv \max\{dx \mid x \in D, Cx = \hat{z}^i\}$

soit \bar{x}^i la solution optimale $Q(\hat{z}^i)$;

si $d\bar{x}^i > \phi_{inf}$ **alors**

| $x_{opt} := \bar{x}^i, \phi_{inf} := d\bar{x}^i$ et $\phi_{opt} := \phi_{inf}$; soit $E_{k+1} = E_i \cup \{\bar{x}^i\}, i = i + 1$ et $\bar{D} := D \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} D_s ; D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Cx \leq C\bar{x}^s; \bar{x}^s \in E_{i-1}\}$

sinon

si $\phi_{inf} \geq \phi_{sup}$ **alors**

| x_{opt} est la solution optimale du (P_E) et ϕ_{opt} est la valeur optimale de ϕ ; $fin = vrai$: **l'algorithme prend fin**

sinon

| $x_{opt} := \bar{x}^i, \phi_{inf} := d\bar{x}^i$ et $\phi_{opt} := \phi_{inf}$; soit $E_{i+1} = E_i \cup \{\bar{x}^i\}, i = i + 1$ et $\bar{D} := D \setminus \bigcup_{s=1}^{i-1} D_s ; D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid Cx \leq C\bar{x}^s; \bar{x}^s \in E_{i-1}\}$

fin

fin

fin

fin ;

fin .

4.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté quelques méthodes de résolution du problème (P_E) où les variables de décision sont continues et entières. Ce type de problème est en principe très difficile à résoudre, ceci est dû principalement à la non-convexité de son ensemble réalisable (X_E) et le problème appartient alors à la classe des problèmes d'optimisation non convexe.

5

Résolution du problème de la programmation stochastique multi-objectifs fractionnaire linéaire à valeurs intervalles en nombres entiers

5.1 Introduction

Dans la programmation mathématique conventionnelle, les coefficients du problème sont supposés être déterministes [91, 74]. Cependant, lors de la modélisation de problèmes pratiques du monde réel, cette hypothèse devient irréaliste en raison des environnements incertains, C'est pourquoi plusieurs approches ont été développées pour résoudre les problèmes d'optimisation incertains. Les approches probabilistes et floues sont fréquemment utilisées pour décrire l'élément incertain et traiter les imprécisions présentes dans une variable de décision [51, 92, 93]. Dans [94], la technique de programmation floue est utilisée pour résoudre un problème de programmation linéaire probabiliste impliquant des variables aléatoires normales et log-normales avec des contraintes conjointes. Hsien- Chung Wu [74] a obtenu et prouvé les conditions de Karush-Kuhn-Tucker (K.K.T) des problèmes d'optimisation avec fonction objectif à valeur d'intervalle. Effati et Pakdaman [70] ont étudié un problème de programmation linéaire fractionnaire (LFP) à valeur d'intervalle et ont prouvé que le problème considéré peut être converti en un problème d'optimisation ayant un objectif à valeur d'intervalle où ses limites sont des fonctions fractionnaires linéaires. Les problèmes d'optimisation traitant de la PFL et de la programmation fractionnaire stochastique (PFS) sont également abordés dans [95, 96]. De plus, Nasser et Bavandi [97] ont proposé une approche de programmation sous contrainte en probabilité avec des paramètres d'intervalles pour le problème (PFL). Ensuite, ils ont étudié le problème de programmation fractionnaire linéaire stochastique floue dans lequel les coefficients de la fonction objectif, les scalaires et le second membre des contraintes sont des variables aléatoires floues [98].

Dans les articles mentionnés ci-dessus et dans la littérature en général, les problèmes d'op-

timisation fractionnelle avec des coefficients intervalles ne considèrent qu'un seul objectif. Dans notre étude, nous nous sommes particulièrement intéressés aux problèmes multi-objectifs stochastique fractionnaire impliquant des coefficients intervalles dans les fonctions objectifs, soumis à des contraintes probabilistes où les quantités du côté droit des contraintes sont des variables aléatoires log-normal. Ce qui nous mène à étudier le problème multi-objectifs stochastique fractionnaire à valeur intervalle à variable discrète (MOSIVLFIP : Multi-Objective Stochastic Interval-Valued Linear Fractional Integer Programming Problem). La procédure de résolution proposée consiste à convertir le problème étudié en un problème d'optimisation avec des fonctions objectifs à coefficients intervalles. Ensuite, la méthode de pondération des décideurs (DMs) est utilisée pour transformer le problème d'optimisation en une seule fonction objectif. Dans cette étape, les poids relatifs sont attribués en fonction de l'importance relative de la fonction objectif. Enfin, la solution obtenue est un ensemble non dominé.

5.2 Fonction à valeur intervalle

Définition 5.2.1. Une fonction $f : \mathbb{R}^n \rightarrow I$ s'appelle une fonction à valeur intervalle (parce que pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f(x)$ est un intervalle fermé dans \mathbb{R}). Similaire à la notation d'intervalle, nous désignons la fonction à valeur d'intervalle f avec $f(x) = [f_L, f_R]$ où pour chaque $x \in \mathbb{R}$, $f_L(x)$ et $f_R(x)$ sont les valeurs réels de la fonction, et $f_L(x) \leq f_R(x)$.

Proposition 5.2.1. Soit f une fonction à valeur intervalle définie sur \mathbb{R}^n . Alors, f est continue en $c \in \mathbb{R}^n$ si et seulement si f_L et f_R sont continues en c .

Définition 5.2.2. soit X un ensemble ouvert dans \mathbb{R} . Une fonction à valeur intervalle $f : X \rightarrow I$ avec $f(x) = [f_L, f_R]$ est appelée faible différentiable en x_0 si les valeurs réelles de la fonction, f_L et f_R sont différentiables à x_0 .

Définition 5.2.3. Nous définissons une fonction fractionnaire linéaire $F(x)$ comme suit :

$$F(x) = \frac{cx + \alpha}{dx + \beta}$$

où $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^t \in \mathbb{R}^n$, $c = (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathbb{R}^n$, $d = (d_1, d_2, \dots, d_n) \in \mathbb{R}^n$ et α, β sont des scalaires réels.

5.3 Programme stochastique multi-objectifs fractionnaires linéaires à valeurs intervalles en nombres entiers

Le modèle mathématique considéré dans ce chapitre est un problème stochastique multi-objectifs fractionnaire linéaire avec des coefficients à valeurs intervalles (Multi-Objective Stochastic Interval-Valued Linear Fractional Integer Programming (MOSIVLFIP)), où les seconds membres des contraintes sont des variables aléatoires de distribution log-normale.

$$(MOSIVLFIP) = \begin{cases} \min & Z^k = \frac{\sum_{i=1}^n c_i^k x_i + \alpha^k}{\sum_{i=1}^n d_i^k x_i + \beta^k}, & k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.t} & \\ & \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j, & j = 1, 2, \dots, m \\ & \sum_{i=1}^n a_{si} x_i \leq e_s, & s = 1, 2, \dots, S \\ & x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (5.1)$$

où b_j, e_s sont des variables aléatoires indépendantes suivant une distribution log-normale et a_{ji}, a_{si} sont des scalaires, $i = 1, 2, \dots, n, s = 1, 2, \dots, S$ et $j = 1, 2, \dots, m$.

Supposer que $c^k = (c_1^k, c_2^k, \dots, c_n^k), d^k = (d_1^k, d_2^k, \dots, d_n^k)$, où $c_i^k d_i^k \in I^+, i = 1, 2, \dots, n$ et $k = 1, 2, \dots, p$
 Définir $c_L^k = (c_{L_1}^k, c_{L_2}^k, \dots, c_{L_n}^k), c_R^k = (c_{R_1}^k, c_{R_2}^k, \dots, c_{R_n}^k) d_L^k = (d_{L_1}^k, d_{L_2}^k, \dots, d_{L_n}^k), d_R^k = (d_{R_1}^k, d_{R_2}^k, \dots, d_{R_n}^k)$.
 Également, $\alpha^k = [\alpha_L^k, \alpha_R^k], \beta^k = [\beta_L^k, \beta_R^k]$ pour $k = 1, 2, \dots, p$. Assumer que $c_i^k, d_i^k, \alpha^k, \beta^k \in I^+$ pour $i = 1, 2, \dots, n, k = 1, 2, \dots, p$ et $\sum_{i=1}^n d_i^k x_i + \beta^k > 0$.

Ensuite, MOSIVLFIP (5.1) peut être réécrit comme :

$$\begin{cases} \min & Z^k = \frac{p^k(x)}{q^k(x)}, & k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.t} & \\ & Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j\right) \geq (1 - \gamma_j) & j = 1, 2, \dots, m \\ & Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{si} x_i \geq e_s\right) \geq (1 - \delta_s) & s = 1, 2, \dots, S \\ & x_j \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{cases} \quad (5.2)$$

où $p(x), q(x)$ sont des fonctions linéaires à valeurs intervalles données par :

$$\begin{aligned} p(x) &= [p_L(x), p_R(x)] = [c_L x + \alpha_L, c_R x + \alpha_R], \\ q(x) &= [q_L(x), q_R(x)] = [d_L x + \beta_L, d_R x + \beta_R]. \end{aligned}$$

Pr indique la probabilité, avec $0 < \gamma_i < 1, \forall i$ et $0 < \delta_s < 1, \forall s$, respectivement, les probabilités données auxquelles la j^{th} et la s^{th} contraintes soient satisfaites. Nous assumons que $b_j, (j = 1, 2, \dots, m)$ et $e_s, (s = 1, 2, \dots, S)$ sont des variables aléatoires log-normales.

Par conséquent, MOSIVFLIP (5.2) peut être réécrit comme :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z^k = \frac{\sum_{i=1}^n [c_{L_i}^k x_i + \alpha_L^k, c_{R_i}^k x_i + \alpha_R^k]}{\sum_{i=1}^n [d_{L_i}^k x_i + \beta_L^k, d_{R_i}^k x_i + \beta_R^k]}, \quad k = 1, 2, \dots, p \\ s.t \\ \Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j\right) \geq (1 - \gamma_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{si} x_i \geq e_s\right) \geq (1 - \delta_s) \quad s = 1, 2, \dots, S \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5.3)$$

Pour introduire un problème de programmation fractionnaire linéaire à valeurs intervalles, nous considérons un autre type de problèmes de programmation fractionnaire linéaire comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z^k = \left[\frac{\sum_{i=1}^n c_{L_i}^k x_i + \alpha_L^k}{\sum_{i=1}^n d_{R_i}^k x_i + \beta_R^k}, \frac{\sum_{i=1}^n c_{R_i}^k x_i + \alpha_R^k}{\sum_{i=1}^n d_{L_i}^k x_i + \beta_L^k} \right] = [f_L^k, f_R^k], \quad k = 1, 2, \dots, p \\ s.t \\ \Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq b_j\right) \geq (1 - \gamma_j) \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{si} x_i \geq e_s\right) \geq (1 - \delta_s) \quad s = 1, 2, \dots, S \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5.4)$$

où f_L^k et f_R^k sont des fonctions linéaires fractionnaires.

Théorème 5.3.1. [99] *Tout problème MOSIVLFIP qui s'écrit sous la forme (5.3) sous certaines hypothèses peut être converti en un problème MOSIVLFIP sous la forme (5.4).*

5.3.1 Contraintes déterministes équivalentes aux contraintes probabilistes :

A . Seulement b_i , ($j = 1, 2, \dots, m$) sont supposées être des variables aléatoires log-normale [8] :

Nous supposons que b_j , $j = 1, 2, \dots, m$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la distribution log-normale avec moyenne $\mu_{b_j} = E(\ln b_j)$ et variance $Var(\ln b_j) = \sigma_{b_j}^2$. Ces paramètres sont supposés être connus. Ensuite, nous savons que :

$$\text{moyenne de } b_j = E(b_j) = \exp\left(\mu_{b_j} + \frac{\sigma_{b_j}^2}{2}\right), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.5)$$

$$\text{variance de } b_j = Var(b_j) = \exp\left(2\mu_{b_j} + \sigma_{b_j}^2\right) \exp(\sigma_{b_j}^2 - 1), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.6)$$

La fonction de densité de probabilité de la j^{th} variable aléatoire b_j , $j = 1, 2, \dots, m$ est

$$f(b_j) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_j b_j}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln b_j - \mu_j}{\sigma_j}\right)^2\right], 0 < b_j < \infty, \sigma_j > 0.$$

Comme b_j , ($j = 1, 2, \dots, m$) est une variable aléatoire log-normale, donc l'équation $Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq b_j\right) \geq (1 - \gamma_j)$ peut s'écrire comme suit :

$$Pr\left(\ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq \ln b_j\right) \geq (1 - \gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, m \quad (5.7)$$

Supposons que $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i$ et b_j sont positifs. Les contraintes ci-dessus peuvent être exprimées comme suit :

$$Pr\left(\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - E(\ln b_j)}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}} \leq \frac{\ln b_j - E(\ln b_j)}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}}\right) \geq (1 - \gamma_j), \quad j = 1, 2, \dots, m$$

En réarrangeant, on obtient

$$Pr\left(\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - E(\ln b_j)}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}} \geq \frac{\ln b_j - E(\ln b_j)}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}}\right) \leq \gamma_j, \quad j = 1, 2, \dots, m$$

Mais, $\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - E(\ln b_j)}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}}$ est une variable aléatoire normale standard de moyenne nulle et

de variance unitaire et $\sigma_{b_j} = \sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}$. Soit $\phi(\cdot)$ représentant la fonction de densité cumulée (la fonction de répartition de) de la variable aléatoire normale standard, et K_{γ_j} désignant la valeur de la variable normale standard, alors nous avons $\gamma_j = \phi(-K_{\gamma_j})$.

Alors, la contrainte (5.7) peut être énoncée comme :

$$\phi\left(\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - \mu_{b_j}}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}}\right) \leq \phi(-K_{\gamma_j}), \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Cette inégalité ne sera satisfaite que si.

$$\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i - \mu_{b_j}}{\sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}} \leq -K_{\gamma_j}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

$$\Rightarrow \ln \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq \mu_{b_j} - K_{\gamma_j} \sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Enfin, la contrainte probabiliste $\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq b_j$ peut être transformée en contrainte déterministe de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq \exp\left(\mu_{b_j} - K_{\gamma_j} \sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}\right), \quad j = 1, 2, \dots, m. \quad (5.8)$$

B . Seulement $e_s, (s = 1, 2, \dots, S)$ sont supposées être des variables aléatoires log-normale [8] :

Nous supposons que $e_s, s = 1, 2, \dots, S$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant la distribution log-normale avec moyenne $\mu_{e_s} = E(\ln e_s)$, et variance $Var(\ln e_s) = \sigma_{e_s}^2$. Ces paramètres sont supposés être connus. Ensuite, nous savons que :

$$\text{moyenne de } e_s = E(e_s) = \exp\left(\mu_{e_s} + \frac{\sigma_{e_s}^2}{2}\right), \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (5.9)$$

$$\text{variance de } e_s = Var(e_s) = \exp\left(2\mu_{e_s} + \sigma_{e_s}^2\right) \exp(\sigma_{e_s}^2 - 1), \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (5.10)$$

La fonction de densité de probabilité du s^{th} variable aléatoire $e_s, s = 1, 2, \dots, S$ est

$$f(e_s) = \frac{1}{\sqrt{(2\pi)\sigma_s e_s}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln e_s - \mu_s}{\sigma_s}\right)^2\right], \quad 0 < e_s < \infty, \sigma_s > 0.$$

Comme $e_s, (s = 1, 2, \dots, S)$ est une variable aléatoire log-normale, donc l'équation $Pr\left(\sum_{i=1}^n a_{si}x_i \geq e_s\right) \geq (1 - \delta_s)$ peut s'écrire comme suit :

$$Pr\left(\ln \sum_{i=1}^n a_{si}x_i \geq \ln e_s\right) \geq (1 - \delta_s), \quad s = 1, 2, \dots, S \quad (5.11)$$

Supposons que $\sum_{i=1}^n a_{si}x_i$ et e_s sont positifs. Les contraintes ci-dessus peuvent être exprimées comme suit :

$$Pr\left(\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{si}x_i - E(\ln e_s)}{\sqrt{Var(\ln e_s)}} \leq \frac{\ln e_s - E(\ln e_s)}{\sqrt{Var(\ln e_s)}}\right) \geq (1 - \delta_s), \quad s = 1, 2, \dots, S$$

En réarrangeant, on obtient

$$Pr\left(\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{si}x_i - E(\ln e_s)}{\sqrt{Var(\ln e_s)}} \geq \frac{\ln e_s - E(\ln e_s)}{\sqrt{Var(\ln e_s)}}\right) \leq (1 - \delta_s), \quad s = 1, 2, \dots, S$$

Mais, $\frac{\ln e_s - E(\ln e_s)}{\sqrt{Var(\ln e_s)}}$ est une variable aléatoire normale standard de moyenne nulle et

de variance unitaire et $\sigma_{e_s} = \sqrt{Var(\ln e_s)}$. Soit $\phi(\cdot)$ représentant la fonction de densité cumulée de la variable aléatoire normale standard (la fonction de répartition), et K_{δ_s} désignant la valeur de la variable normale standard, alors nous avons $1 - \delta_s = \phi(K_{\delta_s})$.

Alors, la contrainte (5.11) peut être énoncée comme :

$$\phi\left(\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{si}x_i - \mu_{e_s}}{\sqrt{Var(\ln e_s)}}\right) \leq \phi(K_{\delta_s}), \quad s = 1, 2, \dots, S.$$

Cette inégalité ne sera satisfaite que si.

$$\frac{\ln \sum_{i=1}^n a_{si}x_i - \mu_{e_s}}{\sqrt{\text{Var}(\ln e_s)}} \leq K_{\delta_s}, s = 1, 2, \dots, S.$$

$$\Rightarrow \ln \sum_{i=1}^n a_{si}x_i \leq \mu_{e_s} + K_{\delta_s} \sqrt{\text{Var}(\ln e_s)}, s = 1, 2, \dots, S.$$

Enfin, la contrainte probabiliste $\sum_{i=1}^n a_{si}x_i \leq e_s$ peut être transformée en contrainte déterministe de la manière suivante :

$$\sum_{i=1}^n a_{si}x_i \leq \exp(\mu_{e_s} + K_{\delta_s} \sqrt{\text{Var}(\ln e_s)}), s = 1, 2, \dots, S. \quad (5.12)$$

Enfin, nous avons obtenu le modèle déterministe équivalent pour la technique de programmation sous contrainte aléatoire du problème de programmation fractionnaire stochastique multi-objectifs dans lequel les coefficients et les scalaires de la fonction objectif sont sous forme d'intervalles fractionnaires représentant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad Z^k = [f_L^k, f_R^k], \quad k = 1, 2, \dots, p \\ \text{s.t} \\ \sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \leq \exp(\mu_{b_j} - K_{\gamma_j} \sqrt{\text{Var}(\ln b_j)}), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n a_{si}x_i \leq \exp(\mu_{e_s} + K_{\delta_s} \sqrt{\text{Var}(\ln e_s)}), \quad s = 1, 2, \dots, S. \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5.13)$$

En utilisant la méthode de la somme pondérée pour résoudre le problème (5.13). Elle est à la fois la méthode la plus simple et la plus connue dans le domaine de prise de décision multicritère. Comme son nom l'indique, la méthode de la somme pondérée consiste à pondérer les différents critères du problème de décision multicritères avec des nombres réels appelés poids w_k , qui représentent l'importance de chaque critère dans le processus de décision. Une fois l'importance des différents critères quantifiée, la méthode choisit l'action qui minimise ou maximise la somme pondérée des critères. La méthode de la somme pondérée consiste à minimiser une fonction U à valeur d'intervalle définie comme suit :

$$U(x) = \sum_{k=1}^p w_k Z^k = \sum_{k=1}^p w_k [f_L^k, f_R^k]. \quad (5.14)$$

où w_1, w_2, \dots, w_k et les valeurs pondérées pour $k = 1, 2, \dots, p$, de telle sorte que $\sum_{k=1}^p w_k = 1$.

En utilisant les expressions (5.8, 5.12, 5.14), le problème introduit dans la section [5] est ramené à un problème d'optimisation mono-objectif à valeur intervalle, défini comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad U(x) = \sum_{k=1}^p w_k Z^k = \left[\sum_{k=1}^p w_k f_L^k, \sum_{k=1}^p w_k f_R^k \right], \quad k = 1, 2, \dots, p. \\ s.t \quad \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq \exp \left(\mu_{b_j} - K_{\gamma_j} \sqrt{\text{Var}(\ln b_j)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n a_{si} x_i \leq \exp \left(\mu_{e_s} + K_{\delta_s} \sqrt{\text{Var}(\ln e_s)} \right), \quad s = 1, 2, \dots, S. \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5.15)$$

Définition 5.3.1. Soit x^* une solution réalisable de MOSIVLFIP (5.15). Nous disons que x^* est une solution non dominée de MOSIVLFIP (5.15) s'il n'existe aucune solution réalisable x telle que $U(x) < U(x^*)$. Dans ce cas, nous disons que $U(x^*)$ est la valeur objective non dominée de U .

Considérons le problème d'optimisation suivant correspondant au problème (5.15) :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min \quad U_w(x) = \sum_{k=1}^p w_k f_L^k + \sum_{k=1}^p w_k f_R^k, \quad k = 1, 2, \dots, p. \\ s.t \quad \sum_{i=1}^n a_{ji} x_i \leq \exp \left(\mu_{b_j} - K_{\gamma_j} \sqrt{\text{Var}(\ln b_j)} \right), \quad j = 1, 2, \dots, m \\ \sum_{i=1}^n a_{si} x_i \leq \exp \left(\mu_{e_s} + K_{\delta_s} \sqrt{\text{Var}(\ln e_s)} \right), \quad s = 1, 2, \dots, S. \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, \dots, n, \end{array} \right. \quad (5.16)$$

Afin de résoudre MOSIVLFIP (5.16), nous utilisons le théorème suivant.

Théorème 5.3.2. [100] Si x^* est une solution optimale du problème (5.16), alors x^* est une solution non dominée du problème (5.15).

5.4 Exemple numérique

Considérons le problème d'optimisation suivant avec des coefficients intervalles dans les fonctions objectifs et les quantités du côté droit des contraintes sont des variables aléatoires log-normales indépendantes avec des moyennes et des variances connues.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z^1 = \frac{[1, 2]x_1 + [3, 7]x_2 + [\frac{3}{2}, \frac{5}{2}]x_3 + [\frac{7}{2}, 4]}{[\frac{1}{2}, 1]x_1 + [\frac{3}{4}, 1]x_2 + [\frac{7}{8}, 2]x_3 + [\frac{1}{2}, 1]} \\ \min Z^2 = \frac{[3, 5]x_1 + [1, 4]x_2 + [1, 3]x_3 + [7, 11]}{[\frac{1}{2}, 2]x_1 + [1, 2]x_2 + [\frac{2}{9}, 1]x_3 + [4, 6]} \\ \text{s.t} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq b_1, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq b_2, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq b_3, \\ -2x_1 + 4x_3 \geq e_1, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq e_2, \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (5.17)$$

Maintenant, nous supposons que les moyennes et les variances des variables aléatoires log-normales avec les niveaux de probabilité spécifiés (niveau de confiance) de b_j et e_s pour $j = 1, 2, 3$ et $s = 1, 2$ sont représentées dans le Tableau-5.1.

TABLE 5.1 – Moyennes, variances et niveaux de probabilité spécifiés.

Moyennes	Variances	Niveaux de probabilité spécifiés
$E(b_1) = 31$	$V(b_1) = 6$	$\gamma_1 = 0.01$
$E(b_2) = 37$	$V(b_2) = 7$	$\gamma_2 = 0.02$
$E(b_3) = 40$	$V(b_3) = 8$	$\gamma_3 = 0.03$
$E(e_1) = 26$	$V(e_1) = 5$	$\delta_1 = 0.07$
$E(e_2) = 21$	$V(e_2) = 4$	$\delta_2 = 0.06$

En utilisant les relations (5.5) et (5.6) des moyennes et des écarts types des variables aléatoires log-normales avec des niveaux de probabilité spécifiés à la place de b_j pour $j = 1, 2, 3$, et les relations (5.9) et (5.10) des moyennes et des écarts types des variables aléatoires log-normales avec des niveaux de probabilité spécifiés à la place de e_s pour $s = 1, 2$, du Tableau-5.1, sont représentées dans le Tableau-5.2.

TABLE 5.2 – Moyennes, variances et niveaux de probabilité spécifiés.

Moyennes	Variances	Niveaux de probabilité spécifiés
$\mu_{b_1} = 3.430875164$	$\sigma_{b_1} = 0.078892839$	$\gamma_1 = 0.01$
$\mu_{b_2} = 3.608364907$	$\sigma_{b_2} = 0.07145636$	$\gamma_2 = 0.02$
$\mu_{b_3} = 3.687631014$	$\sigma_{b_3} = 0.049968792$	$\gamma_3 = 0.03$
$\mu_{e_1} = 3.253678247$	$\sigma_{e_1} = 0.094003094$	$\delta_1 = 0.07$
$\mu_{e_2} = 3.044093436$	$\sigma_{e_2} = 0.09502319$	$\delta_2 = 0.06$

En utilisant le théorème 5.3.1, nous pouvons convertir le problème (5.17) au problème suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min Z^1 = \left[\frac{x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1}, \frac{2x_1 + 7x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}} \right] \\ \min Z^2 = \left[\frac{3x_1 + x_2 + x_3 + 7}{2x_1 + 2x_2 + x_3 + 6}, \frac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11}{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{2}{9}x_3 + 4} \right] \\ \text{s.t} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 25.57287834, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 31.31243425, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 36.15059581, \\ -2x_1 + 4x_3 \geq 29.80520039, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 24.43778598, \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (5.18)$$

Pour construire une fonction objectif unique composite, la méthode de pondération avec des poids w_k ($j = 1; 2$), tels que $\sum_{k=1}^2 w_k = 1$, sont attachés aux fonctions objectifs afin de faciliter la prise de décision avec plus de contrôle sur le processus de prise de décision.

$$\left\{ \begin{array}{l} \min U(x) = w_1 \left[\frac{x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1}, \frac{2x_1 + 7x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}} \right] \\ \quad + w_2 \left[\frac{3x_1 + x_2 + x_3 + 7}{2x_1 + 2x_2 + x_3 + 6}, \frac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11}{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{2}{9}x_3 + 4} \right] \\ \text{s.t} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 25.57287834, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 31.31243425, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 36.15059581, \\ -2x_1 + 4x_3 \geq 29.80520039, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 24.43778598, \\ x_i \geq 0, \text{ entier } i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (5.19)$$

Le théorème 5.3.2 peut être appliqué pour résoudre le problème d'optimisation :

$$\left\{ \begin{array}{l} \min U_w(x) = w_1 \left(\frac{x_1 + 3x_2 + \frac{3}{2}x_3 + \frac{7}{2}}{x_1 + x_2 + 2x_3 + 1} + \frac{2x_1 + 7x_2 + \frac{5}{2}x_3 + 4}{\frac{1}{2}x_1 + \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{8}x_3 + \frac{1}{2}} \right) \\ \quad + w_2 \left(\frac{3x_1 + x_2 + x_3 + 7}{2x_1 + 2x_2 + x_3 + 6} + \frac{5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11}{\frac{1}{2}x_1 + x_2 + \frac{2}{9}x_3 + 4} \right) \\ \text{s.t} \\ x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 25.57287834, \\ -2x_1 + 3x_2 + x_3 \leq 31.31243425, \\ x_1 + x_2 + x_3 \leq 36.15059581, \\ -2x_1 + 4x_3 \geq 29.80520039, \\ x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 24.43778598, \\ x_j \geq 0, \text{ entier } i = 1, 2, 3 \end{array} \right. \quad (5.20)$$

En conséquence, on obtient une solution non dominée, où $x^* = (x_1^*, x_2^*, x_3^*) = (1, 8, 8)$ avec $U_w(x^*) = 8,49$ et $(Z^1, Z^2) = (7,41, 5,85)$. Cette solution est une solution optimale de (5.20), avec $w_1 = 0,4$ et $w_2 = 0,6$.

Le tableau-5.3 donne l'ensemble des solutions non dominées et les valeurs optimales correspondantes de la fonction objectif. Ces résultats sont obtenus à partir du logiciel Lingo 14 en faisant varier les poids w_1 et w_2 . Les résultats obtenus peuvent donner une certaine flexibilité au décideur quant au choix des poids de la fonction objectif.

TABLE 5.3 – Résultats de l'optimisation en faisant varier les poids w_1 et w_2

w_1	w_2	x_1	x_2	x_3	$U_w(x)$	(Z^1, Z^2)
0	1	1	8	8	5.85	(7.41, 5.85)
0.1	0.9	1	8	8	6.51	(7.41, 5.85)
0.2	0.8	1	8	8	7.17	(7.41, 5.85)
0.3	0.7	1	8	8	7.83	(7.41, 5.85)
0.4	0.6	1	8	8	8.49	(7.41, 5.85)
0.5	0.5	1	8	9	9.17	(7.18, 5.99)
0.6	0.4	0	6	13	9.69	(6.03, 6.58)
0.7	0.3	0	6	13	10.21	(6.03, 6.58)
0.8	0.2	0	6	13	10.73	(6.03, 6.58)
0.9	0.1	0	5	15	11.23	(5.54, 7.03)
1	0	0	5	15	11.70	(5.54, 7.03)

5.5 Conclusion

Dans cette étude, en traitant le problème de programmation stochastique multi-objectifs linéaire fractionnaire à valeur intervalle en nombres entiers. Ce dernier combine deux problèmes d'optimisation distincts ; le premier concerne les contraintes stochastiques et le second les fonctions objectifs fractionnaires linéaires à valeur intervalle. A notre connaissance, seuls les problèmes mono-objectifs sont considérés dans la littérature pour de tels problèmes d'optimisation. Cependant, lorsqu'il s'agit de problèmes pratiques du monde réel, il est plus important de considérer les aspects stochastiques dans l'optimisation multi-objectifs. Afin de résoudre ce type de problèmes d'optimisation, cette étude propose une procédure basée sur la technique de contrainte probabilité et le concept de la méthode de la somme pondérée. L'efficacité de la procédure proposée est illustrée par une illustration numérique. Les résultats obtenus semblent intéressants car ils donnent une certaine flexibilité au décideur quant au choix des poids de la fonction objectif.

6

Optimisation stochastique sur le front de pareto par la norme augmentée de Tchebycheff

6.1 Introduction

Dans ce chapitre, nous proposons un algorithme pour la résolution du problème d'optimisation stochastique sur l'ensemble de solutions efficaces discrètes d'un problème linéaire multi-objectifs avec recours à deux étapes, qui présente la contribution principale de notre travail [4].

Le problème principal que nous voulons étudier est formulé par :

$$(P_E) \begin{cases} \min & \Phi(x) = d(\xi)x \\ \text{s.t} & x \in \mathbf{E}_s \end{cases} \quad (6.1)$$

où d est un vecteur aléatoire de dimension n et \mathbf{E}_s est l'ensemble de solutions efficaces du problème de programmation linéaire en nombres entiers stochastiques à objectifs multiples (MOSILP),

$$(MO_1) \begin{cases} \min & Z_k = C_k(\xi)x, & k = 1, \dots, p \\ \text{s.t} & Ax = b \\ & T(\xi)x = h(\xi) \\ & x \geq 0, \text{ entier.} \end{cases} \quad (6.2)$$

où x est le vecteur de la variable de décision de dimension $(n \times 1)$. C , T et h sont des matrices aléatoires de dimensions $(p \times n)$, $(m_1 \times n)$ et $(m_1 \times 1)$ respectivement, avec une distribution de probabilité conjointe définie sur un espace de probabilité $(\Xi, E, prob)$. A et b sont des matrices déterministes de dimensions $(m \times n)$ et $(m \times 1)$, respectivement. Soit $C(\xi)$ une matrice aléatoire de dimension $(p \times n)$.

La principale difficulté du problème (P_E) provient de la non-convexité de l'ensemble Pareto optimal et au fait que même dans le cas stochastique. Par conséquent, (P_E) est un problème d'optimisation globale.

Les problèmes (P_E) ont été largement discutés dans la littérature et une variété de méthodes ont été développées pour sa solution ; voir par exemple Philip en [75] a étudié le problème et décrit schématiquement une procédure de coupe plan (cutting plane) pour le résoudre. Plus tard, Isermann et Steuer [81] ont proposé une procédure similaire pour résoudre le problème ; ils ont optimisé un critère parmi les fonctions du programme linéaire multi objectifs. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que ce problème soit non borné ont été établies par Benson [76]. Dans [82], Ecker et Song ont utilisé l'approche de Philip pour introduire deux algorithmes implémentables qui impliquent une technique de pivotement sur l'ensemble réalisable réduit d'un programme linéaire en nombres entiers à objectifs multiples. La méthode de Philip a été mise en œuvre par Bolintineanu [101] pour le cas où la fonction objectif du problème est quasiconcave. Sayin dans [102] a formulé le problème (P_E) comme un programme linéaire avec une contrainte convexe de réserve supplémentaire et a proposé une méthode de coupe plan pour résoudre ce dernier problème. Dans [84], Abbas et Chaabane ont optimisé une fonction linéaire sur un ensemble entier efficace et Jorge a développé dans [85] une autre approche qui définit une séquence de problèmes entiers mono-objectifs progressivement plus contraints qui élimine successivement les points indésirables, le travail le plus récent sur ce sujet a été mené par Chaabane *et al.* dans [87].

La première méthode interactive de résolution de problèmes (MOSILP) a été le STRANGE-MOMIX développé par Teghem [60]. Dans [62], Abbas et Bellahcene. (2006) ont proposé un algorithme qui combine la technique de coupe plan [22] et la méthode de décomposition L-shaped décrite dans [55]. Les auteurs Amrouche et Moulai (2012) ont développé dans [61] une approche de détection de toutes les solutions stochastiques entières efficaces du problème (MOSILP) basée sur la résolution d'un programme linéaire en nombres entiers à objectifs multiples déterministes. Lorsque les variables de décision sont des nombres entiers, peu de méthodes existent dans la littérature et les coupes ou les techniques de branchement et de débranchement sont inévitables.

Dans le présent travail, la méthode que nous proposons pour résoudre (P_E) est basé sur l'approche de Jorge [85] avec les concepts de la méthode L-shaped en nombres entiers [103] nous utiliserons la norme augmentée de Tchebycheff [104] pour générer l'ensemble des vecteurs objectifs non dominés.

6.1.1 Le problème déterministe équivalent de MOSILP

Considérons une distribution discrète est finie $\{(\xi^r, prob^r), r = 1, \dots, R\}$ des données aléatoires où R est le nombre de réalisations. Progressivement, à chaque réalisation ξ^r de ξ nous associons p fonctions objectifs $Z_{kr} = C_k(\xi^r)x, k = 1, \dots, p$, ensuite une matrice $T(\xi^r)$ et enfin un vecteur $h(\xi^r)$; en prenant en considération les scénarios différents qui affectent les p objectifs et les contraintes stochastiques.

Le même principe du recours utilisé dans la programmation stochastique mono-objectif avec la matrice de recours déterministe W est utilisée dans le présent document [54, 105]. Évidem-

ment, nous supposons que le décideur peut indiquer d'une manière satisfaisante les pénalités $q^r = q(\xi^r)$ des variables violées y^r , $r = 1, \dots, R$, des contraintes.

Contrairement à la méthode STRANGE, où une fonction objectif supplémentaire est créée pour pénaliser les contraintes violées, la fonction du recours $Q(x, \xi^r)$ est ajoutée à chaque fonction objectif. Cette pénalité est donnée par :

$$Q(x, \xi^r) = \min_y \{(q^r)^T y | W(\xi^r)y = h(\xi^r) - T(\xi^r)x, y \geq 0\}. \quad (6.3)$$

Alors le décideur doit réduire au minimum la valeur d'espérance de tous les coûts :

$$\tilde{Z}_k = \mathbf{E}[Z_k + Q(x, \xi)], \quad k = 1, \dots, p$$

Nous obtenons le problème déterministe suivant :

$$(MO_2) \begin{cases} \min & \tilde{Z}_k = Z'_k + Q(x), k = 1, \dots, p \\ \text{s.t} & Ax = b \\ & x \geq 0, \text{ entier}; \end{cases} \quad (6.4)$$

où

$$Q(x) = \mathbf{E}[Q(x, \xi)] = \sum_{r=1}^R \text{prob}^r(Q(x, \xi^r)) = \sum_{r=1}^R (\text{prob}^r q^r)^T y^r$$

et

$$Z'_k = \mathbf{E}[Z_k] = \sum_{k=1}^p b^r C_k(\xi^r)x = \mathbf{E}[C_k(\xi)x], \quad \text{note } \tilde{C}x = \mathbf{E}[C_k(\xi)x]$$

sont respectivement les valeurs de la fonction du recours $\mathbf{E}[Q(x, \xi)]$ et d'espérance de Z_k . Nous attendons que lors de la deuxième étape, le programme $Q(x, \xi^r)$ d'être réalisable pour toute réalisation de ξ^r , $r = 1, \dots, R$ de ξ selon la matrice de recours $W(\xi^r)$. Ceci ne doit pas être vrai pour toute décision $x \in S_0 = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = b, x \geq 0\}$ de la première étape.

Le problème relaxé associé à (P_E) peut s'énoncer comme suit :

$$(P_R) \begin{cases} \min & \tilde{\Phi}(x) = \mathbf{E}(d(\xi)x) + Q(x) \\ \text{s.t} & Ax = b \\ & x \geq 0, \text{ entier}; \end{cases} \quad (6.5)$$

6.1.2 Faisabilité

Pour vérifier la faisabilité des problèmes de la deuxième étape, nous devons trouver un vecteur de direction en résolvant le problème dual du primal (6.3) d'une solution courante x^0 :

$$\max\{\sigma^T(h(\xi) - T(\xi)x^0) \mid \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1, \sigma \in \mathbb{R}\}, \quad (6.6)$$

Dans le cas où, pour certains r , $r = 1, \dots, R$ avec σ^r est la solution optimale du problème dual ; nous avons $\sigma_r^T [h(\xi) - T(\xi)x^0] > 0$ alors nous ajoutons la coupe de faisabilité

$$\sigma_r^T [h(\xi) - T(\xi)x^0] \leq 0. \quad (6.7)$$

Dans le cas contraire, la solution x^0 est admissible pour certains scénarios $r = 1, \dots, R$.

6.1.3 Optimalité

Avant de tester l'optimalité de la solution courante, on doit résoudre le problème suivant :

$$\max\{\pi^T(h(\xi) - T(\xi)x) \mid \pi^T W \leq (q(\xi))^T, \pi \in \mathbb{R}\}. \quad (6.8)$$

et évaluer la fonction Q par :

$$\mathbf{E}(Q(x^0, \xi)) = \sum_r^R \text{prob}^r Q(x^0, \xi^r) = \sum_r^R \text{prob}^r \pi_r^T (h_r - T_r x^0)$$

La résolution du problème (6.9)

$$\begin{cases} \min & \tilde{\Phi}(x) = \text{Esp}(d(\xi)x) + \theta \\ \text{s.t} & x \in D = \tilde{D} \cap \mathbb{N} \\ & \theta \geq Q(x) \\ & x; \text{entier}; \end{cases} \quad (6.9)$$

Où $\tilde{D} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b, \sigma_r^T(T(\xi^r) - h(\xi^r)) \geq 0, r = 1, \dots, R\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \tilde{A}x = \tilde{b}\}$, est un polyèdre compact non vide dans \mathbb{R}^n .

$$\theta \geq Q(x), \quad (6.10)$$

est la coupe d'optimalité.

6.2 Norme Thebycheff

Bowman [89] a utilisé une norme Tchebycheff pondérée pour la scalarisation des problèmes d'optimisation à objectifs multiples. Steuer et Choo [90] ont proposé une méthode interactive, En résolvant les programmes de la norme pondérée Tchebycheff.

Soit \tilde{Z}^{idal} dans \mathbb{R}^p le vecteur de critère idéal tel que $\tilde{Z}_k^{idal} = \min\{\tilde{Z}_k(x) \mid x \text{ dans } D\}$. Un vecteur strictement meilleur que \tilde{Z}^{idal} est appelé point utopique \tilde{Z}^{utop} ; $\tilde{Z}^{utop} < \tilde{Z}^{idal}$ ou $\tilde{Z}^{utop} = \tilde{Z}^{idal} - \vartheta$ où $\vartheta > 0$ et petit. La norme de Tchebycheff pondérée augmentée de \tilde{Z} consiste à mesurer la distance entre tout vecteur de critère \tilde{Z} et le vecteur utopique \tilde{Z}^{utop} , est définie comme suit :

$$\|\tilde{Z}^{utop} - \tilde{Z}\|_\infty^\lambda = \max_{k=1, \dots, p} \{\lambda_k |\tilde{Z}_k^{utop} - \tilde{Z}_k|\} + \rho \sum_{k=1}^p |\tilde{Z}_k^{utop} - \tilde{Z}_k|$$

où ρ est un scalaire positif suffisamment petit et λ est un vecteur des poids. Steuer (1986) a montré que si le ρ est suffisamment petit, le programme de Tchebycheff pondéré augmenté garantit non seulement le retour d'un vecteur objectif non dominé, mais génère également tout vecteur objectif non dominé particulier pour une période de temps donnée.

N'importe quel vecteur objectif non dominé pour un $\lambda \in \Lambda$. λ_k est le poids de l'objectif de conception k et satisfait à la condition suivante $\sum_{k=1}^p \lambda_k = 1$, et $\lambda_k \geq 0, k = 1, 2, \dots, p$. L'ensemble

$\Lambda = \left\{ \lambda \in \mathbb{R}^p \mid \sum_{k=1}^p \lambda_k = 1 \text{ et } \lambda_k \geq 0, \forall k \right\} \subset \mathbb{R}^p$ est l'espace des vecteurs de pondération et tout $\lambda \in \Lambda$ est appelé un vecteur de pondération.

L'idée de cette approche est de trouver un vecteur \tilde{Z} dans l'espace des critères qui minimise la distance par rapport au vecteur utopique :

$$\min_{Z \in \mathbf{Z}} \|\tilde{Z}^{utop} - \tilde{Z}\|_{\infty}^{\lambda}$$

où \mathbf{Z} est une région réalisable dans l'espace des critères.

Proposition 6.2.1. [87]

Soit $\lambda \in \Lambda$, pour un $\rho > 0$ et suffisamment petit, chaque solution optimale du problem $(P_{\rho}(\lambda))$

$$(P_{\rho}(\lambda)) \begin{cases} \min & \alpha + \rho \sum_{k=1}^p (\tilde{Z}_k^{utop} - \tilde{Z}_k) \\ \text{s.t} & \alpha \geq \lambda_k (\tilde{Z}_k^{utop} - \tilde{Z}_k) \\ & x \in D \\ & \alpha \geq 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

est non dominée pour le (MO_2) .

6.3 Description générale de l'algorithme

Initialement, la procédure détermine le vecteur utopique \tilde{Z}^{utop} , puis le problème relaxé (P_R) associé à (P_E) est résolu. Dès qu'une solution entière optimale est obtenue, nous testons si pour certaines réalisations ξ^r , $r \in 1, \dots, R$, les problèmes de la deuxième étape, générés par cette solution entière (6.6), ne sont pas réalisables. Ensuite, une coupe de faisabilité (6.7) est introduite et le problème principal est à réoptimiser pour obtenir une autre solution entière réalisable x . De plus, nous calculons $Q(x)$, afin de tester si $\theta < Q(x)$, dans le cas affirmatif une coupe d'optimalité (6.10) est ajoutée au problème courant.

Pour une valeur suffisamment petite ρ , on résout le programme de la norme augmentée de Tchebycheff $p_{\rho}(\lambda)$ afin de trouver le vecteur non dominé \tilde{Z} qui est le plus proche du point utopique \tilde{Z}^{utop} , dans la direction déterminée par \tilde{Z}^{utop} et \tilde{Z} . On obtient alors la solution optimale entière \bar{x} de $p_{\rho}(\lambda)$, des coupes de faisabilité (6.7) peuvent être ajoutées si des infaisabilités de problèmes de seconde étape apparaissent, et la valeur correspondante de θ .

Étant donné que, dans l'espace de décision, il peut arriver que la solution obtenue ne soit pas meilleure qu'une solution efficace équivalente sur la fonction objectif principale, le problème suivant doit être résolu pour trouver une solution efficace équivalente qui améliore l'objectif principal avant de réduire la région admissible actuelle.

$$(T^l) : \min\{\bar{d}x \mid x \in D, \bar{C}x + \theta = \bar{Z}\}$$

Supposons, que tous les coefficients de \bar{C} sont des entiers. La solution optimale x^{*l} de ce problème est considérée comme une première solution efficace. Ensuite, à chaque itération l , en

utilisant l'idée de Sylva et Crema, voir [44], nous ajoutons à (P_R^l) de nouvelles contraintes qui éliminent toutes les solutions dominées par x^{*l} . Ainsi, le domaine admissible est réduit. Cette tâche est réalisée par la résolution du problème suivant P_R^l .

$$P_R^l \equiv \min\{\tilde{d}x \mid x \in D - \cup_{s=1}^l D_s\} \quad (6.12)$$

où $D_s = \{x \in \mathbb{Z}^n \mid \tilde{C}x \geq \tilde{C}x^s\}$ et $\{\tilde{C}x^s\}_{s=1}^l$ et $\{x^s; s = 1, \dots, l-1\}$ sont les solutions obtenues aux itérations 1, 2, ..., $l-1$ respectivement.

$$\tilde{H} = D - \cup_{s=1}^l D_s = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{C}^k x \leq (\tilde{C}^k x^s + 1)y_k^s + M_k(1 - y_k^s), \\ k = 1, 2, \dots, p, s = 1, 2, \dots, l. \\ \sum_{k=1}^p y_k^s \geq 1, s = 1, 2, \dots, l \\ y_k^s \in \{0, 1\}, k = 1, 2, \dots, p, s = 1, 2, \dots, l \\ x \in D \end{array} \right\}$$

où M_k est une borne supérieure de la k^{th} fonction objectif.

6.3.1 Algorithme [4]

Algorithme 4: Optimisation stochastique sur le front optimal de Pareto

```

1 Entrées
2  $A_{(m \times n)}$  : matrice des contraintes déterministes
3  $b_{(m \times 1)}$  : Vecteur de second membre des contraintes déterministes ;
4  $C_{(p \times n)}$  : Matrice de critères aléatoires ;
5  $d_{(1 \times n)}$  : Vecteur du critère principal aléatoire ;  $h(m_1 \times 1)$  : Vecteur des contraintes aléatoires ;
6  $W_{(m_1 \times n_1)}$  : Matrice des contraintes aléatoires ;
7  $T(m_1 \times n)$  : Matrice des contraintes aléatoires ;
8 Sorties
9  $x_{opt}$  : solution optimale du problème  $(P_E)$ ,  $\bar{\Phi}_{opt}$  : la valeur optimale du critère principal  $\bar{\Phi}$ 
Initialisation;
10 pour  $i \leftarrow 1$ ;
11 to ;
12 p faire
13   résoudre  $\bar{Z}_k^{ideal} = \min\{\bar{C}^k x, x \in D\}$ , est le point idéal.
14   et poser la borne inférieure  $M_k = \max\{\bar{C}^k x, x \in D\}$ .
15 fin
16 où  $\vartheta = 1$  donc  $\bar{Z}^{utop} = \bar{Z}^{ideal} - 1$  ;
17  $\bar{\Phi}_{opt} := +inf$ ,  $l := 1$ ,  $E_1 := \emptyset$ ,
18  $fin := Faux$ , ;
19  $\bar{H} := D$ , ;
20  $\theta := -\infty$ ;
21 Tant que  $fin := Faux$  Faire
22   Résoudre  $P_R \equiv \min\{\bar{d}x | x \in \bar{H}\}$ . Soit  $x^l$  est solution optimale de  $P_R$ ;
23   Test d'admissibilité et d'optimalité
24   pour  $r := 1$  to  $R$  faire
25     faisabilité := Faux ; Tant que faisabilité := Faux Faire
26        $\hat{\sigma}^T$  une solution optimale du problème :
27        $\max\{\sigma^T (h(\xi) - T(\xi)x^l) | \sigma^T W \leq 0, \|\sigma\|_1 \leq 1, \sigma \geq 0\}$ 
28       coup :=  $\hat{\sigma}^T (h(\xi) - T(\xi)x^l)$ 
29       si coup > 0 alors
30          $\bar{H} = \bar{H} \cup \{\hat{\sigma}^T [h(\xi) - T(\xi)x] < 0\}$  ;
31         soit  $x^l$  une solution optimale  $R_2^l$ 
32       sinon
33         faisabilité := vrai
34       fin
35     fin;
36   fin
37   fonction de recours  $Q := 0$ ;
38   pour  $r := 1$  to  $R$  faire
39     Résoudre le problème  $\{\pi^T (h(\xi) - T(\xi)x^l) | \pi W \leq q(\xi)\}$ 
40      $Q(x) := Q(x) + prob^r \times Q(x^l, \xi^r)$ 
41   fin
42    $\theta := Q(x)$ ,
43    $(x^l, \theta)$  : solution optimale du  $P_R^l$  (après les tests de faisabilité et d'optimalité)
44 fin;
45
46
47 si Terminer := Faux or  $\bar{\Phi}(x^l) \geq \bar{\Phi}_{opt}$  alors
48    $x_{opt}$  est la solution optimale du  $P_E$ , fin =vrai.
49 sinon
50   test d'efficacité pour  $\bar{Z}^l = \bar{C}x_r^l$ ;
51   calculer le vecteur préférence  $\lambda^l$  de  $P_{\rho}(\lambda^l)$  ;
52   Soit  $(\bar{x}^l, \bar{Z}^l)$  est la solution optimal du  $P_{\rho}(\lambda^l)$ 
53   Test d'admissibilité et d'optimalité  $\bar{x}^l$ 
54   si  $\bar{d}\bar{x}^l = \bar{\Phi}_{opt}$  alors
55      $x_{opt} = \bar{x}^l$ ,  $\bar{\Phi}_{opt} = \bar{\Phi}(\bar{x}^l)$ , fin =vrai
56   sinon
57     résoudre  $T(\bar{x}^l) = \min\{\bar{d}x + \theta | x \in D, \bar{C}x + \theta = \bar{Z}^l\}$ ;
58     soit  $x^{*l}$  est la solution optimale du  $T(\bar{x}^l)$ ;
59     Test d'admissibilité et d'optimalité
60     si  $\bar{\Phi}_{opt} \leq \bar{\Phi}(x^{*l})$  alors
61        $x_{opt}$  est la solution optimale du  $P_E$ , fin =vrai
62     sinon
63        $x_{opt} := x^{*l}$ ,  $\bar{\Phi}_{opt} := \bar{\Phi}(x^{*l})$ ; soit  $\mathbf{E}_s^{l+1} = \mathbf{E}_s^l \cup x^{*l}$ ;
64        $l := l + 1$  et  $\bar{H} := D \setminus D_{s=1}^{l-1}$ ;
65     fin
66   fin
67 fin

```

Proposition 6.3.1. [4] *L'algorithme se termine en un nombre fini d'itérations.*

Preuve 6.3.1. [4] *Puisqu'il y a un nombre fini de bases réalisables provenant de la matrice de recours W , il n'y a qu'un nombre fini de coupes de faisabilité et d'optimalité. D'autre part, à chaque itération de l'algorithme, une nouvelle solution efficace améliorée est générée et la région admissible est réduite jusqu'à ce que le domaine devient vide. Toutes ces coupes supplémentaires excluent les points ou les bords une fois analysés, ce qui conduit à la convergence de la procédure en un nombre fini d'étapes.*

6.4 Exemple d'illustration

Le problème de l'optimisation sur l'ensemble efficace de la MOSILP :
Deux scénarios ($R = 2$) :

1. *Le problème principal :*

$$d(\xi^1) = (4, -10); \quad d(\xi^2) = (-6, 12);$$

Nous calculons l'espérance \tilde{d} :

$$\begin{aligned} \tilde{d} = \mathbf{E}(d(x, \xi)) &= \frac{1}{2}d(\xi^1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}d(\xi^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(4, -10) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-6, 12) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= -x_1 + x_2. \end{aligned}$$

et nous obtenons alors un problème d'optimisation de fonction linéaire sur un ensemble efficace

$$(P_E) \begin{cases} \min & \Phi(x) = -x_1 + x_2 \\ \text{s.t} & x \in \mathbf{E}_s \end{cases} \quad (6.13)$$

2. *Problème stochastique multi-objectifs :*

Considérons l'exemple suivant avec une structure similaire à celle du problème (MO_1),
 $p = 2, n_1 = 4, m_1 = m = n = 2$.

– **Matrice C :**

$$\begin{aligned} C_1(\xi^1) &= (4, -9); & C_1(\xi^2) &= (-6, 3); \\ C_2(\xi^1) &= (8, 5); & C_2(\xi^2) &= (-2, -3); \end{aligned}$$

– **Matrice T et vecteur h :**

$$\begin{aligned} T(\xi^1) &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}; & T(\xi^2) &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}; \\ h(\xi^1) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}; & h(\xi^2) &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix}; \end{aligned}$$

– **Pénalité :**

$$q(\xi^1) = (1 \ 0 \ 6 \ 2)^T; \quad q(\xi^2) = (5 \ 3 \ 2 \ 1)^T;$$

$$- \text{prob}(\xi^1) = \frac{1}{2}; \quad \text{prob}(\xi^2) = \frac{1}{2};$$

- **La matrice recours :**

$$W(\xi) = W = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & -5 & -6 \end{pmatrix};$$

Nous calculons l'espérance de chaque fonction objectif \bar{Z}_1 et \bar{Z}_2 :

$$\begin{aligned} \bar{Z}_1 = \mathbf{E}(Z_1(x, \xi)) &= \frac{1}{2}C_1(\xi^1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}C_1(\xi^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(4, -9) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-6, 3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= -x_1 - 3x_2. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{Z}_2 = \mathbf{E}(Z_2(x, \xi)) &= \frac{1}{2}C_2(\xi^1) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}C_2(\xi^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2}(8, 5) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}(-2, -3) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \\ &= 3x_1 + x_2. \end{aligned}$$

Contraintes déterministes :

$$\begin{aligned} -2x_1 + 5x_2 &\leq 23 \\ 8x_1 + x_2 &\leq 55 \\ x_1 - x_2 &\leq 4 \\ -x_1 - x_2 &\leq -6 \end{aligned}$$

Contraintes stochastiques :

$$\begin{aligned} \text{Premier scenario } \xi^1 : \quad x_1 + 2x_2 &= 3; & \text{deuxième scenario } \xi^2 \quad x_1 + 0x_2 &= 6; \\ -2x_1 + x_2 &= 5; & 3x_1 + 4x_2 &= 1; \end{aligned}$$

Nous obtenons le problème de programmation linéaire en nombres entiers déterministe à objectifs multiples suivant :

$$MO_1 \left\{ \begin{array}{l} \min \quad \bar{Z}_1 = -x_1 - 3x_2 + Q(x) \\ \min \quad \bar{Z}_2 = 3x_1 + x_2 + Q(x) \\ s.t \quad D = \begin{cases} -2x_1 + 5x_2 \leq 23 \\ 8x_1 + x_2 \leq 55 \\ x_1 - x_2 \leq 4 \\ -x_1 - x_2 \leq -6 \\ x_1, x_2 \geq 0, \text{ entier} \end{cases} \end{array} \right. \quad (6.14)$$

$$\text{Avec } Q(x) = \frac{1}{2}Q(x, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x, \xi^2).$$

le problème du deuxième étape associé aux deux scénarios $Q(x; \xi^1)$ et $Q(x; \xi^2)$ sont respectivement :

$$Q(x, \xi^1) \left\{ \begin{array}{l} \min \quad y_1 + 6y_3 + 2y_4 \\ s.t \quad -2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 3 - x_1 - 2x_2, \\ \quad \quad 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - 6y_4 = 5 + 2x_1 - x_2, \\ \quad \quad y \geq 0 \end{array} \right. \quad (6.15)$$

$$Q(x, \xi^2) \begin{cases} \min & 5y_1 + 3y_2 + 2y_3 + y_4 \\ \text{s.t} & -2y_1 - y_2 + 2y_3 + y_4 = 6 - x_1, \\ & 3y_1 + 2y_2 - 5y_3 - 6y_4 = 1 + 3x_1 - 4x_2, \\ & y \geq 0 \end{cases} \quad (6.16)$$

L'ensemble des solutions efficaces E_s du problème (MO_1) est donné dans la figure- 6.1 :
 $E_s = \{(1, 5); (2, 5); (3, 5); (4, 6); (6, 6)\}$

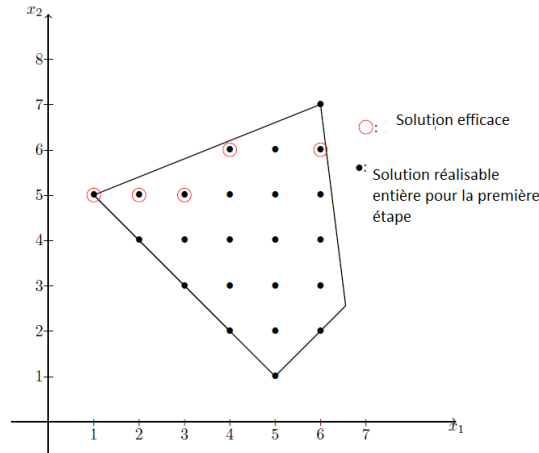


FIGURE 6.1 – Domaine d'admissibilité D^1 avec ensemble efficace.

Pour cet exemple, le paramètre ρ a été fixé à 0,001.

Initialisation

- Les bornes inférieures des fonctions objectives sont : $M_1 = -7.25$, $M_2 = 36.9855$.
- $D^1 = D$, $\theta = -\infty$; Point idéal $\bar{Z}_1^{ideal} = -15.765$; $\bar{Z}_2^{ideal} = 14$; $\bar{Z}_1^{utop} = -16.765$; $\bar{Z}_2^{utop} = 13$.
- **Étape1** : avec $\theta = -\infty$

On résout le probleme relaxé P_R sous les contraintes déterministes

$$P_R^1 \equiv \left\{ \min \Phi(x) = -x_1 + x_2 \mid x \in D \right\}, \text{ La solution optimale est } x^1 = (5, 1).$$

Pour tester la faisabilité des problèmes de seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a passé la solution $x^1 = (5, 1)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix};$$

$$\begin{array}{ll} \max & -4\sigma_1^1 + 14\sigma_1^2 \\ \text{s.t} & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{array}$$

le maximim est atteint en
 $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right)$

$\begin{aligned} \max \quad & 1\sigma_2^1 + -18\sigma_2^2 \\ \text{s.t} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	le maxim est atteint en $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
--	---

$$\sigma_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x^1] = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} -4 \\ 14 \end{pmatrix} = 2 > 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x^1] = \left(\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right) \begin{pmatrix} 1 \\ -18 \end{pmatrix} = 0$$

$\sigma_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x^1] > 0$; ceci signifie que le problème de deuxième étape n'est pas réalisable pour ξ^1 . Alors nous créons une coupe de faisabilité suivante ;

$$\left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq \left(\frac{2}{3} \quad \frac{1}{3}\right) \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} \iff 5x_1 \geq 11 ;$$

Nous rajoutons cette coupe au premier problème P_R^1 . Nous obtenons une solution optimale entière (6, 3) (voir la figure- 6.2).

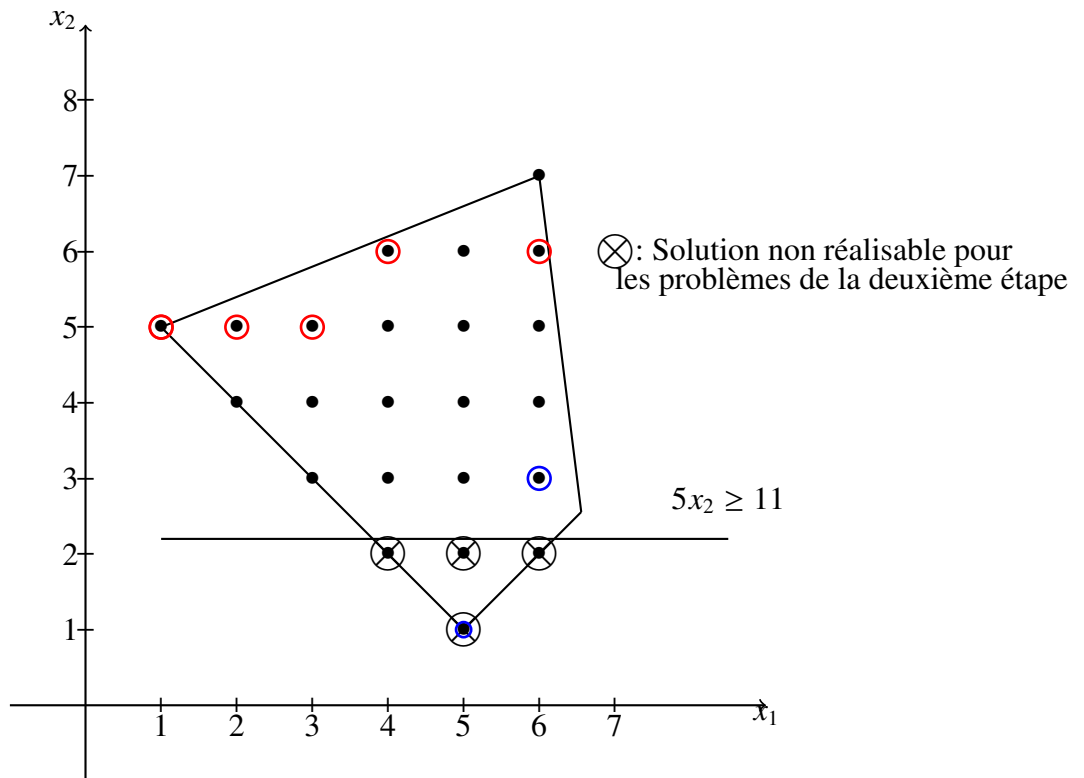


FIGURE 6.2 – Domaine d'admissibilité pour le deuxième problème

Pour tester la faisabilité des problèmes de seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a passé la solution $x^1 = (6, 3)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)(6, 3) = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)(6, 3) = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max & -9\sigma_1^1 + 14\sigma_1^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
--	---

$\begin{aligned} \max & 0\sigma_2^1 - 29\sigma_2^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	---

$$\sigma_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)(6, 3)] = (0, 0) \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \end{pmatrix} = 0$$

$$\sigma_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)(6, 3)] = (0, 0) \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \end{pmatrix} = 0$$

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ceci veut dire que la nouvelle solution $x^1 = (6, 3)$ obtenue est la solution réalisable du problème de la deuxième étape.

Pour tester l'optimalité de $x^1 = (6, 3)$ pour le problème de deuxième étape, nous résolvons les sous problèmes (6.8) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2 auxquels on a introduit la solution $x^1 = (6, 3)$).

$\begin{aligned} \max & -9\pi_1^1 + 14\pi_1^2 \\ \text{t.q} & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en</p> $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
---	--

$\begin{aligned} \max & 0\pi_2^1 - 29\pi_2^2 \\ \text{t.q} & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en</p> $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (0, -0.17)$
--	--

$$Q(x^1, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x^1] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -9 \\ 14 \end{pmatrix} = 2$$

$$Q(x^1, \xi^2) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x^1] = (0, -0.17) \begin{pmatrix} 0 \\ -29 \end{pmatrix} = 4.93$$

et,

$$Q(x^1) = \frac{1}{2}Q(x^1, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x^1, \xi^2) = \frac{1}{2}(2 + 4.93) = 3.465.$$

$\theta = -\infty < Q(x^1)$, nous introduisons la coupe d'optimalité de la forme $\theta > \sum_{r=1}^R p^r [h(\xi_r) - T(\xi_r)x]$: en ajoutant cette coupe $\theta \geq 2.835 + 0.255x_1 + 1.593x_2$, et nous réoptimisons le problème précédent P_R^1 .

$\theta = 15.315$, d'où $x^1 = (6, 3)$ est une solution réalisable et optimale.

Soit $\tilde{Z}^1(x^1) = (-15, 21) + 3.465 = (-11.535, 24.465)$, $\tilde{\Phi}(6, 3) = -3 + \theta = -0.465$

$\tilde{\Phi}(6, 3) < \tilde{\Phi}_{opt}$. Nous calculons le vecteur de préférence λ^1 associé à \tilde{Z}^1 :

$$\lambda_1^1 = \frac{1}{-16.765 - (-11.535)} \left[\frac{1}{(-16.765) - (-11.535)} + \frac{1}{(13) - (24.465)} \right]^{-1}.$$

$$\lambda_2^1 = \frac{1}{(13) - (24.465)} \left[\frac{1}{(-16.765) - (-11.535)} + \frac{1}{(13) - (24.465)} \right]^{-1}.$$

$$\lambda^1 = (0.686, 0.314).$$

– **Étape 2** : On résout le programme Tchebycheff généralisé ($P_\rho(\lambda^1)$), définit comme suit :

$$(P_\rho(\lambda^1)) \begin{cases} \min & \alpha + 0.001(-3.7765 - 2x_1 + 2x_2) \\ \text{s.t} & \alpha \geq 0.686(-16.765 + x_1 + 3x_2) \\ & \alpha \geq 0.313(13 - 3x_1 - x_2) \\ & x \in D \end{cases} \quad (6.17)$$

Alors $\bar{x}^1 = (2, 5)$ est une solution optimale entière du problème ($P_\rho(\lambda^1)$).

Pour tester la faisabilité des problèmes de la seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a introduit la solution $\bar{x}^1 = (2, 5)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)\bar{x}^1 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max & -9\sigma_1^1 + 4\sigma_1^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	le maximim est atteint en $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
---	---

$\begin{aligned} \max & 4\sigma_2^1 - 25\sigma_2^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	le maximim est atteint en $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	---

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ceci veut dire que la nouvelle solution $\bar{x}^1 = (2, 5)$ obtenue est la solution réalisable de problème de la deuxième étape.

Pour tester l'optimalité de $\bar{x}^1 = (2, 5)$ pour le problème de la deuxième étape, nous résolvons les sous problèmes (6.8) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2 auxquels on a introduit

la solution $\bar{x}^1 = (2, 5)$.

$\begin{aligned} \max \quad & -9\pi_1^1 + 4\pi_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
--	--

$\begin{aligned} \max \quad & 4\pi_2^1 - 25\pi_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (0, -0.17)$
--	--

$$Q(\bar{x}^1, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)\bar{x}^1] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -9 \\ 4 \end{pmatrix} = 7$$

$$Q(\bar{x}^1, \xi^2) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)\bar{x}^1] = (0, -0.17) \begin{pmatrix} 4 \\ -25 \end{pmatrix} = 4.25$$

et,

$$Q(\bar{x}^1) = \frac{1}{2}Q(\bar{x}^1, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(\bar{x}^1, \xi^2) = 5.625.$$

$\theta = Q(x)$, alors $\bar{x}^1 = (2, 5)$ est une solution optimale entière du problème $(P_\rho(\lambda^1))$.

La solution $\tilde{Z}^1(\bar{x}^1) = (-17, 11) + 5.625 = (-11.375, 16.625)$ est un point non dominé avec une distance pondérée de tchebycheff minimal, nous obtenons $\bar{x}^1 = (2, 5)$ et $\tilde{\Phi}(2, 5) = 3 + 5.625 = 8.625$.

– **Étape 3 :**

Test d'équivalence :

$$(T^1) \begin{cases} \min & \Phi(x) = -x_1 + x_2 + \theta \\ \text{s.t} & x_1, x_2 \in D \\ & -x_1 - 3x_2 + \theta = -11.375 \\ & 3x_1 + 1x_2 + \theta = 16.625 \end{cases} \quad (6.18)$$

La résolution du problème donne la solution $x^{*1} = x^1 = (2, 5)$ avec $\theta = 5.625$

$$\tilde{\Phi}(x^{*1}) = 8.625 < \tilde{\Phi}_{opt}$$

$$x_{opt} := x^{*1}, \tilde{\Phi}_{opt} := \tilde{d}x^{*1}, \text{ et soit } E_s^1 = \{(2, 5)\}$$

On réduit donc le domaine d'admissibilité en rajoutant les coupes de Sylva et Crema et on passe à l'étape suivante :

$l := l + 1 = 2$ on résout le problème P_R^2

Iteration 2 :

– Étape 1 :

$$(P_R^2) \begin{cases} \min & \tilde{\Phi}(x) = -x_1 + x_2 + \theta \\ \text{s.t} & x_1, x_2 \in \tilde{H} \\ & -x_1 - 3x_2 + \theta \leq (-11.375 + 1)y_1^1 - 7.25(1 - y_1^1) \\ & 3x_1 + x_2 + \theta \leq (16.625 + 1)y_2^1 + 36.985(1 - y_2^1) \\ & y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (6.19)$$

la solution optimale obtenue est $x^2 = (6, 4)$, avec $y^1 = (1, 0)$,

Pour tester la faisabilité des problèmes de la seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a introduit la solution $x^2 = (6, 4)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -33 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max & -11\sigma_1^1 + 13\sigma_1^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$</p>
---	--

$\begin{aligned} \max & 0\sigma_2^1 - 33\sigma_2^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$</p>
---	--

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ceci veut dire que la nouvelle solution $x^1 = (6, 3)$ obtenue est la solution réalisable du problème de la deuxième étape.

Pour tester l'optimalité de $x^1 = (6, 4)$ pour le problème de la deuxième étape, nous résolvons les sous problèmes (6.8) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2 auxquels on a introduit la solution $x^1 = (6, 4)$).

$\begin{aligned} \max & -11\pi_1^1 + 13\pi_1^2 \\ \text{t.q} & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en : $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$</p>
--	---

$\begin{aligned} \max & 0\pi_2^1 - 33\pi_2^2 \\ \text{t.q} & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en : $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (0, -0.17)$</p>
--	---

$$Q(x^2, \xi^2) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x^2] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -11 \\ 13 \end{pmatrix} = 4.5$$

$$Q(x^2, \xi^1) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x^2] = (0, -0.17) \begin{pmatrix} 0 \\ -33 \end{pmatrix} = 5.2$$

et,

$$Q(x^2) = \frac{1}{2}Q(x^2, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x^2, \xi^2) = 5.1.$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^2 = (6, 4)$ est une solution réalisable et optimale entière du problème (P_R^2) .

$$\text{soit } \tilde{Z}^2(x^2) = (-18, 22) + 5.1 = (-12.9, 27.3), \tilde{\Phi}(6, 4) = -2 + \theta = 3.1$$

$\tilde{\Phi}(6, 4) < \tilde{\Phi}_{opt}$. Nous calculons le vecteur de préférence λ^2 associé à \tilde{Z}^2 :

$$\lambda^2 = (0.782, 0.218).$$

– **Étape 2** : On résout le programme Tchebycheff généralisé $(P_\rho(\lambda^2))$, définit comme suit :

$$(P_\rho(\lambda^2)) \begin{cases} \min & \alpha + 0.001(-3.7765 - 2x_1 + 2x_2) \\ \text{s.t} & \alpha \geq 0.782(-16.765 + x_1 + 3x_2) \\ & \alpha \geq 0.218(13 - 3x_1 - x_2) \\ & x \in D \end{cases} \quad (6.20)$$

Alors $\bar{x}^2 = (3, 5)$ est une solution optimale entières du problème $(P_\rho(\lambda^2))$.

Pour tester la faisabilité des problèmes de la seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a intoduit la solution $\bar{x}^2 = (3, 5)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)\bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)\bar{x}^2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -28 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max & -10\sigma_1^1 + 6\sigma_1^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$</p>
--	--

$\begin{aligned} \max & 3\sigma_2^1 - 28\sigma_2^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$</p>
---	--

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ceci veut dire que la nouvelle solution $\bar{x}^2 = (3, 5)$ obtenue est la solution réalisable du problème de la deuxième étape.

Pour tester l'optimalité de $\bar{x}^2 = (3, 5)$ pour le problème de la deuxième étape, nous résolvons les sous problèmes (6.8) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2 auxquels on a introduit la solution $\bar{x}^2 = (3, 5)$).

$\begin{aligned} \max \quad & -10\pi_1^1 + 6\pi_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">maximum is at :</p> $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
---	--

$\begin{aligned} \max \quad & 3\pi_2^1 - 28\pi_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p style="text-align: center;">maximum is at :</p> $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (0, -0.17)$
--	--

$$Q(\bar{x}^2, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)\bar{x}^2] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -10 \\ 6 \end{pmatrix} = 7$$

$$Q(\bar{x}^2, \xi^2) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)\bar{x}^2] = (0, -0.17) \begin{pmatrix} 3 \\ -28 \end{pmatrix} = 4.76$$

et,

$$Q(\bar{x}^2) = \frac{1}{2}Q(\bar{x}^2, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(\bar{x}^2, \xi^2) = 5.88.$$

$\theta = Q(x)$, alors $\bar{x}^2 = (3, 5)$ est une solution optimale entière du problème $(P_\rho(\lambda^2))$.

La solution $\widetilde{Z}^2(\bar{x}^2) = (-18, 14) + 5.88 = (-13.88, 19.88)$ est un point non dominé avec une distance pondérée de tchebycheff minimal, nous obtenons $\bar{x}^2 = (3, 5)$ et $\widetilde{\Phi}(3, 5) = 2 + 5.88 = 7.88$.

– **Étape 3 :**

Test d'équivalence :

$$(T^2) \begin{cases} \min & \Phi(x) = -x_1 + x_2 + \theta \\ \text{s.t} & x_1, x_2 \in D \\ & -x_1 - 3x_2 + \theta = -13.88 \\ & 3x_1 + 1x_2 + \theta = 19.88 \end{cases} \quad (6.21)$$

La résolution du problème donne la solution $x^{*2} = x^2 = (3, 5)$ avec $\theta = 5.88$

$$\widetilde{\Phi}(x^{*2}) = 7.88 < \widetilde{\Phi}_{opt}$$

$$x_{opt} := x^{*2}, \widetilde{\Phi}_{opt} := \widetilde{d}x^{*2}, \text{ et soit } E_s^2 = \{(2, 5), (3, 5)\}$$

On réduit donc le domaine d'admissibilité en rajoutant les coupes de Sylva et Crema et on passe à l'étape suivante :

$l := l + 2 = 3$ on résout le problème (P_R^3)

Iteration 3 :

– Étape 1 :

$$(P_R^3) \begin{cases} \min & \tilde{\Phi}(x) = -x_1 + x_2 + \theta \\ \text{s.t} & x_1, x_2 \in \tilde{H} \\ & -x_1 - 3x_2 + \theta \leq (-13.88 + 1)y_1^1 - 7.25(1 - y_1^1) \\ & 3x_1 + x_2 + \theta \leq (19.88 + 1)y_2^1 + 36.985(1 - y_2^1) \\ & y_1^1 + y_2^1 \geq 1, \quad y_1^1, y_2^1 \in \{0, 1\} \end{cases} \quad (6.22)$$

la solution optimale obtenue $x^3 = (6, 5)$, avec $y^1 = (1, 0)$.

Pour tester la faisabilité des problèmes de la seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a introduit la solution $x^3 = (6, 5)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)x^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)x^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -37 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max & -11\sigma_1^1 + 13\sigma_1^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	le maximim est atteint en $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
---	---

$\begin{aligned} \max & 0\sigma_2^1 - 33\sigma_2^2 \\ \text{t.q} & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	le maximim est atteint en $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	---

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ceci veut dire que la nouvelle solution $x^3 = (6, 5)$ obtenue est la solution réalisable du problème de la deuxième étape.

Pour tester l'optimalité de $x^3 = (6, 5)$ pour le problème de la deuxième étape, nous résolvons les sous problèmes (6.8) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2 auxquels on a introduit la solution $x^3 = (6, 5)$).

$\begin{aligned} \max & -13\pi_1^1 + 12\pi_1^2 \\ \text{t.q} & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	le maximim est atteint en : $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
--	--

$\begin{aligned} \max \quad & 0\pi_2^1 - 38\pi_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (0, -0.17)$
--	--

$$Q(x^3, \xi^2) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)x^3] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -13 \\ 12 \end{pmatrix} = 7$$

$$Q(x^3, \xi^1) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)x^3] = (0, -0.17) \begin{pmatrix} 0 \\ -38 \end{pmatrix} = 6.46$$

et,

$$Q(x^3) = \frac{1}{2}Q(x^3, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(x^3, \xi^2) = 6.73.$$

$\theta = Q(x)$, alors $x^3 = (6, 5)$ est une solution réalisable et optimale entière du problème (P_R^3) .

$$\text{soit } \tilde{Z}^3(x^3) = (-21, 23) + 6.73 = (-14.27, 29.73), \tilde{\Phi}(6, 5) = -2 + \theta = 4.73$$

$\tilde{\Phi}(6, 5) < \tilde{\Phi}_{opt}$. Nous calculons le vecteur de préférence λ^3 associé à \tilde{Z}^3 :

$$\lambda^3 = (0.87, 0.13).$$

– **Étape 2** : On résout le programme Tchebycheff généralisé $(P_\rho(\lambda^3))$, définit comme suit :

$$(P_\rho(\lambda^3)) \begin{cases} \min & \alpha + 0.001(-3.7765 - 2x_1 + 2x_2) \\ \text{s.t} & \alpha \geq 0.87(-16.765 + x_1 + 3x_2) \\ & \alpha \geq 0.13(13 - 3x_1 - x_2) \\ & x \in D \end{cases} \quad (6.23)$$

Alors $\bar{x}^3 = (4, 6)$ est une solution optimale entière du problème $(P_\rho(\lambda^3))$.

Pour tester la faisabilité des problèmes de la seconde étape (6.15) et (6.16), nous résolvons les sous problèmes (6.6)(correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2) auxquels on a introduit la solution $\bar{x}^3 = (4, 6)$:

$$h(\xi^1) - T(\xi^1)\bar{x}^3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \end{pmatrix};$$

$$h(\xi^2) - T(\xi^2)\bar{x}^3 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \end{pmatrix};$$

$\begin{aligned} \max \quad & -13\sigma_1^1 + 7\sigma_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_1^1 + 3\sigma_1^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_1^1 + 2\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_1^1 - 5\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 - 6\sigma_1^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_1^1 + 1\sigma_1^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en</p> $\sigma_1^T = (\sigma_1^1, \sigma_1^2) = (0, 0)$
--	---

$\begin{aligned} \max \quad & 2\sigma_2^1 - 35\sigma_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\sigma_2^1 + 3\sigma_2^2 \leq 0, \\ & -1\sigma_2^1 + 2\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 2\sigma_2^1 - 5\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 - 6\sigma_2^2 \leq 0, \\ & 1\sigma_2^1 + 1\sigma_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en</p> $\sigma_2^T = (\sigma_2^1, \sigma_2^2) = (0, 0)$
---	---

$\sigma_1 = \sigma_2 = 0$, ceci veut dire que la nouvelle solution $x^1 = (6, 3)$ obtenue est la solution réalisable du problème de la deuxième étape.

Pour tester l'optimalité de $\bar{x}^3 = (4, 6)$ pour le problème de la deuxième étape, nous résolvons les sous problèmes (6.8) (correspondant aux scénarios ξ^1 et ξ^2 auxquels on a introduit la solution $\bar{x}^3 = (4, 6)$).

$\begin{aligned} \max \quad & -13\pi_1^1 + 7\pi_1^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_1^1 + 3\pi_1^2 \leq 1, \\ & -1\pi_1^1 + 2\pi_1^2 \leq 0, \\ & 2\pi_1^1 - 5\pi_1^2 \leq 6, \\ & 1\pi_1^1 - 6\pi_1^2 \leq 2, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\pi_1^T = (\pi_1^1, \pi_1^2) = (-1, -\frac{1}{2})$
---	--

$\begin{aligned} \max \quad & 2\pi_2^1 - 35\pi_2^2 \\ \text{t.q} \quad & -2\pi_2^1 + 3\pi_2^2 \leq 5, \\ & -1\pi_2^1 + 2\pi_2^2 \leq 3, \\ & 2\pi_2^1 - 5\pi_2^2 \leq 2, \\ & 1\pi_2^1 - 6\pi_2^2 \leq 1, \end{aligned}$	<p>le maximim est atteint en :</p> $\pi_2^T = (\pi_2^1, \pi_2^2) = (0, -0.17)$
--	--

$$Q(\bar{x}^3, \xi^1) = \pi_1^T [h(\xi^1) - T(\xi^1)\bar{x}^3] = (-1, -\frac{1}{2}) \begin{pmatrix} -13 \\ 7 \end{pmatrix} = 9.5$$

$$Q(\bar{x}^3, \xi^2) = \pi_2^T [h(\xi^2) - T(\xi^2)\bar{x}^3] = (0, -0.17) \begin{pmatrix} 2 \\ -35 \end{pmatrix} = 5.95$$

et,

$$Q(\bar{x}^3) = \frac{1}{2}Q(\bar{x}^3, \xi^1) + \frac{1}{2}Q(\bar{x}^3, \xi^2) = 7.725.$$

$\theta = Q(x)$, alors $\bar{x}^3 = (4, 6)$ est une solution optimale entière du problème $(P_\rho(\lambda^3))$.

La solution $\tilde{Z}^3(\bar{x}^3) = (-22, 18) + 5.88 = (-14.275, 25.725)$ est un point non dominé avec une distance pondérée de tchebycheff minimal, nous obtenons $\bar{x}^3 = (4, 6)$ et $\tilde{\Phi}(4, 6) = 2 + 7.725 = 9.725$.

– **Étape 3** : Test d'équivalence :

$$(T^3) \begin{cases} \min & \Phi(x) = -x_1 + x_2 + \theta \\ \text{s.t} & x_1, x_2 \in D \\ & -x_1 - 3x_2 + \theta = -14.275 \\ & 3x_1 + 1x_2 + \theta = 25.725 \end{cases} \quad (6.24)$$

La résolution du problème (T^3) donne la solution optimale $x^{*3} = x^3 = (4, 6)$ avec $\theta = 7.725$

$$\tilde{\Phi}(x^{*3}) = 9.725 > \tilde{\Phi}_{opt} = 7.88.$$

$x_{opt} = x^{*2} = (3, 5)$, $\tilde{\Phi}_{opt} = 7.88$ est la solution optimale du problème (P_E).

Les itérations restantes (pour $l > 2$) sont résumées dans le Tableau (6.1) et représentées dans la figure-(6.3)

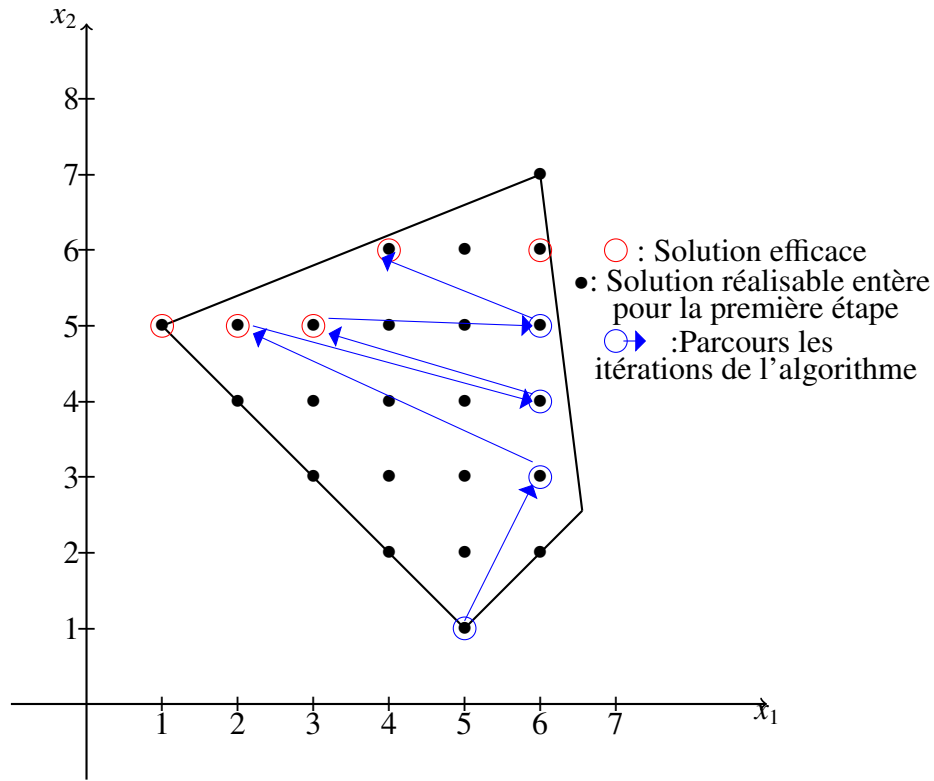


FIGURE 6.3 – l'ensemble d'itérations

l	P_{Rst}^l x^l Z^l	la faisabilité et l'optimalité de x^l σ, θ x_T^l, \tilde{Z}^l	$P_\rho(\lambda^l)$ \bar{x}^l, θ \tilde{Z}^l	Γ_l	$T(\bar{x}^l)$ x^{*l}, θ \tilde{Z}^{*l}	(x_{opt}) $\tilde{\Phi}_{opt}$
1	$x^1 = (5, 1)$	non réalisable	/	/	/	/
	$(6, 3)$ $Z^1 = (-15, 21)$	$\sigma = (0, 0), \theta = 3.465$ $(6, 3), (-11.535, 24.461)$	$(2, 5), \theta = 5.625$ $(-12.625, 16.625)$	\emptyset	$(2, 5), \theta = 5.625$ $(-12.625, 16.625)$	$(2, 5)$ 8.625
2	$x^2 = (6, 4)$ $Z^2 = (-18, 22)$	$\sigma = (0, 0), \theta = 5.2$ $(6, 4), (-12.8, 27.2)$	$(3, 5), \theta = 5.88$ $(-13.88, 21.88)$	\emptyset	$(3, 5), \theta = 5.88$ $(-13.88, 21.88)$	$(3, 5)$ 7.88
3	$x^3 = (6, 5)$ $Z^3 = (-21, 23)$	$\sigma = (0, 0), \theta = 5.88$ $(6, 5), (-14.365, 29.645)$	$(4, 6), \theta = 7.725$ $(-14.365, 25.725)$	\emptyset	$(4, 6), \theta = 7.725$ $(-14.365, 25.725)$	$(3, 5)$ 7.88

TABLE 6.1 – Les itérations avec leur résultat obtenu

Cependant, notre algorithme optimise la fonction linéaire $\tilde{\Phi}$ sans avoir déterminé toutes ces solutions mais seulement $\mathbf{E}_1 = \{(2, 5), (3, 5), (4, 6)\}$.

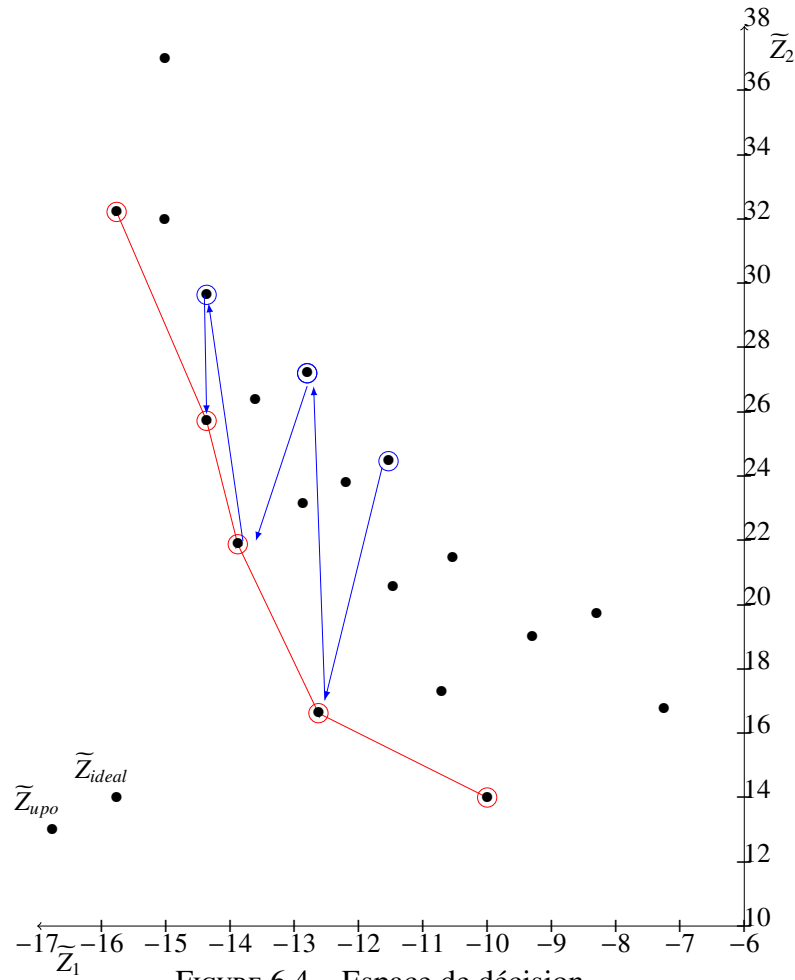


FIGURE 6.4 – Espace de décision.

6.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons présenté une nouvelle méthode pour le problème d'optimisation sur l'ensemble efficace entier d'un programme multi-objectifs stochastique basé sur le programme de Tchebycheff pondéré augmenté. Les données stochastiques sont traitées par approche de recours pour obtenir un programme déterministe équivalent. Nous atteignons cet objectif en combinant deux idées : l'une consiste à résoudre le programme de Tchebycheff pondéré augmenté dans l'espace des critères de résultat pour caractériser le vecteur de critères non dominés ; puis en ajoutant des coupes successives de Gomory, si nécessaire, nous obtenons une solution faisable entière et les coupes de faisabilité éliminent certaines parties de l'ensemble de décision de la première étape. Et la deuxième idée est de réduire progressivement le domaine admissible en ajoutant plus de contraintes éliminant tous les points dominés par la solution courante.

Conclusion générale et perspectives

Dans la classe des problèmes déterministes, toute information est complètement définie. Par contre dans notre travail, l'information comporte des éléments indéterminés c'est-à-dire certains paramètres sont aléatoires mais définis par des caractéristiques probabilistes connues. Ce qui nous a conduits à l'étude du problème d'optimisation stochastique à objectifs multiples.

Nous avons considéré premièrement l'étude sur un problème de programmation fractionnaire linéaire stochastique à valeur intervalle. Dans ce problème, les coefficients et les scalaires de la fonction objectif sont des intervalles fractionnaires, et les quantités du côté droit des contraintes sont des variables aléatoires avec une distribution spécifique.

Comme dans beaucoup de cas pratiques, le décideur se trouve face à un grand nombre de solutions efficaces dont la sélection de ses préférences s'avère difficile, nous avons abordés le problème de l'optimisation d'un critère sur le front de Pareto d'un problème multi-objectifs stochastique qui s'inscrit dans l'optique de l'optimisation globale, elle concerne la recherche de la meilleure solution parmi les solutions efficaces d'un problème d'optimisation multi-objectifs stochastique en variable discrète MOSILP. Nous avons pu minimiser une fonction à coefficient aléatoire sur l'ensemble efficient d'un problème MOSILP, Ceci a été possible grâce à la norme de Tchebycheff renforcé par une coupe de faisabilité, une coupe d'optimalité, et des tests permettant ainsi de réduire le domaine d'admissibilité. Pour illustrer la pertinence de cette méthode, nous avons traité un exemple numérique.

Notre thèse est principalement focalisée sur les problèmes stochastiques multi-objectifs en nombres entiers et le travail s'articule autour de deux volets :

- Le premier volet consiste à résoudre un problème stochastique multi-objectifs fractionnaire à valeur intervalle en variables discrètes. Dans ce problème, les coefficients et les scalaires des fonctions objectifs numérateurs et dénominateurs sont des intervalles, et les quantités du côté droit des contraintes sont des variables aléatoires avec une distribution log-normale. Ce travail a fait l'objet d'une première publication dans la revue Asian-European Journal of Mathematics [8]
- Le deuxième volet consiste à optimiser un critère stochastique sur l'ensemble des solutions efficaces d'un programme stochastique multi-objectifs en nombres entiers avec introduction des tests de faisabilité et d'optimalité ainsi que le principe de la norme de Tchebycheff. Cette méthode a fait l'objet d'une deuxième publication dans la revue Journal Computational Technologies [4].

Toutefois, nous entrevoyons quelques perspectives intéressantes pour faire avancer les débats dans ce domaine. Il serait intéressant :

- 1) L'application des méthodes proposées sur des problèmes réels peut être un axe de recherche pratique intéressant.
- 2) Le problème d'optimisation d'un critère fractionnaire stochastique sur l'ensemble efficace d'un problème multi-objectifs à valeurs intervalles est ouvert.

Bibliographie

- [1] M. Abbas and M. Moulaï. Integer linear fractional programming with multiple objective. *Journal of the Italian Operations Research Society*, 32(103-104) :15–38, 2002.
- [2] M.E.A. Chergui and M. Moulaï. An exact method for a discrete multiobjective linear fractional optimization. *Journal of Applied Mathematics & Decision Sciences*, 2008(1), 2008.
- [3] Y. Yamamoto. Optimization over the efficient set : overview. *Journal of Global Optimization*, 22(1) :285–317, 2002.
- [4] L. Younsi-Abbaci and M. moulaï. Stochastic optimization over the pareto front by the augmented weighted tchebychev program. *Journal Computational Technologies*, 26(3) :86–106, 2021.
- [5] R.S. Kaplan and J.V. Soden. On the objective function for the sequential p-model of chance-constrained programming. *Operations Research*, 19(1) :105–114, 1971.
- [6] S. Kataoka. On stochastic programming ii. a preliminary study of a stochastic programming model. *Hitotsubashi J. Arts Sci*, 2 :36–44, 1962.
- [7] J.P. Leclercq. Stochastic programming : an interactive multicriteria approach. *European Journal of Operational Research*, 10(1) :33–41, 1982.
- [8] L. Younsi-Abbaci and M. moulaï. Solving the multi-objective stochastic interval-valued linear fractional integer programming problem. *Asian-European Journal of Mathematics*, doi.org/10.1142/S179355712250022X 2021.
- [9] J.E. Falk and S.W. Palocsay. Optimizing the sum of linear fractional functions. In *Recent advances in global optimization*, pages 221–258. Princeton University Press, 2014.
- [10] R.W. Freund and F. Jarre. Solving the sum-of-ratios problem by an interior-point method. *Journal of Global Optimization*, 19(1) :83–102, 2001.
- [11] W. Dinkelbach. On nonlinear fractional programming. *Management science*, 13(7) :492–498, 1967.
- [12] T. Radzik. Fractional combinatorial optimization. In *Handbook of combinatorial optimization*, pages 429–478. Springer, 1998.
- [13] S. Schaible. Fractional programming. In *Handbook of global optimization*, pages 495–608. Springer, 1995.
- [14] B. Bereanu. Decision regions and minimum risk solutions in linear programming. In *Colloquium on applications of mathematics to economics, Budapest*, pages 37–42, 1963.
- [15] E.U. Choo. Proper efficiency and the linear fractional vector maximum problem. *Operations Research*, 32(1) :216–220, 1984.
- [16] R.E. Steuer. Multiple criteria optimization. *Theory, computation and applications*, 1986.
- [17] G.R. Bitran and A.G. Novaes. Linear programming with a fractional objective function. *Operations Research*, 21(1) :22–29, 1973.

- [18] D Granot and F Granot. On integer and mixed integer fractional programming problems. *Studies in Integer Programming*, 1 :221–231, 1977.
- [19] M. Grunspan and M.E. Thomas. Fractional programming : A survey. Technical report, Florira Univ Gainesville Dept Of Industrial And Systems Engineering, 1971.
- [20] A. Cambini and L. Martein. A modified version of martos' algorithm. *Methods of Operation Research*, 53 :33–44, 1986.
- [21] M. Abbas and M. Moulai. Penalties method for integer linear fractional programs. *JORBEL-Belgian Journal of Operations Research, Statistics, and Computer Science*, 37(4) :41–51, 1997.
- [22] M. Abbas and M. Moulai. An algorithm for mixed integer linear fractional programming problems. *JORBEL-Belgian Journal of Operations Research, Statistics, and Computer Science*, 39(1) :21–30, 1999.
- [23] B. Martos. Hyperbolic programming. Technical report, Carnegie Inst of Tech Pittsburgh pa Graduate School Of Industrial Administration, 1964.
- [24] S. Chandra and M. Chandramohan. A branch and bound method for integer nonlinear fractional programs. *Zamm-zeitschrift Fur Angewandte Mathematik Und Mechanik*, 60 :735–737, 1980.
- [25] R.E. Gomory. Outline of an algorithm for integer solutions to linear programs and an algorithm for the mixed integer problem. In *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, pages 77–103. Springer, 2010.
- [26] G. Dantzig. *Linear programming and extensions*. Princeton university press, 2016.
- [27] A.H. Landand A.G. Doig. An automatic method for solving discrete programming problems. In *50 Years of Integer Programming 1958-2008*, pages 105–132. Springer, 2010.
- [28] J.R. Isbell and W.H. Marlow. Attrition games. *Naval Research Logistics Quarterly*, 3(1-2) :71–94, 1956.
- [29] C.R. Seshan and V.G. Tikekar. Algorithms for integer fractional programming. *Journal of the Indian Institute of Science*, 62(2) :9, 1980.
- [30] A. Nagih and G. Plateau. Problèmes fractionnaires : tour d'horizon sur les applications et méthodes de résolution. *RAIRO-Operations Research-Recherche Opérationnelle*, 33(4) :383–419, 1999.
- [31] A. Charnes and W.W. Cooper. Programming with linear fractional functionals. *Naval Research logistics quarterly*, 9(3-4) :181–186, 1962.
- [32] V. Pareto. The new theories of economics. *Journal of political economy*, 5(4) :485–502, 1897.
- [33] A.M. Geoffrion. Proper efficiency and the theory of vector maximization. *Journal of mathematical analysis and applications*, 22(3) :618–630, 1968.
- [34] P.L. Yu. Cone convexity, cone extreme points, and nondominated solutions in decision problems with multiobjectives. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 14(3) :319–377, 1974.
- [35] A. Charnes and W.W. Cooper. Management models and industrial applications of linear programming. *Management science*, 4(1) :38–91, 1957.
- [36] Y. Ijiri. *Management goals and accounting for control*, volume 3. North Holland Publishing Company, 1965.

- [37] J.P. Ignizio. Goal programming and its extensions. *DC Heath, Lexington, MA*, 1976.
- [38] C. Blum and A. Roli. Metaheuristics in combinatorial optimization : Overview and conceptual comparison. *computing surveys (CSUR)*, 35(3) :268–308, 2003.
- [39] S. Agarwal K. Deb, A. Pratap and T. Meyarivan. A fast and elitist multiobjective genetic algorithm : Nsga-ii. *transactions on evolutionary computation*, 6(2) :182–197, 2002.
- [40] M. Laumanns E. Zitzler and L. Thiele. Spea2 : Improving the strength pareto evolutionary algorithm. *TIK-report*, 103, 2001.
- [41] G.B. Lamont C.A.C. Coello and D.A. Van Veldhuizen. *Evolutionary algorithms for solving multi-objective problems*, volume 5. Springer, 2007.
- [42] R. Tewari K. Deb, R.E. Steuer and R. Tewari. Bi-objective portfolio optimization using a customized hybrid nsga-ii procedure. In *International Conference on Evolutionary Multi-Criterion Optimization*, pages 358–373. Springer, 2011.
- [43] D. Klein and E. Hannan. An algorithm for multiple objective integer linear programming problem. *European Journal of Operational Research*, 9 :378–385, 1982.
- [44] J. Sylva and A. Crema. A method for finding well-dispersed subsets of non-dominated vectors for multiple objective mixed integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, 180 :1011–1027, 2007.
- [45] A. Schrijver. *Theory of linear and integer programming*. John Wiley & Sons, 1998.
- [46] J.P. Costa. Computing non-dominated solutions in molfp. *European Journal of Operational Research*, 181(3) :1464–1475, 2007.
- [47] J.SH. Kornbluth and R.E Steuer. Multiple objective linear fractional programming. *Management Science*, 27(9) :1024–1039, 1981.
- [48] M.E.A. Chergui M. Mehdi and M. Abbas. An improved method for solving multiobjective integer linear fractional programming problem. *Advances in Decision Sciences*, 2014, 2014.
- [49] M.Abbas and M. Moulai. Solving multiple objective integer linear programming. *Ricerca Operativa*, pages 15–38, 1999.
- [50] N.V. Sahinidis. Optimization under uncertainty : state-of-the-art and opportunities. *Computers & Chemical Engineering*, 28(6-7) :971–983, 2004.
- [51] J.R. Birge. State-of-the-art-survey stochastic programming : Computation and applications. *INFORMS journal on computing*, 9(2) :111–133, 1997.
- [52] W.K.K. Haneveld and M.H Van Der Vlerk. Stochastic integer programming : General models and algorithms. *Annals of operations research*, 85 :39, 1999.
- [53] J.R. Birge and F. Louveaux. *Introduction to stochastic programming*. Springer Science & Business Media, 2011.
- [54] P. Kall and S.W. Wallace. *Stochastic programming*. Springer, 1994.
- [55] R.M. Van Slyke and R. Wets. L-shaped linear programs with applications to optimal control and stochastic programming. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 17(4) :638–663, 1969.
- [56] J.F. Benders. Partitioning procedures for solving mixed-variables programming problems ‘. *Numerische mathematik*, 4(1) :238–252, 1962.
- [57] W.W. Cooper A. Charnes and G.H. Symonds. Cost horizons and certainty equivalents : an approach to stochastic programming of heating oil. *Management science*, 4(3) :235–263, 1958.

- [58] M. Thauvoye J. Teghem, D. Dufrane and P. Kunsch. Strange : an interactive method for multi-objective linear programming under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 26(1) :65–82, 1986.
- [59] B. Urli and N.R. Nadeau. Multiobjective stochastic linear programming with incomplete information : a general methodology. In *Stochastic versus fuzzy approaches to multiobjective mathematical programming under uncertainty*, pages 131–161. Springer, 1990.
- [60] J. Teghem. “strange” : An interactive method for multiobjective stochastic linear programming, and “strange-momix” its extension to integer variables. In *Stochastic Versus Fuzzy Approaches to Multiobjective Mathematical Programming under Uncertainty*, pages 103–115. Springer, 1990.
- [61] S. Amrouche and M. Moulai. Multi-objective stochastic integer linear programming with fixed recourse. *International Journal of Multicriteria Decision Making* 9, 2(4) :355–378, 2012.
- [62] M. Abbas and F. Bellahcene. Cutting plane method for multiple objective stochastic integer linear programming. *European Journal of operational research*, 168(3) :967–984, 2006.
- [63] P. Lang F.Ben Abdelaziz and R. Nadeau. Pointwise efficiency in multiobjective stochastic linear programming. *Journal of the Operational Research Society*, 45(11) :1324–1334, 1994.
- [64] P. Lang F.Ben Abdelaziz and R. Nadeau. Distributional efficiency in multiobjective stochastic linear programming. *European Journal of Operational Research*, 85(2) :399–415, 1995.
- [65] M.M. Munoz L. Reyand I.M. Stancu-Minasian R. Caballero, E. Cerdá. Efficient solution concepts and their relations in stochastic multiobjective programming. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 110(1) :53–74, 2001.
- [66] R. Slowinski and J. Teghem. Fuzzy versus stochastic approaches to multicriteria linear programming under uncertainty. *Naval Research Logistics (NRL)*, 35(6) :673–695, 1988.
- [67] L.A. Wolsey and G.L. Nemhauser. *Integer and combinatorial optimization*, volume 55. John Wiley & Sons, 1999.
- [68] D. Ratz. On extended interval arithmetic and inclusion isotonicity. *Submitted for publication in SIAM Journal on Numerical Analysis*, 1996.
- [69] Q Ju T Hickey and MH Van Emden. Interval arithmetic : From principles to implementation. *Journal of the ACM (JACM)*, 48(5) :1038–1068, 2001.
- [70] S. Effati and M. Pakdaman. Solving the interval-valued linear fractional programming problem. *Scientific Research Publishing*, 2012.
- [71] R.E Moore. *Methods and applications of interval analysis*. SIAM, 1979.
- [72] R.E. Moore. *Interval analysis*, volume 4. Prentice-Hall Englewood Cliffs, 1966.
- [73] G. Alefeld and J. Herzberger. *Introduction to interval computation*. Academic press, 1983.
- [74] H.C. Wu. On interval-valued nonlinear programming problems. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 338(1) :299–316, 2008.
- [75] J. Philip. Algorithms for the vector maximization problem. *Mathematical programming*, 2(1) :207–229, 1972.

- [76] H.P. Benson. Optimization over the efficient set. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 98(2) :562–580, 1984.
- [77] H.P. Benson. An all-linear programming relaxation algorithm for optimizing over the efficient set. *Journal of Global Optimization*, 1(1) :83–104, 1991.
- [78] H.P. Benson. A finite, nonadjacent extreme-point search algorithm for optimization over the efficient set. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 73(1) :47–64, 1992.
- [79] H.P. Benson. A bisection-extreme point search algorithm for optimizing over the efficient set in the linear dependence case. *Journal of Global Optimization*, 3(1) :95–111, 1993.
- [80] H.P. Benson and S. Sayin. Optimization over the efficient set : Four special cases. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 80(1) :3–18, 1994.
- [81] H. Isermann and R.E. Steuer. Computational experience concerning payoff tables and minimum criterion values over the efficient set. *European journal of operational research*, 33(1) :91–97, 1988.
- [82] J. G. Ecker and J.H. Song. Optimizing a linear function over an efficient set. *Journal of Optimization Theory and Applications*, 83(3) :541–563, 1994.
- [83] J. Fülöp. A cutting plane algorithm for linear optimization over the efficient set. In *Generalized Convexity*, pages 374–385. Springer, 1994.
- [84] M. Abbas and D. Chaabane. Optimizing a linear function over an integer efficient set. *European Journal of Operational Research*, 174(2) :1140–1161, 2006.
- [85] J.M. Jorge. An algorithm for optimizing a linear function over an integer efficient set. *European Journal of Operational Research*, 195(1) :98–103, 2009.
- [86] D. Chaabane and M. Pirlot. A method for optimizing over the integer efficient set. *Journal of industrial and management optimization*, 6(4) :811, 2010.
- [87] D. Chaabane, B. Brahmi, and Z. Ramdani. The augmented weighted tchebychev norm for optimizing a linear function over an integer efficient set of a multicriteria linear program. *International Transactions in Operational Research*, 19(4) :531–545, 2012.
- [88] J.G. Ecker and I.A. Kouada. Finding all efficient extreme points for multiple objective linear programs. *Mathematical Programming*, 14(1) :249–261, 1978.
- [89] V.J. Bowman. On the relationship of the tchebycheff norm and the efficient frontier of multiple-criteria objectives. In *Multiple criteria decision making*, pages 76–86. Springer, 1976.
- [90] R.E. Steuer and E.U. Choo. An interactive weighted tchebycheff procedure for multiple objective programming. *Mathematical programming*, 26(3) :326–344, 1983.
- [91] R. Castillo and C. Quintana. Variants for the logarithmic-quadratic proximal point scalarization method for multiobjective programming. *Asian-European Journal of Mathematics*, 11(06) :1850081, 2018.
- [92] P. Kall and J. Mayer. *Stochastic Linear Programming*. Springer, 1976.
- [93] I.M. Stancu-Minasian and V. Giurgiu. *Stochastic Programming : With Multiple Objective Functions*, volume 13. Springer, 1984.
- [94] N.P. Sahoo and M.P. Biswal. Computation of probabilistic linear programming problems involving normal and log-normal random variables with a joint constraint. *Computer Mathematics*, 82(11) :1323–1338, 2005.

- [95] H.J. Chen. A new vertex enumeration-based approach for bilevel linear-linear fractional programming problems. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 40(7) :1413–1427, 2019.
- [96] R.K. Mudaliar S.N. Gupta and K. Kumar. Stochastic fractional programming for minimizing variability. *Journal of Information and Optimization Sciences*, 39(2) :495–501, 2018.
- [97] SH Nasserri and S Bavandi. A suggested approach for stochastic interval-valued linear fractional programming problem. *International Journal of Applied Operational Research*, 7(1) :23–31, 2017.
- [98] S.H Nasserri and S. Bavandi. Fuzzy stochastic linear fractional programming based on fuzzy mathematical programming. *Fuzzy Information and Engineering*, 10(3) :324–338, 2018.
- [99] S. Chandra A. Mehra, C. Aparna and C.R. Bector. Acceptable optimality in linear fractional programming with fuzzy coefficients. *Fuzzy Optimization and Decision Making*, 6(1) :5–16, 2007.
- [100] H. Zhu and G.H. Huang. Slfp : A stochastic linear fractional programming approach for sustainable waste management. *Waste Management*, 31(12) :2612–2619, 2011.
- [101] S. Bolintineanu. Minimization of a quasi-concave function over an efficient set. *Mathematical Programming*, 61(1) :89–110, 1993.
- [102] S. Sayin. Optimizing over the efficient set using a top-down search of faces. *Operations Research*, 48(1) :65–72, 2000.
- [103]
- [104] R. E. Steuer. *Multiple Criteria Optimization :Theory, Computation and Application*. John Wiley, New York,, 1986.
- [105] W.K.K. Haneveld and M.H. Van Der Vlerk. Stochastic integer programming with simple recourse. Technical report, 1991.
- [106] R.J.B. Wets. Solving stochastic programs with simple recourse. *Stochastics*, 10(3-4) :219–242, 1983.
- [107] R.T. Rockafellar and R.J.B. Wets. A dual solution procedure for quadratic stochastic programs with simple recourse. In *Numerical methods*, pages 252–265. Springer, 1983.
- [108] G.B. Dantzig, D.R. Fulkerson, and S.M. Johnson. On a linear-programming, combinatorial approach to the traveling-salesman problem. *Operations Research*, 7(1) :58–66, 1959.
- [109] J. Sylva and A. Crema. A method for finding the set of non-dominated vectors for multiple objective integer linear programs. *European Journal of Operational Research*, 158(1) :46–55, 2004.
- [110] L. Younsi-Abbaci and M.moulaï. Optimiser sur l'ensemble efficient d'un problème linéaire stochastique discret multi-objectifs. In E-G Talbi, editor, *META'2012*, Sousse port El-Kantaoui Tunisia, October 2012. Meta.
- [111] L. Younsi-Abbaci and M. moulaï. Optimiser sur l'ensemble efficient d'un problème linéaire stochastique discret multi-objectifs. In *ROADEF'13*. ROADEF, France, 2013.
- [112] F. Yalaoui L. Younsi-Abbaci, M. moulaï and F. Hnaien. Stochastic optimization over the integer efficient set of multi-objectifs transportation problem. In *MIM'16*, volume 49. MIM, France, 2016.

- [113] L. Younsi-Abbaci and M. moulai. Optimiser sur l'ensemble efficient d'un problème linéaire stochastique discret multi-objectifs. In *CMA'12*, Annaba Algeria, 2012. CMA.

Résumé

LES problèmes d'optimisation à objectifs multiples sont très variés et correspondent à des situations de décision difficiles. Lors de la résolution de ces problèmes, la notion d'optimalité disparaît face à la notion d'efficacité. Dans ce travail, nous considérons les problèmes stochastiques multi-objectifs. Les différents travaux présentés dans cette thèse concernent les problèmes d'optimisation stochastiques en nombres entiers. Notre premier objectif vise à la résolution des problèmes stochastiques multi-objectifs linéaires fractionnaires, où les coefficients des fonctions objectifs numérateur et dénominateur sont des intervalles, et le second membre des contraintes sont des variables aléatoires de distribution log-Normal. Le deuxième objectif est la mise au point d'un algorithme permettant aux décideurs, lorsque les préférences sont quantifiables et données explicitement sous forme d'une fonction linéaire à coefficients aléatoires, de trouver une solution efficace qui optimise la préférence du décideur, sur le front de Pareto discret d'un problème stochastique multi-objectifs linéaire.

Mots clés : Optimisation stochastique multi-objectifs en nombres entiers, norme augmentée de Tchebycheff, multi-objectifs fractionnaires à valeurs intervalles, les contrainte probabiliste, distribution log-normal.

Abstract

Multi-objective optimization problems are very varied and correspond to difficult decision situations. When solving these problems, the notion of optimality disappears in favor of the notion of efficiency. In this work, we consider stochastic multi-objective problems. The different works presented in this thesis concern stochastic optimization problems in integers. Our first objective is to solve fractional linear stochastic multi-objective problems, where the coefficients of the numerator and denominator objective functions are intervals, and the second member of the constraints are random variables of log-Normal distribution. The second objective is to develop an algorithm that allows decision makers, when preferences are quantifiable and given explicitly as a linear function with random coefficients, to find an efficient solution that optimizes the decision maker's preference, on the discrete Pareto front of a linear multi-objective stochastic problem..

keywords : multiple objective stochastic Integer, Tchebycheff metrics, Multi-Objective stochastic Interval-Valued Linear Fractional, the probabilistic constraints, log-normal distribution.
