N° d'ordre : 06/2022-D/MT

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène

Faculté de MATHEMATHIQUES

THESE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR**

En : **MATHEMATIQUES**

Spécialité : **Algèbre et théorie des nombres**

Par : **KHATTOU Chouaib**

Sujet

Etude des propriétés arithmétiques des nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs.

Soutenue publiquement, le 30 / 06 / 2022, devant le jury composé de :

M. BENSEBAA	Boualem,	professeur,	à l'USTHB,	Président
M. BAYAD	Abdelmejid,	MC-HDR,	à l'U. Paris-Saclay, France,	Directeur de thèse
M. HERNANE	Mohand Ouamar,	professeur,	à l'USTHB,	Co-directeur de thèse
M. BOUCHENNA	Rachid,	Maitre de Conférences A,	à l'USTHB,	Examinateur
M. DERBAL	Abdallah,	professeur,	à l' E.N.S-Kouba,	Examinateur
M. SODAIGUI	Bouchaib,	professeur,	à l'U. Valenciennes, France,	Examinateur
M. BELBACHIR	Hacene,	professeur,	à l' USTHB,	Invité.

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à mes directeurs de thèse, les professeurs HERNANE Mohand Ouamar de l'USTHB et BAYAD Abdelmejid de l'université Paris-Sacly (France), pour leurs orientations, leurs précieux conseils, leurs aides scientifiques et leurs encouragements durant toute la période de la préparation de cette thèse. Mes remerciements vont également au professeur Gilles ROBERT pour ces précieux conseils et orientations intéressantes.

Je remercie vivement Monsieur BENSEBAA Boualem professeur à l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur de présider le jury de cette thèse. Que Messieurs, BELBACHIR Hacene profeseur à l'USTHB, BOUCHENNA Rachid maitre de conférence à l'USTHB, DERBAL Abdellah profeseur à l'E.N.S de Kouba, SODAIGUI Bouchaib profeseur à l'université de Valenciennes (France), trouvent mes vifs remerciements pour avoir accepté d'examiner ce travail, en consacrant leurs temps précieux à lire cette thèse.

En dernier, je remercie ma famille, mes amis et mes collègues pour m'avoir soutenu au cours de la réalisation de cette thèse. Je cite en particulier ma mère et mon frère Hamza.

Résumé

Dans ce travail nous revisitons les plus importantes formules de récurrences concernant les nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs $B_n^{(r)}$. En utilisant les nombres de Stirling non signés, nous leurs donnons un aspect plus clair. La partie essentielle de notre travail consiste à généraliser les propriétés arithmétiques satisfaites par les nombres de Bernoulli classiques aux nombres $B_n^{(r)}$. Entre autres, nous établissons des congruences de Kummer pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ et nous construisons une nouvelle famille de séries d'Eisenstein dont le terme constant est $\frac{(-1)^r}{2}\frac{B_k^{(r)}}{r\binom{k}{r}}$ et qui vérifie des congruences de Kummer. Nous donnons des formules explicites pour les dénominateurs des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$, ainsi qu'une formule analogue à celle de Clausen-von Staudt. Nous terminons notre travail par la construction de plusieurs multiples des numérateurs des nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ et $(r-1)!B_n^{(r)}$.

Table des matières

Introduction

Soit $r \geq 1$ un entier naturel. Les nombres de Bernoulli $B_n^{(r)}$ d'ordre r sont définis par la série génératrice

$$\left(\frac{t}{e^t - 1}\right)^r = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{B_n^{(r)}}{n!} t^n, \qquad |t| < 2\pi \tag{1}$$

cf. [11, p. 127], [12, p. 298], [13, p. 151], [14, p. 178], [18, p. 63], [28, p. 316], [45, p. 145], [46, p. 641], [50, p. 549]. Ces nombres ont été d'abord définis et étudiés par N.E. Nörlund [45] dans les années 1920, puis ils ont fait l'objet de nombreux articles, on citera L. Carlitz [11, 12, 13, 14], F.R. Olson [46] et F.T. Howard [29] par la suite.
Le tableau suivant contient quelques valeurs des nombres $B_n^{(r)}$.

r \ n	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1	1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{1}{42}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	$\frac{5}{66}$	0	$-\frac{691}{2730}$
2	1	-1	$\frac{5}{6}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{42}$	$-\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$	$\frac{3}{10}$	$-\frac{15}{22}$	$-\frac{5}{6}$	$\frac{7601}{2730}$
3	1	$-\frac{3}{2}$	2	$-\frac{9}{4}$	$\frac{19}{10}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{16}{21}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{19}{30}$	$-\frac{63}{20}$	$-\frac{3}{11}$	$\frac{45}{4}$	$-\frac{2141}{546}$

Le cas $r = 1$ correspond aux nombres de Bernoulli classiques B_n [10, p. 429]. Ces nombres sont nuls pour les entiers impairs $n \geqslant 3$ [17, p. 4]. Pour les entiers n pairs, ce sont des nombres rationnels [52, p. 171] et jouissent de plusieurs propriétés arithmétiques remarquables. Parmi ces propriétés nous rappelons les plus importantes dues principalement à Clausen-von Staudt, Kummer et N. Nielsen. Ils ont démontré que si p est un nombre premier et n un entier strictement positif et **pair** alors :

i) si $p - 1 \nmid n$ alors B_n et $\dfrac{B_n}{n}$ sont p-entiers [30, Proposition 5.2.4],

ii) si $p - 1 | n$ alors on a les congruences de Clausen-von Staudt [37, Theorem 7(3)]

$$pB_n \equiv -1 \pmod{p},$$

ainsi pB_n est p-entier,

iii) on a la formule de Clausen-von Staudt [56, pp. 373–374]

$$B_n + \sum_{p-1|n} \frac{1}{p} \in \mathbb{Z},$$

iv) si m est un entier strictement positif et pair et $N \in \mathbb{N}$ tels que $n \equiv m \pmod{p^N(p-1)}$, alors on a les congruences de Kummer [30, Theorem 5]

$$\left(1-p^{n-1}\right)\frac{B_n}{n} \equiv \left(1-p^{m-1}\right)\frac{B_m}{m} \pmod{p^{N+1}}, \tag{2}$$

en particulier pour $m, n \geqslant N+2$, on retrouve le résultat précis suivant :
si $n \equiv m \pmod{p^N(p-1)}$ alors on a $\dfrac{B_n}{n} \equiv \dfrac{B_m}{m} \pmod{p^{N+1}}$ [4, Theorem 3.2],

v) le dénominateur du nombre B_n est donné par la relation [47, p. 10]

$$d_n = \prod_{p-1|n} p, \tag{3}$$

vi) si $a \in \mathbb{N}^*$, alors les nombres

$$(n+1)!B_n,\ a(a^n-1)B_n,\ a^n(a^n-1)\frac{B_n}{n}\ \mathit{et}\ a^{\frac{n}{2}+1}(a^n-1)\frac{B_n}{n}$$

sont des entiers relatifs, cf. [42, pp. 246–250] et [44, p. 173].

Les résultats ci-dessus ont été revus et utilisés dans plusieurs travaux importants de théorie des nombres. On peut consulter : T. Agoh [1, p. 1], T. Arakawa [4, p. 10–13, pp. 41–43, p. 198], Z.I. Borevich [10, pp. 429–433], Cohen [17, pp. 4–7, pp. 63–69], I. Dibag [21, p. 332], M. Eie [22, p. 149], R.L. Graham [25, p. 285], G.H. Hardy [26, p. 115], K. Ireland [30, pp. 230–239], W. Johnson [31, pp. 254–255], J. Jordan [32, p. 258], S. Kanemitsu [33, p. 3], N.M. Katz [35, p. 1– 2], N. Koblitz [37, p. 44], E.E. Kummer [38, p. 368], N. Nielsen [42, p. 244–246, p. 250], H. Rademacher [47, pp. 7–21], A.M. Robert [49, pp. 270–274], J. Sandor [50, pp. 525–526, pp. 539–541, pp. 548–549], W. Schikhof [52, pp. 171–172, p. 188], B.A. Venkov [55, p. 13], K.C.G. von Staudt [56, p. 373] et L.C. Washington [57, p. 6, pp. 55–61, p. 241].

Le but de notre travail est de généraliser ces résultats aux nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs $B_n^{(r)}$.

Nous avons structuré cette thèse en cinq chapitres :
Le premier chapitre de cette thèse est consacré à l'étude de quelques formules de récurrences satisfaites par les nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs $B_n^{(r)}$. Nous exposons d'abord une preuve simple des résultats de Norlund, puis nous les revisitons pour obtenir de nouvelles formules de récurrences que nous exploiterons dans les chapitres suivants.
Dans le deuxième chapitre, nous établissons la p-intégralité et les congruences de Kummer d'ordre quelconque pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$, ainsi qu'une généralisation pour l'ordre un d'une congruence modulo le nombre premier p de ces nombres. Nous construisons une nouvelle famille de séries d'Eisenstein $E_k^{(r)}(z)$ dont les termes constants sont les nombres $\frac{(-1)^r}{2}\frac{B_k^{(r)}}{r\binom{k}{r}}$. Puis nous prouvons des congruences satisfaites par ces nouvelles séries. Ces congruences généralisent celles obtenues par Clausen-von Staudt pour les nombres de Bernoulli et celles de

Kummer pour les séries d'Eisenstein classiques.
Le troisième chapitre est consacré à l'étude des dénominateurs et coefficients de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$. Nous donnons une expression explicite des dénominateurs de ces nombres, ainsi qu'une formule analogue à celle de Clausen-von Staudt. Pour prouver ces résultats nous avons établi quelques congruences particulières pour les nombres de Stirling de première espèce.
Dans le quatrième chapitre, nous donnons d'abord les formules explicites des dénominateurs et les coefficients de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$ dans les cas particuliers $r = 1, 2, 3, 4$, et dans le cas généal $6 \leqslant r \leqslant n \leqslant 2r$. Ensuite nous précisons les dénominateurs des nombres $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ où p est un nombre premier impair et k un entier naturel non nul.
Dans le cinquième et dernier chapitre de cette thèse, nous commençons d'abord par donner plusieurs multiples des numérateurs des nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$. Puis, nous exploitons les résultats obtenus au chapitre quatre pour expliciter d'autres multiples des numérateurs des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$.

Les résultats des chapitres un et deux, ainsi que la première partie du chapitre cinq, sont publiés dans l'article [36].
Les résultats des chapitres trois et quatre, ainsi que la deuxième partie du chapitre cinq, font l'objet d'une autre publication qui est en cours de finalisation.

Chapitre 1

Formules de récurrences et formules explicites pour les nombres $B_n^{(r)}$

Dans ce chapitre nous revisitons les formules de récurrences et les formules explicites des nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs $B_n^{(r)}$. Ces formules font intervenir les nombres de Stirling de première espèce non signés $|s(n,k)|$.

1.1 Les nombres de Stirling de première espèce non signés

Les nombres de Stirling de première espèce non signés sont étudiés par plusieurs auteurs : M. Aiger [2, p. 25], T. Arakawa [4, p. 27], A.T. Benjamin [7, p. 96], M. Bóna [8, p. 113] et [9, p. 85], L. Comtet [18, p. 47], M. DeFranco [19, p. 1101], P. Flajolet et R. Sedgewick [23, p. 739], R.L. Graham [25, p. 259], F.T. Howard [28, p. 29], J. Katriel [34, p. 273], N. Nielsen [43, p. 287], J. Sandor [50, p. 462], R.P. Stanley [54, p. 18],... etc. Nous nous restreignons dans les rappels aux propriétés qui nous intéressent dans notre travail.

Définition 1.1. *Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. Les nombres de Stirling de première espèce non signés $|s(n,k)|$ sont définis par*

$$\sum_{k=0}^{n} |s(n,k)| x^k = x(x+1)...(x+n-1).$$

Proposition 1.1. *Soient n et k deux entiers naturels tels que $n \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant n$. On a :*
1) $|s(n,0)| = 0$, $|s(n,n)| = 1$, $|s(n,1)| = (n-1)!$ et $|s(n,n-1)| = \frac{n(n-1)}{2}$,
2) si p est un nombre premier alors $|s(p,k)| \pmod{p} \equiv \begin{cases} 0 & si\ 2 \leqslant k \leqslant p-1 \\ -1 & si\ k=1 \end{cases}$,
3) pour $n \geqslant 2$ et $1 \leqslant k \leqslant n-1$ on a $|s(n,k)| = |s(n-1,k-1)| + (n-k)|s(n-1,k)|$.

Il est à noter que $|s(n,k)|$ représente le nombre de permutations de n objets avec k cycles disjoints. On l'appelle aussi cycle-nombre de Stirling et on le prononce n cycle k.
Diverses notations sont utilisées pour les nombres de Stirling de première espèce non signés, parmi lesquelles $|s(n,k)| = c(n,k) = \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$. Ces nombres sont liés aux nombres de Stirling de première espèce signés $s(n,k)$ par $s(n,k) = (-1)^{n+k}|s(n,k)|$.

1.2 Formules de récurrences et formules explicites pour les nombres $B_n^{(r)}$

Nous démontrons par une nouvelle méthode, des formules de récurrences et des formules explicites pour les nombres $B_n^{(r)}$ qui ont été déjà établies sous des formes équivalentes pour la première fois par N.E. Nörlund [45, pp. 145–148]. Elles ont été exploitées par : L. Carlitz [11, pp. 127–130], [14, p. 178], L. Comtet [18, p. 63], F.T. Howard [29, pp. 316–319], D.S. Mitrinović [41, p. 5], F.R. Olson [46, pp. 641–642],... etc.

Théorème 1.1. *Soient n et r des entiers naturels. On a*

$$rB_n^{(r+1)} = -(n-r)B_n^{(r)} - rnB_{n-1}^{(r)}, \textit{pour } n, r \geqslant 1. \tag{1.1}$$

De plus, pour $0 \leqslant n \leqslant r-1$ on a la formule explicite

$$B_n^{(r)} = (-1)^n \frac{|s(r, r-n)|}{\binom{r-1}{n}} \cdot \tag{1.2}$$

Pour prouver ce théorème, nous établissons le lemme suivant :

Lemme 1.1. *Soit r un entier naturel non nul. Alors La fonction f_r à variable réelle t définie par $f_r(t) = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^r$ vérifie l'équation fonctionnelle*

$$rf_{r+1}(t) = rf_r(t) - rtf_r(t) - tf_r'(t) \cdot \tag{1.3}$$

Preuve. Par passage au logarithme de la fonction

$$f_r(t) = \left(\frac{t}{e^t-1}\right)^r$$

on a

$$\ln|f_r(t)| = r\ln|t| - rln|e^t - 1| \cdot$$

En dérivant les deux termes

$$\frac{f_r'(t)}{f_r(t)} = \frac{r}{t} - r\frac{e^t - 1 + 1}{e^t - 1} = \frac{r}{t} - r\left(1 + \frac{1}{e^t-1}\right) = \frac{r}{t} - r - \frac{r}{e^t-1}.$$

D'où l'égalité

$$f_r'(t) = \frac{r}{t} f_r(t) - r f_r(t) - \frac{r}{e^t - 1} f_r(t)\cdot$$

En multipliant par t, on obtient

$$t f_r'(t) = r f_r(t) - r t f_r(t) - \frac{rt}{e^t - 1} f_r(t) = r f_r(t) - r t f_r(t) - r f_{r+1}(t)\cdot$$

D'où le résultat attendu

$$r f_{r+1}(t) = r f_r(t) - r t f_r(t) - t f_r'(t)\cdot$$

$\square$

Preuve du Théorème 1.1.
D'après le Lemme 1.1, on a les développements en séries entières suivants :

$$r f_{r+1}(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{r B_n^{(r+1)}}{n!} t^n, \tag{1.4}$$

$$r f_r(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{r B_n^{(r)}}{n!} t^n, \tag{1.5}$$

$$r t f_r(t) = \sum_{n \geqslant 0} \frac{r B_n^{(r)}}{n!} t^{n+1} = \sum_{n \geqslant 1} \frac{r B_{n-1}^{(r)}}{(n-1)!} t^n \quad \text{en posant} \quad n' = n+1, \tag{1.6}$$

$$t f_r'(t) = \sum_{n \geqslant 1} n \frac{B_n^{(r)}}{n!} t^n = \sum_{n \geqslant 1} \frac{r B_n^{(r)}}{(n-1)!} t^n. \tag{1.7}$$

En remplaçant les développements trouvés dans la relation (1.3), on arrive à l'égalité

$$r B_0^{(r+1)} + \sum_{n \geqslant 1} \frac{r B_n^{(r+1)}}{n!} t^n = r B_0^{(r)} + \sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{r B_n^{(r)}}{n!} - \frac{r B_{n-1}^{(r)}}{(n-1)!} - \frac{B_n^{(r)}}{(n-1)!} \right) t^n.$$

Par identification, $r B_0^{(r)} = r B_0^{(r+1)}$ et pour tout $n \geqslant 1$ on a

$$\frac{r B_n^{(r+1)}}{n!} = \frac{r B_n^{(r)}}{n!} - \frac{r B_{n-1}^{(r)}}{(n-1)!} - \frac{r B_n^{(r)}}{(n-1)!}.$$

Par suite, on obtient la relation (1.1).
On démontre la relation (1.2) par récurrence sur l'entier naturel non nul r.
Pour $r = 1$, $n = 0$, on a $B_n^{(r)} = B_0 = 1$ et $(-1)^n \frac{|s(r, r-n)|}{\binom{r-1}{n}} = |s(1,1)| = 1$. Donc la relation (1.2) est vérifiée pour $r = 1$.
On suppose que la relation (1.2) est vérifiée pour $0 \leqslant n \leqslant r-1$. Puis, on considère le cas

$r+1$, qui nécessite la discussion $n=r$ et $0 \leqslant n \leqslant r-1$.
(i) Si $n=r$, grâce à la relation (1.1) on obtient

$$\begin{aligned} B_n^{(r+1)} &= -nB_{n-1}^{(r)} = -n(-1)^{n-1}\frac{|s(r,r-n+1)|}{\binom{r-1}{n-1}} = -r(-1)^{r-1}\frac{|s(r,r-r+1)|}{\binom{r-1}{r-1}} \\ &= (-1)^r r\frac{|s(r,1)|}{1} = (-1)^r r! = (-1)^r\frac{|s(r+1,1)|}{\binom{r}{r}} = (-1)^n\frac{|s(r+1,r+1-n)|}{\binom{r}{n}}. \end{aligned}$$

(ii) Si $n \leqslant r-1$, par l'hypothèse de récurrence on trouve

$$\begin{aligned} B_n^{(r+1)} &= -\frac{(n-r)}{r}\left[(-1)^n\frac{|s(r,r-n)|}{\binom{r-1}{n}}\right] - n\left[(-1)^{n-1}\frac{|s(r,r-n+1)|}{\binom{r-1}{n-1}}\right] \\ &= -\frac{(n-r)}{r}\left[(-1)^n\frac{|s(r,r-n)|}{\frac{(r-1)!}{n!(r-1-n)!}}\right] - n\left[(-1)^{n-1}\frac{|s(r,r-n+1)|}{\frac{(r-1)!}{(r-1)!(r-n)!}}\right] \\ &= (-1)^n\frac{|s(r,r-n)|}{\frac{r!}{n!(r-n)!}} + r(-1)^n\frac{|s(r,r-n+1)|}{\frac{r(r-1)!}{n(n-1)!(r-n)!}} \\ &= \frac{(-1)^n}{\binom{r}{n}}[|s(r,r-n)+r|s(r,r-n+1)||] \\ &= \frac{(-1)^n}{\binom{r}{n}}|s(r+1,r-n+1)|. \end{aligned}$$

Par conséquent on a

$$B_n^{(r)} = (-1)^n\frac{|s(r,r-n)|}{\binom{r-1}{n}}\ ,\ \text{pour tout } n \leqslant r-1.$$

□

Les nombres de Bernoulli $B_n^{(r)}$ sont liés aux nombres de Bernoulli classiques. De manière précise on a le théorème suivant :

Théorème 1.2 (Formules explicites)**.** *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$. On a*

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = (-1)^{r-1}\sum_{l=0}^{r-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\ . \tag{1.8}$$

De manière équivalente, on a

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = (-1)^{r-1}\sum_{l=0}^{r-1}(-1)^l\binom{r-1}{l}B_l^{(r)}\frac{B_{n-l}}{n-l}. \tag{1.9}$$

Preuve. On démontre la relation (1.8) par récurrence sur l'entier naturel non nul r.
Pour $r=1$, $n\geqslant 1$ on a
$\dfrac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}=\dfrac{B_n^{(1)}}{1\binom{n}{1}}=\dfrac{B_n}{n}$ et $(-1)^{r-1}\displaystyle\sum_{l=0}^{r-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}=|s(1,1)|\frac{B_n}{n}=\frac{B_n}{n}\cdot$
Donc la relation (1.8) est vérifiée.
Pour $n\geqslant r+1$, d'après la relation (1.1) on déduit que

$$\frac{rB_n^{(r+1)}}{n(n-r)}=-\frac{B_n^{(r)}}{n}-\frac{rB_{n-1}^{(r)}}{n-r}.$$

En multipliant les deux termes par $\dfrac{(r-1)!}{(n-1)(n-2)...(n-r+1)}$, il vient

$$\frac{r!B_n^{(r+1)}}{n(n-1)...(n-r)}=-\left(\frac{(r-1)!B_n^{(r)}}{n(n-1)...(n-r+1)}+\frac{r(r-1)!B_{n-1}^{(r)}}{(n-1)(n-2)...(n-r)}\right).$$

Soit

$$\begin{aligned}
\frac{B_n^{(r+1)}}{(r+1)\binom{n}{r+1}} &= -\left(\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}+r\frac{B_{n-1}^{(r)}}{r\binom{n-1}{r}}\right)\\
&= (-1)^r\left(\sum_{l=0}^{r-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}+r\sum_{l=0}^{r-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-1-l}}{n-1-l}\right)\\
&= (-1)^r\left(\frac{B_n}{n}+\sum_{l=1}^{r-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}+r\sum_{l=0}^{r-2}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-1-l}}{n-1-l}+r!\frac{B_{n-r}}{n-r}\right)\\
&= (-1)^r\left(\frac{B_n}{n}+\sum_{l=1}^{r-1}(|s(r,r-l)+r|s(r,r+1-l)|)\frac{B_{n-l}}{n-l}+r!\frac{B_{n-r}}{n-r}\right)\\
&= (-1)^r\left(\frac{B_n}{n}+\sum_{l=1}^{r-1}|s(r+1,r+1-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}+r!\frac{B_{n-r}}{n-r}\right)\\
&= (-1)^r\sum_{l=0}^{r}|s(r+1,r+1-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}.
\end{aligned}$$

Ce qui complète la preuve de la relation (1.8). La relation (1.9) découle des relations (1.2) et (1.8). □

1.3 Formules explicites améliorées pour les nombres $B_n^{(r)}$

Dans ce qui suit, nous introduisons les ensembles $M(n,r)$ et $M^*(n,r)$. Ces ensembles sont de nature arithmétique. Ils jouent un rôle crucial dans notre étude.

Définition 1.2. *Soient n et r deux entiers naturels non nuls tels que $n \geqslant r$. On définit les ensembles d'entiers l :*

1) $M(n,r) = \{l : 0 \leqslant l \leqslant r-1, n-l \text{ pair ou } n-l=1\}$,

2) $M^*(n,r) = \{l : 0 \leqslant l \leqslant r-1, n-l \text{ pair }\}$.

Proposition 1.2 (Propriétés de $M(n,r)$ et $M^*(n,r)$)**.**

1) Pour $r=1$ on a

(a) si $n=1$: $M(1,1)=\{0\}$, $M^*(1,1)=\emptyset$,

(b) si $n \geqslant 2$: $M(n,1) = M^*(n,1) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \text{ est impair} \\ \{0\} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

2) Pour $r \geqslant 2$, on a $M(n,r) \neq \emptyset$ et $M^*(n,r) \neq \emptyset$. En outre,

(a) si $n=r$ on a $M(n,r) = M^*(n,r) \cup \{r-1\}$,

(b) si $n \geqslant r+1$ on a $M(n,r) = M^*(n,r)$.

3) Pour n et r fixés, on a $B_{n-l} \neq 0$ équivaut à $l \in M(n,r)$, et si $M(n,r)=\emptyset$ alors $B_n^{(r)}=0$.

4) $M^*(n,r)$ est l'ensemble des entiers l, $0 \leqslant l \leqslant r-1$ qui ont la même parité que n, en d'autres termes :

(a) si n est pair alors

$$M^*(n,r) = \{l \text{ pair } : 0 \leqslant l \leqslant r-1\} = \left\{ l = 2k : 0 \leqslant k \leqslant \left[\frac{r-1}{2}\right] \right\},$$

(b) si n est impair alors

$$M^*(n,r) = \{l \text{ impair } : 0 \leqslant l \leqslant r-1\} = \{l = 2k+1 : 0 \leqslant k \leqslant [\frac{r-2}{2}]\}.$$

De plus, on a

$$\#M^*(n,r) = \begin{cases} [\frac{r+1}{2}] & \text{si } n \text{ est pair ,} \\ [\frac{r}{2}] & \text{si } n \text{ est impair ,} \end{cases}$$

c'est-à-dire :

(a) si r est pair $\quad \#M^*(n,r) = \frac{r}{2}$,

(b) si r est impair

$$\#M^*(n,r) = \begin{cases} \frac{r+1}{2} & \text{si } n \text{ est pair ,} \\ \frac{r-1}{2} & \text{si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

5) On a

$$\{n-l : l \in M^*(n,r)\} = \begin{cases} \{2[\frac{n}{2}] = n, 2[\frac{n}{2}]-2, ..., 2[\frac{n}{2}] - 2[\frac{r-1}{2}]\} & \text{, si } n \text{ est pair,} \\ \{2[\frac{n}{2}] = n-1, 2[\frac{n}{2}]-2, ..., 2[\frac{n}{2}] - 2[\frac{r-2}{2}]\} & \text{, si } n \text{ est impair .} \end{cases}$$

6) Si n et m sont de même parité alors $M^*(n,r) = M^*(m,r)$.

Dans ce qui suit nous revisitons les formules explicites des nombres $B_n^{(r)}$, en termes des ensembles $M(n,r)$ et $M^*(n,r)$.

Théorème 1.3 (Formules explicites améliorées).
Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$. On a

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = (-1)^{r-1} \sum_{l \in M(n,r)} |s(r,r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} \tag{1.10}$$

et

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = (-1)^{r-1} \sum_{l \in M(n,r)} (-1)^l \binom{r-1}{l} B_l^{(r)} \frac{B_{n-l}}{n-l}. \tag{1.11}$$

Si de plus $n \geqslant r+1$, alors on a

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = (-1)^{r-1} \sum_{l \in M^*(n,r)} |s(r,r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} \tag{1.12}$$

et

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = (-1)^{r-1} \sum_{l \in M^*(n,r)} (-1)^l \binom{r-1}{l} B_l^{(r)} \frac{B_{n-l}}{n-l}. \tag{1.13}$$

Preuve. Preuve de la relation(1.10). D'après la Proposition 1.2, pour $r = 1$ et n impair $\geqslant 3$ on a $B_n^{(r)} = B_n = 0$. Dans les autres cas on a $M(n,r) \neq \emptyset$. De plus pour $l \notin M(n,r)$ on a $B_{n-l} = 0$ et grâce à la relation (1.8) on en déduit que

$$\begin{aligned}
\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} &= (-1)^{r-1} \sum_{l=0}^{r-1} |s(r,r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} \\
&= (-1)^{r-1} \left(\sum_{l \in M(n,r)} |s(r,r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} + \sum_{l \notin M(n,r)} |s(r,r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} \right) \\
&= (-1)^{r-1} \sum_{l \in M(n,r)} |s(r,r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} + 0.
\end{aligned}$$

D'où la relation (1.10).
La relation (1.11) découle des formules (1.10) et (1.9). Pour la preuve des formules (1.12) et (1.13) il suffit de remarquer que $M(n,r) = M^*(n,r)$ pour tout $n \geqslant r+1$. $\square$

Chapitre 2

Congruences de Kummer et séries d'Eisenstein pour les nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs

Ce chapitre est divisé en deux parties, dans la première partie nous étudions les congruences de Kummer pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$. Dans la seconde, nous nous intéressons aux séries d'Eisenstein associées aux nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs.

2.1 Congruences de Kummer pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$

Dans cette partie nous établissons la p-intégralité et les congruences de Kummer pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ pour tout ordre r.

2.1.1 p-intégralité et congruences $\pmod{p^n\mathbb{Z}_{(p)}}$

Nous rappelons les définitions suivantes :

Définition 2.1. *Soit p un nombre premier et u un nombre rationnel. On dit que u est p-entier si son dénominateur n'est pas divisible par p. L'ensemble des nombres rationnels p-entiers est $\mathbb{Z}_{(p)} = \{\frac{a}{b},\ a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^*,\ pgcd(ap, b) = 1\}$ [49, p. 432].*

On remarque que pour p un nombre premier et $\mathbb{Z}_p$ l'anneau des entiers p-adiques on a $\mathbb{Z}_{(p)} = \mathbb{Z}_p \cap \mathbb{Q}$ [24, p. 60].

Définition 2.2. *Soient p un nombre premier et n un entier naturel non nul. Pour a et b deux éléments de $\mathbb{Z}_{(p)}$, on dit que $a \equiv b \pmod{p^n\mathbb{Z}_{(p)}}$ ou simplement $a \equiv b \pmod{p^n}$ si $a - b \in p^n\mathbb{Z}_{(p)}$. C'est-à-dire $a = b + p^n u$ où $u \in \mathbb{Z}_{(p)}$ cf. [4, p. 43] et [50, p. 539].*

D'autre part, les congruences suivant la Définition 2.2 jouissent des propriétés classiques des congruences sur $\mathbb{Z}$ [50, p. 539]. Elles sont la restriction des congruences $\pmod{p^n\mathbb{Z}_p}$ [17, p. 52].
De plus, si nous supposons dans la Définition 2.2 que a et b sont des nombres rationnels, alors les propriétés des congruences classiques pour le produit ne sont plus vérifiées, mais elles restent valables pour la somme et la multiplication par un p-entier.

2.1.2 p-intégralité et congruences de Kummer de niveau 1

Dans ce qui suit nous étudions la p-intégralité et les congruences de Kummer de niveau 1 pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$.

Théorème 2.1. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$, $M(n,r) \neq \emptyset$ et $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$. On a :*
1) $p \geqslant r+2$,
2) $\dfrac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ est p-entier,
3) si de plus n et m sont des entiers tels que $n, m \geqslant r+1$ et $m \equiv n \pmod{p-1}$ alors

$$\frac{B_m^{(r)}}{r\binom{m}{r}} \equiv \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} \pmod{p}.$$

Preuve. Soit p un nombre premier qui satisfait les hypothèses du Théorème 2.1.
1) Supposons par l'absurde que $p \leqslant r+1$.

Si $p = 2$ alors $p-1 = 1 | n-l$, pour tout $l \in M(n,r)$. Ce qui est exclu.

Si $p \geqslant 3$ alors $p-1$ est pair. On a $p-1 \leqslant r$, donc il existe un entier l, $0 \leqslant l \leqslant r-1$ tel que $n-l \equiv 0 \pmod{p-1}$. La parité de $p-1$ entraine $l \in M(n,r)$. Ce qui est aussi exclu.
En conclusion on doit avoir $p \geqslant r+2$.

2) On a $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$, donc $\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est p-entier pour tout $l \in M(n,r)$.
D'autre part les $|s(r, r-l)|$ sont des entiers.
Par suite la relation (1.10) nous permet de conclure.

3) Pour $n, m \geqslant r+1$ et $n \equiv m \pmod{p-1}$ on a $M(n,r) = M^*(n,r) = M^*(m,r) = M(m,r)$ et $n-l \equiv m-l \pmod{p-1}$ pour tout $l \in M^*(n,r)$.
D'où, d'après les congruences de Kummer on a $\frac{B_{n-l}}{n-l} \equiv \frac{B_{m-l}}{m-l} \pmod{p}$, pour tout $l \in M^*(n,r)$.
Par suite la relation (1.12) implique

$$\frac{B_m^{(r)}}{r\binom{m}{r}} \equiv \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} \pmod{p}\cdot$$

□

Corollaire 2.1. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$, $M(n,r) \neq \emptyset$ et $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$. Alors le nombre $B_n^{(r)}$ est p-entier.*

Preuve. D'après le Théorème 2.1, on sait que $\dfrac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ est p-entier. Donc en multipliant par l'entier $r\dbinom{n}{r}$, il vient que $B_n^{(r)}$ est aussi p-entier (comme produit de p-entiers).
Ce qui achève la preuve. □

Corollaire 2.2. *Soient n, r et α des entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$, $M(n,r) \neq \emptyset$ et $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$.*
Si p^α divise A_n^r alors p^α divise le numérateur de $B_n^{(r)}$, où $A_n^r = n(n-1)...(n-r+1)$.

Preuve. On pose $B_n^{(r)} = \dfrac{N}{D}$, avec $N \in \mathbb{Z}$, $N \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(N,D) = 1$. Soit p un nombre premier tel que $p^\alpha | A_n^r$.
D'après le Théorème 2.1, le nombre $\dfrac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = \dfrac{(r-1)!N}{A_n^r D}$ est p entier et $p \geqslant r+2$. Donc

$$\frac{(r-1)!N}{A_n^r D} = \frac{a}{b}, \text{ avec } a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{N}, p \nmid b$$

et

$$b(r-1)!N = A_n^r Da.$$

On a alors

$$\begin{cases} p^\alpha | b(r-1)!N \\ \text{et} \\ \mathrm{pgcd}(p^\alpha, b(r-1)!) = 1. \end{cases}$$

Par le lemme de Gauss on a

$$p^\alpha | N.$$

Ce qui achève la preuve. □

Nous pouvons étendre les congruences de Kummer. Pour cela nous introduisons les ensembles $M_p(n,r)$ et $M_p^*(n,r)$.

Définition 2.3. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et p un nombre premier. On définit les ensembles d'entiers l :*

1) $M_p(n,r) = \{l : l \in M(n,r)$ et $p-1 | n-l\}$,

2) $M_p^*(n,r) = \{l : l \in M^*(n,r)$ et $p-1 | n-l\}$.

Proposition 2.1 (Propriétés de $M_p(n,r)$ et $M_p^*(n,r)$)**.**

1) Si p est impair ou $n \geqslant r+1$ alors $M_p(n,r) = M_p^*(n,r)$.

2) $M_2(n,r) = M(n,r)$ et $M_2^*(n,r) = M^*(n,r)$.

3) $M_3(n,r) = M^*(n,r)$.

4) Si $l \in M_p(n,r)$ alors $v_p(B_{n-l}) = -1$.

5) Si $l \in M(n,r) \setminus M_p(n,r)$ alors $\dfrac{B_{n-l}}{n-l}$ est p-entier.

Nous montrons le résultat suivant :

Théorème 2.2. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et p un nombre premier impair. On a :*

1) le nombre $\beta_n^{(r)} = \dfrac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} + (-1)^{r-1}(\dfrac{1}{p}-1)\displaystyle\sum_{l\in M_p(n,r)} \dfrac{|s(r,r-l)|}{n-l}$ est p-entier,

2) si $p \geqslant 5$ et n, m des entiers $\geqslant r+1$ tels que $m \equiv n \pmod{p-1}$, alors on a

$$\beta_m^{(r)} \equiv \beta_n^{(r)} \pmod{p}.$$

Pour la preuve de ce théorème nous utilisons le lemme suivant :

Lemme 2.1. *Soient p un nombre premier impair et k un entier strictement positif pair ou égal à 1. On pose*

$$\beta_k = \begin{cases} \frac{B_k}{k} & si\ p-1 \nmid k, \\ \frac{B_k+\frac{1}{p}-1}{k} & si\ p-1 | k. \end{cases}$$

On a

1) le nombre β_k est p-entier,

2) si $p \geqslant 5$ et n, m deux entiers strictement positifs pairs tels que $n \equiv m \pmod{p-1}$, alors on a

$$\beta_n \equiv \beta_m \pmod{p}.$$

Preuve. Cf. [31, pp. 253–255]. □

Preuve du Théorème 2.2.
1) Par la formule (1.10), on trouve

$$\begin{aligned}\beta_n^{(r)} &= (-1)^{r-1}\sum_{l\in M(n,r)} |s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l} + (-1)^{r-1}(\frac{1}{p}-1)\sum_{l\in M_p(n,r)}\frac{|s(r,r-l)|}{n-l} \\ &= (-1)^{r-1}\sum_{l\in M(n,r)\setminus M_p(n,r)} |s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l} + (-1)^{r-1}\sum_{l\in M_p(n,r)} |s(r,r-l)|\frac{\frac{1}{p}-1+B_{n-l}}{n-l} \\ &= (-1)^{r-1}\sum_{l\in M(n,r)} |s(r,r-l)|\beta_{n-l}. \qquad (2.1)\end{aligned}$$

D'autre part, les nombres $|s(r, r-l)|$ sont des entiers et le Lemme 2.1 implique que β_{n-l} est p-entier pour tout $l \in M(n, r)$. D'où d'après la relation (2.1), le nombre $\beta_n^{(r)}$ un p-entier.
2) Pour $n, m \geqslant r+1$ et $n \equiv m \pmod{p-1}$, par le Lemme 2.1 on a $\beta_{n-l} \equiv \beta_{m-l} \pmod{p}$ pour tout $l \in M^*(n, r)$. Des relations 2) (b), 6) de la Proposition 1.2 et l'identité (2.1), on déduit que

$$\begin{aligned} \beta_n^{(r)} &= (-1)^{r-1} \sum_{l \in M^*(n,r)} |s(r, r-l)| \beta_{n-l} \\ &\equiv (-1)^{r-1} \sum_{l \in M^*(m,r)} |s(r, r-l)| \beta_{m-l} \pmod{p} \\ &\equiv \beta_m^{(r)} \pmod{p}. \end{aligned}$$

□

2.1.3 Congruences de Kummer de niveau quelconque pour les nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$

Dans cette partie nous généralisons les congruences de Kummer (2) aux nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ pour tout niveau. Le niveau sera noté par $N+1$.

Théorème 2.3. *Soient n, m deux entiers positifs, N un entier naturel et p un nombre premier tels que $n, m \geqslant r+1$ et $p-1 \nmid n-l$, pour tout $l \in M^*(n, r)$. Si $m \equiv n \pmod{p^N(p-1)}$ alors on a*

$$\begin{aligned} &\frac{B_m^{(r)}}{r\binom{m}{r}} - (-1)^{r-1} p^{m-r} \left[\sum_{l \in M^*(m,r)} p^{r-l-1} |s(r, r-l)| \frac{B_{m-l}}{m-l} \right] \\ &\qquad \equiv \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} - (-1)^{r-1} p^{n-r} \left[\sum_{l \in M^*(n,r)} p^{r-l-1} |s(r, r-l)| \frac{B_{n-l}}{n-l} \right] \pmod{p^{N+1}}. \qquad (2.2) \end{aligned}$$

Preuve. Par la Proposition 1.2 6), on a $M^*(n, r) = M^*(m, r)$.

1. Si $M^*(n, r) = \emptyset$ alors les deux termes de la relation (2.2) sont nuls. Donc la congruence (2.2) est vérifiée.

2. Si $M^*(n,r) \neq \emptyset$ alors la formule (1.12) donne

$$\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} - (-1)^{r-1}p^{n-r}\left[\sum_{l\in M^*(n,r)} p^{r-l-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right]$$
$$= (-1)^{r-1}\left(\sum_{l\in M^*(n,r)} |s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right) - (-1)^{r-1}\left[\sum_{l\in M^*(n,r)} p^{n-l-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right]$$
$$= (-1)^{r-1}\left[\sum_{l\in M^*(n,r)} (1-p^{n-l-1})|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right].$$

Comme $m \equiv n \pmod{p^N(p-1)}$, alors $m-l \equiv n-l \pmod{(p^N(p-1))}$ pour tout $l \in M^*(n,r)$. Par les congruences de Kummer on a

$$(1-p^{m-l-1})\frac{B_{m-l}}{m-l} \equiv (1-p^{n-l-1})\frac{B_{n-l}}{n-l} \pmod{p^{N+1}}, \text{ pour tout } l \in M^*(n,r).$$

En multipliant par les entiers $|s(r,r-l)|$ et en faisant la somme sur les $l \in M^*(n,r)$, on obtient

$$(-1)^{r-1}\left[\sum_{l\in M^*(m,r)} (1-p^{m-l-1})|s(r,r-l)|\frac{B_{m-l}}{m-l}\right]$$
$$\equiv (-1)^{r-1}\left[\sum_{l\in M^*(n,r)} (1-p^{n-l-1})|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right] \pmod{p^{N+1}},$$

ou encore :

$$\frac{B_m^{(r)}}{r\binom{m}{r}} - (-1)^{r-1}p^{m-r}\left[\sum_{l\in M^*(m,r)} p^{r-l-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{m-l}}{m-l}\right]$$
$$\equiv \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} - (-1)^{r-1}p^{n-r}\left[\sum_{l\in M^*(n,r)} p^{r-l-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right] \pmod{p^{N+1}}.$$

Ce qui achève la preuve du Théorème 2.3. □

Corollaire 2.3. *Soient n,m deux entiers positifs, N un entier naturel et p un nombre premier tels que $n,m \geqslant N+r+1$ et $p-1 \nmid n-l$, pour tout $l \in M^*(n,r)$. Si $m \equiv n \pmod{p^N(p-1)}$ alors on a*

$$\frac{B_m^{(r)}}{r\binom{m}{r}} \equiv \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} \pmod{p^{N+1}}.$$

.

Preuve. Pour $n, m \geqslant N+r+1$ on a $n-r, m-r \geqslant N+1$.
De plus, les nombres $\frac{B_{n-l}}{n-l}$, $\frac{B_{m-l}}{m-l}$ sont p-entiers et $r-l-1 \geqslant 0$, pour tout $l \in M^*(n,r)$.
Donc

$$\begin{aligned} p^{m-r}\left[\sum_{l\in M^*(m,r)} p^{r-l-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{m-l}}{m-l}\right] &\equiv 0 \pmod{p^{N+1}}, \\ p^{n-r}\left[\sum_{l\in M^*(n,r)} p^{r-l-1}|s(r,r-l)|\frac{B_{n-l}}{n-l}\right] &\equiv 0 \pmod{p^{N+1}}. \end{aligned} \tag{2.3}$$

Par suite, les relations (2.2) et (2.3) nous donnent le résultat attendu. □

2.2 Séries d'Eisenstein associées aux nombres de Bernoulli généralisés $B_k^{(r)}$

Dans cette partie nous construisons de nouvelles séries d'Eisenstein associées aux nombres de Bernoulli généralisés $B_k^{(r)}$ et nous établissons leurs congruences de Kummer.
Soient k et r deux entiers strictement positifs tels que $k \geqslant r$. On désigne par

$$E_k^{(r)}(z) := \frac{(-1)^r}{2}\frac{B_k^{(r)}}{r\binom{k}{r}} + \sum_{n\geqslant 1}\sigma_{k-1}^{(r)}(n)q^n$$

où

$$\mathrm{Im}(z) > 0; q := e^{2\pi i z},\ \sigma_{k-1}^{(r)}(n) := \frac{1}{2}\sum_{d|n}\left[< d >_r + (-1)^k (d)_r\right] d^{k-r-1}$$

avec

$$< d >_r = d(d+1)\cdots(d+r-1) \quad \text{et} \quad (d)_r = d(d-1)\cdots(d-r+1),$$

les séries d'Eisenstein d'ordres r associées aux nombres de Bernoulli généralisés $B_k^{(r)}$.
En particulier pour $r=1$, on a

$$\sigma_{k-1}^{(1)}(n) = \begin{cases} \sigma_{k-1}(n) = \sum_{d|n} d^{k-1} & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon ,} \end{cases}$$

et

$$E_k^{(1)}(z) = \begin{cases} E_k(z) = -\frac{B_k}{2k} + \sum_{n\geqslant 1}\sigma_{k-1}(n)q^n & \text{si } k \text{ est pair} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

E_k est la k-ième série d'Eisenstein classique. Notons que pour $k \geqslant 4$, E_k est une forme modulaire sur $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ de poids k. Cependant, pour $r \geqslant 2$, $E_k^{(r)}$ n'est pas une forme modulaire au sens classique. Dans [51], J-P. Serre note par G_k la forme modulaire E_k.

2.2.1 Résultats sur les séries d'Eisenstein $E_k^{(r)}(z)$

Dans ce qui suit nous exprimons la série d'Eisenstein $E_k^{(r)}(z)$, en fonction des séries d'Eisenstein classiques E_{k-l} pour $l \in M^*(k,r)$. Nous établissons également des congruences de Kummer pour ces séries. En outre nous formulons l'expression de $E_k^{(r)}(z)$ en fonction des valeurs spéciales de la fonction zêta d'ordre r.

Théorème 2.4. *Soient k et r des entiers strictement positifs, avec $k \geqslant r+1$. On a*

$$E_k^{(r)}(z) = \sum_{l \in M^*(k,r)} |s(r, r-l)| E_{k-l}(z), \tag{2.4}$$

où $E_k(z) = \frac{(-1)^k}{2}\zeta(1-k) + \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-1}(n) q^n$ est la $k^{\text{ème}}$ série d'Eisenstein de poids k, et $\zeta(s)$ est la fonction zêta de Riemann donnée par $\zeta(s) = \sum_{n \geqslant 1} n^{-s}$, pour $\Re(s) > 1$.

Remarque 2.1. *Si $k \geqslant r+3$ et $l \in M^*(k,r)$, alors on a $k-l \geqslant 4$ et E_{k-l} est une forme modulaire sur $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $k-l$.*

On pose $M_k^{(r)} = \bigoplus_{l \in M^*(k,r)} M_{k-l}$, où M_{k-l} est l'ensemble des formes modulaires de poids $k-l$, de la forme $\sum_{n \geqslant 0} a_n q^n$ où les coefficients a_n sont des nombres rationnels p-entiers.

Corollaire 2.4. *Soient k et r deux entiers strictement positifs tels que $k \geqslant r+3$. On a*

$$E_k^{(r)} \in M_k^{(r)}.$$

Théorème 2.5. *Soient k, k' deux entiers positifs, N un entier naturel et p un nombre premier tels que $k, k' \geqslant N+r+1$ et $p-1 \nmid n-l$, pour tout $l \in M^*(k,r)$. Si $k \equiv k' \pmod{p^N(p-1)}$ alors on a*

$$E_k^{(r)} \equiv E_{k'}^{(r)} \pmod{p^{N+1}}.$$

Le terme constant dans $E_k^{(r)}(z)$, s'exprime en fonction des valeurs spéciales aux entiers négatifs de la fonction zêta de Riemann de dimension r définie par

$$\zeta_r(s,x) = \sum_{n_1, n_2, \cdots, n_r \geqslant 0} \frac{1}{(x + n_1 + n_2 + \cdots + n_r)^s}, \text{ pour } \Re(s) > r \text{ et } x > 0.$$

Proposition 2.2. *Soient r et k deux entiers strictement positifs. On a :*

(i) La fonction $s \mapsto \zeta_r(s,x)$ a un prolongement analytique sur tout le plan complexe, avec un pôle simple en $s = r$. De plus, pour $k \geqslant r$ on a

$$\zeta_r(r-k, r) = (-1)^{r-k} \frac{(k-r)!}{k!} B_k^{(r)}.$$

(ii) Pour $k \geqslant r+1$ on a

$$E_k^{(r)}(z) = \frac{(-1)^k(r-1)!}{2}\,\zeta_r(r-k,r) + \sum_{l\in M^*(k,r)} |s(r,r-l)| \sum_{n\geqslant 1} \sigma_{k-l-1}(n)q^n.$$

Remarque 2.2. *En suivant la théorie de J-P. Serre des formes modulaires p-adiques, telle que présentée dans [51], nous pouvons construire la version p-adique de $E_k^{(r)}$. Ceci n'est pas l'objectif de notre travail.*

2.2.2 Preuves des principaux résultats de la partie 2.2.1

Pour prouver les principaux résultats de la partie 2.2.1, nous utilisons les lemmes suivants :

Lemme 2.2. *Soient k, r et n des entiers strictement positifs tels que $k \geqslant r$. On a*

$$\sigma_{k-1}^{(r)}(n) = \sum_{l\in M^*(k,r)} |s(r,r-l)|\sigma_{k-l-1}(n).$$

Preuve. Soit d un diviseur de n. On a

$$< d >_r = d(d+1)\cdots(d+r-1) = \sum_{l=0}^{r} |s(r,l)|d^l.$$

Comme $|s(r,0)| = 0$, on obtient alors

$$< d >_r = \sum_{l=0}^{r-1} |s(r,r-l)|d^{r-l}.$$

D'autre part, avec les nombres de Stirling $s(r,l)$ de premiȓe espèce on a aussi

$$\begin{aligned}(d)_r &= \sum_{l=0}^{r} s(r,l)d^l = \sum_{l=0}^{r} (-1)^{r+l}|s(r,l)|d^l \\ &= \sum_{l=0}^{r-1} (-1)^l |s(r,r-l)|d^{r-l},\end{aligned}$$

cf [18, pp. 47–48]. Par consq́uent, on trouve

$$\begin{aligned}< d >_r +(-1)^k(d)_r &= \sum_{l=0}^{r-1} \left[1+(-1)^{k-l}\right] |s(r,r-l)|d^{r-l} \\ &= 2\sum_{l\in M^*(k,r)} |s(r,r-l)|d^{r-l}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\sigma_{k-1}^{(r)}(n) &= \frac{1}{2}\sum_{d|n}\left[2\sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|d^{r-l}\right]d^{k-r-1}\\ &= \sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|\sum_{d|n}d^{k-l-1}\\ &= \sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|\sigma_{k-l-1}(n).\end{aligned}$$

On obtient ainsi le Lemme 2.2. □

Lemme 2.3. *Soient k, k', n des entiers positifs et N un entier naturel avec $k, k' \geqslant N + r + 1$. Si p est un nombre premier tel que $k \equiv k' \pmod{p^N(p-1)}$ alors on a*

$$\sigma_{k-1}^{(r)}(n) \equiv \sigma_{k'-1}^{(r)}(n) \pmod{p^{N+1}}.$$

Preuve. Par le Lemme 2.2, on a

$$\sigma_{k-1}^{(r)}(n) = \sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|\sum_{d|n}d^{k-l-1}.$$

Pour établir le Lemme 2.3, il suffit de prouver que

$$d^{k-l-1} \equiv d^{k'-l-1} \pmod{p^{N+1}} \tag{2.5}$$

pour tout diviseur d de n et pour tout l dans $M^*(k,r)$.
Si d est non divisible par p on a $d^{p^N(p-1)} \equiv 1 \pmod{p^{N+1}}$. Par contre si p divise d on a $k-l-1, k'-l-1 \geqslant N+1$ et donc on obtient $d^{k-l-1} \equiv d^{k'-l-1} \equiv 0 \pmod{p^{N+1}}$.
Ce qui assure la relation (2.5). □

Preuve du Théorème 2.4.
Du Lemme 2.2 et la relation (1.12), on a

$$\begin{aligned}E_k^{(r)}(z) =& \frac{(-1)^{2r-1}}{2}\sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|\frac{B_{k-l}}{k-l}\\ &+\sum_{n\geqslant 1}\sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|\sigma_{k-l-1}(n)q^n.\end{aligned}$$

Par suite, on obtient

$$E_k^{(r)}(z) = \sum_{l\in M^*(k,r)}|s(r,r-l)|\left(-\frac{B_{k-l}}{2(k-l)}+\sum_{n\geqslant 1}\sigma_{k-l-1}(n)q^n\right).$$

Par conséquent, on trouve la formule souhaitée

$$E_k^{(r)}(z) = \sum_{l \in M^*(k,r)} |s(r, r-l)| E_{k-l}(z).$$

Ceci termine la preuve du Théorème 2.4. $\square$

De plus, de la formule (2.4) on déduit que $E_k^{(r)} \in \bigoplus_{l \in M^*(k,r)} M_{k-l}$, car $E_{k-l}(z)$ sont des formes modulaires pour $SL_2(\mathbb{Z})$ de poids $k-l$ pour tout $l \in M^*(k,r)$. Cala prouve le Corollaire 2.4.
Le Théorème 2.5 peut être déduit du Corollaire 2.3 et du Lemme 2.3. Ce résultat donne une généralisation des congruences de Kummer classiques sur la série d'Eisenstein E_k.

Preuve de la proposition 2.2.
La première partie de la Proposition 2.2 est prouvée dans [6] (voir la formule (10)) et [16, pp. 668–669]. De plus, on obtient

$$\frac{(-1)^r B_k^{(r)}}{2r\binom{k}{r}} = \frac{(-1)^k (r-1)!}{2} \, \zeta_r(r-k, r). \tag{2.6}$$

De la relation (2.6) et du Lemme 2.2, on trouve

$$E_k^{(r)}(z) = \frac{(-1)^k (r-1)!}{2} \, \zeta_r(r-k, r) + \sum_{l \in M^*(k,r)} |s(r, r-l)| \sum_{n \geqslant 1} \sigma_{k-l-1}(n) q^n.$$

Ceci termine la preuve de la Proposition 2.2. $\square$

Chapitre 3

Dénominateurs et coefficients de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$

Dans ce chapitre, nous donnons une expression explicite des dénominateurs des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$, et un analogue de la formule de Clausen-von Staudt pour ces nombres.

3.1 Rappels sur la valuation p-adique d'un rationnel

La notion de valuation p-adique d'un nombre rationnel est un cas particulier de la théorie des valuations sur un corps. Cette notion est traitée par plusieurs auteurs, nous citons à titre d'exemples : Y. Amice [3, p. 22–28], E. Artin [5, p. 28], Z.I. Borevich [10, p. 195, p. 198–200], R. Descombes [20, p. 16], F.Q. Gouvêa [24, p. 25], H. Hasse [27, p. 119], R.L. Long [39, p. 15], M.P. Malliavin [40, p. 198], R. Ribenboim [48, p. 76], O.F. Schilling [53, p. 4].

Proposition 3.1. *Soit p un nombre premier et u un nombre rationnel non nul. Alors il existe un unique entier relatif n tel que*

$$u = p^n \frac{a}{b} \tag{3.1}$$

où $a \in \mathbb{Z}^*$ et $b \in \mathbb{N}^*$ avec $pgcd(ab,p) = 1$.

Définition 3.1. *Soit p un nombre premier et u un nombre rationnel. La valuation p-adique de u est le nombre $v_p(u) = ord_p(u) = \begin{cases} +\infty & si\ u = 0 \\ n & si\ u \neq 0 \end{cases}$,*
où n est l'exposant de p défini dans la relation (3.1).

Proposition 3.2. *Avec les mêmes notations de la Définition 3.1, on a*

$$u \neq 0 \text{ si et seulement si } v_p(u) < +\infty.$$

Proposition 3.3. *Soient m un entier strictement positif, $u_1, u_2, ..., u_m$ des nombres rationnels, $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_m$ des entiers relatifs non nuls et p un nombre premier. On a :*

1) $v_p(u_1 + u_2 + ... + u_m) \geqslant \min(v_p(u_1), v_p(u_2), ..., v_p(u_m))$*,*

2) s'il existe $i_0 \in \{1, ..., m\}$ tel que pour tout $i \in \{1, ..., m\} \setminus \{i_0\}$, $v_p(u_i) > v_p(u_{i_0})$, alors on a

$$v_p(u_1 + u_2 + ... + u_m) = \min(v_p(u_1), v_p(u_2), ..., v_p(u_m)) = v_p(u_{i_0}) < +\infty$$

et $\quad u_1 + u_2 + ... + u_m \neq 0$*,*

3) si les nombres $u_1, u_2, ..., u_m$ sont non nuls alors on obtient

$$v_p(u_1^{\alpha_1}.u_2^{\alpha_2}...u_m^{\alpha_m}) = \alpha_1 v_p(u_1) + \alpha_2 v_p(u_2) + ... + \alpha_m v_p(u_m).$$

Proposition 3.4. *[30, p. 233] Soit p un nombre premier, n un entier strictement positif, s et t deux p-entiers de $\mathbb{Z}_{(p)}$ et u un nombre rationnel. On a :*

1) u est p-entier si et seulement si $v_p(u) \geqslant 0$,

2) $s \equiv t \pmod{p^n}$ si et seulement si $v_p(s - t) \geqslant n$.

3.2 Dénominateurs et formule de Clausen-von Staudt

D'après la relation (1.2), on a $(r-1)!B_n^{(r)} = (-1)^n n!(r-1-n)!|s(r, r-n)|$ pour tout $0 \leqslant n \leqslant r-1$. Ce qui montre que ces nombres sont des entiers relatifs de dénominateurs 1. Nous nous intéressons désormais au cas $n \geqslant r$. Avant d'énoncer le théorème principal de ce chapitre, nous introduisons les ensembles $S_1(n, r)$, $S_2(l, n, r)$ et les coefficients de Clausen-von Staudt.

3.2.1 Les ensembles $S_1(n, r)$, $S_2(l, n, r)$, $S_2(n, r)$ et les coefficients de Clausen-von Staudt

Définition 3.2 (Les ensembles $S_1(n, r)$, $S_2(l, n, r)$ et $S_2(n, r)$)**.**
Soient l, n et r des entiers naturels tels que $n \geqslant r \geqslant l + 1$. On définit les ensembles :

1) $S_1(n, r) = \{p \text{ premier } : [\frac{r}{2}] + 1 \leqslant p \leqslant r - 1,\ p - 1 | n \text{ et } p | n + 1\}$*,*

2) pour $l \in M^*(n, r)$:

- *(a)* $S_2(0, n, r) = \{p \text{ premier } : r + 1 \leqslant p \leqslant n - r,\ p - 1 | n \text{ et } p \nmid \frac{A_n^r}{n}\}$*,*
- *(b)* $S_2(l, n, r) = \{p \text{ premier } : r + 1 \leqslant p \leqslant n + 1,\ p - 1 | n - l,\ p \nmid \frac{A_n^r}{n-l} \text{ et } p \nmid |s(r, r - l)|\}$ *si $l \geqslant 1$, où $A_n^r = n(n-1)...(n-r+1)$,*

3) $S_2(n, r) = \bigcup\limits_{l \in M^*(n,r)} S_2(l, n, r)$*.*

Notation 3.1. *Soient n et l deux entiers naturels tels que $0 \leqslant l \leqslant n$ et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres rationnels. On désigne par $a_0 a_1 ... \overset{\vee}{a_l} ... a_n$, le nombre obtenu en remplaçant a_l par 1 dans le produit $\prod_{i=1}^{n} a_i$.*

Définition 3.3 (Coefficients de Clausen-von Staudt)**.**
Soient k, l, n et r des entiers naturels tels que $n \geqslant r \geqslant l+1$ et p un nombre premier. On définit les coefficients de Clausen-von Staudt $\delta_k, \gamma_r(n), \alpha_r(n), \lambda(n,r)$ et $c_p(n,r,l)$ associées aux nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$ par :

1)

$$\delta_k = \begin{cases} 1 & \textit{si } k \textit{ est premier} \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases},$$

2)

$$\gamma_r(n) = \begin{cases} 1 & \textit{si } r \textit{est premier tel que } r-1|n \textit{ et } r|n(n+1) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases},$$

3)

$$\alpha_r(n) = \begin{cases} 0 & \textit{si } r|n \\ 1 & \textit{si } r|n+1 \end{cases},$$

4)

$$\lambda(n,r) = \begin{cases} 1 & \textit{si } (r,n) = (1,2) \\ 0 & \textit{sinon} \end{cases},$$

5) et pour tout $n \equiv a \pmod p, a \in \{l\} \cup \{r, r+1, ..., p-1\}$ et $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$,

$$c_p(n,r,l) = (-1)^r a(a-1)...(\overset{\vee}{a-l})...(a-r+1).$$

Proposition 3.5 (Propriétés des ensembles $S_1(n,r)$)**.**
Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$. On a :

1) si $S_1(n,r) \neq \emptyset$ alors $r \geqslant 3$, de plus pour tout $p \in S_1(n,r)$ on a $2p \geqslant r+1$,

2) si n est pair alors $2 \notin S_1(n,r)$,

3) si n est impair alors $S_1(n,r) = \begin{cases} \{2\} & \textit{si } r = 3 \\ \emptyset & \textit{si } r \neq 3 \end{cases}$,

4) si $p \in S_1(n,r)$ alors $p-1 \in M^*(n,r)$, de plus les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

   (a) $p-1|n$ et $p|n+1$,

   (b) $p-1|n$ et $\dfrac{n}{p-1} \equiv 1 \pmod p$,

   (c) Il existe un entier naturel h non nul tel que $n = p-1+hp(p-1)$.

Pour la preuve de cette proposition on utilise le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Soient n, l, k des entiers relatifs et p un nombre premier. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $p-1|n-l$ *et* $p|n-k$,

2) $n-l \equiv (p-1)(l-k) \pmod{p(p-1)}$,

3) $p-1|n-l$ *et* $\dfrac{n-l}{p-1} \equiv l-k \pmod{p}$,

4) $n = l + (p-1)(l-k) + hp(p-1)$, *où* $h \in \mathbb{Z}$.

Preuve.
1) est équivalente à 2).
On a $p-1|n-l$ est équivalent à $p-1|n-l+(p-1)(k-l)$. De même $p|n-k$ est équivalent à $p|n-k+p(k-l) = n-l+(p-1)(k-l)$.
Comme $pgcd(p, p-1) = 1$ alors on a : ($p-1|n-l$ et $p|n-k$) équivaut à

$$p(p-1)|n-l+(p-1)(k-l).$$

Ce qui est équivalent en terme de congruences à $n-l+(p-1)(k-l) \equiv 0 \pmod{p(p-1)}$ ou encore à $n-l \equiv (l-k)(p-1) \pmod{p(p-1)}$.
D'où le résultat.
2) est équivalente à 3).
Si $n-l \equiv (l-k)(p-1) \pmod{p(p-1)}$ alors $n-l$ est divisible par $p-1$, donc en divisant tous les termes de cette congruence par $p-1$, on obtient l'équivalence demandée.
L'équivalence **entre (2) et (4)** est triviale. □

Preuve de la proposition 3.5.
1) Supposons que $S_1(n,r) \neq \emptyset$. Pour tout $p \in S_1(n,r)$ on a $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$.
Comme $p \geqslant 2$ donc la condition $p \leqslant r-1$ implique $r \geqslant 3$.
D'autre part : $p \geqslant [\dfrac{r}{2}]+1$ équivaut à $p-1 \geqslant [\frac{r}{2}]$ ou à $p-1 > \frac{r}{2}-1$. D'où $2p > r$ et par suite $2p \geqslant r+1$.
2) Supposons que n est pair et soit $p \in S_1(n,r)$. On a $2 \nmid n+1$ qui est impair et $p|n+1$. Donc $p \neq 2$ pour tout $p \in S_1(n,r)$ et par suite $2 \notin S_1(n,r)$.
3) Supposons que n est impair et $S_1(n,r) \neq \emptyset$. Pour tout $p \in S_1(n,r)$ on a $p-1|n$. Comme n est impair alors $p-1$ l'est aussi. Par suite p est à la fois pair et premier, d'où $p=2$.
Par conséquent on a $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant 2$ et $r \geqslant 3$, ce qui donne $r=3$.
D'où l'on conclut que $S_1(n,r) = \begin{cases} \{2\} & \text{si } r=3 \\ \emptyset & \text{si } r \neq 3 \end{cases}$.
4) Si $p \in S_1(n,r)$ alors $p(p-1)|n-p+1$ et donc $p-1 \in M^*(n,r)$.
D'autre part en posant $l=0$ et $k=-1$ dans le Lemme 3.1, on déduit l'equivalence entre (a), (b) et (c) avec $h \in \mathbb{Z}$. De plus on a $n \geqslant r \geqslant p+1$ donc $p-1+hp(p-1) \geqslant p+1$. Ce qui implique $hp(p-1) \geqslant 2$ et $h \in \mathbb{N}^*$. □

Proposition 3.6 (Propriétés des ensembles $S_2(l,n,r)$).
Soient n, r, l, l_1 et l_2 des entiers naturels tels que $n \geqslant r \geqslant 1$ et $l, l_1, l_2 \in M^*(n,r)$. On a :

1) si $l_1 \neq l_2$ alors $S_2(l_1,n,r) \cap S_2(l_2,n,r) = \emptyset$,

2) si $p \in S_2(l,n,r)$ alors les cinq propriétés suivantes sont équivalentes :

(a) $p-1 | n-l$ et $p \nmid \dfrac{A_n^r}{n-l}$,

(b) $p-1 | n-l$ et $n \notin \{0, ..., \overset{\vee}{l}, ..., r-1\} \pmod{p}$,

(c) $p-1 | n-l$ et $n \in \{l\} \cup \{r, r+1, ..., p-1\} \pmod{p}$,

(d) $p-1 | n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1} \notin \{l, l-1, ..., \overset{\vee}{0}, ..., l-r+1\} \pmod{p}$,

(e) $p-1 | n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1} \in \{0\} \cup \{l+1, ..., p+l-r\} \pmod{p}$,

3) si $S_2(l,n,r) \neq \emptyset$ alors on a :

(a) $l = 0$ implique $n \geqslant 2r+1$,

(b) $l \geqslant 1$ et $p \in S_2(l,n,r)$ impliquent $p \leqslant n+1-l(r+1) \leqslant n-r$ et $n \geqslant (l+1)(r+1)-1$,

(c) $M(n,r) = M^*(n,r)$.

4) si $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$ alors on a :

(a) $p \in S_2(l,n,r)$ si et seulement si $p \nmid |s(r, r-l)|$ et il existe un couple (u,h) d'entiers tel que $n = l + u(p-1) + hp(p-1)$ avec $u \in \{0\} \cup \{l+1, ..., p+l-r\}$, $h \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} (u,h) \neq (0,0) \text{ et } (l,u,h) \neq (0,1,0) & \text{si } p \geqslant 3 \\ u = 0 \text{ et } h \geqslant 2 & \text{si } p = 2 \end{cases}$,

(b) $p-1 | n-l$ et $p \notin S_2(l,n,r)$ impliquent $p \notin S_2(j,n,r)$ pour tout $j \in M^*(n,r)$.

Pour la preuve de cette proposition on utilise les trois lemmes suivants :

Lemme 3.2. *Soient n, r, l, i des entiers naturels et p un nombre premier tels que $n \geqslant r \geqslant 1$, $0 \leqslant i, l \leqslant r-1$ et $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$. Si $p-1 | pgcd(n-l, n-i)$ alors $l = i$.*

Preuve. Supposons que $p-1 | n-l$ et $p-1 | n-i$, $0 \leqslant l, i \leqslant r-1$.
Donc

$$p-1 \mid (n-l) - (n-i) = i - l.$$

D'où

$$i - l = k(p-1), \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Comme $0 \leqslant i, l \leqslant r-1$ on a $-(r-1) \leqslant i-l \leqslant (r-1)$ et $-(r-1) \leqslant k(p-1) \leqslant (r-1)$.
Par suite on obtient $-1 < \frac{-(r-1)}{p-1} \leqslant k \leqslant \frac{(r-1)}{p-1} < 1$. Ce qui donne $k = 0$, $i = l$.
D'où la preuve du Lemme 3.2. □

Lemme 3.3. *Soient n, r, l des entiers naturels et p un nombre premier tels que $n \geqslant r \geqslant 1$, $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$ et $l \in M(n,r)$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $p-1|n-l$ *et* $p\nmid \dfrac{A_n^r}{n-l}$,

2) $p-1|n-l$ *et* $n\notin\{0,...,\overset{\vee}{l},...,r-1\} \pmod p$,

3) $p-1|n-l$ *et* $n\in\{l\}\cup\{r,r+1,...,p-1\} \pmod p$,

4) $p-1|n-l$ *et* $\dfrac{n-l}{p-1}\notin\{l,l-1,...,\overset{\vee}{0},...,l-r+1\} \pmod p$,

5) $p-1|n-l$ *et* $\dfrac{n-l}{p-1}\in\{0\}\cup\{l+1,...,p+l-r\} \pmod p$,

6) $n=l+u(p-1)+hp(p-1)$ *où* $u\in\{0\}\cup\{l+1,...,p+l-r\}$, $h\in\mathbb{N}$
et $\begin{cases}(u,h)\neq(0,0) & si\ p\geqslant 3\\ (u,h)\in\{(1,0)\}\cup\{0\}\times\mathbb{N}^* & si\ p=2\end{cases}$.

Preuve.
1) est équivalente à 2).
On a $p|\frac{A_n^r}{n-l}=\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{n-l}$ si et seulement s'il existe $k\in\mathbb{N},k\neq l,0\leqslant k\leqslant r-1$ tel que $p|n-k$.
Donc $p\nmid\frac{A_n^r}{n-l}$ est équivalente à $p\nmid n-k$, pour tout $k\in\mathbb{N},0\leqslant k\leqslant r-1,k\neq l$.
Ou encore en terme de congruences, on a $n\not\equiv k \pmod p$, pour tout $k\in\mathbb{N},0\leqslant k\leqslant r-1,k\neq l$. Ce qui s'écrit aussi $n\notin\{0,...,\overset{\vee}{l},...,r-1\} \pmod p$.
2) est équivalente à 3).
Cette équivalence découle du fait que les ensembles $\{0,...,\overset{\vee}{l},...,r-1\}$ et $\{l\}\cup\{r,r+1,...,p-1\}$ sont complémentaires modulo p.
1) est équivalente à 4).
D'après le Lemme 3.1, on a
$(p-1|n-l$ et $p|n-k)$ si et seulement si $(p-1|n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1}\equiv l-k \pmod p)$.
D'où, $(p-1|n-l$ et $p|\frac{A_n^r}{n-l}=\frac{n(n-1)...(n-r+1)}{n-l})$ est équivalente à $(p-1|n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1} \pmod p\in\{l,l-1,...,\overset{\vee}{0},...,l-r+1\})$.
Par conséquent, on a $(p-1|n-l$ et $p\nmid\frac{A_n^r}{n-l})$ si et seulement si $(p-1|n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1} \pmod p\notin\{l,l-1,...,\overset{\vee}{0},...,l-r+1\})$.
4) est équivalente à 5).
Comme d'une part, les ensembles $\{l,l-1,...,\overset{\vee}{0},...,l-r+1\}$ et $\{0\}\cup\{l-r,...,l-p+1\}$ sont complémentaires modulo p et d'autre part on a $\{0\}\cup\{l-r,...,l-p+1\} \pmod p=\{0\}\cup\{p+l-r,...,l+1\} \pmod p=\{0\}\cup\{l+1,...,p+l-r\} \pmod p$. On déduit alors l'équivalence entre 4) et 5).
5) est équivalente à 6).
Comme $\dfrac{n-l}{p-1}\in\mathbb{N}^*$ et $l\in M(n,r)$ alors $p-1|n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1}\in\{0\}\cup\{l+1,...,p+l-r\}$

(mod p) si et seulement si $p-1|n-l$ et $\dfrac{n-l}{p-1}=u+hp$, où $u\in\{0\}\cup\{l+1,...,p+l-r\}, h\in\mathbb{N}$, avec $(u,h)\neq(0,0)$ et $l\in M(n,r)$. Ce qui est équivalente à

$$n=l+u(p-1)+hp(p-1) \text{ avec } u\in\{0\}\cup\{l+1,...,p+l-r\}, h\in\mathbb{N}, (u,h)\neq(0,0) \text{ et } l\in M(n,r).$$

Remarquons que si $p\geqslant 3$ alors $p-1$ est pair et donc $l\in M^*(n,r)$. Par contre si $p=2$ alors $r=1$, $l=0$ et la condition $l\in M(n,r)$ est équivalente alors à n pair ou $n=1$.
D'où l'équivalence entre 5) et 6). □

Lemme 3.4. *Soient n, r, l des entiers naturels et p un nombre premier tels que $n\geqslant r\geqslant 1$, $r+1\leqslant p\leqslant n+1$ et $l\in M(n,r)$. Si l'une des propriétés du Lemme 3.3 est vérifiée, alors on a*

(a) pour $l\geqslant 1$ on a $p\leqslant n+1-l(r+1)\leqslant n-r$,

(b) pour $l=0$ on a trois cas :

- *(i) si $(u,h)=(1,0)$ alors $p=n+1$,*
- *(ii) si $(u,h,p)=(0,1,2)$ alors $p=n-r+1$ et $r=1$,*
- *(iii) si $(u,h)\neq(1,0)$ et $(u,h,p)\neq(0,1,2)$ alors $p\leqslant n-r$.*

Preuve. Supposons que l'une des propriétés équivalentes du Lemme 3.3 soit vraiée.
(a) D'après la propriété 6) du Lemme 3.3, on a $\dfrac{n-l}{p-1}=m=u+hp\geqslant l+1$, avec $p\geqslant r+1$.
Donc $n-l=m(p-1)=(m-1)(p-1)+p-1$.
D'où l'on déduit que $p=n+1-l-(m-1)(p-1)\leqslant n+1-l-lr=n+1-l(r+1)$.
Comme $l\geqslant 1$ alors $n+1-l(r+1)\leqslant n+1-(r+1)=n-r$.
(b) Supposons que $l=0$.
(i) Si $(u,h)=(1,0)$ alors la propriété 6) du Lemme 3.3 implique $n=p-1$, et donc $p=n+1$.
(ii) Si $(u,h,p)=(0,1,2)$ alors d'après la propriété 6) du Lemme 3.3 on a $n=p=2$.
Comme $p\geqslant r+1$ alors $r=1$ et $p=n-r+1$.
(iii) Supposons que $(u,h)\neq(1,0)$ et $(u,h,p)\neq(0,1,2)$.
Si $(u,h)=(2,0)$, la propriété 6) du Lemme 3.3 implique $2\in\{1,...,p-r\}$, et donc $p\geqslant r+2$.
Comme $n=2(p-1)=p+p-2$ alors $p=n-p+2\leqslant n-(r+2)+2=n-r$.
Si ($u=0$, $h\geqslant 2$) ou ($u\in\{1,2\}$ et $h\neq 0$) ou $u\geqslant 3$, alors $\dfrac{n}{p-1}=u+hp=m\geqslant 3$.
Comme $n=m(p-1)=p-1+(m-1)(p-1)$ alors $p=n+1-(m-1)(p-1)\leqslant n+1-2r\leqslant n-r$. □

Preuve de la proposition 3.6.
Les propriétés 1) et 2) découlent des lemmes 3.2 et 3.3 respectivement.
3) (a) Si $l=0$ alors la condition $r+1\leqslant p\leqslant n-r$ entraine $n-r\geqslant r+1$, d'où $n\geqslant 2r+1$.
(b) Si $l\geqslant 1$ et $p\in S_2(l,n,r)$ alors la propriété (a) du Lemme 3.4 implique $r+1\leqslant p\leqslant n+1-l(r+1)$. D'où $n+1-l(r+1)\geqslant r+1$, et donc $n\geqslant(l+1)(r+1)-1$.
(c) De (a) et (b) on déduit que $n\geqslant r+1$, donc $M(n,r)=M^*(n,r)$.

4) (a) découle de la propriété 6) du Lemme 3.3 et de la propriété (b) du Lemme 3.4.
(b) Comme $p-1|n-l$ alors d'après le Lemme 3.2 on a :
$p-1 \nmid n-j$, pour tout $j \in M^*(n,r) \setminus \{l\}$ et donc $p \notin S_2(j,n,r)$, de plus on a $p \notin S_2(l,n,r)$, ce qui permet de conclure. $\square$

Remarque 3.1.

1) La condition $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$ de la Définition 3.2, la Proposition 3.6 et les lemmes 3.2, 3.3 et 3.4, peut être remplacée par la condition $p \geqslant r+1$. Car si $p|n-l$ pour un certain l compris entre 0 et $r-1$ alors $p-1 \leqslant n-l \leqslant n$ et $p \leqslant n+1$.

*2) D'après la propriété 4)(a) de la Proposition 3.6, on a
$2 \in S_2(0,n,1)$ si et seulement si $n=2h$ avec $h \geqslant 2$.*

Proposition 3.7 (Propriétés des ensembles $S_2(n,r)$)**.**
Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$. On a :

1) les ensembles $S_2(l,n,r)$, $l \in M^*(n,r)$ forment une partition de $S_2(n,r)$,

2) si $p \in S_2(n,r)$ alors $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$,

3) $S_2(n,r) \neq \emptyset$ implique $n \geqslant 2r+1$,

4) si $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M^*(n,r)$, alors $p \notin S_2(n,r)$,

5) s'il existe $l \in M^*(n,r)$ tel que $p-1|n-l$, alors $p \in S_2(l,n,r)$ ou $p \notin S_2(n,r)$.

Preuve. La preuve de cette proposition découle de la Définition 3.2 et de la Proposition 3.6. $\square$

Proposition 3.8 (Propriétés des coefficients $\gamma_r(n)$)**.**
Soient n un entier strictement positif et r un nombre premier tels que $n \geqslant r$. Alors les trois propriétés suivantes sont équivalentes :

(i) $r-1|n$ *et* $r|n(n+1)$,

(ii) $r-1|n$ *et* $\dfrac{n}{r-1} \in \{0,1\} \pmod r$,

(iii) Il existe un couple d'entiers (u,h), $u \in \{0,1\}$, $h \in \mathbb{N}^*$ tel que $n = u(r-1) + hr(r-1)$.

Pour la preuve de cette proposition nous utilisons les deux lemmes suivants :

Lemme 3.5. *Soit n un entier strictement positif et r un nombre premier tels que $n \geqslant r$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*

(a) $r-1|n$ *et* $r|n$,

(b) $r-1|n$ *et* $\dfrac{n}{r-1} \equiv 0 \pmod r$,

(c) $n = hr(r-1)$, *où* $h \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. On prend $l=0$, $k=0$ et $p=r$ dans le Lemme 3.1. De plus $n \geqslant r \geqslant 2$ donne $h \in \mathbb{N}^*$. $\square$

Lemme 3.6. *Soit n un entier naturel non nul et r un nombre premier tels que $n \geqslant r$. Alors les assertions suivantes sont équivalentes :*
(a) $r-1|n$ et $r|n+1$,
(b) $r-1|n$ et $\dfrac{n}{r-1} \equiv 1 \pmod r$,
(c) $n = r-1+hr(r-1)$, où $h \in \mathbb{N}^*$.

Preuve. On prend $l=0$, $k=-1$ et $p=r$ dans le Lemme 3.1. De plus $n \geqslant r \geqslant 2$ donne $h \in \mathbb{N}^*$. □

Preuve de la proposition 3.8.
Comme on a ($r-1|n$ et $r|n(n+1)$ si et seulement si, ($r-1|n$ et $r|n$) ou ($r-1|n$ et $r|n+1$). On conclut alors grâce aux lemmes 3.5 et 3.6. □

Proposition 3.9 (Propriétés des coefficients $\alpha_r(n)$)**.**
Soient n un entier strictement positif et r un nombre premier tels que $n \geqslant r$. On a :
1) les trois assertions du Lemme 3.5 sont équivalentes à $\gamma_r(n).(1-\alpha_r(n)) = 1$,
2) les trois assertions du Lemme 3.6 sont équivalentes à $\gamma_r(n).\alpha_r(n) = 1$.

Preuve. La preuve découle de la Définition 3.3 des coefficients $\alpha_r(n)$. □

Proposition 3.10 (Propriétés des coefficients $c_p(n,r,l)$)**.**
Soient n, r, l des entiers naturels et p un nombre premier tels que $l+1 \leqslant r \leqslant n$ et $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$. On a :

1) $$c_p(n,r,l) = \begin{cases} (-1)^{l+1} l!(r-1-l)! & si\ n \equiv l \pmod p \\ (-1)^r \dfrac{A_a^r}{a-l} & si\ n \equiv a \pmod p, a \in \{r, r+1, ..., p-1\}, \end{cases}$$

2) pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c_p(n,1,0) = -1$.

Preuve. D'après la Définition 3.3, on a

$$c_p(n,r,l) = (-1)^r a(a-1)...\overset{\vee}{(a-l)}...(a-r+1),$$

pour tout $n \equiv a \pmod p$ où $a \in \{l\} \cup \{r, r+1, ..., p-1\}$. D'où,
1) si $n \equiv l \pmod p$ alors on a

$$\begin{aligned} c_p(n,r,l) &= (-1)^r l(l-1)...(1).(-1)...(l-r+1) \\ &= (-1)^r l!(-1)^{r-1-l}(r-1-l)! \\ &= (-1)^{l+1} l!(r-1-l)! \pmod p, \end{aligned}$$

si $n \equiv a \pmod p$, $r \leqslant a \leqslant p-1$ alors on a

$$\begin{aligned} c_p(n,r,l) &= (-1)^r a(a-1)...(a-l+1)(a-l-1)...(a-r+1) \\ &= (-1)^r \tfrac{A_a^r}{a-l}. \end{aligned}$$

2) De plus pour $n \in \mathbb{N}^*$, on a $c_p(n,1,0) = (-1)^1 \overset{\vee}{a} = -1$. □

Proposition 3.11 (Propriétés des coefficients δ_{n+1} et $\lambda(n,r)$).
Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$.
On pose $S_2^*(0,n,r) = \{p$ premier $: r+1 \leqslant p \leqslant n+1, p-1 | n$ et $p \nmid \frac{A_n^r}{n}\}$.
On a :

1) $\delta_{n+1} = 1$ si et seulement si $n+1 \in S_2^*(0,n,r)$,

2) $\lambda(n,r) = 1$ si et seulement si $n-r+1 \in S_2^*(0,n,r)$.

Preuve. La preuve de cette proposition découle des lemmes 3.3 et 3.4. □

Proposition 3.12. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et p un nombre premier. On a :*

1) $S_2^*(0,n,r) = \{(n+1)^{\delta_{n+1}}, (n-r+1)^{\lambda(n,r)}\} \cup S_2(0,n,r)$,

2) $p \in S_2^*(0,n,r)$ équivaut à $p \geqslant r+1$ et $n = u(p-1) + hp(p-1)$,
où $u \in \{0,1,...,p-r\}$, $h \in \mathbb{N}$ et $\begin{cases} (u,h) \neq (0,0) & si\ p \geqslant 3 \\ (u,h) \in \{(1,0)\} \cup \{0\} \times \mathbb{N}^* & si\ p = 2 \end{cases}$.
De plus, on a :

(i) $2 \in S_2^*(0,n,1)$ équivaut à $n = 1$ ou $n = 2h$ avec $h \in \mathbb{N}^*$,

(ii) $(u,h) = (1,0)$ implique $\delta_{n+1} = 1$ et $p = n+1$,

(iii) $(u,h,p) = (0,1,2)$ implique $\lambda(n,r) = 1$ et $p = n-r+1$,

(iv) $(u,h) \neq (1,0)$ et $(u,h,p) \neq (0,1,2)$ implique $p \in S_2(0,n,r)$.

Preuve. La preuve découle de la Remarque 3.1 et des lemmes 3.3 et 3.4. □

3.2.2 Le théorème principal

On adopte les notations suivantes pour les produits et les sommes. Soit f une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{Q}$ et A un sous ensemble fini de $\mathbb{N}$. On note :

1) $\displaystyle\prod_{a\in A}^{*} f(a) = \begin{cases} 1 & \text{si } A = \emptyset \\ \displaystyle\prod_{a\in A} f(a) & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$, 2) $\displaystyle\sum_{a\in A}^{*} f(a) = \begin{cases} 0 & \text{si } A = \emptyset \\ \displaystyle\sum_{a\in A} f(a) & \text{si } A \neq \emptyset \end{cases}$.

Avec les mêmes notations précédentes nous montrons le résultat suivant :

Théorème 3.1 (Le théorème principal).
Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$. Alors le dénominateur d du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ est donné par :

$$d = (n+1)^{\delta_{n+1}} r^{\gamma_r(n)} (n-r+1)^{\lambda(n,r)} \prod_{p\in S_1(n,r)}^{*} p \times \prod_{l\in M^*(n,r)} \left(\prod_{p\in S_2(l,n,r)}^{*} p \right) \cdot \tag{3.2}$$

De plus, on a la formule de Clausen-von Staudt :

$$(r-1)!B_n^{(r)} + \sum_{p\in S_1(n,r)}^{*} \frac{(r-p)!}{p} - \frac{(-1)^{\alpha_r(n)}}{r}\gamma_r(n) + \frac{r!}{n+1}\delta_{n+1} + \frac{1}{n-r+1}\lambda(n,r)$$

$$- \sum_{l\in M^*(n,r)}^{*} |s(r,r-l)| \sum_{p\in S_2(l,n,r)}^{*} \frac{c_p(n,r,l)}{p} \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Corollaire 3.1. *Sous les hypothèses du Théorème 3.1 on a*

$$d = (n+1)^{\delta_{n+1}} r^{\gamma_r(n)} (n-r+1)^{\lambda(n,r)} \prod_{p\in S_1(n,r)}^{*} p \prod_{p\in S_2(n,r)}^{*} p. \tag{3.4}$$

Nous constatons que le dénominateur d est sans facteur carré et que ses diviseurs premiers sont les éléments de l'ensemble $S_1(n,r)\cup S_2(n,r)\cup\{(n+1)^{\delta_{n+1}}, (n-r+1)^{\lambda(n,r)}, r^{\gamma_r(n)}\}$.

Pour établir le Théorème 3.1, nous déterminerons pour $n \geqslant r$ fixés les nombres premiers p tels que $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) = -1$ et les coefficients a_p de Clausen-von Staudt associés à ces nombres. Nous étudions les cinq cas suivants :
1) $p > n+1$, 2) $p \leqslant [\frac{r}{2}]$, 3) $p = r$, 4) $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$, 5) $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$.

3.3 Lemmes préliminaires

Les lemmes de ce paragraphe donnent les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'un nombre premier p divise le dénominateur d du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ et permettent aussi de préciser sa valuation et son coefficient de Clausen-von Staudt.

On désigne par $\mathcal{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Lemme 3.7. *Soit $B \in \mathbb{Q}$ de dénominateur strictement supérieur à 1. On définit l'ensemble*

$$A = \{p \in \mathcal{P} : v_p(B) < 0\}.$$

Alors, pour tout $p \in A$, il existe un unique $a_p \pmod{p^{-v_p(B)}}$ tel que $a_p \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ et $p^{-v_p(B)}B \equiv a_p \pmod{p^{-v_p(B)}}$. De plus, on obtient

$$B - \sum_{p\in A} a_p p^{v_p(B)} \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. Écrivons $B = \dfrac{N}{D}$, avec $N \in \mathbb{Z}^*, D \in \mathbb{N}\backslash\{0,1\}$ et $\mathrm{pgcd}(N,D) = 1$. Alors on a $D = \prod_{p\in A} p^{-v_p(B)}$.

Pour $p \in A$, on pose $D_p = Dp^{v_p(B)}$. Par l'identité de Bezout, il existe $m_p, n_p \in \mathbb{Z}$ tel que $m_pD_p + n_pp^{-v_p(B)} = 1$.

Soit $a_p = Nm_p$, donc $p^{-v_p(B)}B - a_p = \dfrac{N}{D_p} - Nm_p = \dfrac{N}{D_p}(1-m_pD_p) = \dfrac{N}{D_p}n_pp^{-v_p(B)}$ est

p-entier. De plus, on a $p^{-v_p(B)}B \equiv a_p \pmod{p^{-v_p(B)}}$. Comme $\mathrm{pgcd}(m_p, p^{-v_p(B)}) = 1$ on a $a_p \not\equiv 0 \pmod{p}$.
Reste à montrer que le nombre $a = B - \sum_{p \in A} a_p p^{v_p(B)}$ est un entier relatif. On discute deux cas.
(i) Si $p_0 \in \mathcal{P} \setminus A$ alors $\sum\limits_{p \in A} a_p p^{v_p(B)}$ et B sont p_0-entiers, et donc a est un p_0-entier.
(ii) Si $p_0 \in A$ alors ${p_0}^{-v_{p_0}(B)}B \equiv a_{p_0} \pmod{{p_0}^{-v_{p_0}(B)}}$. En d'autres termes on a $p_0^{-v_{p_0}(B)}B = a_{p_0} + p_0^{-v_0 p(B)} \frac{u}{v}$ avec $u \in \mathbb{Z}$, $v \in \mathbb{N}^*$ et $\mathrm{pgcd}(v, p_0) = 1$.
Donc $B - a_{p_0} p^{v_{p_0}(B)} = \frac{u}{v}$ est un p_0-entier. D'où $a = B - a_{p_0} p^{v_{p_0}(B)} - \sum\limits_{p \in A \setminus \{p_0\}} a_p p^{v_p(B)}$ est un p_0-entier.
En conclusion a est p_0-entier pour tout $p_0 \in \mathcal{P}$. D'où $a \in \mathbb{Z}$. □

Lemme 3.8. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et p un nombre premier. On a :*
1) si $p - 1 \nmid n - l$ pour tout $l \in M(n, r)$ ou si $M(n, r) = \emptyset$ alors

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod{p},$$

2) s'il existe $l \in M(n, r)$ tel que $p - 1 | n - l$ alors $p \leqslant n + 1$ et

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r \sum_{l \in M_p(n,r)} |s(r, r-l)| \frac{A_n^r}{n-l} \pmod{p}. \tag{3.5}$$

Preuve. 1) Si $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n, r)$ ou si $M(n, r) = \emptyset$ alors d'après le Corollaire 2.1, le nombre $B_n^{(r)}$ est p-entier. Donc on a

$$B_n^{(r)} = \frac{a}{b} \text{ avec } a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{N}^* \text{ et } \mathrm{pgcd}(b, p) = 1.$$

D'où

$$p(r-1)!B_n^{(r)} = \frac{(r-1)!a}{b} p \equiv 0 \pmod{p}.$$

2) S'il existe $l \in M(n, r)$ tel que $p - 1 | n - l$ alors d'après la Remarque 3.1, on a $p \leqslant n + 1$.
Grâce à la relation (1.10) et le fait que $r \binom{n}{r} = \frac{A_n^r}{(r-1)!}$ on a :

$$(r-1)!B_n^{(r)} = (-1)^{r-1} \sum_{l \in M(n,r)} \frac{A_n^r}{n-l} |s(r, r-l)| B_{n-l}. \tag{3.6}$$

D'où

$$\begin{aligned}
p(r-1)!B_n^{(r)} &= (-1)^{r-1}\sum_{l\in M(n,r)}\frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)|pB_{n-l}\\
&= (-1)^{r-1}\left(\sum_{l\in M_p(n,r)}\frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)|pB_{n-l}\right.\\
&\qquad\qquad\left.+\sum_{l\in M(n,r)\smallsetminus M_p(n,r)}\frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)|pB_{n-l}\right).
\end{aligned}$$

D'autre part

$$pB_{n-l}\pmod p\equiv\begin{cases}0 & \text{si } p-1\nmid n-l\\ -1 & \text{si } p-1|n-l\end{cases}.$$

Par suite

$$\begin{aligned}
p(r-1)!B_n^{(r)} &\equiv (-1)^{r-1}\left(\sum_{l\in M_p(n,r)}\frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)|(-1)+0\right)\pmod p\\
&\equiv (-1)^{r}\sum_{l\in M_p(n,r)}\frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)|\pmod p\cdot
\end{aligned}$$

□

Lemme 3.9. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n\geqslant r$ et p un nombre premier. On a :*
1) si $p(r-1)!B_n^{(r)}\equiv 0\pmod p$ alors $v_p((r-1)!B_n^{(r)})\geqslant 0$,
2) si $p(r-1)!B_n^{(r)}\not\equiv 0\pmod p$ alors $v_p((r-1)!B_n^{(r)})=-1$.

Preuve. 1) Si $p(r-1)!B_n^{(r)}\equiv 0\pmod p$ alors $1+v_p((r-1)!B_n^{(r)})\geq 1$, et donc $v_p((r-1)!B_n^{(r)})\geq 0$.
2) Si $p(r-1)!B_n^{(r)}\not\equiv 0\pmod p$ alors le Lemme 3.8 implique

$$p(r-1)!B_n^{(r)}\equiv u\pmod p,\ \text{ où } u=(-1)^r\sum_{l\in M_p(n,r)}|s(r,r-l)|\frac{A_n^r}{n-l}\in\mathbb{Z}\smallsetminus p\mathbb{Z}.$$

Donc

$$p(r-1)!B_n^{(r)}=u+\frac{a}{b}p,\ \text{ avec } a\in\mathbb{Z}, b\in\mathbb{N}^* \text{ et } \operatorname{pgcd}(b,p)=1,$$

et par suite on a

$$(r-1)!B_n^{(r)}=\frac{u+ap}{bp}.$$

Comme $\operatorname{pgcd}(u+ap,bp)=1$ alors on obtient $v_p((r-1)!B_n^{(r)})=-1$. □

Remarque 3.2. *Si* $p-1 \nmid n-l$ *pour tout* $l \in M(n,r)$*, d'après les lemmes 3.8 et 3.9 on déduit que* $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.

Lemme 3.10. *Soient* n *et* r *deux entiers strictement positifs tels que* $n \geqslant r$*. On a*
1) le dénominateur du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ *est donné par*

$$d = \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ v_p((r-1)!B_n^{(r)})=-1}}^{*} p,$$

2) pour tout nombre premier p *qui divise* d*, il existe un unique* $a_p \pmod p$ *tel que* $a_p \in \mathbb{Z}\backslash p\mathbb{Z}$ *et* $p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv a_p \pmod p$*, de plus*

$$(r-1)!B_n^{(r)} - \sum_{\substack{p \text{ premier} \\ v_p((r-1)B_n^{(r)})=-1}}^{*} \frac{a_p}{p} \in \mathbb{Z}.$$

Preuve. La preuve découle des lemmes 3.7 et 3.9. □

3.4 Preuve du théorème principal

3.4.1 Étude du cas $p > n+1$

Dans ce cas nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.13. *Soient* n *et* r *deux entiers strictement strictement positifs et* p *un nombre premier tels que* $n \geqslant r$ *et* $p > n+1$*. On a*

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0\cdot$$

Preuve. Supposons que $p > n+1$.
Par la partie 2) du Lemme 3.8 on a

$$p-1 \nmid n-l, \text{ pour tout } l \in M(n,r)$$

et par la parie 1) du Lemme 3.8 on a

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod p.$$

Par suite on conclut grâce au Lemme 3.9. □

3.4.2 Étude du cas $p \leqslant [\frac{r}{2}]$

Dans ce cas on a le résultat suivant :

Proposition 3.14. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $p \leqslant [\frac{r}{2}]$. On a*

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0.$$

Avant de démontrer cette proposition on établit le lemme suivant :

Lemme 3.11. *Soient n, r et l des entiers naturels tels que $n \geqslant r \geqslant l+1$ et p un nombre premier. On a*

$$[\frac{r}{2}]!|\frac{A_n^r}{n-l} \tag{3.7}$$

et

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant v_p([\frac{r}{2}]!) - 1. \tag{3.8}$$

Preuve. On a

$$\begin{aligned} \frac{A_n^r}{n-l} &= n(n-1)...(n-(l-1))(n-(l+1))(n-(l+2))...(n-r+1) \\ &= A_n^l.A_{n-l-1}^{r-l-1} = l!(r-1-l)!\binom{n}{l}\binom{n-l-1}{r-l-1}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Si $l \geqslant \dfrac{r}{2}$ alors $l \geqslant [\frac{r}{2}]$.
Si $l < \dfrac{r}{2}$ alors $r-l > \dfrac{r}{2}$ et on a $r-l \geqslant [\frac{r}{2}]+1$ et $r-1-l \geqslant [\frac{r}{2}]$.
D'où l'on déduit $l \geqslant [\frac{r}{2}]$ ou $r-l-1 \geqslant [\frac{r}{2}]$, la relation (3.9) implique alors

$$[\frac{r}{2}]!|\frac{A_n^r}{n-l}.$$

Aussi, la relation (3.7) implique $v_p(\frac{A_n^r}{n-l}) \geqslant v_p([\frac{r}{2}]!)$.
Par suite on a

$$v_p(|s(r,r-l)|\frac{A_n^r}{n-l}B_{n-l}) \geqslant v_p([\frac{r}{2}]!) - 1, \text{ pour tout } l \in M(n,r).$$

Par conséquent la relation (3.6) entraine

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant v_p([\frac{r}{2}]!) - 1.$$

ce qui achève la preuve du Lemme 3.11. □

Preuve de la proposition 3.14.
Si $p \leqslant [\frac{r}{2}]$ alors $p|[\frac{r}{2}]!$, et donc $v_p([\frac{r}{2}]!) \geqslant 1$. Par suite on conclut grâce à la relation (3.8). □

3.4.3 Étude du cas $p = r$

Dans ce cas nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.15. *Soit n un entier strictement strictement positif et r un nombre premier tels que $n \geqslant r$. On a :*

1) si $r-1|n$ et $r|n(n+1)$ alors $v_r((r-1)!B_n^{(r)}) = -1$ et $r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^{\alpha_r(n)} \pmod r$, où $\alpha_r(n)$ est donné par la Définition 3.3,

2) sinon, $v_r((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.

Avant de démontrer cette proposition on établit les deux lemmes suivants :

Lemme 3.12. *Soient n un entier strictement positif et r un nombre premier tels que $n \geqslant r$. On a :*

1) si $r-1|n$ et $r|n-l$ où $l \in \{0, r-1\}$ alors $r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r|s(r,r-l)|\frac{A_n^r}{n-l} \pmod r$ et $(-1)^r|s(r,r-l)|\frac{A_n^r}{n-l} \pmod r = \begin{cases} 1 & si\ l = 0 \\ -1 & si\ l = r-1 \end{cases}$,

2) sinon $r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod r$.

Preuve. 1) a) Supposons $r = 2$.
Si $n = 2$ alors $M(2,2) = \{0,1\}$ et d'après la relation (3.5) on a
$2B_2^{(2)} \equiv (-1)^2 \left(|s(2,2)|\dfrac{A_2^2}{2} + |s(2,1)|\dfrac{A_2^2}{1}\right) \pmod 2$ avec $|s(2,1)|\frac{A_2^2}{1} = 2 \equiv 0 \pmod 2$.
Donc $2B_2^{(2)} \equiv (-1)^2|s(2,2)|\dfrac{A_2^2}{2} \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2$.
Si n est pair et $n \geqslant 3$ alors $M(n,2) = \{0\}$. D'après la relation (3.5) on a
$2B_n^{(2)} \equiv (-1)^2|s(2,2)|\dfrac{A_n^2}{n} \pmod 2 \equiv n-1 \pmod 2 \equiv 1 \pmod 2$.
Si n est impair alors $M(n,2) = \{1\}$. La relation (3.5) donne
$2B_n^{(2)} \equiv (-1)^2|s(2,1)|\dfrac{A_n^2}{n-1} \pmod 2 \equiv n \pmod 2 \equiv -1 \pmod 2$.
b) Supposons $r \geqslant 3$ tel que $r-1|n$ et $r|n-l$ où $l \in \{0, r-1\}$.
Donc $r-1$ pair, n pair, $n-r+1$ pair, $r-1|n-r+1$ et $r-1 \nmid n-l$, $1 \leqslant l \leqslant r-2$.
En utilisant la relation (3.5), on obtient

$$r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r \left(|s(r,r)|\frac{A_n^r}{n} + |s(r,1)|\frac{A_n^r}{n-r+1}\right) \pmod r. \tag{3.10}$$

La condition $r|n$ donne $|s(r,1)|\frac{A_n^r}{n-r+1} = (r-1)!n(n-1)...(n-r+2) \equiv 0 \pmod r$ et

$$\begin{aligned} r(r-1)!B_n^{(r)} &\equiv (-1)^r|s(r,r)|\frac{A_n^r}{n} \pmod r \\ &\equiv -(n-1)(n-2)...(n-r+1) \pmod r \\ &\equiv -(-1)^{r-1}(r-1)! \pmod r \\ &\equiv 1 \pmod r. \end{aligned}$$

De même la condition $r|n-r+1$ donne $|s(r,r)|\frac{A_n^r}{n} = (n-1)...(n-r+1) \equiv 0 \pmod r$, $n \equiv -1 \pmod r$ et

$$\begin{aligned} r(r-1)!B_n^{(r)} &\equiv (-1)^r|s(r,1)|\frac{A_n^r}{n-r+1} \pmod r \\ &\equiv -(r-1)!n(n-1)...(n-r+2) \pmod r \\ &\equiv -(r-1)!(-1)(-2)...(-r+1) \pmod r \\ &\equiv -(-1)^{r-1}[(r-1)!]^2 \pmod r \\ &\equiv -1 \pmod r. \end{aligned}$$

Dans tous les cas la proposition 1) du Lemme 3.12 est vérifiée.
2) Supposons que les hypothèses de la proposition 1) du Lemme 3.12 ne sont pas vérifiées.
On distingue deux cas :
Premier cas $r-1 \nmid n$.
Dans ce cas on a $r \geqslant 3$ et il existe un seul l, $1 \leqslant l \leqslant r-2$, tel que $r-1|n-l\cdot$
La relation (3.5) implique

$$r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r \frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)| \pmod r\cdot$$

D'autre part, pour $1 \leqslant l \leqslant r-2$ on a $|s(r,r-l)| \equiv 0 \pmod r\cdot$
Donc

$$r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod r.$$

Deuxième cas $r-1|n$ et $r \nmid n-l, l \in \{0, r-1\}$.
Dans ce cas on a $r \geqslant 3$ et la relation (3.10) est vérifiée comme pour le cas 1) b) de cette preuve.
D'autre part $r|A_n^r = n(n-1)...(n-r+1)$, donc on a $\frac{A_n^r}{n-l} \equiv 0 \pmod r$ pour $l \in \{0, r-1\}$ et la relation (3.10) implique $r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod r$. □

Preuve de la proposition 3.15.
Supposons $r-1|n$ et $r|n(n+1)$.
On a $r|n(n+1)$ est équivalent à $r|n$ ou $r|n-r+1$. Par suite le Lemme 3.12 implique

$$r(r-1)!B_n^{(r)} \pmod r = \begin{cases} 1 & \text{si } l=0 \\ -1 & \text{si } l=r-1 \end{cases} \equiv (-1)^{\alpha_r(n)} \pmod r, \not\equiv 0 \pmod r$$

et le Lemme 3.9 entraine alors $v_r((r-1)!B_n^{(r)}) = -1$.
Si la condition $r-1|n$ et $r|n(n+1)$ n'est pas vérifiée alors les lemmes 3.12 et 3.9 impliquent $r(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod r$ et $v_r((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$. □

3.4.4 Étude du cas $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$

On commence l'étude de ce cas par les lemmes préparatoires suivants, et on détaillera par la suite quatre sous cas : 1) $p = n+1$, 2) $n-r+2 \leqslant p \leqslant n$, 3) $p = n-r+1$, 4) $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$.

3.4.4.1 Lemmes préparatoires

Lemme 3.13. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que*
$r+1 \leqslant p \leqslant n+1$. *Alors :*

1) s'il existe un entier naturel $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$, alors l est unique et
$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r \frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)| \pmod{p}$,

2) si pour tout $l \in M(n,r)$, $p-1 \nmid n-l$ alors $p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod{p}$,

3) si $r \geqslant 2$ ou ($r=1$ et $p \neq 2$) alors $p-1|n-l$, $0 \leqslant l \leqslant r-1$, implique $l \in M^*(n,r)$.

Preuve.
1) S'il existe $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$, alors d'après le Lemme 3.2, l est unique. On a donc d'après la formule (3.5) :

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r \frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)| \pmod{p}.$$

2) Si pour tout $l \in M(n,r), p-1 \nmid n-l$, alors d'après le Lemme 3.8 on a :

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod{p}.$$

3) Si $r \geqslant 2$ ou ($r=1$ et $p \neq 2$), alors $p \geqslant 3$ et $p-1$ est pair. Comme $p-1|n-l$ donc $n-l$ est pair et par suite $l \in M^*(n,r)$. □

Notation 3.2. *Dans toute la suite de ce chapitre on désigne par (C_1) la condition :*
Il existe $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$, $p \nmid |s(r,r-l)|$ et $p \nmid \frac{A_n^r}{n-l}$.

Remarque 3.3. *La condition (C_1) n'est pas vérifiée si et seulement si on est dans l'un des deux cas suivant :*

1) $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$,

2) Il existe $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$ et $(p||s(r,r-l)|$ ou $p|\frac{A_n^r}{n-l})$.

Lemme 3.14. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$. On a :*

1) si la condition (C_1) est vérifiée, alors
$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) = -1$ *et* $p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv c_p(n,r,l)|s(r,r-l)| \pmod{p}$,
où $c_p(n,r,l)$ est introduit dans la Définition 3.3.

2) sinon, $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.

Preuve. 1) Supposons que la condition (C_1) est vérifiée. Alors il existe $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$, $p \nmid \dfrac{A_n^r}{n-l}$ et $p \nmid |s(r,r-l)|$. Donc d'après les lemmes 3.13 et 3.9 on a

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r \frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)| \pmod p \tag{3.11}$$

et

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)} = -1.$$

Reste a prouver les congruences pour ce cas.
Grâce au Lemme 3.3, on a $n \equiv a \pmod p$ avec $a \in \{l\} \cup \{r, r+1, ..., p-1\}$.
Par suite la relation (3.11) implique

$$\begin{aligned} p(r-1)!B_n^{(r)} &\equiv (-1)^r n(n-1)...\overset{\vee}{(n-l)}...(n-r+1)|s(r,r-l)| \pmod p \\ &\equiv (-1)^r a(a-1)...\overset{\vee}{(a-l)}...(a-r+1)|s(r,r-l)| \pmod p \\ &\equiv c_p(n,r,l)|s(r,r-l)| \pmod p. \end{aligned}$$

2) Supposons que la condition (C_1) n'est pas vérifiée.
Alors on a deux cas :

Soit il existe $l \in M(n,l)$ tel que $p-1|n-l$ et $(p|\dfrac{A_n^r}{n-l}$ ou $p||s(r,r-l)|)$. Dans ce cas, la relation (3.11) implique $p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod p$. Par la suite, le Lemme 3.9 donne $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.

Soit $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$. Dans ce cas aussi, les lemmes 3.13 et 3.9 nous conduisent aux mêmes conclusions. □

3.4.4.2 Le cas $p = n+1$

Dans ce cas nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.16. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$.
Si $n+1$ est premier alors on a*

$$v_{n+1}((r-1)!B_n^{(r)}) = -1 \text{ et } (n+1)(r-1)!B_n^{(r)} \equiv -r! \pmod{n+1}.$$

Preuve. Supposons que $n+1 = p$ est premier, et montrons que la condition (C_1) est vérifiée pour $l = 0$.

Puisque $n = p-1$ alors n est pair ou $n = 1$. Donc $l = 0 \in M(n,r)$.
Or $|s(r,r)| = 1$ et

$$\frac{A_n^r}{n} = \begin{cases} 1 & \text{si } r = 1 \\ (n-1)(n-2)...(n-r+1) & \text{si } r \geq 2 \end{cases}.$$

Comme $p = n+1 > n-1, n-2, ..., n-r+1$ alors on a $p \nmid \dfrac{A_n^r}{n}$.

Donc la condition (C_1) est vérifiée. D'autre part le Lemme 3.14 implique

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) = -1,$$
$$(n+1)(r-1)!B_n^{(r)} \equiv c_{n+1}(n,r,0) \pmod{n+1}$$

avec

$$c_{n+1}(n,r,0) \pmod{n+1} = \begin{cases} -1 & \text{si } r=1 \\ -r! & \text{si } r \geq 2 \end{cases}.$$

Ce qui termine la preuve de la Proposition 3.16. $\square$

3.4.4.3 Le cas $n-r+2 \leqslant p \leqslant n$

Dans ce cas nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.17. *Soient n et r deux entiers positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r \geqslant 2$ et $n-r+2 \leqslant p \leqslant n$. On a*

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0.$$

Preuve. On pose $p-1 = n-l$ où $l \in \{1,2,...,r-1\}$. Le Lemme 3.13 implique $l \in M^*(n,r)$. De plus, comme $n-r+2 \leqslant p \leqslant n$ et $p \neq n-l$ alors

$$p \Big| \frac{n(n-1)...(n-r+1)}{n-l} = \frac{A_n^r}{n-l}.$$

Donc la condition (C_1) n'est pas vérifiée et le Lemme 3.14 implique $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$. $\square$

3.4.4.4 Le cas $p = n-r+1$

Dans ce cas on a le résultat suivant :

Proposition 3.18. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $p = n-r+1$. On a :*

1) Si $r=1$ et $n=2$ alors $v_p((r-1)!B_n^{(r)} = -1$ et $p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv -1 \pmod p$.

2) Sinon, $v_p((r-1)!B_n^{(r)} \geqslant 0$.

Preuve. 1) Si $r=1$ et $n=2$ alors on a : $M(2,1) = \{0\}$, $p=n=2$, $p \nmid |s(1,1)| = 1$ et $p \nmid \dfrac{A_2^1}{2} = 1$. Par suite la condition (C_1) est vérifiée et le Lemme 3.14 entraine

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) = -1 \quad \text{et} \quad p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv -1 \pmod p.$$

2) Si $r=1$ et $n \neq 2$ alors $n = p \geqslant 3$ est impair et $M(n,1) = \emptyset$. Dans ce cas la condition (C_1) n'est pas vérifiée, et le Lemme 3.14 donne alors $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.
Si $r \geqslant 2$, on distingue deux cas :

Premier cas $p-1=r$. Dans ce cas $n=2(p-1)$ est pair. Donc $0 \in M(n,r)$ et $\dfrac{A_n^{(r)}}{n}=(n-1)...(n-r+1)=(2p-3)...p$. Comme $p|\frac{A_n^{(r)}}{n}$ par conséquent la condition (C_1) n'est pas vérifiée, et le lemme 3.14 donne $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.
Deuxième cas $p-1>r$. Dans ce cas on a $n>2r$. Comme $p-1=n-r<n-r+1,...,n<2(p-1)$ on a alors $p-1 \nmid n, n-1, ..., n-r+1$. Par suite la condition (C_1) n'est donc pas vérifiée et le Lemme 3.14 implique alors $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$. □

3.4.4.5 Le cas $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$

Dans ce cas nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.19. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$. On a :*

1) s'il existe un entier $l \in M^*(n,r)$ tel que $p \in S_2(l,n,r)$ alors
$v_p((r-1)!B_n^{(r)})=-1 \quad et \quad p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv c_p(n,r,l)|s(r,r-l)| \pmod p$,

2) sinon, $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.

Preuve. On a $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$ alors $n \geqslant 2r+1 \geqslant r+1$ et d'après la Proposition 1.2 on a $M(n,r)=M^*(n,r)$.
Donc la condition (C_1) se reformule comme suit : il existe $l \in M^*(n,r)$ tel que $p \in S_2(l,n,r)$ cf. Définition 3.2. Le Lemme 3.14 nous permet alors de conclure. □

Corollaire 3.2. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$. Alors les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1) $v_p((r-1)!B_n^{(r)})=-1$,

2) $p \in S_2(n,r)$.

Preuve. La preuve découle du Lemme 3.14 et de la Définition de $S_2(n,r)$. □

3.4.5 Étude du cas $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$

Avant d'étudier ce cas, on établit des congruences spécifiques aux nombres de Stirling classiques, en introduisant les r-nombres de Stirling de première espèce.

3.4.5.1 Les r-nombres de Stirling de première espèce et congruences pour les nombres de Stirling classiques

Définition 3.4. *Soient r, α et k des entiers naturels tels que $r>\alpha \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant \alpha$. Les r-nombres de Stirling de première espèce $s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)$ sont définis par :*

$$\sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)u^{\alpha+1-k}=u(u+r-1)(u+r-2)...(u+r-\alpha)\cdot$$

Proposition 3.20 (Propriétés des nombres $s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)$).
Soient r, α et k des entiers naturels tels que $r > \alpha \geqslant 1$ et $0 \leqslant k \leqslant \alpha$. On a :

1) $\begin{cases} s_r(\alpha+1, \alpha+1) = 1 \\ s_r(\alpha+1, \alpha+1-k) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant \alpha} (r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k), \; 1 \leqslant k \leqslant \alpha, \end{cases}$

2) pour $1 \leqslant k \leqslant \alpha$, on a

$$s_r(\alpha+2, \alpha+2-k) = s_r(\alpha+1, \alpha+1-k) + (r-\alpha-1)s_r(\alpha+1, \alpha+2-k). \quad (3.12)$$

Preuve. 1) On a

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)u^{\alpha+1-k} &= u(u+r-1)(u+r-2)\ldots(u+r-\alpha) \\
&= u^{\alpha+1} + (\sum_{i_1=1}^{\alpha}(r-i_1))u^{\alpha} + (\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 \leqslant \alpha}(r-i_1)(r-i_2))u^{\alpha-1} + \ldots + (\prod_{k=1}^{\alpha}(r-i_k))u \\
&= u^{\alpha+1} + \sum_{k=1}^{\alpha}(\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant \alpha}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k))u^{\alpha+1-k}.
\end{aligned}$$

Par identification des deux extrémités, on obtient

$$\begin{cases} s_r(\alpha+1, \alpha+1) = 1 \text{ et} \\ s_r(\alpha+1, \alpha+1-k) = \displaystyle\sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant \alpha} (r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k), \; 1 \leqslant k \leqslant \alpha. \end{cases}$$

2) On a

$$\begin{aligned}
s_r(\alpha+2, \alpha+1) &= \underbrace{(r-1)+(r-2)+\ldots+(r-\alpha)} + (r-\alpha-1) \times 1 \\
&= \qquad\qquad s_r(\alpha+1, \alpha) \qquad\qquad + (r-\alpha-1)s_r(\alpha+1, \alpha+1)
\end{aligned}$$

et pour $2 \leqslant k \leqslant \alpha$, on a

$$
\begin{aligned}
s_r(\alpha+2,\alpha+2-k) &= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant \alpha+1}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k)\\
&= \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant \alpha+1\\ i_k\neq \alpha+1}}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k)\\
&\qquad + \sum_{\substack{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant \alpha+1\\ i_k= \alpha+1}}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k)\\
&= \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant \alpha}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k)\\
&\qquad +(r-\alpha-1)\sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_{k-1}\leqslant \alpha}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k)\\
&= s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)+(r-\alpha-1)s_r(\alpha+1,\alpha+1-(k-1))\\
&= s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)+(r-\alpha-1)s_r(\alpha+1,\alpha+2-k).
\end{aligned}
$$

Donc pour $1 \leqslant k \leqslant \alpha$, on obtient

$$s_r(\alpha+2,\alpha+2-k) = s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)+(r-\alpha-1)s_r(\alpha+1,\alpha+2-k).$$

□

Le but de cette partie est d'établir la proposition suivante :

Proposition 3.21. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$. On a :*

1) si $r-p \leqslant l \leqslant p-2$, alors $|s(r,r-l)| \equiv 0 \pmod p$,

2) $|s(r,r-p+1)| \equiv -1 \pmod p$.

Avant de démontrer cette proposition on établit le lemme suivant :

Lemme 3.15. *Soient r et α deux entiers strictement positifs tels que $r > \alpha$. On a :*

1) $s_r(\alpha+1,\alpha+1-k) \equiv |s(\alpha,\alpha-k)| \pmod{r-\alpha}$, pour $0 \leqslant k \leqslant \alpha$,

2) $|s(r,r-l)| = \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)|s(r-\alpha,r-l-\alpha+k)|$, pour $r \geqslant \alpha+l$,

3) $|s(r,r-l)| \equiv \sum_{k=0}^{\alpha-1} |s(\alpha,\alpha-k)||s(r-\alpha,r-l-\alpha+k)| \pmod{r-\alpha}$, pour $r \geqslant \alpha+l$.

Preuve. 1) a) On a $s_r(\alpha+1,\alpha+1)=1=|s(\alpha,\alpha)|$.
b) Si $1\leqslant k\leqslant \alpha-1$, alors on a

$$\begin{aligned}
s_r(\alpha+1,\alpha+1-k) &= s_r(\alpha,\alpha-k)+(r-\alpha)s_r(\alpha,\alpha+1-k)\\
&\equiv s_r(\alpha,\alpha-k) \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant\alpha-1}(r-i_1)(r-i_2)\ldots(r-i_k) \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant\alpha-1}(r-\alpha+\alpha-i_1)(r-\alpha+\alpha-i_2)..\\
&\qquad ..(r-\alpha+\alpha-i_k) \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv \sum_{1\leqslant i_1<i_2<\ldots<i_k\leqslant\alpha-1}(\alpha-i_1)(\alpha-i_2)\ldots(\alpha-i_k) \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv \sum_{\alpha-1\geqslant\alpha-i_1>\alpha-i_2>\ldots>\alpha-i_k\geqslant1}(\alpha-i_1)\ldots(\alpha-i_k) \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv \sum_{1\leqslant j_1<j_2<\ldots<j_k\leqslant\alpha-1}j_1j_2\ldots j_k \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv |s(\alpha,\alpha-k)| \pmod{r-\alpha}.
\end{aligned}$$

où $j_h=\alpha-i_h,\quad 1\leqslant h\leqslant k$.
c) D'autre part, on a

$$\begin{aligned}
s_r(\alpha+1,1) &= (r-1)(r-2)\ldots(r-\alpha)\\
&\equiv 0 \pmod{r-\alpha}\\
&\equiv s(\alpha,0) \pmod{r-\alpha}.
\end{aligned}$$

De a), b) et c) on déduit que

$$s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)\equiv|s(\alpha,\alpha-k)| \pmod{r-\alpha},\ \text{ pour } 0\leqslant k\leqslant\alpha.$$

2) On a $r\geqslant l+\alpha$ implique $r\geqslant\alpha$ et $r-l\geqslant\alpha$.
Montrons par récurrence sur $\alpha\in\mathbb{N}^*$ que la propriété

$$P(\alpha):\quad |s(r,r-l)|=\sum_{k=0}^{\alpha}s_r(\alpha+1,\alpha+1-k)|s(r-\alpha,r-l-\alpha+k)|,\ r\geqslant\alpha+l$$

est vraie.
On a

$$\begin{aligned}
|s(r,r-l)| &= 1\times|s(r-1,r-l-1)|+(r-1)|s(r-1,r-l)|\\
&= s_r(2,2)|s(r-1,r-l-1)|+s_r(2,1)|s(r-1,r-l)|\\
&= \sum_{k=0}^{1}s_r(2,2-k)|s(r-1,r-l-1+k)|.
\end{aligned}$$

Donc $P(1)$ est vraie.
Supposons que l'on a

$$|s(r, r-l)| = \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)|s(r-\alpha, r-l-\alpha+k)|,\ r \geqslant \alpha+l,$$

et montrons que,$P(\alpha+1)$ est vraie. C'est-à-dire que

$$|s(r, r-l)| = \sum_{k=0}^{\alpha+1} s_r(\alpha+2, \alpha+2-k)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)|,\ r \geqslant \alpha+1+l.$$

On a : $r \geqslant l+\alpha+1$ implique $r \geqslant \alpha+1$,
et $r-l \geqslant \alpha+1$ implique $r-\alpha \geqslant 1$ et $r-l-\alpha \geqslant 1$.
Donc

$$
\begin{aligned}
|s(r, r-l)| &= \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)|s(r-\alpha, r-l-\alpha+k)| \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k) \\
&\times [|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)| + (r-\alpha-1)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha+k)|] \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)| \\
&+ \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)(r-\alpha-1)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha+k)| \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)| \\
&+ \sum_{k=1}^{\alpha+1} s_r(\alpha+1, \alpha+2-k)(r-\alpha-1)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)| \\
&= s_r(\alpha+1, \alpha+1)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1)| \\
&+ \sum_{k=1}^{\alpha}[s_r(\alpha+1, \alpha+1-k) + (r-\alpha-1)s_r(\alpha+1, \alpha+2-k)] \\
&\times |s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)| + s_r(\alpha+1, 1)(r-\alpha-1)|s(r-\alpha-1, r-l)| \\
&= s_r(\alpha+2, \alpha+2)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1)| \\
&+ \sum_{k=1}^{\alpha} s_r(\alpha+2, \alpha+2-k)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)| \\
&+ (\alpha+2, 1)|s(r-\alpha-1, r-l)| \text{ (d'après la relation (3.12))} \\
&= \sum_{k=0}^{\alpha+1} s_r(\alpha+2, \alpha+2-k)|s(r-\alpha-1, r-l-\alpha-1+k)|.
\end{aligned}
$$

Donc $P(\alpha+1)$ est vraie.
En conclusion, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^*, P(\alpha)$ est vraie. Donc,

$$|s(r, r-l)| = \sum_{k=0}^{\alpha} s_r(\alpha+1, \alpha+1-k)|s(r-\alpha, r-l-\alpha+k)|, \quad r \geqslant \alpha+l.$$

3) La preuve découle de 1) et 2) et du fait que $|s(\alpha, 0)| = 0$. □

Preuve de la proposition 3.21.
On pose $p = r-\alpha$, donc $\alpha = r-p \in \mathbb{N}^*$ et on a
$r \geqslant \alpha + l$ équivaut à $r \geqslant r-p+l$ ou a $l \leqslant p$. Ce qui est vrai pour $l \leqslant p-1$.

Le lemme 3.15 implique

$$|s(r,r-l)| \equiv \sum_{k=0}^{r-p-1} s(r-p,r-p-k)|s(p,p-l+k)| \pmod p. \tag{3.13}$$

1) Si $0 \leqslant k \leqslant r-p-1$ et $r-p \leqslant l \leqslant p-2$ alors $2 \leqslant p-l+k \leqslant p-1$,
et par suite $|s(p,p-l+k)| \equiv 0 \pmod p$.
Donc la relation (3.13) donne

$$|s(r,r-l)| \equiv 0 \pmod p, \qquad r-p \leqslant l \leqslant p-2.$$

2) Pour $l = p-1$, la relation (3.13) donne

$$\begin{aligned} |s(r,r-p+1)| &\equiv \sum_{k=0}^{r-p-1} |s(r-p,r-p-k)||s(p,1+k)| \pmod p \\ &\equiv |s(r-p,r-p)||s(p,1)| + \sum_{k=1}^{r-p-1} |s(r-p,r-p-k)||s(p,1+k)| \pmod p \\ &\equiv 1 \times (p-1)! + \sum_{k=1}^{r-p-1} |s(r-p,r-p-k)||s(p,1+k)| \pmod p, \end{aligned} \tag{3.14}$$

avec

$$(p-1)! \equiv -1 \pmod p. \tag{3.15}$$

D'autre part, si $1 \leqslant k \leqslant r-p-1$ alors $2 \leqslant 1+k \leqslant r-p$,
et $p \geqslant [\frac{r}{2}]+1$ implique $2p \geqslant r+1$, et donc $r-p \leqslant p-1$.
Par transitivié on obtient $2 \leqslant 1+k \leqslant p-1$. D'où,

$$|s(p,1+k)| \equiv 0 \pmod p, \ 1 \leqslant k \leqslant r-p-1. \tag{3.16}$$

De (3.14), (3.15) et (3.16) on déduit $|s(r,r-p+1)| \equiv -1 \pmod p$. □

3.4.5.2 Étude du cas $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$

Dans ce cas nous montrons le résultat suivant :

Proposition 3.22. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$. On a :*
1) si $p \in S_1(n,r)$ alors

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) = -1 \quad \textit{et} \quad p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv -(r-p)! \pmod p,$$

2) sinon, $v_p((r-1)!B_n^{(r)}) \geqslant 0$.

Pour démontrer cette proposition, on utilise la Proposition 3.21, ainsi que les lemmes suivants :

Lemme 3.16. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r \geqslant 3$ et $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$. Si $l \in \{0, ..., r-p+1\} \cup \{p, ..., r-1\}$ alors $p | \dfrac{A_n^r}{n-l}$.*

Preuve. D'après la relation (3.9) on a

$$\frac{A_n^r}{n-l} = l!(r-1-l)!\binom{n}{l}\binom{n-l-1}{r-l-1}.$$

D'autre part on a : $\left\{ \begin{array}{l} 0 \leqslant l \leqslant r-p-1 \text{ implique } p \leqslant r-l-1 \text{ et } p|(r-l-1)! \\ et \\ p \leqslant l \leqslant r-1 \text{ implique } p|l! \end{array} \right. .$

Par suite $p|\frac{A_n^r}{n-l}$. □

Lemme 3.17. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$. On a*

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \pmod p \equiv \left\{ \begin{array}{ll} (-1)^{r-1}\frac{A_n^r}{n-p+1} & si\ p-1|n\ et\ p-1 \in M^*(n,r) \\ 0 & sinon \end{array} \right. .$$

Preuve. D'après la Proposition 3.21 et le Lemme 3.16 on a

$$|s(r, r-l)|\frac{A_n^r}{n-l} \equiv 0 \pmod p \text{ pour tout } l \in \{0, ..., r-1\} \setminus \{p-1\},$$

et

$$|s(r, r-p+1)| \equiv -1 \pmod p.$$

On appliquant la relation (3.5) on a les résultats suivants :

Premier cas : $p-1|n$ et $p-1 \in M^*(n,r)$. Dans ce cas on a $p-1 \in M_p(n,r)$ et

$$\begin{aligned} p(r-1)!B_n^{(r)} &\equiv (-1)^r \frac{A_n^r}{n-p+1}(-1) \pmod p \\ &\equiv (-1)^{r-1}\frac{A_n^r}{n-p+1} \pmod p. \end{aligned}$$

Deuxième cas : $p-1 \nmid n$ ou $p-1 \notin M^*(n,r)$.

Comme $p \leqslant r-1$ alors on a $n-p+1 \geqslant n-r+2 \geqslant 2$. D'où

$$p-1 \notin M^*(n,r) \text{ implique } p-1 \notin M(n,r)$$

et

$$p-1 \notin M_p(n,r).$$

Par conséquent

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod p.$$

□

Lemme 3.18. *Soient n et r deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $n \geqslant r$ et $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$. Alors on a l'équivalence :*

$$p \nmid (-1)^{r-1}\frac{A_n^r}{n-p+1} \quad \textit{si et seulement si} \quad p|n+1.$$

Preuve. Si $p|n+1$ et $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$ alors

$$n-2p+1 \leqslant n-r < n-p+1 < n < n+1$$

et

$$p|n-2p+1, n-p+1, n+1 \quad (\text{ sont des multiples consécutifs de } p).$$

Par suite

$$p \nmid n-k, \text{ pour tout } k \in \{0,...r-1\} \setminus \{p-1\}.$$

Donc $p \nmid (-1)^{r-1}\dfrac{n(n-1)...(n-r+1)}{n-p+1} = (-1)^{r-1}\dfrac{A_n^r}{n-p+1}$.
Inversement, on suppose que $p \nmid (-1)^{r-1}\frac{A_n^r}{n-p+1}$.
Comme $p \leqslant r-1$ on a $p|A_n^r = n(n-1)...(n-p+1)...(n-r+1)$.
Par le lemme de Gauss on a $p|n-p+1$. D'où $p|n+1$. Ce qui termine la démonstration. □

Preuve de la proposition 3.22.
1) Supposons que $p \in S_1(n,r)$. D'après la Définition 3.2 et la Proposition 3.5 relatives aux ensembles $S_1(n,r)$ on a

$$p-1|n, \; p|n+1 \text{ et } p-1 \in M^*(n,r).$$

D'après le Lemme 3.17, les conditions $p-1|n$ et $p-1 \in M^*(n,r)$ impliquent

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^{r-1}\frac{A_n^r}{n-p+1} \pmod{p}. \tag{3.17}$$

Comme $p|n+1$, donc le Lemme 3.18 implique

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \not\equiv 0 \pmod{p}.$$

Par suite, le Lemme 3.9 entraine

$$v_p((r-1)!B_n^{(r)}) = -1.$$

De plus la relation (3.17) et le fait que $n \equiv -1 \pmod{p}$ impliquent

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^{r-1}n(n-1)...(n-p+2)(n-p)...(n-r+1) \pmod{p},$$

avec

$$\begin{aligned} n(n-1)...(n-p+2) &\equiv (-1)(-2)...(-p+1) \pmod p \\ &\equiv (-1)^{p-1}(p-1)! \pmod p \\ &\equiv (-1)^p \pmod p \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} (n-p)...(n-r+1) &\equiv (p-1-p)(p-1-p-1)...(p-1-r+1) \pmod p \\ &\equiv (-1)(-2)...(p-r) \pmod p \\ &\equiv (-1)^{r-p}(r-p)! \pmod p. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} p(r-1)!B_n^{(r)} &\equiv (-1)^{r-1}(-1)^p(-1)^{r-p}(r-p)! \pmod p \\ &\equiv -(r-p)! \pmod p. \end{aligned}$$

2) Supposons que $p \notin S_1(n,r)$. On a deux possibilités : soit $p-1 \nmid n$, soit $p \nmid n+1$. De plus, par le Lemme 3.18 on a

$$p \nmid n+1 \text{ équivaut à } p|(-1)^{r-1}\frac{A_n^r}{n-p+1}.$$

Donc dans les deux cas, le Lemme 3.17 implique

$$p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv 0 \pmod p.$$

Ce qui termine la preuve. □

3.4.6 Fin de la preuve du théorème principal

L'étude détaillée des cas disjoints des nombres premiers : $p > n+1$, $p \leqslant [\frac{r}{2}]$, $p = r$, $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$, $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$ et le Lemme 3.10 nous permettent d'obtenir le théorème principal.

Cette même étude ainsi que les propriétés établies dans la partie 3.2 nous permettent aussi de faire les deux remarques suivantes.

Remarque 3.4. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et p un nombre premier. Alors p divise le dénominateur du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ si et seulement s'il existe $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$ et $p \nmid |s(r,r-l)|\frac{A_n^r}{n-l}$. L'entier l est unique, et de plus on a :*

1) $p(r-1)!B_n^{(r)} \equiv (-1)^r\frac{A_n^r}{n-l}|s(r,r-l)| \pmod p$, *2)* $l = \begin{cases} 0 & si\ p \in \{n+1, n-r+1\} \\ 0 \ ou\ r-1 & si\ p = r \\ p-1 & si\ p \in S_1(n,r) \\ j & si\ p \in S_2(j,n,r), \end{cases}$

3) $si\ n \neq 1$ *alors* $l \in M^*(n,r)$,

4) $si\ p \in \{r, n-r+1\} \cup S_1(n,r)$ *alors* $p(p-1)|n-l$.

Remarque 3.5. *Soient* n *et* r *deux entiers strictement positifs tels que* $n \geqslant r$ *et* p *un nombre premier. Alors* p *divise le dénominateur* d *du nombre* $(r-1)!B_n^{(r)}$ *si et seulement si on a l'un des trois cas suivants :*
Premier cas : $[\frac{r}{2}]+1 \leqslant p \leqslant r-1$ *et* $n = p-1+hp(p-1)$, $h \in \mathbb{N}^*$.
Ce cas correspond à $p \in S_1(n,r)$.
Deuxième cas : $p = r$ *et* $n = u(r-1)+hr(r-1)$, $u \in \{0,1\}$ *et* $h \in \mathbb{N}^*$.
Ce cas correspond à $p = r^{\gamma_r(n)}$.
Troisième cas : $p \geqslant r+1$, $p \nmid |s(r, r-l)|$ *et* $n = l+u(p-1)+hp(p-1)$, *avec* $l \in M(n,r)$, $u \in \{0\} \cup \{l+1, ..., p+l-r\}$, $h \in \mathbb{N}$ *et* $\begin{cases} (u,h) \neq (0,0) & si\ p \geqslant 3 \\ (u,h) \in \{(1,0)\} \cup \{0\} \times \mathbb{N}^* & si\ p = 2 \end{cases}$.
Dans ce cas on a :

1) $si\ l \geqslant 1$ *alors* $p \in S_2(l,n,r)$,

2) $si\ l = 0$ *alors* $l \in S_2^*(0,n,r)$, *et on a*

  (a) $(u,h) = (1,0)$ *implique* $\delta_{n+1} = 1$ *et* $p = n+1$,

  (b) $(u,h,p) = (0,1,2)$ *implique* $\lambda(n,r) = 1$ *et* $p = n-r+1$,

  (c) $(u,h) \neq (1,0)$ *et* $(u,h,p) \neq (0,1,2)$ *implique* $p \in S_2(0,n,r)$.

Le troisième cas correspond à $p \geqslant r+1$ *telle que la condition* (C_1) *est vérifiée.*

De plus : $\begin{cases} p|d \\ \text{et} \\ p-1|n \end{cases}$ *équivaut à* $p \in \{(n+1)^{\delta_{n+1}}, (n-r+1)^{\lambda(n,r)}, r^{\gamma_r(n)}\} \cup S_1(n,r)$.

Notons que $\begin{cases} p \geqslant r+1 \\ \text{et} \\ (C_1) \text{ est vérifiée} \end{cases}$ *implique* $r+1 \leqslant p \leqslant n+1$.

Chapitre 4

Calcul explicite des dénominateurs et formule de Clausen-von Staudt pour certains nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$

Dans ce chapitre nous déterminons les dénominateurs et les coefficients de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$ dans les cas $r = 1, 2, 3, 4$ et $6 \leqslant r \leqslant n \leqslant 2r$, ainsi que pour les nombres de la forme $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ où p est un nombre premier impair et k un entier strictement positif.

4.1 Dénominateurs et formule de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$ de niveaux $r = 1, 2, 3$ et 4

En appliquant le Théorème 3.1, on obtient les résultats précis suivants :

4.1.1 Le niveau $r = 1$

On a $S_1(n,1) = \emptyset$, $\gamma_1(n) = 0$, $\lambda(n,1) = \begin{cases} 1 & \text{si } n = 2 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

et $M^*(n,1) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \text{ est impair} \\ \{0\} & \text{si } n \text{ est pair} \end{cases}$.

a) Si n est impair alors :

$$d = (n+1)^{\delta_{n+1}} = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1, \\ 1 & \text{si } n \geqslant 3. \end{cases}$$

b) Si n est pair, on a $\frac{A_n^1}{n} = 1$, $S_2(0,n,1) = \{p : 2 \leqslant p \leqslant n-1, p-1|n\}$,

$c_p(n,1,0)=-1$. Donc

$$d=(n+1)^{\delta_{n+1}}n^{\lambda(n,1)}\prod_{p\in S_2(0,n,1)}^{*}p,$$

et

$$B_n+\frac{1}{n+1}\delta_{n+1}+\frac{1}{n}\lambda(n,1)+\sum_{p\in S_2(0,n,1)}^{*}\frac{1}{p}\in\mathbb{Z}.$$

Des propositions 3.11 et 3.12, on obtient :

Théorème 4.1. *(Clausen von-Staudt classique)*
Soit n un entier strictement positif pair et d le dénominateur du nombre de Bernoulli B_n. On a

$$d=\prod_{p-1|n}p \qquad \text{et} \qquad B_n+\sum_{p-1|n}\frac{1}{p}\in\mathbb{Z}.$$

4.1.2 Le niveau $r=2$

On a $S_1(n,2)=\emptyset$, $\gamma_2(n)=1$, $\lambda(n,2)=0$ et $M^*(n,2)=\begin{cases}\{0\} & \text{si } n \text{ est pair}\\ \{1\} & \text{si } n \text{ est impair}\end{cases}$.
Par suite, on a

$$d=2(n+1)^{\delta_{n+1}}\prod_{l\in M^*(n,2)}\left(\prod_{p\in S_2(l,n,2)}^{*}p\right).$$

a) Si n est pair, on a $l=0$, $|s(2,2)|=1$, $S_2(0,n,2)=\{p : p-1|n, 3\leqslant p\leqslant n-2, n\not\equiv 1 \pmod p\}$ et $c_p(n,2,0)=a-1$, $n\equiv a \pmod p$. On obtient :

Théorème 4.2. *Soient n un entier strictement positif pair et d le dénominateur du nombre $B_n^{(2)}$. On a*

$$d=2(n+1)^{\delta_{n+1}}\prod_{p\in S_2(0,n,2)}^{*}p$$

et

$$B_n^{(2)}+\frac{1}{2}+\frac{2}{n+1}\delta_{n+1}-\sum_{\substack{p\in S_2(0,n,2)\\ n\equiv a \pmod p}}^{*}\frac{a-1}{p}\in\mathbb{Z}.$$

b) Si n est impair, on a $\delta_{n+1}=0$, $l=1$, $|s(2,1)|=1$, $S_2(1,n,2)=\{p : p-1|n-1, 3\leqslant p\leqslant n-2, n\not\equiv 0 \pmod p\}$ et $c_p(n,2,1)=a$, $n\equiv a \pmod p$. Donc pour n impair, on obtient :

Théorème 4.3. *Soient n un entier naturel impair $\geqslant 2$ et d le dénominateur du nombre $B_n^{(2)}$. On a*

$$d=2\prod_{p\in S_2(1,n,2)}^{*}p \qquad \text{et} \qquad B_n^{(2)}+\frac{1}{2}-\sum_{\substack{p\in S_2(1,n,2)\\ n\equiv a \pmod p}}^{*}\frac{a}{p}\in\mathbb{Z}.$$

4.1.3 Le niveau $r = 3$

On a $S_1(n,3) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } n \text{ est pair} \\ \{2\} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$, $\gamma_3(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } n \equiv 0, 2 \pmod 6 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$,
$\lambda(n,3) = 0$ et $M^*(n,3) = \begin{cases} \{0,2\} & \text{si } n \text{ est pair} \\ \{1\} & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$.
Alors, on a

$$d = 3^{\gamma_3(n)} 2^{\frac{1-(-1)^n}{2}} (n+1)^{\delta_{n+1}} \times \prod_{l \in M^*(n,3)} \left(\prod^*_{p \in S_2(l,n,3)} p \right).$$

Dans ce qui suit, on donne les $S_2(l,n,r)$ et les résultats à *la Clausen-von Staudt pour $r = 3$, qui en découlent.*

a) Si n est pair, on a $l = 0$ ou 2, $|s(3,3)| = 1$, $|s(3,1)| = 2$, $S_2(0,n,3) = \{p : p-1|n, 5 \leqslant p \leqslant n-3, n \not\equiv 1, 2 \pmod p\}$ et $S_2(2,n,3) = \{p : p-1|n-2, 5 \leqslant p \leqslant n-7, n \not\equiv 0, 1 \pmod p\}$. De plus pour $n \equiv a \pmod p$, on a $c_p(n,3,0) = -(a-1)(a-2)$ et $c_p(n,3,2) = -a(a-1)$. On obtient :

Théorème 4.4. *Soient n un entier naturel pair $\geqslant 3$ et d le dénominateur du nombre $2B_n^{(3)}$. On a*

$$d = 3^{\gamma_3(n)} (n+1)^{\delta_{n+1}} \prod^*_{p \in S_2(0,n,3) \cup S_2(2,n,3)} p$$

et

$$2B_n^{(3)} - \frac{(-1)^{\alpha_3(n)}}{3} \gamma_3(n) + \frac{6}{n+1} \delta_{n+1} + \sum^*_{\substack{p \in S_2(0,n,3) \\ n \equiv a \pmod p}} \frac{(a-1)(a-2)}{p} + 2 \sum^*_{\substack{p \in S_2(2,n,3) \\ n \equiv a \pmod p}} \frac{a(a-1)}{p} \in \mathbb{Z}.$$

avec $\gamma_3(n) = \begin{cases} 0 & \textit{si } n \equiv 1 \pmod 3 \\ 1 & \textit{sinon} \end{cases}$.

*b) Si n est impair, on a $\delta_{n+1} = 0$, $l = 1$, $|s(3,2)| = 3$ et $S_2(1,n,3) = \{p : p-1|n-1, 5 \leqslant p \leqslant n-3, n \not\equiv 0, 2 \pmod p\}$. Pour $n \equiv a \pmod p$ on a $c_p(n,3,1) \equiv -a(a-2)$.
On obtient :*

Théorème 4.5. *Soient n un entier naturel impair $\geqslant 3$ et d le dénominateur du nombre $2B_n^{(3)}$. On a*

$$d = 2 \prod^*_{p \in S_2(1,n,3)} p$$

et

$$2B_n^{(3)} + \frac{1}{2} + 3 \sum^*_{\substack{p \in S_2(1,n,3) \\ n \equiv a \pmod p}} \frac{a(a-2)}{p} \in \mathbb{Z}.$$

4.1.4 Le niveau $r = 4$

On a $S_1(n,4) = \left\{ \begin{array}{ll} \{3\} & si\ n \equiv 2 \pmod 6 \\ \emptyset & sion \end{array} \right.$, $\gamma_4(n) = \lambda(n,4) = 0$ *et* $M^*(n,4) = \left\{ \begin{array}{ll} \{0,2\} & si\ n\ est\ pair \\ \{1,3\} & si\ n\ est\ impair \end{array} \right.$.

Ce qui donne

$$d = 3^{s(n)}(n+1)^{\delta_{n+1}} \times \prod_{l \in M^*(n,4)} \left(\prod_{p \in S_2(l,n,4)}^{*} p \right)$$

où $s(n) = \left\{ \begin{array}{ll} 1 & si\ n \equiv 2 \pmod 6 \\ 0 & sinon \end{array} \right.$.
Reste à préciser les $S_2(l,n,4)$.

a) Si n *est pair, on a* $l = 0$ *ou* 2, $|s(4,4)| = 1$, $|s(4,2)| = 11$, $S_2(0,n,4) = \{p : p-1|n, 5 \leqslant p \leqslant n-4, n \not\equiv 1,2,3 \pmod p\}$ *et* $S_2(2,n,4) = \{p : p-1|n-2, 5 \leqslant p \leqslant n-9, n \not\equiv 0,1,3 \pmod p\}$. *De plus, pour* $n \equiv a \pmod p$, *on a* $c_p(n,4,0) = (a-1)(a-2)(a-3)$ *et* $c_p(n,4,2) = a(a-1)(a-3)$. *On obtient :*

Théorème 4.6. *Soient* n *un entier naturel pair* $\geqslant 4$ *et* d *le dénominateur du nombre* $6B_n^{(4)}$. *On a*

$$d = 3^{s(n)}(n+1)^{\delta_{n+1}} \prod_{p \in S_2(0,n,4) \cup S_2(2,n,4)}^{*} p$$

et

$$6B_n^{(4)} + \frac{1}{3}s(n) + \frac{24}{n+1}\delta_{n+1} - \sum_{\substack{p \in S_2(0,n,4) \\ n \equiv a \pmod p}}^{*} \frac{(a-1)(a-2)(a-3)}{p} - 11 \sum_{\substack{p \in S_2(2,n,4) \\ n \equiv a \pmod p}}^{*} \frac{a(a-1)(a-3)}{p} \in \mathbb{Z}.$$

b) Si n *est impair, on a* $\delta_{n+1} = 0$, $l = 1$ *ou* 2, $|s(4,3)| = 6$, $|s(4,1)| = 6$, $S_2(1,n,4) = \{p : p-1|n-1, 5 \leqslant p \leqslant n-4, n \not\equiv 0,2,3 \pmod p\}$ *et* $S_2(3,n,4) = \{p : p-1|n-3, 5 \leqslant p \leqslant n-14, n \not\equiv 0,1,2 \pmod p\}$. *De plus pour* $n \equiv a \pmod p$, *on a* $c_p(n,4,1) = a(a-2)(a-3)$ *et* $c_p(n,4,3) = a(a-1)(a-2)$. *Par suite, on a :*

Théorème 4.7. *Soient* n *un entier naturel impair* $\geqslant 4$ *et* d *le dénominateur du nombre* $6B_n^{(3)}$. *On a*

$$d = \prod_{p \in S_2(1,n,4) \cup S_2(3,n,4)}^{*} p$$

et

$$6B_n^{(4)} - 6 \sum_{\substack{p\in S_2(1,n,4)\\ n\equiv a \pmod p}}^{*} \frac{a(a-2)(a-3)}{p} - 6 \sum_{\substack{p\in S_2(3,n,4)\\ n\equiv a \pmod p}}^{*} \frac{a(a-1)(a-2)}{p} \in \mathbb{Z}.$$

Voici à présent les 20 *premières valeurs du nombre* d *pour* $r = 1, 2, 3, 4$.

n \ r	1	2	3	4
1	2	1	1	1
2	(2)(3)	(2)(3)	1	1
3	1	2	2	1
4	(2)(3)(5)	(2)(5)	5	5
5	1	(2)(3)	2	1
6	(2)(3)(7)	(2)(3)(7)	(3)(7)	7
7	1	(2)(3)	2	1
8	(2)(3)(5)	(2)(3)(5)	(3)(5)	3
9	1	(2)(5)	(2)(5)	5
10	(2)(3)(11)	(2)(11)	11	11
11	1	(2)(3)	2	1
12	(2)(3)(5)(7)(13)	(2)(3)(5)(7)(13)	(3)(7)(13)	(7)(13)
13	1	(2)(3)(5)(7)	(2)(5)(7)	7
14	(2)(3)	(2)(3)	(3)(5)	(3)(5)
15	1	2	2	1
16	(2)(3)(5)(17)	(2)(17)	17	17
17	1	(2)(3)(5)	2	1
18	(2)(3)(7)(19)	(2)(3)(7)(19)	(3)(5)(7)(19)	(7)(19)
19	1	(2)(3)(7)	(2)(7)	(5)(7)
20	(2)(3)(5)(11)	(2)(3)(5)(11)	(3)(5)(7)(11)	(3)(5)(7)(11)

4.2 Dénominateurs et formule de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$ dans le cas $6 \leqslant r \leqslant n \leqslant 2r$

Dans cette partie nous explicitons les dénominateurs et les coefficients de Clausen-von Staudt des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$ *dans le cas* $6 \leqslant r \leqslant n \leqslant 2r$.
On a $\lambda(n,r) = \gamma_r(n) = 0$ *et* $S_1(n,r) = S_2(n,r) = \emptyset$. *En effet, si* p *est un nombre premier, on a* $p \in S_2(n,r)$ *implique* $n \geqslant 2r+1$. *Ce qui est exclu.*
De même, on a $p \in S_1(n,r)$ *équivaut à* $\begin{cases} [\frac{r}{2}] + 1 \leqslant p \leqslant r-1 \\ n = p-1+hp(p-1),\ h \in \mathbb{N}^* \end{cases}$.
Alors, on a $n+1 = kp \in \big[k([\frac{r}{2}]+1), k(r-1)\big] \cap [r+1, 2r+1]$, *où* $k = 1 + h(p-1)$.
Comme $p \geqslant [\frac{r}{2}] + 1$ *donc* $p \geqslant 5$ *et par suite* $k \geqslant 5$.

Ce qui implique $k([\frac{r}{2}]+1) \geqslant 5([\frac{r}{2}]+1) > 5(\frac{r}{2}) > 2r+1$ *et* $S_1(n,r) = \emptyset$.

On a aussi $\gamma_r(n) = \begin{cases} 1 & \text{si } r \text{ premier et } n \equiv 0, r-1 \pmod{r(r-1)} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

Alors, pour $\gamma_r(n) = 1$ *on a :*
Si $n \equiv 0 \pmod{r(r-1)}$ *alors* $n = hr(r-1)$, $h \in \mathbb{N}^*$, *avec* $r \leqslant n = hr(r-1) \leqslant 2r$.
On a $h \geqslant 1$ *et* r *premier* $\geqslant 7$ *donc* $n \geqslant 6r$. *Ce qui est impossible.*
Si $n \equiv r-1 \pmod{r(r-1)}$ *alors* $n = r-1+hr(r-1)$, $h \in \mathbb{N}^*$,
avec $r \leqslant n = r-1+hr(r-1) \leqslant 2r$.
On a $h \geqslant 1$ *et* r *premier* $\geqslant 7$ *donc* $n \geqslant 6+6r$. *Ce qui est impossible aussi.*
Donc dans tous les cas on a $\gamma_r(n) = 0$.
Par le Théorème 3.1 et le Corollaire 3.1, on obtient :

Théorème 4.8. *Soient* n *et* r *deux entiers naturels tels que* $6 \leqslant r \leqslant n \leqslant 2r$ *et* d *le dénominateur du nombre* $(r-1)!B_n^{(r)}$. *On a*

$$d = (n+1)^{\delta_{n+1}}$$

et

$$(r-1)!B_n^{(r)} + \frac{r!}{n+1}\delta_{n+1} \in \mathbb{Z}.$$

En particulier, si $r = n \geqslant 6$ *et* $\delta_{n+1} = 1$ *alors* $r! \equiv -1 \pmod{n+1}$ *et on a :*

Corollaire 4.1 (Nombres de Cauchy). *Soit* n *un entier naturel* $\geqslant 6$. *On a :*

1) si $n+1$ *est premier alors* $(n-1)!B_n^{(n)} - \frac{1}{n+1} \in \mathbb{Z}$,

2) si $n+1$ *n'est pas premier alors* $(n-1)!B_n^{(n)} \in \mathbb{Z}$.

4.3 Dénominateurs des nombres $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ où $k \in \mathbb{N}^*$ et p premier

Dans cette section nous explicitons les dénominateurs des nombres $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ *où* $k \in \mathbb{N}^*$ *et* p *premier. Pour* $p = 2$ *on obtient* $2B_{2k}^{(3)}$, *ces nombres sont traités dans le Théorème 4.4. Pour la suite on suppose* $p \geqslant 3$, *dans ce cas on a :*

Théorème 4.9. *Soient* k *un entier strictement positif et* p *un nombre premier impair. On a :*

1) si $k < \dfrac{p+3}{2}$, *alors le nombre* $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ *est un entier relatif,*

2) si $k \geqslant \dfrac{p+3}{2}$, *alors le dénominateur du nombre* $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ *est donné par*

$$d = \prod_{\substack{l \text{ impair} \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} \Big(\prod_{q \in S_2(l,p+2k,p+1)}^{*} q \Big).$$

Preuve. Le nombre $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ correspond à $(r-1)!B_n^{(r)}$, avec $n = p+2k$ et $r = p+1$.
Par suite, on a $n+1 = p+2k+1$ est un nombre pair $\geqslant 4$, donc il n'est pas premier et $\delta_{n+1} = 0$.
De même $r = p+1$ est un nombre pair $\geqslant 4$, donc $\lambda(n,r) = \gamma_r(n) = 0$.

On a aussi q premier $\in S_1(n,r)$ équivaut à $\begin{cases} \frac{p+3}{2} \leqslant q \leqslant p \\ q-1 | p+2k \\ q | p+2k+1 \end{cases}$.
Donc $q \geqslant \frac{p+3}{2} \geqslant 3$ et par suite $q-1$ est pair .
D'autre part $q-1|p+2k$ et $p+2k$ impair.
Ce qui conduit à une contradiction et donc $S_1(n,r) = \emptyset$.

Reste à étudier les ensembles $S_2(n,r)$.
On a $S_2(n,r) \neq \emptyset$ implique $n \geqslant 2r+1$. Ce qui donne $k \geqslant \frac{p+3}{2}$ ou encore $p \leqslant 2k-3$.
On distingue deux cas :
Le cas $k < \dfrac{p+3}{2}$. Dans ce cas on a $S_2(n,r) = \emptyset$. Donc le Corollaire 3.1 implique que $d = 1$.
Le cas $k \geqslant \dfrac{p+3}{2}$. Comme $n = p+2k$ est impair alors $M^*(p+2k, p+1) = \{l \text{ impair} : 1 \leqslant l \leqslant p\}$. Par le Théorème 3.1 on a

$$d = \prod_{\substack{l \text{ impair} \\ 1 \leqslant l \leqslant p}} \Big(\prod_{q \in S_2(l, p+2k, p+1)}^{*} q \Big).$$

Ce qui achève la preuve du théoème. □

4.3.1 Les dénominateurs non triviaux des nombres $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$, $p \geqslant 3$

Dans cette partie, pour k ou p nombre premier impair fixé, nous déterminons les dénominateurs des nombres $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$.
D'après le Théorème 4.9, si le dénominateur du nombre $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ est supérieur ou égal à 2 on a alors $3 \leqslant p \leqslant 2k-3$. Dans ce cas les diviseurs premiers q éventuels du dénominateur vérifient $p+2 \leqslant q \leqslant 2k-1$ car se sont des éléments de $S_2(n,r)$. On en déduit que pour k fixé il n'y a qu'un nombre fini de dénominateurs non triviaux.
Dans le tableau suivant, on précise les dénominateurs de ses nombres pour $k \in \{3,4,5,6,7\}$:

p \ k	3	4	5	6	7
3	5	1	7	1	1
5		7	1	1	1
7			1	1	11
11					13

Pour p fixé, on a

Proposition 4.1. *Soit p un nombre premier impair. On a :*

1) il y a une infinité d'entiers strictement positifs k pour lesquels les dénominateurs des nombres $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ sont différents de 1,

2) de plus, pour tout entier strictement positif m, il existe un entier strictement positif k, et des nombres premiers $q_1, q_2, ..., q_m$ divisant le dénominateur de $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$.

Preuve. Le nombre $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ correspond à $(r-1)!B_n^{(r)}$, avec $n = p + 2k$ et $r = p + 1$.
Soit q un diviseur du dénominateur de $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$. D'après le Théorème 4.9, il existe un unique $l \in M^*(n, r)$ tel que $q \in S_2(l, n, r)$.
Ce qui donne

$$k = \frac{l-p}{2} + u\frac{q-1}{2} + hq\frac{q-1}{2},\ u \in \{0\} \cup \{l+1, ..., q+l-p-1\}, h \in \mathbb{N},$$
$$(u, h) \neq (0, 0), (l, u, h) \neq (0, 1, 0), q \nmid |s(p+1, p+1-l)| \text{ et } q \geqslant p+2.$$

En particulier pour $u = 0$, si $m \in \mathbb{N}^*$ et $q_1, q_2, ..., q_m$ des nombres premiers $\geqslant p + 2$ qui ne divisent pas $|s(p + 1, p + 1 - l)|$, on prend

$$k = \frac{l-p}{2} + \frac{h}{2}\varphi(q_1^2)...\varphi(q_m^2), l \text{ impair } \in \{1, ..., p\}$$

où $\varphi(q_i^2) = q_i(q_i - 1)$, pour tout entier i entre 1 et m. Alors on a $q_1, q_2, ..., q_m \in S_2(l, p + 2k, p + 1)$. Donc les nombres $q_1, q_2, ..., q_m$ divisent le énominateur du nombre $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$. Par exemple, si on prend $u = 0$, $l = p$, $h \in \mathbb{N}^*$ le dénominateur du nombre $p!B_{p+2k}^{(p+1)}$ est divisible par $q_1, q_2, ...q_m$. □

Chapitre 5

Multiples des numérateurs des nombres de Bernoulli d'ordres supérieurs

Ce chapitre est constitué de deux parties, dans la première nous donnons plusieurs multiples des numérateurs des nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$*, et dans la seconde nous explicitons d'autres multiples des numérateurs des nombres* $(r-1)!B_n^{(r)}$.

5.1 Multiples des numérateurs des nombres $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$

Le résultat principal de ce cette partie est le théorème suivant :

Théorème 5.1. *Soient* n *et* r *deux entiers strictement positifs tels que* $n \geqslant r$ *et* $(a_i)_{i\in M(n,r)}$ *une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. On a :*
1) le nombre

$$t^n \prod_{i\in M(n,r)}^{*} (a_i^{n-i} - 1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} \tag{5.1}$$

est un entier relatif, où $t = ppcm(a_i)_{i\in M(n,r)}$,
2) si $n \geqslant r+1$ *alors le nombre*

$$t^{[\frac{n}{2}]+1} \prod_{i\in M^*(n,r)} (a_i^{n-i} - 1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} \tag{5.2}$$

est un entier relatif.

Pour démontrer ce théorème, on établit les deux lemmes suivants :

Lemme 5.1. *Soient* a *et* n *deux entiers strictement positifs et* p *un nombre premier tel que* $a \geqslant 2$, $p \nmid a$ *et* $p-1|n$. *On a*

$$\frac{a^n - 1}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preuve. Le nombre a est premier avec p, donc d'après le petit théorème de Fermat cf. [25, p. 131] et [26, p. 78] on a $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ et $a^{p-1} = 1 + wp$ avec $w \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\alpha = v_p(n)$ donc $n = p^\alpha(p-1)u$ où $u \in \mathbb{N}^*$.
On a $a^n = (a^{p-1})^{p^\alpha u} = (1+wp)^{p^\alpha u} = 1 + \sum_{k=1}^{p^\alpha u} \binom{p^\alpha u}{k}.(wp)^k$.
C'est-à-dire

$$a^n - 1 = \sum_{k=1}^{p^\alpha u} \frac{p^\alpha u(p^\alpha u-1)...(p^\alpha u-k+1)}{k!} w^k p^k.$$

D'autre part, d'après la formule de Legendre $v_p(k!) = \sum_{i\geqslant 1}[\frac{k}{p^i}] = \frac{k-s_p(k)}{p-1} < \frac{k}{p-1}$ où $s_p(k)$ est la somme des chiffres de k en base p cf. [24, p. 114], [49, p. 241] et [50, p.371].
Donc

$$v_p\left(\frac{p^\alpha u(p^\alpha u-1)...(p^\alpha u-k+1)}{k!} w^k p^k\right) > \alpha + k - \frac{k}{p-1} \geqslant \alpha$$

et

$$v_p\left(\frac{p^\alpha u(p^\alpha u-1)...(p^\alpha u-k+1)}{k!} w^k p^k\right) \geqslant \alpha + 1.$$

On obtient alors

$$v_p(a^n - 1) \geqslant \alpha + 1 \ \text{ et } \ v_p(\frac{a^n-1}{n} = v_p(a^n-1) - v_p(n) \geqslant \alpha + 1 - \alpha = 1.$$

Par suite

$$\frac{a^n-1}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

□

Lemme 5.2. *Soient a et n deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $a \geqslant 2$ et $p|a$. On a*

$$\frac{a^n}{n} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Preuve. Soient $\alpha = v_p(a) \geqslant 1$ et $\beta = v_p(n) \geqslant 0$. Alors $a = p^\alpha b$ et $n = p^\beta m$ avec $\text{pgcd}(bm, p) = 1$.
On a

$$p^n = (1 + p - 1)^n = 1 + n(p-1) + \sum_{k=2}^{n} \binom{n}{k}(p-1)^k \geqslant 1 + n(p-1).$$

Alors on obtient

$$\frac{p^n}{n} \geqslant \frac{1}{n} + p - 1 > p - 1,$$

et

$$\frac{p^{n-\beta}}{m} > p - 1 \ \text{ et } \ p^{n-\beta} > m(p-1) \geqslant p - 1,$$

$$p^{n-\beta} \geqslant p \ \text{ et } \ n - \beta \geqslant 1.$$

Par suite on a

$$v_p\left(\frac{a^n}{n}\right) = v_p\left(\frac{p^{\alpha n}b^n}{p^\beta m}\right) = \alpha n - \beta \geqslant n - \beta \geqslant 1 \text{ et } \frac{a^n}{n} \equiv 0 \pmod p.$$

□

Preuve du Théorème 5.1.
1) En utilisant la formule (1.10), on obtient

$$t^n \prod_{i\in M(n,r)}^{*} (a_i^{n-i}-1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = \sum_{l\in M(n,r)} (-1)^{r-1}\left(\frac{t}{a_l}\right)^n (a_l)^l \prod_{i\in M(n,r)\smallsetminus\{l\}}^{*} (a_i^{n-i}-1)|s(r,r-l)|$$
$$\times a_l^{n-l}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}. \tag{5.3}$$

Il suffit donc de montrer que $a_l^{n-l}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est un entier pour tout $l \in M(n,r)$.
Soit p un nombre premier et $l \in M(n,r)$.

Si $p-1 \nmid n-l$ alors $\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est p-entier. Donc $a^{n-l}(a^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est p-entier.

Supposons que $p-1|n-l$. Alors on distingue deux cas : soit $p|a_l$, soit p est premier avec a_l.
Si $p|a_l$ alors le lemme 5.2 implique $\frac{a_l^{n-l}}{n-l} \equiv 0 \pmod p$. D'ou $a_l^{n-l}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est un p-entier.
Si a_l est premier avec p alors le Lemme 5.1 implique $\frac{a_l^{n-l}-1}{n-l} \equiv 0 \pmod p$. Par suite $a_l^{n-l}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est un p-entier.

Dans tous les cas, le nombre $a_l^{n-l}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est un p-entier. Donc c'est un entier et la relation (5.3) permet de conclure.
2) On a

$$t^{[\frac{n}{2}]+1} \prod_{i\in M^*(n,r)} (a_i^{n-i}-1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} = \sum_{l\in M^*(n,r)} (-1)^{r-1}\left(\frac{t}{a_l}\right)^{[\frac{n}{2}]+1} (a_l)^{[\frac{n}{2}]-\frac{n-l}{2}}$$
$$\times \prod_{i\in M^*(n,r)\smallsetminus\{l\}}^{*} (a_i^{n-i}-1)|s(r,r-l)|a_l^{\frac{n-l}{2}+1}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l} \tag{5.4}$$

et d'après la Proposition 1.2 5), on a

$$n-l \leqslant 2[\frac{n}{2}], \text{ pour tout } l \in M^*(n,r).$$

Il suffit donc de montrer que $a_l^{\frac{n-l}{2}+1}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-i}}{n-l}$ est un entier pour tout $l \in M(n,r)$.
Soit p un nombre premier et $l \in M^*(n,r)$.

les cas $p-1 \nmid n-l$ et $p-1|n-l$ où a_l premier avec p sont traités dans la partie 1) de cette preuve. Supposons donc $p-1|n-l$ et $p|a_l$.
On a

$$a_l^{\frac{n-l}{2}+1}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l} = \frac{a_l}{2}\frac{a_l^{\frac{n-l}{2}}}{\frac{a_l-l}{2}}(a_l^{n-l}-1)B_{n-l}.$$

Si $p=2$ alors le nombre $\frac{a_l}{2}$ est un entier, sinon c'est un p-entier.

D'autre part, le Lemme 5.2 implique que $\frac{a_l^{\frac{n-l}{2}}}{\frac{a_l-l}{2}} \equiv 0 \pmod{p}$.

D'où $a_l^{\frac{n-l}{2}+1}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est un p-entier .

Dans tous les cas, le nombre $a_l^{\frac{n-l}{2}+1}(a_l^{n-l}-1)\frac{B_{n-l}}{n-l}$ est un p-entier. Donc c'est un entier et on conclut grace a la relation (5.4). □

Le Théorème 5.1 nous conduit aux corollaires et remarques suivantes.

Corollaire 5.1. *Soient n et r deux entiers strictement positifs avec $n \geqslant r$ et $M(n,r) \neq \emptyset$. Si p est un nombre premier tel que $p-1 \nmid n-l$ pour tout $l \in M(n,r)$, alors le nombre $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ est p-entier.*

Preuve. D'après le Théorème 2.1, on a $p \geqslant r+2$. On prend $a_i = g$ pour tout $i \in M(n,r)$ dans la relation (5.1), où g est une racine primitive de p. Donc le nombre $g^n \prod_{i \in M(n,r)} (g^{n-i}-1)$ est premier avec p, et le nombre $g^n \prod_{i \in M(n,r)} (g^{n-i}-1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ est p-entier. Par suite le nombre $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$ est p-entier. □

Remarque 5.1. *Le Corollaire 5.1 affirme la p-intégralité du nombre $\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$. Ce même résultat a été déjà établi dans le Théorème 2.1, à l'aide d'une autre méthode.*

Corollaire 5.2. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$, p un nombre premier et $(a_i)_{i \in M(n,r)}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. On a :*
1) Si les nombres a_i sont premiers avec p pour tout $i \in M(n,r)$, alors le nombre

$$\prod_{i \in M(n,r)}^{*} (a_i^{n-i}-1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}} \tag{5.5}$$

est p-entier.
Si de plus $n \geqslant r+1$, alors le nombre

$$\prod_{i \in M^*(n,r)} (a_i^{n-i}-1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$$

est p-entier.

2) Si a est entier strictement positif multiple de p, alors le nombre

$$a^n \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$$

est p-entier.
Si de plus $n \geqslant r+1$, alors le nombre

$$a^{[\frac{n}{2}]+1} \frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}$$

est p-entier.

Preuve. Soit $(a_i)_{i\in M(n,r)}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2.
1) Si les a_i sont premiers avec p pour tout $i \in M(n,r)$ alors le nombre $t = ppcm(a_i)_{i\in M(n,r)}$ est premier avec p. Par suite les relations (5.1) et (5.2) nous permettent de conclure.
2) Dans les relations (5.1) et (5.2), on remplace a_i par $a_i = a$ pour tout $i \in M(n,r)$. Le résultat découle alors du fait que $\prod\limits_{i\in M(n,r)}^{*} (a_i^{n-i} - 1)$ est p-entier et $t = a$. □

Remarque 5.2.

1) Si on pose $r = 1$ et $a_i = a$ dans les relations (5.1) et (5.2), on obtient les entiers relatifs

$$a^n(a^n - 1)\frac{B_n}{n} \quad et \quad a^{\frac{n}{2}+1}(a^n - 1)\frac{B_n}{n}$$

étudiés par J.J. Sylvester, J. Glaisher et L. Nielsen cf. [42, p. 250] et [50, p. 549].

2) Si on pose $a_i = a$ pour tout $i \in M(n,r)$ dans la relation (5.5), on obtient le p-entier

$$\prod_{i\in M(n,r)}^{*} (a^{n-i} - 1)\frac{B_n^{(r)}}{r\binom{n}{r}}. \tag{5.6}$$

Ce qui implique la p-intégralité du nombre

$$\prod_{i=0}^{r-1}(a^{n-i} - 1)\frac{B_n^{(r)}}{A_n^r}. \tag{5.7}$$

La relation (5.7) a été établie par L. Carlitz par une autre méthode cf. [15, p. 608].

5.2 Multiples des numérateurs des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$

Dans ce qui suit nous nous intéressons à l'étude des multiples des numérateurs des nombres $(r-1)!B_n^{(r)}$. Les résultats obtenus sont exposés dans les propositions 5.1, 5.2, 5.3 et 5.4, ainsi que dans le Corollaire 5.3.

Proposition 5.1. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $r \leqslant n \leqslant 2r$. On a :*

1) les nombres

$$(n+1)(n-r+1)^{\lambda(n,r)} r^{\gamma_n(r)}(r-1)!B_n^{(r)} \text{ et } n(n+1)(r-1)!B_n^{(r)}$$

sont des entiers relatifs,

2) pour $r \geqslant 6$, le nombre

$$(n+1)^{\delta_{n+1}}(r-1)!B_n^{(r)}$$

est un entier relatif,

3) pour n impair, le nombre

$$2^{\omega(n,r)} r^{\gamma_r(n)}(r-1)!B_n^{(r)}, \text{ où } \omega(n,r) = \begin{cases} 1 & \text{si } n=1 \text{ ou } r=3 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

est un entier relatif.

Avant de démontrer cette proposition on établit le lemme suivant :

Lemme 5.3. *Soient n, r et h des entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et d le dénominateur du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$. On a :*

$$d|h \text{ implique } h(r-1)!B_n^{(r)} \text{ est un entier.}$$

Preuve. Comme d est le dénominateur du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$, donc $d(r-1)!B_n^{(r)}$ est un entier.
Si $d|h$ alors $\frac{h}{d}$ est un entier, donc $h(r-1)!B_n^{(r)} = \frac{h}{d} \times d(r-1)!B_n^{(r)}$ est un entier comme produit de deux entiers. □

Preuve de la Proposition 5.1.
1) D'après la Remarque 3.1, pour $r \leqslant n \leqslant 2r$ on a $S_2(n,r) = \emptyset$ et le dénominateur d du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ se reduit à

$$d = (n+1)^{\delta_{n+1}} r^{\gamma_r(n)}(n-r+1)^{\lambda(n,r)} \prod_{p \in S_1(n,r)}^{*} p. \tag{5.8}$$

D'autre part, d est sans facteur carré et si $p \in S_1(n,r)$ alors $p|n+1$ et

$$d|(n+1)(n-r+1)^{\lambda(n,r)} r^{\gamma_r(n)}. \tag{5.9}$$

De plus on a $(n-r+1)^{\lambda(n,r)}|n,\ r^{\gamma_r(n)}|n(n+1)$ et

$$d|n(n+1). \tag{5.10}$$

Le Lemme 5.3 et les relations (5.9) et (5.10) nous permettent de conclure.
2) Si $r \geqslant 6$ alors d'après l'étude faite au paragraphe 4.2, le dénominateur du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ est $(n+1)^{\delta_{n+1}}$.Donc le nombre $(n+1)^{\delta_{n+1}}(r-1)!B_n^{(r)}$ est un entier.
3) Si n est impair alors $\lambda(n,r)=0$, $(n+1)^{\delta_{n+1}} = \left\{\begin{array}{ll} 2 & \text{si } n=1 \\ 1 & \text{sinon} \end{array}\right.$,
et d'après la Proposition 3.5 on a $S_1(n,r) = \left\{\begin{array}{ll} \{2\} & \text{si } r=3 \\ \emptyset & \text{sinon} \end{array}\right.$.
D'après la relation (5.8), le dénominateur du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ vaut $d = 2^{\omega(n,r)}r^{\gamma_r(n)}$.
D'où le nombre $2^{\omega(n,r)}r^{\gamma_r(n)}(r-1)!B_n^{(r)}$ est un entier relatif. $\square$

Corollaire 5.3. *Si n et r sont deux entiers strictement positifs tels que $6 \leqslant r \leqslant n \leqslant 2r$ et n impair, alors le nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ est un entier relatif.*

Démonstration. On a n est impair $\geqslant 6$, donc $\delta_{n+1} = 0$. L'affirmation 2) de la Proposition 5.1 permet alors de conclure. $\square$

Proposition 5.2. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant 2r+1$. On a :*
1) les nombres

$$(n+1)r^{\gamma_r(n)-1}(n-r)!B_n^{(r)} \ \textit{et}\ \ n(n+1)\frac{(n-r)!}{r}B_n^{(r)},$$

sont des entiers relatifs.
2) si n est impair alors le nombre

$$2^{\sigma(n,r)}r^{\gamma_r(n)-1}(n-r)!B_n^{(r)},\ \textit{où}\ \sigma(n,r) = \left\{\begin{array}{ll} 1 & \textit{si } r=3 \\ 0 & \textit{sinon} \end{array}\right.,$$

est un entier relatif.

Preuve. 1) Pour $n \geqslant 2r+1$ on a $\lambda(n,r)=0$, donc d'après la formule (3.4), le dénominateur d du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$ s'écrit

$$d = (n+1)^{\delta_{n+1}}r^{\gamma_r(n)} \prod_{p\in S_1(n,r)}^{*} p \times \prod_{p\in S_2(n,r)}^{*} p. \tag{5.11}$$

Soit p un nombre premier qui divise d :
(i) si $p \in S_1(n,r)$ alors $p|n+1$,
(ii) si $p \in S_2(n,r)$ alors $r+1 \leqslant p \leqslant n-r$ et

$$p|(r+1)(r+2)...(n-r) = \frac{(n-r)!}{r!}. \tag{5.12}$$

Comme d est sans facteur carré alors $d|(n+1)r^{\gamma_r(n)} \cdot \frac{(n-r)!}{r!}$.
De plus $r^{\gamma_r(n)}|n(n+1)$, et donc $d|n(n+1) \cdot \frac{(n-r)!}{r!}$.
D'autre part on a
$(n+1)r^{\gamma_r(n)} \cdot \frac{(n-r)!}{r!}(r-1)!B_n^{(r)} = (n+1)r^{\gamma_r(n)-1}(n-r)!B_n^{(r)}$ et
$n(n+1) \cdot \frac{(n-r)!}{r!}(r-1)!B_n^{(r)} = n(n+1)\frac{(n-r)!}{r}B_n^{(r)}$.
Le Lemme 5.3, nous permet alors de conclure.
2) Si n est impair alors $\delta_{n+1} = 0$ et $S_1(n,r) = \begin{cases} \{2\} & \text{si } r = 3 \\ \emptyset & \text{si } r \neq 3 \end{cases}$, donc la relation (5.11) donne

$$d = 2^{\sigma(n,r)} r^{\gamma_r(n)} \prod_{p \in S_2(n,r)}^{*} p. \tag{5.13}$$

Des relations (5.12) et (5.13), on a

$$d|2^{\sigma(n,r)} r^{\gamma_r(n)} \cdot \frac{(n-r)!}{r!}.$$

Par ailleurs, on a

$$2^{\sigma(n,r)} r^{\gamma_r(n)} \cdot \frac{(n-r)!}{r!}(r-1)!B_n^{(r)} = 2^{\sigma(n,r)} r^{\gamma_r(n)-1}(n-r)!B_n^{(r)}.$$

On conclut grâce au Lemme 5.3. □

Proposition 5.3. *Soient n, r et a des entiers strictement positifs tels que $r \leqslant n \leqslant 2r$ et $a \geqslant 2$. Alors le nombre $a(a^n - 1)(r-1)!B_n^{(r)}$ est un entier relatif.*

Avant de démontrer cette proposition on établit le lemme suivant :

Lemme 5.4. *Soient a et n deux entiers strictement positifs et p un nombre premier tels que $a \geqslant 2$ et $p-1|n$. Alors $a(a^n-1) \equiv 0 \pmod{p}$.*

Preuve. Si $p|a$ alors $p|a(a^n-1)$.
Si $p \nmid a$ alors d'aprés le petit théorème de Fermat cf. [25, p. 131] et [26, p. 78], on a $p|a^n - 1$ et par suite $p|a(a^n-1)$.
Donc dans tous les cas $a(a^n-1) \equiv 0 \pmod{p}$. □

Preuve de la proposition 5.3.
Soit p un nombre premier qui divise le dénominateur d du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$.
D'après la relation (5.8) et la Remarque 3.5, on a $p \in \{n+1, n-r+1, r\} \cup S_1(n,r)$ et $p-1|n$.
D'où, le Lemme 5.4 implique $a(a^n-1) \equiv 0 \pmod{p}$.
Comme d est sans facteur carré, alors $a(a^n-1) \equiv 0 \pmod{d}$.
Par suite, le Lemme 5.3 permet de conclure. □

Proposition 5.4. *Soient n et r deux entiers strictement positifs tels que $n \geqslant r$ et $(a_i)_{i \in M(n,r)}$ une suite d'entiers supérieurs ou égaux à 2. Alors :*

1) le nombre

$$t \prod_{i \in M(n,r)}^{*} (a_i^{n-i} - 1)(r-1)! B_n^{(r)}, \text{ où } t = ppcm(a_i)_{i \in M(n,r)},$$

est un entier relatif,

2) si de plus $n \neq 1$, le nombre

$$t \prod_{i \in M^*(n,r)}^{*} (a_i^{n-i} - 1)(r-1)! B_n^{(r)}, \text{ où } t = ppcm(a_i)_{i \in M^*(n,r)},$$

est un entier relatif.

Preuve. Soit p un nombre premier qui divise le dénominateur d du nombre $(r-1)!B_n^{(r)}$.
D'après la Remarque 3.4, il existe $l \in M(n,r)$ tel que $p-1|n-l$ avec $l \in M^*(n,r)$ si $n \neq 1$.
Le Lemme 5.4 implique $p|a(a^{n-l}-1)$.
Donc $p|\frac{t}{a}a(a^{n-l}-1) \times \prod_{i \in M(n,r)\backslash\{l\}}^{*} (a_i^{n-i}-1) = t \prod_{i \in M(n,r)} (a_i^{n-i}-1)$.
Comme d est sans facteur carré, alors $d|t \prod_{i \in M(n,r)} (a_i^{n-i}-1)$.
Par suite, le Lemme 5.3 nous permet de conclure. □

Bibliographie

[1] T. Agoh, Congruences involving Bernoulli numbers and Fermat-Euler quotients*, J. Number Theory, 94 (2002), 1–9.*

[2] M. Aigner, A course in enumeration*, Springer-Verlag, 2007.*

[3] Y. Amice, Les nombres p-adiques*, Collection sup, Presses Universitaires de France, Paris, 1975.*

[4] T. Arakawa, T. Ibukiyama and M. Kaneko, Bernoulli Numbers and Zeta Functions*, Springer Monographs in Mathematics, Japan, 2014.*

[5] E. Artin, Theory of algebraic numbers*, Göttingen, Germany, 1959.*

[6] A. Bayad, J. Chikhi, Reduction and duality of the generalized Hurwitz-Lerch zetas*, Fixed Point Theory Appl.,(2013), Article ID 82, 1–14 .*

[7] A.T. Benjamin, G.O. Preston, and J.J. Quinn, A Stirling Encounter with Harmonic Numbers*, Math. Mag. 75 (2002), 95–103.*

[8] M. Bóna, A walk through combinatorics*, World Scientific, 2nd edition, 2006.*

[9] M. Bóna, Combinatotorics of permutations*, Chapman & Hall/CRC, 2004.*

[10] Z.I. Borevich & I.R. Shafarevich, Théorie des nombres*, Traduit par Myriam et Jean-Luc VERLEY, Gautier-Villars, Paris, 1967.*

[11] L. Carlitz, Somme theoremms on Bernoulli numbers of higher order*, Pacific J.Math, 2 (1952), 127–139.*

[12] L. Carlitz. Some Properties of the Nörlund Polynomial $B_n^{(x)}$*, Math Nachr. 33 (1967), 297–311.*

[13] L. Carlitz, Recurrences for the Bernoulli and Euler Numbers*, Math. Each. 29 (1965), 151–160.*

[14] L. Carlitz, A Note on Bernoulli and Euler Numbers of Order $\pm p$*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 4, No. 2 (Apr., 1953), 178–183.*

[15] L. Carlitz, A Note on Bernoulli Numbers and Polynomials of Higher Order*, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 3, No. 4 (Aug., 1952), 608–613.*

[16] J. Choi, Explicit formulas for Bernoulli polynomials of order n, Indian J. pure appl. Math., **27** *(1996), 667–674.*

[17] *H. Cohen,* Number Theory*, Volume II : Analytic and Modern Tools, Graduate Texts in Mathematics Vol. 240, Springer-Verlag, New York, 2007.*

[18] *L. Comtet,* Analyse combinatoire*, Vol 2, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.*

[19] *M. DeFranco,* On the analytic extension of Stirling numbers of the first kind*, J. Difference Equ. Appl. 16 (9) (2010), 1101–1120.*

[20] *R. Descombes,* Eléments de théorie des nombres*, Presses Universitaires de France, Paris, 1986.*

[21] *I. Dibag,* An analogue of the von Staudt-Clausen theorem*, J. Algebra 87 (1984), 332–341.*

[22] *M. Eie and Y. Ong,* A generalization of Kummer congruences*, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg 67 (1997), 149–157.*

[23] *P. Flajolet and R.Sedgewick,* Analytic combinatorics*, Cambridge university press, 2009.*

[24] *F.Q. Gouvêa,* p-adic numbers : An introduction*, Universitext, Springer, 2nd edition, 1997.*

[25] *R.L. Graham, D.E. Knuth, and O. Patashnik,* Concrete Mathematics*, Addison-Wesley, 2nd edition, 1994.*

[26] *G.H. Hardy and E.H. Wright,* An introduction to the theory of numbers*, Fifth edition, Oxford University Press, Great Britain, 1979.*

[27] *H. Hasse,* Number theory*, Springer-Verlag, 1980.*

[28] *F.T. Howard,* Congruences for the Stirling numbers and associated Stirling numbers*, Acta Arith. 55 (1990), 29–41.*

[29] *F.T. Howard,* Congruences and recurrences for Bernoulli numbers of higher order*, Fibonacci Quart. 32 (1994), 316–328.*

[30] *K. Ireland and M. Rosen,* A classical introduction to modern number theory*, Graduate Texts in Math, Vol. 84, Springer-Verlag, 1982.*

[31] *W. Johnson,* p-adic proofs of congruences for the Bernoulli numbers*, J. Number Theory, 7 (1975), 251–265.*

[32] *C. Jordan,* Calculus of Finite Differences*, Chelsea Publishing Company, New York, 1950.*

[33] *S. Kanemitsu and H. Tsukada,* Vistas of Special Functions*, World Scientific Publishing Company, Singapore, 2007.*

[34] *J. Katriel,* A multitude of expressions for the Stirling numbers of the first kind*, Integers 10 (2010), 273–297, A23.*

[35] *N.M. Katz,* The congruences of Clausen-von Staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers*, Math. Ann. 216 (1975), 1-4.*

[36] *C. Khattou, A. Bayad and M.O. Hernane,* New results on Bernoulli numbers of higher order*, Rocky Mountain Journal of Mathematics, Vol. 52 (2022), No. 1, 153–170.*

[37] *N. Koblitz,* P-adic numbers, p-adic analysis, and Zeta-functions*, Graduate Texts in Math, Vol. 58, Springer-Verlag, 1977.*

[38] *E.E. Kummer,* Über eine allgemeine Eigenschaft der rationalen Entwicklungscoefficienten einer bestimmten Gattung analytischer Functionen*, J. Reine Angew. Math. 41 (1851), 368–372.*

[39] *R.L. Long,* Algebraic number theory*, Marcel Dekker, INC, 1977.*

[40] *M.P. Malliavin,* Algèbre commutative, applications en géométrie et théorie des nombres*, Masson, Paris, 1984.*

[41] *D.S. Mitrinović and R.S. Mitrinović,* Sur les nombres de Stirling et les nombres de Bernoulli d'ordre supérieur*, Publications de la faculté d'électrotechnique de l'Université à Belgrade, Série Mathématique et Physique, no. 43 (1960), 1–63 .*

[42] *N. Nielsen,* Traité élémentaire des nombres de Bernoulli*, Gauthier-Villars, Paris, 1923.*

[43] *N. Nielsen,* Recherches sur les polynômes et les nombres de Stirling*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, Vol. 10, no.1 (1904), 287–318 .*

[44] *N. Nielsen,* Recherches sur les résidus quadratiques et sur les quotients de Fermat*, Annales scientifiques de l'école Normale Supérieure, Vol. 31 (1914), 161–204.*

[45] *N.E. Nörlund,*Vorlesungen üder differenzenrechnung*, Springer, Berlin, 1924.*

[46] *F.R. Olson,* Arithmetical Properties of Bernoulli Numbers of Higher Order*, Duke Math.J. 22(1955), 641–53.*

[47] *H. Rademacher,* Topics in analytic number theory*, Springer-Verlag, 1973.*

[48] *P. Ribenboim,* L'arithmétique des corps*, Hermann, Paris, 1972.*

[49] *A.M. Robert,* A course in p-adic analysis*, Graduate Texts in Math, Vol. 198, Springer-Verlag, 2000.*

[50] *J. Sandor and B. Crstici,* Handbook of Number Theory*, Vol. II, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston and London, 2004.*

[51] *J-P. Serre,* Formes modulaires et fonctions zêta p-adiques, Modular functions of one variable, III *(Proc. Internat. Summer School, Univ. Antwerp, 1972), 1973, 191–268. Lecture Notes in Math., Vol. 350.*

[52] *W. Schikhof,* Ultrametric calculus. An introduction to p-adic analysis*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 4, Cambridge University Press, 1984.*

[53] *O.F.G. Schilling,* The theory of valuations*, American mathematical society, 1950.*

[54] *R.P. Stanley,* Enumerative combinatorics*, Vol. 1, Cambridge University Press, 1997.*

[55] *B.A. Venkov,* Elementary number theory*, Wolters-Noordhoff publishing groningen, 1970.*

[56] *K.C.G. von Staudt,* Beweis eines Lehrsatzes die Bernoullischen Zahlen betreffend*, J. Reine Angew. Math. 21 (1840), 372–374.*

[57] *L.C. Washington,* Introduction to Cyclotomic Fields*, Graduate Texts in Math, Vol 83, Springer-Verlag, 1982.*