N^0 d'ordre : 13/2022-D/MT

MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCE ET DE LA TECHNOLOGIE HOUARI BOUMEDIENNE
FACULTÉ DES MATHÉMATIQUES

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du grade de docteur.

en : Mathématiques

Spécialité : Analyse : Équations aux dérivées partielles

Par

KECHICHE Naouel

Thème

Décroissance polynomiale d'un système de Timoshenko avec des conditions aux limites dynamiques et terme mémoire

Soutenu publiquement à le :29/09/2022 devant le jury composé de :

M.	**MEDJDEN Mohammed**	Professeur	à l'U. S. T. H. B.	Président
M.	**KHEMMOUDJ Ammar**	Professeur	à l'U. S. T. H. B.	Directeur de thèse.
M.	**BENAISSA Abbes**	Professeur	à l'UDL-Sidi.Bel Abbes	Examinateur
M.	**CHOUTRI Abdelaziz**	Professeur	à l'E.N.S. Kouba	Examinateur
M.	**HAKEM Ali**	Professeur	à l' UDL-Sidi.Bel Abbes.	Examinateur
M.	**TOUZALINE Arezki**	Professeur	à l'U. S. T. H. B.	Examinateur

REMERCIEMENTS

Je me permets dans ces quelques lignes du manuscrit qui sont de loin les plus agréables à écrire, d'adresser mes remerciements sincères à l'ensemble des personnes qui ont contribué à la réalisation de ce travail.

Je tiens à exprimer toute ma reconnaissance à mon directeur de thèse
***Ammar KHEMMOUDJ**, Professeur à l'Universié des Sciences et de la Technologie Houari Boumdienne, Alger. Je le remercie de m'avoir encadré, orienté, aidé et conseillé.*

*Je suis particulièrement flatté que le professeur **Mr.Mohammed.MEDJDEN** ait accepté d'être le président du jury, je le remercie sincèrement.*

*Un grand merci aussi aux professeurs **Abbes BENAISSA**, **Abdelaziz CHOUTRI**, **Ali HAKEM** et **Arezki TOUZALINE** pour avoir accepté de siéger dans mon jury de thèse.*

J'ai également une pensée particulière à tous mes amis, où qu'ils soient, leurs encouragements et leur aide furent précieux.

Enfin, je destine ce dernier propos à toute ma famille, son soutien fut indispensable pour moi, qu'elle puisse trouver ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

DEDICACES

♢

à mes

très chers parents,

à mes chères soeurs, à mes frères

, Sami , Salah, Anass , Dounia, Siham

tous mes amies, et à tous mes proches,

à mes enseignants tout ou

long de mes

études.

♢

Résumé

Dans cette thèse nous étudions l'existence, l'unicité et la stabilité polynomiale des solutions du système de Timoshenko avec des conditions dynamiques sur le bord. Le contenu de la thèse est divisé en trois parties. La première partie est consacrée à l'étude de l'existence et de l'unicité de la solution du système de Timoshenko avec terme mémoire et des conditions aux limites dynamiques, en utilisant la théorie de semi groupe (Théorème Lumer-Phillips. Dans la deuxième partie, nous considérons le même système et nous montrons que l'énergie de la solution associée au système décroit de manière polynomiale en utilisant la méthode d'une approche de fréquence de domaine dans le cas où les vitesses de propagation sont différente. Dans la troisième partie, nous allons démontrer la stabilité exponentielle dans le cas où les vitesses de propagation sont égales, ceci en utilisant la méthode des multiplicateurs.

mots-clés Système de Timoshenko ; Stabilisation polynomiale exponentielle ; Conditions aux limites dynamiques, terme mémoire, théorie de semi-groupe, méthodes d'une approche de fréquence de domaine, fonctionnelle de lyapounov .

Abstract

In this thesis, we show that the solution of Timoshenko system with past history and dynamical boundary decays polynomial in the case that the wave speeds of eqautions are diffrent, our method is based on the semi groupe technique and the contraction argument of frequency demain method.

Keywords : Timoshenko system, Polynomial rate of decay, Dynamic boundary condition, Semigroup theory, Frequency domain method.

Table des matières

Notations

Dans tout ce qui suit, nous utiliserons les notations suivantes.

$\mathbb{N}$	ensemble des entiers naturels.
$\mathbb{N}^*$	ensemble des entiers naturels non nuls.
$\mathbb{R}$	ensemble des réels.
$\mathbb{R}_+$	ensemble des réels positifs.
$\overline{\mathbb{R}}$	droite réelle achevée, $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$.
$\mathbb{R}^n$	espace euclidien de dimension n.
$\mathbb{Z}$	ensemble des nombres entiers .
$\mathbb{Z}^*$	ensemble des nombres entiers non nuls.
$\mathbb{Q}$	ensemble des nombres rationnels .
$\mathbb{Q}_+$	ensemble des rationnels non négatifs .
$\mathbb{Q}^*$	ensemble des nombres rationnels non nuls.
$\mathbb{C}$	ensemble des nombres rationnels .
i	l'unité imaginaire.
$\Re$	la partie réelle .
$\Im$	la partie imaginaire.
x	vecteur de $\mathbb{R}^n$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n), x_i \in \mathbb{R}$, $1 \leq i \leq n$.
$\lvert x\rvert$	norme euclidienne de x, $\lvert x\rvert = (x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2)^{\frac{1}{2}}$.
Ω	ouvert borné de $\mathbb{R}^n$.

$\Gamma = \partial\Omega$	frontière de Ω.
ν	le vecteur unitaire normal à la frontière Γ extérieur à Ω.
∇u	gradient de $u, \nabla u = (\frac{\partial u}{\partial x_1}, \frac{\partial u}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial u}{\partial x_n})$.
$\operatorname{div} v$	divergence du vecteur v, $\operatorname{div} v = \frac{\partial v}{\partial x_1} + \frac{\partial v}{\partial x_2} + \cdots + \frac{\partial v}{\partial x_n}$.
$\triangle u$	laplacien de u, $\triangle u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 u}{\partial x_n^2}$.
$\partial_\nu u = \dfrac{\partial u}{\partial \nu}$	la dérivée normale de u.
$\mathcal{C}^0(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω.
$\mathcal{C}^k(\Omega)$	espace des fonctions continues sur Ω dont les dérivées partielles.
	d'ordre $\leq k$ sont continues sur Ω, k entier positif
$\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	l'espace $\mathcal{C}^\infty(\Omega) = \bigcap\limits_{k=0}^{\infty} \mathcal{C}^k(\Omega)$.
$L^0(\Omega)$	ensemble des fonctions mesurables sur Ω.
$L^p(\Omega)$	$L^p(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\,\text{mesurable};\ \int_\Omega \|u\|^p\,dx < \infty\}$ $(1 \leq p < \infty$, constant).
$L^\infty(\Omega)$	$L^\infty(\Omega) = \{u : \Omega \to \mathbb{R}\,\text{mesurable};\ \exists c \geq 0$ tell que $\|u(x)\| \leq c \quad$ p.p $\quad x \in \Omega\}$.
p'	conjugé de Hölder de p, $p' = \frac{p}{p-1}$ si $p > 1$ et $p' = \infty$ si $p = 1$.
$\mathcal{D}(\Omega)$	espace des fonctions indéfiniment dérivables dans Ω, à support compact dans Ω
$\mathcal{D}'(\Omega)$	espace des distributions dans Ω.
$W^{m,p}(\Omega)$	espace de Sobolev , $1 \leq p < \infty$
$W_0^{m,p}(\Omega)$	l'adhérence $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$
$H^m(\Omega)$	espace de Sobolev des fonctions de $L^2(\Omega)$ dont les dérivées
	partielles au sens des distributions d'ordre $\leq m$ sont également dans $L^p(\Omega)$.
$H_0^m(\Omega)$	la fermeture de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$.
$\mathcal{D}(\mathcal{A})$	domain de définition de l'opérateur .
EDP	équations aux Dérivées Partielles.

EDO	équations Différentielles Ordinaires.
p.p.	presque partout.
$< .,. >$	le crochet de dualité.
$(.,.)$	le produit scalaire.
$\|\|.\|\|_E$	la norme dans l'espace E.
$\rightarrow$	symbole de convergence forte.
$\rightharpoonup$	symbole de convergence faîble.
$\hookrightarrow$	symbole d'injection.
$\rightharpoonup^*$	convergence faible étoile.

Chapitre 1

Introduction générale

La stabilisation a pour but d'atténuer les vibrations par rétro-action (feed-back). Elle consiste donc à garantir la décroissance de l'énergie des solutions vers 0 de façon plus ou moins rapide par un mécanisme de dissipation. Plus précisèment, le problème de stabilisation auquel on s'intéresse revient à déterminer le comportement asymptotique de l'énergie que l'on note $E(t)$ (c'est la norme des solutions dans l'espace d'état), ainsi qu'à étudier sa limite afin de déterminer si cette limite est nulle ou pas, à donner une estimation sur sa vitesse de décroissance vers zéro. Il existe plusieurs degrés de stabilité que l'on peut étudier. Le premier degré consiste à analyser simplement la décroissance de l'énergie des solutions vers zéro, i.e. :

$$E(t) \;\longrightarrow\; 0 \quad \text{lorsque} \quad t \longrightarrow +\infty \tag{1.1}$$

C'est ce qu'on appelle la stabilisation forte. Pour le second, on à s'intéresse une décroissance de l'énergie plus rapide, c'est-à-dire lorsque celle-ci tend vers 0 de manière exponentielle, i.e.

$$E(t) \;\leq\; Ce^{-\delta t}, \qquad \forall t > 0, \tag{1.2}$$

où C et δ sont des constantes positives avec C qui dépend des données initiales. Quant au troisième, on étudie des situations intermédiaires, dans lesquelles la décroissance de l'énergie n'est pas exponentielle, mais de type polynômiale ou logarithmique par exemple :

$$E(t) \ \leq \ \frac{C}{t^{\alpha}}, \qquad \forall t > 0, \tag{1.3}$$

ou bien

$$E(t) \ \leq \ \frac{C'}{\log(1+t)^{k}}, \qquad \forall t > 0, \tag{1.4}$$

où C, C', α et k sont des constantes positives avec C et C' qui dépendent des données initiales. Le système de Timoshenko est généralement considéré comme décrivant la vibration transversale d'une poutre en ignorant les effets d'amortissement . Il existe plusieurs travaux concernant la stabilisation du système de Timoshenko avec différents types d'amortissement, nous citons par exemple (voir [9], [70], [21], [26], [49], [17], [20], [68], [36], [2]).

Dans [66], Soufyane et Wehbe ont prouvé que si les vitesses de propagation des ondes sont égales (i.e., $\frac{k_1}{\rho_1} = \frac{\rho_2}{k_2}$) le système de Thimoshenko avec une dissipation interne est exponentiallement stable. En effet, Rivera et Racke dans [55] ont amélioré les résultats précédents et ont montré une décroissance exponentielle de la solution du système de Timoshenko lorsque le coefficient de la rétroaction admet un signe indéfini.

Dans [70], Wehbe et Youssef ont amélioré les résultats de [10], où ils ont étudié le taux de la décroissance polynomiale et la stabilité non uniforme de l'énergie du système de Timoshenko avec un seul terme de dissipation à la frontière.

D'autre part, de nombreux auteurs ont traité le système de Timoshenko avec un terme de dissipation non linéaire à l'intérieur du domaine ou sur la frontière (voir [54],[4],[47], [11], [14], [36]). Le modèle de Timoshenko avec mémoire de dissipation a été étudié par plusieurs auteurs ces dernières années, et de nombreux résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique ont été établit (voir [9],[23],[22],[74],[49],)

Dans le cas du modèle de Timoshenko avec une dissipation sur le bord et une force établie sur un seul coté, nous pouvons citer [23] où les auteurs ont prouvé que pour obtenir la stabilité exponentielle du semi-groupe de contraction associé, l'égalité de la propagation des ondes ne suffit pas, il faut des conditions supplémentaires sur le coefficient du système.

Dans [57] les auteurs ont prouvé que le semi-groupe associée au modèle de Timoshenko avec une masse à l'extrémité tend vers zéro comme $t^{\frac{1}{2}}$ lorsque le mécanisme d'amortissement n'est efficace que sur le bord de l'angle de rotation Lorsque les vitesses de propagation sont différentes, ils ont prouvé que la solution décroit de manière polynomiale comme $t^{\frac{1}{2}}$. D'autre part, la solution décroit comme $t^{\frac{1}{4}}$ si les conditions initiales sont dans le demain $D(A)$.

Dans [62], Raposo et al. ont prouvé une décroissance exponentielle de la solution pour le système de poutre de Timoshenko avec un terme de dissipation linéaire de friction.

Dans [4], Alabau-Boussouira a étudié le comportement asymptotique du système de Timoshenko avec amortissement non linéaire. De plus, ils ont démontré en génaral la formule semi-explicite pour le taux de décroissance de l'énergie dans le cas où les vitesses de propagation du système sont égales.

Le but de notre thèse est de montrer l'existence et l'unicité de la solution du modèle de Timoshenko avec un terme mémoire, et donner une estimation pour la décroissance de l'énergie de solutions du problème (1.12).

1.1 Système de Timoshenko

Le système de Timoshenko est introduit par le mathématicien Ukrainien Stephen Timoshenko né le 22 décembre 1878 en Ukraine et mort le 29 Mai 1972 en Allemagne. Il a développé la théorie de l'élasticité des plaques et des coques. En 1921, dans [69], un modèle simple décrivant les vibrations transversales d'une poutre a été développé. Ce modèle est donné en conformité avec les équations suivantes

$$\begin{cases} \rho A\varphi_{tt}(x,t) = S_x(x,t), \\ \rho I\psi_{tt}(x,t) = M_x(x,t) - S(x,t), \end{cases} \tag{1.5}$$

où t désigne la variable temporelle, et x est la distance au long de la ligne moyenne de la poutre. La fonction φ représente le déplacement transversal de la poutre et ψ l'angle de rotation du filament de la poutre. Nous utilisons ρ pour la densité, M pour le moment de flexion, S pour la force de cisaillement, A pour l'aire de la section transversale et I pour le second moment de la section transversale de la poutre. Les relations entre déformations et contraintes pour le comportement élastique de la poutre en flexion sont données par

$$\begin{cases} M(x,t) = EI\psi_x(x,t), \\ S(x,t) = kAG(\varphi_x + \psi)(x,t), \end{cases}$$

où E représente le module de Young, G le module de rigidité, et k le facteur de forme. Timoshenko [69] établit les équations aux dérivées partielles suivantes pour les vibrations mécaniques dans les poutres planes sans la présence de mécanismes dissipatifs

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0. \end{cases}$$

en posant $\rho_1 = \rho A$, $\rho_1 = \rho I$, $\kappa = kAG$ et $b = EI$. La stabilité du système de type Timoshenko (dans des domaines bornés) a reçu beaucoup d'attention ces dernières années, et plusieurs résultats concernant l'existence et le comportement asymptotique de l'énergie ont été établit. Fondamentalement, trois types de mécanismes dissipatifs (ou des combinaisons de ceux-ci) ont été envisagés :

1. La dissipation par frottement obtenu en introduisant un amortissement (feedback) par frottement qui peut agir soit sur le bord soit au voisinage du bord.
2. La dissipation thermique qui est obtenue par la conduction de la chaleur compte tenu de la loi de fourier ou la loi de Cattaneo.
3. La dissipation viscoélastique donnée par les effets de mémoire.

Kim et Renardy [39] ont considéré [1.5] avec deux contrôles au bord de la forme

$$\begin{cases} K\left(\varphi(L,.) - \psi_x(L,.)\right) = \alpha\psi_t(L,.), \quad \forall t \geq 0 \\ EI\varphi_x(L,.) = -\beta\varphi_t(L,.), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} .$$

Ammar-khodja et al. [10] ont considéré le système

$$\begin{cases} \alpha w_{tt} = (\beta(\psi_x + w))_x, \text{ on } (0,1) \times \mathbb{R}^+. \\ \gamma\varphi_{tt} = (\delta\varphi_x)_x + \kappa(\psi_x + w)_x, \text{on } (0,1) \times \mathbb{R}^+, \end{cases} \tag{1.6}$$

sous les conditions aux limites suivantes

$$\begin{cases} w(0,t) = w(1,t) = 0 \\ \varphi_x(0,t) = \alpha\varphi_t(0,t), \quad \forall t \geq 0 \\ \varphi_x(1,t) = -d\varphi_t(1,t), \quad \forall t \geq 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

où α, β, γ et δ sont des fonctions positives de classe C^1 et ont prouvé que la stabilité uniforme de (1.6-1.7) est obtenue si et seulement si les vitesses de propagation sont égales ($\frac{\beta}{\alpha} = \frac{\delta}{\gamma}$). Muñoz Rivera et Fernàdez Sare [22] ont considéré un système de type Timoshenko avec terme mémoire agissant dans une seule équation. Ils ont examiné le problème suivant :

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x,t-s)ds = 0, \end{cases} \tag{1.8}$$

avec des conditions aux limites homogènes dans un domaine borné, et ont montré que la dissipation donnée par le terme mémoire est suffisamment forte pour stabiliser le système (1.8) de façon exponentielle si seulement si $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$ et la fonction de relaxation g décroit exponentiellement. Concernant les systèmes de Timoshenko pour les matériaux à mémoire finie, Ammar-khodja et al.[9] ont étudié le système linéaire de la forme

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi)_x + \int_0^{t} g(s)\psi_{xx}(x,t-s)ds = 0, \end{cases} \tag{1.9}$$

avec des conditions aux limites homogènes. Ils ont montré, en utilisant la méthode des multiplicateurs, que le système (1.9) est exponentiellement stable si et seulement si $\chi = 0$ (avec $\chi = \frac{\kappa}{\rho_1} - \frac{b}{\rho_2}$) et g décroit exponentiellement. Précisément, sous certaines techniques supplémentaires sur g' et g'', ils ont établi un résultat de décroissance exponentielle (respectivement polynomiale) pourvu que g décroit de façon exponentielle (respectivement polynomiale). Ce dernier résultat a ensuite été obtenu par Guesmia et Messaoudi [75] avec des conditions plus faibles que celles qui sont considérées dans [9]. En outre, Messaoudi et Mustafa [76] ont discuté (1.9), pour les fonctions de relaxation satisfaisant

$$g'(t) \leq -\xi(t)g(t), \forall t \geq 0, \tag{1.10}$$

où $\xi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ est une fonction différentiable non croissante, et ils ont donné un résultat de décroissance plus générale, à partir duquel, les résultats habituels de décroissance exponentielle et polynomiale ne sont que des cas particuliers. La stabilité de (1.9), dans le cas où les vitesses des ondes sont différentes, a été étudiée par Guesmia et Messaoudi [29] sous la condition

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \forall t \geq 0,$$

où $p > 0$, et une estimation de décroissance générale pour l'énergie des solutions régulières a été prouvée. Dans [30], Guesmia et Messaoudi ont considéré le système

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - b\psi_{xx} + \kappa(\varphi_x + \psi) + \int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(x, t-s)ds = 0, \end{cases} \tag{1.11}$$

où la fonction de relaxation g satisfait la relation (1.10). Sous la même hypothèse sur g et ξ imposée pour le cas de mémoire finie, ils ont établi des résultats de décroissance générale dans le cas où les vitesses de propagation sont égales et différentes. Ces résultats ont permis d'améliorer certains taux de décroissance connus. Guesmia [30] a considéré un système de type Timoshenko avec un terme mémoire et un amortissement par frottement agissant seulement dans l'équation de l'angle de rotation. Il a examiné le problème suivant

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - \kappa_2\psi_{xx} + \kappa_1(\varphi_x + \psi) + b(x)h(\psi_t) + \int_0^{+\infty} g(s)(a(x)\psi_x(t-s))_x ds = 0. \end{cases}$$

Il a montré que la dissipation donnée par ces contrôles complémentaires est assez forte pour garantir la stabilité du système, ceci pour le cas de vitesses de propagation égales, ainsi que dans le cas contraire. Un résultat similaire à celui trouvé par Gusemia et Messaoudi [30] dans le cas où le terme mémoire et l'amortissement par frottement agissant dans l'équation du déplacement transversal.

Dans [28], Guesmia a étudié le système de Timoshenko avec une mémoire infinie et un retard distribué (distributed time delay) à la fois agissant sur l'équation de l'angle de rotation

$$\begin{cases} \rho_1\varphi_{tt} - \kappa_1(\varphi_x + \psi)_x = 0, \\ \rho_2\psi_{tt} - \kappa_2\psi_{xx} + \kappa_1(\varphi_x + \psi) + \int_0^{+\infty} g(s)\psi_{xx}(t-s)ds + \int_0^{+\infty} f(s)\psi_t(t-s)ds = 0, \end{cases}$$

Il a donné des estimations de décroissance pour les deux cas de vitesses. Les taux de décroissance obtenus dépendent des noyaux de la mémoire et le retard à l'infini. Dans le cas d'inégalité de vitesses, le taux de décroissance dépend également de la régularité des données initiales. La constante χ est un nombre qui caractérise le comportement asymptotique des solutions du système de Timoshenko. Cela a été prouvé pour le comportement viscoélastique dans [7], [9], [23], [32], [51], [76], pour le comportement thermopélastique avec la loi de Fourier et aussi à la dissipation thermoélastique de type III dans [51] , [51], [54], et le système de Timoshenko avec dissipation aux limites [10], [53]. Plusieurs résultats de décroissance exponentielle pour les deux cas linéaires et non linéaires ont été établit sans l'hypothèse $\frac{\kappa}{\rho_1} = \frac{b}{\rho_2}$. Par ailleurs, il existe une vaste litérature pour le système de Timoshenko (c'est-à-dire sans condition de chaleur) dans le domaine borné. Le lecteur intéressé est appelé à consulter [4], [50], [56], [55], [67], pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement par frottement, ainsi que [9], [26], [49] pour les systèmes de Timoshenko avec amortissement viscoélastique.

1.2 Notes historiques

Nous allons rappeler d'une manière brève quelques phases qu'a connue la notion de stabilisation sans vraiment rentrer dans les détails.

1.2.1 Les travaux de C. S. Morawetz

En 1959, en analysant l'expression explicite de la solution obtenue par séparation des variables de l'équation d'ondes dans un domaine non borné de $\mathbb{R}^3$, C. Wilcox [71] a réussi à montrer que l'énergie locale décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini. Avec des hypothèses plus générales que celle de C.Wilcox, en 1961 C. S. Morawetz 58 a montré que l'énergie locale décroit comme l'inverse du temps. En combinant leurs méthodes, P. D. Lax, C. S. Morawetz et R. S. Phillips [44] ont prouvé en 1963, que l'énergie locale associée à la solution de l'équation d'ondes dans un domaine de $\mathbb{R}^3$, extérieur à un domaine étoilé décroit de manière exponentielle quand le temps tend vers l'infini.

1.2.2 Les travaux de G. Chen et J. Lagnese

En se basant sur les travaux C. S. Morawetz 58 sur l'équation des ondes dans un domaine extérieur, D. L. Russell [65] a conjoncturé, en 1974 un phénomène analogue pour l'équation des ondes dans un domaine borné. Le premier résultat positif concernant la conjecture de Russell, a été obtenu en 1979 par G. Chen [34]. Ensuite, en adaptant la technique des multiplicateurs utilisée par C. S. Morawetz, W. A. Strauss et J. U. R. Alston, dans les domaines extérieurs, C. Chen [33] a amélioré les résultats obtenus dans [34]. Voir aussi Lagnese [46].

1.2.3 Les travaux de I. Lasiecka et R. Triggiani

En 1987, utilisant des méthodes différentes de celles de Chen et Lagnese, I. Lasiecka et R. Triggiani [45] ont pu redémontrer les résultats de Chen et Lagnese pour l'équation des ondes avec une condition de Dirichlet non homogène sur tout le bord.

1.2.4 Les travaux de V. Komornik et E. Zuazua

En 1987, V. Komornik et E. Zuazua ont allégé la condition aux bords de G. Chen en la remplaçant par une autre condition, ce qui a permis, en principe de généraliser les résultats de Chen et Lagnese au domaine à bords réguliers et connexes, mais ceci au prix de modifer la condition aux limites.

1.2.5 Les travaux de J. Lions

En 1986, Lions a élaboré une méthode générale de stabilisation exponentielle pour tous les systèmes linéaires réversibles exactement contrôlables. Son procédé repose essentiellement sur la théorie du contrôle et de la méthode de pénalisation. Cependant, il ne donne aucune méthode explicite pour construire l'opérateur de feedback, ni l'estimation sur le taux de décroissance de l'énergie.

1.3 But du travail

Dans ce travail, on considère le système de Timoshenko avec terme mémoire donné par

$$\begin{cases} \rho w_{tt}(x,t) - \kappa\left[\varphi(x,t) + w_x(x,t)\right]_x & = 0, \quad \text{dans } (0,L)\times\mathbb{R}_+ \\ I_\rho\varphi_{tt}(x,t) - \varphi_{xx}(x,t) + \int_0^\infty g(s)\varphi_{xx}(x,t-s)ds & \\ +\kappa\left[\varphi + w_x\right](x,t) & = 0, \quad \text{dans}(0,L)\times\mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{1.12}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$w(x,0) = w_0(x), w_t(x,0) = w_1(x), \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x). \tag{1.13}$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} w(0) = \varphi(0) & = 0, \quad \text{dans } (0,L) \\ Mw_{tt}(L,t) - \kappa\left[\varphi + w_x\right](L,t) & = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \\ J\varphi_{tt}(L,t) - \varphi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\varphi_x(L,t-s)ds & = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{1.14}$$

Dans (1.12), t, x désigne respectivement la variable temporelle et la distance le long de la ligne moyenne de la poutre L dans sa configuration d'équilibre, $S = k(w_x + \varphi)$ et $M = \varphi_x$ désigne la force de cisaillement, respectivement. On désigne par $w = w(x,t)$ le déplacement transversal de la poutre et $\varphi = \varphi(x,t)$ est l'angle de rotation du filement de la poutre ; avec $\rho = \tilde{\rho}A$, $I_\rho = \tilde{\rho}I$, $\kappa = KAG$,$b = EI$, où $\tilde{\rho}$ désigne la densité, A est l'aire de la section transversale, I est le second moment pour la section transversale de la poutre, E est le module de l'élasticité, K le facteur de forme et G est le module de rigidité.

1.3.1 Hypothèses

1.3.1.1 Hypothèses sur le noyau g :

On suppose que le noyau $g(t)$ est de classe $C^1(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}_+)$ et vérifie les hypothèses suivantes :

$$\tilde{b} = 1 - \int_0^\infty g(s)ds = 1 - g_\infty = l > 0. \tag{1.15}$$

On suppose aussi

$$g(t) > 0, \exists k_0, k_1 > 0 : -k_0 g(t) \leq g'(t) \leq -k_1 g(t),$$

1.3.1.2 hypothèses sur les vitesses de propagation :

$$\frac{\kappa}{\rho} \neq \frac{1}{I_\rho} \tag{1.16}$$

Dans le but de prouver l'existence et l'unicité de la solution de notre problème en uitlisant la théorie des semi-groupes on donne quelques espaces fonctionnels.

On désigne par $\mathcal{H}$ l'espace de l'énergie associée au système (1.12)-(1.14) par

$$\mathcal{H} = \left(H^1_{(0)}(0,L) \times L^2(0,L)\right)^2 \times \mathbb{C}^2 \times L_g(0,L),$$

tel que

$$H^1_{(0)}(0,L) = \{(w,\varphi) \in (H^1(0,L))^2 : w(0) = \ \varphi(0) = 0\},$$

et

$$L_g = \left\{ v : \mathbb{R}_+ \to H^1_{(0)}(0,L), \ \int_0^L \int_0^\infty g(s) v_x^2 ds dx < +\infty \right\}.$$

L'ensemble L_g est l'espace de Hilbert engendré par le produit scalaire

$$\langle v, \overline{v} \rangle_{L_g} = \int_0^L \int_0^\infty g(s) v_x(s)\, w_x(s)\, ds dx.$$

L'ensemble $\mathcal{H}$ est aussi l'espace engendré par le produit scalaire suivant , $U = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)^T$, $W = (w_1, w_2, w_3, w_4, w_5, w_6, w_7) \in \mathcal{H}$, par

$$\begin{aligned}
\left\langle U, \widehat{U} \right\rangle_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \left[\tilde{b} v_{3x} w_{3x} + \rho v_2 w_2 + I_\rho v_4 w_4 \right] dx \\
&\quad + \langle v_7, w_7 \rangle_{L_g} + \kappa \int_0^L (v_{1x} + v_3)(w_{1x} + w_3)\, dx \\
&\quad + M v_5 w_5 + J v_6 w_6.
\end{aligned}$$

Alors, la norme correspondante est

$$\begin{aligned}
\|U\|_{\mathcal{H}}^2 &= \tilde{b} \|v_{3x}\|_2^2 + \rho \|v_2\|_2^2 + I_\rho \|v_4\|_2^2 \\
&\quad + \|v_7\|_*^2 + \kappa \|\partial_x v_1 + v_3\|_2^2 + M |v_5|^2 + J |v_6|^2
\end{aligned}$$

où $\|.\|_2^2$ est la norme usuelle dans $L^2(0, L)$, et

$$\|v_7\|_*^2 = \int_0^L \int_0^\infty g(s) v_{7x}^2 ds dx.$$

Chapitre 2

Rappels et définitions

Ce chapitre comporte les définitions et les propriétés essentielles, qui seront utilisées dans les chapitres ultérieurs.

2.1 Définitions et propriétés élémentaires

L'objectif de cette section est de rappeler quelques notions et résultats préliminaires, qui nous seront utiles dans les chapitres ultérieurs.

2.2 Définitions et propriétés élémentaires des espaces $\mathbf{L^p}(\Omega)$

2.2.0.3 Espaces $\mathbf{L^p}(\Omega)$

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$. Pour $1 \leq p < \infty$, l'espace de Lebesgue $L^p(\Omega)$ est défini par :

$$L^p(\Omega) := \{ \ f \ : \Omega \to \mathbb{R} \text{ mesurable}, \int_\Omega |f(x)|^p \, dx < \infty \ \}$$

muni de la norme (parfois notée $\|.\|_p$)

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} \ := (\int_\Omega |f(x)|^p \, dx)^{\frac{1}{p}}$$

et pour $p = \infty$, on note

$L^{\infty}(\Omega) := \{f : \Omega \to \mathbb{R}; f$ mesurable et $\exists C \in \mathbb{R}_+$ telle que $|f(x)| \leq C$ p.p.sur$\Omega\}$

de norme

$$\|f\|_{L^{\infty}(\Omega)} := \inf\{C, |f(x)| \leq C \text{ p.p.sur } \Omega\}$$

Pour tout $1 \leq \ p \leq \infty$, on note p' le conjugué de p, c'est à dire le réel p' tel que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Proposition 2.2.1 ***(Inégalité de Hölder)*** *Pour tout $f \in L^p(\Omega)$ et $g \in L^{p'}(\Omega)$ avec $1 \leq \ p \leq \infty$. Alors $f.g \in L^1(\Omega)$ et on a l'inégalité*

$$\int_{\Omega} |f(x)g(x)|\, dx \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \ \|g\|_{L^{p'}(\Omega)}\,.$$

Lorsque $p = p' = 2$, on retrouve **l'inégalité de Cauchy-Schwarz.**

Proposition 2.2.2 ***(Inégalité d'interpolation)*** *Soient $1 \leq \ p \leq q \leq \infty$, $f \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$. Alors $f \in L^r(\Omega)$ pour tout $r \in [p, q]$, et*

$$\|f\|_{L^r(\Omega)} \leq \|f\|^{\theta}_{L^p(\Omega)} \ \|g\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)}\,, \quad \theta \in [0, 1],\ \frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}.$$

Théorème 2.2.1 *(convergence dominée de Lebesgue)*

Soit $(f_n)_n$ une suite de fonctions de $L^1(\Omega)$.

On suppose que $f_n \to f$ p.p. sur Ω, et qu'il existe une fonction $g \in L^1(\Omega)$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leq g(x)$ p.p. sur Ω . Alors $f \in L^1(\Omega)$ et

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n(x) - f(x)\|_{L^1(\Omega)} = 0.$$

Définition 2.2.1 *Une fonction à valeurs réelles est absolument continue sur un intervalle I si*

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \delta > 0 \ \textit{tel que} \ \sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon.$$

Lorsque $a_1 < b_1 \leq a_2 < b_2 \leq ...... \leq a_m < b_m$ *sont des points de* I *tels que* $\sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) < \delta.$

Inégalité de Gronwall

(i) Soit $\eta(.)$ une fonction positive, absolument continue sur $[0, T]$ et satisfaisant pour presque tout $t \in [0, T]$ l'inégalité

$$\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t) + \psi(t)$$

où $\phi(t)$ et $\psi(t)$ sont des fonctions positives, intégrables sur $[0, T]$ alors

$$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}[\ \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds] \text{ pour tout } 0 \leq t \leq T.$$

(ii) En particulier, si $\eta'(t) \leq \phi(t)\eta(t)$ sur $[0, T]$ et $\eta(0) = 0$, alors :

$$\eta \equiv 0 \text{ sur } [0, T].$$

Preuve 2.2.1 *On a*

$$\frac{d}{ds}(\eta(s)e^{\int_0^s -\phi(r)dr}) = e^{\int_0^s -\phi(r)dr}(\eta'(s) - \phi(s)\eta(s)) \leq e^{\int_0^s -\phi(r)dr}\psi(s). \tag{2.1}$$

pour presque tout $\leq s \leq T$.

En intégrant sur $[0, t]$, *on obtient*

$$\eta(t)e^{\int_0^t -\phi(r)dr} \leq \eta(0) + \int_0^t e^{\int_0^s -\phi(r)dr}\psi(s)ds \leq \eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds, \tag{2.2}$$

pour tout $0 \leq t \leq T$.

D'où on déduit

$\eta(t) \leq e^{\int_0^t \phi(s)ds}[\eta(0) + \int_0^t \psi(s)ds].$

Inégalité de Gronwall (forme intégrale)

(i) Soit $\zeta(.)$ une fonction positive, intégrable sur $[0,T]$ et satisfaisant pour presque tout $t \in [0,T]$ l'inégalité

$$\zeta(t) \leq C_1 \int_0^t \zeta(s)ds + C_2$$

où C_1 et C_2 sont des constantes positives. Alors

$$\zeta(t) \leq C_2[\ 1 + C_1 t e^{C_1 t}] \quad \text{pour presque tout } 0 \leq t \leq T.$$

En particulier si :

$$\zeta(t) \leq C_1 \int_0^t \zeta(s)ds, \ \ 0 \leq t \leq T.$$

On a

$$\zeta\,(t) = 0 \quad \text{sur } [0,T].$$

Inégalité de Cauchy généralisée :

$$\forall a, b \in \mathbb{R}^+, \ \forall \varepsilon > 0 : ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{b^2}{4\varepsilon}.$$

Inégalité de Young généralisée : Soit $1 < p, q < \infty$, tels que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, et soit $\varepsilon > 0$.

Alors

$$ab \leq \varepsilon a^p + c(\varepsilon) b^q$$

où $c(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon p)^{-\frac{p}{q}}}{q}$.

2.2.1 Espaces de Hölder

Soient $X := (X, d)$ un espace métrique, $E := (E, \|.\|_E)$ un espace de Banach, et soit $0 < \theta \leq 1$.

L'application $u : X \to E$ est dite **uniformément** $\theta-$**Hölder continue**, si

$$[u]_\theta \;=\; [u]_{\theta,X} := \sup_{x \neq y} \frac{\|u(x) - u(y)\|_E}{[d(x, y)]^\theta} < \infty. \tag{2.3}$$

u est $\theta-$**Hölder continue**, si chaque point de X a un voisinage Y tel que $u\backslash_Y$ est **uniformément** $\theta-$**Hölder continue.**

On pose $C^\theta(X, E) := \{u : X \to E; u$ est $\theta-$**Hölder continue**$\}$, $0 < \theta < 1$, et $C^0(X, E) := C(X, E)$ est l'ensemble de toutes les fonctions continues de X dans E. Pour $\theta = 1$, la 1- Hölder continuité est continue et Lipschitienne , et on note $C^{1-}(X, E) := \{u : X \to E\ ; u$ est **continue et Lipschitienne** $\}$, (au lieu de $C^1(X, E)$) Pour $k \in \mathbb{N}^*$, $C^k(X, E)$ est l'espace des fonctions $u \in E^X$, k fois continûment différentiable sur X. $C^{k-}(X, E)$ est le sous espace des fonctions $u \in C^{k-1}(X, E)$, telles que $D^{k-1}\, u \in C^{1-}(X, E)$, où D^{k-1} désigne la dérivée(de Fréchet) d'ordre k-1. Soit $k \in \mathbb{N}$, on notera $C^k(\overline{\Omega})$ le sous-ensemble des fonctions f ($f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$) de $C^k(\Omega)$ telles que pour chaque multi-indice $|\alpha| \leq k$, l'application $x \in \Omega \mapsto D^\alpha f(x)$ se prolonge continûment à $\overline{\Omega}$. On pose

$$\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})} \;=\; \max_{0 \leq |\alpha| \leq k} \sup_{x \in \Omega} |D^\alpha f(x)|\,, \qquad f \in C^k(\overline{\Omega}). \tag{2.4}$$

Alors $\|f\|_{C^k(\overline{\Omega})}$ est une norme sur l'espace vectoriel $C^k(\overline{\Omega})$, et muni de cette norme $C^k(\overline{\Omega})$, est un espace de Banach.

2.3 Espaces de Sobolev

2.3.1 Espaces $W^{m,p}(\Omega)$:

Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p \leq \infty$ on définit $W^{m,p}(\Omega)$ comme suit

$$W^{m,p}(\Omega) = \{u \in L^p(\Omega) \text{ tel que } D^\alpha u \in L^p(\Omega); \quad \forall \alpha \in \mathbb{N}^n, \quad 0 \leq |\alpha| \leq m \ \}$$

où $|\alpha| = \sum_{i=1}^n \alpha_i = k$, et $D^\alpha u = \frac{\partial^k u}{\partial x_1^{\alpha_1} \ldots\ldots\ldots \partial x_n^{\alpha_n}}$, dérivée au sens des distributions. Muni de la norme

$$\|u\|_{W^{m,p}(\Omega)} := (\sum_{|\alpha| \leq m} \|D^\alpha u\|^p_{L^p(\Omega)})^{\frac{1}{p}}.$$

$W^{m,p}(\Omega)$ est un espace de Banach.

$W_0^{m,p}(\Omega)$ est l'adhérence de l'ensemble $D(\Omega)$ des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact dans Ω, dans $W^{m,p}(\Omega)$. Rappelons que si $p > 2$ et Ω est borné, l'injection de $W_0^{m,p}(\Omega)$ dans $L^p(\Omega)$ est compacte. Dans le cas $p = 2$, on pose $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$.

2.3.1.1 Inégalité de Gagliardo Nirenberg Sobolev

Soient $1 \leq q \leq p \leq \infty$. Alors

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|u\|^{1-\theta}_{L^q(\Omega)} \|u\|^\theta_{H^1(\Omega)},$$

$$\forall u \in H^1(\Omega) \cap L^q(\Omega) \, avec \ \ p(n-2) < 2n \ \ et \ \ \theta = \frac{\frac{n}{q} - \frac{n}{p}}{1 - \frac{n}{2} + \frac{n}{q}}.$$

Théorème 2.3.1 *(Injection continue) Soient $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un domaine borné de frontière lipschitzienne, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$.*

Alors l'injection suivante est continue :

$$W^{m,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega) \quad si \ \ mp > n.$$

Théorème 2.3.2 *(Généralisation du théorème de trace) Soient Ω un domaine de frontière bornée de classe $C^{m-1,1}$ de $\mathbb{R}^n$, $m \in \mathbb{N}^*$ et $p \in (1, \infty)$. Alors il existe un unique opérateur linéaire continu $\gamma_{m-1} : W^{m,p}(\Omega) \to \Pi_{k=0}^{m-1} W^{m-k-\frac{1}{p},p}(\partial\Omega)$, appelé opérateur de trace, satisfaisant $\gamma_{m-1} f = \left(f, \partial_\nu f, ..., \partial_\nu^{m-1} f\right) \backslash_{\partial\Omega}$ pour toute fonction $f \in C^\infty(\overline{\Omega})$ où $f \backslash_{\partial\Omega}$ désigne la restriction de la fonction f à l'ensemble $\partial\Omega$.*

2.3.1.2 Formule d'intégration par parties

Soit u et v deux fonctions de $H^1(\Omega)$. Pour tout $1 \le i \le n$, on a

$$\int_\Omega \frac{\partial u}{\partial x_i} v dx = - \int_\Omega \frac{\partial v}{\partial x_i} u dx + \int_{\partial\Omega} uv\nu_i d\sigma \tag{2.5}$$

où $\nu_i(x) = cos(\nu; x_i)$ est le cosinus directeur de l'angle compris entre la normale extèrieure à $\partial\Omega$ au point x et l'axe des x_i .

Formule de Green

Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^n$, de frontière régulière $\partial\Omega$ et $\nu(x)$ la normale extérieure au point x. Soient u une fonction de $H^2(\Omega)$ et v une fonction de $H^1(\Omega)$. Alors la formule de Green sécrit :

$$\int_\Omega (\Delta u) v dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v d\sigma - \int_\Omega \nabla u . \nabla v dx$$

où $\frac{\partial u}{\partial \nu} = \sum_{i=1}^n \gamma_0(\frac{\partial u}{\partial x_i})\nu_i$, et $\gamma_0(u)$ est la trace de u sur $\partial\Omega$, $\nu = (\nu_1, .., \nu_n)^t$ et $d\sigma$ est la mesure superficielle sur $\partial\Omega$.

Les espaces de Slobodckii

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $1 \leq p < \infty$, on pose

$$\begin{aligned} [u]_{s,p} &:= \left(\int\limits_{\Omega\times\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|^p}{|x-y|^{n+sp}} d(x,y) \right)^{\frac{1}{p}} \quad \text{pour } \ 0 < s < 1 \\ \|.\|_{k,p} &:= \|.\|_{W^{k,p}(\Omega)} \\ \|.\|_{s,p} &:= (\|u\|^p_{[s],p} + \sum_{|\alpha|=[s]} [\partial^\alpha u]^p_{s-[s],p})^{\frac{1}{p}} \ \text{ pour } s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N} \end{aligned}$$

où $[s]$ désigne la partie entière de s. Alors les espaces de **Slobodeckii** sont les espaces de Banach définis par :

$$W_p^s := W_p^s(\Omega, \mathbb{K}^N) := (\{u \in W^{[s],\,p};\ \|u\|_{s,p} < \infty\},\ \|.\|_{s,p}), 1 \leq p < \infty, s \in \mathbb{R}^+ \backslash \mathbb{N}.$$

Pour $s \in \mathbb{R}^+$ et $1 \leq p < \infty$, W_p^s est appelé espace de **Sobolev-Slobodeckii.**

Proposition 2.3.1 *Soient $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$, et $p_0, p_1 \in (1, \infty)$. Alors*

$$W_{p_1}^{s_1} \overset{d}{\hookrightarrow} W_{p_0}^{s_0} \quad si \ \ \frac{1}{p_1} \geq \frac{1}{p_0} \geq \frac{1}{p_1} - (s_{1-}s_0) \frac{1}{n}.$$

De plus pour $s \in \mathbb{R}$, et $p \in (1, \infty)$

$$W_p^s \overset{d}{\hookrightarrow} C^\rho \quad si \ s - \frac{n}{p} \geq \rho \geq 0. \ (avec\ \rho \neq s - \frac{n}{p} \ si \ s - \frac{n}{p} \in \mathbb{N}).$$

2.3.2 Notions de base sur les distributions :

On appelle support d'une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ le plus petit fermé $K_\varphi \subset \Omega$ en dehors duquel la fonction φ est nulle presque partout. Une fonction $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}$ est dite à support compact dans Ω si son support est un compact contenu dans Ω. On notera par $D(\Omega)$ l'espace des fonctions φ définies et indéfiniment dérivables sur Ω et à support compact contenu dans Ω. On désigne par $D(\bar{\Omega})$

l'espace des restrictions à $\bar{\Omega}$ des fonctions de $D(\mathbb{R}^n)$. La longueur d'un multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ est l'entier noté $|\alpha|$ et défini par : $|\alpha| = \alpha_1 + ... + \alpha_i + ... + \alpha_n$.

Pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit l'opérateur de dérivation $\partial^\alpha : D(\Omega) \to D(\Omega)$ par :

$$\varphi \to \partial^\alpha \varphi = \left(\frac{\partial^{\alpha_1}}{\partial x_1^{\alpha_1}} \right) ... \left(\frac{\partial^{\alpha_i}}{\partial x_i^{\alpha_i}} \right) ... \left(\frac{\partial^{\alpha_n}}{\partial x_n^{\alpha_n}} \right) (\varphi) = \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_i^{\alpha_i} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$$

Proposition $\forall p \geq 1$, l'ensemble $D(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$.

Preuve 2.3.1 *Voir Vo-kHAC KHOAN, page 148.*

2.3.2.1 Convergence dans $D(\Omega)$

Définition 2.3.1 *: On dit qu'une suite $\{\varphi_n, n \in \mathbb{N}\} \subset D(\Omega)$ converge vers une fonction $\varphi \in D(\Omega)$ s'il existe un compact K contenu dans Ω tel que :*

i) supp $(\varphi_n) \subset K$, $\forall n \in \mathbb{N}$

ii) $\partial^\alpha (\varphi_n)$ converge uniformément vers $\partial^\alpha \varphi_n$, $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$.

2.3.2.2 Espaces des distributions $D'(\Omega)$

Définition 2.3.2 *Espace des distributions $D'(\Omega)$:*

On appelle espace des distributions sur Ω, l'ensemble $D'(\Omega)$ des formes linéaires continues $T : D(\Omega) \to \mathbb{R}$

On notera $\langle T, \varphi \rangle = T(\varphi)$ la dualité entre $D'(\Omega)$ et $D(\Omega)$. En outre, on dira, que deux distributions T_1 et T_2 sur Ω sont égales si elles le sont en tant qu'application de $D(\Omega)$ dans $\mathbb{R}$:

$$\langle T_1, \varphi \rangle = \langle T_2, \varphi \rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Les distributions généralisent la notion de fonction puisque à toute classe de fonctions $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ on peut associer de façon canonique et biunivoque une distribution notée $T_{\tilde{f}}$ et définie par :

$$\langle T_{\tilde{f}}, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \langle T_f, \varphi\rangle_{L^2(\Omega)} = \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx \;\forall\varphi \in D(\Omega) \;\; et\, \forall f = \tilde{f}\; p.p\; sur\; \Omega.$$

On dira qu'une distribution $T \in D'(\Omega)$ appartient à $L^2(\Omega)$ s'il existe une classe de fonction $\tilde{f} \in L^2(\Omega)$ telle que

$$\langle T, \varphi\rangle_{D'(\Omega),D(\Omega)} = \int_\Omega \tilde{f}(x)\,\varphi(x)\,dx \;,\; \forall\varphi \in D(\Omega)\;\;,\;\; \tilde{f} \in L^2(\Omega)$$

On les appelle distribution régulière.

2.3.2.3 Continuité dans $D'(\Omega)$

Définition 2.3.3 *: On dit qu'une application linéaire $A : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ est continue si pour toute suite de distributions $\{T_n, n \in \mathbb{N}\} \subset D'(\Omega)$ l'implication suivante est vérifiée :*

$(T_n)_n$ *converge dans* $D'(\Omega)$ *vers* $T \Longrightarrow (A(T_n))_n$ *converge dans* $D'(\Omega)$ *vers* $A(T)$.

2.3.2.4 La convergence dans $D'(\Omega)$

Définition 2.3.4 *: On dit qu'une suite de distributions $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D'(\Omega)$converge vers T dans $D'(\Omega)$ si :*

$$\forall\varphi \in D(\Omega) : \lim_{n\to\infty} |\langle T_n, \varphi\rangle - \langle T, \varphi\rangle| = 0$$

Définition 2.3.5 *On peut identifier $L^2(\Omega)$ à son dual et comme $D(\Omega)$ est dense dans $L^2(\Omega)$, on a les inclusions suivantes*

$$D(\Omega) \subset L^2(\Omega) = \left(L^2(\Omega)\right)' \subset D'(\Omega)$$

2.3.2.5 Dérivation dans $D'(\Omega)$

Définition 2.3.6 *: Pour toute distribution $T \in D'(\Omega)$, on définit pour tout indice $i \in \{1, ..., n\}$ l'opérateur de dérivation*
$\frac{\partial}{\partial x_i} : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ *par :*

$$\forall \varphi \in D(\Omega), \left\langle \frac{\partial T}{\partial x_i}, \varphi \right\rangle = (-1) \left\langle T, \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \right\rangle,$$

et pour tout multi-indice $\forall \alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, on définit l'opérateur de dérivation
$\partial^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$ *par :* $\varphi \mapsto \langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \langle T, \partial^\alpha \varphi \rangle \; \forall \varphi \in D(\Omega)$ *i.e*

$$\langle \partial^\alpha T, \varphi \rangle = (-1)^{|\alpha|} \left\langle T, \frac{\partial^{|\alpha|} \varphi}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_i^{\alpha_i} ... \partial x_n^{\alpha_n}} \right\rangle, \forall \varphi \in D(\Omega)$$

Proposition 2.3.2 *Pour toute distribution $T \in D'(\Omega)$ et pour tout multi-indice $\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_i, ..., \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ l'opérateur de dérivation*

$$\partial^\alpha : D'(\Omega) \to D'(\Omega)$$

est continu au sens de la définition précédente et on a

$$\partial^\alpha T \in D'(\Omega) \;\; \forall T \in D'(\Omega)$$

2.4 Théorème de Lax-Milgram

Le théorème de Lax-Milgram est un outil simple et efficace pour la résolution d'équations aux dérivées partielles linéaires elliptiques.

Définition 2.4.1 *Soit H un espace de Hilbert muni de la norme $|.|$. On dit qu'une forme bilinéaire $a(u, v) : H \times H \to \mathbb{R}$ est*

1. *continue s'il existe une constante C telle que*

$$|a(u,v)| \leq C|u||v|, \qquad \forall u, v \in H,$$

2. *coecrive s'il existe une constante $\alpha > 0$ telle que*

$$a(v,v) \geq \alpha |v|^2 \ \forall v \in H.$$

Théorème 2.4.1 *:(voir [4]) Soit H un espace de Hilbert et H' son dual. Soit a une forme bilinéaire, continue et coecrive. Par conséquent, pour tout $\varphi \in H'$, il existe $u \in H$ unique tel que*

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \ , \forall v \in H.$$

De plus, si a est symétrique, alors u est caractèrisée par la propriété

$$u \in H \text{ et } \frac{1}{2}a(u,u) - \langle \varphi, u \rangle = \min_{v \in H} \{\frac{1}{2}a(u,v) - \langle \varphi, v \rangle\},$$

où $< .,. >$ désigne les crochets de dualité entre H' et H.

2.5 Rappels sur la théorie des semi-groupes

2.5.1 Opérateurs linéaires bornés et non bornés

Comme la méthode utilisée dans cette thèse est basée sur la théorie des semi-groupes, nous rappelons, dans ce chapitre, quelques définitions et théorèmes de base qui seront utilisés dans les chapitres suivants, en se référant à [77], [5.22], [13], [15], [16], [18], [24], [25], [35], [37], [38], [40], [42], [43], [60], [61], [63], [64]. Nous commençons ce chapitre en donnant quelques résultats bien connus sur les opérateurs bornés et non bornés. Nous n'essayons pas de donner un développement complet, mais plutôt de revoir les définitions et théorèmes de base, le plus souvent sans preuve. Soient $(E, \|.\|_E), (F, \|.\|_F)$ deux espaces de Banach sur $\mathbb{C}$, et on désigne par H l'espace de Hilbert associé au produit scalaire $\langle .,. \rangle$ et $\|.\|_H$ la norme correspondante.

L'opérateur linéaire $T : E \to F$ est l'application linéaire de E dans F, elle vérifie

$$T(\alpha u + \beta v) = \alpha T(u) + \beta T(v). \forall u, v \in E \text{ et } \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

Définition 2.5.1 *L'opérateur linéaire $T : E \to F$ est dit borné s'il existe une constante $C \geq 0$ tel que*

$$\|Tu\|_F \leq C \|u\|_E \quad \forall u \in E$$

L'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans F est noté par $\mathcal{L}(E, F)$. De plus, l'ensemble de tous les opérateurs linéaires bornés de E dans E est noté par $\mathcal{L}(E)$.

Définition 2.5.2 *L'opérateur borné $T \in \mathcal{L}(E, F)$ est dit compact si pour chaque suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ avec $\|x_n\|_E = 1$ pour chaque $n \in \mathbb{N}$, la suite $(Tx_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et les sous suites convergent dans F. Tous les opérateurs compacts de E dans F sont notés par $\mathcal{K}(E, F)$. Pour simplifier on écrit $\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E)$.*

Définition 2.5.3 *Soit $T \in \mathcal{L}(E, F)$, on définit*

1- Le rang de T par

$$\mathcal{R}(T) = \{Tu : u \in E\} \subset F.$$

2- Le noyau de T par

$$\ker(T) = \{u \in E : Tu = 0\} \subset E.$$

Théorème 2.5.1 ***(alternative de Fredholm)*** *Si $T \in \mathcal{K}(E)$, alors*

1- $\ker(I - T)$ *est de dimension finie, (I est l'opérateur identité dans E).*

2- $\mathcal{R}(I - T)$ *est fermé.*

3- $\ker(I - T) = 0 \Leftrightarrow \mathcal{R}(I - T) = E$.

Définition 2.5.4 *L'opérateur linéaire non borné T de E dans F est le couple $(T, D(T))$, constitué d'un sous-espace $D(T) \subset E$ (appelé le domaine de T) et la transformation linéaire :*

$$T : D(T) \subset E \to F.$$

Dans le case où $E = F$ alors on dit que $(T, D(T))$ est un opérateur linéaire non borné en E.

Si $D(T) = E$ alors $T \in \mathcal{L}(E, F)$.

Définition 2.5.5 *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné.*

1- Le rang de T est defini par

$$\mathcal{R}(T) = \{Tu : u \in D(T)\} \subset F.$$

2- Le noyau (kernel) de T est défini par

$$\ker(T) = \{u \in D(T) : Tu = 0\} \subset E.$$

3- Le graphe de T est défini par

$$G(T) = \{(u, Tu) : u \in D(T)\} \subset E \times F.$$

Définition 2.5.6 *: L'application T est dite fermée si $G(T)$ est fermé dans $E \times F$.*

La fermeture de l'opérateur linéaire non borné T est caractérisée comme suit

$$si\ u_n \in D(T)\ tel\ que\ u_n \to u\ dans\ E$$

et

$$Tu_n \to v \text{ dans } F$$

alors

$$u \in D(T) \text{ et } Tu = v.$$

Définition 2.5.7 *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné fermé.*

1- L'ensemble résolvant de T est défini par

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda I - T \text{ est bijective de } D(T) \text{ dans } F\}.$$

2- Le résolvant de T est défini par

$$R(\lambda, T) = \{(\lambda I - T)^{-1} : \lambda \in \rho(T)\}.$$

3- L'ensemble spectre T est le complément de l'ensemble résolvant dans $\mathbb{C}$, noté par

$$\sigma(T) = \mathbb{C} \backslash \rho(T)$$

Définition 2.5.8 *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné fermé. le spectre $\sigma(T)$ de T est composé de trois ensembles disjoints, donné par*

1- Le spectre ponctuel de T est défini par

$$\sigma_p(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) \neq \{0\}\}$$

dans ce case λ est appelée valeur propre de T.

2- Le spectre continu de T est défini par

$$\sigma_c(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = 0,\ \overline{\mathcal{R}(\lambda I - T)} = F \text{ et } (\lambda I - T)^{-1} \text{ n'est pas borné}\}.$$

3- Le spectre résident de T est défini par

$$\sigma_r(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \ker(\lambda I - T) = 0, \text{ et } \mathcal{R}(\lambda I - T) \text{ est dense dans } F\}.$$

Définition 2.5.9 *Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné fermé et soit λ la valeur propre de A. L'élément non nul $e \in E$ est appelé un élément nilpotent de T associée à la valeur propre λ, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que*

$$(\lambda I - T)^n e = 0 \text{ et } (\lambda I - T)^{n-1} e \neq 0.$$

et si $n = 1$, alors e est appelé vecteur propre.

Définition 2.5.10 *:Soit $T : D(T) \subset E \to F$ un opérateur linéaire non borné fermé. On dit que T a une résolvante compacte, s'il existe $\lambda_0 \in \rho(T)$ tel que $(\lambda_0 I - T)^{-1}$ est compact.*

Théorème 2.5.2 *: Soit $(T, D(T))$ un opérateur linéaire non borné fermé sur H alors l'espace $(D(T), \|.\|_{D(T)})$ où $\|u\|_{D(T)} = \|Tu\|_H + \|u\|_H \ \ \forall u \in D(T)$ est un l'espace de Banach.*

Théorème 2.5.3 *: Soit $(T, D(T))$ un opérateur linéaire non borné fermé sur H alors, $\rho(T)$ est un ensemble ouvert de $\mathbb{C}$.*

2.5.2 Semi-groupes, Existence et Unicité de la solution

Nous commençons par introduire quelques concepts de base concernant les semi-groupes.

On considère l'équation d'évolution

$$\begin{cases} U_t = AU, \ t > 0, \\ U(0) = U_0, \end{cases} \tag{2.6}$$

où A est un générateur infinitésimal d'un C_0 -semi-groupe $S(t)$ dans l'espace de Hilbert H. Soit $(X, \|.\|_X)$ l'espace de Banach, et H l'espace de Hilbert associé au produit scalaire $\langle ., . \rangle_H$.

Définition 2.5.11 *La famille $(S(t))_{t\geq 0}$ d'opérateurs linéaires bornés dans un espace de Banach X est appelée semi-groupe fortement continu (où C_0-semi-group) si*

1- $S(0) = I$ (I est l'opérateur identité dans X).

2- $S(t+s) = S(t) + S(s)$, $\forall t, s \geq 0$.

3- Pour chaque $u \in H$, $S(t)u$ est continue en t sur $[0, \infty[.i.e$

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)u - u\|_H = 0.$$

On note aussi $S(t)$ par e^{tA}.

Définition 2.5.12 *On appelle générateur infinitésimal d'un semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$, l'opérateur linéaire (non-borné) $A : D(A) \to X$ défini par*

$$\begin{aligned} D(A) &= \left\{ u \in X,\ \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t},\ \textit{existe dans } X \right\} \\ Au &: = \lim_{t\to 0^+} \frac{S(t)u - u}{t}. \end{aligned}$$

Exemple 2.5.1 *On considère l'espace $L^2(]0, +\infty[)$, $1 \leq p \leq +\infty$.*

L'espace $L^2(]0, +\infty[)$ muni de la norme

$$\|f\|_2 = \left(\int_0^{+\infty} |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}},$$

est un espace de Hilbert. On définit :

$$(S(t)f)(x) = f(t+x), \forall t \geq 0 \textit{ et } \forall x \in (]0, +\infty[).$$

$S(t)$ est un opérateur linéaire et en plus, on a

$$\|S(t)f\|_2^2 = \int_0^{+\infty} |f(t+x)|^2 dx = \int_t^{+\infty} |f(y)|^2 dy \leq \int_0^{+\infty} |f(y)|^2 dy = \|f\|_2^2 .$$

Donc $S(t)$ est un opérateur linéaire continu.

Il est facile de vérifier que $S(0) = I_d$ et $S(t+s) = S(t) + S(s)$, $\forall t, s \geq 0$, et d'autre part,on a

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)u - u\|_2 = \lim_{t\to 0^+} \left(\int_0^{+\infty} |f(t+x) - f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} = 0.$$

Par conséquent $(S(t))_{t\geq 0}$ est un C_0 semi-groupe de l'opérateur linéaire borné sur $L^2(]0,+\infty[)$. Soit

$$D(A) \subset L^2(]0,+\infty[) \to L^2(]0,+\infty[)$$

le générateur infinitésimal du C_0 semi-groupe $(S(t))_{t\geq 0}$. Si $f \in D(A)$, alors on a

$$Af(x) = \lim_{t\to 0^+} \frac{f(t+x) - f(x)}{t} = f'(x),$$

uniformément par rapport à x. Par conséquent

$$D(A) \subset \left\{ f \in L^2(]0,+\infty[) : f' \in L^2(]0,+\infty[) \right\}.$$

Si $L^2(]0,+\infty[)$ tel que $f' \in L^2(]0,+\infty[)$, alors

$$\begin{aligned} \left\| \frac{S(t)f - f}{t} - f' \right\|_2^2 &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{S(t+x) - S(x)}{t} - f'(x) \right|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t}[f(s)]_x^{t+x} - \frac{1}{t}[f'(x)s]_x^{t+x} \right|^2 dx \\ &= \int_0^{+\infty} \left| \frac{1}{t} \int_x^{t+x} f'(s)ds - f'(x) \right|^2 dx \to 0, \end{aligned}$$

uniformément par rapport à x quand $t \to 0^+$. Donc

$$\left\{ f \in L^2(]0,+\infty[) : f' \in L^2(]0,+\infty[) \right\} \subset D(A).$$

Par conséquent

$$Af = f' \text{ et } D(A) \subset \left\{ f \in L^2(]0, +\infty[) : f' \in L^2(]0, +\infty[) \right\}$$

Définition 2.5.13 *:Soit A un opérateur linéaire à domaine dense dans H,i.e $A : D(A) \subseteq H \to H$. On dit que A est dissipatif si pour tout $u \in D(A)$*

$$\mathcal{R}(Au, u) \leq 0.$$

Proposition 2.5.1 *: Soit $(S(t))_{t\geq 0}$ un C_0-semi-groupe dans X, Alors il existe une constante $M \geq 1$ et $w \geq 1$ telle que*

$$\|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} \leq Me^{wt}, \forall t \geq 0.$$

Si $w = 0$ alors le semi-groupe associé est uniformément borné, conséquemment, si $M = 1$, alors $(S(t))_{t\geq 0}$ est appelé semi-groupe de contractions.

Définition 2.5.14 *L'opérateur non borné $(A, D(A))$ dans H, est appelé m-dissipatif si A est un opérateur dissipatif , c'est à dire*
$\exists \lambda_0 > 0$ tel que $\mathcal{R}(\lambda_0 I - A) = X$.

Définition 2.5.15 *:Soit A un opérateur m-dissipative, alors*
$\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$, $\lambda > 0$.$]0, \infty[\subseteq \rho(A)$.

Théorème 2.5.4 ***: (Hille -Yosida)*** *L'opérteur linéaire non borné $(A, D(A))$ dans X est un générateur infinitésimal d'un C_0-semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ si et seulement si*
1- A est fermé et $\overline{D(A)} = X$.
2- L'ensemble résolvant $\rho(A)$ de A contient $\mathbb{R}^+$ et pour tout $\lambda > 0$,

$$\left\|(\lambda I - A)^{-1}\right\| \leq \lambda^{-1}.$$

Théorème 2.5.5 ***(Lummer-Phillips)*** *Soit* $(A, D(A))$ *l'opérateur linéaire non borné en* X*, avec* $D(A)$ *domaine dense dans* X*.* A *est un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semigroup de contractions* $(S(t))_{t\geq 0}$ *si et seulement si* A *est m-dissipatif.*

Théorème 2.5.6 *: Soit* $(A, D(A))$ *l'opérateur linéaire non borné en* X*. Si* A *est dissipatif avec* $\mathcal{R}(\lambda I - A) = X$*, et* X *est reflexive alors* $\overline{D(A)} = X$*.*

Corollaire 2.5.1 *Soit* $(A, D(A))$ *l'opérateur linéaire non borné en* H*.* A *est un générateur infinitésimal d'un* C_0*-semigroup de contractions* $(S(t))_{t\geq 0}$ *si seulement si* A *est m-dissipatif*

Théorème 2.5.7 *: Soit* A *un opérateur linéaire avec domaine dense* $D(A)$ *dans l'espace de Hilbert* H*. Si* A *est disspatif et* $0 \in \rho(A)$*, alors* A *est générateur infinitésimal d'un* C_0*-semi-group de contractions si et seulment si* A *est m-dissipatif dans* H*.*

Théorème 2.5.8 ***: (Hille-Yosida)*** *Soit* $(A, D(A))$ *un opérateur linéaire non borné dans* H*. On suppose que* A *est un générateur d'un* C_0*-semi-groupe infinitésimal de contractions* $(S(t))_{t\geq 0}$

1-Pour $U_0 \in D(A)$*, le problème (2.6) admet une unique solution forte*

$$U(t) = S(t)U_0 \in C^0(\mathbb{R}^+, D(A)) \cap C^1(\mathbb{R}^+, H)$$

2-Pour $U_0 \in H$*, le problème (2.6) admet une unique solution faible*

$$U(t) \in C^0(\mathbb{R}^+, H).$$

2.5.3 Stabilité de semi-groupe

Dans cette section, nous commençons par introduire une définition de la stabilité forte, exponentielle et polynomiale d'un C_0-semi-groupe. ensuite, nous donnons quelques résultats sur la stabilité du C_0-semi-groupe.

Soit $(X, \|.\|_X)$ l'esapce Banach, et H l'espace de Hilbert equippé d'un produit sacalire $\langle ., . \rangle_H$ et de a norme correspandante $\|.\|_H$.

Définition 2.5.16 *On suppose que A est un générateur de semi-groupe fortement continue de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ on dit qu'il est*

1-Fortement satble si

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)u\|_X = 0, \forall u \in X.$$

2-Uniformément stable si

$$\lim_{t\to 0^+} \|S(t)\|_{\mathcal{L}(X)} = 0.$$

3-Exponentiellement stable s'il existe deux constantes positives M et ϵ telles que

$$\|S(t)u\|_X \leq Me^{-\varepsilon t} \|u\|_X, \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in X.$$

4-Polynomialement stable s'il existe deux constantes positives C et α telles que

$$\|S(t)u\|_X \leq Mt^{-\alpha} \|u\|_X, \quad \forall t > 0, \quad \forall u \in X.$$

Proposition 2.5.2 *: On suppose que A est un générateur fortement continue de semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ en X. les propositions suivantes sont équivalentes*

1-$(S(t))_{t\geq 0}$ est uniformément stable.

2-$(S(t))_{t\geq 0}$ est exponentiellement stable.

Premièrement, on cherche les conditions nécéssaires pour une stabilité forte de C_0 semi-groupe. le résultat est obtainu par Arendt et Batty.

Théorème 2.5.9 ***: (Arendt et Batty)*** *On suppose que A est un générateur fortement continu de semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ et X un espace de*

Banach reflexife. Alors on a

1- A n'a pas de valeur propre imaginaire pure.

2- $\sigma(A) \cap i\mathbb{R}$ est dénombrable.

Donc $S(T)$ est fortement stable.

Remarque 2.5.1 *Si le resolvant $(I-T)^{-1}$ de T est compact,*

alors $\sigma(T) = \sigma_p(T)$.

Ainsi, l'énoncé du ***Théorème Arendt et Batty*** *se réduit à $\sigma_p(T) \cap i\mathbb{R} = \phi$*

Par la suite, lorsque un C_0-semigroup est fortement stable, on cherche les conditions nécessaires et suffiantes en vue d'avoir une stabilité exponentielle de C_0-semigroupe. En fait, les résultats de stabilié expontentielle ont été obtenue à l'aide de différentes méthodes : méthode de multiplicteur, une approche de fréquence de domaine, l'approche du base de Riesz , analyse de Fourier ou une combinaision des méthodes obtenues par Huang-Pruss.

Théorème 2.5.10 ***: (Huang -Pruss)*** *On suppose que A est un générateur fortement continu de semi-groupe de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ dans H.*

Alors $S(t)$ est uniformément stable si et seulemnt si

1- $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$.

2- $\sup\limits_{\beta\in\mathbb{R}} \left\|(i\beta I - A)^{-1}\right\|_{\mathcal{L}(H)} < +\infty$.

Dans le cas où le C_0-semi-groupe n'est pas exponentiellement stable on cherche la stabilité polynomiale. En général, les resultats de stabilité polynomiale ainsi trouvés en utilisant des méthodes différentes comme : méthode de multiplicateur, la méthode d'approche de frequance de domain, l'approche de base de Riesz , analyse de Fourier , dans cette thèse on utilise la méthode d'approche de fréquence de domain obtainue par **A.Borichev and Y.Tomilov**.

Théorème 2.5.11 ***: (A. Borichev and Y.Tomilov)*** *On suppose que A est un générateur fortement continu de semi-groupes de contractions $(S(t))_{t\geq 0}$ en H. Si $i\mathbb{R} \subset \rho(A)$, alors pour $l > 0$ les conditions suivantes sont équivalentes*

1-

$$\lim_{|\lambda|\to+\infty} \sup \frac{1}{\lambda^l} \|(\lambda I - A)\|_{\mathcal{L}(X)} < +\infty.$$

2-

$$\|S(t)U_0\|_H \leq \frac{C}{t^{l^{-1}}} \|U_0\|_{D(A)}, \qquad \forall t > 0, \quad \forall U_0 \in D(A), \ \textit{pour } C > 0.$$

Chapitre 3

Existence et unicité de la solution d'un système de Timoshenko

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons démontrer l'existence et l'unicité du système (1.12-1.14) en utilsant la méthode d'approche de semi-groupe. Dans ce but , comme dans [19], on introduit le changement de variable suivant

$$\eta(x,t,s) = \varphi(x,t) - \varphi(x,t-s),$$

pour $\eta(x,t,s) \in (0,L) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. ($\eta$ dépend de φ), cette fonction satisfait les conditions suivantes

$$\eta(0,t,s) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

$$\eta(x,t,0) = 0, \text{ dans } (0,L) \times \mathbb{R}_+,$$

l'equation

$$\eta_t + \eta_s - \varphi_t = 0 \text{ dans } (0,L) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

Donc le système (1.12) devient comme suit

$$\begin{array}{rcl} \rho w_{tt}(x,t) - \kappa[\varphi(x,t) + w_x(x,t)]_x &=& 0,(3.1) \\ I_\rho \varphi_{tt}(x,t) - \tilde{b}\varphi_{xx}(x,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,t,s)ds + \kappa[\varphi + w_x](x,t) &=& 0,(3.2) \\ M w_{tt}(L,t) - \kappa[\varphi + w_x](L,t) &=& 0,(3.3) \\ J\varphi_{tt}(L,t) - \tilde{b}\varphi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L,t,s)ds &=& 0,(3.4) \end{array}$$

Soit

$$\eta_0(x,s) = \eta(x,0,s) = \varphi_0(x,0) - \varphi_0(x,s).\text{pour}(x,s) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+.$$

Pour définir l'approche de semi-groupe associé au système (5.3)-(5.6), on considère les conditions aux limites suivantes

$$\mathbf{u}(t) = w_t(L,t), \mathbf{v}(t) = \varphi_t(L,t), \text{for} t > 0,$$

où $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ sont solutions du système

$$\begin{array}{rcl} M\mathbf{u}_t(L,t) - \kappa[\varphi + w_x](L,t) &=& 0, \text{dans } \mathbb{R}_+. \qquad (3.5) \\ J\mathbf{v}_t(L,t) - \tilde{b}\varphi_x(L,t) + \int_0^\infty g(s)\eta_x(L,t,s)ds &=& 0, \text{dans} \mathbb{R}_+. \end{array}$$

Sous les conditions initiales

$$\mathbf{u}(0) = w_1(L),\ \mathbf{v}(0) = \varphi_1(L),\ \text{pour } t > 0. \tag{3.6}$$

Maintenant, pour $U = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)^T$ et $U_0 = (w_0, w_1, \varphi_0, \varphi_1, \mathbf{u}_0, \mathbf{v}_0, \eta_0)^T$, où

$$\mathbf{u}(t) = v_2(L,t),\ \mathbf{v}(t) = v_4(L,t),\ \text{pour } t > 0,$$

le système est équivalent au problème linéaire abstrait de Cauchy

$$\begin{cases} U_t = \mathcal{A}U \\ U(0) = 0 \end{cases}, \tag{3.7}$$

où $\mathcal{A}$ est l'opérateur linéaire défini par

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\kappa}{\rho}\partial_{xx} & \frac{\kappa}{\rho}\partial_x & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\kappa}{I_\rho}\partial_x & 0 & \frac{\tilde{b}}{I_\rho}\partial_{xx} - \frac{\kappa}{I_\rho}I_d & 0 & 0 & 0 & -\frac{EI}{I_\rho}\int_0^\infty g(s)\partial_{xx}ds \\ \frac{k}{M}T_1 & 0 & \frac{k}{M}T_2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{b}{J}T_3 & 0 & 0 & 0 & -\frac{b}{J}\int_0^\infty g(s)T_4 ds \\ 0 & 0 & I_d & 0 & 0 & 0 & -\partial_s \end{pmatrix},$$

où Id désigne l'operateur identité et T_i, $i = 0, 1$ sont les opérateurs de trace donnés par

$$T_1(w) = w_x(L,t), \quad T_2(\varphi) = \varphi(L,t),$$
$$T_3(\varphi) = \tilde{b}\varphi_x(L,t), \quad T_4(\eta) = \eta_x(L,t).$$

$$D(\mathcal{A}) = \left\{ \begin{array}{c} V = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)^T \in \mathcal{H}, \mathcal{A}V \in \mathcal{H}, \\ v_7(x,t,0) = 0, \ \mathbf{u}(t) = v_2(L,t), \ \mathbf{v}(t) = v_4(L,t). \end{array} \right\},$$

on remarque que $\mathcal{A}$ est dissipative, parce que pour tout $U \in D(\mathcal{A}) \setminus \{0\}$

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \left[\tilde{b}v_{3x}\overline{w_{3x}} + \rho v_2\overline{w_2} + I_\rho v_4\overline{w_4}\right] dx \\ &+ \langle v_7, \overline{w_7}\rangle_{L_g} + \kappa\int_0^L (v_{1x} + v_3)\overline{(w_{1x} + w_3)}dx \\ &+ Mv_5\overline{w_5} + Jv_6\overline{w_6}. \end{aligned}$$

De même

$$\begin{aligned} (U, \mathcal{A}U)_{\mathcal{H}} &= \int_0^L \left[\tilde{b}w_{3x}\overline{v_{3x}} + \rho w_2\overline{v_2} + I_\rho w_4\overline{v_4}\right] dx \\ &+ \langle w_7, \overline{v_7}\rangle_{L_g} + \kappa\int_0^L (w_{1x} + w_3)\overline{(v_{1x} + v_3)}dx \\ &+ Mw_5\overline{v_5} + Jw_6\overline{v_6}. \end{aligned}$$

Ensuite par un calcul direct on aura

$$Re\,(\mathcal{A}U,U) = \frac{1}{2}\int_0^L \int_0^\infty g'(s)\,|v_{7x}|^2\,dsdx \le -\frac{\kappa}{2}\int_0^L \int_0^\infty g(s)\,|v_{7x}|^2\,dsdx < 0. \tag{3.8}$$

A présent, on considère

$$\lambda U - \mathcal{A}U = F$$

où $U = (v_1, v_2, v_3, v_4, v_5, v_6, v_7)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ et $F = (f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6, f_7)^T \in \mathcal{H}$. En reécrivant l'équation résolvante en termes de composantes, on obtient

$$\begin{aligned}
\lambda v_1 - v_2 &= f_1, &(3.9)\\
\lambda \rho v_2 - \kappa\,[v_{1x} + v_3]_x &= \rho f_2, &(3.10)\\
\lambda v_3 - v_4 &= f_3, &(3.11)\\
\lambda I_\rho v_4 - \left(\tilde{b} v_{3xx} - \int_0^\infty g(s) v_{7xx} ds\right) + \kappa\,[v_{1x} + v_3] &= I_\rho f_4, &(3.12)\\
M\lambda v_5 - \kappa\,[v_{1x} + v_3] &= M f_5, &(3.13)\\
J\lambda v_6 - \left(\tilde{b} v_{3x} - \int_0^\infty g(s) v_{7x} ds\right) &= J f_6, &(3.14)\\
\lambda v_7 + v_{7s} - v_4 &= f_7. &(3.15)
\end{aligned}$$

Théorème 3.0.12 *: L'opérateur $\mathcal{A}$ est un C_0 semi-groupe infinitesimal de contractions.*

Preuve 3.0.1 *On va démontrer que $0 \in \rho(\mathcal{A})$. En prenant $\lambda = 0$ dans (3.9-3.15)* *on obtient*

$$\begin{aligned} -v_2 &= f_1, &(3.16)\\ -\kappa\left[v_{1x}+v_3\right]_x &= \rho f_2, &(3.17)\\ -v_4 &= f_3, &(3.18)\\ -\left(\tilde{b}v_{3xx}-\int_0^\infty g(s)v_{7xx}ds\right)+\kappa\left[v_{1x}+v_3\right] &= I_\rho f_4, &(3.19)\\ -\kappa\left[v_{1x}+v_3\right] &= Mf_5, &(3.20)\\ -\left(\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right) &= Jf_6, &(3.21)\\ v_{7s}-v_4 &= f_7. &(3.22)\end{aligned}$$

A partir (3.16), (3.18) et (3.22), on trouve

$$-v_1=f_1, -v_4=f_3. \tag{3.23}$$

La dernière èquation (3.22) implique

$$\begin{aligned} v_{7s}-v_4 &= f_7 \Rightarrow v_{7s}=f_7-f_3 &(3.24)\\ &\Rightarrow\ v_7(s)=\int_0^s (f_7-f_3)(\tau)d\tau. \end{aligned}$$

En substituant (3.24) dans la deuxième équation de (3.17) et (3.21) nous obtenons

$$\begin{aligned} -\kappa\left[v_{1x}+v_3\right]_x &= \rho f_2\\ -\left(\tilde{b}v_{3xx}+\int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s (f_7-f_3)(\tau)d\tau\right)_{xx}ds\right)+\kappa\left[v_{1x}+v_3\right] &= I_\rho f_4,\\ -\kappa\left[v_{1x}+v_3\right] &= Mf_5\\ -\left(\tilde{b}v_{3x}+\int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s (f_7-f_3)(\tau)d\tau\right)_x ds\right) &= Jf_6, \end{aligned}$$

En multipliant (3.17) et (3.19) par w_2 et w_4, et en utilisant (3.16) et (3.18), et en intègrant par partie sur $(0,L)$, on obtient

$$-\kappa\left[\left[v_{1x}+v_3\right]w_2\right]_0^L+\kappa\int_0^L\left[v_{1x}+v_3\right]w_{2x}dx=\rho\int_0^L f_2w_2dx, \tag{3.25}$$

$$
\begin{aligned}
& -\left[\left(\tilde{b}v_{3x} + \int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s (f_7 - f_3)(\tau)d\tau\right)_x ds\right) w_4\right]_0^L \\
& + \int_0^L \left(\tilde{b}v_{3x} + \int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s (f_7 - f_3)(\tau)d\tau\right)_x ds\right) w_{4x}dx \\
& +\kappa \int_0^L \left[v_{1x} + v_3\right] w_4 dx \\
= \;& I_\rho \int_0^L f_4 w_4 dx,
\end{aligned} \tag{3.26}
$$

En multipliant (3.20) et (3.21) par w_2 *et* w_4*, on obtient*

$$
\begin{aligned}
-\kappa\left[v_{1x} + v_3\right] w_2 &= M f_5 w_2 \\
-\left(\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)\left(\int_0^s (f_7 - f_3)(\tau)d\tau\right)_x ds\right) w_4 &= J f_6 w_4
\end{aligned}
$$

En additionnant (3.25) et (3.26), et en utilisant les conditions aux limites, on obtient

$$
a((v_1, v_3), (v_2, v_4)) = b(w_2, w_4). \tag{3.27}
$$

avec

$$
\begin{aligned}
a((v_1, v_3), (w_2, w_4)) &= \kappa \int_0^L \left[v_3 + v_{1x}\right]\left[w_4 + w_{2x}\right] dx \\
&\quad + \tilde{b} \int_0^L v_3 w_{4x} dx,
\end{aligned}
$$

et

$$
\begin{aligned}
b(w_2, w_4) &= \rho \int_0^L f_2 w_2 dx - M f_5 w_2 + I_\rho \int_0^L f_4 w_4 dx - J f_6 w_4 \\
&\quad + \int_0^L \int_0^\infty g(s) \int_0^s (f_7 - f_3)(\tau) w_{4x} d\tau ds dx.
\end{aligned}
$$

Il est facile de vérifier que la forme bilinéaire $a((v_1, v_3), (w_2, w_4))$ *est coercive et* *bornée,*

$$\begin{aligned}|a((v_1,v_3),(w_2,w_4))| &= \left|\kappa\int_0^L [v_3+v_{1x}][w_4+w_{2x}]dx\right.\\ &\left.+\tilde{b}\int_0^L v_3w_{4x}dx\right|,\end{aligned}$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient

$$\begin{aligned}|a(v_1,v_3),(w_2,w_4))| &\leq \kappa\left\|v_3+v_{1x}\right\|_{L^2}\left\|w_4+w_{2x}\right\|_{L^2}+\tilde{b}\left\|v_3\right\|_{L^2}\left\|w_{4x}\right\|_{L^2},\\ &\leq \max(\kappa,\tilde{b})\left\|v_3+v_{1x}\right\|_{H_0^1}\left\|w_4+w_{2x}\right\|_{H_0^1}+\left\|v_3\right\|_{H_0^1}\left\|w_4\right\|_{H_0^1},\\ &\leq C\left(\left\|v_3+v_{1x}\right\|_{H_0^1}+\left\|v_3\right\|_{H_0^1}\right)\left(\left\|w_4+w_{2x}\right\|_{H_0^1}+\left\|w_4\right\|_{H_0^1}\right).\end{aligned}$$

2) Coercivité de $a((v_1,v_3),(w_2,w_4))$

$$a((v_1,v_3),(w_1,w_3))=\kappa\int_0^L [v_3+v_{1x}]^2\,dx+\tilde{b}\int_0^L v_3v_{3x}dx,$$

de la même manière on peut montrer que $b(w_2,w_4)$ *est linéaire continue. Ainsi, d'après le Théorème de Lax–Milgram [60], on déduit que (3.27) a une unique solution. Par conséequent, en utilisant (3.23), (3.24) et les arguments de la régularité classique, on conclut que* $\mathcal{A}U=F$ *admet une unique solution. Donc,* $R(\lambda I-\mathcal{A})=\mathcal{H}$. *Finallement, à l'aide du Théorème Lumer–Phillips 60,42, on déduit que* $\mathcal{A}$ *est un générateur de* C_0 *-semi-groupe de contractions dans* $\mathcal{H}$.

Chapitre 4

La décroissance polynomiale avec des vitesses de propagations différentes $(\frac{\kappa}{\rho} \neq \frac{1}{I_\rho})$

Introduction

Dans ce chapitre, nous allons utiliser la méthode d'approche de fréquence de domaine (voir [13]) pour prouver la stabilité polynomiale de $(e^{\mathcal{A}t})_{t\geq 0}$ associée au système de Timoshenko (1.12 -1.14).

Théorème 4.0.13 *: Soit $\mathcal{S}(t)$ un C_0-semi-groupe borné dans l'espace de Hilbert $\mathcal{H}$ avec le générateur $\mathcal{A}$ tel que $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$. alors*

$$\frac{1}{|\lambda|^\alpha}\left\|(\lambda I-\mathcal{A})^{-1}\right\| \leq C, \quad \forall \lambda \in \mathcal{R} \Leftrightarrow \left\|S(t)\mathcal{A}^{-1}\right\| \leq \frac{C}{t^{\frac{1}{\alpha}}}. \tag{4.1}$$

On introduit les notations suivantes

$$\mathcal{L}^2 = \int_0^L \left[\rho v_2^2 + I_\rho v_4^2 + \left(\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)\left|v_{7x}\right|\right)^2 + \kappa[v_3+v_{1x}]^2\right]dx$$

$$\Pi_1(B) = -\rho q\left|v_2(B)\right|^2 - q\kappa\left|v_{1x}(B)+v_3(B)\right|^2$$

$$\Pi_2(B) = -I_\rho q \left|v_4(B)\right|^2 - q\left(\tilde{b}\left|v_{3x}(B)\right| - \int_0^\infty g(s)\left|v_{7x}(B)\right| ds\right)^2$$

Lemme 4.0.1 *: On suppose que v_1, v_2, v_3, v_4 sont des solutions fortes du système (1.12), alors il existe une constante c positive telle que*

$$\mathcal{L}^2 \leq c(\Pi_1(B) + \Pi_2(B) + \|F\|^2_{\mathcal{H}}).$$

On a

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \left[\rho v_2^2 + I_\rho v_4^2 + \left(\tilde{b} v_{3x} - \int_0^\infty g(s)\left|v_{7x}\right|\right)^2 + \kappa\left[v_3 + v_{1x}\right]^2\right] dx \\
\leq\ & c\left(\rho q\left|v_2(B)\right|^2 + q\kappa\left|v_{1x}(B) + v_3(B)\right|^2 + \|F\|^2_{\mathcal{H}}\right. \\
&\left. + I_\rho q\left|v_4(B)\right|^2 + q\left(\tilde{b}\left|v_{3x}(B)\right| - \int_0^\infty g(s)\left|v_{7x}(B)\right| ds\right)^2\right),
\end{aligned}$$

et

$$\Pi_1(B) + \Pi_2(B) \leq c(\mathcal{L}^2 + \|F\|^2_{\mathcal{H}}).$$

C'est à dire

$$\begin{aligned}
&\rho q\left|v_2(B)\right|^2 + q\kappa\left|v_{1x}(B) + v_3(B)\right|^2 + I_\rho q\left|v_4(B)\right|^2 \\
&+q\left(\tilde{b}\left|v_{3x}(B)\right| - \int_0^\infty g(s)\left|v_{7x}(B)\right| ds\right)^2 \\
\leq\ & c\left(\int_0^L \left[\rho v_2^2 + I_\rho v_4^2 + \left(\tilde{b} v_{3x} - \int_0^\infty g(s)\left|v_{7x}\right|\right)^2 + \kappa\left[v_3 + v_{1x}\right]^2\right] dx + \|F\|^2\right).
\end{aligned}$$

Pour $B = 0, L$.

Dans ce qui suit, on va prouver les inégalités pour $B = L$. Le cas $B = 0$ est similaire. Soit $\lambda \in i\mathbb{R}$ et $q \in C^2(0, L)$ tel que $q(0) = 0$ et $q_x \geq \tilde{c}$.

Preuve 4.0.2 *Pour majorer les termes $\|v_3 + v_{1x}\|^2$ et $\|v_2\|^2$, en multipliant l'équation (3.10) par $q\overline{[v_3 + v_{1x}]}$, on obtient*

$$\rho\int_0^L \lambda v_2 q\overline{[v_3 + v_{1x}]} dx - \kappa\int_0^L \left[v_3 + v_{1x}\right]_x q\overline{[v_3 + v_{1x}]} dx = \rho\int_0^L f_2 q\overline{[v_3 + v_{1x}]} dx. \tag{4.2}$$

En utilisant (3.9) et (3.11), on trouve

$$\overline{\lambda v_{1x}} = \overline{(v_{2x} + f_{1x})}, \tag{4.3}$$

et

$$\overline{\lambda v_3} = \overline{(v_4 + f_3)}. \tag{4.4}$$

On a

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^L \lambda v_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx \\ &= -\rho \int_0^L v_2 q \overline{\lambda v_{1x}} dx - \rho \int_0^L v_2 q \overline{\lambda v_3} dx \end{aligned}$$

En substutiant (4.4)-(4.3) dans cette dernière équation, on trouve

$$\begin{aligned} I &= -\rho \int_0^L v_2 q \overline{(v_{2x} + f_{1x})} dx - \rho \int_0^L v_2 q \overline{(v_4 + f_3)} dx \\ &= -\rho \int_0^L v_2 q \overline{v_{2x}} dx - \rho \int_0^L v_2 q \overline{v_4} dx - \rho \int_0^L v_2 q_1 \overline{(f_3 + f_{1x})} dx \end{aligned}$$

Par une intègration par parties, on obtient

$$\begin{aligned} I &= \rho \int_0^L \lambda v_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx \\ &= -\rho \int_0^L q \frac{d}{dx} \overline{v_{2x}} dx - \rho \int_0^L v_2 q \overline{v_4} dx - \rho \int_0^L v_2 q_1 \overline{(f_3 + f_{1x})} dx \\ &= -\left[\frac{\rho}{2} q \left|v_2\right|^2\right]_0^L + \frac{\rho}{2} \int_0^L q_x \left|v_2\right|^2 dx - \rho \int_0^L v_2 q \overline{v_4} dx - \rho \int_0^L v_2 q \overline{(f_3 + f_{1x})} dx. \end{aligned}$$

Alors, en prenant la partie réele, on trouve

$$\begin{gathered} \mathcal{R}e \int_0^L \rho \lambda v_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx = -\frac{\rho}{2} \int_0^L q \frac{d}{dx} \left|v_2\right|^2 dx - \mathcal{R}e \int_0^L \rho v_2 q \overline{v_4} dx \\ -\rho \int_0^L v_2 q \overline{(f_3 + f_{1x})} dx \end{gathered}$$

et

$$\begin{gathered} \mathcal{R}e \int_0^L \rho \lambda v_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx = -\frac{\rho}{2} [q \left|v_2\right|^2]_0^L + \frac{\rho}{2} \int_0^L q_x \left|v_2\right|^2 dx \\ -\mathcal{R}e \int_0^L \rho v_2 q \overline{v_4} dx + R_1, \end{gathered} \tag{4.5}$$

où R_1 *contient* f_3 *et* f_1 *et vérifie*

$$\rho \int_0^L v_2 q \overline{(f_3 + f_{1x})} dx = |R_1| \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

En utilisant (3.17), on déduit que

$$\rho \int_0^L \lambda v_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx - \kappa \int_0^L \frac{d}{2dx} q \overline{[v_3 + v_{1x}]}^2 dx = \rho \int_0^L f_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx.$$

Par une intègration par parties, on trouve

$$\begin{gathered} \rho \int_0^L \lambda v_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx - \frac{\kappa}{2} q \left| (v_3 + v_{1x})^2 \right|_0^L + \kappa \int_0^L q_x \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx \\ = \rho \int_0^L f_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx. \end{gathered} \tag{4.6}$$

La combinaison des équations (4.5) et (4.6), donne

$$\begin{aligned} & -[\frac{1}{2}[\rho q |v_2|^2 + \kappa q |v_3 + v_{1x}|^2]_0^L] \\ & + \frac{1}{2} \int_0^L [\rho q_x |v_2|^2 + \kappa q_x |v_3 + v_{1x}|^2] dx \\ & - \mathcal{R}e \int_0^L \rho v_2 q \overline{v_4} dx \\ = \; & \rho \int_0^L f_2 q \overline{[v_3 + v_{1x}]} dx + R_1. \end{aligned}$$

$$\begin{gathered} -\frac{1}{2} \left[\rho q |v_2|^2 + \kappa q |v_3 + v_{1x}|^2 \right]_0^L \\ + \frac{1}{2} \int_0^L \left(\rho q_x |v_2|^2 + \kappa q_{1x} |v_3 + v_{1x}|^2 \right) dx \\ - \mathcal{R}e \int_0^L \rho v_2 q \overline{v_4} dx = R_2, \end{gathered} \tag{4.7}$$

où R_2 *contient le terme* f_2 *avec*

$$|R_2| \leq c \|U\|_{\mathcal{H}} \|F\|_{\mathcal{H}}.$$

De façon similaire, supposons que $q \in C^2(0, L)$ *tel que* $q(0) = 0$.

Pour trouver des majorants des termes $\left\| \tilde{b} v_{3x} - \int_0^\infty g(s) v_{7x} ds \right\|^2$ *et* $\|v_4\|^2$ *en mul-*

tipliant l'équation (3.12) par $q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)$*,on obtient*

$$\begin{aligned}
&\int_0^L \lambda I_\rho \varphi_t q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx \\
&-\int_0^L q\left(\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right)_x\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx \\
&+\int_0^L \kappa\left[v_3 + v_{1x}\right]q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx \\
= \;& I_\rho \int_0^L f_4 q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx. \qquad (4.8)
\end{aligned}$$

En considérant le premier terme et en utilisant (3.11) et (3.15) avec

$$\overline{\lambda v_{3x}} = \overline{(v_{4x} + f_{3x})}, \qquad (4.9)$$

et

$$\overline{\lambda v_7} = \overline{f_7 + v_4 - v_{7s}}, \qquad (4.10)$$

on obtient

$$\begin{aligned}
J_1 &= \mathcal{R}e\int_0^L \lambda I_\rho v_4 q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx \\
&= -\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho \tilde{b} q v_4 \overline{\lambda v_{3x}}dx + \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 q\int_0^\infty g(s)\ \overline{\lambda v_{7x}}\ dsdx.
\end{aligned}$$

Maintenant, en utilisant (4.9)-(4.10), on obtient

$$\begin{aligned}
J_1 &= -\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 \tilde{b} q\overline{(v_{4x} + f_{3x})}dx + \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 q\int_0^\infty g(s)\overline{(f_{7,x} + v_{4x} - v_{7xs})}dsdx \\
&= -\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 \tilde{b} q\overline{v_{4x}}dx + \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 q\int_0^\infty g(s)\overline{v_{4x}}dsdx \\
&\quad -\mathcal{R}e\int_0^L\int_0^\infty I_\rho v_4 q g(s)\overline{v_{7xs}}dsdx \\
&\quad +\mathcal{R}e\int_0^L\int_0^\infty I_\rho v_4 q g(s)\overline{f_{7x}}dsdx - \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 q\overline{f_{3x}}dx
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2}\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\frac{d}{dx}\left|v_4\right|^2 dx + \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\int_0^\infty g(s)v_4\overline{v_{4x}}dsdx \\ &\quad -\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\int_0^\infty g(s)v_4\overline{v_{7xs}}dsdx - \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho v_4 q\overline{f_{3x}}dx \\ &\quad +\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\int_0^\infty g(s)v_4\overline{f_{7x}}dsdx. \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties,

$$\begin{aligned} J_1 &= -\frac{1}{2}\left[I_\rho q\left|v_4\right|^2\right]_0^L + \frac{1}{2}\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q_x\left|v_4\right|^2 dx \\ &\quad +\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\int_0^\infty g(s)v_4\overline{v_{4x}}dsdx - \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\int_0^\infty g(s)v_4\overline{v_{7xs}}dsdx \\ &\quad -\mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q v_4\overline{f_{3x}}dx + \mathcal{R}e\int_0^L I_\rho q\int_0^\infty g(s)v_4\overline{f_{7x}}dsdx. \end{aligned}$$

On suppose que

$$\begin{aligned} J_2 &= -\int_0^L q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)_x\left(\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right)dx \\ &= -\int_0^L \frac{d}{2dx}q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)^2 dx \end{aligned}$$

En utilisant l'intégration par parties, on trouve

$$J_2 = -\frac{1}{2}\left(q\left|\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2\right)_0^L + \frac{1}{2}\int_0^L q_x\left|\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2 dx.$$

A présent, avec l'intégration par parties du troixième terme et en utilisant (3.10), on obtient

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^L \kappa\left[v_3 + v_{1x}\right]q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx \\ &= \left[\kappa\left(v_3 + v_{1x}\right)q\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7 ds}\right)\right]_0^L \\ &\quad -\int_0^L \kappa\left[\left(v_3 + v_{1x}\right)q\right]_x\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7 ds}\right)dx. \end{aligned} \tag{4.11}$$

En utilisant (3.10) et (3.11), on déduit

$$-\kappa(v_3 + v_{1x})_x = \rho f_2 - \lambda \rho v_2, \tag{4.12}$$

et

$$\overline{v_3} = \overline{\frac{1}{\lambda}(v_4 + f_3)}, \tag{4.13}$$

et

$$\overline{v_7} = \overline{\frac{1}{\lambda}(f_7 + v_4 - v_{7s})}, \tag{4.14}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^L \kappa[v_3 + v_{1x}]q\left(\overline{\tilde{b}v_{3x} - \int_0^\infty g(s)v_{7x}ds}\right)dx \\
&= [\kappa(v_3 + v_{1x})q\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)]_0^L \\
&\quad - \int_0^L \kappa[(v_3 + v_{1x})q]_x\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)dx \\
&= \left[\kappa(v_3 + v_{1x}q\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)\right]_0^L \\
&\quad - \int_0^L \kappa(v_3 + v_{1x})_xq\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)dx \\
&\quad - \int_0^L \kappa(v_3 + v_{1x})q_x\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)dx \\
&= \left[\kappa(v_3 + v_{1x})q\left(\overline{\tilde{b}v_3 - \int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)\right]_0^L + J_3' + J_3''
\end{aligned}$$

où

$$J_3' = -\int_0^L \kappa(v_3 + v_{1x})_x\tilde{b}q\overline{v_3}dx - \int_0^L \kappa(v_3 + v_{1x})\tilde{b}q_x\overline{v_3}dx, \tag{4.15}$$

et

$$J_3'' = \int_0^L \kappa(v_3 + v_{1x})_xq\int_0^\infty g(s)\overline{v_7}dsdx + \int_0^L \kappa\left(v_3 + v_{1x}\right)q_x\int_0^\infty g(s)\overline{v_7}dsdx. \tag{4.16}$$

En substitutiant (4.12) et (4.13) dans (5.20), on trouve

$$\begin{aligned}
J_3' &= -\int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)_x \tilde{b}q\overline{v_3}dx - \int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)\tilde{b}q_x\overline{v_3}dx \\
&= \int_0^L \left(\rho f_2-\lambda\rho v_2\right)\tilde{b}q\overline{\frac{1}{|\lambda|}\left(v_4+f_3\right)}dx - \int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)\tilde{b}q_x\overline{\frac{1}{|\lambda|}\left(v_4+f_3\right)}dx \\
&= \int_0^L \rho v_2\tilde{b}q\overline{v_4}dx - \frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \rho f_2\tilde{b}q\overline{(v_4+f_3)}dx \\
&\quad +\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)\tilde{b}q_x\overline{(v_4+f_3)}dx + \int_0^L \rho v_2\tilde{b}q\overline{f_3}dx.
\end{aligned} \tag{4.17}$$

En utilisant (4.12) et (4.14), J_3'' *devient*

$$\begin{aligned}
J_3'' &= \int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)_x q\int_0^\infty g(s)\overline{v_7}dsdx + \int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)q_x\int_0^\infty g(s)\overline{v_7}dsdx \\
&= \int_0^L \left(\lambda\rho v_2-\rho f_2\right)q\int_0^\infty g(s)\overline{\frac{1}{|\lambda|}\left(f_7+v_4-v_{7s}\right)}dsdx \\
&\quad +\int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)q_x\int_0^\infty g(s)\overline{\frac{1}{|\lambda|}\left(f_7+v_4-v_{7s}\right)}dsdx \\
&= -\int_0^L \rho v_2 q\int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})}dsdx \\
&\quad +\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \rho f_2 q\int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})}dsdx \\
&\quad -\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)q_x\int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})}dsdx.
\end{aligned} \tag{4.18}$$

En substitutiant (4.17) et (4.18) dans (5.19), on trouve

$$\begin{aligned}
J_3 &= \left[\kappa\left(v_3+v_{1x}\right)q\left(\overline{\tilde{b}v_3-\int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)\right]_0^L + J_3' + J_3'' \\
&= \left[\kappa\left(v_3+v_{1x}\right)q\left(\overline{\tilde{b}v_3-\int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)\right]_0^L \\
&\quad + \int_0^L \rho v_2 \tilde{b} q \overline{v_4} dx - \frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \rho f_2 \tilde{b} q \overline{(v_4+f_3)} dx \\
&\quad + \frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right)\tilde{b} q_x \overline{(v_4+f_3)} dx + \int_0^L \rho v_2 \tilde{b} q \overline{f_3} dx \\
&\quad - \int_0^L \rho v_2 q \int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})} ds dx \\
&\quad + \frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \rho f_2 q \int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})} ds dx \\
&\quad - \frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa\left(v_3+v_{1x}\right) q_x \int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})} ds dx.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
J_3 &= \int_0^L \rho v_2 \tilde{b} q \overline{v_4} dx - \int_0^L \rho v_2 q \int_0^\infty g(s)\overline{v_4} ds dx \\
&\quad + \int_0^L \rho v_2 q \int_0^\infty g(s)\overline{\eta_s} ds dx + R_4 + P(L).
\end{aligned}$$

Où

$$P(L) = \left[k(v_3+v_{1x})q\left(\overline{\tilde{b}v_3+\int_0^\infty g(s)v_7ds}\right)\right]_0^L,$$

et

$$\begin{aligned} R_4 &= -\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L f_2\tilde{b}q\overline{(v_4+f_3)}dx \\ &+\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L f_2 q\int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})}dsdx \\ &+\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa(v_3+v_{1x})q_x\overline{(v_4+f_3}dx \\ &-\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa(v_3+v_{1x})q_x\int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})}dsdx. \\ &+\int_0^L \rho v_2 q\overline{f_3}dx-\int_0^L \rho v_2 q\int_0^\infty g(s)\overline{f_7}dsdx. \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Young, on obtient

$$\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa(v_3+v_{1x})q_x\overline{v_4}dx \leq \frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.19}$$

$$\frac{1}{|\lambda|}\int_0^L \kappa(v_3+v_{1x})q_x\int_0^\infty g(s)\overline{(f_7+v_4-v_{7s})}dsdx \leq \frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2. \tag{4.20}$$

En combinant (4.19) et (4.20), on trouve

$$|R_4| \leq \frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2.$$

L'addition de J_1, J_2 *et* J_3*, donne*

$$\begin{aligned}
& -\left[\frac{I_\rho}{2} q\left|v_4\right|^2+\frac{q}{2}\left|\tilde{b} v_{3x}-\int_0^{\infty} g(s) v_{7x} ds\right|^2\right]_0^L \\
& +\frac{I_\rho}{2} \mathcal{R}e \int_0^L q_x\left|v_4\right|^2 dx+\frac{1}{2} \int_0^L q_x\left|\tilde{b} v_{3x}-\int_0^{\infty} g(s) v_{7x} ds\right|^2 dx \\
& -\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho v_4 q \overline{f_{3x}} dx+\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho v_4 q \int_0^{\infty} g^{\prime}(s) \overline{v_{7x}} ds dx \\
& +\mathcal{R}e \int_0^L\left(\int_0^{\infty} g(s) ds\right) I_\rho v_4 q \overline{v_{4x}} dx \\
& +\mathcal{R}e \int_0^L \rho v_2 \tilde{b} q \overline{v_4} dx-\mathcal{R}e \int_0^L\left(\int_0^{\infty} g(s) ds\right) \rho v_2 q \overline{v_4} dx \\
& +\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho q \int_0^{\infty} g(s) v_4 \overline{f_{7x}} ds dx \\
& -\mathcal{R}e \int_0^L \rho v_2 q \int_0^{\infty} g^{\prime}(s) \overline{v} ds dx \\
= & -\mathcal{R}e\left[R_4+P(L)\right]+\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho v_4 q \overline{f_{3x}} dx \\
& -\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho q \int_0^{\infty} g(s) v_4 \overline{f_{7x}} ds dx . \qquad (4.21)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\mathcal{R}e[R_4+P(L)]+\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho v_4 q \overline{f_{3x}} dx \\
& -\mathcal{R}e \int_0^L I_\rho q \int_0^{\infty} g(s) v_4 \overline{f_{7x}} ds dx \\
\leq\ & \frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Avec q *satisfaisant*

$$q_x \geq \tilde{C}, \qquad (4.22)$$

et $\tilde{C}$ *est une constante positive, l'addition des égalités, (4.7) et (4.21), en déduit* *que*

$$\begin{aligned}
&\frac{I_\rho}{2}\int_0^L q_x\left|v_4\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L q_x\left|\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2 dx\\
&+\frac{\rho}{2}\int_0^L q_x\left|v_2\right|^2 dx+\frac{k}{2}\int_0^L q_x\left|v_3+v_{1x}\right|^2 dx\\
=\ &\frac{I_\rho}{2}q\left|v_4\right|^2(L)+\frac{q}{2}\left|\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2(L)\\
&+\frac{1}{2}\rho q\left|v_2\right|^2(L)+kq\left|v_3+v_{1x}\right|^2(L)+R_5, \qquad (4.23)
\end{aligned}$$

où R_5 *est tel que*

$$|R_5| \leq |R_4| \leq \|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2 .$$

En prenant la partie réelle de (4.22) et en utilisant (4.23), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{I_\rho}{2}\mathcal{R}e\int_0^L q_x\left|v_4\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L q_x\left|\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2 dx\\
&+\frac{\rho}{2}\int_0^L q_x\left|v_2\right|^2 dx+\frac{k}{2}\int_0^L q_x\left|v_3+v_{1x}\right|^2 dx\\
\geq\ &\tilde{C}\left[\frac{I_\rho}{2}\mathcal{R}e\int_0^L \left|v_4\right|^2 dx+\frac{1}{2}\int_0^L \left|\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2 dx\right.\\
&\left.+\frac{\rho}{2}\int_0^L \left|v_2\right|^2 dx+\frac{k}{2}\int_0^L \left|v_3+v_{1x}\right|^2 dx\right]=\tilde{C}\mathcal{L}^2.
\end{aligned}$$

On note par

$$\mathcal{L}^2=\int_0^L\left[\rho v_2^2+I_\rho v_4^2+\left(\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right)^2+\kappa\left[v_3+v_{1x}\right]^2\right]dx,$$

donc

$$\begin{aligned}
&\left[\frac{I_\rho}{2}\mathcal{R}e\int_0^L |v_4|^2\,dx+\frac{1}{2}\int_0^L\left|\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2dx\right.\\
&\left.+\frac{\rho}{2}\int_0^L q_x|v_2|^2\,dx+\frac{k}{2}\int_0^L q_x|v_3+v_{1x}|^2\,dx\right]\\
\leq\;& \tilde{c}_0\left(\frac{q}{2}\left[I_\rho|v_4|^2+\left(\left|\tilde{b}v_{3x}-\int_0^\infty g(s)v_{7x}ds\right|^2\right)_0^L\right]\right.\\
&\left.\frac{q}{2}\left[\rho|v_2|^2+k|v_3+v_{1x}|^2\right]_0^L+c\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_H^2\right)\\
=\;& \tilde{c}_0\left(\Pi_1(B)+\Pi_2(B)+c\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}+\frac{c}{|\lambda|}\|U\|_{\mathcal{H}}^2\right),
\end{aligned}$$

on a aussi

$$\Pi_1(B)+\Pi_2(B)\leq\tilde{c}\left(\|U\|_{\mathcal{H}}^2+\|U\|_{\mathcal{H}}\|F\|_{\mathcal{H}}\right).$$

où

$$\begin{aligned}
\Pi_1(B) &= -\rho q|v_2(B)|^2-q\kappa|v_{1x}(B)+v_3(B)|^2.\\
\Pi_2(B) &= -I_\rho q|\varphi_t|^2(B)-q\left|\tilde{b}\varphi_x(B)-\int_0^\infty g(s)\eta_x(B)ds\right|^2.\quad B=0,L.
\end{aligned}$$

En prenant λ assez grand, notre conclusion s'ensuit.

Théorème 4.0.14 *: La solution du système de Timoshenko décroit de manière polynomiale comme*

$$\|U(t)\|\leq\frac{1}{\sqrt{t}}\|U_0\|_{D(\mathcal{A})}.$$

Preuve 4.0.3 *Premièrement on prouve que $i\mathbb{R}\subset\varrho(\mathcal{A})$. En effet, à partir de : $\mathcal{A}$ est un opérateur fermé et l'injection $\mathcal{D}(\mathcal{A})\hookrightarrow\mathcal{H}$ est compacte, on déduit que le spectre $\sigma(\mathcal{A})$ est discret. Alors on prouve qu'il n'existe pas de valeur propre imaginaire. Par contradiction, on suppose qu'il existe une valeur propre imaginaire* *alors* $i\lambda \in \sigma(\mathcal{A})$. *Donc il existe* $U \neq 0$ *qui satisfait*

$$\mathcal{A}U{=}i\lambda U. \tag{4.24}$$

En prenant le produit de(4.24) avec U *et en utilisant (3.8), on trouve*

$$\mathcal{R}e(i\lambda \left\|U(t)\right\|_{\mathcal{H}}^2) = \mathcal{R}e(\mathcal{A}U, U)_{\mathcal{H}} = 0.$$

il s'ensuit que w, φ, *satisfait*

$$\begin{cases} -\kappa[\varphi_x + w_{xx}] + \rho\lambda^2 w = 0 \quad (A) \\ -EI\left(\tilde{b}\varphi_{xx} + \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,s)ds\right) + \kappa[\varphi + w_x] + I_\rho\lambda^2\varphi = 0 \quad (B) \\ w(L) = \varphi(L) = w_x(L) = \varphi_x(L) = 0. \end{cases}$$

On peut écrire les trois premières équations dans (4.0.3) comme suit

$$\begin{cases} X' = MX, \quad \textit{dans } (0,L) \\ X(L) = 0. \end{cases}$$

avec $X = (w, w_x, \varphi, \varphi_x)^T$ *et*

$$M = \begin{pmatrix} 0 & I_d & 0 & 0 \\ -\frac{\rho}{\kappa}\lambda^2 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & 0 & I_d & 0 \\ 0 & -\frac{\kappa}{EI\tilde{b}} & 0 & -\frac{\kappa + I_\rho\lambda^2}{EI\tilde{b}} \end{pmatrix},$$

En utilisant la théorie des équations différentielles ordinaires, on déduit que le système (4.0.3) admet une unique solution triviale $X = 0$ *dans* $(0, L)$. *Cela implique que* $w = c$, $\varphi = 0$, *dans* $(0, L)$. *Parce que* $w(0) = 0$, *nous concluons que* $w = 0$ *dans* $(0, L)$. *Donc* $U = 0$, *ce qui est une contradiction. Alors,* $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Finalement, en utilisant (3.8) et le ***lemme 4.0.1*** *on déduit que pour λ grand*

$$\begin{aligned}
\|U\|^2 &\leq c(\rho q\,|v_2(L)|^2 + q\kappa\,|v_{1x}(L) + v_3(L)|^2) \\
&\quad +c\left(I_\rho q\,|v_4(L)|^2 + \frac{1}{2}q(\tilde{b}\,|v_{3x}(L)| - \int_0^\infty g(s)\,|v_{7x}(B)|\,ds)^2 + c\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2\right) \\
&\leq c\,|\lambda|^2\,|v_5|^2 + c\,|\lambda|^2\,|v_6|^2 + c\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2 \\
&\leq c\,|\lambda|^2\,\|U\|_{\mathcal{H}}\,\|F\|_{\mathcal{H}} + c\,\|F\|_{\mathcal{H}}^2 .
\end{aligned}$$

Pour la constante $C > 0$, on déduit que

$$\frac{1}{|\lambda|^2}\,\|U\| \leq C.$$

Finalement, en appliquant le Théorème 4.0.13 notre résultat est obtenu.

Chapitre 5

La décroissance exponentielle avec des vitesses de propagations égales ($\frac{\kappa}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}$)

Introduction

Notre but, dans ce chapitre, est de montrer la décroissance exponentielle du système de Timoshenko avec terme mémoire et des conditions aux limites dynamiques dans le cas où les vitesses de propagations sont égales $\left(\frac{\rho}{I_\rho} = \frac{\kappa}{EI}\right)$. En utilisant la méthode de multiplicateurs , le système est défini par

$$\begin{cases} \rho w_{tt}(x,t) - \kappa[\varphi(x,t) + w_x(x,t)]_x & = 0, \quad \text{dans } (0,L) \times \mathbb{R}_+ \\ I_\rho \varphi_{tt}(x,t) - EI\varphi_{xx}(x,t) + EI\int_0^\infty g(s)\varphi_{xx}(x,t-s)ds & \\ +\kappa[\varphi + w_x](x,t) & = 0, \quad \text{dans}(0,L) \times \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{5.1}$$

avec les conditions initiales suivantes

$$w(x,0) = w_0(x), \quad w_t(x,0) = w_1(x), \quad \varphi(x,0) = \varphi_0(x), \quad \varphi_t(x,0) = \varphi_1(x).$$

et les conditions aux limites

$$\begin{cases} w(0) = \varphi(0) & = 0, \quad \text{dans } (0, L), \\ Mw_{tt}(L,t) - \kappa[\varphi + w_x](L,t) & = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \\ J\varphi_{tt}(L,t) - EI\varphi_x(L,t) + EI \int_0^\infty g(s)\varphi_x(L,t-s)ds & = 0, \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \end{cases} \tag{5.2}$$

Où ρ, I_ρ, M, J, EI, κ sont des constantes positives et $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ une fonction données.

Pour démontrer la décroissance exponentielle on introduit la nouvelle variable (voir [19])

$$\eta(x,t,s) = \varphi(x,t) - \varphi(x,t-s),$$

pour $\eta(x,t,s) \in (0,L) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$. ($\eta$ is the relation history of φ), cette fonction satisfait les conditions suivantes

$$\eta(0,t,s) = 0, \text{ dans } \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$$

et

$$\eta(x,t,0) = 0, \text{ dans } (0,L) \times \mathbb{R}_+,$$

et l'equation

$$\eta_t + \eta_s - \varphi_t = 0 \text{ dans } (0,L) \times \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+.$$

Donc le système (5.1)-(5.2) devient comme suit

$$\begin{aligned} \rho w_{tt}(x,t) - \kappa[\varphi(x,t) + w_x(x,t)]_x &= 0, && (5.3) \\ I_\rho \varphi_{tt}(x,t) - \tilde{b}\varphi_{xx}(x,t) - \int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,t,s)ds + \kappa[\varphi + w_x](x,t) &= 0, && (5.4) \\ Mw_{tt}(L,t) - \kappa[\varphi + w_x](L,t) &= 0, && (5.5) \\ J\varphi_{tt}(L,t) - \tilde{b}\varphi_x(L,t) - \int_0^\infty g(s)\eta_x(L,t,s)ds &= 0, && (5.6) \end{aligned}$$

Soit

$$\eta_0(x,s) = \eta(x,0,s) = \varphi_0(x,0) - \varphi_0(x,s). \text{ pour}(x,s) \in [0,L] \times \mathbb{R}_+.$$

Premièrement, on définit l'énergie par :

$$\begin{aligned} E(t) &= \frac{1}{2}\int_0^L [\rho w_t^2 + I_\rho \varphi_t^2]dx + w_t^2(L,t) + \varphi_t^2(L,t). \\ &+\frac{EI}{2}\left(1 - \int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L \varphi_x^2 + \frac{\kappa}{2}\int_0^L [\varphi + w_x]^2 dx. \end{aligned} \tag{5.7}$$

La dérivée par rapport au temps de $E(t)$ est donnée par :

$$\frac{d}{dt}E(t) = -\frac{1}{2}\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2 ds\right)dx.$$

On considère la fonction

$$K(t) = I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds\right)dx - J\varphi_t(L,t)\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds.$$

Lemme 5.0.2 *Pour tout $\delta_1 > 0$ il existe une constante $C_{\delta_1} > 0$, telle que*

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}K(t) &\le -\frac{I_\rho}{2}\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L \varphi_t^2 dx \\ &\quad -\delta_1\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\varphi_t^2(L,t) + \delta_1\int_0^L w_x^2 dx \\ &\quad +\delta_1\int_0^L \varphi_x^2 dx + C_{\delta_1}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)dsdx. \end{aligned}$$

Preuve 5.0.4 *En multipliant l'équation (5.4) par* $\left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds\right)dx$*, on obtient*

$$
\begin{aligned}
& I_\rho \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds \right) dx \\
= \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta_t(x,t,s)ds \right) dx \\
& + EI\tilde{b} \left[\varphi_x \int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds \right]_0^L \\
& + EI \left[\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,s)ds \right) \left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds \right) \right]_0^L \\
& - EI\tilde{b} \int_0^L \varphi_x \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
& - EI \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,s)ds \right)^2 dx \\
& - \kappa \int_0^L [\varphi + w_x] \left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds \right) dx. \qquad (5.8)
\end{aligned}
$$

En utilisant les conditions aux limites (5.5) et (5.6), on trouve

$$
\begin{aligned}
& EI\tilde{b} \; \left[\varphi_x \int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds \right]_0^L \\
& + EI \left[\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,s)ds \right) \left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds \right) \right]_0^L \\
= \; & J \frac{d}{dt}\varphi_t(L,t) \int_0^\infty g(s)\eta(L,t,s)ds - J\varphi_t(L,t) \int_0^\infty g(s)\eta_t(L,t,s)ds.
\end{aligned}
$$

En substituant l'équation ci-dessus dans (5.8), on trouve

$$\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}\left[I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds\right)dx - J\varphi_t(L,t)\int_0^\infty g(s)\eta(L,t,s)ds\right]\\
= \;& I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta_t(x,t,s)ds\right)dx\\
& -J\varphi_t(L,t)\int_0^\infty g(s)\eta_t(L,t,s)ds\\
& -EI\tilde{b}\ \int_0^L \varphi_x \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx\\
& -EI\int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,s)ds\right)^2 dx\\
& -\kappa\int_0^L [\varphi + w_x]\left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds\right)dx. \qquad (5.9)
\end{aligned}$$

On a

$$\int_0^L \left(\int_0^t g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)^2 dx \le b_0 \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)ds\right)dx,$$

L'estimation du premier terme dans le membre de droite de (5.9), nous donne

$$\begin{aligned}
I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta_t(x,t,s)ds\right)dx &= -I_\rho\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L \varphi_t^2 dx\\
&\quad +I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g(s)\eta_s(x,t,s)ds\right)dx\\
&\le -I_\rho\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L \varphi_t^2 dx\\
&\quad -I_\rho \int_0^L \varphi_t \left(\int_0^\infty g'(s)\eta_s^2 ds\right)dx,
\end{aligned}$$

L'estimation du deuxième terme dans le membre de droite de (5.9), nous donne

$$\begin{aligned}
-J\varphi_t(L,t)\int_0^\infty g(s)\eta_t(L,t,s)ds &= J\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\varphi_t^2(L,t) \\
&\quad -J\varphi_t\left(\int_0^\infty g(s)\eta_s(L,t,s)ds\right)dx \\
&\leq J\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\varphi_t^2(L,t) \\
&\quad -J\varphi_t\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_s^2(L,t,s)ds\right),
\end{aligned}$$

D'aprés ces dernières estimations, l'équation (5.9) devient comme suit

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}K(t) &\leq -I_\rho\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L \varphi_t^2 dx + I_\rho\int_0^L \varphi_t\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_s^2(x,t,s)ds\right)dx \\
&\quad +J\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\varphi_t^2(L,t) - J\varphi_t\left(\int_0^\infty g'(s)\eta_s^2(L,t,s)ds\right) \\
&\quad -EI\tilde{b}\int_0^L \varphi_x\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx \\
&\quad -EIb_0\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)ds\right)dx \\
&\quad -\kappa\int_0^L[\varphi+w_x]\left(\int_0^\infty g(s)\eta(x,t,s)ds\right)dx.
\end{aligned}$$

En utilisant inégalité de Poincaré, on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}K(t) &\leq -\frac{I_\rho}{2}\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L \varphi_t^2 dx \\
&\quad -\delta_1\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\varphi_t^2(L,t) + \delta_1\int_0^L w_x^2 dx \\
&\quad +\delta_1\int_0^L \varphi_x^2 dx + C_{\delta_1}\int_0^L\int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)dsdx.
\end{aligned}$$

Maintenant, nous introduisons le multiplicateur ψ donné par la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \psi_{xx} = -\varphi_x, \\ \psi(0) = 0, \\ J\varphi_{tt}(L,t) + EIg * \psi_x(L,t) = EI\psi_x(L,t), \end{cases} , \tag{5.10}$$

et nous introduisons la fonctionnelle

$$F_1(t) = I_\rho \int_0^L \varphi_t \varphi dx - J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) + \rho \int_0^L \psi w_t dx - M\psi(L,t)w_t(L,t), \tag{5.11}$$

Lemme 5.0.3 *Pour tout $\delta_2 > 0$, il existe une positive $C_{\delta_2} > 0$ positive telle que, pour $t \geq 0$,*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} F_1(t) \qquad (5.12) \\ \leq \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - J\varphi^2(L,t) - \delta_2 w_t^2(L,t) - C_{\delta_2}\psi_t^2(L,t) \\ & +\delta_2 \int_0^L w_t^2 dx + \delta_2 \int_0^L \psi_t^2 dx - \frac{EI}{2}\tilde{b} \int_0^L \varphi_x^2 dx \\ & -C_{\delta_2} \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)ds \right) dx. \end{aligned}$$

Preuve 5.0.5 *En multipliant l'équation (5.4) par $\varphi(x,t)$.*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} I_\rho \int_0^L \varphi_t \varphi dx \qquad (5.13) \\ = \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - EI \int_0^L \tilde{b}\varphi_x^2 dx - EI \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) \varphi_x dx \\ & -\kappa \int_0^L \varphi^2 dx - \kappa \int_0^L w_x \varphi dx + EI \left[\tilde{b}\varphi_x + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) \varphi \right]_0^L . \end{aligned}$$

Maintenant, en multipliant l'équation (5.6) par $\varphi(L,t)$*, on trouve*

$$\begin{aligned} & EI\left[\tilde{b}\varphi_x + \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(L,t)ds\right)\varphi\right]_0^L \\ = \;& J\varphi_{tt}(L,t)\varphi(L,t) \\ = \;& \frac{d}{dt}J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) - J\varphi_t^2(L,t). \end{aligned} \tag{5.14}$$

La substitution de l'équation (5.14) dans l'équation (5.13), nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[I_\rho \int_0^L \varphi_t\varphi dx - J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t)\right] \\ = \;& I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - J\varphi^2(L,t) \\ & -EI\tilde{b}\int_0^L \varphi_x^2 dx - EI\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi_x dx \\ & -\kappa\int_0^L \varphi^2 dx - \kappa\int_0^L w_x\varphi dx. \end{aligned} \tag{5.15}$$

Maintenant, en multipliant l'équation (5.3) par $\psi(x,t)$ *, on obtient*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\rho\int_0^L w_t\psi dx \\ = \;& \kappa\int_0^L \varphi_x\psi dx + \kappa\int_0^L w_{xx}\psi dx + \rho\int_0^L w_t\psi_t dx \\ = \;& -\kappa\int_0^L \psi_{xx}\psi dx - \kappa\int_0^L w_x\psi_x dx + \rho\int_0^L w_t\psi_t dx. \end{aligned} \tag{5.16}$$

En multipliant l'équation (5.5) par $\psi(L,t)$*, on trouve*

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}Mw_t(L,t)\psi(L,t) - Mw_t(L,t)\psi_t(L,t) \\ = \;& -\kappa\varphi(L,t)\psi(L,t) + \kappa w_x(L,t)\psi(L,t), \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$= \kappa\left[\psi_x(L,t) + w_x(L,t)\right]\psi(L,t).$$

L'addition de l'équation (5.16) et l'éqaution (5.17), nous donne

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt}\left[\rho \int_0^L w_t \psi dx - M w_t(L,t)\psi(L,t)\right] \\ = \ & \kappa \int_0^L w_x \psi_x dx - M w_t(L,t)\psi_x(L,t) \\ & -\kappa \int_0^L \psi_x \varphi dx - M w_t(L,t)\psi_t(L,t) + \rho \int_0^L w_t \psi_t dx. \end{aligned} \tag{5.18}$$

A l'aide de l'équation (5.15) et (5.18) la dérivée par rapport au temps de $F_1(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}F_1(t) = \ & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - J\varphi^2(L,t) - M w_t(L,t)\psi_t(L,t) \\ & +\rho \int_0^L w_t \psi_t dx + \kappa \int_0^L \psi_x^2 dx - \kappa \int_0^L \varphi^2 dx \\ & -EI\tilde{b} \int_0^L \varphi_x^2 dx - EI \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi_x dx. \end{aligned} \tag{5.19}$$

On introduit la fonctionnelle $\mathcal{E}(t)$

$$\mathcal{E}(t) = N_1 E(t) + F_1(t) + N_2 K(t).$$

Alors

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\mathcal{E}(t) \leq \ & -\left(\frac{N_1}{2} + C_\delta - N_2 C_{\delta_1}\right) \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2 ds\right) dx \\ & -\left(\frac{EI}{2}\tilde{b} - N_2\delta_1\right) \int_0^L \varphi_x^2 dx \\ & -\left(\frac{N_2 I_\rho}{2} - I_\rho\right)\left(\int_0^\infty g(s)ds\right) \int_0^L \varphi_t^2 dx \\ & -\delta_2 w_t^2(L,t) + N_2\varepsilon \int_0^L w_x^2 dx \\ & +N_2\delta_1\varphi_t^2(L,t) + \delta_2 \int_0^L \psi_t^2 dx + \delta_2 \int_0^L w_t^2 dx. \end{aligned} \tag{5.20}$$

On introduit la fonctionnelle $F_2(t)$ défini par

$$\begin{aligned} & F_2(t) \\ = \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t(\varphi + w_x)dx - J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) \\ & + \frac{EI\rho}{K} \int_0^L w_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx. \end{aligned} \tag{5.21}$$

Pour majorer le terme $-\int_0^L (\varphi + w_x)^2 dx$

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_0^L I_\rho \varphi_t (\varphi + w_x) dx - J\frac{d}{dt}\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) \\ & + \frac{d}{dt} \int_0^L \left[\frac{EI\rho}{\kappa} w_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) \right] dx \\ = \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - J\varphi_t^2(L,t) + EI \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) w_x \Big|_0^L \\ & - \frac{EI\rho}{\kappa} \int_0^L w_t \int_0^\infty g'(s)\eta_x ds dx - \kappa \int_0^L [\varphi + w_x]^2 dx \\ & + I_\rho \varphi_t(L,t) w_t(L,t). \end{aligned} \tag{5.22}$$

Preuve 5.0.6 *En multipliant l'équation (5.4) par* $(\varphi + w_x)$*, et en utilisant l'intégration par parties, on obtient*

$$\begin{aligned} & I_\rho \frac{d}{dt} I_\rho \int_0^L \varphi_t (\varphi + w_x) dx \\ = \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx + I_\rho \int_0^L \varphi_t w_{xt} dx \\ & + EI \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) (\varphi + w_x) \Big|_0^L \\ & - EI \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) (\varphi + w_x)_x dx \\ & - \kappa \int_0^L (\varphi + w_x)^2 dx. \end{aligned} \tag{5.23}$$

Maintenant, en utilisant l'équation (5.3), on trouve

$$\begin{aligned}
& -EI \int_0^L \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) (\varphi + w_x)_x \, dx \\
= & -\frac{EI\rho}{\kappa} \int_0^L \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) w_{tt} dx \\
= & -\frac{EI\rho}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L w_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
& + \frac{EI\rho}{\kappa} \left(w_t \frac{d}{dt} \int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
= & -\frac{EI\rho}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L w_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
& + \frac{EI\rho}{\kappa} \int_0^L \tilde{b} w_t \varphi_{tx} + \frac{EI\rho}{\kappa} \int_0^L w_t \int_0^\infty g(s)\eta_{tx}(x,t,s)dsdx. \qquad (5.24)
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions aux limites (5.6), on obtient

$$EI \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) \varphi \Big|_0^L = J\frac{d}{dt}\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) - J\varphi_t^2(L,t) \qquad (5.25)$$

La substitution de (5.24) et (5.25)dans (5.23), nous donne

$$\begin{aligned}
& I_\rho \frac{d}{dt} \int_0^L \varphi_t (\varphi + w_x) \, dx - J\frac{d}{dt}\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) \qquad (5.26) \\
& + \frac{EI\rho}{\kappa} \frac{d}{dt} \int_0^L w_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
= \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - J\varphi_t^2(L,t) - \kappa \int_0^L [\varphi + w_x]^2 dx \\
& + EI \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) w_x \Big|_0^L \\
& + \frac{EI\rho}{\kappa} \int_0^L w_t \int_0^\infty g(s)\eta_{tx}(x,t,s)dsdx \\
& + I_\rho \int_0^L \varphi_t w_{xt} dx + \frac{EI\rho}{\kappa}\tilde{b} \int_0^L w_t \varphi_{tx}.
\end{aligned}$$

D'autre part, on a

$$\eta_{xt}(x,t,s) = \varphi_{xt}(x,t) - \eta_{xs}(x,t,s),$$

$$\begin{aligned}\int_0^L w_t \int_0^\infty g(s)\eta_{tx}dsdx &= \int_0^L w_t \int_0^\infty g(s)\left[\varphi_{xt} - \eta_{xs}\right]dsdx \\ &= \left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L w_t\varphi_{xt}dx - \int_0^L w_t \int_0^\infty g(s)\eta_{xs}dsdx \\ &= \left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L w_t\varphi_{xt}dx - \int_0^L w_t \int_0^\infty g'(s)\eta_{x}dsdx.\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}&\frac{EI\rho}{\kappa}\int_0^L w_t \int_0^\infty g(s)\eta_{tx}(x,t,s)dsdx \\ &+\left(\frac{EI\rho}{\kappa}\tilde{b} - I_\rho\right)\int_0^L \varphi_{xt}w_tdx + I_\rho\varphi_t(L,t)w_t(L,t) \\ =\ &\frac{EI\rho}{\kappa}\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L w_t\varphi_{xt}dx + I_\rho\varphi_t(L,t)w_t(L,t) \\ &-\frac{EI\rho}{\kappa}\int_0^L w_t\int_0^\infty g'(s)\eta_xdsdx + \frac{EI\rho}{\kappa}\left(1 - \int_0^\infty g(s)ds - 1\right)\int_0^L \varphi_{xt}w_tdx \\ =\ &-\frac{EI\rho}{\kappa}\int_0^L w_t\int_0^\infty g'(s)\eta_xdsdx + I_\rho\varphi_t(L,t)w_t(L,t).\end{aligned} \tag{5.28}$$

En Substitiant l'équation (5.28) dans (5.26) , on trouve

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}\int_0^L \left[I_\rho\varphi_t(\varphi + w_x) + \frac{EI\rho}{\kappa}w_t\left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\right]dx \\ &-J\frac{d}{dt}\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) \\ =\ &I_\rho\int_0^L \varphi_t^2dx - J\varphi_t^2(L,t) - \frac{EI\rho}{\kappa}\int_0^L w_t\int_0^\infty g'(s)\eta_xdsdx \\ &-\kappa\int_0^L \left[\varphi + w_x\right]^2dx + I_\rho\varphi_t(L,t)w_t(L,t) \\ &+EI\left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)w_x\Big|_0^L.\end{aligned}$$

d'où le résultat cherché.

Lemme 5.0.4 *La dérivée par rapport au temps de $F_2(t)$ peut être récrite comme suit*

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}F_2(t) &\leq I_\rho\int_0^L \varphi_t^2dx - c_\epsilon\varphi_t^2(L,t)-\kappa\int_0^L[\varphi+w_x]^2dx+\varepsilon_3\int_0^L w_t^2dx+\epsilon w_t^2(L,t)\\ &+C_{\varepsilon_3}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2ds\right)dx+EI\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)w_x\Big|_0^L.\end{aligned}$$

Lemme 5.0.5 *Soit $q\in C^1([0,L])$ vérifie $q(0)=-q(L)=2\gamma>0$. Alors il existe trois constantes $C_1>0$ $\tilde{\delta}>0$ et $C_{\tilde{\delta}}>0$ telles que pour tout $t\geq 0$, on a*

$$\begin{aligned}&I_\rho\frac{d}{dt}\int_0^L q\varphi_t\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx \qquad (5.29)\\ \leq\ & -\gamma EI\left|\tilde{b}\varphi_x(L,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x(L,t,s)ds\right|^2\\ &-\gamma EI\left|\tilde{b}\varphi_x(0,t)+\int_0^\infty g(s)\eta_x(0,t,s)ds\right|^2+\tilde{\delta}\int_0^L w_x^2dx\\ &+\tilde{\delta}\left[\int_0^L\left(\varphi_t^2+\varphi_x^2\right)dx+\varphi_t^2(L,t)\right]+C_{\tilde{\delta}}\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2ds\right)dx.\end{aligned}$$

ii)

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\int_0^L I_\rho\varphi_t q\varphi_x dx &\leq -\gamma\kappa\left[w_x^2(L,t)+w_x^2(0,t)\right] \qquad (5.30)\\ &+C_1\int_0^L\left(w_t^2+w_x^2+\varphi_x^2\right)dx-\tilde{C}_1w_t^2(L,t).\end{aligned}$$

Preuve 5.0.7 *En multipliant l'équation (5.4) par $q\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)$, et en integrant, on obtient*

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx=\\ &+I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\frac{d}{dt}\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx\\ &\frac{EI}{2}\int_0^L q(x)\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_{xx}+\int_0^\infty g(s)\eta_{xx}(x,t,s)\right)\left(\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx\\ &-k\int_0^L q(x)\left(\varphi+w_x\right)\left[\int_0^L\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right]dx.\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{d}{dt}I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\left(\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx = \\
&I_\rho\int_0^L \tilde{b}q(x)\varphi_t\varphi_{tx}+I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}(x,t,s)dsdx \\
&+\frac{EI}{2}\int_0^L q(x)\frac{d}{dx}\left(\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)^2dx \\
&-\frac{k}{2}\int_0^L \tilde{b}q(x)\frac{d}{dx}\varphi^2dx-k\int_0^L q(x)\varphi\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)dx \\
&-k\left[\int_0^L w_x\left(\tilde{b}\varphi_x+\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\right]dx.
\end{aligned}
\tag{5.31}
$$

On a

$$
\begin{aligned}
&I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\int_0^\infty g(s)\eta_{xt}(x,t,s)dsdx \\
=\;& I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\int_0^\infty g(s)\left[\varphi_{xt}-\eta_{xs}\right]dsdx \\
=\;& I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\int_0^\infty g(s)\varphi_{xt}dsdx-I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\int_0^\infty g(s)\eta_{xs}dsdx \\
=\;& I_\rho\left(\int_0^\infty g(s)ds\right)\int_0^L q(x)\varphi_t\varphi_{xt}dx-I_\rho\int_0^L q(x)\varphi_t\int_0^\infty g'(s)\eta_x dsdx.
\end{aligned}
\tag{5.32}
$$

En substitiant (27) dans (5.31), on trouve

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} I_\rho \int_0^L q(x)\varphi_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
= \quad & \frac{I_\rho}{2} \int_0^L q(x) \frac{d}{dx} \varphi_t^2 dx \\
& - I_\rho \int_0^L q(x)\varphi_t \int_0^\infty g'(s)\eta_x ds dx. \\
& + \frac{EI}{2} \left[q(x) \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right)^2 \right]_0^L \\
& - \frac{EI}{2} \int_0^L q'(x) \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right)^2 dx \\
& - \frac{k}{2} \tilde{b} \left[q(x)\varphi^2 \right]_0^L + \frac{k}{2} \int_0^L \tilde{b} q'(x)\varphi^2 dx \\
& - k \int_0^L q(x)\varphi \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
& - k \left[\int_0^L w_x \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) \right] dx. \qquad (5.33)
\end{aligned}
$$

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt} I_\rho \int_0^L q(x)\varphi_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
= \; & \frac{I_\rho}{2} \left[q(x)\varphi_t^2 \right]_0^L - \frac{I_\rho}{2} \int_0^L q'(x)\varphi_t^2 dx \\
& - I_\rho \int_0^L q(x)\varphi_t \int_0^\infty g'(s)\eta_x ds dx \\
& + \frac{EI}{2} \left[q(x) \left(\int_0^L \tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right)^2 \right]_0^L \\
& - \frac{EI}{2} \int_0^L q'(x) \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right)^2 dx \\
& - \frac{k}{2}\tilde{b} \left[q(x)\varphi^2 \right]_0^L + \frac{k}{2} \int_0^L \tilde{b} q'(x)\varphi^2 dx \\
& - k \int_0^L q(x)\varphi \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx \\
& - k \left[\int_0^L w_x \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) \right] dx,
\end{aligned}$$

pour prouver (ii) on utilise l'équation (5.3), comme suit

$$\begin{aligned}
& \rho \frac{d}{dt} \int_0^L q(x) w_t w_x dx \\
= \; & \kappa \int_0^L q(x) w_x \varphi_x dx + \kappa \left[q(x) w_x^2 \right]_0^L - \kappa \int_0^L q'(x) w_x^2 dx \\
& + \frac{\rho}{2} q \left[|w_t|^2 \right]_0^L - \frac{\rho}{2} \int_0^L q' |w_t|^2 dx.
\end{aligned}$$

Pour $\rho > 0$ et $N_3 > 1$, soit

$$L(t) = F_2(t) + N_3 \int_0^L I_\rho q(x)\varphi_t \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds \right) dx + \eta \int_0^L I_\rho q(x) w_t w_x dx. \tag{5.34}$$

On observe que

$$-\frac{\kappa}{2} \int_0^L |\varphi + w_x|^2 dx \leq -\frac{\kappa}{4} \int_0^L |w_x|^2 dx + C \int_0^L |\varphi_x|^2 dx,$$

Alors, la dérivée par rapport au temps de $L(t)$ est donnée par

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &\leq -\frac{\kappa}{2}\int_0^L [\varphi+w_x]^2\,dx \\ &+(N_3C_{\tilde{\epsilon}}+C_{\varepsilon_3})\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2ds\right)dx \\ &+N_3\tilde{\epsilon}\int_0^L\varphi_t^2dx+(N_3\tilde{\epsilon}+\eta)\int_0^L\varphi_x^2dx \\ &-(c_\epsilon-\tilde{\epsilon}N)\,\varphi_t^2(L,t)-\left(\epsilon+\eta\tilde{C}_1\right)w_t^2(L,t). \\ &+(\eta C_1+\varepsilon_3)\int_0^L w_t^2dx+(N_3+\eta C_1)\int_0^L w_x^2dx,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}L(t) &\leq -\kappa\int_0^L[\varphi+w_x]^2\,dx \\ &+C_\tau\int_0^L\left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2ds\right)dx \\ &+C_\tau\left[\int_0^L\left(\varphi_t^2+\varphi_x^2\right)dx-\varphi_t^2(L,t)\right] \\ &C_2\tau\left[\int_0^L w_t^2dx+w_x^2-w_t^2(L,t)\right].\end{aligned} \tag{5.35}$$

Finalement, nous introduisons la fonctionnelle

$$\begin{aligned}F_4(t) &= \int_0^L\rho w_t w dx-Jw_t(L,t)w(L,t) \\ &+\int_0^L\rho\varphi_t\varphi dx-M\varphi_t(L,t)\varphi(L,t).\end{aligned}$$

Pour trouver les termes négatives $-\int_0^L w_t^2dx$ et $-\int_0^L\varphi_t^2dx$.

Lemme 5.0.6 *La dérivée par rapport au temps de $F_4(t)$ est estimée par*

$$\begin{aligned}-\frac{d}{dt}F_4(t) &\leq -\rho\int_0^L w_t^2dx+Mw_t^2(L,t)-I_\rho\int_0^L\varphi_t^2dx+J\varphi_t^2(L,t) \\ &+\kappa\int_0^L(\varphi+w_x)^2dx+C\int_0^L\left(\tilde{b}\varphi_x^2+\int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)ds\right)dx.\end{aligned} \tag{5.36}$$

Preuve 5.0.8 *En multipliant l'équation (5.4) par φ, on trouve*

$$\begin{aligned} I_\rho \frac{d}{dt}\int_0^L \varphi_t\varphi dx &= I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - \kappa\int_0^L (\varphi + w_x)\varphi dx \\ &-EI\int_0^L \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi_x dx \\ &+EI\left[\left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi\right]_0^L, \end{aligned} \tag{5.37}$$

et en multipliant l'équation (5.4) par $\varphi(L,t)$ on trouve

$$\frac{d}{dt}J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) - J\varphi_t^2(L,t) = EI\left|\left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi\right|_0^L. \tag{5.38}$$

l'addition de (5.37) et (5.38) nous donne

$$\begin{aligned} I_\rho \frac{d}{dt}\int_0^L \varphi_t\varphi dx - \frac{d}{dt}J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t) &= I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - \kappa\int_0^L (\varphi + w_x)\varphi dx \\ &-EI\int_0^L \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi_x dx \\ &-J\varphi_t^2(L,t). \end{aligned}$$

En multipliant l'équation (5.3) par $w(x,t)$, on trouve

$$\begin{aligned} \rho\frac{d}{dt}\int_0^L w_t w dx &= \rho\int_0^L w_t^2 dx \\ &+\kappa\left[\varphi + w_x\right] w\big|_0^L \\ &-\kappa\int_0^L \left[\varphi + w_x\right] w_x dx. \end{aligned}$$

En utilisant l'équation (5.4), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\left[\rho\int_0^L w_t w dx - Mw_t(L,t)w(L,t)\right] &= \rho\int_0^L w_t^2 dx - \kappa\int_0^L \varphi w_x dx \\ &-\kappa\int_0^L w_x^2 dx. \end{aligned}$$

Alors

$$
\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\left[I_\rho \int_0^L \varphi_t \varphi dx - J\varphi_t(L,t)\varphi(L,t)\right] + \frac{d}{dt}\left[\rho \int_0^L w_t w dx - M w_t(L,t) w(L,t)\right] \\
= \; & I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx - J\varphi_t^2(L,t) - \kappa \int_0^L (\varphi + w_x)^2 dx \\
& -EI \int_0^L \left(\tilde{b}\varphi_x + \int_0^\infty g(s)\eta_x(x,t,s)ds\right)\varphi_x dx \\
& \rho \int_0^L w_t^2 dx - M w_t^2(L,t).
\end{aligned}
$$

On conclut que $-\frac{d}{dt}F_4(t)$ *est estimé comme suit*

$$
\begin{aligned}
-\frac{d}{dt}F_4(t) \; \leq \; & -\rho \int_0^L w_t^2 dx + M w_t^2(L,t) - I_\rho \int_0^L \varphi_t^2 dx + J\varphi_t^2(L,t) \\
& +\kappa \int_0^L (\varphi + w_x)^2 dx + C \int_0^L \left(\tilde{b}\varphi_x^2 + \int_0^\infty g(s)\eta_x^2(x,t,s)ds\right) dx.
\end{aligned}
$$

On choisit τ assez petit, et obtient

$$
\begin{aligned}
\left\{L(t) - \frac{2C_2\tau}{\rho}F_4(t)\right\} \; \leq \; & -\frac{\kappa}{4}\int_0^L (\varphi + w_x)^2 dx \\
& +C_\tau \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2 ds\right) dx \\
& +C_\tau \left[\int_0^L \left(\varphi_t^2 + \varphi_x^2\right) dx - \varphi_t^2(L,t)\right] \\
& -C_2\tau \left[\int_0^L w_t^2 dx + M w_t^2(L,t)\right].
\end{aligned} \tag{5.39}
$$

Théorème 5.0.15 *Supposons que les données initiales vérifient*

$$w_0, \varphi_0 \in H^1(0,L), w_1, \varphi_1 \in L^2(0,L),$$

et que les vitesses de propagation du système (5.1)-(5.2) vérifient

$$\frac{k}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}.$$

De plus, supposons que g est de type exponentielle et les hyothèses (1.15) sont verifiées. Alors l'energie $E(t)$ décroit expoentiellement quand le temps tend vers l'infini, c'est-à-dire qu'il existe des constantes positives C et U, indépendantes des données initiales, telles que pour $t \geq 0$:

$$E(t) \leq CE(0)e^{-\alpha t}. \tag{5.40}$$

Preuve 5.0.9 *Soit la fonctionnelle de Lyapunov défini par*

$$\mathcal{L}(t) = \mathcal{E}(t) + \mu \left(L(t) - \frac{2C_2\tau}{\rho} F_4(t) \right).$$

Avec (5.20) et (29), on trouve

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \;\; \leq \;\; & -\left(\frac{N_1}{2} - \mu C_\tau + (C_\delta - N_2 C_{\delta_1}) \right) \int_0^L \left(\int_0^\infty g(s)\eta_x^2 ds \right) dx \\
& -\frac{EI}{2}\tilde{b} \left(1 - 2\frac{N_2 \varepsilon}{EI\tilde{b}} - 2\frac{\mu C_\tau}{EI\tilde{b}} \right) \int_0^L \varphi_x^2 dx \\
& -\left(\frac{N_2 I_\rho}{2} - \frac{I_\rho}{b_0} - \frac{\mu C_\tau}{b_0} \right) \left(\int_0^\infty g(s) ds \right) \int_0^L \varphi_t^2 dx \\
& -\mu_\delta \frac{\kappa}{2} \int_0^L \left[\varphi + w_x \right]^2 dx - \left(\mu C_2 \tau M + \delta_2 \right) w_t^2(L,t) \\
& - \left(\mu C_\tau - N_2 \varepsilon \right) \varphi_t^2(L,t) - \left(\mu C_2 \tau - \delta_2 \right) \int_0^L w_t^2 dx.
\end{aligned}$$

On conclut, pour δ_2 suffisamment petit et $\beta_0 > 0$ que

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\beta_0 E(t). \tag{5.41}$$

où pour toute β_0 constante positive, on trouve

$$\frac{d}{dt}\mathcal{L}(t) \leq -\alpha \mathcal{L}(t). \tag{5.42}$$

Pour $\alpha = \beta_1/\beta_2$, notre résultat est obtenu.

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudiél'existence des solutions et la stabilisation de système de Timoshenko dans deux cas dans le cas où les vitesses de propagation sont différentes et dans le cas où les vitesses de propagation sont égales.

La première partie a été consacrée à l'étude de l'existence et l'unicité ainsi que la stabilisation du modèle de Timoshenko avec des conditions aux limites dynamique et avec un terme de mémoire.

- Un résultat d'existence et d'unicité de la solution a été démontré la méthode utilisée est la méthode la théories de semi-groupe .
- Un résultat de stabilité polynomiale a été obtenu dans le cas où les vitesses de propagation du système de Timoshenko sont déffirentes ($\frac{\kappa}{\rho} \neq \frac{1}{I_\rho}$).
- Un résultat de stabilité exponentielle été obtenu dans le cas où les vitesses de propagation de système de Timoshenko sont égales ($\frac{\kappa}{\rho} = \frac{EI}{I_\rho}$).

perspectives

Il serait souhaitable d'étudier

- Le même problème avec des noyaux définis positifes et avec les hypothèses sur g suivantes

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad \forall t \geq 0$$

avec des vitesses de propagation égales et dans le cas où les viteeses propagation sont différentes

-Le problème de Bresse avec des conditions aux limites et un terme de mémoire. Avec les hypothèses sur g suivantes

$$g'(t) \leq -\xi(t)g^p(t), \quad \forall t \geq 0$$

avec des vitesses de propagation égales et dans le cas où les viteses de propagation sont différentes

Bibliographie

[1] **A. Khemmoudj, N. Kechiche** *Polynomial Decay for the Timoshenko System with Dynamical Boundary Conditions*, Bull. Malays. Math. Sci. Soc 2021.

[2] **F. Abdallah, M. Ghader and A. Wehbe** *Stability results of a distributed problem involving bresse system with history and or cattaneo law under fully dirichlet or mixed boundary conditions*, Mathematical Methods in the Applied Sciences, 41(5) :1876–1907, jan 2018.

[3] **F.Alabau-Boussouira**. *A two-level energy method for indirect boundary obsevability and controllability of weakly coupled hyperbolic systems.* SIAM J. control. Optim, 42(7) :871-906, 2003.

[4] **F. Alabau-Boussouira**. *Asymptotic behavior for Timoshenko beams subject to a single nonlinear feedback control.* NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl, 14(5-6) :643–669, 2007.

[5] **M. Alves, J. E. M. Rivera, M. Sepulveda and O. Vera**,*Exponential Stability To Timoshenko system with shear Boundary Dissipation.* 2015

[6] **M. Alves, J. E. M. Rivera, M. Sepulveda, O. Vera and M.Zegarra** : *The asymptotic behavior of the linear transmission problem in viscoelasticity.* Math. Nachr, 287 : 483-497, 2014.

[7] **M.Alves, C.A. Raposo, M.Sepulveda and O.Vera**, *Uniform stabilization for trans-mission problem for Timoshenko system with memory*,J.Math. Anal. Appl., 369 (1),323-345, (2010).

[8] **F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, and C. Dupaix**.*Null-controllability of some reaction -diffusion systems with one control force.* J. Math. Anal. Appl, 320(2) :928-943, 2006.

[9] **F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. M. Rivera, and R.Racke**. *Energy decay for Timoshenko systems of memory type.* J. Differential Equations, 194(1) :82-115, 2003.

[10] **F. Ammar-Khodja, S. Kerbal, and A. Soufyane**.*Stabilization of the nonuniform Timoshenko beam.* J. Math. Anal. Appl., 327(1) :525-538, 2007.

[11] **F. D. Araruna and E. Zuazua**. *Controllability of the Kirchhoff system for beams as a limit of the Mindlin-Timoshenko system.* SIAM J.Control Optim, 47(4) :1909-1938, 2008.

[12] **A. Benaissa and S. Benazzouz**. *Well-posedness and asymptotic behavior of Timoshenko beam system with dynamic boundary dissipative feedback of fractional derivative type. Z. Aangew.* Math. Phys, 68(4) :94, Aug 2017.

[13] **A. Borichev and Y. Tomilov**. *Optimal polynomial decay of functions and operator semigroups. Math. Ann.*, 347(2) :455-478, 2010.

[14] **M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, F. A. F. Nascimento, I.Lasiecka, and J. H. Rodrigues**. *Uniform decay rates for the energy of Timoshenko system with the arbitrary speeds of propagation and localized non-linear damping.* Z. Aangew. Math. Phys, 65(6) :1189-1206, nov 2013.

[15] **O. Christensen**. *An introduction to frames and Rieszbases*. Applied and Numerical Harmonic Analysis. Birkhäuser Boston, Inc.,Boston, MA, 49 , 2003.

[16] **R. F. Curtain and H. Zwart**. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory*, volume 21 of Texts in Applied Mathematics. Springer-Verlag, New York, 49, 1995.

[17] **D. da S. Almeida Junior, M. L. Santos, and J. E. M. Rivera**.*Stability to 1-d thermoelastic timoshenko beam acting on shear force*. Z.Aangew. Math. Phys, 65(6) :1233-1249, dec 2013.

[18] **T. Diagana**. *Almost automorphic type and almost periodic type functions in abstract spaces*. Springer, Cham, 49 ,2013.

[19] **C. M. Dafermos**. *Asymptotic stability in viscoelasticity.*Archive for Rational Mechanics and Analysis, 37 : 297-308,1970.

[20] **L. H. Fatori, R. N. Monteiro, and H. D. Fernandez Sare**. *The Timoshenko system with history and Cattaneo law*. Appl. Math. Comput.,228 :128-140, 2014.

[21] **H. D. Fernandez Sare and R. Racke**. *On the stability of damped Timoshenko systems : Cattaneo versus Fourier law*. Arch, Ration. Mech. Anal.194(1) :221-251, 2009.

[22] **H. D. Fernndez Sare, J. E. M. Rivera**. *Stability of Timoshenko systems with past history*. Journal of Mathematical Analyse and Applications, 339(1) : 482-502, 2008.

[23] **H. D. Fernndez Sare, J. E. M. Rivera**. *Exponential deacy of Timoshenko systems with indefinite memory dissipation.* Adv. Differential Equations, 13 :733-752, 2009.

[24] **I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek**. *Basic classes of linear operators.* Birkhäuser Verlag, Basel, 2003.

[25] **I. C. Gohberg and M. G. Kreyn**. *Introduction to the theory of linear nonselfadjoint operators.* Translated from the Russian by A. Feinstein. Translations of Mathematical Monographs, Vol. 18. American Mathematical Society, Providence, R.I., 49 ,1969.

[26] **A. Guesmia and S. A. Messaoudi**. *General energy decay estimates of Timoshenko systems with frictional versus viscoelastic damping,*Mathematical Methods in the Applied Sciences. 32(16) :2102-2122, nov 2009.

[27] **A. Guesmia**, *On the Stabilization for Timoshenko System with Past History and Frictional Damping Controls, Palestine Journal of Mathematics*, 2(2),187-214,(2013).

[28] **A. Guesmia**,*Some well-posedness and general stability results in Timoshenko systems with infinite memory and distributed time delay*, J. Math. Phys., 55 (8), 1-40,(2014).

[29] **A.Guesmia and S.A.Messaoudi**, *On the stabilization of Timoshenko systems with memory and different speeds of wave propagation, Appl. Math. Compt.*, 219, 9424-9437 (2013).

[30] **A. Guesmia and S. A. Messaoudi**, *A general stability result in a Timoshenko system with infinite memory : A new approach, Math. Meth. Appl.*Sci.,

37(3), 384-392,(2014).

[31] **A. Guesmia and S.A. Messaoudi**, *Some stability results forTimoshenko systems with cooperative frictional and infinte memory dampings in the displacement*, Acta Math.Sci.,36(1),1-33,(2016).

[32] **M. Grasselli, V. Pata and G.Prouse**, *Longtime behavior of a viscoelastic Timoshenko beam, Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 10(1-2),337-348,(2004).

[33] **A. Ghen**, *A note on the boundary stabilization of the wave equation*, S.I.A.M. J. Control. opt, 19, 106-113, 1981.

[34] **A. Chen**, *Energy decay estimates and exact boundary value controlability for the wave equation in a bounded domain*, J. Math, pures,Appl. 58, 249-274, 1979.

[35] **F. Huang**. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical system in hilbert space.* Ann. Differential Equations 1,pages 43–56, 1985. :85

[36] **J. Hao and J. Wei**. *Global existence and stability results for a nonlinear Timoshenko system of thermoelasticity of type III with delay.*Boundary Value Problems, (1), apr 2018.

[37] **V. I. Istruactescu**. *Inner product structures*, volume 25 of Mathematics and its Applications. D. Reidel Publishing Co., Dordrecht, 1987.Theory and applications. 49

[38] **T. Kato**. *Perturbation theory for linear operators.* Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 132. Springer-Verlag New York, Inc., New York, 1966. 49

[39] **J. U. Kim and Y. Renardy**. Boundary control of the Timoshenko beam, SIAM J. Control Optim., 25(6) :1417–1429, 1987.

[40] **Z. Liu and B. Rao**. *Characterization of polynomial decay rate for the solution of linear evolution equation.* Z. Angew. Math. Phys., 56(4) :630–644, 2005.

[41] **Z. Liu and B. Rao**. *A spectral approach to the indirect boundary control of a system of weakly coupled wave equations*. Discrete Contin. Dyn. Syst., 23(1-2) : 399-414, 2009.

[42] **Z. Liu and S. Zheng**. *Semigroups associated with dissipative systems.* volume 398 of Chapman and Hall/CRC Research Notes in Mathematics.Chapman and Hall/CRC, Boca Raton, FL, 1999.

[43] **Z.-H. Luo, B.-Z. Guo, and O. Morgul**. *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications*. Communications and Control Engineering Series. Springer-Verlag London, Ltd., London, 1999. 49

[44] **P. D. Lax, C. S. Moraetz, R. S. Phillips**, *Exponential decay of solutions of the wave equation in exterior of start-shaped obstacle*, Appl.Math, vol 16, 477-489, 1963.

[45] **I. Lasiecka and R. Triggiani**. *Uniform exponential decay in a bounded region with $L^2(0;T;L^2(\sum))$ fedback control in the Dirichlet boundary conditions,* J. Di , Equations, 66 :1340-390, 1987.

[46] **J. Lagnese**. *Decay of solutions of the wave equation in aboundary region with boundary dissipation*, J. Di , Equations, 50 : 163-182,1983.

[47] **S. A. Messaoudi and M. I. Mustafa**. *On the internal and boundary stabilization of Timoshenko beams. NoDEA Nonlinear Differential Equations Appl.*, 15(6) :655–671, 2008.

[48] **S.A. Messaoudi and M.I .Mustafa**, *Astability result in a memory-type Timoshenko system*, Dynam. SystemsAppl., 18(3-4), 457-468,(2009).

[49] **S. A. Messaoudi and B. Said-Houari**. *Uniform decay in a Timoshenko-type system with past history.* J. Math. Anal. Appl., 360(2) :459–475, 2009.

[50] **S. A. Messaoudi, M. I. Mustafa**. *On the stabilisation of the Timoshenko system by weak nonlinear dissipation.* Matheatical Methods in the Applied Sciences., 32 : 454-469,2009.

[51] **S. A. Messaoudi, B. Said-Houari** . *Energy decay in a Timoshenko-type system of thermo-elasticity of type III.* Journal of Mathematical Analysis and Applications ,. 348 :298–307, 2008.

[52] **S. A. Messaoudi, B. Said-Houari** . *Energy decay in a Timoshenko-type system with history in thermo-elasticity of type III.* Advanced in Differential Equations,. 4(3-4) :375–400, 2009.

[53] **S.A. Messaoudi and A. Soufyane**, *Boundary stabilization of solutions of a nonlinear system of Timoshenko type*, Nonlinear Anal.,67(7), 2107-2121,(2007).

[54] **J. E. M. Rivera and R. Racke**. *Mildly dissipative nonlinear Timoshenko systems-global existence and exponential stability.* J. Math. Anal. Appl., 276(1) :248–276, 2002.

[55] **J. E. M. Rivera and R. Racke**. *Timoshenko systems with indefinite damping*. J. Math. Anal. Appl., 341(2) :1068–1083, 2009.

[56] **J. E. M. Rivera and R. Racke**, *Global stability for damped Timoshenko systems*, Discrete Contin. Dyn. Syst., 9(6)(2003),1625-1639.

[57] **J.E.M. Rivera, A.I.Avila** : *Rates of decay to non homogeneous Timoshenko model with tip body. J.Differential Equations*,.3468-3490, 2015.

[58] **C. S. Moraetz**, *Exponential decay of solutions of the wave equation*, Comm. Pure. Appl. Math, vol 19 :539-444, 1966.

[59] **J. H. Park and J. R. Kang**. *Energy decay of solutions for Timoshenko beam with a weak non-linear dissipation*. IMA Journal of Applied Mathematics, 76(2) :340-350, aug 2010.

[60] **A. Pazy**. *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*. volume 44 of Applied Mathematical Sciences. Springer-Verlag, New York, 1983.

[61] **J. Prüss**. *On the spectrum of C_0 semigroups*. Transactions of the American Mathematical society, 284 : 847-857, 1984.

[62] **C. A. Raposo, J. Ferreira, M. L. Santos, and N. N. O. Castro**. *Exponential stability for the Timoshenko system with two weak dampings*. Appl. Math. Lett., 18(5) : 535–541, 2005.

[63] **F. Riewe**. *Nonconservative lagrangian and hamilton mechanics*.Phys. Rev. E., 53 :1890-1899, 1996. :96

[64] **F. Riewe**. *Mechanics with fractional derivatives*. Phys. Rev.E., 55 :3581–3592, 1997. :97

[65] **D. L. Russel**, *Exact boundary value controlability theorems forwave and heat processesein star-complemented regions, in di erential games and control theory*, Raxin. Liu and Sternberg, Eds, Maervel Dekker Inc, New York 1974.

[66] **A. Soufyane and A. Whebe**. *Uniform stabilization for the Timoshenko beam by a locally distributed damping.* Electronic Journal of Differential Equations, 29 : 1-14, 2003.

[67] **A. Soufyane and A. Wehbe**, *Exponential stability for the Timoshenko beam by a locally distributed damping*, Electron. J. Differential Equations, 29(2003), 1-14.

[68] **L. Tebou**. *A localized nonstandard stabilizer for the Timoshenko beam.* Comptes Rendus Mathematique, 353(3) :247–253, mar 2015.

[69] **S. P. Timoshenko**. *On the correction for shear of the differential equation for transverse vibrations of prismatic bars.* Philosophical Magazine, 41 :744-746, 1921.

[70] **A. Wehbe and W. Youssef**. *Stabilization of the uniform Timoshenko beam by one locally distributed feedback.* Appl. Anal.,88(7) :1067–1078, 2009.

[71] **C. Wilcox**, *The initial-boundary value problem for the wave equation in an exterior domain with spherical boundary*, Amer. Math. Soc. Not. Abstract 564-20, Voc 6, 1959.

[72] **Q. X. Yan ,S. Hou , DX .Feng** . *Asymptotic behavior of Timoshenko beam with dissipative boundary feedback.* J.Math. Anal. Appl. 269 : 556–577, 2002.

[73] **C.-G. Zhang and H-X. Hu.**, *Exact controllability of a Timoshenko beam with dynamical boundary.* J. Math. Kyoto Univ., 47(3) :643–655, 2007.

[74] **Z.Ma, L.Zhang, X.Yang**, *Exponential stability for a Timoshenko- type system with past history.* Journal of mathematical Analyse and applications. 380 : 299-312,2011.

[75] **A.Guesmia and S. A. Messaoudi**, *On the control of a viscoelastic damped Timoshenko-type system*, Appl. Math. Compt., 206-2, 589-597,(2008).

[76] **S.A.Messaoudi and M.I.Mustafa**, *A stability result in a memory-type Timoshenko system*, Dynam. Systems Appl., 18(3-4), 457-468,(2009).

[77] **C. J. K. Batty and T. Duyckaerts**, *Non uniform stability for bounded semi-groups on banach spaces.* J. Evol. Equ, 8(4) :765–780, 2008.