N° d'ordre : 03/2023.D/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

جامعة هواري بومدين للعلوم والتكنولوجيا
U S T H B

Faculté de Mathématiques

THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de

DOCTEUR EN SCIENCES

En Mathématiques

Spécialité Algèbre et Théorie des Nombres
par

Nouara MOKHTARI

Sujet

IDENTITES POUR DES POLYNÔMES D'APPELL

Soutenue publiquement le 24 avril 2023 à 13h00 devant le Jury composé de :

Président :

M. Boualem BENSEBA	Professeur	USTHB

Directeur de thèse :

M. Omar KIHEL	Professeur	Brock University Ontario, Canada

Codirecteur de thèse :

M. Farid BENCHERIF	Professeur	USTHB

Examinateurs :

M. Ahmed AÏT MOKHTAR	Professeur	ENS Kouba
M. Djilali BEHLOUL	Professeur	USTHB
M. Abdallah DERBAL	Professeur	ENS Kouba

Invitée

Mme Schehrazade ZERROUKHAT	Maître de Conférences/B	USTHB

Thèse

Présentée pour l'obtention du grade de

Docteur en Sciences,

soutenue publiquement le 24 avril 2023

par

Nouara MOKHTARI

Sujet

Identités pour des polynômes d'Appell

.

7 mai 2023

Table des matières

Remerciements

J'exprime toute ma gratitude et une reconnaissance particulière envers Monsieur le Professeur Farid Bencherif de l'USTHB qui a eu confiance en moi, m'a encouragé, m'a énormément soutenu et aidé. Sans lui ce travail n'aurait pas pu aboutir.

Je ne saurais oublier Monsieur le Professeur Omar Kihel de Brock University, Ontario, Canada. Je le remercie sincèrement pour avoir accepté d'être mon Directeur de thèse, pour toute son aide et ses encouragements. Malheureusement, les conditions particulières de ces dernières années l'avaient empêché de venir en Algérie et nous avaient aussi empêché de travailler ensemble comme souhaité.

Je tiens à remercier chaleureusement Monsieur le Professeur Boualem Benseba de l'USTHB qui a gentiment accepté de présider le jury de cette thèse.

J'adresse aussi tous mes remerciements à Monsieur le Professeur Ahmed Ait Mokhtar de l'ENS de Kouba, à Monsieur le professeur Abdallah Derbal de l'ENS de Kouba ainsi qu'à Monsieur le Professeur Djilali Behloul de l'USTHB pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'être examinateurs. Leurs remarques et leurs suggestions lors de la soutenance ont grandement contribué à améliorer la rédaction et la présentation de cette thèse. Je leur en suis très reconnaissante.

Je remercie tout particulièrement Madame Schehrazade Zerroukhat, Maître de Conférences à l'USTHB pour avoir accepté d'être invite dans mon Jury. Cette thèse est aussi le fruit d'une longue collaboration avec elle.

Je remercie mes "exceptionnels" amis et collègues :

- Monsieur Rachid Boumahdi, ami de longue date, Maître de Conférences à l'École Supérieure de Mathématiques, qui durant toute une année a consacré beaucoup de son temps pour me conseiller et me guider. Il m'a aidé, notamment, à apporter des rectificatifs nécessaires pour qu'un article puisse être publié dans une revue. Je lui suis redevable de ce soutien considérable m'a permis de mener à bien cette tâche.

- Monsieur Tarek Garici, Maître de Conférences à l'USTHB pour son aide technique, son soutien et ses précieux conseils.

- Madame Nawel Kahoul et Madame Souad Slimani, Maîtres de Conférences à l'USTHB

pour toute l'aide morale qu'elles m'ont apportée.

- Monsieur Lalaa Khaldi, Maître de Conférences à l'Université de Bouira, extraordinaire personne, pour l'aide qu'il m'a apportée sans pour autant me connaitre.

- Monsieur Abdelmoumène Zékiri, Maître de Conférences à l'USTHB, pour m'avoir signalé le soucis permanent de la précision, de la clarté et de la rigueur dont on doit toujours faire preuve en Mathématiques.

- Monsieur Rachid Bouchenna, Maître de Conférences à l'USTHB, pour ses conseils éclairés, son amitié et son soutien.

Je remercie également :

- Monsieur Mohamed Amine Boutiche, Maître de Conférences à l'USTHB, pour ses attentions et ses encouragements.

- Monsieur Redha Chellal, Maître de Conférences à l'USTHB, pour sa générosité et son aide pour les corrections de mes premiers essais.

- Mohamed Salem Rézaoui, Maître de Conférences à l'USTHB, pour tous ses encouragements.

Je remercie Messieurs les Professeurs à l'USTHB : Sadek Bouroubi, Belkhaled Hebri, Mohand Ouamar Hernane et Rachid Ouafi pour leur soutien indéfectible.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à Monsieur le Professeur Mohamed Bentarzi de l'USTHB pour être venu m'encourager tout juste avant la soutenance.

Je remercie Madame Taous Oulmane pour son dévouement et son aide très efficace dans la recherche bibliographique.

Je remercie Monsieur Djamel Meguellati pour sa disponibilité permanente et son aide très précieuse pour le côté administratif.

Je remercie Monsieur le Professeur Djilali Benayat de l'ENS pour ses conseils inestimables éclairés de beaucoup de sagesse.

J'exprime toute ma reconnaissance au Professeur de mes premières années d'Université, Monsieur Abdenour Chabour pour m'avoir initié à la Recherche ainsi qu'à Monsieur le Professeur Benali Benzaghou, Directeur de mon mémoire de Magister pour m'avoir fait découvrir le Calcul ombral et toutes les subtilités des Mathématiques.

Dédicaces

A mes chers enfants : Akram Anis et Anouar Samy.

A tous les êtres qui me sont chers.

Notations

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$: ensemble des entiers naturels.
2. $s(n, k)$: nombre de Stirling de première espèce signé.
3. $S(n, k)$: nombre de Stirling de deuxième espèce.
4. $\operatorname{End} \mathbb{C}[x]$: algèbre des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$.
5. D : opérateur de dérivation de $\mathbb{C}[x]$.
6. $\mathfrak{C}$: algèbre des opérateurs de composition du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$.
7. $\mathfrak{A}$: groupe des opérateurs d'Appell du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$.
8. $\mathfrak{D}$: ensemble des delta opérateurs du $\mathbb{C}$-espace vectoriel $\mathbb{C}[x]$.
9. $(x)_n := x(x-1)\ldots(x-n+1)$ pour $n \geq 1$ et $(x)_0 := 1$.
10. $\lfloor x \rfloor$: partie entière de x.
11. $\delta_{i,j}$: symbole de Kronecker valant 1 si $i = j$ et 0 autrement.

Citation

"Elle aurait pu dépenser sa brève existence dans des occupations compatibles avec son statut social et son époque : boire du thé, broder des nappes ou mourir des fièvres en Inde. Seul un formidable effort de transcendance l'a poussée à mettre au point sa "Note G". Elle a imaginé l'informatique, elle l'a tirée du néant en un temps où il n'y avait pas encore la moindre trace de modernité. Toute seule, avec sa plume d'oie, devant son écritoire râpé, Ada a réussi à marquer notre civilisation autant que Pasteur, Einstein ou Fleming. Elle a bricolé une lampe qui s'est levée comme un soleil sur la seconde moitié du XXième siècle et qui illumine le troisième millénaire, modifiant la forme et le devenir de toute activité humaine".

Catherine Dufour

"Ada Lovelace ou la beauté des nombres, la pionnière de l'informatique"

Ada Lovelace *(1815-1852) : Comtesse anglaise surnommée "the countess of computing". Elle est la première personne à avoir écrit le tout premier programme informatique, en 1843. La "Note G" est un algorithme permettant de générer des nombres de Bernoulli. (cf : T. J. Misa, "Charles Babbage, Ada Lovelace, and the Bernoulli numbers." Ada's Legacy : Cultures of Computing from the Victorian to the Digital Age (2016) : 11-31).*

Introduction

Cette thèse est consacrée à une étude approfondie de l'algèbre commutative $\mathfrak{C}$ des opérateurs de composition (définis dans $\mathbb{C}[x]$). Ce travail nous a permis d'obtenir de nouvelles identités pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler classiques ou généralisés. Cette thèse comporte cinq chapitres.

Au premier chapitre, nous précisons les définitions d'une $\mathcal{A}$-suite, d'une suite d'Appell, d'un opérateur de composition, d'un opérateur d'Appell et d'un delta opérateur. Nous établissons aussi des résultats originaux concernant les suites de polynômes d'Appell.

Au deuxième chapitre, nous précisons les définitions et de nombreuses propriétés des nombres et polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi classiques ou généralisés. Ainsi les polynômes de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}(x)$, les polynômes d'Euler généralisés $E_n^{(\alpha)}(x)$ sont définis, pour $\alpha \in \mathbb{C}$, par :

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_B^\alpha(x^n) \text{ et } E_n^{(\alpha)}(x) = \Omega_E^\alpha(x^n),$$

où Ω_B^α et Ω_E^α sont les opérateurs unitaires d'Appell définis par :

$$\Omega_B^\alpha = \left(\frac{D}{e^D - 1}\right)^\alpha \quad \text{et} \quad \Omega_E^\alpha = \left(\frac{2}{e^D + 1}\right)^\alpha \quad ,$$

D étant l'opérateur de dérivation. $B_n(x) = B_n^{(1)}(x)$ et $E_n(x) = E_n^{(1)}(x)$ sont alors les polynômes classiques respectivement de Bernoulli et d'Euler. Les nombres de Bernoulli généralisés et d'Euler généralisés sont respectivement définis par : $B_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}(0)$ et $E_n^{(\alpha)} = 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. Les nombres de Bernoulli classiques et d'Euler classiques sont respectivement définis par : $B_n = B_n(0)$ et $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$. Dans ce chapitre, nous prouvons de nombreuses propriétés classiques de ces polynômes par l'emploi des opérateurs de composition. Nous démontrons aussi de nouvelles identités. Ainsi, nous prouvons la relation de récurrence suivante vérifiée par les polynômes d'Euler généralisés :

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) E_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k} E_{n-k}(0)\, E_k^{(\alpha)}(x).$$

Au troisième chapitre, nous établissons de nouvelles formules explicites pour les polynômes d'Euler classiques :

$$E_n(x) = (m+1)\sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2^k(k+1)}\binom{m}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\left(x-\frac{1}{2}+\frac{2j-k}{2}\right)^n \text{ pour } 2m+1\geq n,$$

$$E_n(x) = x^n + \frac{1}{2^n}\sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)!}{2^k}S(n,k,2x-1)\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^\ell\frac{2^\ell}{\ell+1}\binom{\ell+1}{k-\ell},\ n\geq 0,$$

$$E_n(x) = x^n + \frac{1}{2^n}\sum_{\ell=1}^{n}\frac{(-1)^\ell}{\ell+1}\sum_{k=0}^{n-\ell}\frac{(k+\ell+1)!}{2^k}\binom{\ell+1}{k}S(n,k+\ell,2x-1),n\geq 0,$$

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2^{n+k}}\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^\ell\binom{2k}{\ell}(2x-1+k-\ell)^n,\ m\geq\left\lfloor\frac{n}{2}\right\rfloor,n\geq 0.$$

Dans ces relations, $S(n,k,x)$ désigne le polynôme (appelé nombre généralisé de Stirling de deuxième espèce) défini par :

$$S(n,k,x) = \sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n.$$

Nous établissons aussi la formule explicite suivante pour polynômes d'Euler généralisés.

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m}\frac{(-1)^k}{2^{n+k}}\binom{\alpha+k-1}{k}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}(2x-\alpha-k+j)^n,\ m\geq\left[\frac{n}{2}\right],n\geq 0.$$

Ces formules permettent de retrouver comme cas particulier des identités établies en 2015 par Wei Qi et Guo [60] et en 2017 par Qi et Guo [43].

Le quatrième chapitre est entièrement consacré à un examen d'un article d'Alzer et Yakubovich [2, Theorem 3.1] publié en 2018. Nous établissons l'identité nouvelle suivante :

$$B_n(x) + 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{1^{2k}+\cdots m^{2k}}{(2n+1)^{2k+1}}B_{n-2k}(x) = \frac{1}{(2m+1)^n}B_n((2m+1)x-m).$$

Cette identité généralise un de leurs théorèmes. Nous donnons aussi une preuve directe des deux identités suivantes établies par ces auteurs :

$$\sum_{k=1}^{n}2^{2k-1}\binom{2n}{2k-1}B_{2k-1}(x) = \sum_{k=1}^{n}k2^{2k}\binom{2n}{2k}E_{2k-1}(x),$$

et

$$\sum_{k=1}^{n}2^{2k}\binom{2n+1}{2k}B_{2k}(x) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)2^{2k}\binom{2n+1}{2k+1}E_{2k}(x).$$

Nous redémontrons aussi les Théorèmes établis par ces auteurs de manière originale par l'emploi des opérateurs de composition. Les démonstrations ainsi obtenues sont le plus souvent simples et courtes.

Au cinquième chapitre, nous prouvons que si Ω est un opérateur d'Appell unitaire et si pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$, $\left(A_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\geq 0}$ désigne la suite de polynômes d'Appell associée à l'opérateur d'Appell Ω^{α}, alors pour α, $\lambda \in \mathbb{C}$, $l \in \mathbb{Z}$, m, $n \in \mathbb{N}$, on a l'identité suivante :

$$A_n^{(\alpha l)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k} \binom{\alpha+k-1}{k} A_n^{(-kl)}(x+\lambda l(\alpha+k)), \quad m \geq n \geq 0. \tag{1}$$

vérifiée pour $m \geq n$ et aussi pour $m \geq \left[\frac{n}{2}\right]$ si $\lambda = \Omega\left(x\right)|_{x=0}$.

L'identité (1) a fait l'objet d'une récente publication (2022) [7]. Elle permet de retrouver de nombreuses formules explicites parmi lesquelles : la formule explicite de Jordan,(1950) [27] et Gould (1972) [21], la formule explicite de Todorov (1985) [56], la formule explicite de Boutiche, Rahmani et Strivastava [11] (2017) et l'identité de Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat (2017) [5]. Cette identité permet aussi de retrouver comme cas particulier l'identité suivante concernant les nombres d'Euler généralisés due à Luo (2005) [36] :

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^n, \; n \geq 0. \tag{2}$$

Signalons que c'est le fait que l'identité établie par Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat en 2017 [5] ne permettait pas d'obtenir la relation (2) comme cas particulier qui nous a motivé à rechercher et à trouver l'identité (1) qui généralise aussi (2).

Première partie

Notions préliminaires et Compléments

Dans cette partie

Cette première partie est composée par les Chapitres 1 et 2.

Au Chapitre 1, nous revisitons la notion d'opérateur de composition ainsi que la notion de suite de polynômes d'Appell.

Au Chapitre 2, nous étudions certaines propriétés des polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi classiques ou généralisés à l'aide des opérateurs de composition.

Chapitre 1

$\mathcal{A}$-suites et opérateurs de $\mathbb{C}[x]$

1.1 Introduction

Le terme "opérateur" désigne tout élément de l'algèbre $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x])$ des endomorphismes du $\mathbb{C}$-espace ectoriel $\mathbb{C}[x]$. L'unité de cette algèbre est noté 1. L'opérateur de dérivation noté D est défini par :

$$D\left(x^0\right) = 0 \;\text{ et } D\left(x^n\right) = nx^{n-1} \text{ pour } n \geq 1.$$

Nous notons indifféremment uv ou $u \circ v$ le composé de deux opérateurs u et v. Nous appelons $\mathcal{A}$-suite toute suite $A := (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes de $\mathbb{C}[x]$ vérifiant la propriété suivante dite "propriété d'Appell" :

$$DA_0(x) = 0 \quad \text{ et } \; D(A_n(x)) = nA_{n-1}(x) \text{ pour } n \geq 1. \tag{1.1}$$

Il est facile de constater que le terme $A_n(x)$ d'une $\mathcal{A}$-suite est toujours un polynôme de degré inférieur ou égal à n et que de plus, $A_n(x)$ est de degré n si et seulement si $A_0(x)$ n'est pas le polynôme nul. Nous appelons suite d'Appell toute $\mathcal{A}$-suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ dont le terme $A_n(x)$ est un polynôme de degré n. Cette dénomination est en l'honneur du mathématicien français Paul Emile Appell (1855-1930) qui introduisit dans un article [1] intitulé "Sur une classe de polynômes" ces suites de polynômes en écrivant dès les toutes premières lignes de cet article :

"*Je m'occupe dans ce Mémoire, de certains polynômes en x formant une suite*

$$A_0,\, A_1,\; \ldots, A_{n-1}, A_n, \ldots,$$

dont le terme A_n est un polynôme de degré n et dans laquelle deux termes consécutifs sont liés par la relation

$$\frac{dA_n}{dx} = nA_{n-1}.$$

Les polynômes les plus simples de cette espèce sont les puissances consécutives mêmes de la variable,

$$1,\, x, \ldots, x^{n-1},\, x^n, \ldots,$$

car on a

$$\frac{dx^n}{dx} = nx^{n-1}."$$

Les suites de polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi classiques ou généralisés sont des exemples importants de $\mathcal{A}$-suites.

Dans ce chapitre, nous montrons que la donnée d'une $\mathcal{A}$-suite équivaut à la donnée d'un opérateur de composition. Un opérateur de composition étant un opérateur commutant avec l'opérateur de dérivation. Nous montrons que l'ensemble $\mathfrak{C}$ des opérateurs de composition est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}\,[x])$. En exploitant alors de remarquables propriétés des opérateurs de cette algèbre, nous arrivons à obtenir aisément de nombreuses identités vérifiées par toute $\mathcal{A}$-suite.

1.2 Suite de polynômes associée à un opérateur

Définir un opérateur Ω de $\mathbb{C}\,[x]$ revient à définir les images des vecteurs d'une base de $\mathbb{C}\,[x]$ par cet opérateur. Toute suite de polynômes $(e_n\,(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}\,[x]$ telle que l'on ait $\deg e_n\,(x) = n$, pour tout entier $n \geq 0$, constitue une base de $\mathbb{C}\,[x]$. Ainsi la base canonique de $\mathbb{C}\,[x]$ est la suite de polynômes $(x^n)_{n\in\mathbb{N}}$. La suite de polynômes $((x)_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où $(x)_n$ est défini par $(x)_n := \prod_{k=}^{n-1}(x-k)$ pour tout $n \geq 0$ est aussi une base de $\mathbb{C}\,[x]$. Dans ce qui suit, nous avons privilégié la base canonique pour définir certains opérateurs. Ainsi l'application F de l'ensemble $(\mathbb{C}\,[x])^{\mathbb{N}}$ des suites de polynômes de $\mathbb{C}\,[x]$ sur l'ensemble $\mathrm{End}\,(\mathbb{C}\,[x])$ des endomorphismes de $\mathbb{C}\,[x]$ définie par :

$$F : (\mathbb{C}\,[x])^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathrm{End}\,(\mathbb{C}\,[x])$$

$$(A_n\,(x))_{n\in\mathbb{N}} \mapsto \Omega_A,$$

où Ω_A est l'opérateur défini par :

$$\Omega_A\,(x^n) = A_n\,(x)\,,\;\; n \in \mathbb{N},$$

est bijective. L'application réciproque de F étant :

$$F^{-1} : \mathrm{End}\,(\mathbb{C}\,[x]) \longrightarrow (\mathbb{C}\,[x])^{\mathbb{N}}$$

$$\Omega \mapsto (\Omega\,(x^n))_{n\in\mathbb{N}}\,.$$

Pour toute suite de polynômes $A := (A_n\,(x)) \in (\mathbb{C}\,[x])^{\mathbb{N}}$, Ω_A est appelé "opérateur associé à A". De même, pour tout opérateur Ω, la suite de polynômes $(\Omega\,(x^n))_{n\in\mathbb{N}}$ est dite associée à cet opérateur.

Proposition 1 *Soit* $A = (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}} \in (\mathbb{C}[x])^{\mathbb{N}}$ *et* Ω_A *l'opérateur associé à la suite* A*. Alors* A *est une* $\mathcal{A}$*-suite si et seulement si* Ω_A *commute avec l'opérateur de dérivation.*

$$A \text{ est une } \mathcal{A}\text{-suite} \Longleftrightarrow D \circ \Omega_A = \Omega_A \circ D.$$

Preuve. Il suffit de constater que la propriété (1.1) peut s'énoncer comme suit :

$$D\Omega_A\left(x^0\right) = \Omega_A D\left(x^0\right) \quad \text{et} \quad D\Omega_A\left(x^n\right) = \Omega_A D\left(x^n\right) \text{ pour } n \geq 1.$$

□

Proposition 2 *Pour toute* $\mathcal{A}$*-suite* $A := (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$*, on a :*

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{n-k} A_k(y) \tag{1.2}$$

Preuve. $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant une$\mathcal{A}$-suite, on a :

$$\frac{D^k}{k!} A_n(x) = \binom{n}{k} A_{n-k}(x) \text{ pour } 0 \leq k \leq n\ . \tag{1.3}$$

En particulier, on a :

$$\frac{D^n}{n!} A_n(x) = A_0(x)\,.$$

$A_0(x)$ étant un polynôme constant, on a :

$$\frac{D^k}{k!} A_n(x) = 0 \text{ pour pour } k > n. \tag{1.4}$$

Compte tenu des relations (1.3) et (1.4), la formule de Taylor nous fournit la relation suivante :

$$A_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \frac{D^k}{k!} A_n(y)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_{n-k}(y)\, x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A_k(y)\, x^{n-k}. \tag{1.5}$$

□

Remarquons que pour toute $\mathcal{A}$-suite $A := (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, on a en appliquant (1.2) pour $y = 0$ et en posant $a_k = A_k(0)$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}. \tag{1.6}$$

Il en résulte que le degré du polynôme $A_n(x)$ est inférieur ou égal à n et que de plus le polynôme $A_n(x)$ est de degré n si et seulement si $a_0 \neq 0$, c'est à dire si et seulement si A est une suite d'Appell.

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} A_k(0)\, \frac{D^k}{k!}\left(x^n\right). \tag{1.7}$$

Du fait que $\frac{D^k}{k!}(x^n) = 0$ pour tout entier $k \geq n+1$, on a alors aussi pour tous entiers m et n tels que $0 \leq n \leq m$

$$A_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{m} A_k(0) \frac{D^k}{k!} \right) (x^n).$$

Nous constatons ainsi la possibilité de définir $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}$ comme étant l'opérateur Ω_A. Nous allons clarifier cette définition au paragraphe suivant. Quelques précisions concernant l'algèbre des séries formelles $\mathbb{C}[[z]]$ nous seront utiles.

1.3 Séries formelles

Un élément de $\mathbb{C}[[z]]$, appelé série formelle à une indéterminée z à coefficients dans $\mathbb{C}$, est une expression de la forme :

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

où $a_n \in \mathbb{C}$ telles que deux séries formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ sont égales si et seulement si $a_n = b_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Sur $\mathbb{C}[[z]]$, on définit une addition, une multiplication ainsi qu'une opération externe de $\mathbb{C} \times \mathbb{C}[[z]]$ dans $\mathbb{C}[[z]]$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) z^n, \\ \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n \right) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} \right) z^n, \\ \lambda \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n &= \sum_{n=0}^{\infty} \lambda a_n z^n, \ \lambda \in \mathbb{C}. \end{aligned}$$

Muni de ces trois lois, $\mathbb{C}[[z]]$ est alors une algèbre commutative intègre sur $\mathbb{C}$.

Les série formelles $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ sont appelées respectivement série génératrice ordinaire et série génératrice exponentielle de la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

L'ordre d'une série formelle $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ noté $\operatorname{ord} S(z)$ est le plus petit entier naturel n tel que $a_n \neq 0$ si $S(z) \neq 0$. On définit $\operatorname{ord} S(z) = +\infty$ si $S(z) = 0$. Il est facile de voir qu'on a les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \operatorname{ord}(S(z)T(z)) &= \operatorname{ord} S(z) + \operatorname{ord} T(z), \\ \operatorname{ord}(S(z) + T(z)) &\geq \min(\operatorname{ord} S(z), \operatorname{ord} T(z)), \\ \operatorname{ord}(S(z)T(z)) &= 0 \Longleftrightarrow \operatorname{ord}(S(z)) = \operatorname{ord}(T(z)) = 0, \\ \operatorname{ord} S^n(z) &= n \operatorname{ord}(S(z)), \ n \geq 0. \end{aligned} \tag{1.8}$$

La série formelle $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ est inversible si et seulement si elle est d'ordre zéro. On note $S^{-1}(z)$ ou $\frac{1}{S(z)}$ cet inverse. Le coefficient a_0 d'une serie $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n \in \mathbb{C}[[z]]$ est souvent désigné par $S(0)$. La série formelle $S(z)$ est donc inversible si seulement si $S(0) \neq 0$. L'ensemble des séries formelles inversibles constituent un groupe commutatif.

Si $S(z)$ et $T(z)$ sont deux séries formelles de $\mathbb{C}[[z]]$ telles que $\operatorname{ord} S(z) \geq \operatorname{ord} T(z)$, alors il existe une unique série formelle $U(z)$ telle que $S(z) = U(z)T(z)$. $U(z)$ est le quotient de $S(z)$ par $T(z)$ et on le note $\frac{S(z)}{T(z)}$.

Si $T(z)$ est une série formelle telle que $\operatorname{ord} T(z) \geq 1$, on peut définir la série formelle composée $(S \circ T)(z) = S(T(z))$.

$$(S \circ T)(z) = S(T(z)) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k T^k(z)$$

Dans ce cas, on a :

$$\operatorname{ord}((S \circ T)) = \operatorname{ord}(S) \operatorname{ord}(T).$$

Si $\operatorname{ord} T(z) = 1$, on dit que $T(z)$ est une delta série. Toute delta série $T(z)$ admet une unique delta série réciproque notée $T^{\langle -1 \rangle}(z)$:

$$T\left(T^{\langle -1 \rangle}(z)\right) = T^{\langle -1 \rangle}(T(z)) = z.$$

Ainsi, en définissant les séries formelles e^z et $\ln(1+z)$ par :

$$e^z := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} \text{ et } \ln(1+z) := \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{z^k}{k},$$

les séries formelles $e^z - 1$ et $\ln(1+z)$ sont des delta séries réciproques l'une de l'autre.

On définit aussi la dérivée d'une série formelle $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ comme étant la série $S'(z)$ définie par :

$$S'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}.$$

Il est facile de prouver les propriétés suivantes :

$$(S(z)T(z))' = S'(z)T(z) + S(z)T'(z),$$

$$(e^z)' = e^z,$$

$$(\ln(1+z))' = \frac{1}{1+z}.$$

Le lemme suivant nous sera d'une grande utilité au chapitre suivant.

Lemme 3 *Soit* $S_B(z) := \frac{z}{e^z - 1}$. *On a alors*

$$S_B^2(z) = (1 - z) S_B(z) - z S_B'(z) \tag{1.9}$$

Preuve. On a :

$$(e^z - 1) S_B(z) = z.$$

On en déduit par dérivation que :

$$e^z S_B(z) + (e^z - 1) S_B'(z) = 1. \tag{1.10}$$

En multipliant par $S_B(z) = \frac{z}{(e^z - 1)}$ chacun des membres de (1.10), on a alors :

$$e^z S_B^2(z) + z S_B'(z) = S_B(z).$$

On en déduit que :

$$e^z S_B^2(z) - z S_B(z) = (1 - z) S_B(z) - z S_B'(z).$$

La relation (1.9) en résulte en remarquant que l'on a :

$$e^z S_B^2(z) - z S_B(z) = \left(e^z - z \left(\frac{e^z - 1}{z} \right) \right) S_B^2(z) = S_B^2(z).$$

□

Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, on définit la série $S^\alpha(z)$ pour toute série formelle $S(z)$ telle que $S(0) = 1$ par :

$$S^\alpha(z) = \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)^\alpha = 1 + \sum_{j=1}^{\infty} \binom{\alpha}{j} \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n \right)^j.$$

Pour $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, on a alors pour toute série formelle $S(z)$ telle que $S(0) = 1$:

$$S^{\alpha+\beta}(z) = S^\alpha(z) S^\beta(z) \text{ et } (S^\alpha)^\beta(z) = S^{\alpha\beta}(z)$$

et

$$(e^z)^\alpha = e^{\alpha z}, \ \alpha \in \mathbb{C}.$$

Nous pouvons maintenant donner une caractérisation des $\mathcal{A}$-suites.

Proposition 4 *Soit* $A := (A_n(x))_{n \in \mathbb{N}}$ *une suite de polynômes de* $\mathbb{C}[x]$, *alors* A *est une* $\mathcal{A}$-*suite si et seulement si sa série génératrice s'écrit :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = S(z) e^{xz}, \tag{1.11}$$

où $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$.

Preuve. En effet, on peut remarquer que d'après la relation (1.6), on a :

$$\frac{A_n(x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{x^{n-k}}{(n-k)!},\ n \geq 0$$

où $a_k = A_k(0)$. On en déduit la relation (1.11) avec

$$S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n.$$

$\square$

1.4 Nombres de Stirling

Les nombres de Stirling de première et seconde espèce sont des nombres entiers qui ont été introduits par le mathématicien écossais James Stirling (1692-1770) en 1730 ([54]). Depuis cette date, l'étude des propriétés de ces nombres a fait l'objet de nombreux articles : [58, 42, 27, 41].

Les nombres de Stirling $s(n,k)$ de première espèce sont définis par :l

$$(x)_n = \sum_{k=0}^{\infty} s(n,k)\, x^k.$$

Les nombres de Stirling de première espèce sont entiers. Ils vérifient aussi la relation suivante :

$$\frac{\ln^k(1+z)}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} s(n,k) \frac{z^n}{n!},\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.12}$$

Les nombres de Stirling $S(n,k)$ de deuxième espèce sont définis par :

$$x^n = \sum_{k=0}^{\infty} S(n,k)\,(x)_k\ ,\ n \geq 0.$$

Les nombres de Stirling deuxième espèce sont des entiers naturels. Ils vérifient la relation suivante :

$$\frac{(e^z-1)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{z^n}{n!},\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.13}$$

Les nombres de Stirling de deuxième espèce généralisés $S(n,k,x)$ ([12], p. 152 (3.9)) sont définis par :

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k,x) \frac{z^n}{n!} = \frac{1}{k!} e^{xz} (e^z-1)^k,\ k \in \mathbb{N}. \tag{1.14}$$

Il est facile d'en déduire que :

$$S(n,k,x) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}(x+j)^n \tag{1.15}$$

et

$$S(n,k) = S(n,k,0) = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j}\binom{k}{j}j^n. \tag{1.16}$$

1.5 Opérateurs ponctuellement nilpotents

On dit qu'un opérateur Ω est ponctuellement nilpotent si chaque fois qu'on se donne un entier naturel n, il existe un entier naturel r tel que $\Omega^r(x^n) = 0$. On alors $\Omega^m(x^n) = 0$ pour tout entier $m \geq r$. Ainsi l'opérateur de dérivation D défini par :

$$D\left(x^0\right) = 0 \text{ et } D(x^n) = nx^{n-1} \text{ pour } n \geq 1,$$

est un opérateur ponctuellement nilpotent. En effet, pour tout entier $n \geq 0$, on a : $\Omega^{n+1}(x^n) = 0$. Considérons un opérateur ponctuellement nilpotent Ψ, pour lequel on a $\Psi^r(x^n) = 0$ pour un certain entier naturel r. Alors pour tout entier naturel n et pour toute suite de nombres complexes $(\alpha_k)_k$, la suite de polynômes $(\alpha_k\Psi(x^n))_{k\in\mathbb{N}}$ ne possède qu'un nombre fini de termes non nuls. En effet, on a $\alpha_k\Psi(x^n) = 0$ pour $k \geq r$. On peut donc définir $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Psi(x^n)$ comme étant la somme de tous les termes non nuls de la suite $(\alpha_k\Psi(x^n))_{k\in\mathbb{N}}$. On associe ainsi à toute série formelle $S(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k z^k \in \mathbb{C}[[z]]$ l'opérateur noté indifféremment $S(\Psi)$ ou $\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Psi$ défini par :

$$S(\Psi)(x^n) = \sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k\Psi(x^n) = \sum_{k=0}^{r}\alpha_k\Psi(x^n).$$

Désignons par $\mathbb{C}[[\Psi]]$ l'ensemble des opérateurs Ω pouvant s'écrire comme une série en Ψ :

$$\mathbb{C}[[\Psi]] := \{S(\Psi) \ / \ S(z) \in \mathbb{C}[[z]]\}.$$

Proposition 5 *Soit Ψ un opérateur ponctuellement nilpotent. Alors :*

1. *$\mathbb{C}[[\Psi]]$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre des endomorphismes de $\mathbb{C}[x]$,*
2. *l'application $F_0 : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathbb{C}[[\Psi]]$ qui à toute série formelle $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ fait correspondre l'opérateur $S(\Psi)$ est un morphisme surjectif d'algèbres.*

Preuve. Pour toutes séries formelles $S_1(z)$ et $S_2(z)$ et pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a :

$$\begin{aligned} S_1(\Psi) + S_2(\Psi) &= (S_1 + S_2)(\Psi), \\ \lambda S_1(\Psi) &= (\lambda S_1)(\Psi), \\ S_1(\Psi)S_2(\Psi) &= (S_1S_2)(\Psi) = S_2(\Psi)S_1(\Psi) \end{aligned}$$

□

Dans ce qui suit, nous allons étudier tout particulièrement le cas où l'on choisit pour opérateur ponctuellement nilpotent $\Psi = D$.

1.6 Algèbre $\mathfrak{C}$ des opérateurs de composition

Définition 6 *On appelle opérateur de composition tout opérateur Ω pour lequel il existe une suite de nombres complexes $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telle que :*

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}.$$

On désigne par $\mathfrak{C} := \mathbb{C}[[D]]$ l'ensemble des opérateurs de composition. On peut préciser davantage la proposition 5 dans le cas où $\Psi = D$.

La proposition suivante établit clairement que la donnée d'une $\mathcal{A}$-suite équivaut à la donnée d'un opérateur de composition.

Proposition 7 *Soit $A := (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[x]$.*

1. *A est une $\mathcal{A}$-suite si et seulement l'opérateur Ω_A associé à cette suite est un opérateur de composition.*
$$A \text{ est une } \mathcal{A}\text{-suite } \Leftrightarrow \Omega_A \in \mathbb{C}[[D]]$$

Preuve. Prouvons les deux implications.

1. A est une $\mathcal{A}$-suite $\Rightarrow \Omega_A \in \mathbb{C}[[D]]$
   Si on suppose que A est une $\mathcal{A}$-suite, alors on sait, d'après la relation (1.7), que l'opérateur Ω_A associé à la suite A est $\sum_{k=0}^{\infty} A_k(0) \frac{D^k}{k!}$ et donc $\Omega_A \in \mathbb{C}[[D]]$.
2. $\Omega_A \in \mathbb{C}[[D]] \Rightarrow A$ est une $\mathcal{A}$-suite
   Si on suppose que $\Omega_A \in \mathbb{C}[[D]]$, alors l'opérateur D commute avec Ω_A. On sait d'après la proposition 1 que dans ce cas, A est une $\mathcal{A}$-suite.

□

Proposition 8

1. *$\mathfrak{C}$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre* $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x])$.
2. *L'application $F_1 : \mathbb{C}[[z]] \longrightarrow \mathfrak{C}$ qui à toute série formelle $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ fait correspondre l'opérateur de composition $S(D)$ est un isomorphisme d'algèbres.*

Preuve. On sait déjà par le proposition 5 que $\mathfrak{C}$ est une sous-algèbre commutative de l'algèbre $\mathrm{End}(\mathbb{C}[x])$ et que de plus l'application F_1 est un morphisme surjectif d'algèbres. F_1 est aussi une application injective car l'écriture d'un opérateur de composition Ω sous la forme d'une série en D est unique. En effet si $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}$, alors on a $a_n = \Omega(x^n)|_{x=0}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. □

Définition 9 *On appelle ordre d'un opérateur de composition Ω, l'ordre de l'unique série en D telle que $\Omega = S(D)$:*

$$\operatorname{ord} S(D) = \operatorname{ord} S(z).$$

Ainsi l'ordre d'un opérateur de composition Ω est égal à $+\infty$ si $\Omega = 0$ sinon l'ordre de Ω est un entier naturel. La notion d'ordre va nous permettre de préciser ce qu'on entend par quotient de deux opérateurs et quand ce quotient est possible. On sait qu'on peut considérer dans l'anneau $\mathbb{C}[[z]]$ le quotient de deux séries formelles $S_1(z)$ et $S_2(z)$ pourvu que l'on ait : $\operatorname{ord} S_1(z) \geq \operatorname{ord} S_2(z)$. En effet, dans ce cas, il existe une unique série formelle $S_3(z)$ telle que $S_1(z) = S_2(z)S_3(z)$. La série formelle $S_3(z)$ est désignée par $\frac{S_1(z)}{S_2(z)}$. De la même manière, on peut considérer le quotient de deux opérateurs de composition $\Omega_1 := S_1(D)$ et $\Omega_2 := S_2(D)$ pourvu que l'ordre de Ω_1 soit supérieur ou égal à l'ordre de Ω_2. Si tel est le cas, on définit $\frac{\Omega_1}{\Omega_2}$ comme étant l'opérateur de composition par $\frac{\Omega_1}{\Omega_2} := S_3(D)$ où $S_3(z) = \frac{S_1(z)}{S_2(z)}$.

Les définitions qui suivent reposent sur la notion d'ordre d'un opérateur.

Définition 10 *On appelle opérateur d'Appell tout opérateur de composition d'ordre* 0.

On désigne par $\mathfrak{A}$ l'ensemble des opérateurs d'Appell,

$$\mathfrak{A} = \{S(D) \ / \ S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \ \text{ et } \ \operatorname{ord} S(z) = 0\}.$$

$\mathfrak{A}$ est l'image par l'isomorphisme F_1 (proposition 8) du groupe commutatif des unités de $\mathbb{C}[[z]]$ (constitué par les séries formelles d'ordre 0), $\mathfrak{A}$ est donc un groupe commutatif. Ce groupe est appelé groupe des opérateurs d'Appell.

Définition 11 *On appelle opérateur d'Appell unitaire tout opérateur d'Appell telle que* $\Omega(1) = 1$.

On désigne par $\mathfrak{A}_u$ l'ensemble des opérateurs unitaires d'Appell

$$\mathfrak{A}_u = \{S(D) \ / \ S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \ \text{ et } \ \operatorname{ord} S(z) = 0 \text{ et } S(0) = 1\}.$$

On constate aisément que $\mathfrak{A}_u$ est un sous-groupe du groupe $\mathfrak{A}$ des opérateurs d'Appell. De plus si $\alpha \in \mathbb{C}$ et si $\Omega \in \mathfrak{A}_u$, on peut définir Ω^α comme étant l'opérateur $S^\alpha(D)$ du fait qu'on sait définir alors $S^\alpha(z)$.

Définition 12 *On appelle delta opérateur tout opérateur de composition d'ordre* 1.

On désigne par $\mathfrak{D}$ l'ensemble des delta opérateur :

$$\mathfrak{D} = \{S(D) \ / \ S(z) \in \mathbb{C}[[z]] \text{ et } \operatorname{ord} S(z) = 1\}.$$

Proposition 13 *Soit* Ω *un opérateur de composition non nul d'ordre* m. *Soit* $(A_n(x))_{m\in\mathbb{N}}$ *la* $\mathcal{A}$*-suite associe à* Ω.

1. *Si* $m = 0$, *alors* Ω *est un opérateur d'Appell et* $(A_n(x))_{m\in\mathbb{N}}$ *est une suite d'Appell. Si de plus* $\Omega(1) = 1$, *alors* Ω *est un opérateur d'Appell unitaire et pour tout entier* $n \geq 0$, $A_n(x)$ *est un polynôme unitaire de degré* n.
2. *Si* $m \geq 1$, *alors* $A_n(x) = 0$ *pour* $0 \leq n \leq m-1$ *et* $\deg A_n(x) = n - m$ *pour* $n \geq m$.

Preuve. Soit $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!} = \sum_{k=m}^{\infty} a_k \frac{D^k}{k!}$ avec $m \neq 0$. On a alors en convenant de définir une somme vide comme étant égale à zéro :

$$A_n(x) = \Omega(x^n) = \sum_{k=m}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, \ n \geq 0.$$

Si $m = 0$, $A_n(x)$ est un polynôme de degré n de coefficient dominant $a_0 = \Omega(1)$. Si $m \geq 1$, on a alors $A_n(x) = 0$ pour $0 \leq n \leq m-1$. Si $n \geq m$, on a alors $\deg A_n(x) = n - m$, le coefficient de x^{n-m} étant $a_m \neq 0$. □

1.7 Opérateurs de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

En considérant les séries formelles suivantes de $\mathbb{C}[[z]]$:

$$\begin{aligned} S_B(z) &= \frac{z}{e^z - 1} = \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{(k+1)!}\right)^{-1}, \\ S_E(z) &= \frac{2}{e^z + 1} = \left(1 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k!}\right)^{-1} \\ \text{et} \quad S_G(z) &= \frac{2z}{e^z + 1} = z \ S_E(z), \end{aligned}$$

on définit les opérateurs de composition suivants :

$$\begin{aligned} \Omega_B &: = S_B(D) = \frac{D}{e^D - 1}, \\ \Omega_E &: = S_E(z) = \frac{2}{e^D + 1}, \\ \text{et} \quad \Omega_G &: = S_G(z) = \frac{2D}{e^D + 1}. \end{aligned}$$

Les opérateurs Ω_B, Ω_E et Ω_G sont appelés respectivement : opérateur de Bernoulli, opérateur d'Euler et opérateur de Genocchi. Remarquons que l'on a

$$\operatorname{ord}\Omega_B = \operatorname{ord}\Omega_E = 0 \text{ et } \operatorname{ord}\Omega_G = 1.$$

De plus $\Omega_B(1) = \Omega_E(1) = 1$. Les opérateurs de Ω_B et Ω_E sont donc des opérateurs d'Appell unitaires. Ω_G est un delta opérateur. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$, on définit les opérateurs $\Omega_{B^{(\alpha)}}$, $\Omega_{E^{(\alpha)}}$ et $\Omega_{G^{(m)}}$ par :

$$\Omega_{B^{(\alpha)}} := \Omega_B^\alpha, \quad \Omega_{E^{(\alpha)}} := \Omega_E^\alpha \quad \text{et} \quad \Omega_{G^{(m)}} := \Omega_G^m.$$

Les opérateurs $\Omega_{B^{(\alpha)}}$, $\Omega_{E^{(\alpha)}}$ et $\Omega_{G^{(m)}}$ sont appelés respectivement : opérateur de Bernoulli généralisé d'ordre α, opérateur d'Euler généralisé d'ordre α et opérateur de Genocchi généralisé d'ordre m.

A chacun de ces opérateurs est associée une suite de polynômes. Les suites des polynômes de Bernoulli $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, d'Euler $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et de Genocchi $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ classiques sont définies par :

$$B_n(x) := \Omega_B(x^n), \ E_n(x) := \Omega_E(x^n) \text{ et } G_n(x) := \Omega_G(x^n), \ n \geq 0.$$

Les suites des polynômes de Bernoulli $\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, d'Euler $\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et de Genocchi $\left(G_n^{(m)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ généralisés sont définies par [40], [52] :

$$B_n^{(\alpha)}(x) := \Omega_{B^{(\alpha)}}(x^n), \ E_n^{(\alpha)}(x) := \Omega_{E^{(\alpha)}}(x^n) \text{ et } G_n^{(m)}(x) := \Omega_{G^{(m)}}(x^n), \ n \geq 0.$$

Les relations suivantes sont immédiates

$$B_n^{(1)}(x) = B_n(x), \ E_n^{(1)}(x) = E_n(x) \quad \text{et } G_n^{(1)}(x) = G_n(x).$$

1.8 Groupe $\mathfrak{A}$ des opérateurs d'Appell

On appelle opérateur de translation défini par α l'endomorphisme T_α défini par :

$$T_\alpha(x^n) = (x+\alpha)^n, \quad n \geq 0.$$

En constatant que l'on a :

$$T_\alpha(x^n) = \sum_{k=0}^{n} \alpha^k \binom{n}{k} x^{n-k} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \frac{D^k}{k!}\right)(x^n),$$

on en déduit que pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$T_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k \frac{D^k}{k!} = e^{\alpha D}. \tag{1.17}$$

Les opérateurs de translation possèdent de nombreuses propriétés. L'application $\alpha \to T_\alpha$ est un morphisme du groupe additif $(\mathbb{C},+)$ dans le groupe d'Appell $\mathfrak{A}$. Pour tout couple (α,β) d'éléments de $\mathbb{C}^2$, on a :

$$\begin{aligned} T_0 &= 1, \\ T_\alpha^{-1} &= T_{-\alpha}, \\ T_{\alpha+\beta} &= T_\alpha T_\beta = T_\beta T_\alpha, \\ T_\alpha^\beta &= T_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

Les combinaisons linéaires des opérateurs de translation sont appelés des opérateurs au différences finies. Ces opérateurs constituent une sous-algèbre de l'algèbre des opérateurs de composition $\mathfrak{C}$. En particulier l'opérateur Δ défini par

$$\Delta := T_1 - T_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$

est un opérateur aux différences finies et aussi un delta-opérateur. On peut constater que

$$\Delta\left(x^n\right) = (x+1)^n - x^n, \;\; n \geq 0.$$

Plus généralement, comme les opérateurs T_1 et 1 commutent, on peut appliquer la formule du binôme à la somme $(T_1-1)^k$, on obtient alors :

$$\Delta^k = (T_1-1)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} T_j, \; k \geq 0.$$

Ainsi, on a, en utilisant la relation (1.15) :

$$\frac{\Delta^k\left(x^n\right)}{k!} = \frac{1}{k!}\sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (x+j)^n = S(n,k,x), \; n \geq 0, \; k \geq 0.$$

1.9 Ensemble $\mathfrak{D}$ des delta opérateurs

1.9.1 Image et noyau d'un opérateur de composition

Pour tout entier naturel m, désignons par $\mathbb{C}_m[x]$ le $\mathbb{C}$-espace vectoriel constitué par les polynômes de $\mathbb{C}[x]$ de degré inférieur ou égal à m.

Proposition 14 *Soit Ω un opérateur de composition*

1. *Si $\Omega = 0$, alors $\operatorname{Im}\Omega = \{0\}$ et $\ker\Omega = \mathbb{C}[x]$.*

2. *Si* $\Omega \neq 0$ *et* $\operatorname{ord} \Omega = 0$*, alors* $\operatorname{Im} \Omega = \mathbb{C}[x]$ *et* $\ker \Omega = \{0\}$.
3. *Si* $\Omega \neq 0$ *et* $\operatorname{ord} \Omega = r$ *avec* $r \geq 1$*, alors* $\operatorname{Im} \Omega = \mathbb{C}[x]$ *et* $\ker \Omega = \mathbb{C}_{r-1}[x]$.

Dans tous les cas, on a :

$$\dim \ker \Omega = \operatorname{ord} \Omega.$$

et Ω *est surjectif si* $\Omega \neq 0$.

Preuve.

1. si $\Omega = 0$, alors $\dim \ker \Omega = \dim \mathbb{C}[x] = +\infty = \operatorname{ord} \Omega$.
2. si $\Omega \neq 0$, alors $\operatorname{ord} \Omega = r$ avec $r \in \mathbb{N}$ et $\Omega = D^r \Omega_1$ avec $\Omega_1 \in \mathfrak{A}$. Deux cas se présentent : $r = 0$ et $r \geq 1$.
   (a) Si $r = 0$, alors On a alors $\ker \Omega = \{0\}$ et $\dim \ker \Omega = 0 = \operatorname{ord} \Omega$.
   (b) Sinon $r \geq 1$, $\ker \Omega = \ker D^r = \mathbb{C}_{r-1}[x]$ et $\dim \ker \Omega = r = \operatorname{ord} \Omega$.
3. Remarquons enfin que d'après ce qui précède, on a bien dans tous les cas : $\dim \ker \Omega = \operatorname{ord} \Omega$. De plus, tout opérateur de composition non nul est surjectif. En effet dans ce cas $\operatorname{ord} \Omega = r$ avec $r \in \mathbb{N}$, Ω peut s'écrire : $\Omega = \Omega_1 D^r$ où Ω_1 est un opérateur d'Appell. On a alors $\deg \Omega(x^{n+r}) = n$ pour tout entier $n \geq 0$. $(\Omega(x^{n+r}))_{n \in \mathbb{N}}$ est alors une base de $\mathbb{C}[x]$. Il en résulte que Ω est surjectif.

$\square$

Les delta opérateurs ont des propriétés similaires à l'opérateur de dérivation. Si δ est un delta opérateur, on a les propriétés suivantes vérifiées pour tout polynôme $P(x)$ de $\mathbb{C}[x]$:

$$(\deg P(x) = n \text{ et } n \geq 1) \Longrightarrow \deg \delta(P(x)) = n - 1,$$

$$\delta^{n+1}(x^n) = 0, n \geq 0,$$

$$(P(x) \text{ est un polynôme constant}) \Longleftrightarrow \delta(P(x)) = 0.$$

Proposition 15 *Soient* $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$*. Pour tout delta-opérateur* δ *et pour tout polynôme* $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$*, il existe un unique polynôme* $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ *tel que :*

$$\delta(P(x)) = Q(x) \quad \text{et } P(\alpha) = \beta.$$

De plus si $\deg Q(x) = n$*, alors* $\deg P(x) = n + 1$.

Preuve. Pour tout delta opérateur δ, on a $\dim \ker \delta = 1$ $\operatorname{Im} \delta = \mathbb{C}[x]$, il en résulte que pour tout polynôme $Q(x)$, il existe un unique polynôme $P(x)$ tel que $\delta(P(x)) = Q(x)$ et $P(\alpha) = \beta$.
$\square$

1.9.2 Base associée à un delta opérateur

Définition 16 *[48, p. 207]On dit qu'une suite de polynômes* $(S_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de Sheffer relativement au delta opérateur* δ *si elle vérifie les deux conditions suivantes :*

1. $\deg S_n(x) = n$ *pour tout* $n \geq 0$,
2. $\delta(S_n(x)) = nS_{n-1}(x)$ *pour tout* $n \geq 1$.

Ainsi toute suite de polynôme d'Appell est une suite de Sheffer relativement à l'opérateur de dérivation. Toute suite de Sheffer relativement à un delta opérateur δ est une base de $\mathbb{C}[x]$. La proposition 15 nous permet de construire de proche en proche des bases de Sheffer relativement à un delta opérateur donné. Ainsi, la définition suivante trouve sa justification grâce à la proposition 15.

Définition 17 *[48, p. 208]Soit* δ *un delta opérateur. La base de* $\mathbb{C}[x]$ *associée à ce delta-opérateur est la suite de polynômes* $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *vérifiant les conditions suivantes :*

1. $\deg p_n(x) = n \qquad (n \geq 0)$,
2. $\delta(p_n(x)) = np_{n-1}(x) \quad (n \geq 1)$,
3. $p_0(x) = 1,\ p_n(0) = 0 \ \ (n \geq 1)$.

L'existence et l'unicité de la suite de polynômes $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ se prouvent aisément à l'aide d'un raisonnement par récurrence. On a $p_0(x) = 1$ par hypothèse. Si on suppose $p_n(x)$ déterminé pour un entier $n \geq 0$, alors $p_{n+1}(x)$ doit vérifier l'équation :

$$\delta(p_{n+1}(x)) = (n+1)\, p_n(x) \ \text{ et } p_{n+1}(0) = 0.$$

On sait que cette dernière équation admet une solution unique. Le polynôme $p_{n+1}(x)$ est donc aussi parfaitement déterminé.

En constatant que :

$$\Delta\left((x)_n\right) = n\,(x)_{n-1} \ \text{ pour } n \geq 1 \text{ et } \Delta\left((x)_0\right) = 0,$$

on peut donc affirmer que la suite $\left((x)_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est la suite de polynômes associée au delta-opérateur Δ.

Proposition 18 *Soit* δ *un delta opérateur et* $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ *sa base associée. Alors on a :*

1. *Tout opérateur de composition peut s'écrire comme une série en* δ :

$$\mathfrak{C} = \mathbb{C}[[\delta]]\,.$$

2. *Pour tout opérateur de composition Ω, l'écriture de Ω sous forme d'une série δ est unique. On a :*

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\delta^k}{k!} \text{ avec } a_k = \Omega\left(p_k\left(x\right)\right)\Big|_{x=0} \tag{1.18}$$

3. *Pour tout opérateur de composition Ω tel que $\Omega = S(\delta)$ avec $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, on a :*

$$\operatorname{ord}(\Omega) = \operatorname{ord}(S).$$

Preuve.

1. Il suffit de prouver que l'on a l'égalité $\mathbb{C}[[\delta]] = \mathbb{C}[[D]]$. Pour cela, on exploite le fait que toute delta série de $\mathbb{C}[[z]]$ admet une série inverse pour la composition des séries formelles. Ainsi δ étant un delta opérateur, δ s'écrit $\delta = S_1(D)$ où $S_1(z)$ est une delta série formelle. Désignons par $S_2(z)$ la série inverse de $S_1(z)$ pour la composition $(S_2(z) = S_1^{\langle -1 \rangle}(z))$. On a alors les égalités

$$S_1(S_2(z)) = S_2(S_1(z)) = z.$$

On en déduit que :

$$D = S_2(\delta).$$

Prouvons que $\mathbb{C}[[\delta]] \subset \mathbb{C}[[D]]$. Soit $\Omega = S(\delta) \in \mathbb{C}[[\delta]]$. Alors comme $\delta = S_1(D)$, on en déduit que $\Omega = S(S_1(D)) = (S \circ S_1)(D)$ et donc $\Omega \in \mathbb{C}[[D]]$. L'inclusion est donc prouvée.

Prouvons que $\mathbb{C}[[D]] \subset \mathbb{C}[[\delta]]$. Soit $\Omega = S(D) \in \mathbb{C}[[\delta]]$. Alors comme $D = S_2(\delta)$, on en déduit que $\Omega = S(S_2(\delta)) = (S \circ S_2)(\delta)$ et donc $\Omega \in \mathbb{C}[[\delta]]$. L'inclusion inverse est donc aussi prouvée.

2. Si $\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{\delta^k}{k!}$, alors on a :

$$\begin{aligned} \Omega\left(p_k\left(x\right)\right) &= \sum_{j=0}^{\infty} a_j \frac{\delta^j}{j!}\left(p_k\left(x\right)\right) \\ &= \sum_{j=0}^{k} a_j \binom{k}{j} p_{k-j}\left(x\right). \end{aligned}$$

On a donc :

$$\Omega\left(p_k\left(x\right)\right)\Big|_{x=0} = \sum_{j=0}^{k} a_j \binom{k}{j} \delta_{k,j} = a_k.$$

La relation (1.18) est ainsi prouvée.

3. Enfin si $\Omega = S(\delta)$ avec $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, alors on a :

$$\operatorname{ord}(\Omega) = \operatorname{ord}(S).$$

En effet, on a avec les notations précédentes $\operatorname{ord}(S_1) = 1$ et donc avec $\Omega = S(\delta) = (S \circ S_1)(D)$, on a $\operatorname{ord}(\Omega) = \operatorname{ord}(S \circ S_1) = \operatorname{ord}(S) \operatorname{ord}(S_1) = \operatorname{ord}(S)$.

$\square$

Ainsi comme D et Δ sont des delta opérateurs, on a à la fois $D \in \mathbb{C}[[\Delta]]$ et $\Delta \in \mathbb{C}[[D]]$. On a d'ailleurs :

$$\Delta = e^D - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^k}{k}$$

et

$$D = \ln(1+\Delta) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{\Delta^k}{k}.$$

Plus généralement, en exploitant les relations (1.12) et (1.13), on a, pour tour entier naturel k :

$$\frac{D^k}{k!} = \frac{(\ln(1+\Delta))^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} s(n,k) \frac{\Delta^n}{n!}$$

et

$$\frac{\Delta^k}{k!} = \frac{\left(e^D - 1\right)^k}{k!} = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k) \frac{D^n}{n!}.$$

1.9.3 Formules de Taylor

Soit δ un delta opérateur et $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ sa base associée. On a :

$$\frac{\delta^k}{k!}(p_n(x)) = \binom{n}{k} p_{n-k}(x) \quad \text{pour } 0 \leq k \leq n$$

et

$$\frac{\delta^k}{k!}(p_n(x)) = 0 \quad \text{pour } k > n.$$

Proposition 19 *[47, p. 197]Soit δ un delta opérateur et $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ la base qui lui est associée. Alors, pour tout polynôme $P(x) \in \mathbb{C}[x]$, on a :*

$$P(x+y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(x)}{k!} p_k(y).$$

Preuve. Soit $Q(x) \in \mathbb{C}[x]$, $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ étant une base de $\mathbb{C}[x]$, il existe une famille $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de coefficients tels que :

$$Q(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda_n p_n(x).$$

On a alors :

$$\frac{\delta^k Q(x)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n \binom{n}{k} p_{n-k}(x).$$

On en déduit que :

$$\frac{\delta^k Q(0)}{k!} = \sum_{n=k}^{\infty} \lambda_n \binom{n}{k} \delta_{n-k} = \lambda_k.$$

Ainsi, on a :

$$Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\delta^k Q(0)}{k!} p_k(x). \tag{1.19}$$

Soit alors $P(x) \in \mathbb{C}[x]$ et $\alpha \in \mathbb{C}$. Choisissons $Q(x) = P(x+\alpha)$. On a alors :

$$\begin{aligned} \frac{\delta^k Q(x)}{k!} &= \frac{\delta^k \circ T_\alpha}{k!}(P(x)) \\ &= \frac{T_\alpha \circ \delta^k}{k!}(P(x)) \\ &= \frac{\delta^k P(x+\alpha)}{k!}. \end{aligned}$$

L'application de la formule (1.19) donne :

$$P(x+\alpha) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(\alpha)}{k!} p_n(x).$$

On a donc dans $\mathbb{C}[x,y]$:

$$P(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(y)}{k!} p_n(x).$$

En échangeant le rôle de x et y, on en déduit qu'on a aussi :

$$P(x+y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\delta^k P(x)}{k!} p_k(y).$$

$\square$

Pour $P(x) = p_n(x)$, on a pour $0 \leq k \leq n$:

$$\frac{\delta^k P(x)}{k!} = \frac{\delta^k p_n(x)}{k!} = \binom{n}{k} p_{n-k}(x).$$

L'application de la formule de Taylor précédente (proposition (**??**) relative à un delta opérateur δ de base associée $(p_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ au cas particulier où le polynôme $P(x) = p_n(x)$ nous fournit la proposition alors suivante :

Proposition 20 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$p_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p_{n-k}(x) p_k(y).$$

1.10 Caractérisation des opérateurs de composition

Proposition 21 *Soit Ω un opérateur et δ un opérateur de composition. Alors Ω est un opérateur de composition si et seulement si Ω commute avec δ.*

$$\forall \delta \in \mathfrak{D}, \quad \forall \Omega \in \mathrm{End}\left(\mathbb{C}\left[x\right]\right), \quad \Omega \in \mathfrak{C} \Longleftrightarrow \ \Omega\delta = \delta\Omega$$

Preuve. Soit Ω un opérateur et δ un opérateur de composition.

1. L'implication : $\Omega \in \mathfrak{C} \Rightarrow \Omega\delta = \delta\Omega$ est évidente car dans ce cas δ et Ω commutent car ils sont tous deux éléments de l'algèbre commutative $\mathfrak{C} = \mathbb{C}\left[\left[\delta\right]\right]$.
2. Prouvons l'implication réciproque : $\Omega\delta = \delta\Omega \Rightarrow \Omega \in \mathfrak{C}$.

Posons

$$A_n\left(x\right) := \Omega\left(p_n\left(x\right)\right) \text{ et } \alpha_n := A_n\left(0\right), \, n \geq 0.$$

Prouvons tout d'abord que $A_n\left(x\right)$ est un polynôme de degré inférieur ou égal à n. Comme $\deg p_n\left(x\right) = n$ et que de plus $\ker \delta^{n+1} = \mathbb{C}_n\left[x\right]$, on a $\delta^{n+1}p_n\left(x\right) = 0$. Par hypothèse, Ω commute avec δ, il en résulte que Ω commute avec δ^kpour tout entier naturel k. En particulier, on a

$$\delta^{n+1}A_n\left(x\right) = \delta^{n+1}\Omega\left(p_n\left(x\right)\right) = \Omega\left(\delta^{n+1}p_n\left(x\right)\right) = \Omega\left(0\right) = 0.$$

Il en résulte que $A_n\left(x\right) \in \ker \delta^{n+1}$ et donc que $\deg A_n\left(x\right) \leq n$.

La formule de Taylor appliquée au polynôme $A_n\left(x\right)$ nous fournit alors la relation suivante :

$$A_n\left(x\right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\delta^k A_n\left(0\right)}{k!} p_k\left(x\right).$$

Pour $0 \leq k \leq n$, on a alors :

$$\frac{\delta^k A_n\left(x\right)}{k!} = \frac{\delta^k \Omega\left(p_n\left(x\right)\right)}{k!} = \Omega\left(\frac{\delta^k p_n\left(x\right)}{k!}\right) = \Omega\left(\binom{n}{k} p_{n-k}\left(x\right)\right) = \binom{n}{k} A_{n-k}\left(x\right)$$

Il en résulte que :

$$\frac{\delta^k A_n\left(0\right)}{k!} = \binom{n}{k} a_{n-k}.$$

Ainsi, on a :

$$\begin{aligned} A_n\left(x\right) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_{n-k} p_k\left(x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k \binom{n}{k} p_{n-k}\left(x\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \delta^k p_n\left(x\right). \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$A_n(x) = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\delta^k\right) p_n(x).$$

et par conséquent :

$$\Omega = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a_k}{k!}\delta^k \in \mathbb{C}[[\delta]].$$

l'implication réciproque est prouvée. □

Proposition 22 *Soit Ω un opérateur et δ un opérateur de composition. Alors Ω est un opérateur de composition si et seulement si Ω commute avec tout opérateur de translation T_α.*

$$\forall \Omega \in \operatorname{End}(\mathbb{C}[x]), \quad \Omega \in \mathfrak{C} \Longleftrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \ \Omega T_\alpha = T_\alpha \Omega$$

Preuve.

1. Prouvons l'implication $\Omega \in \mathfrak{C} \Longrightarrow \forall \alpha \in \mathbb{C}, \ \ \Omega T_\alpha = T_\alpha \Omega$
2. Prouvons l'implication réciproque $\forall \alpha \in \mathbb{C}, \ T_\alpha = T_\alpha \Longrightarrow \Omega \in \mathfrak{C}$

□

Proposition 23 *Soit Ω un opérateur, les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *Ω commute avec l'opérateur de dérivation D.*
2. *Ω commute avec tout opérateur de translation T_α*
3. *Ω commute avec l'opérateur de translation T_1*
4. *Ω commute avec l'opérateur de différence Δ*

1.11 Quelques propriétés des $\mathcal{A}$-suites

Soient $A := (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de polynômes de $\mathbb{C}[x]$ et $S(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ avec $a_n = A_n(0)$ pour $n \geq 0$. Le diagramme suivant synthétise les propriétés pour que A soit une $\mathcal{A}$-suite.

$$\begin{array}{ccc}
A \text{ est une } \mathcal{A}\text{-suite} & \Longleftrightarrow & A_n(x) = S(D)(x^n), \ n \geq 0 \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
A_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k x^{n-k}, \ n \geq 0 & \Longleftrightarrow & \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = S(z) e^{xz}
\end{array}$$

Proposition 24 *Une suite de polynômes $A := (A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathbb{C}[x]$ est une suite de polynômes d'Appell si et seulement si l'opérateur Ω_A de $\mathbb{C}[x]$ associé à cette suite appartient à $\mathbb{C}[[D]]$ et est bijectif.*

Preuve. Si A est une suite d'Appell, alors $\Omega_A = \sum_{k=0}^{\infty} A_k(0)\frac{D^k}{k!} \in \mathbb{C}[[D]]$. De plus $\Omega_A(x^n) = A_n(x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^{n-k}A_k(0)$ est un polynôme de degré n et conséquent Ω_A est bijectif. Réciproquement, si $\Omega_A \in \mathbb{C}[[D]]$ est bijectif, la suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifie la propriété d'Appell. De plus $\ker\Omega_A=\{0\}$ et on a donc $A_0(x) = \Omega_A(x^0) \neq 0$ car $x^0 \notin \ker\Omega_A$ et A est une suite d'Appell. $\square$

Remarque 25 *Si Ω_A est un opérateur d'Appell unitaire, alors pour tout entier naturel n, $A_n(x)$ est un polynôme unitaire de degré n.*

Proposition 26 *Soit $(A_n(x))_n$ une $\mathcal{A}$-suite. Alors pour tous entiers naturels n, m et q et pour tout nombre complexe λ, on a :*

$$\sum_{k=0}^{m+q}\binom{m+q}{k}\binom{n+q+k}{q}\lambda^{m+q-k}A_{n+k}(x) = \sum_{k=0}^{n+q}(-1)^{n+q-k}\binom{n+q}{k}\binom{m+q+k}{q}A_{m+k}(x+\lambda). \tag{1.20}$$

Preuve. Soit Ω_A l'opérateur associée à la $\mathcal{A}$-suite $(A_n(x))_n$. Ω_A est un opérateur de composition. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{D^q}{q!}x^{n+q}(x+\lambda)^{m+q} &= \frac{D^q}{q!}\sum_{k=0}^{m+q}\binom{m+q}{k}\lambda^{m+q-k}x^{n+q+k} \\
&= \sum_{k=0}^{m+q}\binom{m+q}{k}\binom{n+q+k}{q}\lambda^{m+q-k}x^{n+k}.
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\frac{D^q}{q!}x^{n+q}(x+\lambda)^{m+q} &= \frac{D^q}{q!}(x+\lambda)^{m+q}((x+\lambda)-\lambda)^{n+q} \\
&= \frac{D^q}{q!}\sum_{k=0}^{n+q}(-\lambda)^{n+q-k}\binom{n+q}{k}(x+\lambda)^{m+q+k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+q}(-\lambda)^{n+q-k}\binom{n+q}{k}\binom{m+q+k}{q}(x+\lambda)^{n+k}.
\end{aligned}$$

On a donc l'identité polynomiale suivante :

$$\sum_{k=0}^{m+q}\binom{m+q}{k}\binom{n+q+k}{q}\lambda^{m+q-k}x^{n+k} = \sum_{k=0}^{n+q}(-1)^{n+q-k}\binom{n+q}{k}\binom{m+q+k}{q}(x+\lambda)^{m+k}.$$

On en déduit :

$$\sum_{k=0}^{m+q}\binom{m+q}{k}\binom{n+q+k}{q}\lambda^{m+q-k}\Omega_A\left(x^{n+k}\right)=\sum_{k=0}^{n+q}(-1)^{n+q-k}\binom{n+q}{k}\binom{m+q+k}{q}\Omega_A\left((x+\lambda)^{m+k}\right). \tag{1.21}$$

On obtient alors (1.20) en remarquant que l'on a :

$$\Omega_A\left(x^{n+k}\right)=A_{n+k}(x)$$

et

$$\Omega_A\left((x+\lambda)^{m+k}\right)= \Omega_A e^{\lambda D}\left(x^{m+k}\right)=e^{\lambda D}\Omega_A\left(x^{m+k}\right)=e^{\lambda D}A_{m+k}(x)=A_{m+k}(x+\lambda).$$

□

Proposition 27 *Soit $(A_n(x))_n$ une $\mathcal{A}$-suite associée à un opérateur de composition $S(D)$ où $S(z)\in\mathbb{C}[[z]]$. Alors pour tout nombre complexe non nul λ, on a :*

1.
$$A_{n+1}(x)-xA_n(x)=(S'(D))(x^n),\quad n\geq 0, \tag{1.22}$$

2.
$$A_n(\lambda x)=\lambda^n S\left(\frac{D}{\lambda}\right)(x^n),\qquad n\geq 0, \tag{1.23}$$

3.
$$(-1)^n A_n(\lambda-x)=e^{-\lambda D}S(-D)(x^n),\qquad n\geq 0. \tag{1.24}$$

Preuve.

1. En dérivant dans $\mathbb{C}[[z]]$ la relation

$$S(z)=e^{-xz}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\frac{z^n}{n!},$$

on obtient :

$$S'(z)=-xe^{-xz}\sum_{n=0}^{\infty}A_n(x)\frac{z^n}{n!}+e^{-xz}\sum_{n=0}^{\infty}A_{n+1}(x)\frac{z^n}{n!}.$$

On en déduit que $A_{n+1}(x)-xA_n(x)$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(A_{n+1}(x)-xA_n(x)\right)\frac{z^n}{n!}=S'(z)e^{xz}.$$

La relation (1.22) en résulte.

2. On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \frac{z^n}{n!} = S(z) e^{xz}. \tag{1.25}$$

En remplaçant x par λx et z par $\frac{z}{\lambda}$ dans (1.25), on obtient la relation :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n(\lambda x)}{\lambda^n} \frac{z^n}{n!} = S\left(\frac{z}{\lambda}\right) e^{xz}.$$

La relation (1.23) en résulte.

3. En exploitant la relation (1.23), on a alors :

$$\begin{aligned} (-1)^n A_n(\lambda - x) &= e^{-\lambda D} (-1)^n A_n(-x) \\ &= e^{-\lambda D} S(-D)(x^n). \end{aligned}$$

□

L'opérateur M_x de multiplication par x est défini par :

$$M_x(x^n) = x^{n+1} \quad \text{si } n \geq 0.$$

Le Corollaire suivant est un résultat bien connu [47, Lemma p. 205].

Corollaire 28 *Pour toute série $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$, on a :*

$$S(D) M_x - M_x S(D) = S'(D). \tag{1.26}$$

Preuve. Soit $(A_n(x))_n$ la $\mathcal{A}$-suite associée à l'opérateur de composition $S(D)$. D'après la proposition (27), on a pour tout entier $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} (S'(D))(x^n) &= A_{n+1}(x) - x A_n(x) \\ &= (S(D))\left(x^{n+1}\right) - x S(D)(x^n) \\ &= (S(D) M_x - M_x S(D))(x^n). \end{aligned}$$

La relation (1.26) en résulte. □

Proposition 29 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$B_n^{(2)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k B_{n-k}(x) = (1-n) B_n(x) + n(x-1) B_{n-1}(x) \tag{1.27}$$

Preuve.

1. D'une part, on a :

$$\begin{aligned}
B_n^{(2)}(x) &= \Omega_B^2(x^n) \\
&= \Omega_B(B_n(x)) \\
&= \Omega_B\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k x^{n-k}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_k B_{n-k}(x)\,. \qquad (1.28)
\end{aligned}$$

D'autre part, on sait d'après la relation (1.9) du lemme 3 que :

$$S_B^2(z) = (1-z)\,S_B(z) - zS_B^{'}(z)$$

On en déduit que :

$$\Omega_B^2 = (1-D)\,\Omega_B - DS_B^{'}(D) \qquad (1.29)$$

D'après la propriété (1.22) de la proposition 27, on a :

□

$$\left(S_B'(D)\right)(x^n) = B_{n+1}(x) - xB_n(x) \quad n \geq 0.$$

On a donc en utilisant la relation (1.29) :

$$\begin{aligned}
B_n^{(2)}(x) &= \Omega_B^2(x^n) = (1-D)\,B_n(x) - D\left(B_{n+1}(x) - xB_n(x)\right) \\
&= (1-n)\,B_n(x) + n\,(x-1)\,B_{n-1}(x) \qquad (1.30)
\end{aligned}$$

La relation (1.27) résulte alors de (1.30) et (1.28).

Proposition 30 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$B_n^{(n+1)}(x) = (x-1)\,(x-2)\ldots(x-n)\,. \qquad (1.31)$$

Preuve. Pour $n = 1$, la propriété (1.31) est bien vérifiée. En effet, on a : $B_1^{(2)}(x) = x - 1$, d'après la relation (1.27) de la proposition 29.

Pour $n \geq 2$, prouvons que l'on a :

$$(x-n)\,B_{n-1}^{(n)}(x) = B_n^{(n+1)}(x)\,, \qquad (1.32)$$

la propriété (1.31) en résultera alors par un simple raisonnement par récurrence.

Dans ce qui suit, on note $S(z)$ la série formelle $S_B(z)$ et Ω l'opérateur de Bernoulli. En exploitant la relation 1.9 du Lemme 3, on a, par un simple calcul la relation suivante :

$$(S^n)'(z) = \frac{n}{z}\left(S^n(z) - e^z S^{n+1}(z)\right)$$

de laquelle on déduit :

$$(S^n)'(D) = \frac{n}{D}\left(\Omega^n - e^D \Omega^{n+1}\right). \tag{1.33}$$

En exploitant (1.26) et (1.33), on obtient la relation suivante :

$$x\Omega^n \frac{D}{n} = \left(\Omega^n M_x - (S^n)'(D)\right)\frac{D}{n} = \Omega^n M_x \frac{D}{n} - \Omega^n + e^D \Omega^{n+1}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
(x-n)\, B_{n-1}^{(n)}(x) &= (x-n)\,\Omega^n\left(x^{n-1}\right) \\
&= x\Omega^n\left(x^{n-1}\right) - \Omega^n D\left(x^n\right). \\
&= \left(x\Omega^n \frac{D}{n} - \Omega^n D\right)(x^n) \\
&= \left(\Omega^n M_x \frac{D}{n} - \Omega^n + e^D\Omega^{n+1} - \Omega^n D\right)(x^n) \\
&= \underbrace{\left(\Omega^n M_x \frac{D}{n} - \Omega^n\right)(x^n)}_{E_1} + \underbrace{\left(e^D\Omega^{n+1} - \Omega^n D\right)(x^n)}_{E_2}
\end{aligned} \tag{1.34}$$

On peut alors constater que :

$$\begin{aligned}
E_1 \quad : &= \left(\Omega^n M_x \frac{D}{n} - \Omega^n\right)(x^n) \\
&= \Omega^n(x^n) - \Omega^n(x^n) = 0
\end{aligned} \tag{1.35}$$

et

$$\begin{aligned}
E_2 \quad : &= \left(e^D\Omega^{n+1} - \Omega^n D\right)(x^n) \\
&= \Omega^n\left(\frac{e^D D}{e^D - 1} - D\right)(x^n) = \Omega^{n+1}(x^n).
\end{aligned} \tag{1.36}$$

Il résulte de (1.34), (1.35) et (1.36) que l'on a :

$$(x-n)\, B_{n-1}^{(n)}(x) = \Omega^{n+1}(x^n) = B_n^{(n+1)}(x^n).$$

La propriété (1.32) est ainsi prouvée. □

La relation (1.31) est bien connue [48, p. 96]. On peut en déduire des expressions explicites pour les polynômes $B_{n-k}^{(n)}(x)$ pour $n \geq k$.

Corollaire 31 *Pour tous entiers naturels n et k tels que $n \geq k$, on a :*

$$B_{n-k}^{(n)}(x) = \binom{n-1}{k-1}^{-1} \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1} s(n, j+1) x^{j+1-k}. \tag{1.37}$$

Preuve. D'après (1.31), on a :

$$\frac{D^{k-1}}{(k-1)!} B_{n-1}^{(n)}(x) = \frac{D^{k-1}}{(k-1)!} (x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) \tag{1.38}$$

La suite $\left(B_m^{(n)}(x)\right)_{m \in \mathbb{N}}$ étant une suite de polynômes d'Appell, on a :

$$\frac{D^{k-1}}{(k-1)!} B_{n-1}^{(n)}(x) = \binom{n-1}{k-1} B_{n-k}^{(n)}(x). \tag{1.39}$$

D'autre part, on a :

$$(x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = \sum_{j=1}^{n-1} s(n, j+1) x^j$$

et par conséquent :

$$\frac{D^{k-1}}{(k-1)!} (x-1)(x-2)\ldots(x-n+1) = \sum_{j=k-1}^{n-1} \binom{j}{k-1} s(n, j+1) x^{j+1-k}. \tag{1.40}$$

La relation (1.37) résulte alors des relations (1.38), (1.39) et (1.40). □

La relation (1.37) est bien connue [48, (4.2.8), p. 96]. Elle a aussi été prouvée par Choi [15, (2.10)] en 1996.

Remarquons que si une suite de polynômes $(A_n(x))_n$ vérifie la relation :

$$A_n(x) = (-1)^n A_n(\lambda - x), \qquad n \geq 0$$

alors en posant :

$$P_n(x) = A_n\left(\frac{x+\lambda}{2}\right), \qquad n \geq 0,$$

on obtient la propriété suivante :

$$P_n(x) = (-1)^n P_n(-x), \qquad n \geq 0.$$

On en déduit que le polynôme $P_{2n}(x)$ est pair et que le polynôme $P_{2n+1}(x)$ est impair.

Propriétés des polynômes d'Appell généralisés

Pour toute suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ d'Appell associée à un opérateur d'Appell Ω_A, on définit pour $m\in\mathbb{Z}$ la suite de polynômes d'Appell généralisés $\left(A_n^{(m)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la suite d'Appell associée à l'opérateur d'Appel Ω_A^m. Dans le cas où l'opérateur d'Appell Ω_A est unitaire, on définit pour $\alpha\in\mathbb{C}$ la suite de polynômes d'Appell généralisés $\left(A_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant la suite d'Appell associée à l'opérateur d'Appel Ω_A^α.

Les propositions qui suivent établissent des relations vérifiées par ces suites de polynômes d'Appell généralisés.

Proposition 32 *Pour toute suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes d'Appell de $\mathbb{C}[x]$ telle que $A_0(x)=a_0$, on a pour tous entiers m et n tels que $m\geq n$:*

1.
$$A_n^{(\ell)}(x+y)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_0^{\ell(k+1)}\binom{m+1}{k+1}A_n^{(-k\ell)}(x-ky). \tag{1.41}$$

2.
$$A_n^{(\ell)}(x+y)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k a_0^{\ell(k+1)}\binom{m+1}{k+1}A_n^{(-k\ell)}(y-kx). \tag{1.42}$$

Preuve.

1. Comme (1.42) se déduit de (1.41) en échangeant les rôles de x et y, il suffit de prouver seulement (1.41). On peut constater que (1.41) équivaut à :

$$\sum_{k=-1}^{m}(-1)^k a_0^{\ell(k+1)}\binom{m+1}{k+1}A_n^{(-k\ell)}(x-ky)=0$$

où encore

$$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k a_0^{\ell k}\binom{m+1}{k}A_n^{(-(k-1)\ell)}(x+y-ky)=0.$$

En changeant x en $x-y$, on constate que prouver (1.41) revient à prouver que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k a_0^{\ell k}\binom{m+1}{k}A_n^{(-(k-1)\ell)}(x-ky)=0.$$

Pour cela, il suffit de prouver que pour tout $\beta\in\mathbb{C}$, on a :

$$\sum_{k=0}^{m+1}(-1)^k a_0^{\ell k}\binom{m+1}{k}A_n^{(-(k-1)\ell)}(x-\beta k)=0. \tag{1.43}$$

En considérant les opérateurs de translations $T_{-\beta k} = e^{-\beta k D}$, la relation (1.43) s'écrit :

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \, a_0^{\ell k} \binom{m+1}{k} T_{-\beta k} \left(A_n^{(-(k-1)\ell)} (x) \right) = 0. \tag{1.44}$$

Désignons par Ω l'opérateur associé à la suite de polynômes $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$. Alors Ω est un opérateur d'Appell et pour tout entier q, Ω^q est l'opérateur associé à la suite de polynômes $\left(A_n^{(q)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. La relation (1.44) équivaut alors à :

$$\sum_{k=0}^{m+1} (-1)^k \, a_0^{\ell k} \binom{m+1}{k} T_{-\beta k} \Omega^{-(k-1)\ell} (x^n) = 0. \tag{1.45}$$

En constatant que :

$$T_{-\beta k} \Omega^{-(k-1)\ell} = \Omega^{\ell} e^{-\beta k D} \Omega^{-k\ell},$$

la relation (1.45) équivaut encore à :

$$\Omega^{\ell} \left\{ \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} \left(-a_0^{\ell} e^{-\beta D} \Omega^{-\ell} \right)^k \right\} (x^n) = 0.$$

Cette dernière relation s'écrit :

$$\Omega^{\ell} \left(1 - a_0^{\ell} e^{-\beta D} \Omega^{-\ell} \right)^{m+1} (x^n) = 0. \tag{1.46}$$

Ainsi prouver la relation (1.41) revient à prouver la relation (1.46). Pour cela encore, il suffit de prouver que :

$$\operatorname{ord} \Omega^{\ell} \left(1 - a_0^{\ell} e^{-\beta D} \Omega^{-\ell} \right)^{m+1} \geq m+1.$$

Comme $\operatorname{ord} \Omega^{\ell} = 1$, il suffit de prouver que :

$$\operatorname{ord} \left(1 - e^{-\beta D} a_0^{\ell} \Omega^{-\ell} \right)^{m+1} \geq m+1. \tag{1.47}$$

Ce qui est assez immédiat. En effet, on a du fait que $A_0(x) = a_0$:

$$a_0^{\ell} \Omega^{-\ell} = 1 + \Psi_{\ell} \text{ avec } \operatorname{ord} \Psi_{\ell} \geq 1. \tag{1.48}$$

On a aussi :

$$e^{-\beta D} = \sum_{k=0}^{\infty} (-\beta)^k \frac{D^k}{k!} = 1 + \Phi_{\beta} \text{ avec } \operatorname{ord} \Phi_{\beta} \geq 1. \tag{1.49}$$

De (1.48) et (1.49), on déduit que l'on a :

$$\operatorname{ord} \left(1 - e^{-\beta D} a_0^{\ell} \Omega^{-\ell} \right) \geq 1. \tag{1.50}$$

La relation (1.47) résulte alors de (1.50). La preuve de notre proposition est complète.

2. Il suffit d'échanger le rôle de x et y dans (1.41) pour obtenir (1.42).

$\square$

Corollaire 33 *Pour toute suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes d'Appell de $\mathbb{C}[x]$ telle que $A_0(x) = a_0$, on a pour tous entiers m et n tels que $m \geq n$:*

1.
$$A_n^{(\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_0^{\ell(k+1)} \binom{m+1}{k+1} A_n^{(-k\ell)}(x) \tag{1.51}$$

2.
$$A_n^{(\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_0^{\ell(k+1)} \binom{m+1}{k+1} A_n^{(-k\ell)}(-kx). \tag{1.52}$$

Corollaire 34 *Pour toute suite $(A_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes d'Appell de $\mathbb{C}[x]$ telle que $A_0(x) = a_0$, on a pour tous entiers m et n tels que $m \geq n$:*

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_0^{k+1} \binom{m+1}{k+1} A_n^{(-k)}(x) \tag{1.53}$$

$$A_n(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k a_0^{k+1} \binom{m+1}{k+1} A_n^{(-k)}(-kx). \tag{1.54}$$

Chapitre 2

Polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

2.1 Introduction

Soit $\alpha \in \mathbb{C}$ et $m \in \mathbb{N}$. Rappelons que l'on a défini au Chapitre 1 l'opérateur de Bernoulli Ω_B, l'opérateur d'Euler Ω_E, l'opérateur de Genocchi Ω_G ainsi que les opérateurs $\Omega_{B^{(\alpha)}}$, $\Omega_{E^{(\alpha)}}$ et $\Omega_{G^{(m)}}$ comme suit :

$$\Omega_B := S_B(D), \, \Omega_E = S_E(D) \text{ et } \Omega_G := S_G(D),$$

$$\Omega_{B^{(\alpha)}} := S_B^{\alpha}(D), \, \Omega_{E^{(\alpha)}} := S_E^{\alpha}(D) \quad \text{et} \quad \Omega_{G^{(m)}} := S_G^{m}(D).$$

où

$$S_B(z) := \frac{z}{e^z - 1}, \, S_E(z) := \frac{2}{e^z + 1} \text{ et } S_G(z) := \frac{2z}{e^z + 1}.$$

On a :

$$\Omega_{B^{(1)}} := \Omega_B, \, \Omega_{E^{(1)}} := \Omega_E \quad \text{et} \quad \Omega_{G^{(1)}} := \Omega_G.$$

Ω_B, Ω_E, Ω_G, $\Omega_{B^{(\alpha)}}$,$\Omega_{E^{(\alpha)}}$ et $\Omega_{G^{(m)}}$ sont des opérateurs de composition. Plus précisément les opérateurs Ω_B, Ω_E, $\Omega_{B^{(\alpha)}}$,$\Omega_{E^{(\alpha)}}$ sont des opérateurs d'Appell unitaires alors que Ω_G est un delta opérateur et $\Omega_{G^{(m)}}$ un opérateur de composition d'ordre m.

Nous avons aussi défini les suites de polynômes de Bernoulli classiques $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$, les suites de polynômes d'Euler classiques $(E_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ et les suites de polynômes de Genocchi classiques $(G_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ comme étant les suites de polynômes respectivement associées aux opérateurs Ω_B, Ω_E, Ω_G ainsi que les suites de polynômes de Bernoulli généralisés $\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, les suites de polynômes d'Euler généralisés $\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et les polynômes de Gencocchi généralisés

$\left(G_n^{(m)}(x)\right)_{n\in\heartsuit}$ comme étant les suites de polynômes respectivement associées aux opérateurs $\Omega_{B^{(\alpha)}}$,$\Omega_{E^{(\alpha)}}$ et $\Omega_{G^{(m)}}$ (voir [40], [52]). Par conséquent, nous avons pour tout entier $n \geq 0$:

$$B_n(x) := \Omega_B(x^n), \; S_E(z) := \Omega_E(x^n), \; S_G(z) := .\Omega_G(x^n),$$

$$B_n^{(\alpha)}(x) := \Omega_{B^{(\alpha)}}(x^n), \; E_n^{(\alpha)}(x) := \Omega_{E^{(\alpha)}}(x^n) \text{ et } G_n^{(m)}(x) := .\Omega_{G^{(m)}}(x^n).$$

Les nombres de Bernoulli B_n, d'Euler E_n et de Genocchi G_n classiques sont définis par les relations :

$$B_n := B_n(0), \quad E_n := 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad G_n := G_n(0).$$

Les nombres de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}$, les nombres d'Euler généralisés $E_n^{(\alpha)}$ et les nombres de Genocchi généralisés $G_n^{(m)}(x)$ sont définis par les relations :

$$B_n^{(\alpha)} := B_n^{(\alpha)}(0), \; E_n^{(\alpha)} := 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ et } G_n^{(\alpha)} := G_n^{(\alpha)}(0), \; n \in \mathbb{N}.$$

Remarquons qu'on a :

$$B_n := B_n^{(1)}, \; E_n := E_n^{(1)} \text{ et } G_n := G_n^{(1)}, \; n \in \mathbb{N}.$$

L'origine de la définition des polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi classiques repose sur l'étude des sommes $S_m(n)$ et $T_m(n)$ définies pour tous entiers naturels $n \geq 1$ et $m \geq 1$ par :

$$S_m(n) := \sum_{k=1}^{n} k^m \qquad \text{et} \qquad T_m(n) := \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m.$$

$S_m(n)$ est la somme des puissances m-ièmes des n premiers nombres entiers naturels non nuls. $T_m(n)$ est la somme alternée des puissances m-ièmes des n premiers nombres entiers naturels non nuls. En effet, en remarquant que l'on a :

$$B_{n+1}(x+1) - B_{n+1}(x) = \Delta\Omega_B\left(x^{n+1}\right) = (n+1)\,x^n,$$

$$E_n(x+1) + E_n(x) = \left(e^D + 1\right)\Omega_E(x^n) = 2x^n,$$

$$\text{et } G_{n+1}(x+1) + G_{n+1}(x) = \left(e^D + 1\right)\Omega_G\left(x^{n+1}\right) = (n+1)\,x^n,$$

on en déduit aisément les formules de sommation suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1}\left(B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(1)\right),$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m = \frac{1}{2}\left((-1)^n E_m(n+1) - E_m(1)\right),$$

$$\text{et } \sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m = \frac{1}{m+1} \left((-1)^n G_{m+1}(n+1) - G_{m+1}(1) \right).$$

On constate ainsi que les sommes $S_m(n)$ et $T_m(n)$ s'expriment à l'aide des polynômes de Bernoulli et d'Euler et de Genocchi. C'est en l'honneur du mathématicien suisse Jacques Bernoulli (1654-1705) [8] qui a été l'un des premiers à mettre en évidence la suite des nombres rationnels $B_1,\ B_2, \cdots$ dans l'expression de la somme $\sum_{k=1}^{n} k^m$ par un polynôme en n que ces nombres portent aujourd'hui son nom. Ces nombres apparaissent dans son traité de probabilités [8] intitulé "Ars Conjectandi" publié en 1713, huit années après sa mort. La formule qu'il obtient et qui permet d'exprimer $S_m(n)$ de manière générale comme un polynôme en n de degré $m+1$ porte le nom de Formule de Faulhaber.

Le mathématicien suisse Euler (1707-1783) a été l'un des premiers mathématiciens à s'être intéressé à la détermination de la somme alternée $T_m(n)$ et plus généralement à la détermination des polynômes $\sum_{k=1}^{n} x^k k^m$ [20]. Euler a obtenu les formules suivantes [20, 19] :

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^{2m} = \frac{(-1)^n}{2} n^{2m} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{m} \binom{2m}{2k-1} \frac{G_{2k}}{4k} n^{2m-2k+1}, \ m \geq 1,\ n \geq 1, \tag{2.1}$$

et

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^{2m+1} = \frac{(-1)^n}{2} n^{2m+1} + (-1)^{n+1} \sum_{k=1}^{m} \binom{2m+1}{2k-1} \frac{G_{2k}}{4k} n^{2m-2k+2} - \frac{G_{4m+2}}{4(m+1)}. \tag{2.2}$$

Ainsi, la suite des nombres G_n a été introduite par Euler. Elle est cependant connue aujourd'hui sous le nom de suite des nombres de Genocchi du nom du mathématicien italien Angelo Genocchi (1817-1889) qui les a aussi étudié plus particulièrement [22] (voir aussi [34, p. 251]).

Dans ce chapitre, nous exploitons certaines propriétés des opérateurs de composition pour, d'une part prouver de manière simple de nombreuses identités connues mais aussi, pour d'autre part, découvrir de nouvelles identités concernant les polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi classiques ou généralisés.

2.2 Polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi classiques

2.2.1 Définitions équivalentes

Il en résulte que les séries génératrices des suites de polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi sont :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n(x) \frac{z^n}{n!} = S_B(z) e^{xz}, \ \sum_{n=0}^{\infty} E_n(x) \frac{z^n}{n!} = S_E(z) e^{xz} \ \text{ et } \ \sum_{n=0}^{\infty} G_n(x) \frac{z^n}{n!} = S_G(z) e^{xz}. \tag{2.3}$$

Comme Ω_B et Ω_E sont des opérateurs d'Appell, Ω_B et Ω_E sont des automorphismes de $\mathbb{C}[x]$. Les opérateurs réciproques Ω_B^{-1} et Ω_E^{-1} sont définis par :

$$\Omega_B^{-1} = \frac{e^D - 1}{D} \quad \text{et} \quad \Omega_E^{-1} = \frac{e^D + 1}{2}$$

On peut exprimer Ω_B^{-1} à l'aide de l'opérateur de primitivation Int défini par :

$$\operatorname{Int}(x^n) := \frac{x^{n+1}}{n+1} = \int_0^x t^n dt =, \quad n \geq 0.$$

En effet, la relation immédiate

$$D \operatorname{Int} = 1$$

montre que Int est un inverse à droite de l'opérateur de dérivation. On en déduit que :

$$\Omega_B^{-1} = \frac{e^D - 1}{D} D \operatorname{Int} = \Delta \operatorname{Int}.$$

En utilisant la linéarité de l'opérateur Int, on constate que pour tout polynôme $P(x)$, on a :

$$\operatorname{Int}(P(x)) = \int_0^x P(t)\, dt. \tag{2.4}$$

On en déduit que pour tout entier $n \geq 0$, on a :

$$x^n = \Omega_B^{-1}(B_n(x)) = (\Delta \operatorname{Int})(B_n(x)) = \int_x^{x+1} B_n(t)\, dt.$$

On a aussi :

$$x^n = \Omega_E^{-1}(E_n(x)) = \left(\frac{e^D + 1}{2}\right)(E_n(x)) = \frac{1}{2}(E_n(x+1) + E_n(x)).$$

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Proposition 35 *Soit n un entier naturel.*

1. *Le n-ième polynôme de Bernoulli est l'unique polynôme de $\mathbb{C}[x]$ vérifiant la relation*

$$\int_x^{x+1} B_n(t)\, dt = x^n.$$

2. *Le n-ième polynôme d'Euler est l'unique polynôme de $\mathbb{C}[x]$ vérifiant la relation*

$$\frac{1}{2}(E_n(x+1) + E_n(x)) = x^n.$$

La proposition suivante donne une autre caractérisation des polynômes de Bernoulli :

Proposition 36 *La suite des polynômes de Bernoulli est l'unique $\mathcal{A}$-suite $(B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ qui vérifie la relation*

$$B_n(x+1) - B_n(x) = D(x^n), \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.5}$$

Preuve. En effet, d'une part $B := (B_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est une $\mathcal{A}$-suite qui vérifie bien la relation (2.5) du fait que l'on a :

$$\Delta(B_n(x)) = \Delta\Omega_B(x^n) = \Delta\frac{D}{\Delta}(x^n) = D(x^n), \, n \in \mathbb{N}.$$

D'autre part, si on considère une $\mathcal{A}$-suite $P := (P_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant la relation (2.5), on a, en désignant par Ω_P l'opérateur associée à cette suite :

$$\Delta\Omega_P = D = \Delta\Omega_B.$$

Ω_P étant aussi un opérateur de composition. L'algèbre $\mathfrak{C}$ étant intègre, on en déduit que $\Omega_P = \Omega_B$ et donc $P = B$. □

2.2.2 Relations entre polynômes

Proposition 37 *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

1.
$$B_n(1-x) = (-1)^n B_n(x), \tag{2.6}$$

2.
$$E_n(1-x) = (-1)^n E_n(x), \tag{2.7}$$

3.
$$G_n(1-x) = (-1)^{n+1} G_n(x), \tag{2.8}$$

4.
$$G_{n+1}(x) = (n+1) E_n(x). \tag{2.9}$$

Preuve. En utilisant la propriété (1.24) de la proposition 27, on a pour tout entier $n \geq 0$:

1.

$$\begin{aligned} B_n(1-x) &= e^{-D} B_n(-x) \\ &= \left((-1)^n e^{-D} S_B(-D)\right)(x^n) \\ &= (-1)^n S_B(D)(x^n) = (-1)^n B_n(x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned} E_n(1-x) &= e^{-D}E_n(-x) \\ &= \left((-1)^n e^{-D}S_E(-D)\right)(x^n) \\ &= (-1)^n S_E(D)(x^n) = (-1)^n E_n(x). \end{aligned}$$

3.

$$\begin{aligned} G_n(1-x) &= e^{-D}G_n(-x) \\ &= \left((-1)^n e^{-D}S_G(-D)\right)(x^n) \\ &= (-1)^{n+1} S_G(D)(x^n) = (-1)^{n+1} G_n(x). \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} G_{n+1}(x) &= (DS_E(D))\left(x^{n+1}\right) \\ &= (n+1)E_n(x). \end{aligned}$$

□

Les identités de la proposition suivante sont bien connues [55, Corollary 2.1 and Corollary 3.1]. Nous les prouvons ici par l'emploi des opérateurs de composition.

Proposition 38 *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$E_n(x) = \frac{2^{n+1}}{n+1}\left(B_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right),$$

$$E_n(x) = \frac{2}{n+1}\left(B_{n+1}(x) - 2^{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right). \tag{2.10}$$

Preuve. En utilisant la propriété (1.23) de la proposition 27, on a pour tout entier $n \geq 0$:

1.

$$\begin{aligned} \frac{2^{n+1}}{n+1}\left(B_{n+1}\left(\frac{x+1}{2}\right) - B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \left(e^D+1\right)\left(\frac{2^{n+1}}{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \left(e^D+1\right)\left(\frac{2D}{e^{2D}-1}\right)\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\ &= \frac{2D}{e^D+1} \circ \mathrm{Int}(x^n) \\ &= \Omega_E(x^n) = E_n(x). \end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{2}{n+1}\left(B_{n+1}(x)-2^{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\right) &= \frac{2}{n+1}B_{n+1}(x)-\frac{2^{n+2}}{n+1}B_{n+1}\left(\frac{x}{2}\right)\\
&= \frac{2}{n+1}\frac{D}{e^{D}-1}\left(x^{n+1}\right)-\frac{2}{n+1}\frac{2D}{e^{2D}-1}\left(x^{n+1}\right)\\
&= \frac{2D}{e^{D}-1}\circ \operatorname{Int}\left(x^{n}\right)-\frac{4D}{e^{2D}-1}\operatorname{Int}\left(x^{n}\right)\\
&= \left(\frac{2}{e^{D}-1}-\frac{4}{e^{2D}-1}\right)\left(x^{n}\right)\\
&= \Omega_E\left(x^{n}\right)=E_n(x).
\end{aligned}$$

□

2.2.3 Formules de récurrence

Proposition 39 *Pour tout entier naturel, on a :*

$$B_n(x)=x^n-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}B_k(x), \tag{2.11}$$

$$E_n(x)=x^n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}E_k(x), \tag{2.12}$$

$$G_0(x)=0 \quad et \quad G_n(x)=nx^{n-1}-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}G_k(x), \quad n\geq 1. \tag{2.13}$$

Preuve. Soit n un entier naturel.

1. On a :
$$x^n=\Delta\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)-\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n+1}{k}x^k. \tag{2.14}$$
En appliquant l'opérateur $\Omega_B=\frac{D}{\Delta}$ à chacun des membres de l'identité (2.14) et en tenant compte du fait que $\Omega_B\Delta=D$, on obtient la relation de récurrence (2.11).
2. On
$$\left(\frac{e^D+1}{2}\right)x^n=x^n+\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n}{k}x^k. \tag{2.15}$$
En appliquant l'opérateur $\Omega_E=\frac{2}{e^D+1}$ à chacun des membres de l'identité (2.14), on obtient la relation de récurrence (2.12).
3. Il suffit d'appliquer l'opérateur de dérivation D à chacun des membres de l'identité (2.12) pour obtenir la relation de récurrence (2.13).

$\square$

Les expressions des premiers polynômes de Bernoulli classiques sont :

$$\begin{aligned}
B_0(x) &= 1, \\
B_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
B_2(x) &= x^2 - x + \frac{1}{6}, \\
B_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x, \\
B_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x^2 - \frac{1}{30}.
\end{aligned}$$

Les expressions des premiers polynômes d'Euler classiques sont :

$$\begin{aligned}
E_0(x) &= 1, \\
E_1(x) &= x - \frac{1}{2}, \\
E_2(x) &= x^2 - x, \\
E_3(x) &= x^3 - \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{4}, \\
E_4(x) &= x^4 - 2x^3 + x.
\end{aligned}$$

Les expressions des premiers polynômes de Genocchi classiques sont :

$$\begin{aligned}
G_0(x) &= 0, \\
G_1(x) &= 1, \\
G_2(x) &= 2x - 1, \\
G_3(x) &= 3x^2 - 3x, \\
G_4(x) &= 4x^3 - 6x^2 + 1.
\end{aligned}$$

2.2.4 Nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi

A l'aide de la relation (2.3), on obtient les séries génératrices de ces suites de nombres :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{z^n}{n!} = \frac{z}{e^z - 1}, \ \sum_{n=0}^{\infty} E_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2}{e^z + e^{-z}} \ \text{ et } \sum_{n=0}^{\infty} G_n \frac{z^n}{n!} = \frac{2z}{e^z + 1}.$$

Proposition 40 *On a :*

$$G_n = 2\left(1 - 2^n\right) B_n \ \textit{pour } n \geq 0. \tag{2.16}$$

Preuve. Pour $n = 0$, on a bien $G_0 = 0 = 2\left(1 - 2^0\right) B_0$. Pour $n \geq 1$, on a d'après (2.9) et (2.10) :

$$G_n = nE_{n-1}\left(0\right) = 2\left(B_n - 2^n B_n\right) = 2\left(1 - 2^n\right) B_n.$$

$\square$

Proposition 41 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$B_1 = -\frac{1}{2} \text{ et } B_{2n+1} = 0 \text{ pour } n \geq 1, \tag{2.17}$$

$$E_{2n+1} = 0 \quad \text{pour } n \geq 0, \tag{2.18}$$

$$G_1 = 1 \quad \text{et} \quad G_{2n+1} = 0 \text{ pour } n \geq 1. \tag{2.19}$$

Preuve.

1. On a vu que $B_1\left(x\right) = x - \frac{1}{2}$. On en déduit que $B_1 = -\frac{1}{2}$. Pour tout entier naturel $n \geq 1$, la propriété (2.5) de la proposition 36 écrite pour $x = 0$ et avec $2n+1$ au lieu de n fournit la relation fournit la relation $B_{2n+1}\left(1\right) = B_{2n+1}$. D'autre part la propriété (2.6) de la proposition 37 écrite pour $x = 0$ et avec $2n+1$ au lieu de n fournit la relation $B_{2n+1}\left(1\right) = -B_{2n+1}$. Il en résulte que l'on a $B_{2n+1} = -B_{2n+1}$ et par conséquent $B_{2n+1} = 0$.
2. Pour $n \geq 0$, la propriété (2.7) de la proposition 37 écrite pour $x = \frac{1}{2}$ et avec $2n+1$ au lieu de n fournit la relation $E_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right) = -E_{2n+1}\left(\frac{1}{2}\right)$. On en déduit que $E_{2n+1} = 0$.
3. Pour $n \geq 0$, la propriété (2.16) écrite avec $2n+1$ au lieu de n fournit la relation $G_{2n+1} = 2\left(1 - 2^{2n+1}\right) B_{2n+1}$. Il en résulte que $G_1 = -2B_1 = 1$ et $G_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$ car $B_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$.

$\square$

Le Lemme suivant nous sera utile pour préciser le signe des nombres d'Euler. Nous le prouvons en exploitant certaines propriétés des séries formelles de $\mathbb{C}\left[\left[z\right]\right]$

Lemme 42 *Pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$nE_{2n} = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} \binom{2n}{2k} G_{2k} E_{2n-2k}. \tag{2.20}$$

Preuve. On a :

$$\sum_{n=0}^{\infty} E_{2n} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{2}{e^z + e^{-z}}, \tag{2.21}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2nE_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = z\left(\frac{2}{e^{z}+e^{-z}}\right)' = \frac{2z\left(e^{-z}-e^{z}\right)}{\left(e^{z}+e^{-z}\right)^{2}}, \tag{2.22}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}G_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \frac{4z}{e^{2z}+1} - 2z = 2z\frac{e^{-z}-e^{z}}{e^{z}+e^{-z}}. \tag{2.23}$$

En remarquant que le double du membre de droite de (2.22) est égal au produit des membres de droite de (2.21) et (2.23), on en déduit que :

$$2\sum_{n=0}^{\infty} 2nE_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} = \sum_{n=0}^{\infty} E_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{2n}G_{2n}\frac{z^{2n}}{(2n)!} \tag{2.24}$$

En identifiant les coefficients de z^{2n} dans (2.24), on obtient (2.20). $\square$

Proposition 43 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$B_0 = 1,\ B_2 = \frac{1}{6} \text{ et } B_{2n} = -\frac{1}{2n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k} \text{ pour } n \geq 2, \tag{2.25}$$

$$E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1}\binom{2n}{2k}E_{2k}, \text{ pour } n \geq 1, \tag{2.26}$$

$$G_{2n} = -\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}G_{2n-k}, \text{ pour } n \geq 0. \tag{2.27}$$

Preuve.

1. Les relations $B_0 = 1$ et $B_2 = \frac{1}{6}$ sont immédiates compte tenu des expressions des polynômes $B_0(x)$ et $B_2(x)$. Pour $x = 0$, on déduit de la relation (1.27) de la proposition 29 l'identité suivante vérifiée pour $n \geq 1$:

$$\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}B_kB_{2n-k} = (1-2n)\,B_{2n} + 2n\,(-1)\,B_{2n-1}.$$

   Pour $n \geq 2$, on a $B_{2n-1} = 0$ et $B_kB_{2n-k} = 0$ pour k impair, $1 \leq k \leq 2n-1$. On en déduit que

$$2B_{2n} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{2n}{2k}B_{2k}B_{2n-2k} = (1-2n)\,B_{2n}.$$

   La relation (2.25) en résulte.

2. On a pour tout entier $n \geq 0$:

$$\left(e^{D}+1\right)\left(2^{2n-1}x^{2n}\right) = \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}2^{2k}\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2k}. \tag{2.28}$$

En appliquant l'opérateur $\Omega_E = \frac{2}{e^D+1}$ à chacun des membres de (2.28), on obtient la relation suivante :

$$2^{2n}x^{2n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} 2^{2k} E_{2k}\left(x+\frac{1}{2}\right). \tag{2.29}$$

Pour $x = 0$, on déduit alors de (2.29) :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k} E_{2k} = \delta_{n,0}.$$

La relation (2.26) en résulte.

3. L'identité (1.20) de la proposition 26 écrite pour la $\mathcal{A}$-suite $G = (G_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ avec $m = n$, $q = 0$ et $\lambda = 1$ fournit la relation suivante :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n+k}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} G_{n+k}(x+1).$$

Or d'après la propriété (2.8), on a :

$$G_{n+k}(1-x) = (-1)^{n+k+1} G_{n+k}(x),$$

on en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \{G_{n+k}(x) + G_{n+k}(-x)\} = 0.$$

Pour $x = 0$, on obtient la relation :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n+k} = 0. \tag{2.30}$$

La relation (2.27) en résulte.

□

La relation (2.30) est dû à Seidel.

Proposition 44 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$(-1)^{n+1} B_{2n} > 0,\ \ n \geq 1, \tag{2.31}$$

$$(-1)^{n} E_{2n}\ \in 2\mathbb{N}+1,\ \ n \geq 0, \tag{2.32}$$

$$(-1)^{n} G_{2n}\ \in 2\mathbb{N}+1;\ \ n \geq 1. \tag{2.33}$$

Preuve.

1. Posons
$$u_n := (-1)^{n+1} B_{2n}. \tag{2.34}$$
On déduit de (2.25) les relations suivantes :
$$u_1 = \frac{1}{6} \text{ et } u_n = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=1}^{n-1} \binom{2n}{2k} u_k u_{n-k} \text{ pour } n \geq 2. \tag{2.35}$$
On constate ainsi, à l'aide de (2.35) qu'on a l'implication suivante pour tout entier $n \geq 2$:
$$(u_k > 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1) \Longrightarrow u_n > 0.$$
Comme de plus on a $u_1 > 0$, on en déduit à l'aide d'un raisonnement par recurrence que l'on a $u_n > 0$ pour tout entier $n \geq 1$.
2. Posons
$$v_n := (-1)^n E_{2n}.$$
et
$$w_n := (-1)^n G_{2n}.$$
Avec (2.16) et (2.34), on a :
$$w_n = 2\left(2^{2n} - 1\right) u_n \text{ pour } n \geq 0.$$
Comme on a déjà prouvé que $u_n > 0$ pour $n \geq 1$, on en déduit qu'on a aussi $w_n > 0$ pour $n \geq 1$. De plus, la relation (2.20) du Lemme 42 s'écrit :
$$nv_n = \sum_{k=1}^{n} 4^{k-1} \binom{2n}{2k} w_k v_{n-k}$$
On a l'implication suivante :
$$(v_k > 0 \text{ pour } 1 \leq k \leq n-1) \Longrightarrow v_n > 0.$$
Comme $v_0 = v_1 = 1 > 0$, on obtient à l'aide d'un raisonnement par récurrence immédiat que $v_n > 0$ pour tout entier $n \geq 0$.
3. Il nous reste à prouver que $(-1)^n E_{2n} \in 2\mathbb{N} + 1$ pour $n \geq 0$ et $(-1)^n G_{2n} \in 2\mathbb{N} + 1$ pour $n \geq 1$. En exploitant les relations $E_0 = 1$, $E_2 = -1$ et $E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k}$, pour $n \geq 1$ (relation (2.26)), on constate aisément à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $E_{2n} \in \mathbb{Z}$ pour tout entier $n \geq 0$. De même, en exploitant la relation de Seidel $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} G_{n+k} = 0$ vérifiée pour $n \geq 0$ et la relation et les relations $G_1 = 1$ et $G_{2n+1} = 0$ pour $n \geq 1$ (relation (2.19)), on montre aisément à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $G_n \in \mathbb{Z}$.

En constatant qu'on a l'implication suivante :

$$\begin{aligned} E_{2k} &\equiv 1 \pmod 2 \ \text{ pour } 1 \le k \le n-1 \\ &\Rightarrow \ E_{2n} = -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} E_{2k} \equiv -\sum_{k=0}^{n-1} \binom{2n}{2k} = 1 - 2^{2n-1} \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

vérifiée pour $n \ge 2$, avec $E_0 = 1 \equiv 1 \pmod 2$, on montre aisément à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $E_{2n} \equiv 1 \pmod 2$ pour $n \ge 0$. Il en résulte que $(-1)^n E_{2n} \in 2\mathbb{N}+1$ pour $n \ge 0$.
Compte tenu de la propriété (2.17) de la proposition 41, on déduit de (2.27) de la proposition 43 la relation suivante :

$$G_{2n} = -\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} G_{2n-2k}, \ \text{ pour } n \ge 2.$$

On a alors l'implication suivante :

$$\begin{aligned} G_{2k} &\equiv 1 \pmod 2 \ \text{ pour } 1 \le k \le n-1 \\ &\Rightarrow \ G_{2n} = -\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} G_{2n-2k} \equiv -\sum_{k=1}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n}{2k} = 1 - 2^{n-1} \equiv 1 \pmod 2 \end{aligned}$$

vérifiée pour $n \ge 2$ avec $G_2 = 1 \equiv 1 \pmod 2$, on montre aisément à l'aide d'un raisonnement par récurrence que $G_{2n} \equiv 1 \pmod 2$ pour $n \ge 0$. Il en résulte que $(-1)^n G_{2n} \in 2\mathbb{N}+1$ pour $n \ge 1$.

□

Signalons que Genocchi [22] a prouvé en 1852 que tous les termes de la suite $(G_{2n})_{n\ge1}$sont des nombres entiers. On a :

$$\begin{aligned} \left((-1)^{n+1} B_{2n}\right)_{n\ge1} &= \left(\frac{1}{6}, \frac{1}{30}, \frac{1}{42}, \frac{1}{30}, \frac{5}{66}, \frac{691}{2730}, \frac{7}{6} \cdots\right), \\ \left((-1)^n E_{2n}\right)_{n\ge0} &= (1, 1, 5, 61, 1385, 50521, 2702765, 199360981, \ldots), \\ \left((-1)^n G_{2n}\right)_{n\ge1} &= (1, 1, 3, 17, 155, 2073, 38227, \ldots). \end{aligned}$$

2.2.5 Formules explicites

Depuis la mise en évidence des nombres de Bernoulli par J. Bernoulli en 1713, de très nombreuses formules dites explicites pour les nombres de Bernoulli sont apparues. En 1972, Gould a établi une synthèse des travaux et surtout des méthodes qui ont permis la découverte de ces formules. Dans [21], Gould cite la formule explicite suivante :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^n, \qquad n \geq 0, \tag{2.36}$$

Gould affirme que cette formule explicite est très ancienne et qu'il serait difficile d'en attribuer la priorité de cette découverte à l'un des nombreux auteurs qui l'ont prouvé. Signalons qu'on trouve dans la littérature d'aujourd'hui de nombreuses autres formules explicites pour les nombres ainsi que pour les polynômes de Bernoulli ou d'Euler classiques. Les articles [28, 2021] de Khaldi, Bencherif et Mihoubi et [29, 2022] de Khaldi, Bencherif et Mihoubi contiennent de nombreuses et intéressantes formules explicites pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler obtenues grâce à l'utilisation des opérateurs de composition. Dans la proposition suivante, nous présentons trois formules explicites. Les deux premières sont classiques, la troisième est originale. Ces trois formules sont obtenues grâce à l'utilisation des opérateurs de composition.

Proposition 45 *Pour tous entiers naturels n et m tels que $m \geq n$, on a :*

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{k+1} \binom{k}{j} (x+j)^n, \tag{2.37}$$

$$E_n(x) = \sum_{k=0}^{m} \sum_{j=0}^{k} \frac{(-1)^j}{2^k} \binom{k}{j} (x+j)^n, \tag{2.38}$$

$$2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{k!}{\sqrt{2}^{k-1}} \cos\left(\frac{(3k-1)\pi}{4}\right) S(n,k,x). \tag{2.39}$$

Preuve. Considérons les opérateurs de composition Ω_B, Ω_E et $\Omega_{E^*} := \frac{2e^D}{e^{2D}+1}$. On peut exprimer ces opérateurs comme des séries en Δ. On a :

$$\Omega_B = \frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Delta^k}{k+1}, \tag{2.40}$$

$$\Omega_E = \frac{2}{2+\Delta} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^{k+1} \frac{\Delta^k}{k+1}, \tag{2.41}$$

$$\begin{aligned} \Omega_{E^*} &= \frac{2e^D}{e^{2D}+1} = \frac{2+2\Delta}{1+(1+\Delta)^2} = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \operatorname{Re}\left((i-1)^{k+1}\right) \Delta^k \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2}^{k-1}} \cos\left(\frac{(3k-1)\pi}{4}\right) \Delta^k. \end{aligned} \tag{2.42}$$

Il suffit d'appliquer ces opérateurs à x^n :

$$B_n(x) = \Omega_B(x^n), \; E_n(x) = \Omega_E(x^n) \quad \text{et } \Omega_{E^*}(x^n) = \; 2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right),$$

en tenant compte des expressions des opérateurs exprimés comme des séries en Δ et de remarquer ensuite que $\Delta^m (x^n) = 0$ pour $m > n$ pour obtenir les relations (2.37), (2.38) et (2.39). $\square$

En 2018, Bounebirat, Laissaoui et Rahmani [9] ont prouvé la formule explicite suivante pour le n-ième nombre d'Euler :

$$E_n = -\sum_{k=1}^{n} \frac{k!}{2^k} \operatorname{Re}\left((i-1)^{k+1}\right) S(n,k), \; n \geq 0. \tag{2.43}$$

La relation (2.39) est une généralisation aux polynômes d'Euler de cette formule explicite pour les nombres d'Euler.

2.2.6 Formules de sommation

Proposition 46 *Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} n^{m+1} + \frac{1}{2} n^m + \frac{1}{m+1} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{2k} B_{2k} n^{m+1-2k}, \tag{2.44}$$

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^k k^m = \frac{(-1)^n}{2} n^m - \frac{(-1)^n}{2(m+1)} \sum_{k=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \binom{m+1}{2k} G_{2k} n^{m+1-2k} - (-1)^m \left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right) \frac{G_{m+1}}{m+1}. \tag{2.45}$$

Preuve.

1. On a :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} k^m &= \sum_{k=1}^{n} \frac{B_{m+1}(k+1) - B_{m+1}(k)}{m+1} \\ &= \frac{1}{m+1} \left(B_{m+1}(n+1) - B_{m+1}(1)\right) \\ &= \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} B_k(1) n^{m+1-k}. \end{aligned}$$

   Or on a $B_k(1) = (-1)^k B_k$, on en déduit que :

$$\sum_{k=1}^{n} k^m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k} (-1)^k B_k n^{m+1-k}. \tag{2.46}$$

   En développant le second membre de (2.46) et en tenant compte du fait que $B_k = 0$ pour tout entier k impair supérieur ou égal à 3, on obtient la formule de Faulhaber (2.44).

2. On a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}(-1)^k k^m &= \frac{1}{2(m+1)}\left((-1)^n G_{m+1}(n+1) - G_{m+1}(1)\right)\\ &= \frac{1}{2(m+1)}\left((-1)^{n+m} G_{m+1}(-n) - (-1)^m G_{m+1}\right)\\ &= \frac{1}{2(m+1)}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k}(-1)^{n+1-k} G_k n^{m+1-k}\\ &\quad -(-1)^m\left(\frac{1-(-1)^n}{2}\right)\frac{G_{m+1}}{m+1}.\end{aligned}$$

En tenant compte du fait que $G_0 = 0$, $G_1 = 1$ et $G_k = 0$ pour $k \geq 3$ impair, on en déduit la relation (2.45).

□

La formule (2.44) est en termes modernes, la formule obtenue par J. Bernoulli [8, 23, p. 301]. Johann Faulhaber (1580-1635) est un mathématicien allemand qui a donné des expressions polynomiales de $S_m(n)$ pour $m \leq 17$ [31] avant J. Bernoulli. En son hommage, la formule (2.44) est connue aujourd'hui sous le nom de Formule de Faulhaber.

2.2.7 Formules de multiplication

Proposition 47 *Pour tous entiers $m \geq 1$ et $n \geq 0$, on a :*

$$B_n(x) + B_n\left(x+\frac{1}{m}\right) + \cdots + B_n\left(x+\frac{m-1}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}}B_n(mx), \tag{2.47}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k E_n\left(x+\frac{k}{m}\right) = \frac{1}{m^n}E_n(mx), \quad m \textit{ impair}, \tag{2.48}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k B_{n+1}\left(x+\frac{k}{m}\right) = -\frac{n+1}{2m^n}E_n(mx), \quad m \textit{ impair}, \tag{2.49}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k G_n\left(x+\frac{k}{m}\right) = \frac{1}{m^{n-1}}G_n(mx), \quad m \textit{ impair}, \tag{2.50}$$

$$\sum_{k=0}^{m-1}(-1)^k B_n\left(x+\frac{k}{m}\right) = -\frac{1}{2m^{n-1}}G_n(mx), \quad m \textit{ pair}. \tag{2.51}$$

Nous allons prouver cette proposition en exploitant les propriétés des opérateurs de composition.

Preuve. Pour tous entiers naturels n et m tels que $m \geq 1$, on a :

1. Nous avons
$$\sum_{k=0}^{m-1} B_n\left(x+\frac{k}{m}\right)=\Omega\left(x^n\right). \tag{2.52}$$
avec
$$\begin{aligned}\Omega &= \left(\sum_{k=0}^{m-1} e^{\frac{kD}{m}}\right)\circ\Omega_B\\ &= \frac{e^D-1}{e^{\frac{D}{m}}-1}\circ\frac{D}{e^D-1}\\ &= mS_B\left(\frac{D}{m}\right).\end{aligned}$$
D'après la proposition 27, on a alors :
$$\Omega\left(x^n\right)=m\frac{B_n\left(mx\right)}{m^n}=\frac{1}{m^{n-1}}B_n\left(mx\right). \tag{2.53}$$
La propriété (2.47) résulte alors des relations (2.52) et (2.53).
2. Pour m impair, on a :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left(-1\right)^k E_n\left(x+\frac{k}{m}\right) &= \sum_{k=0}^{m-1}\left(-e^{\frac{D}{m}}\right)^k\Omega_E\left(x^n\right)\\ &= \frac{-e^D-1}{-e^{\frac{D}{m}}-1}\frac{2}{e^D+1}\left(x^n\right)\\ &= \frac{2}{e^{\frac{D}{m}}+1}\left(x^n\right)\\ &= S_E\left(\frac{D}{m}\right)\left(x^n\right)\\ &= \frac{1}{m^n}E_n\left(mx\right),.\end{aligned}$$
3. Pour m pair, on a en appliquant la proposition 27 :
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{m-1}\left(-1\right)^k B_{n+1}\left(x+\frac{k}{m}\right) &= \left(\sum_{k=0}^{m-1}\left(-e^{\frac{D}{m}}\right)^k\Omega_B\right)\left(x^{n+1}\right)\\ &= \frac{e^D-1}{-e^{\frac{D}{m}}-1}\frac{D}{e^D-1}\,\mathrm{Int}\left((n+1)x^n\right)\\ &= \frac{1}{-e^{\frac{D}{m}}-1}(n+1)\left(x^n\right)\\ &= -(\frac{n+1}{2})S_E\left(\frac{D}{m}\right)\left(x^n\right)\\ &= -\frac{n+1}{2m^n}E_n\left(mx\right).\end{aligned}$$

4. Les preuves de (2.50) et(2.51) sont similaires aux preuves précèdentes.

□

La formule de multiplication (2.47) porte de nom de "formule de Raabe" en l'honneur du mathématicien suisse Joseph Ludwig Raabe (1801-1859). Ce mathématicien est connu pour ses travaux sur les polynômes de Bernoulli. Il a en effet écrit deux articles majeurs sur ce sujet, l'un de 52 pages en 1848 et l'autre de 30 pages en 1851[46] dans lequel il a introduit le terme de "polynômes de Bernoulli". Dans son premier article [45, p.20 relation (16)], on trouve l'expression (2.47).

Signalons l'importante application de la formule de Raabe à l'évaluation des nombres $B_n(r)$ pour $r \in \left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{6}\right\}$.

Corollaire 48 *Pour tout entier naturel n, on a :*

$$B_n(1) = B_n, \quad n \neq 1. \tag{2.54}$$

$$B_n\left(\frac{1}{2}\right) = \left(2^{1-n} - 1\right) B_n, \; n \text{ pair } B_n\left(\frac{1}{2}\right) = 0, \; n \text{ impair}. \tag{2.55}$$

$$B_n\left(\frac{1}{3}\right) = B_n\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{1}{2}\left(3^{1-n} - 1\right) B_n, \; n \text{ pair}. \tag{2.56}$$

$$B_n\left(\frac{1}{4}\right) = B_n\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{2}\left(4^{1-n} - 2^{1-n}\right) B_n, \; n \text{ pair}. \tag{2.57}$$

$$B_n\left(\frac{1}{6}\right) = B_n\left(\frac{5}{6}\right) = \frac{1}{2}\left(6^{1-n} - 3^{1-n} - 2^{1-n} + 1\right) B_n, \; n \text{ pair}. \tag{2.58}$$

Preuve. (2.54) s'obtient à l'aide de la relation (2.5) écrite pour $x = 0$ et $n > 1$, (2.55), (2.56) et (2.57) et (2.58) résultent de la relation (2.47) écrite pour $x = 0$ et respectivement pour $n = 2$, 3, 4 et 6. □

Le Corollaire **??** exprime $B_n(r)$ pour $r = \frac{a}{q}$ avec $q \in \{2, 3, 4, 6\}$ et $1 \leq a < q-1$ et $(a, q) = 1$. On ne sait toujours pas si $B_n(r)$ a une "forme close" aussi simple pour tout autre nombre rationnel $r = \frac{a}{q}$ avec $1 < a < q-1$, $(a, q) = 1$ et $q \notin \{2, 3, 4, 6\}$.Ce problème, considéré comme une question intéressante posée par Emma Lehmer en 1938 dans [33], n'a toujours pas eu de réponse satisfaisante. Seuls, Granville et Sun [24] ont apporté en 1996 une première avancée sur cette question.

2.3 Polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi généralisés

2.3.1 Définitions des polynômes et nombres de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi généralisés

Il en résulte que les séries génératrices des suites de polynômes de Bernoulli, d'Euler et de Genocchi sont :

$$\sum_{n=0}^{\infty} B_n^{(\alpha)}(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^{\alpha} e^{xz},$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} E_n^{(\alpha)}(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{2}{e^z + 1}\right)^{\alpha} e^{xz},$$
$$\text{et } \sum_{n=0}^{\infty} G_n^{(m)}(x) \frac{z^n}{n!} = \left(\frac{2z}{e^z + 1}\right)^{m} e^{xz}.$$

2.3.2 Relations entre polynômes

Proposition 49 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $m \in \mathbb{N}$, on a pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:*

$$B_n^{(\alpha)}(\alpha - x) = (-1)^n B_n^{(\alpha)}(x), \tag{2.59}$$

$$E_n^{(\alpha)}(\alpha - x) = (-1)^n E_n^{(\alpha)}(x), \tag{2.60}$$

$$G_n^{(m)}(m - x) = (-1)^{n+m} G_n^{(m)}(x), \tag{2.61}$$

$$G_{n+m}^{(m)}(x) = \frac{(m+n)!}{n!} E_n^{(m)}(x). \tag{2.62}$$

Preuve. En exploitant la relation (1.23) (1.24) de la proposition 27, on a :

$$A_n(\lambda x) = \lambda^n S\left(\frac{D}{\lambda}\right)(x^n), \qquad n \geq 0, \tag{2.63}$$

$$A_n(\lambda - x) = (-1)^n e^{-\lambda D} S(-D)(x^n), \qquad n \geq 0. \tag{2.64}$$

1.
$$B_n^{(\alpha)}(\alpha - x) = (-1)^n e^{-\alpha D} S_{B^{(\alpha)}}(-D)(x^n).$$

En remarquant que :

$$e^{-\alpha z} S_{B^{(\alpha)}}(-z) = e^{-\alpha z}\left(\frac{-z}{e^{-z} - 1}\right)^{\alpha} = \left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^{\alpha} = S_{B^{(\alpha)}}(z),$$

on en déduit que :

$$B_n^{(\alpha)}(\alpha - x) = (-1)^n S_{B^{(\alpha)}}(z)(x^n) = (-1)^n B_n^{(\alpha)}(x).$$

Les preuves des relations (2.60) et (2.61) sont analogues à celle de (2.59).

2. On a :

□

$$G_{m+n}^{(m)}(x) = \left(\frac{2D}{e^D+1}\right)^m \left(x^{m+n}\right) = D^m E_{m+n}^{(m)}(x) = \frac{(m+n)!}{n!} E_n^{(m)}(x).$$

Proposition 50 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et $n \in \mathbb{N}$, on a :*

$$B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x) = nB_n^{(\alpha-1)}(x), \tag{2.65}$$

$$E_n^{(\alpha)}(x+1) + E_n^{(\alpha)}(x) = 2E_n^{(\alpha-1)}(x). \tag{2.66}$$

Preuve.

1. On a

$$\begin{aligned} B_n^{(\alpha)}(x+1) - B_n^{(\alpha)}(x) &= \Delta\Omega_{B^{(\alpha)}}(x^n) \\ &= \Delta\left(\frac{D}{\Delta}\right)^\alpha (x^n) \\ &= D\left(\frac{D}{\Delta}\right)^{\alpha-1} (x^n) \\ &= DB_n^{(\alpha-1)}(x) \\ &= nB_n^{(\alpha-1)}(x). \end{aligned}$$

2. On a

$$\begin{aligned} E_n^{(\alpha)}(x+1) + E_n^{(\alpha)}(x) &= \left(e^D+1\right)\Omega_{E^{(\alpha)}}(x^n) \\ &= \left(e^D+1\right)\left(\frac{2}{e^D+1}\right)^\alpha (x^n) \\ &= 2\left(\frac{2}{e^D+1}\right)^{\alpha-1} (x^n) \\ &= 2E_n^{(\alpha-1)}(x). \end{aligned}$$

□

2.3.3 Formules de récurrence

Les deux formules de récurrence classiques suivantes sont bien connues (voir [48, p.96 et p.103]) :

$$B_n^{(\alpha+1)}(x) = \left(1 - \frac{n}{\alpha}\right) B_n^{(\alpha)}(x) - n\left(\frac{x}{\alpha} - 1\right) B_{n-1}^{(\alpha)}(x), \tag{2.67}$$

et

$$E_{n+1}^{(\alpha)}(x) = xE_n^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha}{2} E_n^{(\alpha+1)}(x+1). \tag{2.68}$$

Dans la proposition suivante, nous prouvons deux autres formules de récurrences. La première formule (2.69) est une relation de récurrence vérifiée par les polynômes de Bernoulli généralisés. Elle a été énoncée en 2015 par Dimitry V. Kruchinin et Vladimir V. Kruchinin [32] . La seconde est une relation de récurrence analogue vérifiée par les polynômes d'Euler généralisés (2.70).

Proposition 51 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et pour tout entier $n \geq 1$, on a :*

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) B_{n-1}^{(\alpha)}(x) - \frac{\alpha}{n} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_{n-k}(0)\, B_k^{(\alpha)}(x), \tag{2.69}$$

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \left(x - \frac{\alpha}{2}\right) E_{n-1}^{(\alpha)}(x) + \frac{\alpha}{2} \sum_{k=0}^{n-2} (-1)^{n-k} \binom{n-1}{k} E_{n-k}(0)\, E_k^{(\alpha)}(x). \tag{2.70}$$

Preuve.

1. Pour $\alpha \in \mathbb{C}$ donné, posons :

$$S(z) := z\left(\frac{z}{e^z - 1}\right)^{\alpha} = zS_{B^{(\alpha)}}(z)$$

On a alors :

$$\begin{aligned} S'(z) \quad : \quad &= (\alpha+1)\left(\frac{z}{e^z-1}\right)^{\alpha} - \alpha e^z \left(\frac{z}{e^z-1}\right)^{\alpha+1} \\ &= (\alpha+1)\, S_{B^{(\alpha)}}(z) - \alpha e^z S_{B^{(\alpha+1)}}(z). \end{aligned}$$

D'après le Corollaire 28, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S'(D)(x^n) = (S(D)\, M_x - M_x S(D))(x^n).$$

Cette dernière relation se traduit par l'identité suivante :

$$(\alpha+1)\, B_n^{(\alpha)}(x) - \alpha B_n^{(\alpha+1)}(x+1) = (n+1)\, B_n^{(\alpha)}(x) - nxB_{n-1}^{(\alpha)}(x). \tag{2.71}$$

En remarquant que l'on a :

$$\begin{aligned}
B_n^{(\alpha+1)}(x+1) &= \Omega_B^\alpha \Omega_B (x+1)^n \\
&= \Omega_B^\alpha (B_n(x+1)) \\
&= (-1)^n \Omega_B^\alpha (B_n(-x)) \\
&= \Omega_B^\alpha \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k} (-x)^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_{n-k} B_k^{(\alpha)}(x) . \qquad (2.72)
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.71) $B_n^{(\alpha+1)}(x+1)$ par son expression donnée en (2.72), on déduit aisément la relation (2.69).

2. On procède de manière analogue pour prouver la relation (2.70) en considérant la série formelle $S_{E^{(\alpha)}}(z) = \left(\frac{2}{e^z+1}\right)^\alpha$. On a :

$$S'_{E^{(\alpha)}}(z) = -\frac{\alpha}{2} z e^z \left(\frac{2}{e^z+1}\right)^{\alpha+1} .$$

D'après le Corollaire 28, pour tout entier $n \geq 1$, on a :

$$S'_{E^{(\alpha)}}(D)(x^n) = \left(S_{E^{(\alpha)}}(D) M_x - M_x S_{E^{(\alpha)}}(D)\right)(x^n) .$$

Cette dernière relation se traduit par l'identité suivante :

$$\frac{1}{2}\alpha E_n^{(\alpha+1)}(x+1) = E_{n+1}^{(\alpha)}(x) - x E_n^{(\alpha)}(x) . \qquad (2.73)$$

En constatant que l'on a :

$$\begin{aligned}
E_n^{(\alpha+1)}(x+1) &= \Omega_E^\alpha \Omega_E^\alpha (x+1)^n \\
&= \Omega_E^\alpha E_n(x+1) \\
&= (-1)^n \Omega_E^\alpha (E_n(-x)) \\
&= \Omega_E^\alpha \left((-1)^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(0) (-x)^k \right) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} E_{n-k}(0) E_k^{(\alpha)}(x) . \qquad (2.74)
\end{aligned}$$

En remplaçant dans (2.73) $E_n^{(\alpha+1)}(x+1)$ par son expression donnée en (2.74), on déduit aisément la relation (2.70).

$\square$

Remarquons qu'en exploitant les relations (2.71) et (2.65), on montre facilement que les relations (2.69) et (2.67) sont équivalentes. De même, en exploitant les relations (2.73) et (2.66), on montre aussi facilement que les relations (2.70) et (2.68) sont équivalentes.

Les premiers polynômes de Bernoulli généralisés $B_n^{(\alpha)}(x)$ sont :

$$\begin{aligned}
B_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
B_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{1}{2}\alpha, \\
B_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - \alpha x - \frac{1}{12}\alpha(3\alpha - 1), \\
B_3^{(\alpha)}(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2 + \frac{1}{4}\alpha(3\alpha - 1)x - \frac{1}{8}\alpha^2(\alpha - 1), \\
B_4^{(\alpha)}(x) &= x^4 - 2\alpha x^3 - \frac{1}{8}\alpha^2(\alpha - 1)x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2(\alpha - 1)x + \frac{1}{240}\alpha(15\alpha^3 - 30\alpha^2 + 5\alpha + 2),
\end{aligned}$$

Les premiers polynômes d'Euler généralisés $E_n^{(\alpha)}(x)$ sont :

$$\begin{aligned}
E_0^{(\alpha)}(x) &= 1, \\
E_1^{(\alpha)}(x) &= x - \frac{1}{2}\alpha, \\
E_2^{(\alpha)}(x) &= x^2 - \alpha x + \frac{1}{4}\alpha(\alpha - 1), \\
E_3^{(\alpha)}(x) &= x^3 - \frac{3}{2}\alpha x^2 + \frac{3}{4}\alpha(\alpha - 1)x - \frac{1}{8}\alpha^2(\alpha - 3), \\
E_4^{(\alpha)}(x) &= x^4 - 2\alpha x^3 + \frac{3}{2}\alpha(\alpha - 1)x^2 - \frac{1}{2}\alpha^2(\alpha - 3)x + \frac{1}{16}\alpha(\alpha - 1)(\alpha^2 - 5\alpha - 2).
\end{aligned}$$

A l'aide de (2.62), on en déduit aussi les premiers polynômes de Genocchi généralisés $G_{m+n}^{(m)}(x)$:

$$\begin{aligned}
G_m^{(m)}(x) &= m!, \\
G_{m+1}^{(m)}(x) &= (m+1)!\left(x - \frac{1}{2}m\right), \\
G_{m+2}^{(m)}(x) &= \frac{(m+2)!}{2}\left(x^2 - mx + \frac{1}{4}m(m-1)\right), \\
G_{m+3}^{(m)}(x) &= \frac{(m+3)!}{3}\left(x^3 - \frac{3}{2}mx^2 + \frac{3}{4}m(m-1)x - \frac{1}{8}m^2(m-3)\right), \\
G_{m+4}^{(m)}(x) &= \frac{(m+4)!}{4}\left(x^4 - 2mx^3 + \frac{3}{2}m(m-1)x^2 - \frac{1}{2}m^2(m-3)x \right.\\
&\quad \left. + \frac{1}{16}m(m-1)(m^2 - 5m - 2)\right).
\end{aligned}$$

2.3.4 Formules explicites

Proposition 52 *Soient $\alpha \in \mathbb{C}$, $k \in \mathbb{N}$. Pour tous entiers naturels n et m tels que $m \geq n$, on a :*

$$B_n^{(-k)}(x) = \binom{n+k}{k}^{-1} S(n+k,k,x), \tag{2.75}$$

$$B_n^{(-k)}(x) = \sum_{j=0}^{n} \binom{j+k}{k}^{-1} \binom{n}{j} S(k+j,k) x^{n-j}, \tag{2.76}$$

$$B_n^{(k)}(x) = \sum_{j=0}^{m} \binom{j+k}{k}^{-1} s\,(k+j,k)\, S(n,j,x), \tag{2.77}$$

$$E_n^{(-k)}(x) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x+j)^n\,, \tag{2.78}$$

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k\, k!}{2^k} \binom{\alpha+k-1}{k} S\,(n,k,x)\,. \tag{2.79}$$

Preuve.

1. On a :
$$\Omega_{B^{(-k)}} D^k = \Delta^k.$$
On en déduit que :
$$\left(\Omega_{B^{(-k)}} \frac{D^k}{k!}\right)\left(x^{n+k}\right) = \frac{1}{k!}\Delta^k\left(x^{n+k}\right),$$
ce qui peut s'écrire
$$\Omega_{B^{(-k)}}\left(\binom{n+k}{k} x^n\right) = S(n+k,k,x),$$
ou encore
$$\binom{n+k}{k} B^{(-k)}(x) = S(n+k,k,x).$$
La relation (2.75) en résulte.
2. On a, en exploitant la relation (1.13) :
$$\begin{aligned} \Omega_{B^{(-k)}} &= \left(\frac{e^D-1}{D}\right)^k = \sum_{j=k}^{\infty} k! S\,(j,k)\, \frac{D^j}{j!} \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{k+j}{j}^{-1} S\,(k+j,k)\, \frac{D^j}{j!}. \end{aligned} \tag{2.80}$$

$$\begin{aligned} B_n^{(k)}(x) &= \Omega_{B^{(k)}} = \left(\frac{\ln(1+\Delta)}{\Delta}\right)^k \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \binom{j+k}{k}^{-1} s(k+j,k)\,\frac{\Delta^j}{j!}, \end{aligned} \tag{2.81}$$

$$\Omega_{E^{(-k)}} = \left(\frac{e^D+1}{2}\right)^k = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}e^{jD}. \tag{2.82}$$

$$\Omega_{E^{(\alpha)}} = \left(1+\frac{1}{2}\Delta\right)^{-\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{2^k}\binom{\alpha+k-1}{k}\Delta^k. \tag{2.83}$$

En évaluant $\Omega_{B^{(-k)}}(x^n)$, $\Omega_{E^{(-k)}}(x^n)$ et $\Omega_{E^{(\alpha)}}(x^n)$ par les expressions données respectivement en (2.80),(2.81), (2.82) et (2.83) on obtient les relations (2.76), (2.77),(2.78) et (2.79).

$\square$

Deuxième partie

Applications

Dans cette partie

Cette seconde partie est composée par les Chapitres 3, 4 et 5.

Au Chapitre 3, nous généralisons aux polynômes d'Euler des identités pour les nombres d'Euler dues à Wei, Qi [60, 2015] et Guo [25, 2015].

Au Chapitre 4, nous donnons de nouvelles preuves pour des identités concernant les polynômes de Bernoulli dues à Alzer et Yakubovitch [2, 2018]. Nous généralisons un de leurs Théorèmes et nous donnons aussi une courte preuve pour un autre Théorème.

Au Chapitre 5, nous généralisons une identité pour les polynômes d'Appell due à Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat [5, 2017]. Cette généralisation a fait l'objet d'une publication [7, 2022].

Chapitre 3

Identités de Wei, Qi et Guo

3.1 Introduction

En 2015, Wei et Qi, dans un article [60] intitulé "Several closed expressions for the Euler numbers" ont établi quatre théorèmes donnant des expressions explicites des nombres d'Euler. Le premier de ces théorèmes fournit une expression du nombre d'Euler E_{2n} à l'aide d'un déterminant et s'énonce comme suit :

$$E_{2n} = (-1)^n \left| \binom{i}{j-1} \cos\left((i-j+1)\frac{\pi}{2}\right) \right|_{(2n)\times(2n)}$$

où $|c_{ij}|_{m\times m}$ désigne le déterminant de la matrice $[c_{ij}]_{m\times m}$ d'ordre m à coefficients c_{ij}.

Les trois autres théorèmes de ces deux auteurs fournissent les expressions explicites de E_{2n} et E_n à l'aide de double sommes suivantes :

$$E_{2n} = (2n+1)\sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \frac{1}{2^k(k+1)}\binom{2n}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(2j-k)^{2n} \text{ (Theorem 1.2 de [60]),} \quad (3.1)$$

$$E_n = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{(k+1)!}{2^k}S(n,k)\sum_{\ell=1}^{k}(-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1}\binom{\ell+1}{k-\ell} \text{ (Theorem 1.3 de [60]),} \quad (3.2)$$

$$E_n = 1 + \sum_{\ell=1}^{n}(-1)^\ell \frac{1}{\ell+1}\sum_{k=0}^{n-\ell}\frac{(k+\ell+1)!}{2^k}\binom{\ell+1}{k}S(n,k+\ell) \text{ (Theorem 1.3 de [60]),} \quad (3.3)$$

$$E_{2n} = \sum_{k=1}^{2n}(-1)^k \frac{1}{2^k}\sum_{\ell=0}^{2k}(-1)^\ell \binom{2k}{\ell}(k-\ell)^{2n} \text{ (Theorem 1.4 de [60]).} \quad (3.4)$$

Ces théorèmes sont obtenus à l'aide d'une exploitation subtile de remarquables propriétés des polynômes partiels de Bell $B_{n,k}(x_1, x_2, \ldots, x_{n-k+1})$ ainsi que par l'emploi de la formule de

Faà di Bruno. Ces polynômes appelés aussi polynômes de Bell de seconde espèce ([17, p.134, Theorem A]) sont définis par :

$$B_{n,k}\left(x_1,x_2,\ldots,x_{n-k+1}\right)=\sum_{\substack{1\leq q\leq n,\ell_q\in\mathbb{N}\\ \sum_{q=1}^{n}q\ell_q=n\\ \sum_{q=1}^{n}\ell_q=k}}\frac{n!}{\prod_{q=1}^{n-k+1}\ell_q}\prod_{q=1}^{n-k+1}\left(\frac{x_q}{q!}\right)^{\ell_q},\ n\geq k\geq 0.$$

La formule de Faà di Bruno (voir [17, Theorem C]) étant la formule suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^{\,n}f\left(g\left(x\right)\right)}{\mathrm{d}\,x^n}=\sum_{k=1}^{n}f^{(k)}\left(g\left(x\right)\right)B_{n,k}\left(g'\left(x\right),g''\left(x\right),\ldots,g^{(n-k+1)}\left(x\right)\right),\ n\geq 1,$$

donnant la n-ième dérivée de la fonction composée $f\circ g$. Dans ce chapitre, nous nous proposons de généraliser l'ensemble de ces trois théorèmes aux polynômes d'Euler.

3.2 Lemmes

Rappelons que d'après la proposition 27, pour tout nombre complexe $q\neq 0$ et pour toute suite $\left(A_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de polynômes d'Appell, la suite de polynômes $\left(\frac{1}{q^n}A_n\left(qx\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi une suite de polynômes d'Appell. De plus si $\Omega_A=S\left(D\right)$ est l'opérateur d'Appell associé à la suite de polynômes d'Appell $\left(A_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, alors $S\left(\frac{D}{q}\right)$ est l'opérateur d'Appell $\Omega_{A^{\widetilde{q}}}$ associé à la suite de polynômes d'Appell $\left(\frac{1}{q^n}A_n\left(qx\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. En appliquant cette proposition au cas particulier de la suite des polynômes classiques d'Euler $\left(E_n\left(x\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dont l'opérateur d'Appell associé est $S_E\left(D\right)=\frac{2}{e^D+1}$, on peut affirmer que pour tout nombre complexe $q\neq 0$, la suite de polynômes $\left(\frac{1}{q^n}E_n\left(qx\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell qui a pour opérateur d'Appell assossié l'opérateur $S_E\left(\frac{D}{q}\right)=\frac{2}{e^{D/q}+1}$. Autrement dit, on a :

$$\frac{1}{q^n}E_n\left(qx\right)=\left(\frac{2}{e^{D/q}+1}\right)\left(x^n\right).$$

En particulier pour $q=\frac{1}{2}$, on a :

$$2^nE_n\left(\frac{x}{2}\right)=\left(\frac{2}{e^{2D}+1}\right)\left(x^n\right).$$

Les deux lemmes qui suivent vont nous permettre de prouver aisément les généralisations des Théorèmes de Wei, Qi et Guo.

Lemme 53 *On a :*

$$\frac{2+2z}{2+2z+z^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k$$

avec

$$\alpha_k = \frac{k+1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \, \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}. \tag{3.5}$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned}
\frac{2+2z}{2+2z+z^2} &= \frac{1}{z+1+i} + \frac{1}{z+1-i} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k z^k.
\end{aligned}$$

avec

$$\alpha_k = \left(\frac{1+i}{2}\right)^{k+1} + \left(\frac{1-i}{2}\right)^{k+1}. \tag{3.6}$$

Or, on sait que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a l'identité bien connue suivante, qu'on peut aussi retouver facilement en exploitant la définition et les propriétés des polynômes de Dickson de première espèce :

$$x^n + y^n = \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor} \frac{n}{n-\ell} \binom{n-\ell}{\ell} (-xy)^\ell \, (x+y)^{n-2\ell}. \tag{3.7}$$

De (3.6) et (3.7), on déduit que l'on a :

$$\alpha_k = \sum_{\ell=0}^{\left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor} \frac{k+1}{k+1-\ell} \binom{k+1-\ell}{\ell} \left(-\frac{1}{2}\right)^\ell$$

En changeant ℓ en $k-\ell$, on obtient alors :

$$\alpha_k = \sum_{\ell=m}^{k} \frac{k+1}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell} \left(-\frac{1}{2}\right)^{k-\ell}$$

où $m = k - \left\lfloor \frac{k+1}{2} \right\rfloor$. Comme $\binom{\ell+1}{k-\ell} = 0$ pour $0 \leq k < m$, on en déduit la relation (3.5) $\square$

Lemme 54 *La suite de polynômes* $\left(2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *est une suite de polynômes d'Appell. Cette suite est associée à l'opérateur* $e^D S_E(2D)$. *On a :*

$$\begin{aligned}
2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \left(e^D S_E(2D)\right)(x^n) \\
&= \left(\frac{2e^D}{2+e^{2D}}\right)(x^n).
\end{aligned}$$

De plus, on a aussi :

$$\frac{2e^D}{2+e^{2D}} = \frac{2+2\Delta}{2+2\Delta+\Delta^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Delta^k$$

avec

$$\alpha_k = \frac{k+1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}.$$

Preuve. On a :

$$\begin{aligned} 2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= T_1\left(2^n E_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \left(e^D S_E(2D)\right)(x^n) \\ &= \left(\frac{2e^D}{2+e^{2D}}\right)(x^n). \end{aligned}$$

On a $e^D = 1+\Delta$. On en déduit l'expression de l'opérateur de composition $\frac{2e^D}{2+e^{2D}}$ à l'aide de l'opérateur $\Delta = e^D - 1$, on obtient :

$$\frac{2e^D}{2+e^{2D}} = \frac{2(1+\Delta)}{2+(1+\Delta)^2} = \frac{2+2\Delta}{2+2\Delta+\Delta^2}.$$

En exploitant le Lemme 53, on a alors :

$$\frac{2+2\Delta}{2+2\Delta+\Delta^2} = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Delta^k.$$

avec

$$\alpha_k = \frac{k+1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}.$$

$\square$

3.3 Enoncés des théorèmes

Théorème 55 *Généralisation du Théorème, 1.2 de [60]. Pour tous entiers naturels m et n tels que $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, on a :*

$$E_n(x) = (m+1) \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^k(k+1)} \binom{m}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \left(x - \frac{1}{2} + \frac{2j-k}{2}\right)^n. \tag{3.8}$$

Preuve. La formule précédente a été obtenue par des essais avec Maple. Nous allons maintenant la prouver en utilisant des opérateurs de composition adéquats. Pour cela, on commence par remarquer que la relation (3.8) équivaut à la relation suivante :

$$2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^k}\binom{m+1}{k+1}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(x+2j-k)^n \text{ pour } 2m+1 \geq n.$$

On a alors :

$$\begin{aligned}
2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= T_1\left(2^n E_n\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\
&= \left(\frac{2e^D}{e^{2D}+1}\right)(x^n) \\
&= \Phi^{-1}(x^n)
\end{aligned}$$

où Φ est l'opérateur d'Appell définie par :

$$\Phi = \frac{e^D + e^{-D}}{2} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{2k}}{(2k)!}.$$

Considérons l'opérateur :

$$\Psi = 1 - \Phi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{D^{2k}}{(2k)!}. \tag{3.9}$$

Ψ est un opérateur d'ordre 2. Par conséquent, Ψ^{m+1} est un opérateur d'ordre $2m+2$ et on a :

$$\Psi^{m+1}(x^n) = 0$$

et

$$\left(1 - \Psi^{m+1}\right)(x^n) = x^n$$

dès que $2m+2 > n$, c'est-à-dire pour $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Ainsi pour $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$, on a :

$$\begin{aligned}
2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \Phi^{-1}(x^n) \\
&= \Phi^{-1}\left(1 - \Psi^{m+1}\right)(x^n).
\end{aligned}$$

L'opérateur de composition $\Phi^{-1}\left(1 - \Psi^{m+1}\right)$ peut s'exprimer comme un polynôme en Φ. En effet, on a d'après (3.9) :

$$\begin{aligned}
\Phi^{-1}\left(1 - \Psi^{m+1}\right) &= \Phi^{-1}\left(1 - (1-\Phi)^{m+1}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}(-1)^k \Phi^k.
\end{aligned}$$

On a donc pour $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:

$$2^n E_n \left(\frac{x+1}{2} \right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k+1} (-1)^k \, \Phi^k \left(x^n \right). \tag{3.10}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned} \Phi^k &= \left(\frac{e^D + e^{-D}}{2} \right)^k \\ &= \frac{e^{-kD}}{2^k} \left(e^{2D} + 1 \right)^k \\ &= \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} e^{(2j-k)D}, \end{aligned}$$

et donc :

$$\Phi^k \left(x^n \right) = \frac{1}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x + 2j - k)^n . \tag{3.11}$$

De (3.10) et (3.11), on déduit que l'on a pour $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$

$$2^n E_n \left(\frac{x+1}{2} \right) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m+1}{k+1} \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x + 2j - k)^n .$$

La preuve du Théorème est complète. □

Théorème 56 *Généralisation du Théorème, 1.3 (1.5) de [60] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$E_n (x) = \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)!}{2^k} S(n, k, 2x-1) \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}. \tag{3.12}$$

Dans ce théorème, $S(n,k,x)$ désigne les nombres de Stirling généralisés définis par :

$$S(n,k,x) = \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} (x+j)^n .$$

La formule (3.12) équivaut à la relation :

$$2^n E_n \left(\frac{x+1}{2} \right) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)!}{2^k} S(n,k,x) \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}. \tag{3.13}$$

Or on sait d'après le lemme 54 que :

$$\begin{aligned} 2^n E_n \left(\frac{x+1}{2} \right) &= \left(\frac{2 + 2\Delta}{1 + (1+\Delta)^2} \right) \left(x^n \right) \\ &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Delta^k \right) \left(x^n \right) \end{aligned}$$

où

$$\alpha_k = \frac{k+1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} 2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k \Delta^k (x^n) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \alpha_k k! S(n,k,x) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(k+1)!}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell} S(n,k,x). \end{aligned}$$

Nous avons ainsi prouvé la relation (3.13). La preuve du Théorème est complète.

Théorème 57 *Généralisation du Théorème, 1.3 (1.6) de [60] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$E_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \sum_{k=0}^{n-\ell} \frac{(k+\ell+1)!}{2^k} \binom{\ell+1}{k} S(n,k+\ell,2x-1). \tag{3.14}$$

Preuve. La relation (3.14) est équivalente à la relation suivante

$$2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \sum_{k=0}^{n-\ell} \frac{(k+\ell+1)!}{2^k} \binom{\ell+1}{k} S(n,k+\ell,x). \tag{3.15}$$

On sait d'après le lemme 54 que :

$$2^n E_n\left(\frac{x+1}{2}\right) = \left(\frac{2+2\Delta}{2+2\Delta+\Delta^2}\right)(x^n) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k \Delta^k (x^n)$$

avec

$$\alpha_k = \frac{k+1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}.$$

De même, le second membre de (3.15) peut s'écrire en tenant compte du fait que $S(n,k+\ell,x) = \frac{1}{(k+\ell)!}\Delta^{k+\ell}(x^n)$:

$$\begin{aligned} \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \sum_{k=0}^{n-\ell} \frac{(k+\ell+1)!}{2^k} \binom{\ell+1}{k} S(n,k+\ell,x) &= \sum_{\ell=0}^{n} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \sum_{j=0}^{n-\ell} \frac{j+\ell+1}{2^j} \binom{\ell+1}{j} \Delta^{j+\ell}(x^n) \\ &= \sum_{\ell=0}^{n} \beta_k \Delta^k (x^n) \\ &= \left(\sum_{\ell=0}^{\infty} \beta_k \Delta^k\right)(x^n). \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}\beta_k &= \sum_{j+\ell=k} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \frac{j+\ell+1}{2^j} \binom{\ell+1}{j} \\ &= \sum_{\ell=0}^{k} \frac{(-1)^\ell}{\ell+1} \frac{k+1}{2^{k-\ell}} \binom{\ell+1}{k-\ell} \\ &= \frac{k+1}{2^k} \sum_{\ell=0}^{k} (-1)^\ell \frac{2^\ell}{\ell+1} \binom{\ell+1}{k-\ell}.\end{aligned}$$

On constate ainsi que $\alpha_k = \beta_k$ pour tout entier $k \geq 0$. Les deux membres de (3.15) sont donc égaux et le Théorème est bien prouvé. □

Théorème 58 *Généralisation du Théorème, 1.4 de [60] Pour tout entier* $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$*, on a :*

$$E_n(x) = \sum_{k=1}^{m} \frac{(-1)^k}{2^{n+k}} \sum_{j=1}^{k} (-1)^j \binom{2k}{j} (2x-1+k-j)^n .$$

Nous allons prouver dans le paragraphe suivant un théorème encore plus général que ce théorème. Le corollaire suivant est immédiat.

Corollaire 59 *Pour tous entiers* $m \geq \left[\frac{n}{2}\right]$*, on a :*

$$E_n = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} (k-j)^n ,$$

et

$$E_{2n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} (k-j)^{2n} .$$

3.4 Généralisation d'une identité de Qi et Guo (2017)

La formule (3.4) a été de nouveau prouvée en 2017 par Qi et Guo [43] . Dans ce paragraphe, nous généralisons cette formule aux polynômes d'Euler généralisés.

Théorème 60 *Pour tous entiers* $m \geq \left[\frac{n}{2}\right]$*, on a :*

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^{n+k}} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{2k} (-1)^j \binom{2k}{j} (2x-\alpha-k+j)^n \tag{3.16}$$

Preuve. La relation (3.16) est équivalente à la relation suivante :

$$2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^k}\binom{\alpha+k-1}{k}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}(x-k+j)^n. \tag{3.17}$$

On remarque alors que :

$$\begin{aligned} 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{x+\alpha}{2}\right) &= T_\alpha\left(2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)\right) \\ &= \left(T_\alpha S_{E_n^{(\alpha)}}(2D)\right)(x^n) \\ &= e^{\alpha D}\left(\frac{2}{e^{2D}+1}\right)^\alpha (x^n) \\ &= \Psi_\alpha(x^n) \\ &= \left(\frac{2e^D}{e^{2D}+1}\right)^\alpha (x^n) \end{aligned} \tag{3.18}$$

où Ψ_α est l'opérateur de composition défini par :

$$\Psi_\alpha = \left(\frac{2e^D}{e^{2D}+1}\right)^\alpha.$$

En remarquant que l'on a :

$$\frac{2z}{z^2+1} = \frac{1}{1+\frac{(z-1)^2}{2z}},$$

on constate que :

$$\Psi_\alpha = (1+\delta)^{-\alpha}$$

où

$$\delta = \frac{1}{2}e^{-D}\Delta^2.$$

Remarquons que δ est un opérateur de composition d'ordre 2 et on peut donc écrire :

$$\Psi_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{-\alpha}{k}\delta^k = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}\delta^k.$$

De plus, du fait que l'ordre de δ est égal à 2, on a, pour tout entier $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:

$$\Psi_\alpha(x^n) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}\delta^k(x^n). \tag{3.19}$$

Calculons $\delta^k(x^n)$. On a :

$$\begin{aligned} \delta^k &= \frac{1}{2^k}e^{-kD}\Delta^{2k} \\ &= \frac{1}{2^k}T_{-k}(T_1-1)^{2k} \\ &= \sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}T_{j-k}. \end{aligned}$$

On a donc :

$$\delta^k\left(x^n\right)=\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}(x-k+j)^n. \tag{3.20}$$

De (3.19) et (3.20), il résulte que l'on a

$$\Psi_\alpha\left(x^n\right)=\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{\alpha+k-1}{k}\sum_{j=0}^{2k}(-1)^j\binom{2k}{j}(x-k+j)^n. \tag{3.21}$$

De 3.18) et (3.21), il résulte que l'on a (3.17). Le Théorème est ainsi prouvé. $\square$

Chapitre 4

Identités d'Alzer et Yakubovich

4.1 Introduction

En 2018, Alzer et Yakubovitch [2, Theorem 3.1], dans un article intitulé "Identities involving Bernoulli and Euler polynomials" ont établi de nombreuses identités comportant les polynômes de Bernoulli et d'Euler classiques. Ces identités sont obtenues par le moyen de séries formelles (propriétés des séries formelles, série génératrice des suites de polynômes remarquables) et par l'emploi d'identités combinatoires. Dans ce chapitre, nous prouvons les résultats principaux de ces auteurs par l'utilisation d'opérateurs de composition. Nous généralisons aussi certains résultats et nous donnons une preuve plus courte que leur preuve pour un autre résultat. Signalons les propriétés suivantes qui nous seront utiles dans ce chapitre :

$$B_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x)\, y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(y)\, x^{n-k}, \tag{4.1}$$

$$E_n(x+y) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(x)\, y^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_k(y)\, x^{n-k}, \tag{4.2}$$

$$\frac{1}{q^n} B_n(qx) = \frac{D/q}{e^{D/q}-1}(x^n), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{q^n} E_n(qx) = \frac{2}{e^{D/q}+1}(x^n). \tag{4.4}$$

Les relations (4.1) et (4.2) résultent de la propriété (1.2) de la proposition 2. Les relations (4.3) et (4.4) résultent de la propriété (1.23) de la proposition 27.

4.2 Les principaux théorèmes

Théorème 61 *[2, Theorem 2.1] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

1.
$$\sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) = 2^n B_n(2x - 1/2). \tag{4.5}$$

2.
$$2^n B_n(2x - 1/2) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^k \binom{n}{k} B_k(2x). \tag{4.6}$$

Preuve.

1. *On commence par constater que :*
$$\sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) = \Omega_B \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} x^{n-2k} \right). \tag{4.7}$$

On remarque ensuite que :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} x^{n-2k} &= \sum_{k=0}^{n} 4^{n-k} \binom{n}{k} \left(\frac{1+(-1)^k}{2} \right) x^{n-k} \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(1+(-1)^k\right) (4x)^{n-k} \\ &= \frac{1}{2} \left((4x+1)^n + (4x-1)^n\right) \\ &= 2^{2n-1} \left(\left(x + \frac{1}{4}\right)^n + \left(x - \frac{1}{4}\right)^n \right). \end{aligned} \tag{4.8}$$

Ainsi, on a :
$$\sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} x^{n-2k} = 2^{2n-1} \left(e^{D/4} + e^{-D/4}\right)(x^n).$$

De (4.7) et (4.8), il résulte que l'on a :
$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) &= \Omega_B \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} 4^{n-2k} \binom{n}{2k} x^{n-2k} \right) \\ &= 2^{2n-1} \Omega_B \left(e^{D/4} + e^{-D/4}\right)(x^n) \\ &= 2^{2n-1} \frac{D}{e^D - 1} \left(e^{D/4} + e^{-D/4}\right)(x^n) \\ &= 2^{2n-1} \frac{De^{-D/4}}{e^D - 1} \left(e^{D/2} + 1\right)(x^n) \\ &= 2^{2n} e^{-D/4} \frac{D/2}{e^{D/2} - 1} (x^n). \end{aligned} \tag{4.9}$$

Or on sait d'après (4.3) que :

$$\frac{D/2}{e^{D/2}-1}\left(x^{n}\right)=\frac{1}{2^{n}}B_{n}\left(2x\right). \tag{4.10}$$

On déduit alors de (4.9) et (4.10) que l'on a :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]}4^{n-2k}\binom{n}{2k}B_{n-2k}\left(x\right) &= 2^{2n}e^{-D/4}\left(\frac{1}{2^{n}}B_{n}\left(2x\right)\right)\\ &= 2^{n}B_{n}\left(2x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

On a ainsi prouvé (4.5).

2. *La propriété (4.6) résulte de l'application de la relation (4.1) :*

$$\begin{aligned}2^{n}B_{n}\left(2x-\frac{1}{2}\right) &= 2^{n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{k}\left(2x\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k}2^{k}\binom{n}{k}B_{k}\left(2x\right).\end{aligned}$$

$\square$

Théorème 62 *[2, Theorem 2.2] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

1.
$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k}B_{n-2k}\left(x\right)=2^{n}E_{n}\left(2x-1/2\right). \tag{4.11}$$

2.
$$\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k}2^{k}\binom{n}{k}E_{k}\left(2x\right)=2^{n}E_{n}\left(2x-1/2\right). \tag{4.12}$$

Preuve.

1. On a :
$$\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k}B_{n-2k}\left(x\right)=\Omega_{B}\left(\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k}x^{n-2k}\right). \tag{4.13}$$

On peut alors remarquer que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]}\frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k}x^{n-2k} &= \sum_{k=0}^{n}\frac{4^{n-k}}{k+1}\binom{n}{k}\left(\frac{1+\left(-1\right)^{k}}{2}\right)x^{n-k}\\ &= \frac{1}{2\left(n+1\right)}\sum_{k=0}^{n}\binom{n+1}{k+1}\left(1+\left(-1\right)^{k}\right)\left(4x\right)^{n-k}\\ &= \frac{1}{2\left(n+1\right)}\sum_{j=1}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(1-\left(-1\right)^{j}\right)\left(4x\right)^{n+1-j}.\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k} x^{n-2k} &= \frac{1}{2(n+1)}\sum_{j=0}^{n+1}\binom{n+1}{j}\left(1-(-1)^j\right)(4x)^{n+1-j} \\ &= \frac{1}{2(n+1)}\left((4x+1)^{n+1}-(4x-1)^{n+1}\right) \\ &= \frac{2^{2n+1}}{n+1}\left(\left(x+\frac{1}{4}\right)^{n+1}-\left(x-\frac{1}{4}\right)^{n+1}\right).\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k} x^{n-2k} &= 2^{2n+1}\left(e^{D/4}-e^{-D/4}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1} \\ &= 2^{2n+1}\left(\left(e^{D/4}-e^{-D/4}\right)\mathrm{Int}\right)(x^n). \qquad (4.14)\end{aligned}$$

En appliquant Ω_B à chacun des deux menbres de (4.14) et en tenant de (4.13), on a alors :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) &= 2^{2n+1}\Omega_B\left(e^{D/4}-e^{-D/4}\right)\mathrm{Int}(x^n) \\ &= 2^{2n+1}\frac{D}{e^D-1}\left(e^{D/4}-e^{-D/4}\right)\mathrm{Int}(x^n).\end{aligned}$$

Comme $\frac{D}{e^D-1}$ et $e^{D/4}-e^{-D/4}$ commutent et qu'on a $D\,\mathrm{Int}=1$, on en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) &= 2^{2n+1}\left(e^{D/4}-e^{-D/4}\right)\frac{D}{e^D-1}\mathrm{Int}(x^n) \\ &= 2^{2n+1}\left(\frac{e^{D/4}-e^{-D/4}}{e^D-1}\right)(x^n).\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) &= 2^{2n+1}\frac{e^{-D/4}\left(e^{D/2}-1\right)}{\left(e^{D/2}-1\right)\left(e^{D/2}+1\right)}(x^n) \\ &= 2^{2n}e^{-D/4}\frac{2}{e^{D/2}+1}(x^n). \qquad (4.15)\end{aligned}$$

Or on sait d'après (4.4) que :

$$\frac{2}{e^{D/2}+1}(x^n) = \frac{1}{2^n}E_n(2x). \qquad (4.16)$$

On déduit de (4.15) et (4.16) que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{4^{n-2k}}{2k+1}\binom{n}{2k} B_{n-2k}(x) &= 2^{2n} e^{-D/4} \frac{1}{2^n} E_n(2x) \\ &= 2^n E_n\left(2x-\frac{1}{2}\right).\end{aligned}$$

La relation (4.11) est ainsi prouvée.

2. En appliquant la propriété (4.2), on a :

$$\begin{aligned}2^n E_n(2x-1/2) &= 2^n \sum_{k=0}^{nj} \binom{n}{k} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-k} E_k(2x) \\ & \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} 2^k \binom{n}{k} E_k(2x).\end{aligned}$$

La relation (4.12) est ainsi prouvée.

□

Théorème 63 *[2, Theorem 2.3] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

1.

$$2^n B_n(x+1/4) = \sum_{k=0}^{n} 2^{2k-n} \binom{n}{k} B_k(x). \tag{4.17}$$

2.

$$2^n B_n(x+1/4) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(1/2) B_k(2x). \tag{4.18}$$

3.

$$2^n B_n(x+1/4) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(1/2) E_k(2x). \tag{4.19}$$

Preuve.

1. En appliquant la propriété (4.1), on obtient :

$$\begin{aligned}2^n B_n\left(x+\frac{1}{4}\right) &= 2^n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k(x) \left(\frac{1}{4}\right)^{n-k} \\ &= \sum_{k=0}^{n} 2^{2k-n} \binom{n}{k} B_k(x).\end{aligned}$$

La relation (4.17) est prouvée.

2. On sait d'après la propriété (4.3) que :

$$\frac{B_n(2x)}{2^n} = \frac{D/2}{e^{D/2}-1}(x^n). \tag{4.20}$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}(1/2)\,B_k(2x) = \frac{D/2}{e^{D/2}-1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}(1/2)\,(2x)^k\right). \tag{4.21}$$

Or, on sait d'après (4.2) que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}(1/2)\,(2x)^k = E_n\left(2x+\frac{1}{2}\right). \tag{4.22}$$

On sait aussi, en exploitant la propriété (4.4) que :

$$\begin{aligned} E_n\left(2x+\frac{1}{2}\right) &= e^{\frac{D}{4}}\left(E_n(2x)\right) \\ &= 2^n e^{\frac{D}{4}}\frac{2}{e^{D/2}+1}(x^n). \end{aligned} \tag{4.23}$$

Il résulte de (4.21), (4.22) et (4.23) que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}E_{n-k}(1/2)\,B_k(2x) &= 2^n\frac{D/2}{e^{D/2}-1}\frac{2e^{\frac{D}{4}}}{e^{D/2}+1}(x^n) \\ &= 2^n e^{\frac{D}{4}}\frac{D}{e^{D}-1}(x^n) \\ &= 2^n e^{\frac{D}{4}}B_n(x) \\ &= 2^n B_n\left(x+\frac{1}{4}\right). \end{aligned}$$

La relation (4.18) est ainsi prouvée.

3. On sait d'après la propriété (4.4) que :

$$\frac{E_n(2x)}{2^n} = \frac{2}{e^{D/2}+1}(x^n).$$

On en déduit que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(1/2)\,E_k(2x) = \frac{2}{e^{D/2}+1}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(1/2)\,(2x)^k\right). \tag{4.24}$$

Or, on sait d'après (4.1) que :

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}(1/2)\,(2x)^k = B_n\left(2x+\frac{1}{2}\right). \tag{4.25}$$

On sait aussi, en exploitant la propriété (4.3) que :

$$\begin{aligned} B_n\left(2x+\frac{1}{2}\right) &= e^{\frac{D}{4}}\left(B_n\left(2x\right)\right) \\ &= 2^n e^{\frac{D}{4}}\frac{D/2}{e^{D/2}-1}\left(x^n\right). \qquad (4.26) \end{aligned}$$

Il résulte de (4.24), (4.25) et (4.26) que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}B_{n-k}\left(1/2\right)E_k\left(2x\right) &= \frac{2}{e^{D/2}+1}2^n e^{\frac{D}{4}}\frac{D/2}{e^{D/2}-1}\left(x^n\right) \\ &= 2^n e^{\frac{D}{4}}\frac{D}{e^D-1}\left(x^n\right) \\ &= 2^n e^{\frac{D}{4}}B_n\left(x\right) \\ &= 2^n B_n\left(x+\frac{1}{4}\right) \end{aligned}$$

La relation (4.19) est prouvée.

□

Théorème 64 *[2, Theorem 2.4] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

1.

$$B_n\left(x\right)+2\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{B_{n-2k}\left(x\right)}{3^{2k+1}} = \frac{1}{3^n}B_n\left(3x-1\right). \qquad (4.27)$$

2.

$$\frac{1}{3^n}B_n\left(3x-1\right) = \frac{1}{3^n}\sum_{k=0}^{n}\left(-1\right)^{n-k}\binom{n}{k}B_k\left(3x\right). \qquad (4.28)$$

Preuve.

1. On a :

$$B_n\left(x\right)+2\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{B_{n-2k}\left(x\right)}{3^{2k+1}} = \frac{D}{e^D-1}\left(x^n+2\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{x^{n-2k}}{3^{2k+1}}\right). \qquad (4.29)$$

On peut alors remarquer que :

$$\begin{aligned} x^n+2\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{x^{n-2k}}{3^{2k+1}} &= x^n+\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\left(1+\left(-1\right)^k\right)\frac{x^{n-k}}{3^{k+1}} \\ &= \frac{1}{3}\left(x^n+\left(x+\frac{1}{3}\right)^n+\left(x-\frac{1}{3}\right)^n\right) \\ &= \frac{e^{-D/3}}{3}\left(1+e^{D/3}+e^{2D/3}\right)\left(x^n\right) \\ &= \frac{e^{-D/3}}{3\left(e^{D/3}-1\right)}\left(e^D-1\right)\left(x^n\right). \qquad (4.30) \end{aligned}$$

Il résulte de (4.29) et (4.30) que :

$$\begin{aligned} B_n(x) + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{B_{n-2k}(x)}{3^{2k+1}} &= \frac{D}{e^D - 1} \frac{e^{-D/3}}{3\left(e^{D/3} - 1\right)} \left(e^D - 1\right)(x^n) \\ &= e^{-D/3} \frac{D/3}{e^{D/3} - 1}(x^n). \end{aligned} \tag{4.31}$$

On sait d'après la propriété (4.3) que :

$$\frac{D/3}{e^{D/3} - 1}(x^n) = \frac{B_n(3x)}{3^n}. \tag{4.32}$$

On déduit de (4.31) et (4.32) que :

$$\begin{aligned} B_n(x) + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{B_{n-2k}(x)}{3^{2k+1}} &= e^{-D/3} \frac{B_n(3x)}{3^n} \\ &= \frac{1}{3^n} B_n(3x - 1). \end{aligned}$$

La relation (4.27) est ainsi prouvée.

2. La propriété (4.28) résulte de l'application de la relation (4.1) :

$$\frac{1}{3^n} B_n(3x - 1) = \frac{1}{3^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} B_k(3x).$$

□

Théorème 65 *[2, Theorem 2.5] Pour tout entier $n \geq 0$ et pour nombre complexe $a \neq 0$, on a :*

1.
$$a^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}(x)}{k+1} = \frac{1}{2}\left(E_n(ax) + E_n(ax + 1)\right) \tag{4.33}$$

2.
$$\frac{1}{2}\left(E_n(ax) + E_n(ax + 1)\right) = E_n(ax) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(ax) \tag{4.34}$$

Preuve.

1. On a :
$$a^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}(x)}{k+1} = \frac{D}{e^D - 1}\left(a^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{k+1}\right). \tag{4.35}$$

On peut alors constater que :

$$\begin{aligned}
a^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{x^{n-k}}{k+1} &= \frac{a^n}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k+1} x^{n-k} \\
&= \frac{a^n}{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n+1}{j} x^{n+1-j} \\
&= \frac{a^n}{n+1} \left((x+1)^{n+1} - x^{n+1}\right) \\
&= a^n \left(e^D - 1\right) \left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right) \\
&= a^n \left(e^D - 1\right) \mathrm{Int}\left(x^n\right). \qquad (4.36)
\end{aligned}$$

On déduit de (4.35) et (4.35) que :

$$\begin{aligned}
a^n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \frac{B_{n-k}(x)}{k+1} &= \frac{D}{e^D - 1} a^n \left(e^D - 1\right) \mathrm{Int}\left(x^n\right) \\
&= a^n D \,\mathrm{Int}\left(x^n\right) \\
&= a^n x^n.
\end{aligned}$$

En exploitant la propriété (4.4), on a :

$$\begin{aligned}
a^n x^n &= \frac{1}{2}\left(e^{D/a} + 1\right) a^n \frac{2}{e^{D/a} + 1}\left(x^n\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(e^{D/a} + 1\right) E_n(ax) \\
&= \frac{1}{2}\left(E_n(ax) + E_n(ax+1)\right).
\end{aligned}$$

La relation (4.33) est prouvée.

2. En exploitant la propriété (4.2), on a :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left(E_n(ax) + E_n(ax+1)\right) &= \frac{1}{2} E_n(ax) + \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(ax) \\
&= E_n(ax) + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} E_{n-k}(ax).
\end{aligned}$$

La relation (4.34) est ainsi prouvée.

□

Théorème 66 *[2, Theorem 2.6] Pour tout entier $n \geq 0$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k} \frac{B_{n-4k}(x)}{2^{6k}} = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1+i^k}{(1+i)^k} \binom{n}{k} B_{n-k}(2x). \qquad (4.37)$$

Preuve. On a de manière évidente :

$$\sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k} \frac{B_{n-4k}(x)}{2^{6k}} = \Omega_B \left(\sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k} \frac{x^{n-4k}}{2^{6k}} \right).$$

On remarque ensuite que :

$$\sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k} \frac{x^{n-4k}}{2^{6k}} = \sum_{k=0}^{[n/4]} \gamma^{4k} \binom{n}{4k} x^{n-4k}.$$

où

$$\gamma = \frac{1+i}{4}.$$

On constate aisément que :

$$\frac{1 + i^k + i^{2k} + i^{3k}}{4} = \begin{cases} 1 & \text{si 4 divise } k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k} \frac{x^{n-4k}}{2^{6k}} &= \frac{1}{4} \sum_{k=0}^{n} \gamma^k \left(1 + i^k + i^{2k} + i^{3k}\right) \binom{n}{k} x^{n-k} \\ &= \frac{1}{4} \left((x+\gamma)^n + (x+i\gamma)^n + \left(x + i^2\gamma\right)^n + \left(x + i^3\gamma\right)^n \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(e^{\gamma D} + e^{i\gamma D} + e^{-\gamma D} + e^{-i\gamma D} \right) (x^n). \end{aligned}$$

En remarquant que :

$$\gamma - i\gamma = \frac{1}{2},$$

on a :

$$e^{\gamma D} = e^{i\gamma D} e^{D/2} \;\; \text{et } e^{-i\gamma D} = e^{-\gamma D} e^{D/2}.$$

On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \left(e^{\gamma D} + e^{i\gamma D} + e^{-\gamma D} + e^{-i\gamma D} \right) &= \frac{1}{4} \left(e^{i\gamma D} + e^{-\gamma D} + e^{i\gamma D} e^{D/2} + e^{-\gamma D} e^{D/2} \right) \\ &= \frac{1}{4} \left(1 + e^{D/2}\right) \left(e^{i\gamma D} + e^{-\gamma D} \right). \end{aligned}$$

Ainsi :

$$\sum_{k=0}^{[n/4]} (-1)^k \binom{n}{4k} \frac{x^{n-4k}}{2^{6k}} = \frac{1}{4} \left(e^{D/2} + 1\right) \left(e^{i\gamma D} + e^{-\gamma D} \right) (x^n).$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/4]}(-1)^k\binom{n}{4k}\frac{B_{n-4k}(x)}{2^{6k}} &= \frac{1}{4}\Omega_B\left(e^{D/2}+1\right)\left(e^{i\gamma D}+e^{-\gamma D}\right)(x^n)\\ &= \frac{1}{4}\frac{D}{e^D-1}\left(e^{D/2}+1\right)\left(e^{i\gamma D}+e^{-\gamma D}\right)(x^n)\\ &= \frac{1}{2}\left(e^{i\gamma D}+e^{-\gamma D}\right)\frac{D/2}{e^{D/2}-1}(x^n).\end{aligned}$$

Or on sait, daprès (4.3), que :

$$\frac{D/2}{e^{D/2}-1}(x^n)=\frac{B_n(2x)}{2^n}.$$

On en déduit que :

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{[n/4]}(-1)^k\binom{n}{4k}\frac{B_{n-4k}(x)}{2^{6k}} &= \frac{1}{2}\left(e^{i\gamma D}+e^{-\gamma D}\right)\frac{B_n(2x)}{2^n}\\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(B_n(2x+2i\gamma)+B_n(2x-2\gamma)\right).\end{aligned}\tag{4.38}$$

Or d'après la propriété (4.1), on a :

$$B_n(2x+2i\gamma)=\sum_{k=0}^{n}(2i\gamma)^k\binom{n}{k}B_{n-k}(2x),\tag{4.39}$$

et

$$B_n(2x-2\gamma)=\sum_{k=0}^{n}(-2\gamma)^k\binom{n}{k}B_{n-k}(2x).\tag{4.40}$$

On déduit (4.38), (4.39) et (4.40) que :

$$\sum_{k=0}^{[n/4]}(-1)^k\binom{n}{4k}\frac{B_{n-4k}(x)}{2^{6k}}=\frac{1}{2^{n+1}}\sum_{k=0}^{n}\left((2i\gamma)^k+(-2\gamma)^k\right)\binom{n}{k}B_{n-k}(2x).$$

Il suffit alors d'observer que :

$$(2i\gamma)^k+(-2\gamma)^k=(-1)^k\frac{1+i^k}{(1+i)^k},$$

pour obtenir (4.37). □

4.3 Généralisation d'un théorème

Théorème 67 *Pour tous entiers naturels $n \geq 0$ et $m \geq 1$, on a :*

$$B_n(x) + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{\sigma_{2k}(m)}{(2m+1)^{2k+1}} B_{n-2k}(x) = \frac{1}{(2m+1)^n} B_n((2m+1)x - m), \qquad (4.41)$$

où

$$\sigma_{2k}(m) = \sum_{j=1}^{m} j^{2k}.$$

Preuve. On a :

$$1 + \sum_{j=1}^{m} \left(x^j + x^{-j}\right) = \frac{x^{2m+1} - 1}{(x-1)x^m}.$$

On en déduit l'égalité suivante entre opérateurs :

$$1 + \sum_{j=1}^{m} \left(e^{jD/(2m+1)} + e^{-jD/(2m+1)}\right) = e^{-mD/(2m+1)} \frac{e^D - 1.}{\left(e^{D/(2m+1)} - 1\right)} \qquad (4.42)$$

En composant chacun des deux membres de (4.42) avec $\frac{1}{2m+1}\frac{D}{e^D-1}$, on obtient alors :

$$\underbrace{\frac{1}{2m+1}\frac{D}{e^D-1}\left(1 + \sum_{j=1}^{m}\left(e^{jD/(2m+1)} + e^{-jD/(2m+1)}\right)\right)}_{=\Omega_1} = \underbrace{e^{-mD/(2m+1)}\frac{D/(2m+1)}{e^{D/(2m+1)} - 1}}_{=\Omega_2}. \qquad (4.43)$$

On a alors

$$\begin{aligned}
\Omega_1(x^n) &= \Omega_B\left(\frac{1}{2m+1}\left(x^n + \sum_{j=1}^{m}\left(\left(x + \frac{j}{2m+1}\right)^n + \left(x - \frac{j}{2m+1}\right)^n\right)\right)\right) \\
&= \Omega_B\left(\frac{1}{2m+1}\left(x^n + 2\sum_{j=1}^{m}\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{j^{2k}}{(2m+1)^{2k}}x^{n-2k}\right)\right). \qquad (4.44)
\end{aligned}$$

En intervertissant les sommations dans le second membre de (4.44) on obtient :

$$\begin{aligned}
\Omega_1(x^n) &= \Omega_B\left(\frac{1}{2m+1}\left(x^n + 2\sum_{k=0}^{[n/2]}\sum_{j=1}^{m}\binom{n}{2k}\frac{j^{2k}}{(2m+1)^{2k}}x^{n-2k}\right)\right) \\
&= \Omega_B\left(\frac{1}{2m+1}\left(x^n + 2\sum_{k=0}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{\sigma_{2k}(m)}{(2m+1)^{2k}}x^{n-2k}\right)\right) \\
&= \Omega_B\left(x^n + 2\sum_{k=1}^{[n/2]}\binom{n}{2k}\frac{\sigma_{2k}(m)}{(2m+1)^{2k+1}}x^{n-2k}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi :

$$\Omega_1(x^n) = B_n(x) + 2\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{2k} \frac{\sigma_{2k}(m)}{(2n+1)^{2k+1}} B_{n-2k}(x). \tag{4.45}$$

On a aussi, en exploitant la propriété (4.3) :

$$\begin{aligned}\Omega_2(x^n) &= e^{-mD/(2m+1)} \frac{D/(2m+1)}{e^{D/(2m+1)}-1}(x^n) \\ &= e^{-mD/(2m+1)} \frac{D/(2m+1)}{e^{D/(2m+1)}-1}(x^n) \\ &= e^{-mD/(2m+1)} \frac{1}{(2m+1)^n} B_n((2m+1)x) \\ &= \frac{1}{(2m+1)^n} B_n((2m+1)x - m).\end{aligned} \tag{4.46}$$

La relation (4.41) résulte alors des relations (4.43), (4.45) et (4.46). □

Pour $m = 1$, la relation (4.41 permet de retrouver la relation 4.27. Ainsi la relation (4.41) généralise le théorème 2.4 d'Alzer et Yakubovitch [2].

4.4 Courte preuve d'un théorème

Dans l'article d'Alzer et Yakubovitch [2, Theorem 3.1], on trouve aussi les deux identités suivantes :

$$\sum_{k=1}^{n} 2^{2k-1} \binom{2n}{2k-1} B_{2k-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} k 2^{2k} \binom{2n}{2k} E_{2k-1}(x) \tag{4.47}$$

et

$$\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{2n+1}{2k} B_{2k}(x) = \sum_{k=0}^{n} (2k+1) 2^{2k} \binom{2n+1}{2k+1} E_{2k}(x). \tag{4.48}$$

La preuve que donnent ces deux auteurs est longue et laborieuse. Dans ce qui suit, nous allons donner une preuve beaucoup plus simple et courte basée essentiellement sur des propriétés des opérateurs de composition.

Prouver les relations (4.47) et (4.48) équivaut à prouver les égalités suivantes :

$$\Omega_B\left(\sum_{k=1}^{n} 2^{2k-1} \binom{2n}{2k-1} x^{2k-1}\right) = \Omega_E\left(\sum_{k=1}^{n} k 2^{2k} \binom{2n}{2k} x^{2k-1}\right) \tag{4.49}$$

et

$$\Omega_B\left(\sum_{k=0}^{n} 2^{2k} \binom{2n+1}{2k} x^{2k}\right) = \Omega_E\left(\sum_{k=0}^{n} (2k+1) 2^{2k} \binom{2n+1}{2k+1} x^{2k}\right). \tag{4.50}$$

On peut alors remarquer que l'on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} 2^{2k-1}\binom{2n}{2k-1}x^{2k-1} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{2n}{2k-1}(2x)^{2k-1} \\
&= \sum_{0\leq k\leq 2n \text{ et } k\equiv 1 \bmod 2}\binom{2n}{k}(2x)^{k} \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{2n}\binom{2n}{k}\left(1-(-1)^{k}\right)(2x)^{k} \\
&= \frac{1}{2}\left((2x+1)^{2n}-(2x-1)^{2n}\right) \\
&= 2^{2n-1}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right) \\
&= \left(e^{\frac{D}{2}}-e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n-1}x^{2n}\right).
\end{aligned}$$

On a aussi :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} k2^{2k}\binom{2n}{2k}x^{2k-1} &= \frac{D}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}(2x)^{2k}\right) \\
&= \frac{D}{2}\left(\sum_{0\leq k\leq 2n \text{ et } k\equiv 0 \bmod 2}\binom{2n}{k}(2x)^{k}\right) \\
&= \frac{D}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{k}\left(1+(-1)^{k}\right)(2x)^{k}\right) \\
&= \frac{D}{4}\left((2x+1)^{2n}+(2x-1)^{2n}\right) \\
&= 2^{2n-2}D\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n}\right) \\
&= \frac{1}{2}D\left(e^{\frac{D}{2}}+e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n-1}x^{2n}\right).
\end{aligned}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} 2^{2k}\binom{2n+1}{2k}x^{2k} &= \sum_{k=1}^{n}\binom{2n+1}{2k}(2x)^{2k} \\
&= \sum_{0\leq k\leq 2n \text{ et } k\equiv 1 \bmod 2}\binom{2n+1}{k}(2x)^{k} \\
&= \frac{1}{2}\left((2x+1)^{2n+1}-(2x-1)^{2n+1}\right) \\
&= 2^{2n}\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}-\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) \\
&= \left(e^{\frac{D}{2}}-e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n}x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Enfin, on a :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n}(2k+1)\,2^{2k}\binom{2n+1}{2k+1}x^{2k} &= \frac{D}{2}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1}(2x)^{2k+1}\right) \\
&= \frac{D}{2}\left(\sum_{0\leq k\leq 2n \text{ et } k\equiv 1 \bmod 2}\binom{2n+1}{k}(2x)^{k}\right) \\
&= \frac{D}{4}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{k}\left(1-(-1)^{k}\right)(2x)^{k}\right) \\
&= \frac{D}{4}\left((2x+1)^{2n+1}+(2x-1)^{2n+1}\right) \\
&= 2^{2n-1}D\left(\left(x+\frac{1}{2}\right)^{2n+1}+\left(x-\frac{1}{2}\right)^{2n+1}\right) \\
&= \frac{1}{2}D\left(e^{\frac{D}{2}}+e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n}x^{2n+1}\right).
\end{aligned}$$

Ainsi les égalités à prouver (4.49) et (4.50) s'écrivent :

$$\Omega_B\left(e^{\frac{D}{2}}-e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n-1}x^{2n}\right)=\Omega_E\frac{1}{2}D\left(e^{\frac{D}{2}}+e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n-1}x^{2n}\right) \tag{4.51}$$

et

$$\Omega_B\left(e^{\frac{D}{2}}-e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n}x^{2n+1}\right)=\Omega_E\frac{1}{2}D\left(e^{\frac{D}{2}}+e^{-\frac{D}{2}}\right)\left(2^{2n}x^{2n+1}\right). \tag{4.52}$$

Or les relations (4.51) et (4.52) équivalent à affirmer que :

$$\Omega_B\left(e^{\frac{D}{2}}-e^{-\frac{D}{2}}\right)=\frac{1}{2}\Omega_E D\left(e^{\frac{D}{2}}+e^{-\frac{D}{2}}\right). \tag{4.53}$$

On vérifie alors que (4.53) est bien vérifiée du fait que l'on a :

$$\Omega_B\left(e^{\frac{D}{2}}-e^{-\frac{D}{2}}\right)=De^{-\frac{D}{2}} \quad \text{et} \quad \frac{1}{2}\Omega_E D\left(e^{\frac{D}{2}}+e^{-\frac{D}{2}}\right)=De^{-\frac{D}{2}}.$$

Ainsin on a prouvé (4.49) et (4.50) et par conséquent, on a bien prouvé (4.47) et (4.48).

Chapitre 5

Généralisation d'une identité pour des polynômes d'Appell

5.1 Introduction

Qi et Chapman [44] précisent ce que l'on entend par formule explicite ou "forme close" :

"*In mathematics, a closed form is a mathematical expression that can be evaluated in a finite number of operations. It may contain constants, variables, four arithmetic operations, and elementary functions, but usually no limit.*"

La détermination de formules explicites pour les nombres et polynômes de Bernoulli et d'Euler aussi bien classiques que généralisés a fait et continue de faire l'objet d'une intense recherche. De très nombreuses publications portent essentiellement sur ce thème. Sans que la liste suivante soit exhaustive, on peut citer [2], [5], [9], [11], [21], [25], [26], [28], [29], [35], [36], [37], [38], [43], [49], [52], [52], [53], [56], [57], [60]. L'article de Gould [21] de 1972 est une intéressante et riche rétrospective des formules explicites pour les nombres de Bernoulli apparues depuis la mise en évidence de ces nombres jusqu'à 1972. Les méthodes utilisées pour parvenir à ces formules sont très variées. Des références plus anciennes à certaines de ces formules explicites accompagnées de preuves et de commentaires se trouvent dans la thèse de doctorat de Zerroukhat [62].

Il est évident qu'il est plus avantageux de connaître des formules explicites pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler (classiques ou généralisés) que seulement des formules pour les nombres de Bernoulli et d'Euler (classiques ou généralisés). En effet, les relations $B_n = B_n(0)$, $E_n = 2^n E_n\left(\frac{1}{2}\right)$, $B_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}(0)$, $E_n^{(\alpha)} = 2^n E_n^{(\alpha)}\left(\frac{\alpha}{2}\right)$ montrent clairement que toute identité sur des polynômes de Bernoulli ou d'Euler (classiques ou généralisés) permet d'obtenir une identité sur les nombres de Bernoulli ou d'Euler (classiques ou généralisés). Généraliser aux polynômes Bernoulli une simple identité obtenue pour des nombres de Bernoulli s'avère être souvent un problème loin d'être évident ou même d'être toujours possible.

Nous avons constaté que les polynômes de Bernoulli et d'Euler (classiques ou généralisés) étaient des suites de polynômes d'Appell. Trouver une identité pour des polynômes d'Appell présente donc un intérêt considérable du fait qu'en particularisant cette fois-ci les polynômes d'Appell, on obtient des identités pour les polynômes d'Appell particularisés. Ces polynômes particularisés peuvent ainsi être des polynômes de Bernoulli ou d'Euler.

Dans ce chapitre, nous commençons par établir un historique concernant certaines formules explicites pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés ou classiques qui ont été successivement améliorées. Nous prouvons certaines d'entre elles comme applications de certains résultats prouvés dans les chapitres précédents. Nous énoncerons ensuite le théorème de Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat [5] qui concerne une identité pour des polynômes d'Appell. Nous prouverons ensuite une généralisation de ce théorème qui a fait l'objet d'une récente publication [7].

5.2 Historique de certaines formules explicites

5.2.1 Formule explicite de Jordan

La formule suivante :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} \binom{n+k}{k}^{-1} S(n+k,k), \tag{5.1}$$

apparait en page 219 dans l'ouvrage de C. Jordan [27] publié en 1950. Elle figure naturellement dans l'article de Gould [21] paru en 1972 (qui est une rétrospective des formules explicites des nombres de Bernoulli classiques), plus précisément en page 48 (formule [11]) et en page 49 (formule [17]). La preuve de (5.1) donnée par Gould est basée sur le fait que :

$$B_n = D^n \left(\frac{x}{e^x - 1} \right) \Big|_{x=0},$$

et sur l'exploitation de la formule suivante :

$$D^n \left(\frac{1}{f(x)} \right) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \frac{D^n \left((f(x))^j \right)}{(f(x))^{j+1}}.$$

L'identité (5.1) a aussi été retrouvée et prouvée par de nombreux autres auteurs. Citons quelques un de ces auteurs. L'identité (5.1) a été prouvée par Shirai et Sato [49, p. 140] en 2001. Ces auteurs ont obtenu cette relation comme cas particulier d'une identité comportant les nombres de Bernoulli et les nombres de Stirling de première et seconde espèce. L'identité

(5.1) a aussi été prouvée par Jeong, Kim et Son [26, p. 59] en 2005. Dans leur article, ces auteurs ont exploité les propriétés de l'opérateur $H^{(n)} := \frac{D^n}{n!}$ nommé dérivée d'ordre n de Hasse-Teichmüller pour obtenir plus généralement des preuves simples de formules explicites connues pour les nombres de Bernoulli. L'identité (5.1) a aussi été prouvée par Guo et Qi [25, relation (6)] en 2015 et par Qi et Chapman [44, relation 1.3] en 2016. Ces auteurs ont exploité certaines propriétés des polynômes de Bell $B_{n,k}(x_1, \ldots, x_{n-k+1})$ ainsi que la formule de Faà di Bruno.

Grace aux relations établies dans les chapitres précédents, nous pouvons prouver très simplement la relation (5.1). En effet, la relation (1.54) du Corollaire 34 appliquée à la suite des polynômes de Bernoulli pour $m = n$, $x = 0$ laquelle on a $a_0 = 1$ permet d'obtenir la relation suivante :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+1}{k+1} B_n^{(-k)}. \tag{5.2}$$

L'identité (5.1) est alors obtenue en remplaçant dans (5.2) $B_n^{(-k)}$ par l'expression suivante qui n'est rien d'autre que la relation (2.75) de la proposition 52 écrite pour $x = 0$:

$$B_n^{(-k)} = \binom{n+k}{k}^{-1} S(n+k, k, x).$$

5.2.2 Formule explicite de Todorov (1985)

En 1985, dans une courte note écrite en français, présentée par Jean-Pierre Serre aux Comptes Rendus de l'Académie des Sciences et intitulée "Une formule simple explicite des nombres de Bernoulli généralisés, Pavel G. Todorov [56] commence par citer l'ancienne formule (5.1) et présente ensuite la généralisation suivante de (5.1) :

$$B_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k-1} \binom{n+k}{k}^{-1} S(n+k, k). \tag{5.3}$$

C'est une formule explicite pour les nombres de Bernoulli généralisés. La méthode d'obtention de cette nouvelle identité est essentiellement basée sur des propriétés simples de la dérivation ainsi que sur l'identité combinatoire suivante :

$$\sum_{k=0}^{n-\nu} (-1)^k \binom{-r-\nu}{k} = \binom{r+n}{n-\nu}.$$

5.2.3 Formule explicite de Strivastava et Todorov (1988)

En 1988. Strivastava et Todorov [52] ont obtenu la formule explicite suivante pour $B_n^{(\alpha)} x)$:

$$
\begin{aligned}
B_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \binom{\alpha+k-1}{k-1} \frac{k!}{(2k)!} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^{2k} (x+j)^{n-k} \\
&\quad \times F\left[k-n, k-\alpha; 2k+1; j/(x+j)\right], \qquad (5.4)
\end{aligned}
$$

où $F[a,b,c;z]$ désigne la fonction hypergéométrique gaussienne [23] définie par :

$$
F[a,b;c;z] = \sum_{k\geq 0} \frac{(a)_k (b)_k z^k}{(c)_k k!}.
$$

En 1996, Choi et Seo ont obtenu de nouvelles formules explicites pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés.

5.2.4 Formule explicite de Choi (1996)

En 1996, Choi [15] ont obtenu la formule suivante par application de l'analyse complexe :

$$
B_{n+k}^{(n)}(x) = n\binom{n+k}{n} \sum_{j=0}^{n-1} (-1)^j \frac{B_{k+j+1}(x)}{k+j+1} \sum_{\ell=j}^{n-1} \binom{\ell}{j} s(n,\ell+1)\, x^{\ell-j},
$$

où les $s(n,\ell+1)$ désignent les nombres de Stirling de première espèce.

5.2.5 Formules explicites de Choi et Seo (1996)

En 1996, Choi et Seo [16] ont obtenu les formules explicites suivantes pour les polynômes de Bernoulli et d'Euler généralisés vérifiées pour tout nombre entiers n et q :

$$
B_n^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-j)^\ell x^\ell \frac{(n-\ell)!}{(n+qj-\ell)!} \sum_{k=0}^{qj} (-1)^{qj-k} \binom{qj}{k} k^{n+qj-\ell} \qquad (5.5)
$$

et

$$
E_n^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} 2^{-qj} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} (-j)^\ell x^\ell \sum_{k=0}^{qj} \binom{qj}{k} k^{n-\ell}. \qquad (5.6)
$$

Leur preuve très technique repose sur l'emploi de la règle de dérivation de Leibniz et certaines identités combinatoires. Ces deux formules peuvent se déduire aisément des résultats qu'on a établit aux chapitres précédents. En effet, la formule (5.5) peut s'écrire grâce à la relation (1.16) :

$$
B_n^{(q)}(x) = \sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{n+1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{j} (-j)^\ell x^\ell \binom{n+qj-\ell}{qj}^{-1} S(n+qj-\ell, qj).
$$

Or d'après la relation (2.75) de la proposition 52 écrite pour $x = 0$, on a :

$$\binom{n+qj-\ell}{qj}^{-1} S\left(n+qj-\ell, qj\right) = B_n^{(-qj)}\left(0\right).$$

La relation (5.5) est donc équivalente à la relation suiante :

$$B_n^{(q)}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(-1\right)^j \binom{n+1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(-jx\right)^\ell B_n^{(-qj)}\left(0\right).$$

$\left(B_n^{(-qj)}\left(x\right)\right)$ étant une suite de polynômes d'Appell, on sait aussi que :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(-jx\right)^\ell B_n^{(-qj)}\left(0\right) = B_n^{(-qj)}\left(-jx\right).$$

Par suite, la relation (5.5) est encore équivalente à la relation suivante :

$$B_n^{(q)}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(-1\right)^j \binom{n+1}{j+1} B_n^{(-qj)}\left(-jx\right). \tag{5.7}$$

Enfin, on sait que cette dernière relation (5.7) est bien vérifiée d'après la relation (1.52) du Corollaire 33 appliquée à la suite des polynômes de Bernoulli avec $a_0 = 1, \ell = q$ et $m = n$.

De même, on peut constater que d'après la relation (2.78) de la proposition 52, on a :

$$2^{-qj} \sum_{k=0}^{qj} \binom{qj}{k} k^{n-\ell} = E_{n-\ell}^{(-qj)}\left(0\right).$$

La relation (5.6) est donc équivalente à la relation suivante :

$$E_n^{(q)}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(-1\right)^j \binom{n+1}{j+1} \sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(-jx\right)^\ell E_{n-\ell}^{(-qj)}\left(0\right).$$

$\left(E_n^{(-qj)}\left(x\right)\right)$ étant une suite de polynômes d'Appell, on sait aussi que :

$$\sum_{\ell=0}^{n} \binom{n}{\ell} \left(-jx\right)^\ell E_{n-\ell}^{(-qj)}\left(0\right) = E_n^{(-qj)}\left(-jx\right).$$

La relation (5.6) est ainsi équivalente à la relation suivante :

$$E_n^{(q)}\left(x\right) = \sum_{j=0}^{n} \left(-1\right)^j \binom{n+1}{j+1} E_n^{(-qj)}\left(-jx\right). \tag{5.8}$$

Enfin, on sait que cette dernière relation (5.8) est bien vérifiée d'après la relation (1.52) du Corollaire 33 appliquée à la suite des polynômes d'Euler avec $a_0 = 1, \ell = q$ et $m = n$.

5.2.6 L'identité de Luo (2004)

En 2004, Luo présente dans une note [35] la formule explicite suivante pour le n-ième polynôme d'Euler généralisé d'ordre α pour $\alpha \in \mathbb{C}$:

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^{n-s} \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k k!}{2^k} \binom{\alpha+k-1}{k} S(s,k)\,,\ n \geq 0. \tag{5.9}$$

La méthode d'obtention par Luo de cette identité repose sur la formule de Taylor et la règle de dérivation de Leibniz. Il est facile de prouver (5.9) en observant que du fait que la suite de polynômes $\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de polynômes d'Appell, on a :

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{s=0}^{n} \binom{n}{s} x^{n-s} E_s^{(\alpha)}(0)\,, n \geq 0. \tag{5.10}$$

D'autre part, on sait que :

$$\begin{aligned}
\Omega_{E^{(\alpha)}} &= \Omega_E^{\alpha} \\
&= \left(\frac{2}{2+\Delta}\right)^{\alpha} \\
&= \left(1+\frac{1}{2}\Delta\right)^{-\alpha} \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \binom{-\alpha}{k} \frac{1}{2^k} \Delta^k \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{\alpha+k-1}{k} \Delta^k.
\end{aligned}$$

Il en résulte que :

$$\begin{aligned}
E_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{\alpha+k-1}{k} \Delta^k(x) \\
&= \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k k!}{2^k} \binom{\alpha+k-1}{k} S(n,k,x)\,.
\end{aligned}$$

On en déduit que :

$$E_s^{(\alpha)}(0) = \sum_{k=0}^{s} \frac{(-1)^k k!}{2^k} \binom{\alpha+k-1}{k} S(s,k)\,. \tag{5.11}$$

(5.9) résulte alors de (5.10) et(5.11).

5.2.7 L'identité de Luo (2005)

En 2005, Luo [36] prouve la formule explicite suivante pour les nombres d'Euler généralisés :

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k-1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^n, \ n \geq 0. \tag{5.12}$$

Luo déduit de (5.12) le résultat suivant :

$$E_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n+1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^n .$$

Nous verrons que cette formule peut s'obtenir comme un cas particulier de notre théorème 69.

5.2.8 L'identité de Luo (2009)

En 2009, Luo ([38, Theorem 2.1]) ont prouvé la formule explicite suivante pour $E_n^{(\alpha)}(x)$ faisant intervenir la fonction gaussienne hypergéométrique :

$$\begin{aligned} E_n^{(\alpha)}(x) &= \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \binom{n}{k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} (-1)^j \binom{k}{j} j^k (x+j)^{n-k} \\ &\quad \times F\left[k-n, k; k+1; \frac{j}{x+j}\right]. \end{aligned}$$

5.2.9 Formule explicite de Boutiche, Rahmani et Strivastava (2017)

En 2017, Boutiche, Rahmani et Strivastava [11] ont généralisé aux polynômes de Bernoulli généralisés la formule explicite (5.3) pour les nombres généralisés de Bernoulli $B_n^{(\alpha)}$ que Todorov avait établi en 1985. Ils prouvent la formule explicite pour $B_n^{(\alpha)}(x)$ suivante :

$$B_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k-1} \binom{n+k}{k}^{-1} S(n+k, k, x), \tag{5.13}$$

La démonstration de leur formule repose sur l'exploitation de la preuve de la formule explicite (5.4) pour $B_n^{(\alpha)}(x)$ établie par Strivastava et Todorov ([52]) en 1988.

5.2.10 L'identité de Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat (2017)

Théorème 68 *(Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat [5]) Soit* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ *une série formelle de* $\mathbb{C}[[z]]$ *de terme constant égal à* 1*,* α *un nombre complexe et* $\left(A_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\geq 0}$ *la suite de polynômes d'Appell de* $\mathbb{C}[x]$ *de série génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!} = S^{\alpha}(z)e^{zX}.$$

Alors, pour tous entiers naturels m *et* n *tels que* $m \geq n \geq 0$*, on a :*

$$A_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} A_n^{(-k)}(x). \tag{5.14}$$

Cette identité a de nombreuses applications. Elle généralise aussi de nombreuses identités connues sur les nombres et polynômes de Bernoulli ([62], [5]). Cependant une situation particulière a attiré notre attention et nous a motivé à rechercher une nouvelle identité pour les polynômes d'Appell encore plus générale que l'identité (5.14).En effet, en choisissant $S(z) = \frac{2}{e^z+1}$ et $m = n$ dans le Théorème 68, on obtient :

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k} E_n^{(-k)}(x).$$

En tenant compte de la relation (2.78) de la proposition 52 qui affirme que :

$$E_n^{(-k)}(x) = \frac{1}{2^k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(x+j)^n,$$

on obtient alors l'identité suivante pour les polynômes d'Euler généralisés :

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(x+j)^n. \tag{5.15}$$

Comme $E_n^{(\alpha)}(x) = 2^n E_n^{(\alpha)}(\frac{\alpha}{2})$, on en déduit l'identité suivante pour les nombres d'Euler généralisés :

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(\alpha+2j)^n. \tag{5.16}$$

Il se trouve que Luo [36] a établi en 2005 l'identité suivante :

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k}{2^k}\binom{n+\alpha}{n-k}\binom{\alpha+k-1}{k}\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}(k-2j)^n,\ n\geq 0. \tag{5.17}$$

Les identités (5.16) et (5.17) sont curieusement similaires mais différentes. En changeant j en $k-j$ dans la dernière sommation au second membre de (5.17), on peut constater que cette formule de Luo est équivalente à l'identité suivante :

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (-k+2j)^n, \; n \geq 0. \tag{5.18}$$

Il s'avère ainsi qu'en fait, nous n'avons pas pu obtenir l'identité de Luo (5.17) comme cas particulier de l'identité (5.14). Des tentatives avec Maple nous ont permis de constater que la formule suivante plus générale que (5.15) :

$$E_n^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{n+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (x+j+\lambda(\alpha+k))^n,$$

dans laquelle λ désigne un nombre complexe quelconque, était vérifiée pour de nombreuses valeurs de n. De plus cette formule présentait deux avantages. D'une part, elle était plus générale que la formule (5.15) et d'autre part, elle permettait de retrouver la formule (5.18) équivalente à l'identité de Luo en choisissant $x = \frac{\alpha}{2}$ et $\lambda = -\frac{1}{2}$. Mieux encore on a pu vérifier que pour de nombreuses valeurs de n, on avait en fait le résultat suivant plus général que la formule de Luo (5.17) :

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^k} \binom{m+\alpha}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^n, \, m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor.$$

Grâce à l'utilisation des opérateurs de composition, nous avons pu établir et généraliser ces résultats aux suites de polynômes d'Appell. C'est ainsi que nous avons pu formuler et prouver le théorème qui nous énonçons au paragraphe suivant. Ce théorème a fait l'objet d'une récente publication [7] en 2022.

5.3 Nouvelle identité pour des polynômes d'Appell (2022)

En 2022, nous avons pu obtenir la généralisation suivante du théorème 68 de Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat. Ce théorème généralise aussi l'identité de Luo (5.17). Rappelons qu'on avait pas pu obtenir cette même identité de Luo par application du théorème 68 mais seulement une identité analogue (5.16).

Théorème 69 *(Bencherif, Mokhtari et Zerroukhat[7])Soient* $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{z^n}{n!}$ *une série formelle de* $\mathbb{C}[[z]]$ *de terme constant égal à* 1, α *un nombre complexe et* $\left(A_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\geq 0}$ *la suite* *de polynômes d'Appell de $\mathbb{C}[x]$ de série génératrice exponentielle :*

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_n^{(\alpha)}(x)\frac{z^n}{n!} = S^{\alpha}(z)e^{zx}.$$

Alors, pour tous $\lambda \in \mathbb{C}, l \in \mathbb{Z}$ pour tous entiers naturels m et n, on a :

$$A_n^{(\alpha l)}(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} A_n^{(-kl)}(x+\lambda l(\alpha+k)),\ m \geq n \geq 0, \tag{5.19}$$

et

$$A_n^{(\alpha l)}(x) = \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} A_n^{(-kl)}(x+a_1 l(\alpha+k)),\ m \geq \left[\frac{n}{2}\right].$$

Le théorème 69 constitue effectivement une généralisation du théorème 68. En effet pour $\lambda = 0$ et $l = 1$, la relation (5.19) est exactement l'identité (5.14).

Outre les nombreuses applications que permettait d'obtenir le théorème 68, le théorème 69 permet de retrouver de nombreuses autres identités pour les polynômes et nombres de Bernoulli et d'Euler classiques ou généralisés. Nous examinerons quelques unes de ces applications au dernier paragraphe de ce chapitre.

Pour prouver ce théorème, nous allons exploiter un lemme déjà cité et prouvé dans l'article ([5]).

5.4 Une identité remarquable

Le lemme suivant joue un rôle essentiel dans la preuve du théorème 69.

Lemme 70 *Pour tous entiers naturels $m \geq 0$ et $q \geq 1$, on a :*

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k} x^{q+k} = 1+(-1)^m\binom{q+m}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{k}{m+k}\binom{q}{k}(x-1)^{m+k}. \tag{5.20}$$

Les grandes lignes d'une preuve de ce lemme sont exposées dans l'article de Bencherif, Benzaghou et Zerroukhat [5]. Une preuve de ce lemme est aussi développée dans la thèse de doctorat de Zerroukhat [62]. Ce qui suit est une nouvelle preuve de ce lemme.

Preuve. Considérons l'expression :

$$I = \int_0^1 t^{q-1}(1-t)^m\, dt. \tag{5.21}$$

Il est bien connu et facile de prouver que :

$$I = q^{-1}\binom{q+m}{q}^{-1}.$$

D'autre part, on a aussi :

$$I = I_1 + I_2 \tag{5.22}$$

avec :

$$I_1 = \int_0^x t^{q-1}(1-t)^m\,dt \;\text{ et }\; I_2 = \int_x^1 t^{q-1}(1-t)^m\,dt.$$

On constate que :

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^x \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}t^{q-1+k}dt \\ &= \sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{x^{q+k}}{q+k}. \end{aligned} \tag{5.23}$$

De même, on a :

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_0^{1-x}(1-u)^{q-1}u^m du \\ &= -\sum_{k=1}^{q}(-1)^m\binom{q-1}{k-1}\frac{(x-1)^{m+k}}{m+k}. \end{aligned} \tag{5.24}$$

Il résulte de (5.21), (5.22), (5.23) et (5.24) que l'on a :

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\binom{m}{k}\frac{x^{q+k}}{q+k} - \sum_{k=1}^{q}(-1)^m\binom{q-1}{k-1}\frac{(x-1)^{m+k}}{m+k} = q^{-1}\binom{q+m}{q}^{-1},$$

ce qui peut s'écrire encore :

$$\sum_{k=0}^{m}(-1)^k\frac{q}{q+k}\binom{q+m}{q}\binom{m}{k}x^{q+k} = 1 + (-1)^m\binom{q+m}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{k}{m+k}\binom{q}{k}(x-1)^{m+k}. \tag{5.25}$$

Remarquons que :

$$\frac{q}{q+k}\binom{q+m}{q}\binom{m}{k} = \binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k}. \tag{5.26}$$

La relation (5.20) résulte alors de (5.25) et (5.26). □

5.5 Démonstration du Théorème

Le lemme suivant nous sera utile dans la preuve du théorème 69.

Lemme 71 *Soit $\Omega := S(D)$ où $S(z) \in \mathbb{C}[[z]]$ un opérateur d'Appell unitaire, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{Z}$ et $r \in \mathbb{N}$. Alors, on a*

$$\operatorname{Ord}\left(e^{\lambda \ell D}\Omega^{-\ell} - 1\right)^r \geq r \quad \textit{et} \ \operatorname{Ord}\left(e^{\lambda \ell D}\Omega^{-\ell} - 1\right)^r \geq 2r \ \textit{pour} \ \lambda = S'(0).$$

Preuve. Soit

$$S(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!}.$$

On a alors :

$$\begin{aligned} \Omega &= 1 + a_1 D + \frac{a_2}{2} D^2 + \cdots \\ \Omega^{-\ell} &= 1 - \ell a_1 D + \beta D^2 + \cdots \\ e^{\lambda \ell D} &= 1 + \lambda \ell D + \frac{\lambda^2}{2} \ell^2 D^2 + \cdots \end{aligned}$$

On en déduit que :

$$e^{\lambda \ell D}\Omega^{-\ell} - 1 = (\lambda - a_1)\,\ell D + \gamma D^2 + \cdots$$

Il en résulte que :

$$\operatorname{Ord}\left(e^{\lambda \ell D}\Omega^{-\ell} - 1\right) \geq 1 \ \text{ et } \ \operatorname{Ord}\left(e^{\lambda \ell D}\Omega^{-\ell} - 1\right) \geq 2 \text{ pour } \lambda = a_1 = S'(0).$$

La propriété (1.8) permet alors de conclure. □

Considérons le polynôme $P_{\lambda,\alpha}(x)$ défini par :

$$P_{\lambda,\alpha}(x) := A_n^{(\alpha l)}(x) - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha + m}{m - k} \binom{\alpha + k - 1}{k} A_n^{(-kl)}(x + \lambda l(\alpha + k)).$$

Le théorème 69 revient à prouver que :

$$\forall \alpha \in \mathbb{C}, P_{\lambda,\alpha}(x) = 0, \text{ pour } m \geq n \text{ et } P_{a_1,\alpha}(x) = 0 \text{ pour } m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \tag{5.27}$$

Comme $P_{\lambda,\alpha}(x)$ peut assi être considéré comme un polynôme en α, il suffit de prouver seulement que :

$$\forall q \in \mathbb{N}^*, P_{\lambda,q}(x) = 0, \text{ pour } m \geq n \text{ et } P_{a_1,q}(x) = 0 \text{ pour } m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \tag{5.28}$$

Soit $\Omega := S(D)$ où $S(z) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \frac{z^k}{k!} \in \mathbb{C}[[z]]$ l'opérateur d'Appell associé à la suite d'Appell $(A_n(x))_{n\geq 0}$, alors pour tout $\gamma \in \mathbb{C}$, Ω^γ est l'opérateur d'Appell associé à la suite d'Appell $\left(A_n^{(\gamma)}(x)\right)_{n\geq 0}$. On a :

$$A_n^{(\gamma)}(x) = \Omega^\gamma (x^n), \, n \in \mathbb{N}.$$

On constate que :

$$\begin{aligned}
P_{\lambda,q}(x) &= \Omega^{q\ell}(x^n) - \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k} e^{\lambda l(q+k)D}\Omega^{-k\ell}(x^n) \\
&= \Omega^{q\ell}\left(1 - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k}\left(e^{\lambda lD}\Omega^{-\ell}\right)^{q+k}\right)(x^n) \\
&= \Omega^{q\ell}\Lambda_\lambda (x^n)
\end{aligned}$$

avec :

$$\Lambda_\lambda := 1 - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k}\left(e^{\lambda lD}\Omega^{-\ell}\right)^{q+k}.$$

Or d'après le lemme (70), on a :

$$1 - \sum_{k=0}^{m}(-1)^k \binom{q+m}{m-k}\binom{q+k-1}{k} x^{q+k} = (-1)^{m+1}\binom{q+m}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{k}{m+k}\binom{q}{k}(x-1)^{m+k}.$$

On en déduit que :

$$\Lambda_\lambda = (-1)^{m+1}\binom{q+m}{q}\sum_{k=1}^{q}\frac{k}{m+k}\binom{q}{k}(e^{\lambda lD}\Omega^{-\ell}-1)^{m+k}, \tag{5.29}$$

avec :

$$P_{\lambda,q}(x) = \Omega^{q\ell}\Lambda_\lambda (x^n). \tag{5.30}$$

On sait d'aprés le lemme 71 que :

$$\operatorname{Ord}\left(e^{\lambda\ell D}\Omega^{-\ell}-1\right)^{m+k} \geq m+k \;\text{ et }\; \operatorname{Ord}\left(e^{\lambda\ell D}\Omega^{-\ell}-1\right)^{r} \geq 2(m+k) \;\text{ pour }\; \lambda = a_1. \tag{5.31}$$

Il résulte de (5.29) et (5.31) que :

$$\operatorname{Ord}\Lambda_\lambda \geq m+1 \;\text{ et }\; \operatorname{Ord}\Lambda_\lambda \geq 2(m+1) \;\text{ pour }\; \lambda = a_1. \tag{5.32}$$

Comme Ω est un opérateur d'Appell, l'opérateur $\Omega^{q\ell}$ est aussi un opérateur d'Appell, donc un opérateur d'ordre 0. Il résulte alors de ce fait et de la relation (5.32) que :

$$\operatorname{Ord}\Omega^{q\ell}\Lambda_\lambda \geq m+1 \;\text{ et }\; \operatorname{Ord}\Omega^{q\ell}\Lambda_\lambda \geq 2(m+1) \;\text{ pour }\; \lambda = a_1.$$

Comme $P_{\lambda,q}(x) = \Omega^{q\ell}\Lambda_\lambda (x^n)$, il en résulte que :

$$P_{\lambda,q}(x) = 0, \text{ pour } m+1 > n \text{ et } \; P_{a_1,q}(x) = 0 \text{ pour } 2(m+1) > n.$$

La relation (5.28) en résulte. Le théorème (69) est ainsi prouvé.

5.6 Applications

Le théorème 69 a de nombreuses applications. En effet, de nombreuses suites de polynômes remarquables de $\mathbb{C}[x]$ sont des suites de polynômes d'Appell. Ainsi pour $\alpha \in \mathbb{C}$, ce théorème s'applique aux suites de polynômes de Bernoulli généralisés $\left(B_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ et de polynômes d'Euler généralisés $\left(E_n^{(\alpha)}(x)\right)_{n\in\mathbb{N}}$. On obtient ainsi les corollaires suivants :

Corollaire 72 *Pour $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$B_n^{(\alpha\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} B_n^{(-k\ell)}(x+\lambda\ell(\alpha+k)), \quad m \geq n, \tag{5.33}$$

$$B_n^{(\alpha\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} B_n^{(-k\ell)}\left(x-\frac{\ell}{2}(\alpha+k)\right), \; m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor \tag{5.34}$$

Corollaire 73 *Pour $\alpha, \lambda \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{N}$, on a :*

$$E_n^{(\alpha\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} E_n^{(-k\ell)}(x+\lambda\ell(\alpha+k)), \; m \geq n,$$

$$E_n^{(\alpha\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k}\binom{\alpha+k-1}{k} E_n^{(-k\ell)}\left(x-\frac{\ell}{2}(\alpha+k)\right), \; m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor. \tag{5.35}$$

Les Corollaires 72 et 73 découlent immédiatement du Théorème 69 en choisissant successivement $S(z) = \frac{z}{e^z-1}$ puis $S(z) = \frac{2}{e^z+1}$.

On définit aussi les polynômes $\widehat{B}_n^{(\alpha)}$ par [59, p. 259] :

$$\widehat{B}_n^{(\alpha)} = B_n^{(\alpha)}(\alpha/2).$$

On a alors le corollaire suivant :

Corollaire 74 *Pour $\ell \in \mathbb{N}$, $n, m \in \mathbb{N}$, on a pour $m \geq n$:*

$$B_n^{(\ell)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \frac{\binom{m+1}{k+1}}{\binom{n+k\ell}{n}} S(n+k\ell, k\ell, x). \tag{5.36}$$

Preuve. La relation (5.36) découle immédiatement de la relation (5.33) du Corollaire 72 pour $\alpha = 1$, $\lambda = 0$ et $m = n$ en tenant compte de la relation (2.75) de la Proposition 52.

Pour $x = 0$ et $m = n$, la relation 5.36 permet d'obtenir la relation suivante qui peut -être trouvée dans [26, p-60] :

$$B_n^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+k\ell}{n}} S(n+k\ell, k\ell).$$

□

Pour $x = 0$, $m = n$ et $\ell = 1$, la relation 5.36 permet d'obtenir la relation suivante :

$$B_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+k}{n}} S(n+k, k).$$

Nous avons déjà indiqué que cette dernière formule signalée par Jordan [27] avait été prouvée par de nombreux auteurs : [21, p.48, (11)], [25, p. 27 (6)], [26, p.59], [27, p. 219], [44, p. 91, (1.3)], [49, p. 140].

Corollaire 75 *Pour $\alpha \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{Z}$, $n, m \in \mathbb{N}$, on a pour $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:*

$$\widehat{B}_n^{(\ell\alpha)} = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{\alpha+m}{m-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \widehat{B}_n^{(-k\ell)}, \tag{5.37}$$

et

$$\widehat{B}_{2n}^{(\ell\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \widehat{B}_{2n}^{(-k\ell)}.$$

Preuve. Ces deux formules découlent immédiatement de la relation (5.34) du Corollaire 72 pour $x = \frac{1}{2}\alpha\ell$. □

Corollaire 76 *Pour $\ell = 1$ et $m = n$, la relation 5.37 s'écrit :*

$$\widehat{B}_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \widehat{B}_n^{(-k)}. \tag{5.38}$$

La relation (5.38) est exactement la relation (6.12) du Théorème 6.3 de [59].

Corollaire 77 *Pour* $\alpha \in \mathbb{C}$, $\ell \in \mathbb{N}$, n, $m \in \mathbb{N}$, *on a pour* $m \geq \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$:

$$E_n^{(\alpha\ell)} = \sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{2^{k\ell}} \binom{\alpha+m}{m-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k\ell} \binom{k\ell}{j} (k\ell-2j)^n \,, \tag{5.39}$$

$$E_{2n}^{(\alpha\ell)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k\ell}} \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k\ell} \binom{k\ell}{j} (k\ell-2j)^{2n} \,,$$

$$E_{2n}^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k\ell}} \binom{n+1}{k+1} \sum_{j=0}^{k\ell} \binom{k\ell}{j} (k\ell-2j)^{2n} \,.$$

Preuve. Ces relations résultent immédiatement de la relation (5.35) du Corollaire **??** pour $x = \frac{1}{2}\alpha\ell$, en remarquant de plus que $E_n^{(\alpha\ell)} = 0$ pour n impair. $\square$

Pour $m = n$, $\ell = 1$ la relation 5.39 s'écrit

$$E_n^{(\alpha)} = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{2^{k}} \binom{\alpha+n}{n-k} \binom{\alpha+k-1}{k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} (k-2j)^n \,. \tag{5.40}$$

(5.40) est exactement la relation obtenue par Luo [36].

Conclusion

Dans cette thèse, nous avons pu approfondir certaines propriétés de l'algèbre commutative $\mathfrak{C}$ des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$ et les exploiter pour découvrir et aussi pour vérifier des identités remarquables vérifiées par des polynômes d'Appell.

Nous avons pu constater que toute identité polynomiale de $\mathbb{C}[x]$ donnait naissance naturellement à une identité sur les opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$ laquelle permettait d'obtenir des identités pour des suites de polynômes vérifiant des relations d'Appell. En particulier, nous avons appliqué certaines identités obtenues pour des polynômes d'Appell aux suites de polynômes classiques ou généralisés de Bernoulli et d'Euler qui sont effectivement des suites de polynômes d'Appell.

Cette approche performante nous permet d'affirmer que plus généralement, l'emploi des opérateurs de composition de $\mathbb{C}[x]$ est un outil puissant dans l'étude des suites de polynômes vérifiant des conditions d'Appell. D'intéressantes perspectives de recherche sont ainsi envisageables.

Bibliographie

[1] P. Appell, Sur une classe de polynômes. Ann. Sci. E.N.S. **9**(2), 119-144 (1880).

[2] H. Alzer & S. Yakubovich, Identities involving Bernoulli and Euler polynomials, Integral Transforms and Special Functions, Volume 29, 2018 - Issue 1, Pages 43-61.

[3] T. Arakawa, T. Ibukiyama, M. Kaneko, Bernoulli Numbers and Zeta Functions, Springer Monographs in Mathematics, Springer Japan, 2014.

[4] F. Bencherif, F., Sur une propriété des polynômes de Nörlund. Actes des rencontres du CIRM, 2(2), (2010), 71-77.

[5] F. Bencherif, B. Benzaghou, S. Zerroukhat, Une identité pour des polynômes d'Appell, Comptes Rendus Mathematique, Vol 355 - N° 12, Issue, Pages 1201-1204 (2017). https ://doi.org/10.1016/j.crma.2017.11.002

[6] F. Bencherif, R. Boumahdi, and T. Garici, Symmetric identity for polynomial sequences satisfying $A'_{n+1}(x) = (n+1) A_n(x)$, Communications in Mathematics 29.3 (2021) : 343-355.

[7] F. Bencherif, N. Mokhtari and S. Zerroukhat, A new identity for Appell polynomials, J. Integer Sequences 25 (2022), Article 22.8.2.

[8] J. Bernoulli, Ars conjectandi, opus posthumum. Accedit Tractatus de seriebus infinitis, et epistola gallicé scripta de ludo pilae reticularis, Basileae : impensis Thurnisiorum, fratrum, 1713.

[9] F Bounebirat, D Laissaoui, M Rahmani, Some combinatorial identities via Stirling transform, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 24, No. 4, 92–98, 2018.

[10] N. Bourbaki. Eléments de Mathématiques. Fonctions d'une variable réelle. Théorie élémentaire. Hermann, Paris, 1976.

[11] M. A. Boutiche, M. Rahmani and H. M. Srivastava, Explicit Formulas Associated with Some Families of Generalized Bernoulli and Euler Polynomials, Mediterranean Journal of Mathematics (2017).

[12] L. Carlitz, Weighted Stirling numbers of the first and second kind—I Fibonacci Quart., 18 (1980), pp. 147–162.

[13] L. Chambadal et J.-L. Ovaert, Cours de mathématiques, Algébre II. Gauthier-Villars (1972).

[14] R. Chellal, F. Bencherif and M. Mehbali, An identity for Generalized Bernoulli Polynomials, J. Integer Sequences 23 (2020), Article 20. 11.2.

[15] J. Choi, *Explicit formulas for Bernoulli polynomials of order n*, Indian J. Pure Appl. Math. 27 (1996), 667–674.

[16] J. Choi and T.-Y. Seo, *Explicit formulas for the generalized Bernoulli and Euler polynomials,* East Asian mathematical journal 12.2 (1996) : 183-190.

[17] L. Comtet, Advanced Combinatorics : The Art of Finite and Infinite Expansions, Revised and Enlarged Edition, D. Reidel Publishing Co., Dordrecht and Boston, 1974.

[18] L. Comtet, Analyse combinatoire, tomes premier et second, Collection Sup "Le Mathématicien", P.U ;F. 1970.

[19] Euler, Leonhard, Institutiones calculi di erentialis cum eius usu in analysi nitorum ac Doctrina serierum, Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitanae, St.Petersbourg, 1755, chap. VII (\Methodus summandi superior ulterius promota").

[20] D. Foata, Les polynômes Eulériens, d'Euler à Carlitz, Leonhard Euler, mathématicien, physicien et théoricien de la musique (Conference proceedings, IRMA Strasbourg, november 15-16, 2007, ed. X. Hascher and A.Papadopoulos)

[21] H. W. Gould, Explicit formulas for Bernoulli numbers, Amer. Math. Monthly 79 (1972), 44–51.

[22] A. Genocchi, Intorno all'espressione generale de'numeri Bernulliani, Ann. Sci. Mat. Fis., vol. 3, pp. 395-405, 1852.

[23] R. L. Graham, D. E. Knuth et O. Patashnik, Mathématiques concrètes, Fondations pour l'Informatique, International Thomson publishing France, 1998.

[24] A. Granville, Z.W. Sun, Values of Bernoulli polynomials, Pacific J. Math. 172 (1996) 117–137.

[25] B.-N. Guo and F. Qi, An explicit formula for Bernoulli numbers in terms of Stirling numbers of the second kind, J. Anal. Number Theory 3 (2015), no. 1, 27–30.

[26] S. Jeong, M.-S. Kim, J.-W. Son, On explicit formulae for Bernoulli numbers and their counterparts in positive characteristic, J. Number Theory 113 (1) (2005) 53–68.

[27] C. Jordan, Calculus of Finite Differences, Budapest, 1939 ; Second ed., Chelsea, New York, 1950.

[28] L. Khaldi, F. Bencherif, M. Mihoubi, Explicit formulas for Euler polynomials and Bernoulli numbers, Notes on Number Theory and Discrete Mathematics, Vol. 27, 2021, No. 4, 80–89.

[29] L. Khaldi, F. Bencherif and A. Derbal, A note on explicit formulas for Bernoulli polynomials. Siberian Federal University, 2022.

[30] T. L. Kitagawa, The Origin of the Bernoulli Numbers : Mathematics in Basel and Edo in the Early Eighteenth Century, The Mathematical Intelligencer volume 44, pages46–56 (2022).

[31] . Knuth, D. E., Johann Faulhaber and sums of powers, Mathematics of Computation, 61 (1993), 277-294.

[32] D. V. Kruchinin et V. V. Kruchinin, Anout a new recurrence relation for the generalized Bernoulli polynomials, The abstract book of ICJMS 2015

[33] E. Lehmer, On congruences involving Bernoulli numbers and the quotients of Fermat and Wilson, Ann. of Math. 39 (1938), 350–360.

[34] E. Lucas, Theorie des Nombres, Gauthier-Villard, Paris, 1891, Reprinted by A. Blanchard, Paris, 1961.

[35] Q-M. Luo, Euler polynomials of higher order involving the Stirling numbers of the second kind. Australian Mathematical Society Gazette, 31(3), (2004), 194-196.

[36] Q-M. Luo, An explicit formula for the Euler numbers of higher order. Tamkang Journ. Math., **36** (2005), 4, 315-317.

[37] Q-M. Luo, An explicit formula for the Euler polynomials, Integral Transforms Spec. Funct., Vol. 17, no.6, (2006), pp. 451-454.

[38] Q-M. Luo, An Explicit Formula for the Euler Polynomials of Higher Order, Appl. Math. Inf. Sci., 3(1) (2009) 53–58.

[39] N. Mokhtari, Le Calcul Ombral et l'Analyse p-adique, Mémoire présenté pour l'obtention du diplôme de Magister en Mathématiques, 79 p., USTHB, N° d'ordre 11/2004-M/MT.

[40] N. E. Nörlund, Vorlesungen über Differenzenrechnung, Springer-Verlag, Berlin, 1924; Reprinted by Chelsea, Bronx, New York, 1954.

[41] Niels Nielsen, "Recherches sur les polynomes et les nombres de Stirling," Annali di Matematica pura ed applicata, series 3, 10 (1904), 287–318.

[42] d'Ocagne M., Sur une classe de nombres remarquables, American J. Math. 9, no. 4, (1887), 353-380.

[43] F. Qi and B.-N. Guo, Explicit formulas for special values of the Bell polynomials of the second kind and for the Euler numbers and polynomials, Mediterranean Journal of Mathematics, 2017.

[44] F. Qi and R. J. Chapman, Two closed forms for the Bernoulli polynomials, J. Number Theory 159 (2016), 89–100.

[45] J.-L. Raabe, Die Jacob Bernoullische Funktion, Zurich, 1848.

[46] J.-L. Raabe, Zuruckführung einiger Summen und bestimmten Integrale auf die Jacob Bernoullischen Function, Crelle J., 42 :348–376, 1851.

[47] A. M. Robert, A Course in p-adic Analysis, Springer-Verlag, New York, 2000.

[48] S. Roman, The Umbral Calculus, Dover, 2005, 208 p

[49] S. Shirai, K. I. Sato, Some identities involving Bernoulli and Stirling numbers, J. Number Theory 90 (1) (2001) 130–142.

[50] T. Seki, Collected Works of Takakazu Seki. In : Hirayama, A., Shimodaira, K., Hirose, H. (eds.) Osaka Kyouiku Tosho (1974)

[51] Neil J. A. Sloane, On line Encyclopedia of Integer Sequences.

[52] H. M. Srivastava and P. G.Todorov, An explicit formula for the generalized Bernoulli polynomials. J. Math. Anal. Appl. 130 (1988), no. 2, 509–513.

[53] H. M. Srivastava and A. Pintér, Remarks on some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials, Appl. Math. Lett. 17 (2004), 375–380.

[54] J. Stirling, Methodus differentialis, sive Tractatus de summatione et interpolatione serierum infinitarum, Gul. Bowyer, Londini, 1730.

[55] Z.-W. Sun, Introduction to Bernoulli and Euler polynomials, a lecture given in Taiwan on June 6, 2002.

[56] P. G. Todorov, Une formule simple explicite des nombres de Bernoulli genéralisés, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. 301 (1985), 665–666.

[57] P. G. Todorov, On the Theory of the Bernoulli polynomials and numbers, J. Math. Anal. Appl. 104 (1984) 309-350.

[58] C. Tweedie, The Stirling numbers and polynomials, Proc. Edinb. Math. Soc. 37 (1918) 2–25.

[59] W. Wang, Generalized higher order Bernoulli number pairs and generalized Stirling number pairs, J. Math. Anal. Appl. 364 (2010) 255–274.

[60] C.-F. Wei, & F. Qi, Several closed expressions for the Euler numbers, J. Inequal. Appl., 219, 8 pp. 2015.

[61] A. Zekiri, Propriétés combinatoires de suites polynomiales classiques, 2015, U.S.T.H-B.

[62] S. L. Zerroukhat, Opérateurs de composition et congruences, Thèse de doctorat en Mathématiques, 2018, U.S.T.H-B.