**N° d'ordre :** 02/2023-D/MT

**RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE**

**Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique**

**Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediène**

**Faculté de Mathématiques**

جامعة هواري بومدين
للعلوم و التكنولوجيا
U S T H B

# THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du **grade** de **DOCTEUR**

**En :** MATHÉMATIQUES

**Spécialité :** Analyse

**Par :** YAHI Moussa

**Sujet**

Intégration de certaines équations différentielles du premier ordre vérifiant les conditions de Fuchs

Soutenue publiquement, le 09/02/2023 devant le jury composé de :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Mme. **DALI Dahira** | MCA | USTHB | Président |
| M. **KESSI Arezki** | Professeur | USTHB | Directeur de thèse |
| M. **LAADJ Toufik** | MCA | USTHB | Co-Directeur de thèse |
| M. **MESBAHI Salim** | Professeur | UFA Sétif | Examinateur |
| M. **BOUDJEMAA Redouane** | MCA | USD Blida | Examinateur |
| M. **ADJABI Yassine** | MCA | UMB Boumerdes | Examinateur |

# Intégration de certaines équations différentielles du premier ordre vérifiant les conditions de Fuchs

YAHI Moussa


### Résumé

Dans cette thèse de doctorat, nous donnons les solutions générales d'une classe d'équations différentielles ordinaires non linéaires de Fuchs du premier ordre. Ceci nous amène à montrer par un exemple que les conditions nécessaires du théorème de Fuchs ne sont pas suffisantes.


**Mots-clés :** Théorème de Fuchs, points critiques mobiles, conditions suffisantes.

---

# Integration of some first order differential equations verifying the Fuchs conditions

Moussa Yahi,


### Abstract

In this doctoral thesis, we give the general solutions of a class of first order nonlinear Fuchs ordinary differential equations. This leads us to show by an example that the necessary conditions of Fuchs' theorem are not sufficient.


**Keywords:** Fuchs' theorem, movible critical points, sufficient conditions.

# *Remerciements*

*Avant tout, je remercie **Allah** le tout puissant pour m'avoir donné la force, le courage, la volonté et la patience pour accomplir ce modeste travail.*

*Je tiens en premier lieu à exprimer mes plus vifs remerciements et ma plus profonde gratitude à mon Directeur de thèse, le Professeur **KESSI Arezki** pour la proposition du sujet, pour ses conseils et sa disponibilité pour des discussions fructueuses. Je remercie également mon Co-Directeur de thèse Dr. **LAADJ Toufik** qui a beaucoup contribué à l'accomplissement de cette thèse.*

*J'exprime ici ma profonde gratitude au Dr. **DALI Dahira** pour m'avoir fait l'honneur de présider mon jury de thèse.*

*Je remercie vivement le Professeur **MESBAHI Salim,** Dr. **BOUDJEMAA Redouane** et Dr. **ADJABI Yassine** de m'avoir honoré en faisant partie de mon jury.*

*Je ne saurais oublier de remercier tous mes collègues et toutes les personnes ayant contribué de près ou de loin à l'aboutissement de ce travail, je cite particulièrement Dr. **MAHMOUDI Abdelouahab**.*

*Pour finir mes derniers mots de remerciements vont tout naturellement à ma famille et mes amis.*

YAHI Moussa

# Table des matières

# Introduction

Parmi les équations différentielles ordinaires non linéaires du premier ordre, intégrables explicitement, on peut citer les équations de Bernoulli, les équations de Lagrange, les équations de Clairaut, les équations de Darboux, ... [28]. Les équations différentielles elliptiques et les équations de Riccati, bien qu'elles ne soient pas intégrables en général, sont souvent rencontrées dans l'étude des équations différentielles ordinaires [28, 33]. L'intégration de plusieurs équations d'ordre supérieur se réduit à leur intégration par substitution [28].

L'étude des équations différentielles ordinaires de Fuchs non linéaires du premier ordre est motivée par leur importance due à leur apparition dans de nombreux problèmes mathématiques et leur application en physique, voir, par exemple, [27, 7, 5, 6, 17].

Le théorème de Fuchs donne les conditions nécessaires pour que l'équation du premier ordre n'admette pas de points singuliers critiques mobiles [2, 14, 15, 9]. Le théorème de Painlevé garantit que l'équation étudiée dans le théorème de Fuchs n'admet pas de points singuliers essentiels critiques mobiles [26, 11]. Le théorème d'Hermite assure que l'équation étudiée dans le théorème de Fuchs, lorsqu'elle est indépendante de $z$, n'est sans points singuliers critiques mobiles que si elle est de genre zéro ou un [13, 11].

Cette thèse est organisée comme suit :

Nous commençons par un chapitre préliminaire pour fournir quelques définitions de base importantes pour comprendre le sujet de cette thèse.

Dans le deuxième chapitre nous introduisons une classe de ces équations de Fuchs qui peuvent être intégrées. Nous donnons leurs solutions à l'aide de quadratures, d'équations de Riccati ou de fonctions elliptiques.

Dans le dernier chapitre de cette thèse nous donnons un exemple d'équations différentielles ordinaires du premier ordre qui vérifie les conditions du théorème de Fuchs, mais qui n'est pas à points critiques fixes.

Ceci nous permet de conclure que les conditions du théorème de Fuchs ne sont pas suffisantes.

# Chapitre 1

# Notions fondamentales

Le but de ce chapitre préliminaire est de fournir quelques définitions de base importantes pour comprendre le sujet de cette thèse.

## 1.1 Fonctions holomorphes de plusieurs variables

Dans cette section on se restreint au cas $n = 2$ bien que les résultats qui vont suivre sont vrais pour les dimensions supérieures.

$$\mathbb{C}^2 = \{(z_1, z_2) / \quad z_j \in \mathbb{C}, \quad j = 1, 2\}$$

L'application

$$\mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}^4$$

$$(z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2) \mapsto (x_1, y_1, x_2, y_2)$$

est un isomorphisme de $\mathbb{R}-$ e.v.

Les propriétés topologiques et métriques de ces deux espaces coïncident.

L'application

$$\|.\|_2 : \mathbb{C}^2 \to \mathbb{R}_+$$

$$(z_1, z_2) \mapsto \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

est une norme sur $\mathbb{C}^2$. On peut définir d'autres normes par exemple : $\|(z_1, z_2)\|_\infty = \max(|z_1|, |z_2|)$.

Toutes les normes sur $\mathbb{C}^n$ sont équivalentes.

Soit $a = (a_1, a_2) \in \mathbb{C}^2$ et $r = (r_1, r_2)$ où $r_j > 0, \quad j = 1, 2.$

L'ensemble

$$P(a, r) = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / \ |z_j - a_j| < r_j, \quad j = 1, 2\right\}$$

est appelé bidisque ouvert de centre $a$ et de multi-rayon $r$.

L'ensemble

$$\partial_0 P(a, r) = \left\{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 / \ |z_j - a_j| = r_j, \quad j = 1, 2\right\} = C(a_1, r_1) \times C(a_2, r_2)$$

est appelé bord distingué.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$$(z_1 = x_1 + iy_1,\ z_2 = x_2 + iy_2) \mapsto f\left(z_1\ z_2\right) = U\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right) + iV\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right)$$

une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$.

Dire que $f$ est continue ( resp. différentiable) sur $\Omega$ équivaut à dire que la fonction qui à $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ associe $U\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right)$ et la fonction qui à $(x_1, y_1, x_2, y_2)$ associe $V\left(x_1, y_1, x_2, y_2\right)$ sont continues ( resp. différentiables) sur $\Omega$.

Notations : si $z_j = x_j + iy_j$ alors on définit les opérateurs différentiels $\frac{\partial}{\partial z_j}$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j}$ par : $\frac{\partial}{\partial z_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} - i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$ et $\frac{\partial}{\partial \bar{z}_j} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x_j} + i\frac{\partial}{\partial y_j}\right)$.

**Définition 1** *On dira que $f : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ où $\Omega$ désigne un ouvert de $\mathbb{C}^2$ est holomorphe sur $\Omega$ et on note $f \in O(\Omega)$ si $f \in C^1(\Omega)$ et $\forall a = (a_1, a_2) \in \Omega,\ \ \frac{\partial f}{\partial \bar{z}_j}(a) = 0, \ \ j = 1, 2.$*

Autrement dit si $f \in C^1(\Omega)$ et $\forall a \in \Omega,\ f$ vérifie le système suivant ( conditions de Cauchy-Riemann)

$$\left\{\begin{array}{l} \frac{\partial U}{\partial x_j}(a) - \frac{\partial V}{\partial y_j}(a) = 0 \\ \frac{\partial U}{\partial y_j}(a) + \frac{\partial V}{\partial y x_j}(a) = 0 \end{array}\right., \quad j = 1, 2$$

Il est clair que si $f \in O(\Omega)$ alors $f$ est holomorphe séparément par rapport à chaque variable ( On dit aussi $f$ partiellement holomorphe ).

Il se trouve que la réciproque est également vraie. C'est le théorème d'Hartogs.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ ( Aucune hypothèse de régularité sur $f$ n'est supposée ).

Si $f$ est partiellement holomorphe, alors $f$ est holomorphe sur $\Omega$.

L'analogue sur $\mathbb{R}^2$ n'est pas vraie.

L'existence des dérivées partielles n'implique pas la différentiabilité, voire même la continuité.

Soit $f : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ une fonction définie sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{C}^2$. Les assertions suivantes sont équivalentes :

1. $f \in O(\Omega)$ i.e. $f$ est holomorphe sur $\Omega$.

2. $f \in C^1(\Omega)$ et sa différentielle $df_a$ en tout point $a \in \Omega$, vue comme application de $\mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$ est $\mathbb{C}$-linéaire ( $\mathbb{C}$ -différentiabilité ).

3. $\forall a = (a_1, a_2) \in \Omega$ et $\forall r = (r_1, r_2)$ avec $r_j > 0, \quad j = 1, 2$ tel que $\overline{P(a,r)} \subset \Omega$ on a

   i) $\forall (z_1, z_2) \in P(a,r)$

$$
\begin{aligned}
f(z_1, z_2) &= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \left( \int_{|\xi_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} d\xi_2 \right) d\xi_1 \\
&= \frac{1}{(2\pi i)^2} \int_{\partial P_0} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 - z_1)(\xi_2 - z_2)} d\xi_1 d\xi_2.
\end{aligned}
$$

(Formule intégrale de Cauchy).

ii) $\forall (z_1, z_2) \in P(a, r), \quad \forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$

$$\frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n} f(z_1, z_2) = \frac{m!n!}{(2\pi i)^2} \int_{|\xi_1 - a_1| = r_1} \left( \int_{|\xi_2 - a_2| = r_2} \frac{f(\xi_1, \xi_2)}{(\xi_1 - z_1)^{m+1} (\xi_2 - z_2)^{n+1}} d\xi_1 \right) d\xi_2.$$

iii) $\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2$

$$\left| \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n} f(a_1, a_2) \right| \leq \frac{m!n!}{r_1^m r_2^n} M,$$

où $M = \sup\limits_{f(\xi_1, \xi_2) \in \overline{P(a,r)}} |f(\xi_1, \xi_2)|$ (Inégalité de Cauchy).

4. $\forall z_0 = (z_1^0, z_2^0) \in \Omega, \ \exists \ r = (r_1, r_2)$ avec $r_j > 0, \quad j = 1, 2$ , $\exists (a_{m,n}) \subset \mathbb{C}$ telle que

$P(z_0, r) \subset \Omega$ et

$$f(z_1, z_2) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} \left(z_1 - z_1^0\right)^m \left(z_2 - z_2^0\right)^n \quad \forall (z_1, z_2) \in P(z_0, r).$$

Cette série est absolument convergente dans $P(z_0, r)$ et est normalement convergente dans tout compact $K \subset P(z_0, r)$. De plus on a :

$$a_{m,n} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z_1^m \partial z_2^n} f\left(z_1^0, z_2^0\right).$$

**Commentaires :**

La proposition (4) nécessite quelques explications relatives aux séries doubles de nombres réels ou complexes.

Soit $(a_\alpha)_{\alpha \in I}$ une famille de nombres réels ou complexes indexée par $I$ ensemble dénombrable ( $I = \mathbb{N}, \ \mathbb{Z}, \ \mathbb{Q}, \ \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \ \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}, ...$).

**Définition 2** *Une famille dénombrable $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ de nombres réels ou complexes est sommable si une série formée avec tous les $a_\alpha$ est absolument convergente et donc commutativement convergente.*

Les assertions suivantes sont équivalentes:

1) $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$ est sommable

2) $(|a_\alpha|)_{\alpha\in I}$ est sommable

3) L'ensemble des sommes finies $\left\{\sum\limits_{\alpha\in F}|a_\alpha|\,,\quad F\subset I,\ F \text{ fini}\right\}$ est majoré

4) Il existe $S$ tel que $\forall\varepsilon>0,\quad \exists J_0=J_0\left(\varepsilon\right),\quad J_0\text{fini}\subset I$ telle que $\forall F$ finie, $J_0\subset F\subset I\Rightarrow\sum\limits_{\alpha\in F}|a_\alpha-S|<\varepsilon$. $S$ est appelé somme de la famille $(a_\alpha)_{\alpha\in I}$

**Notation:**

$\sum\limits_{\alpha\in I}a_\alpha=S.$

Si $I=\mathbb{N}$, alors $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}}|a_\alpha|$ est convergente

Si $I=\mathbb{Z}$, alors $(a_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{Z}}$ est sommable si et seulement si la série $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}}|a_\alpha|$ et $\sum\limits_{\alpha\in\mathbb{N}}|a_{-\alpha}|$ sont convergentes

Dans le cas où $I=\mathbb{N}\times\mathbb{N}$, on parle de série double.

Soit $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ une suite double de nombres complexes.

On dit que la série double $\sum\limits_{m=0}^{n}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}$ est convergente si la famille $(a_{m,n})$ est sommable.

Au fait il s'agit de la convergence absolue.

**Théorème 1** *Soit* $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *une famille de nombres réels ou complexes indexée par* $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$. *On a les équivalences suivantes :*

1. $(a_{m,n})_{(m,n)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ *est sommable.*
2. $\forall n\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{m=0}^{+\infty}|a_{m,n}|$ *converge ainsi que* $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{m=0}^{+\infty}|a_{m,n}|\right)$.
3. $\forall m\in\mathbb{N},\ \sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_{m,n}|$ *converge ainsi que* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\left(\sum\limits_{n=0}^{+\infty}|a_{m,n}|\right)$.
4. $\sum\limits_{N=0}^{+\infty}V_N$ *converge* $V_N=\sum\limits_{m+n=N}|a_{m,n}|$.

Si l'une des conditions précédentes est vérifiée on a :

$$\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}=\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\sum_{m=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\left(\sum_{n=0}^{+\infty}a_{m,n}\right)=\sum_{N=0}^{+\infty}\left(\sum_{m+n=N}a_{m,n}\right).$$

**Exemple 1** *Soit* $s\in\mathbb{R}$ *et* $w$ *un complexe de partie imaginaire non nulle. La sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{|pw+q|^s}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *est équivalente à la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{(|p|+|q|)^s}\right)_{(p,q)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$. *Cette dernière est sommable si et seulement si* $s>2$.

**Définition 3** *Soit* $f_{m,n}$ *une suite de fonctions définies sur un ouvert* $D\subset\mathbb{C}^2$ *et à valeurs dans* $\mathbb{C}$.

*On dit que la série* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}f_{m,n}(z_1,z_2)$ *converge normalement sur le compact* $K\subset D$ *si :* $\sum\limits_{m=0}^{+\infty}\sum\limits_{n=0}^{+\infty}M_{mn}$ *où* $M_{mn}=\sup\limits_{(z_1,z_2)\in K}|f(z_1,z_2)|$, *converge.*

**Définition 4** *Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ et $\Omega$ une partie de $\mathbb{C}$. On dit que la série de fonctions $\sum f_n$ converge uniformément (normalement) sur $\Omega$ s'il existe un entier $N = N(\Omega)$ à partir duquel les fonctions $f_n$ ne possèdent aucun pôle dans $\Omega$ et si la série $\sum_{n\geq N} f_n$ converge uniformément (normalement) dans $\Omega$.*

On peut montrer que la somme $f$ d'une série $\sum f_n$ de fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$ convergeant uniformément sur tout compact $K$ de $\mathbb{C}$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. De même la série des dérivées $\sum f_n'$ converge uniformément sur tout compact $K$ de $\mathbb{C}$ et a pour somme $f'$.

Plusieurs propriétés des fonctions holomorphes à une seule variable s'étendent aux fonctions holomorphes de plusieurs variables. Par exemple:

1. Le principe du prolongement analytique.
2. Le principe du maximum.
3. Le théorème de l'application ouverte.
4. Le théorème de Liouville.

Par contre et contrairement aux fonctions holomorphes d'une variable

1. Les zéros d'une fonction holomorphe à plusieurs variables ne sont pas isolés.

2. Un domaine de $\mathbb{C}^n$ $(n \geq 2)$ n'est pas nécessairement un domaine d'holomorphie.

   On montre que

   i) Toute fonction holomorphe sur $\mathbb{C}^n \backslash K$ où $K$ compact de $\mathbb{C}^n$ admet une extension analytique à $\mathbb{C}$ ( Comparer avec $f(z) = \frac{1}{z}$).

   ii) Toute fonction analytique sur $D = \left\{(z_1, z_2)/a < |z_1|^2 + |z_2|^2 < b\right\}$ se prolonge analytiquement au domaine $\tilde{D} = \left\{(z_1, z_2)/ \quad |z_1|^2 + |z_2|^2 < b\right\}$.

À propos des fonctions holomorphes de plusieurs variables, RM Range [29] commença son article par la question suivante "pourquoi l'analyse complexe de plusieurs variables n'a pas la place qu'elle mérite dans le cursus universitaire comparativement à l'analyse complexe d'une seule variable". En un nombre limité de pages il s'est proposé de montrer la beauté et la richesse de cette théorie aussi bien au niveau des résultats qu'au niveau des applications. Il espère que son article soit partagé par les étudiants et les collègues, c'est la seule récompense qu'il demande.

## 1.2 Fonctions majorantes et problème de Cauchy

### 1.2.1 Définition d'une majorante

Soient $f$ et $g$ deux fonctions holomorphes sur un domaine $\Omega \subset \mathbb{C}^2$ contenant le point $(0,0)$.

Soit $r = (a, b)$ où $a > 0$, $b > 0$ et tel que $\bar{P}(0, r)$ soit inclus dans $\Omega$.

On a $\forall (z, y) \in P(0, r)$,

$$f(z, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{mn} z^m y^n$$

et

$$g(z, y) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn} z^m y^n.$$

**Définition 5** *On dira que $g$ majore $f$ sur $P(0, r)$ et on écrit $f \ll g$ si*

$$\forall (m, n) \in \mathbb{N}^2, \ \ |a_{mn}| \leq A_{mn}.$$

### 1.2.2 Construction d'une fonction majorante

On suppose $f$ définie comme précédemment. On a

$$a_{mn} = \frac{1}{m!n!} \frac{\partial^{m+n}}{\partial z^m \partial y^n} f(0, 0)$$

(formule intégrale de Cauchy) et

$$|a_{mn}| \leq \frac{M}{a^m b^n}$$

(inégalités de Cauchy), où

$$M = \sup_{(z,y) \in \bar{P}(0,r)} |f(z, y)|$$

La série double

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{M}{a^m b^n} z^m y^n$$

est convergente dans $P(0, r)$ et a pour somme

$$F(z, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}.$$

Ainsi

$$f \ll F \text{ sur } \ P(0,r).$$

### 1.2.3 Existence d'une solution formelle

Soit

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$$

une fonction holomorphe sur un ouvert de $\mathbb{C}^2$ contenant le point $(z_0, y_0)$. Alors:

Le problème de Cauchy avec les conditions initiales $(z_0, y_0)$ admet une et une seule solution formelle définie sur un voisinage de $z_0$.

En effet, et sans perte de généralité on peut supposer $z_0 = y_0 = 0$ (quitte à poser $Z = z - z_0$ et $Y = y - y_0$).

On cherche donc une solution du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(z,y) \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

où $f$ est une fonction holomorphe sur un ouvert contenant le point $(0,0)$. Cherchons la solution sous la forme

$$y(z) = \sum_{n \geq 0} a_n z^n$$

De la condition $y(0) = 0$ on déduit que $a_0 = 0$ et donc la solution s'écrit sous la forme

$$y(z) = \sum_{n \geq 1} a_n z^n$$

Ecrivons la fonction $f$ sous la forme

$$f\left(z,y\right)=\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty}a_{mn}z^{m}y^{n}$$

où

$$a_{mn}=\frac{1}{m!n!}\frac{\partial^{m+n}}{\partial z^{m}\partial y^{n}}f\left(0,0\right)$$

Formellement (c'est-à-dire sans se soucier de la convergence) La dérivée première nous donne

$$y'\left(z\right)=f\left(z,y\left(z\right)\right)\Rightarrow a_{1}=y'\left(0\right)=f\left(0,0\right)=a_{00}$$

En dérivant deux fois on obtient

$$y''\left(z\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(z,y\left(z\right)\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(z,y\left(z\right)\right)y'\left(z\right),$$

ce qui donne

$$2a_{2}=y''\left(0\right)=\frac{\partial f}{\partial z}\left(0,0\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(0,0\right)y'\left(0\right)$$

$$=a_{10}+a_{01}a_{00}.$$

La troisième dérivée s'écrit sous la forme

$$y'''\left(z\right)=\frac{\partial^{2}f}{\partial z^{2}}\left(z,y\left(z\right)\right)+2\frac{\partial^{2}f}{\partial z\partial y}\left(z,y\left(z\right)\right)y'\left(z\right)+\frac{\partial^{2}f}{\partial y^{2}}\left(z,y\left(z\right)\right)y'^{2}\left(z\right)+\frac{\partial f}{\partial y}\left(z,y\left(z\right)\right)y''\left(z\right)$$

d'où

$$3!a_{3}=y'''\left(0\right)=a_{20}+2a_{11}a_{00}+a_{02}a_{00}^{2}+a_{01}\left(a_{10}+a_{01}+a_{00}\right)$$

$$=a_{20}+2a_{11}a_{00}+a_{02}a_{00}^{2}+a_{10}a_{01}+a_{00}a_{01}^{2}.$$

On montre par induction que $a_n$, $(n \geq 1)$ est de la forme

$$a_n = G\left(a_{00}, a_{01}, a_{10}, ..., a_{kp}, ...\right),$$

où $G$ désigne un polynôme en $a_{00}, a_{01}, a_{10}, ..., a_{kp}$ avec $k + p < n$. les coefficients de ce polynôme sont des nombres positifs. L'unicité de ces coefficients entraîne l'unicité de la solution formelle.

L'expression de ce polynôme est indépendante du choix de $f$. C'est-à-dire si on remplace $f$ par $F$ où

$$F\left(x, y\right) = \sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} A_{mn} z^m y^n,$$

alors les coefficients de la solution formelle

$$Y\left(z\right) = \sum_{n \geq 1} A_n z^n$$

sont régis par le même polynôme: c'est-à-dire

$$A_n = G\left(A_{00}, A_{01}, A_{10}, ..., A_{kp}, ...\right),$$

où $G$ désigne le même polynôme mais en $A_{00}, A_{01}, A_{10}, ..., A_{kp}$ avec $k + p < n$.

En particulier si $f \ll F$ sur $P\left(0, r\right)$ alors

$$\forall n \geq 1,\ |a_n| \leq A_n.$$

**Conséquence**

Soit $f$ et $F$ deux fonctions holomorphes sur $\Omega$ ouvert de $\mathbb{C}^2$ contenant le point $(0,0)$.

Soit $r = (a,b)$ où $a > 0$ et $b > 0$ tel que $\overline{P}(0,r) \subset \Omega$ et $f \ll F$ sur $P(0,r)$. On suppose que le problème de Cauchy

$$\begin{cases} Y' = F(z,Y) \\ Y'(0) = 0 \end{cases}$$

admet une solution

$$Y(z) = \sum_{n\geq 1} A_n z^n$$

holomorphe sur $D(0,\rho)$, $\rho > 0$. Alors la solution formelle

$$y(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n$$

du problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(z,y) \\ y'(0) = 0 \end{cases}$$

converge dans $D(0,\rho)$.

En effet, d'après ce qui précède on a

$$\forall n \geq 1,\ |a_n| \leq A_n$$

La série

$$Y(z) = \sum_{n\geq 1} A_n z^n$$

converge absolument dans $D(0,\rho)$ alors il en est de même pour la série

$$y(z) = \sum_{n\geq 1} a_n z^n.$$

**Théorème de Cauchy**

Soit

$$f : \Omega \subset \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C},$$

une fonction holomorphe sur $\Omega$ ouvert dans $\mathbb{C}$, contenant le point $(z_0, y_0)$. On suppose qu'il existe $a > 0$ et $b > 0$ tel que

$$\overline{P}\left((z_0, y_0), (a, b)\right) \subset \Omega.$$

Alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(z, y) \\ y(z_0) = y_0 \end{cases}$$

admet une et une seule solution holomorphe dans $D(z_0, R)$ où

$$R = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right)$$

et

$$M = \sup_{(x,y)\in\overline{P}((z_0,y_0),(a,b))} |f(x, y)|.$$

**Démonstration**

Comme précédemment on se ramène à $y_0 = z_0 = 0$. On sait que la fonction définie par

$$F(x, y) = \frac{M}{\left(1 - \frac{z}{a}\right)\left(1 - \frac{y}{b}\right)}$$

holomorphe sur $\mathbb{C}^2 \backslash \{(a, b)\}$ est une majorante de la fonction $f$ sur $P((0, 0), (a, b))$.

On résout alors le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)} \\ y(0) = 0 \end{cases}$$

avec $|z| < a$ et $|y| < b$. L'équation différentielle

$$y' = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{a}\right)\left(1-\frac{y}{b}\right)}$$

est à variables séparables. Le problème de Cauchy a pour solution

$$y(z) = b - b\sqrt{1 + \frac{2Ma}{b}\ln\left(1-\frac{z}{a}\right)}.$$

- Les points singuliers de cette solution sont $z_1 = a$ et $z_2 = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right) < a$

- Le développement en série entière de cette solution au voisinage de 0 a pour rayon de convergence

$$R = a\left(1 - e^{-\frac{b}{2aM}}\right).$$

C'est la distance de 0 au point singulier le plus proche.

**Commentaires**

Dans la littérature on trouve d'autres démonstrations du théorème d'existence et d'unicité des solutions d'une équation différentielle ordinaire dans le champs complexe. Ces dernières sont valables même pour les fonctions réelles et qui donc ne sont pas nécessairement analytiques. Plus exactement le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = f(x, y) \\ y(x_0) = y_0 \end{cases}$$

où $f$ est définie sur un domaine de $\mathbb{R}^2$ contenant le point $(x_0, y_0)$ admet une solution dès que la fonction $f$ est continue dans un voisinage du point $(x_0, y_0)$. (Théorème de Péano). De plus si $f$ est lipschitzienne par rapport à $y$ et en particulier si $\frac{\partial f}{\partial y}$ est bornée au voisinage du point $(x_0, y_0)$ alors la solution est unique.

Il s'agit de la méthode de Picard (connue sous le nom "Méthode des approximations successives") et la méthode de l'application contractante.

La méthode des séries majorantes appelée par Cauchy "Calcul des limites" est la plus ancienne d'entre elles. A ce sujet Picard disait "L'idée de Cauchy est hautement fructueuse, cependant l'appellation n'est pas adéquate". Signalons également que les séries entières ont été utilisées par les mathématiciens comme outil de recherche de solutions d'une équation différentielle ordinaire et ce, bien avant Cauchy. Cependant l'omission de l'holomorphie a donné des résultats erronés, voire aberrants, tels par exemple:

1) L'équation différentielle

$$zy' = (1 + z)\, y - z$$

admet comme solution formelle la série

$$y(z) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n \, n! z^{-n},$$

qui diverge pour toute valeur de $z$.

2) Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} zw' = w - z \\ w(0) = 0 \end{cases}$$

n'admet pas de solution holomorphe, car si on cherche une formelle sous la forme

$$w = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots.$$

concernant la détermination des coefficients $a_i$ on obtient

$$a_1 = a_1 - 1, \quad 2a_2 = a_2, \ldots.$$

d'où il est impossible de trouver le coefficient $a_1$.

### 1.2.4 Théorème des fonctions implicites

On se propose ici de montrer le théorème des fonctions implicites version analyse complexe.

**Théorème 2** *Soit $\Omega$ un ouvert de $\mathbb{C}^2$ et $F : \Omega \to \mathbb{C}$ une fonction holomorphe dans un bidisque*

$$P((z_0, w_0), (a, b)) = \{(z, w) \in \Omega / |z - z_0| < a \ \text{ et } \ |w - w_0| < b\}$$

*On suppose que*

*1)* $F(z_0, w_0) = 0$

*2)* $\frac{\partial F}{\partial w}(z_0, w_0) \neq 0$

*alors il existe une unique fonction qui à $z$ associe $w(z)$ holomorphe dans un voisinage $V$ de $z_0$ telle que*

*1)* $w(z_0) = w_0$

*2)* $F(z, w(z)) = 0$, $\forall z \in V$

***Preuve.*** *On peut toujours se ramener au cas* $(z_0, w_0) = (0,0)$. *$F$ s'écrit sous la forme:*$F(z,w) = \sum_{m\geq 0}\sum_{n\geq 0} a_{mn}w^m z^n$ *L'hypothèse* $F(0,0) = 0$ *entraîne* $a_{00} = 0$. *Donc $F$ s'écrit sous la forme*

$$F(z,w) = (a_{10}w + a_{01}z) + \left(a_{20}w^2 + a_{11}wz + a_{02}z^2\right)$$

$$+ \left(a_{30}w^3 + a_{21}w^2z + a_{12}wz^2 + a_{03}z^3\right) + ...$$

*L'hypothèse* $\frac{\partial F}{\partial w}(0,0) \neq 0$ *entraîne* $a_{10} \neq 0$. *Ainsi l'équation* $F(z,w) = 0$ *peut s'écrire sous la forme*

$$w = b_{01}z + \left(b_{20}w^2 + b_{11}wz + b_{02}z^2\right) + \tag{1.1}$$

$$\left(b_{30}w^3 + b_{21}w^2z + b_{12}wz^2 + b_{03}z^3\right) + ...$$

*avec* $b_{mn} = \frac{-a_{mn}}{a_{10}}$. *On cherche une solution formelle sous la forme:*

$$w(z) = A_1z + A_2z^2 + ... + A_nz^n + ...$$

*(*$A_0 = 0$ *car* $w(0) = 0$*). Après injection de $w(z)$ dans l'équation (1.1) et identification*

*des coefficients on trouve*

$$\begin{aligned}
&A_1 = b_{01} \\
&A_2 = b_{02} + b_{11}A_1 + b_{20}A_1^2 \\
&A_3 = b_{03} + 2b_{20}A_1A_2 + b_{11}A_2 + b_{30}A_1^3 + b_{21}A_1^2 + b_{12}A_1 \\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
&A_n = P\left(b_{01}, b_{20,\dots,b_{0n}}\right) = P\left(\dots, b_{ij,\dots}\right), \text{ avec } \ i+j \leq n
\end{aligned}$$

*Les coefficients de $P$ sont des entiers positifs. Les $A_n$ étant uniques auquel cas on a l'unicité de la solution formelle. Pour montrer la convergence de la série formelle on utilise la méthode des fonctions majorantes. Le second membre de l'équation (1.1) admet pour fonction majorante la fonction définie par*

$$\phi\left(z,w\right) = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{w}{\rho_1}\right)} - M - \frac{w}{\rho_1} = B_{01}z + B_{20}w^2 + \dots$$

*avec $r_1 < a$ et $\rho_1 < b$, tel que le second membre de l'équation (1.1) soit convergent dans le bidisque fermé $|z| \leq r_1, |w| \leq \rho_1$ et soit borné en module sur le même bidisque par $M$. Étudions maintenant l'équation auxiliaire*

$$W = \frac{M}{\left(1-\frac{z}{r_1}\right)\left(1-\frac{W}{\rho_1}\right)} - M - \frac{W}{\rho_1} \tag{1.2}$$

*La solution de cette équation peut s'écrire sous la forme*

$$W = c_1z + c_2z^2 + \dots$$

*où les coefficients $c_i$ sont régis par le même polynôme: $c_i = P\left(\dots B_{ij}\dots\right)$ et donc ils vérifient la propriété*

$$\left|P\left(\dots b_{ij}\dots\right)\right| \leq P\left(\dots B_{ij}\dots\right)$$

*ceci d'une part et d'autre part la résolution de l'équation (1.2) donne*

$$W = \frac{\rho_1^2}{2(\rho_1 + M)} \pm \sqrt{\frac{\rho_1^4}{4(\rho_1 + M)^2} - \frac{M\rho_1^2}{\rho_1 + M} \frac{z}{r_1 - z}}$$

*La solution qui s'annule en* $0$ *est*

$$W = \frac{\rho_1^2}{2(\rho_1 + M)} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{4M(\rho_1 + M)}{\rho_1^2} \frac{z}{r_1 - z}}\right) \tag{1.3}$$

*Le second membre de l'équation (1.3) admet comme point singulier algébrique le nombre*

$$z_0 = r_1 \frac{1}{1 + \frac{4M(\rho_1 + M)}{\rho_1^2}} = \lambda < r_1$$

*La solution de l'équation auxiliaire converge dans le disque de centre* $0$ *et de rayon* $r_1$ *par conséquent on la convergence de la série formelle sur le même disque.* ∎

***Corollaire 1*** *Considérons l'égalité*

$$z = a_k w^k + a_{k+1} w^{k+1} + .... \qquad (a_k \neq 0) \tag{1.4}$$

*où le second membre converge dans le disque* $D(0, \rho)$. *Alors on a:*

$$w = b_1 z^{\frac{1}{k}} + b_2 z^{\frac{2}{k}} + ... \tag{1.5}$$

*dans le voisinage épointé de* $0$*:* $V = \left\{ z \in \mathbb{C} / 0 < \left| z^{\frac{1}{k}} \right| < \lambda \right\}$

***Preuve.*** *De l'équation (1.4) on déduit que*

$$z = w^k (a_k + a_{k+1} w + ....)$$

*ce qui donne*

$$z^{\frac{1}{k}} = w\left(a_k + a_{k+1}w + ....\right)^{\frac{1}{k}}$$

*Comme* $a_k \neq 0,$ *alors la fonction*

$$h\left(w\right) = \left(a_k + a_{k+1}w + ....\right)^{\frac{1}{k}}$$

*est holomorphe sur* $|w| < \rho_1$ *où* $\rho_1$ *est un nombre strictement positif. Par suite la fonction* $h$ *peut s'écrire sous la forme*

$$h\left(w\right) = \left(a_k + a_{k+1}w + ....\right)^{\frac{1}{k}} = b_1 + b_2w + b_3w^2 + ...$$

*avec* $b_1 = \left(a_k\right)^{\frac{1}{k}} \neq 0.$ *Ainsi la fonction* $z^{\frac{1}{k}}$ *s'écrit sous la forme*

$$z^{\frac{1}{k}} = b_1w + b_2w^2 + b_3w^3 + ...$$

*Comme* $b_1 \neq 0,$ *d'après le théorème des fonctions implicites on déduit*

$$w = c_1z^{\frac{1}{k}} + c_2z^{\frac{2}{k}} + ...$$

*Cette série est convergente sur un disque de rayon* $\lambda > 0$ *(voir le théorème des fonctions implicites)* ■

## 1.3 Singularités d'une équation différentielle ordinaire dans le champ complexe

Le prolongement analytique d'une solution locale peut donner lieu à une fonction multiforme. Pour rendre uniforme une telle solution on a le choix entre:

1) Sélectionner une branche et ce moyennant des coupures c'est-à-dire des lignes joignant deux points de branchement y compris le point à l'infini rendant ainsi la branche analytique.

En général le choix d'une telle branche parmi tant d'autres est dicté par les besoins de la physique.

Comme exemple de branche: la détermination principale du logarithme définie par

$$\ln z = \ln |z| + iArgz, \qquad -\pi < Argz \leq \pi$$

Plus généralement dans tout domaine simplement connexe de $\mathbb{C}^*$ il y a une détermination du logarithme complexe

2) Construire une variété complexe de dimension un appelée "surface de Riemann"

Les singularités d'une équation différentielle ordinaire sont par définition celles de ses solutions, c'est-à-dire les points où ces solutions ne sont pas analytiques. En plus des pôles et des points singuliers essentiels il existe également d'autres singularités caractéristiques des fonctions multiformes appelés points singuliers critiques (points de branchement, de ramification).

Plusieurs, voire une infinité de branches se permutant entre elles lorsqu'on tourne autour de tels points.

Soit $F$ une fonction multiforme ayant un domaine de définition $D$ et soit $a \in \overline{D}$. Soit

$\Gamma$ une courbe simple fermée entourant $a$ ($a$ se trouve à l'intérieur de $\Gamma$). Si lorsqu'on décrit cette courbe en partant d'un point $z_0$ avec une valeur donnée $w_0 = F(z_0)$ et on y revient à $z_0$, $F$ ne revient pas à sa valeur initiale $w_0$, on dira que le point $a$ est un point critique. Si $f$ désigne une branche de $F$, on a

$$f\left(ze^{2i\pi}\right) \neq f(z)$$

On dira que le point à l'infini est un point de branchement d'une fonction $F$ si 0 est un point de branchement de la fonction $f$ définie par

$$f : u \mapsto F\left(\frac{1}{u}\right)$$

Les fonctions

$$z \mapsto \sqrt[n]{z} \quad \text{et} \quad z \mapsto \ln z$$

ont pour points critiques: 0 et $\infty$. Les points critiques de la fonction définie par

$$z \longmapsto \sqrt[3]{z\left(z^2-1\right)}$$

sont $1, -1$ et 0.

On dira que $a$ est un point de branchement (critique) d'ordre fini $n$, si pour revenir à la valeur initiale $w_0 = f(z_0)$, $z$ doit décrire $n$ fois la courbe $\Gamma$. Le point $a$ est dit point de branchement logarithmique d'une fonction $f$ si cette dernière ne revient jamais à sa valeur initiale quand $z$ décrit la courbe $\Gamma$.

Soit $a \in \mathbb{C}$ un point critique d'ordre $n$ de $f$. Alors dans un voisinage épointé du point $a$, $0 < |z - a| < R$, on a

$$f(z) = \sum_{k=-\infty}^{k=+\infty} a_k (z - a)^{\frac{k}{n}}$$

Ce développement est appelé développement en puissance de Puiseux. On dira que $a$ est un point critique algébrique si tous les coefficients $a_{-n}$ sont nuls sauf un nombre fini. Dans ce cas la limite $\lim_{z \to a} f(z)$ existe, finie ou infinie. Dans le cas contraire, c'est-à-dire il existe une infinité de coefficients $a_{-n} \neq 0$, on dira que $a$ est un point critique essentiel.

Commentaires

Les singularités dont il a été question sont des singularités isolées et la classification n'est pas exhaustive. Par exemple 0 est un point singulier non isolé de la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{\sin \frac{\pi}{z}}$$

De même il existe des singularités qu'on ne peut classer ou à la rigueur sont sujets de controverse. C'est le cas par exemple de la fonction définie par

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{z} + 1}$$

$z = 1$ est un point singulier qui ne figure pas dans le classement ci-dessus.

Les singularités des équations différentielles ordinaires peuvent être fixes, c'est-à-dire indépendantes des constantes d'intégration ou si l'on veut dire indépendantes des conditions initiales, comme c'est le cas des équations différentielles ordinaires linéaires par exemple.

Les points singuliers dont la position dépend des conditions initiales sont dits mobiles.

Une équation différentielle ordinaire peut admettre à la fois les deux types de singularités.

**Exemple 2** *Considérons l'équation*

$$y' + \frac{1}{z^2}y = 0$$

*La solution générale de cette équation est*

$$y(z) = Ke^{\frac{1}{z}}$$

*Pour $K \neq 0$, $z = 0$ est un point singulier essentiel fixe.*

**Exemple 3** *Considérons l'équation*

$$y' + y^2 = 0$$

*La solution générale de cette équation est*

$$y(z) = \frac{1}{z+c} \text{ et } y = 0$$

*$z = -c$ est un pôle mobile.*

**Exemple 4** *Considérons l'équation*

$$y' + y^3 = 0$$

*La solution générale de cette équation est*

$$y(z) = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{z+c}} \quad et \quad y = 0$$

$z = -c$ *est un point critique mobile.*

**Exemple 5** *Considérons l'équation*

$$y' + \frac{1}{z} y^2 = 0$$

*La solution générale de cette équation est*

$$y(z) = \frac{1}{\ln z + c} \quad et \quad y = 0$$

$z = 0$ *est un point singulier critique fixe et* $z = e^{-c}$ *est un pôle mobile.*

Contrairement aux équations différentielles ordinaires linéaires, les équations différentielles non ordinaires linéaires peuvent admettre des singularités mobiles et que rien à priori ne peut les mettre en évidence.

Painlevé dans ses célébres leçons de Stockholm disait "La solution peut présenter des points singuliers et qu'en principe on ne peut reconnaître le caractère régulier ou singulier d'une valeur $z_0$ de $z$ par la simple connaissance de $z_0$. Je dis en principe car les équations différentielles ordinaires linéaires font exception. La question ne peut se décider que si on connaît $(z_0, y_0)$"

Soit $z_0 \in \mathbb{C}^*$. Le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y' = -y^2 \\ y(0) = \frac{1}{z_0} \end{cases}$$

admet comme solution générale la fonction

$$y(z) = \frac{1}{z - z_0}$$

$z = z_0$ est un pôle de cette solution.

Les points critiques mobiles sont la source de problèmes sérieux. En effet, comment sélectionner une branche? où mettre les coupures? comment construire une surface de Riemann adéquate en présence de tels points?

La recherche des équations différentielles ordinaires dont la solution est uniforme ou admet des points critiques fixes est une nécessité notamment en physique.

Une autre question préoccupait les mathématiciens (début du 20-ème siècle et fin du 19-ème siècle): obtenir de nouvelle transcendantes à partir des équations différentielles ordinaires.

Cette préoccupation est légitime et est bien fondée, vu que toute les fonctions usuelles, la fonction exponentielle, les fonctions elliptiques,... sont solutions d'équations différentielles ordinaires.

Picard en 1892 disait "On a fondé autrefois les plus grandes espérances sur l'étude des équations différentielles ordinaires. On pensait obtenir de nombreuses classes bien définies de transcendantes nouvelles. Il faut reconnaître que si l'on laisse de côté les équations différentielles ordinaires linéaires, ces espérances ont été jusqu'ici à peu près déçues."

En réalité cet échec ne fut pas définitif, puisque Painlevé et ses collaborateurs dans leurs recherches sur les équations du type

$$y'' = R(z, y, y')$$

($R$ rationnelle en $y$ algébrique en $y'$ et analytique en $z$) à points critiques fixes ont pu obtenir six nouvelles transcendantes, dites transcendantes de Painlevé:

$$y'' = 6y^2 + x$$

$$y'' = 2y^3 + xy + a$$

$$y'' = \frac{1}{y}y'^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{1}{x}\left(\alpha y^2 + \beta\right) + \gamma y^3 + \frac{\delta}{y}$$

$$y'' = \frac{1}{2y}y'^2 + \frac{3}{2}y^3 + 4xy^2 + 2\left(x^2 - \alpha\right)y + \frac{\beta}{y}$$

$$y'' = \left(\frac{1}{2y} + \frac{1}{y-1}\right)y'^2 - \frac{1}{x}y' + \frac{(y-1)^2}{x^2}\left(\alpha y + \frac{\beta}{y}\right) + \gamma\frac{y}{x} + \delta\frac{y(y+1)}{y-1}$$

$$\begin{aligned} y'' = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{y-1} + \frac{1}{y-x}\right)y'^2 + \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \frac{1}{y-x}\right)y' \\ & + \frac{y(y-1)(y-x)}{x^2(x-1)^2}\left(\alpha + \frac{\beta x}{y^2} + \gamma\frac{x-1}{(y-1)^2} + \delta\frac{x(x-1)}{(y-x)^2}\right) \end{aligned}$$

$\alpha, \beta, \gamma$ et $\delta$ sont des constantes arbitraires.

## 1.4 Fonctions elliptiques

Les fonctions elliptiques sont les inverses des intégrales elliptiques qui historiquement et ce pour des raisons d'astronomie, sont liées à la rectification de l'ellipse c'est-à-dire au calcul du chemin parcouru par une planète sur son orbite. Par intégrale elliptique on entend une intégrale du type

$$\int R\left(x, \sqrt{P(x)}\right) dx,$$

où $R(.,.)$ est une fonction rationnelle et $P$ un polynôme de degré 3 ou 4 avec des racines simples.

Les intégrales

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, &\quad |k|<1, \\ \int \frac{\sqrt{1-k^2x^2}}{\sqrt{1-x^2}} dx, &\quad |k|<1, \\ \int \frac{dx}{(1+kx^2)\sqrt{(1-x^2)(1-k^2x^2)}}, &\quad |k|<1, \end{aligned}$$

sont appelées intégrales elliptiques du premier type, deuxième type et troisième type, respectivement.

Elle ont attiré l'attention des plus grands mathématiciens du dix-huitième et dix-neuvième siècle notamment sous l'impulsion de Jacobi et Wierstrass. Nombreux sont les ouvrages qui leur sont consacrés et ce à cause de leurs relations avec le calcul approché de $\pi$, les équations différentielles ordinaires non linéaires, la théorie des nombres et les courbes elliptiques.

Un siècle auparavant (XIX ième siècle) elles étaient considérées comme partie intégrante et peut être la partie centrale du curriculum d'analyse. De nos jours seuls les algébristes se proclament le droit de possession surtout après que A. Wiles ait démontré la conjecture de Fermat.

Felix Klein en 1928 disait avec nostalgie et amertume "Les fonctions abéliennes étaient sous l'influence de Jacobi considérées comme le sommet incontesté des mathématiques et chacun de nous avait l'ambition de progresser dans ce domaine.

Aujourd'hui la jeune génération connaît à peine les fonctions abéliennes et on peut espérer que ces fonctions spéciales retrouvent leur véritable place dans le curriculum d'analyse."

Soit $f$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. Les points singuliers de $f$ sont donc les pôles isolés et sont en nombre fini dans tout domaine borné de $\mathbb{C}$ d'après Weierstrass. On montre qu'une fonction méromorphe est le quotient de deux fonctions entières dont le dénominateur n'est pas identiquement nul.

**Définition 6** *On dira que $w \in \mathbb{C}$ est une période de $f$ si on a*

$$\forall z \in C, \quad f(z+w) = f(z). \tag{1.6}$$

*Si $w$ est un pôle alors il est de même pour $z + w$.*

*On dira que $f$ est périodique s'il existe $w \in \mathbb{C}^*$ vérifiant (1.6).*

Si $\Omega(f)$ désigne l'ensemble de périodes de $f$ y compris la période triviale 0. Alors $\Omega(f)$ est sous groupe de $(\mathbb{C}, +)$.

Dans le cas où $f$ n'est pas constante alors $\Omega(f)$ est un sous groupe discret (*i.e.* sans point d'accumulation).

En effet, le contraire entraîne l'existence d'un élément $w \in \Omega(f)$ tel que pour tout $\varepsilon > 0$,

$$D(w, \varepsilon) \cap (\Omega(f) \setminus \{w\}) \neq \varnothing$$

Ce qui implique l'existence d'une suite $(w_n)$ contenue dans $\Omega(f) \setminus \{w\}$ convergente vers $w$. On a par suite de la périodicité:

$$f(w_n) = f(w) = f(0)$$

Si 0 est un pôle alors, dans ce cas on a une suite de pôles qui converge vers $w$, et par conséquent $w$ n'est pas isolé. Supposons que 0 n'est pas un pôle. Dans ce cas la fonction

$$g : \mathbb{C} \setminus \left\{ f^{-1}\{\infty\} \right\} \to \mathbb{C}$$

$$z \mapsto g(z) = f(z) - f(0)$$

est holomorphe sur le connexe $\mathbb{C} \setminus \{f^{-1}\{\infty\}\}$. Comme $g(w) = g(w_n) = 0$, alors en vertu du principe des zéros isolés $g$ est identiquement nulle, ce qui implique que $f$ est constante sur $\mathbb{C}$.

On montre en algèbre que tout sous groupe discret $G$ de $(\mathbb{C},+)$ est de la forme :

$$i)\ \ G = \{0\}\,,$$

ou

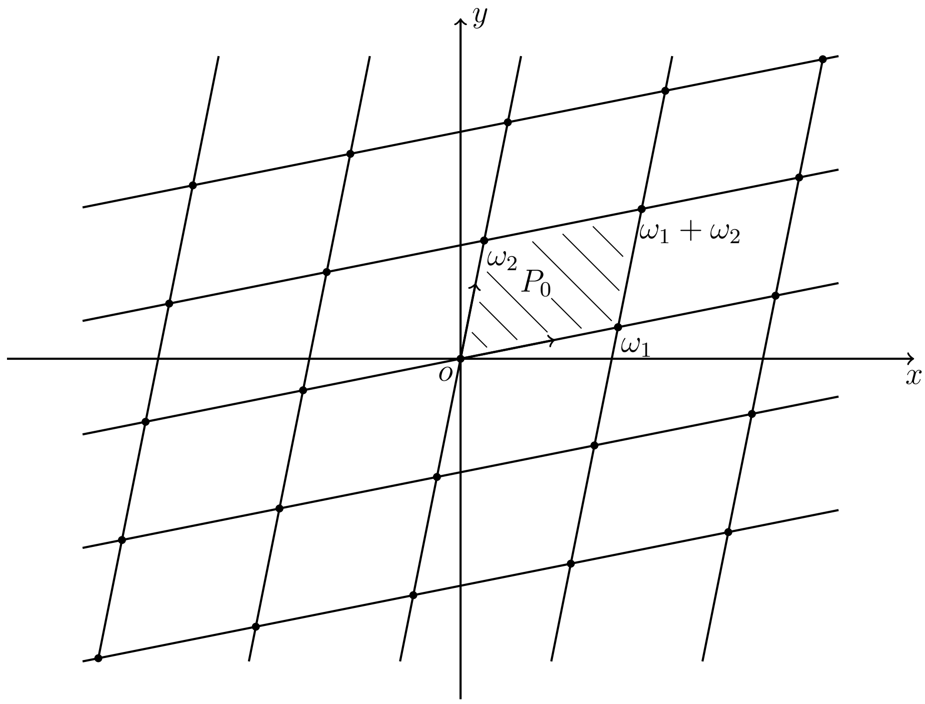
$$ii)\ \ \text{il existe } w \in \mathbb{C}^* \text{ telle que } G = \mathbb{Z}w = \{nw,\ n \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z},$$

ou

$$iii)\ \ \text{il existe } w_1, w_2 \in \mathbb{C}^*,\quad w_1 \text{ et } w_2\ \ \mathbb{R} \text{ linéairement indépendants}$$

$$\begin{aligned} i.e.\ \frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R},\ \text{telle que}\quad G &= \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2 \\ &= \{n_1w_1 + n_2w_2,\ n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\} \simeq \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

$L\,(w_1, w_2) = \mathbb{Z}w_1 \oplus \mathbb{Z}w_2$ est appelé réseau engendré par $w_1$ et $w_2$. Le même réseau peut être engendré par d'autres générateurs, par exemple: $w_1$ et $w_1 + w_2$.



Plus généralement soit

$$\begin{cases} w_1' = aw_1 + bw_2 \\ w_2' = cw_1 + dw_2 \end{cases}$$

où $a, b, c$ et $d$ dans $\mathbb{Z}$.

On a $w_1'$ et $w_2'$ engendrent $L(w_1, w_2)$ si et seulement si $ad - bc = \pm 1$.

On appelle parallélogramme fondamental de réseau $L(w_1, w_2)$, le parallélogramme $P_0$ de sommet $0, w_1, w_1 + w_2, w_2$. On a

$$P_0 = \{t_1 w_1 + t_2 w_2, \quad 0 \leq t_1, t_2 < 1\}.$$

De même si $z_0 \in \mathbb{C}$ on définit

$$P_{z_0} = \{z_0 + t_1 w_1 + t_2 w_2, \quad 0 \leq t_1, t_2 < 1\},$$

c'est le parallélogramme de sommet $z_0, z_0 + w_1, z_0 + w_1 + w_2, z_0 + w_2$.

Sans perte de généralité on supposera $\operatorname{Im} \dfrac{w_1}{w_2} > 0$. Dans ce cas le parallélogramme est parcouru dans le sens direct.

Soit $f$ une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$. On dira que $f$ est elliptique de réseau $L(w_1, w_2)$ si

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad f(z + w_1) = f(z + w_2) = f(z).$$

On exprime ceci en disant qu'une fonction elliptique est une fonction méromorphe doublement périodique.

L'ensemble des fonctions elliptiques de même réseau est un corps commutatif.

### 1.4.1 Quelques propriétés des fonctions elliptiques

**Propriété 1** :

Une fonction elliptique est entièrement déterminée par sa donnée sur $P_0$ (ou tout autre parallélogramme $P_{z_0}$).

En effet, soit $z \in \mathbb{C}$, il existe uniques $\lambda_1$ et $\lambda_2$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$z = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2.$$

On a

$$\begin{cases} \lambda_1 = [\lambda_1] + \alpha_1 = n_1 + \alpha_1 \\ \lambda_2 = [\lambda_2] + \alpha_2 = n_2 + \alpha_2 \end{cases}$$

où

$$n_1, n_2 \in \mathbb{Z} \text{ et } \alpha_1, \alpha_2 \in [0, 1[\,.$$

Donc

$$\begin{aligned} z &= \underbrace{n_1 w_1 + n_2 w_2}_{\in L(w_1, w_2)} + \underbrace{\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2}_{\in P_0} \\ &= z' + n_1 w_1 + n_2 w_2. \end{aligned}$$

Donc pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe unique $z'$ dans $P_0$ tel que $z \sim z'$ i.e.

$$z - z' \in L(w_1, w_2).$$

Il est clair que

$$f(z) = f(z').$$

**Propriété 2** :

Une fonction elliptique entière est constante.

Simple conséquence du théorème de Liouville.

En effet, pour tout $z \in \mathbb{C}$ il existe unique $z'$ dans $P_0$ tel que $z \sim z'$. Donc

$$|f(z)| = |f(z')| \leq \sup_{\xi \in \overline{P_0}} |f(\xi)| = M,$$

où $f$ est continue sur le compact $\overline{P_0}$. Donc la fonction $f$ est bornée sur $\mathbb{C}$, ce qui implique que $f$ est constante.

Une fonction elliptique non réduite à une constante admet nécessairement des pôles.

**Propriété 3** :

Soit

$$P_{z_0} = \{z_0 + \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, \quad 0 \leq \lambda_1, \lambda_2 < 1\},$$

le parallélogramme de périodes de sommet $z_0$.

On suppose que la frontière de $P_{z_0}$ ne contient ni zero ni pole de $f$. Un tel parallélogramme existe puisque l'ensemble des pôles et des zéros est discret.

On a

$$\sum_{z_k \text{ pôle } \in \mathring{P}_{z_0}} \operatorname{Res}(f, z_k) = 0$$

par simple applications du théorème des résidus.

**Propriété 4** :

Avec les mêmes hypothèses que précédemment on a à l'intérieur de $P_{z_0}$ le nombre de zéros est égal au nombre de pôles comptés avec leurs multiplicités.

Pour montrer ce résultat on applique le théorème de l'argument. On a $f'$ et $\frac{f'}{f}$ sont elliptiques. De plus

$$\int_{P_{z_0}} \frac{f'}{f} dz = 2\pi i \left( Z(f) - P(f) \right) = 0,$$

où $Z(f)$ et $P(f)$ désignent respectivement nombre de zéros et de pôles de $f$ comptés avec leur multiplicités.

**Corollaire 2** *Si le nombre de pôles dans le parallélogramme fondamental d'une fonction elliptique $f$ est égal à $n$ alors l'équation*

$$f(z) = c, \quad c \text{ constante}$$

*admet $n$ solutions dans ce parallélogramme.*

**Preuve.** La fonction elliptique $g = f - c$ a les mêmes pôles que $f$. ■

**Définition 7** *Le nombre de pôles comptés avec leur ordre de multiplicités d'une fonction elliptique $f$ contenus dans un translaté du parallélogramme fondamental est appelé l'ordre de $f$.*

### 1.4.2 La fonction $\wp$ de Weierstrass et propriétés

Soit $L = L(w_1, w_2) = \{n_1 w_1 + n_2 w_2 ; n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$ un réseau. La série

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

est

-i) Absolument convergente sur $\mathbb{C} \backslash L$

-ii) Uniformément convergente sur tout compact $\mathbb{k}$, $\mathbb{k} \subset \mathbb{C} \backslash L$

La somme de cette série est appelée fonction $\wp$ de Wieirstrass associée au réseau $L$.

On a donc

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

Sa convergence se déduit du lemme suivant:

**Lemme 1** *La série*

$$\sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{|w|^\alpha}$$

*converge si et seulement si* $\alpha > 2$

***Preuve.*** *Dans* $\mathbb{C}$ *considéré comme* $\mathbb{R}-$*espace vectoriel, les normes*

$$||x + iy||_1 = |x w_1 + y w_2|$$

*avec* $w_1$ *et* $w_2$ *deux complexes tels que* $\frac{w_1}{w_2} \notin \mathbb{R}$ *et*

$$||x + iy||_2 = \max\{|x|, |y|\} = ||(x, y)||_\infty$$

*sont équivalentes. Donc la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{|nw_1+mw_2|^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$ *est équivalente la sommabilité de la famille* $\left(\frac{1}{||(m,n)||_\infty^\alpha}\right)_{(m,n)\in\mathbb{Z}^2\setminus\{(0,0)\}}$. *Montrons que cette dernière famille est sommable. Posons pour* $n \geq 1$,

$$J_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tels que } ||(p,q)||_\infty \leq n\right\}$$

*et*

$$I_n = \left\{(p,q) \in \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\} \text{ tels que } ||(p,q)||_\infty = n\right\}.$$

*On a* $J_n = \cup_{k\leq n} I_k$. *La suite* $(J_n)_n$ *est une suite croissante, au sens de l'inclusion, vérifiant* $\cup_{n>0} J_n = \mathbb{Z}^2 \setminus \{(0,0)\}$. *Comme le cardinal de* $I_n$ *est égal à* $8n$ *alors on a*

$$\begin{aligned} S_{J_n} &= \sum_{(p,q)\in J_n} \frac{1}{||(p,q)||_\infty^\alpha} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{(p,q)\in I_k} \frac{1}{||(p,q)||_\infty^\alpha} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{8k}{k^\alpha} = 8 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^{\alpha-1}} \end{aligned}$$

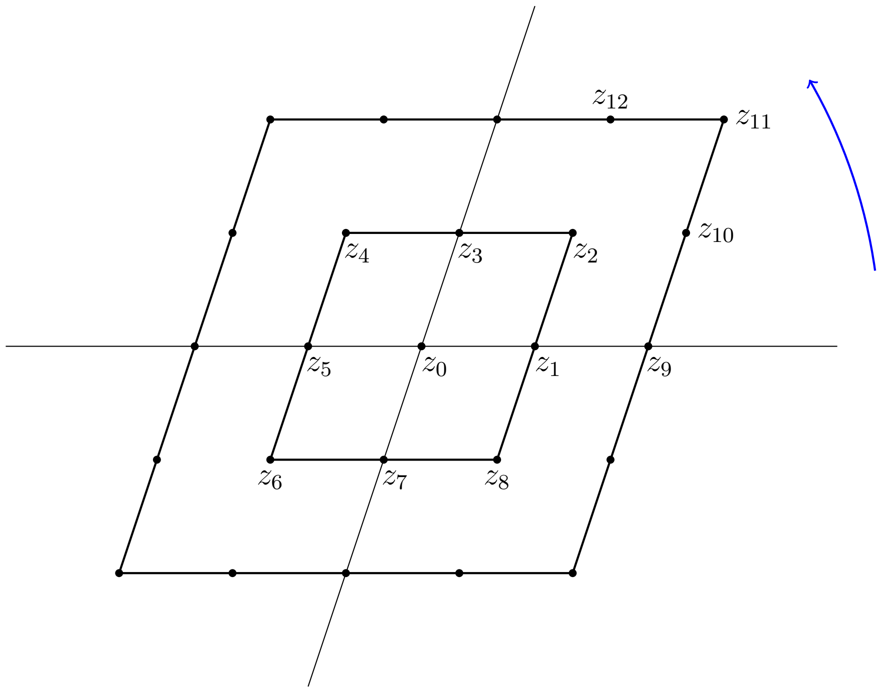
*La suite* $(S_{J_n})$ *est donc majorée si et seulement si* $\alpha > 2$. ■

On peut numéroter les éléments de $L(w_1, w_2)$ en posant $z_0 = 0$ puis on numérote successivement ceux de $L_1, L_2, ..., L_k$ en partant de $kw_1$ et en tournant dans le sens direct.

Ainsi on obtient:

$$z_1 = w_1, z_2 = w_1 + w_2, z_3 = w_2, ..., z_8 = w_1 - w_2$$

$$z_9 = 2w_1, z_{10} = 2w_1 + w_2, etc...$$




La série

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \setminus \{0\}} \left( \frac{1}{(z-w)^2} - \frac{1}{w^2} \right)$$

s'écrit sous la forme

$$\frac{1}{z^2} + \sum_{n \geq 1} \left( \frac{1}{(z-z_n)^2} - \frac{1}{z_n^2} \right)$$

Soit $R > 0$. A partir d'un certain rang $N$, on a $\frac{|z_n|}{2} > R$.

Pour $z \in \overline{D}(0, R)$ on a

$$\begin{aligned}
\left| \frac{1}{(z-z_n)^2} - \frac{1}{z_n^2} \right| &= \frac{\left| z_n^2 - (z^2 - 2zz_n + z_n^2) \right|}{\left|(z-z_n)\right|^2 |z_n|^2} \\
&= \frac{|2zz_n - z^2|}{\left|(z-z_n)\right|^2 |z_n|^2} = \frac{|z_n|\,|z| \left|2 - \frac{z}{z_n}\right|}{|z_n|^4 \left|1 - \frac{z}{z_n}\right|^2} \\
&= \frac{|z| \left|2 - \frac{z}{z_n}\right|}{|z_n|^3 \left|1 - \frac{z}{z_n}\right|^2} \leq \frac{|z| \left|2 + \left|\frac{z}{z_n}\right|\right|}{|z_n|^3 \left|1 - \left|\frac{z}{z_n}\right|\right|^2} \leq \frac{10R}{|z_n|^3}
\end{aligned}$$

La série

$$\frac{1}{z^2}+\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(z-z_n)^2}-\frac{1}{z_n^2}$$

converge normalement donc uniformément sur $\overline{D}(0,R)$. Il en résulte la convergence uniforme sur tout compact $\Bbbk\subset\mathbb{C}\backslash L$.

**Conséquences**

1) $\wp$ est une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$ (limite d'une suite de fonctions méromorphes convergeant uniformément sur des compacts).

2) La série des dérivées converge uniformément sur tout compact $\Bbbk\subset\mathbb{C}\backslash L$ vers

$$\wp'(z)=-2\sum_{n\geq 0}\frac{1}{(z-z_n)^3}$$

3) $\wp$ est paire ayant les éléments de $L(w_1,w_2)$ comme pôles doubles.-

4) $\wp'$ est impaire

5) Les racines de $\wp'$ dans le parallélogramme fondamental sont: $\frac{w_1}{2},\frac{w_2}{2}$ et $\frac{w_1+w_2}{2}$

**Lemme 2** *La fonction $\wp'$ est elliptique de périodes $w_1$ et $w_2$.*

**Preuve.** En effet

$$\begin{aligned}\wp'(z+w_1)&=-2\sum_{w\in L}\frac{1}{(z+w_1-w)^3}=-2\sum_{w\in L}\frac{1}{(z-(w-w_1))^3}\\&=-2\sum_{w\in L}\frac{1}{(z-w)^3}=\wp'(z)\end{aligned}$$

Il en est de même pour $w_2$. Donc $\wp'$ est elliptique. ■

**Lemme 3** *La fonction $\wp$ est elliptique de périodes $w_1$ et $w_2$.*

**Preuve.** En intégrant les équations $\wp'(z + w_1) = \wp'(z)$ et $\wp'(z + w_2) = \wp'(z)$ on obtient $\wp(z + w_1) - \wp(z) = c_1$ et $\wp(z + w_2) - \wp(z) = c_2$, $c_1$ et $c_2$ étant des constantes. Pour $z_1 = \frac{-w_1}{2}$ et $z_2 = \frac{-w_2}{2}$ on trouve par suite de la parité de la fonction$\wp$, $c_1 = c_2 = 0$. Ce qui implique que $\wp$ est elliptique de réseau $L(w_1, w_2)$. ■

**Remarque 1** *La fonction elliptique $\wp$ de Wierstrass est d'ordre deux. $0$ est le seul pôle double dans le parallélogramme fondamental.*

Dans un voisinage de 0 on a:

$$\wp(z) = \frac{1}{z^2} + \phi(z)$$

où $\phi$ est une fonction paire, holomorphe sur un voisinage de 0 avec $\phi(0) = 0$.

Le développement en série de Taylor au voisinage de 0 de la fonction $\phi$ est donc de la forme:

$$\phi(z) = \sum_{n>0} a_{2n} z^{2n}$$

avec

$$a_{2n} = \frac{\phi^{(2n)}(0)}{2n!}$$

De cette dernière relation on déduit que:

$$a_2 = 3 \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^4}$$
$$a_4 = 5 \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^6}$$
$$...$$
$$a_{2n} = (2n+1) \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^{2n+2}}$$

Ainsi $\wp(z)$ s'écrit sous la forme

$$\begin{aligned}
\wp(z) &= \frac{1}{z^2} + \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \sum_{n>0} \frac{2n+1}{w^{2n+2}} z^{2n} \\
&= \frac{1}{z^2} + 3 \left( \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^4} \right) z^2 + 5 \left( \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^6} \right) z^4 + ...
\end{aligned}$$

De même $\wp'(z)$ s'écrit sous la forme

$$\wp'(z) = \frac{-2}{z^3} + 6 \left( \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^4} \right) z + 20 \left( \sum_{w \in L \backslash \{0\}} \frac{1}{w^6} \right) z^3 + ...$$

Par suite on a

$$(\wp'(z))^2 = \frac{4}{z^6} - \frac{8a_2}{z^2} - 16a_4 + z^2 \phi_1(z)$$

et

$$(\wp(z))^3 = \frac{1}{z^6} + \frac{3a_2}{z^2} + 3a_4 + z^2 \phi_2(z)$$

avec $\phi_1$ et $\phi_2$ deux fonctions holomorphes dans un voisinage de 0.

Il en résulte que

$$(\wp'(z))^2 - 4(\wp(z))^3 + 20a_2 \wp(z) + 28a_4 = z^2 \phi_3(z)$$

$\phi_3$ étant holomorphe dans un voisinage de 0. Donc la fonction $\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\left(\wp(z)\right)^3 + 20a_2\wp(z) + 28a_4$, holomorphe sur $\mathbb{C}\backslash L(w_1, w_2)$, est holomorphe au voisinage de 0 et par périodicité au voisinage de tout point $w \in L(w_1, w_2) \setminus \{0\}$. C'est donc une fonction elliptique entière auquel cas elle est constante sur $\mathbb{C}$. Elle s'annule pour $z = 0$, d'où pour tout $z \in \mathbb{C}$ on a:

$$\left(\wp'(z)\right)^2 - 4\left(\wp(z)\right)^3 + 20a_2\wp(z) + 28a_4 = 0$$

En conclusion la fonction $\wp$ de Wierstrass vérifie l'équation différentielle

$$y'^2 = 4y^3 - g_2y - g_3$$

où

$$\begin{aligned} g_2 &= 20a_2 = 60 \sum_{w \in L\backslash\{0\}} \frac{1}{w^4} \\ g_3 &= 28a_4 = 140 \sum_{w \in L\backslash\{0\}} \frac{1}{w^6} \end{aligned}$$

On montre que $\wp$ et $\wp'$ engendrent le corps $K(\mathbb{L})$ des fonctions elliptiques de réseau $\mathbb{L} = \mathbb{L}(\omega_1, \omega_2)$ i.e.

$$\forall f \in K(\mathbb{L}), \quad f = R(\wp, \wp'),$$

où $R(\ ,\ )$ est une fraction rationnelle ceci d'une part, d'autre part l'application

$$\begin{array}{cl} P_0 \backslash \{0\} & \to \Gamma = \left\{(u, v) \in \mathbb{C}^2,\ v^2 = 4u^3 - g_2u - g_3\right\} \\ z & \mapsto \left(\wp(z), \wp'(z)\right) \end{array}$$

est bijective. C'est donc une paramétrisation de la cubique $\Gamma$. Au fait c'est une paramétrisation de toute cubique d'équation $y^2 = x^3 - ax - b$ avec $a^3 - 27b^2 \neq 0$ puisque il existe un réseau $\mathbb{L}(\omega_1, \omega_2)$ avec $a = g_2(\omega_1, \omega_2)$ et $b = g_3(\omega_1, \omega_2)$.

# Chapitre 2

# Intégration de certaines équations de Fuchs

Les travaux de [20, 19, 24, 25] portent sur les équations différentielles ordinaires du premier ordre à points critiques fixes. Parmi les résultats obtenus, il se trouve que l'équation différentielle du premier ordre:

$$\left(y' - k\left(ay^2 + by + c\right)\right)^k \left(y' + m\left(ay^2 + by + c\right)\right)^m - \alpha = 0, \tag{2.1}$$

satisfait les conditions nécessaires de Fuchs pour être à points critiques fixes dans le cas où $k + m = 1, 2, 3, 4$ et 5, où $k$ et $m$ sont des entiers positifs, et $a, b, c$ et $\alpha$ sont des nombres complexes.

Dans ce chapitre nous donnons la solution générale pour quelques équations de la forme (2.1). Dans le cas où nous avons $a = 0$, nous trouvons la solution générale de l'équation (2.1) pour tous $k$ et $m$ entiers positifs arbitraires. Pour le cas $a \neq 0$, on ne donne la solution générale de l'équation (2.1) que lorsque $k = 1$ et $m$ est un entier positif pair

$(m = 2n)$.

La méthode utilisée consiste à trouver une paramétrisation rationnelle de la courbe algébrique (2.1) où $y'$ et $y$ sont supposés des variables indépendantes, puis à trouver l'équation différentielle vérifiée par le paramètre. Dans le cas où l'équation initiale (2.1) a des points critiques fixes, l'équation vérifiée par le paramètre est soit une équation linéaire, soit une équation de Riccati soit elle est intégrable par des fonctions elliptiques.

## 2.1 Cas où $a = 0$

Dans ce cas, l'équation (2.1) s'écrit sous la forme

$$(y' - k\,(by + c))^k\,(y' + m\,(by + c))^m = \alpha. \tag{2.2}$$

Soit $D$ le PGCD de $k$ et m. Si $D > 1$, alors en prenant la racine $D$-ième des deux membres de l'équation (2.2) on obtient comme puissances dans le membre de gauche des entiers premiers entre eux. On peut donc supposer que $k$ et $m$ sont premiers entre eux.

En posant $u = y + \frac{c}{b}$, l'équation (2.2) s'écrit sous la forme

$$(u' - kbu)^k\,(u' + mbu)^m = \alpha. \tag{2.3}$$

En conclusion, il suffit d'étudier l'équation de la forme

$$(y' - kby)^k\,(y' + mby)^m = \alpha, \tag{2.4}$$

où $k$ et $m$ sont des entiers premiers positifs, et $b$ et $\alpha$ sont des nombres complexes.

Sachant que $k$ et $m$ sont premiers entre eux, alors d'après le lemme de Bézout il existe deux entiers positifs $p$ et $q$ tels que $pk - qm = 1$ ou $qm - pk = 1$.

Supposons que nous ayons l'existence de $p$ et $q$ tels que $pk - qm = 1$. Posons

$$\begin{cases} y' - kby = t\tau^{p}, \\ y' + mby = t\tau^{-q}. \end{cases} \tag{2.5}$$

En résolvant le système (2.5) par rapport à $y'$ et $y$, tout en tenant compte de l'équation (2.4) on obtient

$$\begin{cases} y = \dfrac{t}{b\,(k+m)}\left(\dfrac{t^{q(k+m)}}{\alpha^{q}} - \dfrac{\alpha^{p}}{t^{p(k+m)}}\right), \\ y' = \dfrac{1}{k+m}t\left(\dfrac{m\alpha^{p}}{t^{p(k+m)}} + \dfrac{kt^{q(k+m)}}{\alpha^{q}}\right). \end{cases} \tag{2.6}$$

En prenant la dérivée de la fonction $y$, donnée par la formule (2.6), on obtient

$$y' = \frac{1}{b\,(k+m)}\left(\frac{(q\,(k+m)+1)\,t^{q(k+m)}}{\alpha^{q}} + \frac{(p\,(k+m)-1)\,\alpha^{p}}{t^{p(k+m)}}\right)t'. \tag{2.7}$$

Sachant que $pk - qm = 1$, alors l'équation (2.7) peut s'écrire sous la forme

$$y' = \frac{1}{b\,(k+m)}\left(\frac{k\,(p+q)\,t^{q(k+m)}}{\alpha^{q}} + \frac{m\,(p+q)\,\alpha^{p}}{t^{p(k+m)}}\right)t'. \tag{2.8}$$

Par les formules (2.6) et (2.8) on déduit l'équation

$$t' = \frac{b}{p+q}t. \tag{2.9}$$

En intégrant l'équation (2.9) on obtient

$$t = \gamma e^{\frac{b}{p+q}z}. \tag{2.10}$$

D'après la formule (2.6), la solution de l'équation (2.4) est donc de la forme

$$y = \frac{1}{b\,(k+m)} \left( \frac{1}{\alpha^q} \gamma^{q(k+m)+1} e^{\frac{b}{p+q}(q(k+m)+1)z} - \frac{\alpha^p}{\gamma^{p(k+m)-1} e^{\frac{b}{p+q}(p(k+m)-1)z}} \right). \tag{2.11}$$

Si $m$ et $k$ sont tels que $qm - pk = 1$, alors en utilisant le même raisonnement on obtient la solution générale sous la forme

$$y = \frac{1}{b\,(k+m)} \left( -\frac{1}{\alpha^q} \gamma^{q(k+m)+1} e^{-\frac{b}{p+q}(q(k+m)+1)z} + \frac{\alpha^p}{\gamma^{q(k+m)-1} e^{-\frac{b}{p+q}(q(k+m)-1)z}} \right). \tag{2.12}$$

Si nous cherchons des solutions constantes d'équation (2.4) nous nous retrouvons avec

$$(-kby)^k\,(mby)^m = (-kb)^k\,(mb)^m\,y^{m+k} = \alpha.$$

Ainsi

$$y^{m+k} = \frac{\alpha}{(-k)^k\,m^m b^{k+m}},$$

ce qui donne $m + k$ solutions constantes. La solution générale est donc constituée de ces $m + k$ solutions constantes et de la famille de solutions (2.11).

**Exemple 6** *Considérons l'équation différentielle*

$$(y' - 2y)^2\,(y' + 3y)^3 = 108. \tag{2.13}$$

*On a* $k = 2, m = 3, b = 1, \alpha = 108$ *et* $2k - m = 1$. *La solution générale de l'équation (2.13) est donc donnée par*

$$y = \frac{1}{5} \left( \frac{1}{108} \gamma^6 e^{2z} - \frac{108^2}{\gamma^9 e^{3z}} \right),$$

*à laquelle s'ajoutent les solutions constantes* $y = a_j \quad j = 1, 2, \ldots, 5$, *où les* $a_j$ *sont les racines cinquièmes de l'unité, i.e.* $(a_j)^5 = 1$.

## 2.2 Cas où $a \neq 0$

Dans ce cas, on ne considère que le cas où $k = 1$ et $m = 2n$. L'équation (2.1) s'écrit alors sous la forme

$$\left(y' - \left(ay^2 + by + c\right)\right)\left(y' + 2n\left(ay^2 + by + c\right)\right)^{2n} - \gamma = 0. \tag{2.14}$$

L'équation (2.14) peut aussi s'écrire sous la forme

$$\left(y' - \left(a\left(y + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right)\right)\left(y' + 2n\left(a\left(y + \tfrac{b}{2a}\right)^2 + \tfrac{c}{a} - \left(\tfrac{b}{2a}\right)^2\right)\right)^{2n} - \gamma = 0.$$

Il suffit donc d'étudier l'équation de la forme

$$\left(y' - ay^2 - b\right)\left(y' + 2nay^2 + 2nb\right)^{2n} - \gamma = 0. \tag{2.15}$$

En posant $y' - ay^2 - b = \tau$ et $y' + 2nay^2 + 2nb = t$ on obtient

$$y' = \frac{1}{2n+1}\frac{t^{2n+1} + 2n\gamma}{t^{2n}}, \tag{2.16}$$

et en posant

$$y = \frac{u}{t^n}, \tag{2.17}$$

on a

$$u^2 = \frac{1}{(2n+1)\,a}t^{2n+1} - \frac{b}{a}t^{2n} - \frac{1}{(2n+1)\,a}\gamma. \tag{2.18}$$

De l'équation (2.18) on déduit

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{au}\left(\frac{t^{2n}}{2} - nbt^{2n-1}\right). \tag{2.19}$$

En prenant la dérivée de la fonction $y$ donnée par la formule (2.17) on obtient

$$\begin{aligned} y' &= -n\frac{u}{t^{n+1}}t' + \tfrac{1}{t^n}\left(\left(\frac{1}{au}\left(\tfrac{t^{2n}}{2} - nbt^{2n-1}\right)\right)t'\right) \\ &= -\frac{1}{2at^{n+1}u}t'\left(2anu^2 - tt^{2n} + 2bnt^{2n}\right). \end{aligned} \tag{2.20}$$

En identifiant les valeurs de $y'$ données par les formules (2.16) et (2.20) on obtient

$$t' = 2at^{1-n}u = 2at^{1-n}\sqrt{\frac{1}{(2n+1)\,a}t^{2n+1} - \frac{b}{a}t^{2n} - \frac{1}{(2n+1)\,a}\gamma}. \tag{2.21}$$

L'intégration de l'équation (2.15) conduit donc à l'intégration de l'équation (2.21).

Dans le cas où l'on a $n = 1$, la solution de l'équation (2.15) s'exprime à l'aide de fonctions elliptiques. Sous forme paramétrique, la solution de l'équation (2.15) est donnée par la formule

$$\begin{aligned} z &= \frac{1}{2a}\int\frac{t^{n-1}dt}{\sqrt{\frac{1}{(2n+1)a}t^{2n+1} - \frac{b}{a}t^{2n} - \frac{1}{(2n+1)a}\gamma}}, \\ y &= \frac{\sqrt{\frac{1}{(2n+1)a}t^{2n+1} - \frac{b}{a}t^{2n} - \frac{1}{(2n+1)a}\gamma}}{t^n}. \end{aligned}$$

# Chapitre 3

# Exemple d'équation avec point critique mobile

Avant de donner un exemple d'équation qui satisfait aux conditions du théorème de Fuchs, mais qui n'est pas à points critiques fixes, nous allons énoncer les trois théorèmes que nous avons mentionnés en introduction.

**Théorème 3 (de Fuchs)** *Pour que l'équation de Fuchs*

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k(z,w)\left(w'\right)^{n-k} = 0,\ n \in \mathbb{N}, \tag{3.1}$$

*où $A_k(z,w)$ sont des polynômes en $w$ à coefficients analytiques en $z$, soit à points critiques fixes, il faut que les conditions suivantes soient satisfaites.*

1. *Le coefficient $A_0\left(w,z\right)$ est indépendant de $w$. On peut donc considérer $A_0\left(w,z\right) =$ 1.*

2. *Le degré de $A_k\left(z,w\right)$ en tant que polynôme en $w$ est inférieur ou égal à $2k$.*

3. *Les racines en $w$ du discriminant $D(w,z)$ du polynôme en $w'$ (3.1) doivent être des solutions de l'équation différentielle (3.1).*

4. *Si le développement de $w'$ au voisinage d'une solution $w_0$ de $D(w,z)=0$ s'écrit sous la forme*

$$w' = s_0 + b_k (w - w_0)^{\frac{k}{m}} + b_{k+1} (w - w_0)^{\frac{k+1}{m}} + \cdots ,$$

*alors nécessairement: $k \geq m-1$.*

**Théorème 4 (de Painlevé)** *Les solutions des équations de la forme*

$$P(z, w, w') = 0,$$

*où $P$ est un polynôme en $w$ et $w'$ à coefficients analytiques en $z$, n'admettent pas de points singuliers essentiels critiques mobiles.*

**Théorème 5 (de Hermite)** *Si l'équation*

$$P(w, w') = 0,$$

*où $P$ est un polynôme en $w$ et $w'$ à coefficients constants, n'admet pas de points critiques mobiles alors la courbe algébrique définie par $P(w,s)=0$ est de genre égal à 0 ou 1.*

Considérons maintenant l'équation

$$F(y, y') = \left(y' - y^2\right)\left(y' + 4y^2\right)^4 + 256 = 0. \tag{3.2}$$

**Lemme 4** *L'équation (3.2) satisfait les conditions du théorème de Fuchs.*

**Preuve.** L'équation (3.2) peut être écrite sous la forme générale (3.1) de l'équation de Fuchs comme

$$F(y, y') = (y')^5 + 15y^2 (y')^4 + 80y^4 (y')^3 + 160y^6 (y')^2 - 256y^{10} + 256 = 0. \tag{3.3}$$

Alors, évidemment, les deux premières conditions du théorème de Fuchs sont satisfaites. En éliminant $y'$ entre les deux équations $F(y, y') = 0$ et $\frac{\partial F}{\partial y'}(y, y') = 0$ on obtient le discriminant de l'équation (3.2):

$$D(y) = 256 \left(1 - y^{10}\right). \tag{3.4}$$

Il est clair que chaque racine du discriminant (3.4) est une solution de l'équation (3.2), donc la troisième condition du théorème de Fuchs est vérifiée.

Soit $y_0$ une racine du discriminant (3.4). En remplaçant $y$ par $u + y_0$ dans l'équation (3.2), on obtient :

$$F(y', u + y_0) = G(y'u) = \left(y' - (u + y_0)^2\right)\left(y' + 4(u + y_0)^2\right)^4 + 256 = 0. \tag{3.5}$$

Comme $\frac{\partial G}{\partial u}(0,0) \neq 0$, $\frac{\partial G}{\partial y'}(0,0) = 0$ et $G(0,0) = 0$, alors d'après le théorème des fonctions implicites, $u$ peut s'écrire au voisinage de $y' = 0$ sous la forme:

$$u = A_2 (y')^2 + A_3 (y')^3 + A_4 (y')^4 + \dots. \tag{3.6}$$

Il en résulte (voire conséquence du théorème des fonctions implicites) que $y'$ peut s'écrire au voisinage de $y = y_0$ sous la forme:

$$y' = B_1 (y - y_0)^{\frac{1}{2}} + B_2 (y - y_0)^{\frac{2}{2}} + B_3 (y - y_0)^{\frac{3}{2}} + \dots. \qquad (3.7)$$

Ainsi, la quatrième condition du théorème de Fuchs est également vérifiée: $k = 1$ et $m = 2$. ■

**Lemme 5** *L'équation (3.2) a des points critiques mobiles.*

**Preuve.** En posant $t = y' + 4y^2$ et $\tau = y' - y^2$ on obtient $y' = \frac{t^5 - 1024}{5t^4}$. Si on pose $y = \frac{u}{t^2}$ on en déduit que $u^2 = \frac{1}{5}(t^5 + 256)$, ce qui donne $\frac{\partial u}{\partial t} = t^5$. Et donc en différenciant on obtient

$$y' = \frac{-1}{2ut^3}\left(4u^2 - t^5\right) t'.$$

Le paramètre $t$ satisfait donc l'équation différentielle

$$t' = \frac{\frac{t^5 - 1024}{5t^4}}{\frac{-1}{2ut^3}(4u^2 - t^5)} = \frac{2}{t}\sqrt{\frac{1}{5}(t^5 + 256)}.$$

L'équation ainsi obtenue a des points critiques mobiles et donc l'équation (3.2) l'est également.

Une preuve alternative pour montrer que l'équation (3.2) a des points critiques mobiles consiste à calculer son genre, qui est égal à 2, puis à appliquer le théorème d'Hermite.

■

Comme résultat immédiat des deux derniers lemmes, nous avons le théorème suivant.

**Théorème 6** *Les quatre conditions nécessaires du théorème de Fuchs 3 ne sont pas suffisantes pour que l'équation:*

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k(z,w)\,(w')^{n-k} = 0,\ \ n \in \mathbb{N}$$

*soit à points critiques fixes*

# Conclusion

En conclusion, nous avons donné la solution générale pour une classe d'équations différentielles non linéaires du premier ordre de Fuchs de la forme:

$$\left(y' - k\left(ay^2 + by + c\right)\right)^k \left(y' + m\left(ay^2 + by + c\right)\right)^m - \alpha = 0,$$

dans le cas où $a = 0$.

Dans le cas où $a \neq 0$, nous avons pu intégrer cette famille d'équations différentielles uniquement quand $k = 1$ et $m = 2n$; Ce qui nous amène à donner un exemple d'équations:

$$\left(y' - y^2\right)\left(y' + 4y^2\right)^4 + 256 = 0$$

qui possède des points critiques mobiles alors qu'elle satisfait toutes les conditions du théorème de Fuchs.

En conséquence, nous avons montré que les conditions nécessaires du théorème de Fuchs ne sont pas suffisantes pour que l'équation:

$$\sum_{k=0}^{k=n} A_k(z,w)\left(w'\right)^{n-k} = 0,\ n \in \mathbb{N}$$

soit à points critiques fixes.

En perspective nous pensons étudier la possibilité d'intégrer cette famille d'équations différentielles ordinaires dans le cas où $a \neq 0$ avec $(k, m)$ prenant des valeurs plus générales que $(1, 2n)$.

# Bibliographie


[1] P. R. Agarwal, K. Perera, S. Pinelas, *An Introduction to Complex Analysis.* Springer, 2011.

[2] F.J. Bureau, *Differential equations with fixed critical points.* Annali di Matematica pura ed applicata, 1964, LXIV, 229-364.

[3] R. Busam, E. Freitag, *Complex Analysis.* Springer, 2009.

[4] A. Bouvier, *Théorie élémentaire des séries.* Hermann, 1971.

[5] R. Conte, The Painlevé approach to nonlinear ordinary differential equations, The Painlevé Property, Springer-Verlag, New York 1999, 77-180.

[6] R. Conte, Unification of PDE and ODE versions of Painlevé analysis into a single invariant version, Painlevé transcendents, their asymptotics and physical applications, eds. D. Levi and P. Winternitz, Plenum, New York, 1992, 125–144.

[7] R. Conte et al., *Direct and inverse methods in nonlinear evolution equations.* Springer-Verlag, Berlin 2003.

[8] W. Fischer, I. Lieb, *A Course in Complex Analysis: From Basic Results to Advanced Topics.* Springer, 2012.

[9] L. Fuchs, *über differentialgleichungen, deren integrale feste verzweigungspunkte besitzen.* Koniglichen Preussischen Akademie der Wissenschaften, 1884, 32, 699-719.

[10] P. M. Gauthier, *Lectures on Several Complex Variables.* Springer, 2014.

[11] V. V. Golubev, *Lectures on Analytic Theory of Differential Equations* [in Russian], Gostekhteorizdat, Moscow, 1950.

[12] M. Gonzalez, *Classical Complex Analysis.* CRC Press, 1991.

[13] C. Hermite, *Cours de Lithographie de l'Ecole Polytechnique,* Paris, 1873.

[14] E. Hille, *Ordinary Differential Equations in the Complex Domain.* Wiley-Interscience, New York, 1976.

[15] E. L. Ince, *Ordinary Differential Equations.* Dover, New york, 1964.

[16] G. A. Jones, D. Singerman, *Complex Functions: An Algebraic and Geometric Viewpoint.* Cambridge University Press, 1987.

[17] N. Joshi and M.D. Kruskal, *A local asymptotic method of seeing the natural barrier of the solutions of the Chazy equation*, Applications of Analytic and Geometric

Methods to Nonlinear Differential Equations, ed. P.A. Clarkson, Plenum, New York, 1993, 331–340.

[18] W. Kaplan, *Introduction to analytic functions.* Addison-Wesley, 1966.

[19] A. Kessi, and K.M. Messaoud, *First order equations without mobile critical points.* Regular and chaotic dynamics, 2000, V. 6(1), 1-6.

[20] N.S. Kolesnikova, and N.A. Lukashevich, *Sufficient conditions for the existence of solutions with stationary critical singular points for first order equations.* Differencial'nye Uravnenija, 1972, V8(10), 1753-1760.

[21] S. Lang, Complex Analysis. Springer, 1999.

[22] C. Laurent-Thiébaut, *Théorie des fonctions holomorphes de plusieurs variables.* EDP Sciences, 1997.

[23] A. Lesfari, *Variables complexes: cours et exercices corrigés.* Ellipses, 2014.

[24] K. M'hamed-Messaoud, A. Kessi, and T. Laadj, *On Sufficient Conditions for the Existence of Solutions for First Order Equations and Fourth Degree with the Painlevé Property*, Qualitative Theory of Dynamical Systems, 2016, V15(1), 81-93.

[25] K. M'hamed-Messaoud, T. Laadj and A. Kessi, *First order fifth degree Fuchs differential equation with fixed critical points*, Int. Journal of Dynamical Systems and Differential Equations, 2019 Vol.9 No.3, pp.286 - 297.

[26] P. Painlevé, *Sur les lignes singulières des fonctions analytiques.* Annales de la faculté de Toulouse, 1888.

[27] E. Picard, *Sur l'emploi des approximations successives dans l'étude de certaines equations aux derivees partielles.* Oeuvres de Emile Picard Paris 1979, Tome II, 377-383.

[28] A. D. Polyanin, V. F. Zaitsev, *Handbook of exact solutions for ordinary differential equations*, Boca Raton, Chapman &Hall/CRC, 2003.

[29] R. M. Range, *Complex Analysis: A Brief Tour into Higher Dimensions.* MAA 110, 2003.

[30] R. M. Range, *Holomorphic Functions and Integral Representations in Several Complex Variables.* Springer, 1987.

[31] R. Roopkumar, Complex Analysis. Pearson India Education, 2014.

[32] V. Scheidemann, *Introduction to Complex Analysis in Several Variables.* Springer, 2005.

[33] M. V. Soare, P. P. Teodorescu and I. Toma, *Ordinary differential equations with applications to mechanics*, Dordrecht, Springer, 2007.

[34] P. L. Walker, *Elliptic functions: a constructive approach.* Wiley, 1996.

[35] M. Zisman, *Mathématiques pour l'agrégation: avec exercices.* Dunod, 1996.