

N° d'ordre : 54/2023-C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la

Recherche

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques



Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du grade Docteur

En : Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle et Mathématiques Discrètes

Par : Abderrahim ARABI

Sujet

Propriétés combinatoires et algébriques des polycubes

Soutenue le 22 juin 2023

Devant le jury composé de :

M. F. HAMDI	Professeur, à l'USTHB	Président
M. H. BELBACHIR	Professeur, à l'USTHB	Directeur de thèse
M. J. DUBERNARD	Maître de Conférence/H, à l'U. Rouen - France	Co-Directeur de thèse
M. J. LUQUE	Professeur, à l'U. Rouen - France	Examineur
M. A. BELKHIR	Maître de Conférence/A, à l'USTHB	Examineur
M. N. HANNOUN	Maître de Conférence/A, à l'USTHB	Examineur

Remerciements

J'aimerais d'abord remercier mon directeur de thèse, le professeur Hacène Belbachir, pour m'avoir accueilli à L'USTHB et au CERIST, et de m'avoir conseillé et encouragé durant toutes ces années. Sa bienveillance et sa rigueur ont fait de moi, j'espère, un bon chercheur et une meilleure personne.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude envers mon co-directeur de thèse Jean-Philippe Dubernard. Il a travaillé avec moi en utilisant tous les moyens possibles, mettant à ma disposition son soutien constant. De plus, je suis reconnaissant qu'il m'ait accueilli à plusieurs reprises à Rouen. Au-delà de notre relation professionnelle, il a été un ami généreux, toujours là pour m'encourager et partager des moments de convivialité.

Je remercie également le professeur Fayçal Hamdi, monsieur Amine Belkhir et monsieur Noureddine Hannoun pour le temps qu'ils ont consacré à lire ma thèse. Mes sincères remerciements au professeur Jean-Gabriel Luque d'avoir accepté de faire partie de mon jury et de m'avoir guidé dans ce travail.

Un grand merci à mes parents et à mon frère pour leur soutien inépuisable durant toute la thèse.

Un remerciement spécial à Yenni et Amine pour leur grande disponibilité.

Je remercie beaucoup Rezki, Sarah, Nazim, Abdennour et Yacine qui m'ont aidé dans cette thèse. Merci à mes amis : Cherif, Mourad, Rafik, Hani, Nedjmeddine, Aziz, Hamza, Adnène, Nassim, Rafik, Youcef, Fayçal, Asma et Oussama. Finalement, je remercie tous les collègues de l'USTHB et du CERIST qui m'ont soutenu.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'énumération des familles de polycubes plateaux et de polycubes parallélogrammes ainsi que leur généralisation en dimension quelconque.

Nous commençons d'abord par introduire un nouveau paramètre appelé l'aire latérale qui est obtenu en projetant les polycubes. Avec ce paramètre nous énumérons les polycubes plateaux et les polycubes plateaux dirigés. Ce résultat est ensuite généralisé pour les polyhypercubes plateaux dirigés en dimension quelconque.

Les polycubes plateaux dirigés sont par la suite énumérés selon le volume en utilisant les propriétés de collage. Aussi, en exploitant leurs projections, nous les énumérons selon la largeur, la hauteur et la profondeur. Ce résultat est alors étendu aux polycubes convexes et convexes dirigés.

Ensuite, nous donnons la série génératrice de Dirichlet des polyominos et polycubes parallélogrammes en utilisant la relation entre les deux objets. Aussi, on énumère les polycubes parallélogrammes selon la largeur, la hauteur et la profondeur. Ces résultats sont alors étendus en dimension quelconque.

Finalement, nous donnons une formule de récurrence pour les polyominos parallélogrammes et une série génératrice pour les polycubes espaliers, selon la largeur, la hauteur et la profondeur.

Mots clés : Polycubes, polyominos, polyhypercube, énumération, série génératrice, série génératrice de Dirichlet, projection, aire latérale.

Abstract

In this dissertation, we focus on the enumeration of families of plateau polycubes, parallelogram polycubes as well as on their higher dimensional equivalent.

We first start by introducing a new parameter called lateral area which is obtained by projecting the polycube. Using this parameter, we enumerate plateau polycubes and directed plateau polycubes. This result is then generalized to directed plateau polyhypercubes.

Directed plateau polycubes are then enumerated according to the volume by using gluing properties. Also, from their projections, we enumerate them according to the width, height, and depth. This result is then extended to convex polycubes and directed convex polycubes.

After that, we provide the Dirichlet generating function for parallelogram polyominoes and polycubes, using the relation between the two objects. Also, we enumerate parallelogram polycubes according to the width, height, and depth. This result is then extended for parallelogram polyhypercubes.

Finally, we give a recurrence formula for parallelogram polyominoes and a generating function for espalier polycubes, according to the width, the height, and the depth.

Key words : Polycubes, polyominoes, polyhypercubes, enumeration, generating function, Dirichlet generating function, projection, lateral area.

Table des matières

Remerciements	i
Résumé	ii
Abstract	iii
Introduction	1
1 Préliminaires	6
1.1 Polyominos	6
1.2 Polycubes	12
1.3 Polyhypercubes	18
1.4 Outils d'énumération	20
2 Énumération des polycubes plateaux selon l'aire latérale	22
2.1 Introduction	22
2.2 L'aire latérale	23
2.3 Énumération des polycubes plateaux dirigés selon la largeur et l'aire latérale	24
2.4 Énumération des polycubes plateaux selon la largeur et l'aire latérale . . .	27
2.5 Résultats asymptotiques	29
2.5.1 Polyominos verticalement convexes	31
2.5.2 Polycubes plateaux	36
2.6 Généralisation pour les polyhypercubes	37
2.6.1 Formule explicite pour les polyhypercubes plateaux dirigés	38
2.6.2 Série génératrice	39
3 Énumération des polycubes et polyhypercubes plateaux dirigés selon le volume	41
3.1 Introduction	41
3.2 Formule pour les polycubes	41
3.3 Formule pour les polyhypercubes	45
3.4 Énumération selon la largeur, la hauteur et la profondeur	50
3.5 Exploration d'autres familles de polycubes	52
3.5.1 Polycubes convexes	52

3.5.2 Polycubes plateaux convexes dirigés	53
4 Énumération des polycubes parallélogrammes	55
4.1 Introduction	55
4.2 Série génératrice de Dirichlet pour les polycubes parallélogrammes	56
4.2.1 Formules pour les polyominos et polycubes parallélogrammes	56
4.2.2 Série génératrice de Dirichlet	59
4.3 Énumération selon la hauteur, la largeur et la profondeur	64
4.4 Généralisation pour une dimension quelconque	65
5 Énumération des polyominos parallélogramme et des polycubes espaliers	68
5.1 Introduction	68
5.2 Polyominos parallélogrammes à colonne fixée	68
5.3 Énumération des polycubes espaliers	72

Table des figures

1	Les polyominos à 4 cellules.	1
2	Les polycubes à 3 cellules.	3
1.1	Cellule	6
1.2	Cellules non-adjacentes et adjacentes	7
1.3	Exemple d'un polyomino	7
1.4	Translation-(5,4) d'un polyomino	8
1.5	Un polyomino de largeur 3, hauteur 4 et demi périmètre 7.	9
1.6	Polyomino de hauteur 7, de largeur 8, d'aire 25 et de demi-périmètre 15.	9
1.7	Un polyomino Nord-Est dirigé avec les pas Nord et Est en rouge.	9
1.8	Un polyomino verticalement convexe.	10
1.9	Un polyomino horizontalement convexe.	10
1.10	Un polyomino convexe.	10
1.11	polyomino verticalement convexe dirigé et horizontalement convexe dirigé.	11
1.12	Un polyomino parallélogramme.	11
1.13	La base de la deuxième colonne est 1 et son sommet est 4.	11
1.14	Cellules adjacentes et non-adjacentes.	12
1.15	Exemple d'un polycube.	13
1.16	Polycube d'aire 11, largeur 3, hauteur 4 et profondeur 2.	14
1.17	Un polycube dirigé avec les différents chemins.	14
1.18	Exemple d'un polycube verticalement convexe.	15
1.19	Exemple d'une strate.	15
1.20	Exemple d'une strate.	16
1.21	Exemple d'un polycube plateau.	16
1.22	Exemple d'un polycube plateau dirigé.	16
1.23	Exemple d'un polycube plateau convexe.	17
1.24	Exemple d'un polycube convexe dirigé.	17
1.25	Exemple d'un polycube parallélogramme.	17
1.26	Exemple d'un polycube espalier.	18
2.1	Exemple d'un polycube de largeur 2 et d'aire latérale 9.	23
2.2	Polycubes avec le même volume et d'aires latérales différents.	23
2.3	Polycube plateau dirigé de largeur 3 et d'aire latérale 14.	24

2.4	Transversale anti-diagonale du triangle de Tribonacci.	29
2.5	Ajout de deux cellule dans la première colonne.	31
2.6	ajout de deux cellules dans une colonne du milieu.	32
2.7	Ajout d'une cellule dans la première et la deuxième colonne.	32
2.8	Ajout de deux cellules dans deux colonnes consécutives différentes de la première et la dernière.	33
2.9	Ajout de deux cellules dans la première et dernière colonne.	33
2.10	Ajout de deux cellules dans la première colonne et dans une colonne du milieu différente de la deuxième.	34
2.11	Un pavage linéaire et son polyomino équivalent.	34
2.12	Ajout de deux cellules dans deux colonnes non consécutives.	35
3.1	Tous les polycubes plateaux dirigés de largeur 2 et de volume 4.	43
3.2	Tous les polycubes plateaux dirigés de largeur 4 et de volume 5.	44
3.3	Les premières valeurs du nombre de polyominos verticalement convexes dirigés selon la largeur et la hauteur.	51
3.4	Les premières valeurs des polycubes plateaux dirigés selon la largeur et la hauteur et la profondeur.	51
3.5	Quatrième niveau de la pyramide.	52
3.6	Les premières valeurs du nombre de polyominos convexes selon la largeur et la hauteur.	53
3.7	Les premières valeurs des polycubes convexes selon la largeur et la hauteur et la profondeur.	53
3.8	Les premières valeurs du nombre de polyominos convexes dirigés selon la largeur et la hauteur.	54
3.9	Les premières valeurs des polycubes convexes dirigés selon la largeur, la hauteur et la profondeur.	54
4.1	Construction des polyominos parallélogrammes à partir de deux colonnes.	57
4.2	Tous les plateaux de volume 6.	58
4.3	Exemple de collage de deux plateaux.	59
4.4	Polycube parallélogramme et ses projections.	66
5.1	Polyomino parallélogramme dont la colonne la plus courte est la 4 ^{ème} .	69
5.2	Collages de deux colonnes pour former un polyomino parallélogramme.	69
5.3	Colonne de hauteur 1.	70
5.4	Collage d'un polyomino à gauche d'aire 4.	71
5.5	Collage d'un polyomino à gauche d'aire 4.	71
5.6	Collage d'un polyomino parallélogramme à gauche d'aire 3 et à droite d'aire 1.	71
5.7	Collage d'un polyomino parallélogramme à gauche d'aire 2 et à droite d'aire 2.	72
5.8	Décomposition d'un polycube espalier.	73

Liste des tableaux

1	Les premières valeurs des polyominos	2
2	Les premières valeurs du nombre de polycubes à n cellules.	4
2.1	Les premières valeurs de $s_{k,n}$, le nombre de polycubes plateaux dirigés de largeur k et d'aire latérale n	28
2.2	Les premières valeurs de $r_{k,m}$, le nombre de polycubes plateaux de largeur k et d'aire latérale m	30
2.3	Les premières valeurs de $h_{k,n}$, le nombre de polyominos verticalement convexes de largeur k et d'aire n	31
3.1	Les premières valeurs du nombre de polycubes plateaux dirigés de largeur k et de volume n	45
3.2	Les suites τ_d dans l'OEIS.	46
3.3	Les premières valeurs de $g_{4,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 4, largeur k et volume n	47
3.4	Les premières valeurs de $g_{5,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 5, largeur k et volume n	47
3.5	Les premières valeurs de $g_{6,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 6, largeur k et volume n	48
3.6	Les premières valeurs de $g_{7,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 7, largeur k et volume n	48
3.7	Les premières valeurs de $g_{8,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 8, largeur k et volume n	49
4.1	Les premières valeurs de $b_{k,n}$, le nombre de polyominos parallélogrammes de largeur k et d'aire n	58
4.2	Les premières valeurs de $c_{k,n}$, le nombre de polycubes parallélogrammes de largeur k et d'aire n	59
5.1	Les premières valeurs de $a_{n,c}$	70

Introduction

Les *polyominos* sont des ensembles connexes de carrés unitaires (appelés également cellules) connectés par leurs arêtes [50] et sans point d'articulation. Un cas particulier de polyomino est le domino. Le terme "polyomino" a été introduit par Solomon Golomb en 1953 lors d'une présentation au Harvard Mathematical Club [47]. Certains cas de polyominos ont été étudiés au début du XXe siècle [12] mais ils ont été popularisés après par Gardner à travers sa rubrique "Mathematical Game" dans le magazine Scientific American, où il les présentait sous forme de jeux de pavage [65].

La question "Combien y a-t-il de polyominos à n cellules?" a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs. Malgré sa simplicité, la réponse à cette question n'est pas connue et à ce jour, il n'existe aucune formule générale permettant d'énumérer les polyominos en fonction du nombre de cellules [11].

On sait que le nombre de polyomino à n cellules est fini. Ce résultat a été démontré par Edén et il a donné une borne supérieure qui est égale à $\binom{3(n-1)}{n-1}$ [41].

L'ensemble des polyominos à 4 cellules est donné sur la Figure 1.

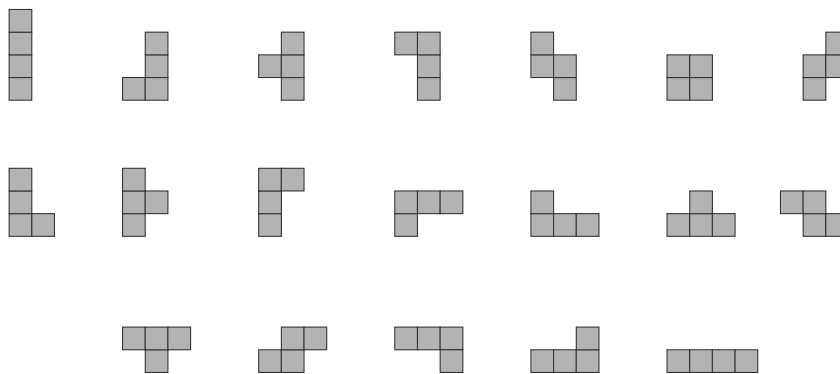


FIGURE 1 – Les polyominos à 4 cellules.

En 1962, Read [68] a été le premier à donner quelques résultats sur le nombre de polyominos à n cellules et il a présenté une méthode pour déduire les séries génératrices. Mais sa méthode s'est révélée infaisable dans la pratique à cause d'un nombre trop important de calculs. Lunnon en 1971 a calculé les 18 premières valeurs [59]. En 1981 Redelmeier a proposé un algorithme pour la génération et le calcul des polyominos [69]. Sa méthode (plus tard utilisée pour les dimensions supérieures) permet de générer une seule fois chaque polyomino et donc d'éviter des calculs supplémentaires.

En 2000 Jensen et Golomb ont calculé les valeurs jusqu'à $n = 46$ [54] et en 2003 la borne a

été entendue jusqu'à $n = 56$ par Jensen [53]. Les 56 premières valeurs de $a(n)$, le nombre de polyominos à n cellules, sont données dans le Tableau 1.

n	a(n)	n	a(n)
1	1	29	4820975409710116
2	2	30	18946775782611174
3	6	31	74541651404935148
4	19	32	293560133910477776
5	63	33	1157186142148293638
6	216	34	4565553929115769162
7	760	35	18027932215016128134
8	2725	36	71242712815411950635
9	9910	37	281746550485032531911
10	36446	38	1115021869572604692100
11	135268	39	4415695134978868448596
12	505861	40	17498111172838312982542
13	1903890	41	69381900728932743048483
14	7204874	42	275265412856343074274146
15	27394666	43	1092687308874612006972082
16	104592937	44	4339784013643393384603906
17	400795844	45	17244800728846724289191074
18	1540820542	46	68557762666345165410168738
19	5940738676	47	272680844424943840614538634
20	22964779660	48	1085035285182087705685323738
21	88983512783	49	4319331509344565487555270660
22	345532572678	50	17201460881287871798942420736
23	1344372335524	51	68530413174845561618160604928
24	5239988770268	52	273126660016519143293320026256
25	20457802016011	53	1088933685559350300820095990030
26	79992676367108	54	4342997469623933155942753899000
27	313224032098244	55	17326987021737904384935434351490
28	1228088671826973	56	69150714562532896936574425480218

TABLE 1 – Les premières valeurs des polyominos

Une autre approche pour l'énumération des polyominos consiste à énumérer des polyominos respectant certaines contraintes telles que la direction et la convexité. Ces travaux sont motivés par la difficulté du problème [17] et par les nombreuses applications potentielles. Ces applications comportent des domaines tels que la physique, plus précisément les phénomènes de percolation [16, 21, 73], la chimie moléculaire [45, 78], l'informatique [79], et la théorie des nombres, notamment pour les diagrammes de Ferrers [2, 70].

Des polyominos avec différentes contraintes, ont été énumérés selon plusieurs paramètres comme : l'aire, la largeur, la hauteur et le périmètre [30, 62, 76]. Parmi eux, on peut mentionner les polyominos dirigés [38, 49, 75], les polyominos parallélogrammes [31, 35], les polyominos verticalement convexes [43, 33, 57], les polyominos verticalement convexes dirigés [9, 34], les polyominos convexes [5, 36], les polyominos convexes dirigés [40, 58], les polyominos HV-convexes [8], les polyominos L-convexes [23], les polyominos Z-convexes [71], les polyominos K-convexes [20], les polyominos diagonalement convexes dirigés [44] et les polyominos bargraphes [18, 63, 61]

Plusieurs méthodologies ont été développées pour l'énumération des polyominos, on peut citer la méthodologie de Temperley [74], la méthodologie DSV [36], la méthode de Bousquet-Mélou [15] et la méthodologie ECO [7].

L'énumération des polyominos existe aussi sur d'autres réseaux tels que les réseaux triangulaires et hexagonaux [51, 64].

Les polyominos ont une extension en dimension 3 appelée *Polycubes*. Un polycube est un ensemble connexe de cubes unitaires (aussi appelé cellules) connectés par leurs faces et sans point ou arête d'articulation. Ils ont été introduits par Lunnon en 1971 [59].

Comme pour les polyominos, le problème d'énumération des polycubes pour un nombre donné de cellules reste ouvert et leur énumération est liée à celle des polyominos [13].

L'ensemble des polycubes à 3 cellules est donné sur la Figure 1.

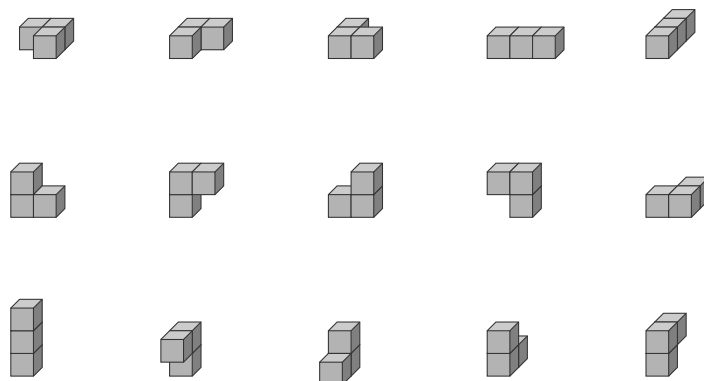


FIGURE 2 – Les polycubes à 3 cellules.

Quelques valeurs ont été calculés pour $b(n)$ le nombre de polycubes à n de cellules. En 1971, Lunnon [59] a calculé le nombre de polycubes jusqu'à $n = 6$. En 2008, Aleksandrowicz et Barequet [1] ont calculé les valeurs jusqu'à $n = 18$ et la dernière valeur connue qui est $n = 19$, elle a été trouvée par Luther et Mertens [60]. Les 19 premières valeurs de $b(n)$ sont données dans le Tableau 2.

n	b(n)	n	b(n)
1	1	11	60494549
2	3	12	446205905
3	15	13	3322769321
4	86	14	24946773111
5	534	15	188625900446
6	3481	16	1435074454755
7	23502	17	10977812452428
8	162913	18	84384157287999
9	1152870	19	651459315795897
10	8294738		

TABLE 2 – Les premières valeurs du nombre de polycubes à n cellules.

Contrairement au polyominos, peu de classes de polycubes ont été étudiées. Nous pouvons citer, les partitions planes [28], les polycubes plateaux dirigés et les polycubes parallélogrammes [24] ainsi que les serpents partiellement dirigés [48]. Certaines familles de polycubes sont utilisées comme modèle de validation à temps réel [27] et dans la représentation des langages géométriques [25].

Deux méthodes existent pour l'énumération des familles de polycubes dirigés. La principale est la *méthode générique* [26] basé sur la "Methodologie de Temperley" et qui consiste à décomposer les polycubes en éléments simples et à interpréter les équations fonctionnelles. La seconde est basée sur la convolution de Dirichlet [22].

Dans cette thèse nous nous intéressons au problème d'énumération des polycubes plateaux et parallélogrammes.

Dans le Chapitre 1, nous donnons les définitions de différentes familles de polyominos, polycubes et polyhypercubes. Certains outils d'énumération sont rappelés.

Dans le Chapitre 2, nous introduisons un nouveau paramètre appelé *aire latérale*. Il est obtenu à partir des polyominos issus de la projection d'un polycube. En utilisant ce paramètre, nous énumérons la famille des polycubes plateaux dirigés et les polycubes plateaux. Puis, des démonstrations combinatoires sont données pour certaines valeurs des polycubes plateaux. Finalement, les résultats pour les polycubes plateaux dirigés sont généralisés pour une dimension quelconque.

Dans le Chapitre 3, nous donnons des formules explicites pour les polycubes et les polyhypercubes plateaux dirigés selon la largeur et le volume. Puis, une énumération selon la largeur, la hauteur et la profondeur est donnée pour cette même famille de polycubes. Ce dernier résultat est étendu pour les polycubes convexes et convexes dirigés.

Dans le Chapitre 4, nous nous intéressons aux polycubes parallélogrammes. Nous commençons par donner la série génératrice de Dirichlet pour les polyominos parallélogrammes selon la largeur et la hauteur de chaque colonne. Ensuite, en utilisant cette série génératrice,

nous donnerons celle des polycubes parallélogrammes selon la largeur et le volume de chaque colonne. Une deuxième énumération pour cette famille de polycubes est faite selon la largeur, la hauteur et la profondeur. Finalement, ces résultats sont généralisés pour les polyhypercubes.

Dans le dernier Chapitre, nous énumérons les polyominos parallélogrammes selon l'aire et la hauteur et la plus courte colonne. En introduisant ce nouveau paramètre et en exploitant les propriétés de collages des polyominos parallélogrammes, une récurrence est obtenue. Ainsi, une sous-famille des polycubes parallélogrammes est énumérée, celle des polycubes espaliers.

Liste des publications

Articles dont est issu le contenu de cette thèse :

- [4] A. Arabi, H. Belbachir and J.-Ph. Dubernard (2023). Enumeration of plateau polycubes with respect to their lateral area. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, 1-17.
- [3] A. Arabi, H. Belbachir and J.-Ph. Dubernard (2021). Enumeration of parallelogram polycubes. arXiv preprint arXiv :2105.00971.

Chapitre 1

Préliminaires

Nous allons définir dans ce chapitre les notions combinatoires utilisées dans la suite de la thèse. Les références utilisées pour rédiger ces définitions sont [12], [19] et [39].

1.1 Polyominos

Le premier objet que nous allons définir est la cellule.

Définition 1.1.1. Dans \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$, une **cellule** est un carré unitaire, dont les côtés sont parallèles aux axes des coordonnées et dont le point le plus en bas à gauche est un point entier $(x, y) \in \mathbb{N}^2$.

Un exemple d'une cellule est donnée sur la Figure 1.1.

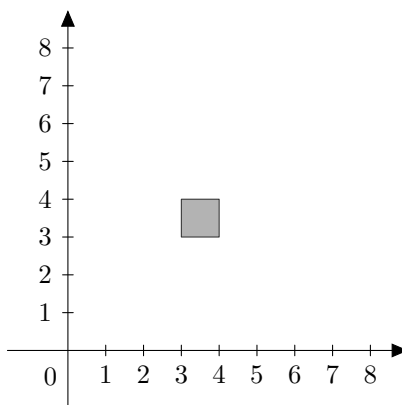


FIGURE 1.1 – Cellule

Une cellule est identifiée par son point le plus bas à gauche, que nous notons $[x, y]$. Cette notation a été introduite par Barequet *et al.* [12], pour identifier le centre. À partir d'une cellule, nous définissons l'adjacence et la connexion.

Définition 1.1.2. Deux cellules $[x, y]$ et $[r, s]$ sont **adjacentes** si

$$|x - r| + |y - s| = 1.$$

La Figure 1.2 à gauche présente un exemple de deux cellules non-adjacentes. Dans l'exemple de droite, les deux cellules sont adjacentes.



FIGURE 1.2 – Cellules non-adjacentes et adjacentes

Définition 1.1.3. Un *point d'articulation* est un point dont la suppression entraînerait la création de deux composantes connexes disjointes.

Nous avons un point d'articulation dans l'exemple de gauche de la Figure 1.2.

Définition 1.1.4. Deux cellules $[x, y]$ et $[r, s]$ sont *connectées* s'il existe une suite finie de cellules a_1, \dots, a_k , $k \geq 2$, telle que pour $1 \leq i \leq k - 1$, a_i et a_{i+1} sont adjacentes avec $a_1 = [x, y]$ et $a_k = [r, s]$.

À partir de l'adjacence et de la connexion, on peut définir les polyominos.

Définition 1.1.5. Un *polyomino* est un ensemble fini de cellules, tel que tout couple de cellules est connecté.

La Figure 1.3 donne un exemple d'un polyomino quelconque.

On peut noter que bien qu'il y ait 2 cellules uniquement connectées par un sommet, il n'y a ici aucun point d'articulation.

Un polyomino peut aussi se définir comme un ensemble connexe fini de cellules adjacentes sans point d'articulation.

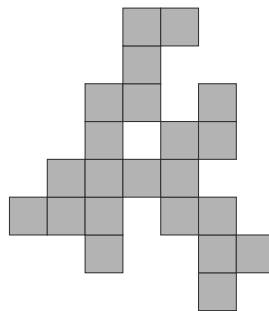


FIGURE 1.3 – Exemple d'un polyomino

Remarque 1.1.1. Un polyomino qui contient n cellules est appelé *n-omino*.

Un autre objet équivalent au polyomino est appelé *animal*. Il est obtenu en remplaçant chaque cellule par son centre. Cette appellation est généralement utilisée en physique statistique [68]. Les animaux apparaissent dans plusieurs problèmes dont ceux de percolation dirigée par exemple [19].

On définit aussi une translation d'un polyomino de la façon suivante.

Définition 1.1.6. Une **translation** (p, q) d'un polyomino P est une transformation de \mathbb{Z}^2 dans lui-même, qui associe à chaque cellule $[x, y]$ d'un polyomino S la cellule $[x + p, y + q]$, avec $p, q \in \mathbb{N}$.

Un exemple d'une translation $-(5, 4)$ est donné sur la Figure [1.4](#).

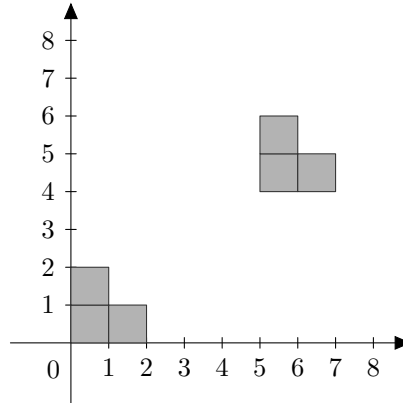


FIGURE 1.4 – Translation $-(5, 4)$ d'un polyomino

Remarque 1.1.2. D'autres transformations existent pour les polyominos, nous pouvons citer la rotation, la translation-rotation (voir [\[12\]](#)).

Parmi eux, il y a les polyominos **fixés**. Ces polyominos sont équivalents à translation près. Les deux polyominos de la Figure [1.4](#) sont considérés comme étant la représentation du même polyomino fixé.

Dans la suite du document, nous nous intéresserons seulement à l'énumération des polyominos fixés, que nous nommerons polyominos.

Dans \mathbb{R}^2 muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j})$ plusieurs paramètres sont définis sur les polyominos. Nous allons en définir quelques-uns.

Définition 1.1.7. L'**aire** d'un polyomino est le nombre de ses cellules.

Par exemple l'aire du polyomino de la Figure [1.6](#) est égale à 25.

Définition 1.1.8. La **largeur** d'un polyomino P est égale à

$$\max_{[x,y] \in P} (x) - \min_{[x,y] \in P} (x) + 1.$$

Définition 1.1.9. La **hauteur** d'un polyomino P est égale à

$$\max_{[x,y] \in P} (y) - \min_{[x,y] \in P} (y) + 1.$$

La largeur du polyomino représenté sur la Figure [1.6](#) est égale à 8 et sa hauteur est égale à 7.

Un autre paramètre étudié dans la littérature est le **périmètre**. Le périmètre est défini comme la somme des arêtes du pourtour d'un polyomino. Le *demi-périmètre* est alors

égal à sa moitié. Ce paramètre est utilisé lorsque la famille du polyomino a toujours un périmètre pair.

Dans certaines familles de polyominos le demi-périmètre est simplement égal à la somme de la hauteur et la largeur (voir Figure 1.5).

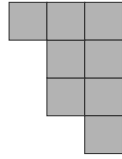


FIGURE 1.5 – Un polyomino de largeur 3, hauteur 4 et demi périmètre 7.

Il est à noter que la plupart des familles que nous allons étudier vérifient cette propriété.

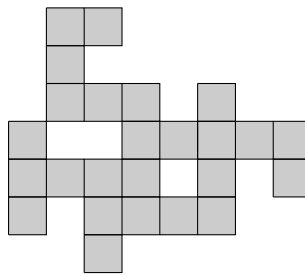


FIGURE 1.6 – Polyomino de hauteur 7, de largeur 8, d'aire 25 et de demi-périmètre 15.

On peut définir des familles de polyominos à l'aide de différentes contraintes. Nous allons en donner quelques-unes.

La première contrainte est celle de la direction.

Définition 1.1.10. *Un pas Nord (resp. Est) est un déplacement positif d'une unité selon \vec{j} (resp. \vec{i}).*

Définition 1.1.11. *Un polyomino est Nord-Est dirigé, si à partir d'une cellule donnée appelée racine, nous pouvons atteindre n'importe quelle autre cellule par des chemins composés de pas Nord et Est.*

Un exemple d'un polyomino Nord-Est dirigé est donné sur la Figure 1.7.

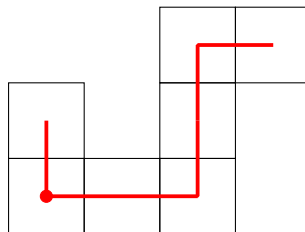


FIGURE 1.7 – Un polyomino Nord-Est dirigé avec les pas Nord et Est en rouge.

On peut définir de façon similaire les directions Nord-Ouest, Sud-Est et Sud-Ouest.

Lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera *dirigé* au lieu de Nord-Est dirigé. C'est la définition la plus courante de direction.

Une autre contrainte majeure définie sur les polyominos est la convexité. Nous allons donner définir quelques convexités.

Définition 1.1.12. *Un polyomino est dit **verticalement** (resp. **horizontalement**) **convexe** si son intersection avec toute droite verticale (resp. horizontale) est connexe.*

La Figure [1.8](#) (resp. [1.9](#)) illustre un polyomino verticalement (resp. horizontalement) convexe.

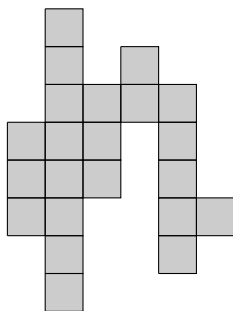


FIGURE 1.8 – Un polyomino verticalement convexe.

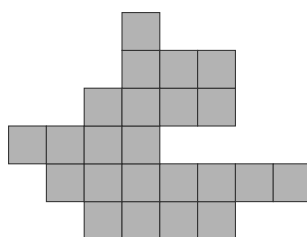


FIGURE 1.9 – Un polyomino horizontalement convexe.

Remarque 1.1.3. *Les polyominos verticalement et horizontalement convexes sont équivalents, nous obtenons les seconds par rotation des premiers ou réciproquement.*

Définition 1.1.13. *Un polyomino est **convexe** s'il est à la fois verticalement et horizontalement convexe.*

Un exemple d'un polyomino convexe est donné sur la Figure [1.10](#).

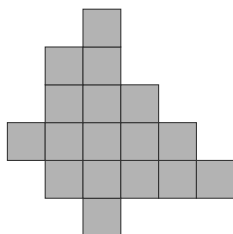


FIGURE 1.10 – Un polyomino convexe.

A l'aide des propriétés de direction et de convexité, on peut alors définir des familles de polyominos. Parmi elles, citons :

- Les polyominos **verticalement convexes dirigés** (voir polyomino gauche de la Figure 1.11).
- Les polyominos **convexes dirigés** (voir polyomino droit de la Figure 1.11).



FIGURE 1.11 – polyomino verticalement convexe dirigé et horizontalement convexe dirigé.

Il existe de nombreuses autres familles de polyominos. Un tableau récapitulatif des différentes familles est donné dans [19].

Une autre famille très étudiée dans la bibliographie est celle des polyominos parallélogrammes.

Définition 1.1.14. *Les polyominos **parallélogrammes** sont des polyominos convexes, Nord-Est et Sud-Ouest dirigés.*

Un exemple d'un polyomino parallélogramme est donné sur la Figure 1.12.

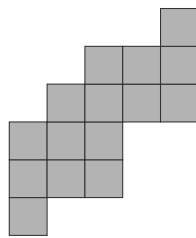


FIGURE 1.12 – Un polyomino parallélogramme.

On peut aussi les définir via quelques propriétés de constructions. En voici une.

Définition 1.1.15. *Une colonne C de niveau y d'un polyomino P est :*

$$C(y) = \{[x, y] \in P \mid x \in \mathbb{Z}\}.$$

Définition 1.1.16. *On appelle **base** (resp. **sommet**) d'une colonne d'un polyomino le segment associé au minimum (resp. maximum) des ordonnées des cellules de cette colonne.*

La Figure 1.13 illustre cette définition.

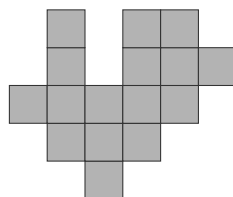


FIGURE 1.13 – La base de la deuxième colonne est 1 et son sommet est 4.

En utilisant ces notions, il est possible de donner une deuxième définition.

Définition 1.1.17. Un polyomino **parallélogramme** est un polyomino convexe tel que la suite formée par les ordonnées des bases (resp. sommets) des colonnes numérotées de gauche à droite est croissante.

1.2 Polycubes

Les polyominos peuvent être généralisés en dimension 3. Ces objets, appelés **polycubes**, sont définis de la même façon que les polyominos.

Comme pour les polyominos, commençons par définir une cellule.

Définition 1.2.1. Dans \mathbb{R}^3 muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, une **cellule** est un cube unitaire, dont les côtés sont parallèles aux plans formés par les 3 axes des coordonnées et dont le point arrière (plus proche du plan (O, \vec{i}, \vec{j})) en bas (plus proche du plan (O, \vec{i}, \vec{k})) à gauche (plus proche du plan (O, \vec{j}, \vec{k})) est un entier $(x, y, z) \in \mathbb{N}^3$.

Une cellule est alors identifiée par son point arrière en bas à gauche, que nous noterons $[x, y, z]$.

Les généralisations de l'adjacence et de la connexion sont données dans les définitions suivantes.

Définition 1.2.2. Deux cellule $[x, y, z]$ et $[r, s, t]$ sont **adjacentes** si

$$|x - r| + |y - s| + |z - t| = 1.$$

Sur la Figure 1.14, dans le premier exemple (à gauche) les deux cellules sont adjacentes. Dans les deux autres exemples, les cellules ne sont pas adjacentes, mais seulement connectées par une arête ou un point.

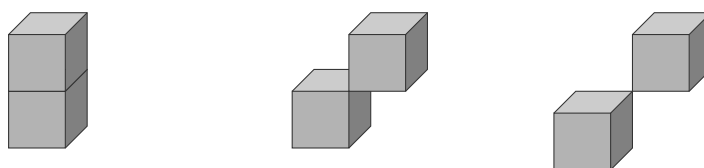


FIGURE 1.14 – Cellules adjacentes et non-adjacentes.

Définition 1.2.3. Un **point d'articulation** (resp. **arête d'articulation**) est un point (resp. une arête) dont la suppression entrainerait la création de deux composantes connexes disjointes.

Définition 1.2.4. Deux cellules $[x, y, z]$ et $[r, s, t]$ sont **connectées**, s'il existe une suite finie de cellules a_1, \dots, a_k , $k \geq 2$, telle que pour $1 \leq i \leq k - 1$, a_i et a_{i+1} sont adjacentes et $a_1 = [x, y, z]$ et $a_k = [r, s, t]$.

À partir de l'adjacence et la connexion, on peut définir un polycube.

Définition 1.2.5. Un **polycube** est un ensemble fini de cellules, tel que tout couple de cellules est connecté.

Un exemple de polycube est donné sur la Figure [1.15](#).

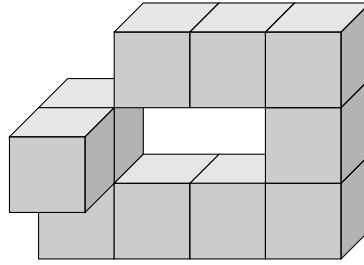


FIGURE 1.15 – Exemple d'un polycube.

Comme pour un polyomino, on peut aussi définir un polycube comme étant un ensemble fini connexe de cellules sans point et arête d'articulation.

On définit aussi une translation d'un polycube de la même façon.

Définition 1.2.6. Une **translation- (p, q, r)** d'un polycube P est une transformation de \mathbb{R}^3 dans lui même, qui associe à chaque cellule $[x, y, z]$ d'un polycube S , la cellule $[x + p, y + q, z + r]$, avec $p, q, r \in \mathbb{N}$.

De cette définition, nous introduisons la notion de polycubes fixés.

Définition 1.2.7. Les polycubes **fixés** sont l'ensemble des polycubes définis à translation près.

Dans la suite du document, tout comme pour le cas à 2 dimensions, nous ne considérons que les polycubes fixés que nous appellerons polycubes.

Les paramètres définis sur les polyominos peuvent être étendus aux polycubes, dans \mathbb{R}^3 avec le repère orthonormé $(0, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$.

Définition 1.2.8. Le **volume** d'un polycube est égal au nombre de ses cellules.

Le polycube de la Figure [1.16](#) a un volume égal à 12.

Définition 1.2.9. La **largeur** d'un polycube P est égale à

$$\max_{[x,y,z] \in P} (x) - \min_{[x,y,z] \in P} (x) + 1.$$

Définition 1.2.10. La **hauteur** d'un polycube P est égale à

$$\max_{[x,y,z] \in P} (y) - \min_{[x,y,z] \in P} (y) + 1.$$

Définition 1.2.11. La **profondeur** d'un polycube P est égale à

$$\max_{[x,y,z] \in P} (z) - \min_{[x,y,z] \in P} (z) + 1.$$

Ainsi le polycube de la Figure 1.16 est de largeur 2, hauteur 4 et profondeur 5.

Introduisons maintenant un nouveau paramètre, celui-ci étant une généralisation du périmètre dans le cas convexe.

Définition 1.2.12. *Le **demi-périmètre** d'un polycube est égal à la somme de la largeur, la hauteur et la profondeur.*

Par exemple, le polycube de la Figure 1.16 a un demi-périmètre égal à 11.

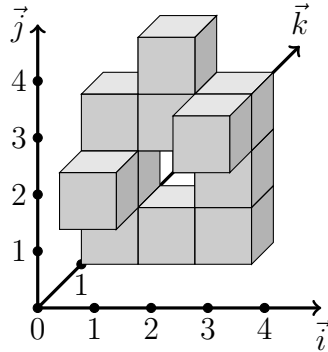


FIGURE 1.16 – Polycube d'aire 11, largeur 3, hauteur 4 et profondeur 2.

Généralisons maintenant la notion de direction.

Définition 1.2.13. *Un pas **Est** (resp. **Nord**, **Avant**) est un déplacement positif d'une unité selon \vec{i} (resp. \vec{j} , \vec{k}).*

Définition 1.2.14. *Un polycube est **Nord-Est-Avant dirigé** si, à partir d'une cellule distinguée appelée racine, on peut atteindre n'importe quelle cellule avec un chemin composé des pas Est, Nord et Avant.*

Le polycube de la Figure 1.17 est Nord-Est-Avant dirigé puisque toutes ses cellules peuvent être atteintes à partir de la racine (cellule contenant le point rouge) en empruntant un chemin composé uniquement de pas Nord, Est et Avant. Ces chemins sont représentés en rouge.

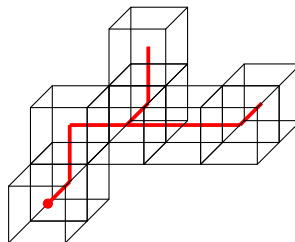


FIGURE 1.17 – Un polycube dirigé avec les différents chemins.

Comme pour les polyominos, on peut définir plusieurs autres directions comme les directions Sud, Ouest et Arrière.

Aussi, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté, on notera *dirigé* au lieu de Nord-Est-Avant dirigé. C'est la définition la plus courante de direction sur les polycubes.

Les convexités des polycubes sont définies par rapport aux différents plans.

Définition 1.2.15. *Un polycube est **verticalement** (resp. **horizontalement**, **anti-verticalement**) **convexe** si son intersection avec tout plan vertical (\vec{i}, \vec{j}) (resp. (\vec{i}, \vec{k}) , (\vec{j}, \vec{k})) est un polyomino verticalement convexe.*

Une illustration d'un polycube verticalement convexe est donnée sur la Figure [1.18](#).

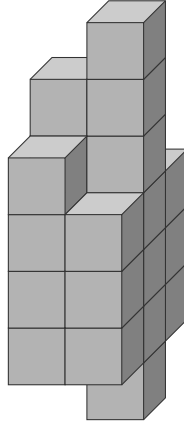


FIGURE 1.18 – Exemple d'un polycube verticalement convexe.

Remarque 1.2.1. *Tout comme les polyominos, les polycubes verticalement et horizontalement convexe sont équivalents. On peut obtenir les premiers en faisant une rotations des seconds, ou réciproquement.*

Définition 1.2.16. *Un polycube est **convexe** s'il est à la fois verticalement, horizontalement et anti-verticalement convexe.*

La généralisation de la colonne peut se faire de la façon suivante.

Définition 1.2.17. *Une **strate** est un polycube de largeur 1.*

Un exemple d'une strate est donné sur la Figure [1.19](#)

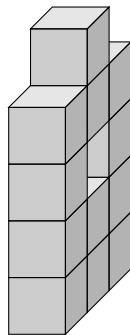


FIGURE 1.19 – Exemple d'une strate.

Un cas particulier de la strate est le plateau.

Définition 1.2.18. *Un **plateau** est une strate rectangulaire.*

Un plateau est donné sur la Figure [1.20](#)

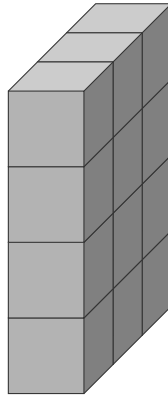


FIGURE 1.20 – Exemple d’une strate.

À partir des plateaux, plusieurs familles de polycubes peuvent être définies.

Définition 1.2.19. *Un **polycube plateau** est un polycube dont chaque strate est un plateau.*

Cette définition est illustrée sur la Figure [1.21](#)

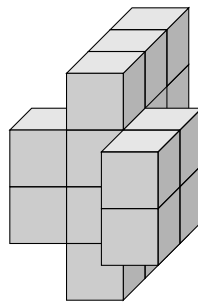


FIGURE 1.21 – Exemple d’un polycube plateau.

Définition 1.2.20. *Un **polycube plateau dirigé** est un polycube dirigé dont chaque strate est un plateau.*

Un exemple est donné sur la Figure [1.22](#).

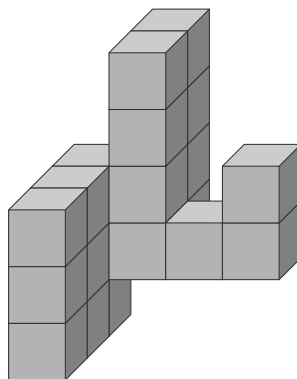


FIGURE 1.22 – Exemple d’un polycube plateau dirigé.

Définition 1.2.21. *Un polycube **plateau convexe** est un polycube convexe dont chaque strate est un plateau.*

Un exemple est donné sur la Figure [1.23](#).

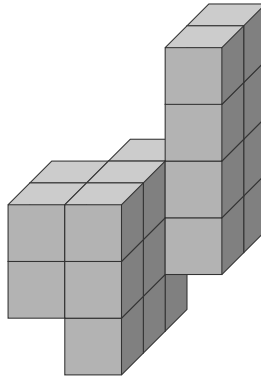


FIGURE 1.23 – Exemple d'un polycube plateau convexe.

Définition 1.2.22. *Un polycube **plateau convexe dirigé** est un polycube convexe et dirigé dont chaque strate est un plateau.*

Un exemple est donné sur la Figure [1.24](#).

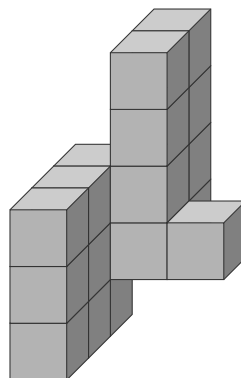


FIGURE 1.24 – Exemple d'un polycube convexe dirigé.

Une autre famille est celle des polycubes parallélogrammes.

Définition 1.2.23. *Un polycube **parallélogramme** est un polycube convexe, Nord-Est-Avant et Sud-Ouest-Arrière dirigé.*

Un exemple d'un polycube parallélogramme est donné sur la Figure [1.25](#).

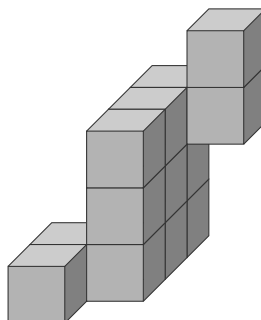


FIGURE 1.25 – Exemple d'un polycube parallélogramme.

On peut aussi les définir en utilisant les faces, en supposant le polycube mis dans la partie positif de l'espace (O, \vec{i}, \vec{j}) .

Définition 1.2.24. La face **avant** (resp. **arrière**) d'un plateau est le côté le plus proche (resp. éloigné) du plan (O, \vec{i}, \vec{j}) .

La **base** (resp. **sommet**) d'un plateau est définie comme étant le côté le plus proche (resp. éloigné) du plan (O, \vec{i}, \vec{k}) .

Définition 1.2.25. Un polycube parallélogramme est un polycube dont les niveaux des faces avant, des faces arrière, des bases et des sommets forment des suites croissantes.

Un cas particulier des polycubes parallélogrammes est les polycubes espaliers.

Définition 1.2.26. Un polycube **espazier** est un polycube parallélogramme dont les niveaux des bases et des faces arrière sont constantes.

Un polycube espazier est donné sur la Figure 1.26

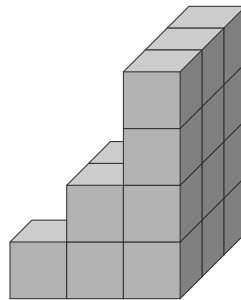


FIGURE 1.26 – Exemple d'un polycube espazier.

1.3 Polyhypercubes

Les polycubes peuvent être généralisés en dimension $d \geq 4$. Ces objets, appelés **polyhypercubes**, sont similaires aux polycubes.

Définition 1.3.1. Dans \mathbb{R}^d muni du repère orthonormé $(0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_k)$, une **cellule** est un hypercube unitaire, dont les côtés sont parallèles aux hyperplans formés par les axes des coordonnées et dont le point arrière pour chaque i_j , $1 \leq j \leq d$, est un point $(x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{N}^3$.

Une cellule est alors identifiée par son point arrière pour chaque i_j , $1 \leq j \leq d$, que nous noterons $[x_1, x_2, \dots, x_d]$.

Définition 1.3.2. Deux cellules $[x_1, x_2, \dots, x_d]$ et $[y_1, y_2, \dots, y_d]$ sont **adjacentes** si

$$|x_1 - y_1| + |x_2 - y_2| + \dots + |x_d - y_d| = 1.$$

Définition 1.3.3. Deux cellules $[x_1, x_2, \dots, x_d]$ et $[y_1, y_2, \dots, y_d]$ sont **connectées** s'il existe une suite finie de cellules a_1, \dots, a_k , $k \geq 2$, telle que pour $1 \leq i \leq k - 1$, a_i et a_{i+1} sont adjacentes et $a_1 = [x_1, x_2, \dots, x_d]$ et $a_k = [y_1, y_2, \dots, y_d]$.

À partir de l'adjacence et la connexion, on peut définir un polyhypercube.

Définition 1.3.4. Un *polyhypercube* est un ensemble fini de cellules, tel que tout couple de cellules est connecté.

La translation est définie de façon similaire que pour les polyominos et les polycubes.

Aussi comme pour les cas des polyominos et polycubes, nous nous intéressons seulement au cas **fixé**.

Les paramètres définis sur un polycube peuvent être étendus sur un polyhypercube, dans \mathbb{R}^n repère orthonormé $(0, \vec{i}_1, \vec{i}_2, \dots, \vec{i}_d)$.

Définition 1.3.5. L'*hypervolume* d'un polyhypercube est le nombre de ses cellules.

Définition 1.3.6. La *largeur* d'un polyhypercube H est égale à

$$\max_{[x_1, x_2, \dots, x_d] \in H} (x_1) - \min_{[x_1, x_2, \dots, x_d] \in P} (x_1) + 1.$$

Définition 1.3.7. La $j^{\text{ème}}$ *hauteur* d'un polyhypercube H , $2 \leq j \leq d$, est égale à

$$\max_{[x_1, x_2, \dots, x_d] \in H} (x_j) - \min_{[x_1, x_2, \dots, x_d] \in P} (x_j) + 1.$$

Généralisons maintenant la notion de direction.

Définition 1.3.8. Un pas de *direction* j est un déplacement positif d'une unité selon \vec{i}_j avec $1 \leq j \leq d$.

Définition 1.3.9. Un polyhypercube est *dirigé* si, à partir d'une cellule distinguée appelée racine, on peut atteindre n'importe quelle cellule avec un chemin composé des pas de direction j .

La généralisation des polycubes plateaux dirigé se fait en introduisant les hyperplateau.

Définition 1.3.10. Une *hyperstrate* (ou *strate* lorsqu'il n'y a pas d'ambigüité) est un polyhypercube de largeur 1.

Un cas particulier de l'hyperstrate est l'hyperplateau.

Définition 1.3.11. Un *hyperplateau* est une hyperstrate rectangulaire.

À partir des définitions de direction et d'hyperplateau, on peut définir les polyhypercubes plateaux dirigés.

Définition 1.3.12. Un polyhypercube *plateau dirigé* est un polyhypercube dirigé dont chaque hyperstrate est un hyperplateau.

Les polyhypercubes parallélogrammes se généralisent aussi pour une dimensions $d \geq 4$. Nous commençons par définir les bases et les sommets dans un polyhypercube.

Définition 1.3.13. Dans un polyhypercube la **base** (resp. **sommet**) selon \vec{i}_j , est le côté le plus proche (resp. éloigné) de l'hyperplan $(0, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{j-1}, \vec{i}_{j+1}, \dots, \vec{i}_d)$, avec $j = 1, \dots, d - 1$.

La **base** (resp. **sommet**) selon \vec{i}_d , est le côté le plus proche (resp. éloigné) de l'hyperplan $(0, \vec{i}_1, \dots, \vec{i}_{d-1})$.

Définition 1.3.14. Un polyhypercube parallélogramme est un polyhypercube dont les niveaux des bases et des sommets selon j , $1 \leq j \leq d$ forment des suites croissantes.

1.4 Outils d'énumération

Donnons ici quelques notions mathématiques qui nous seront utiles par la suite.

Commençons par les coefficients binomiaux.

Définition 1.4.1. On appelle coefficient binomial de n , k , que l'on note $\binom{n}{k}$, le nombre de façons de choisir k sous-ensembles d'un ensemble à n éléments. Sa valeur est donnée par l'expression suivante :

$$\binom{n}{k} = \begin{cases} \frac{n!}{k!(n-k)!}, & \text{pour } 0 \leq k \leq n, \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Le deuxième objet, qui nous sera utile, est la série génératrice ordinaire.

Définition 1.4.2. Une série formelle en $X = x_1, \dots, x_k$ sur \mathbb{R} est l'expression

$$\sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} a_{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}.$$

où a_{n_1, \dots, n_k} sont des éléments de \mathbb{R} .

Définition 1.4.3. La série génératrice ordinaire d'une suite $P(x_1, \dots, x_k)$ est la série formelle qui code la suite $a_{n_1, \dots, n_k} \in \mathbb{N}$:

$$P(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} a_{n_1, \dots, n_k} x_1^{n_1} \cdots x_k^{n_k}.$$

Un autre type de série génératrice est donné dans la définition suivante.

Définition 1.4.4. La série génératrice de Dirichlet d'une suite $a_{n_1, \dots, n_k} \in \mathbb{N}$ est la série formelle définie par :

$$D(x_1, \dots, x_k) = \sum_{n_1, \dots, n_k \geq 1} \frac{a_{n_1, \dots, n_k}}{n_1^{x_1} \cdots n_k^{x_k}}.$$

Un cas particulier des série génératrice de Dirichlet appelé Zeta multiple, a été introduit par Hoffman [52]

Définition 1.4.5. La fonction Zeta multiple est définie par :

$$\zeta_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{n_1 > n_2 > \dots > n_k \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \cdots n_k^{x_k}}.$$

Pour $k = 1$ nous obtenons la *fonction zeta de Riemann*.

Plus de détails et de propriétés sur les séries génératrice peuvent être trouvés dans [77].

Définition 1.4.6. Pour $n \geq 0$, on dénote par F_n le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci défini par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, et $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$ pour $n \geq 2$.

Chapitre 2

Énumération des polycubes plateaux selon l'aire latérale

2.1 Introduction

Les polyominos verticalement convexes dirigés ont été introduits en 1965 par Klarner [55]. Il a montré que leur série génératrice selon l'aire (codée par q) est égal à

$$\frac{q(1-q)}{1-3q+q^2} = \sum_{n \geq 1} F_{2n-1} q^n,$$

où F_n dénote le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci.

D'autres résultats existent pour cette famille. Citons, par exemple, celui de Bousquet-Mélou pour la série génératrice selon l'aire (codée par q), la largeur (codée par x) et le périmètre vertical (codé par y) :

$$y \frac{L_1}{L_0},$$

où

$$L_0 = 1 - \sum_{n \geq 1} \frac{x^n (y-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_n (yq)_{n-1} (yq)_n}$$

et

$$L_1 = \sum_{n \geq 1} \frac{x^n (y-1)^{n-1} q^{\binom{n+1}{2}}}{(q)_{n-1} (yq)_{n-1} (yq)_n} \quad [15].$$

Dans le cas des polyominos verticalement convexes sans contrainte de direction, la série génératrice a été donnée par Temperley [74] en 1956 selon l'aire.

Une généralisation de ces polyominos en dimension 3 sont *polycubes plateaux dirigés*, a été introduite en 2013 par Champarnaud *et al.* [24]. Leur série génératrice selon la largeur (codée par t) et le volume (codé par p) est alors égale à

$$G(t, p) = \frac{t \sum_{k \geq 1} \frac{p^k}{1-p^k}}{1 - \sum_{k \geq 1} \frac{kt p^k}{(1-p^k)^2}}.$$

Le même résultat ainsi que sa généralisation en dimension ont été trouvés en 2015 par Carré *et al.* [22]. Ils ont aussi donné une expression de la série génératrice pour les polycubes plateaux.

Dans ce chapitre, nous allons introduire le paramètre de l'aire latérale qui est obtenu en projetant les polycubes sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{i}, \vec{k}) . En exploitant la propriété de l'unicité des projections des polycubes plateaux, nous énumérons les familles de polycubes plateaux et les polycubes plateaux dirigés selon ce nouveau paramètre et la largeur. Enfin, ces résultats seront généralisés pour une dimension quelconque. Ce travail a été publié dans l'article [4].

2.2 L'aire latérale

On commence par définir le nouveau paramètre sur un polycube.

Définition 2.2.1. *L'aire latérale d'un polycube est la somme des aires de ses projections sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{i}, \vec{k}) .*

Un exemple d'un polycube et ses projections est donné sur la Figure 2.1.

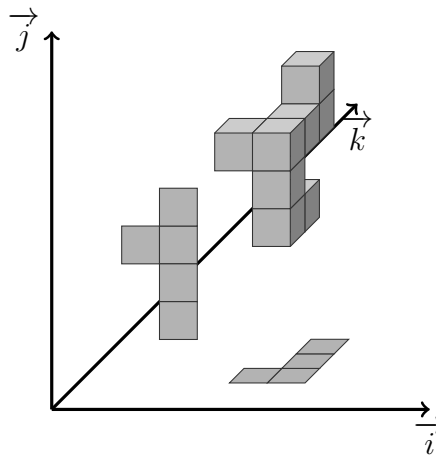


FIGURE 2.1 – Exemple d'un polycube de largeur 2 et d'aire latérale 9.

Deux polycubes ayant le même volume n'ont pas nécessairement les mêmes aires latérales, voir Figure 2.2.



FIGURE 2.2 – Polycubes avec le même volume et d'aires latérales différents.

2.3 Énumération des polycubes plateaux dirigés selon la largeur et l'aire latérale

Avant d'énumérer les polycubes plateaux dirigés, commençons par caractériser leurs projections sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{i}, \vec{k}) .

Le lemme suivant donne un résultat sur les projections.

Lemme 2.3.1. *La projection d'un polycube plateau dirigé sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{i}, \vec{k}) donne un polyomino verticalement convexe dirigé sur chaque plan. À chaque couple de polyomino verticalement convexe dirigé ayant la même largeur, correspond un unique polycube plateau dirigé, et réciproquement.*

Preuve. La projection de chaque plateau donne une colonne dans chaque plan. Les polyominos obtenus sont donc des polyominos verticalement convexes. De plus, comme le polycube est dirigé, la cellule la plus en bas de chaque colonne (sauf la plus à gauche) est collée à la colonne qui est à sa gauche. De ce fait, les polyominos sont dirigés. Inversement, en partant de deux polyominos verticalement convexes, on construit un polycube tel que :

- La hauteur (resp. profondeur) du $i^{\text{ème}}$ plateau est égale à la hauteur de la $i^{\text{ème}}$ colonne du premier (resp. deuxième) polyomino.
- Si la racine de la $(i + 1)^{\text{ème}}$ colonne du premier (resp. deuxième) polyomino est collée à la $j^{\text{ème}}$ (resp. $k^{\text{ème}}$) cellule de la colonne i , alors la racine du $(i + 1)^{\text{ème}}$ plateau est collé à la cellule de ligne j et colonne k du $i^{\text{ème}}$ plateau.

Ces deux conditions assurent que le polycube obtenu est un polycube plateau et dirigé. \square

Notons qu'un polycube plateau dirigé peut aussi être construit à partir de deux polyominos verticalement convexes dirigés en utilisant des opérations qui apparaissent dans les modèles géométriques de validation en temps-réel. La première de ces opérations est l'extrusion.

$$\text{Extr} : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^m & \times \mathbb{R} & \rightarrow \mathbb{R}^{m+1} \\ (x - 1, \dots, x_m) & , y & \rightarrow (x - 1, \dots, x_m, y) \end{array} \quad [27]$$

Cette opération génère un volume à partir de ses bases en fonction de la direction de construction. Pour obtenir le polycube plateau dirigé, il suffit d'extruder chacun des 2 polyominos et ensuite d'intersecter les extrusions.

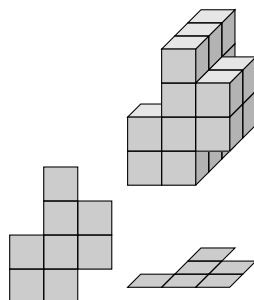


FIGURE 2.3 – Polycube plateau dirigé de largeur 3 et d'aire latérale 14.

Le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés est connu et est donné dans le lemme suivant,

Lemme 2.3.1. [34] *Pour $1 \leq k \leq n$, le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés de largeur k et d'aire n est*

$$\binom{n+k-2}{n-k}.$$

À partir de ce lemme on peut déduire le théorème suivant.

Théorème 2.3.1. *Soit $s_{k,n}$ le nombre de polycubes plateaux dirigés de largeur k et d'aire latérale n . Alors, pour $k \geq 1$ et $n \geq 2k$, on a*

$$s_{k,n} = \sum_{i=k}^{n-k} \binom{i+k-2}{i-k} \binom{n-i+k-2}{n-i-k}.$$

Preuve. Par définition, l'aire latérale d'un polycube plateau dirigé est la somme des aires des deux polyominos verticalement convexes dirigés obtenus par la projection des polycubes sur les plans (O, \vec{i}, \vec{j}) et (O, \vec{i}, \vec{k}) . Si un polycube a une largeur k et une aire latérale n , alors les deux polyominos sont de largeur k et si l'aire de l'un d'eux est i alors l'aire de l'autre est $n - i$.

D'après le Lemme [2.3.1], le nombre de polyominos verticalement convexes d'aire i de largeur k est égal à

$$\binom{i+k-2}{i-k}.$$

Donc, en utilisant le principe de multiplication, le nombre de polycubes plateaux dirigés, d'aire latérale n de largeur k et dont les projections sur le plan (\vec{i}, \vec{j}) donne un polyomino d'aire i et les projections sur le plan (\vec{i}, \vec{k}) donne un polyomino d'aire $n - i$, est égal à

$$\binom{i+k-2}{i-k} \binom{n-i+k-2}{n-i-k}.$$

En sommant sur toutes les valeurs possibles de i , on obtient la formule. □

À partir du Théorème [2.3.1] et des propriétés du coefficient binomial, on déduit l'expression explicite suivante :

Théorème 2.3.2. *Soit $k \geq 1$ et $n \geq 2k$,*

$$s_{k,n} = \binom{n+2k-3}{n-2k}.$$

Preuve. D'après le Théorème [2.3.1], on a

$$s_{k,n} = \sum_{i=k}^{n-k} \binom{i+k-2}{i-k} \binom{n-i+k-2}{n-i-k}.$$

En posant $j = i - k$, $m = n - 2k$ et $a = 2k - 2$, on obtient

$$s_{k,n} = \sum_{j=0}^m \binom{j+a}{j} \binom{a+m-j}{m-j}.$$

Une variante de la convolution de Vandermonde [67] est

$$\sum_{j=0}^m \binom{j+a}{j} \binom{a+m-j}{m-j} = \binom{2a+m+1}{m}.$$

En remplaçant a , j et m par leur valeur, on obtient la formule. □

Du Théorème 2.3.1, on peut déduire la formule suivante pour $S_k(t)$, la série génératrice des polycubes plateaux dirigés de largeur k selon l'aire latérale (codée par t) :

$$S_k(t) = \sum_{n \geq 0} s_{k,n} t^n.$$

Par convention, $S_0(t) = 0$.

Pour $i \leq k$ et $i \geq n - k$, $s_{k,n} = 0$. Donc

$$\begin{aligned} S_k(t) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{i=0}^n \binom{i+k-2}{i-k} \binom{n-i+k-2}{n-i-k} t^n \\ &= \left(\sum_{m \geq 0} \binom{m+k-2}{m-k} t^m \right) \left(\sum_{l \geq 0} \binom{l+k-2}{l-k} t^l \right). \end{aligned}$$

Barcucci *et al.* [10] ont montré que la série génératrice des polyominos verticalement convexes de largeur k est égal à

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n+k-2}{n-k} t^n = \frac{t^k}{(1-t)^{2k-1}}.$$

En remplaçant cette dernière formule dans l'équation de $S(k)$, on obtient la proposition suivante.

Proposition 2.3.1. *Soit $k \geq 1$, alors $S_k(t)$ vérifie*

$$S_k(t) = \frac{t^{2k}}{(1-t)^{4k-2}}.$$

Posons

$$S(x, t) := \sum_{k \geq 1} S_k(t) x^k.$$

La série génératrice des polycubes plateaux dirigés selon l'aire latérale (codée par t) et la largeur (codée par x) est alors égale à :

$$S(x, t) = \frac{xt^2(1-t)^2}{(1-t)^4 - xt^2}.$$

Notons $S(t)$ la valeur $S(1, t)$. Nous obtenons alors le résultat suivant.

Théorème 2.3.3. *Une expression de $S(t)$, la série génératrice des polycubes plateaux dirigés selon l'aire latérale est*

$$S(t) = \frac{t^2(1-t)^2}{(1-t)^4 - t^2}.$$

La formule du Théorème 2.3.3 correspond à la suite A113066 du OEIS [72].

En calculant les premières valeurs de $s_{k,n}$, on obtient le Tableau 2.1.

De ce tableau, on peut extraire quelques suites du OEIS.

En sommant chaque ligne, on obtient la suite des valeurs absolues des termes de la suite A113066. Pour la démonstration, il suffit de remplacer la variable t par $-t$.

Les colonnes du tableau correspondent respectivement aux suites A000027, A000389, A000582, A010966, A010970, A010974, A010978.

2.4 Énumération des polycubes plateaux selon la largeur et l'aire latérale

Comme pour le cas dirigé, nous devons d'abord caractériser les projections.

D'après [22], nous savons qu'un polycube plateau peut être obtenu à partir de deux polyominos verticalement convexes. Leur largeur est alors égale à la largeur du polycube, similaire à la Figure 2.3).

Le lemme suivant donne une formule pour les polyominos verticalement convexes.

Lemme 2.4.1. [42] *Soit $h_{k,n}$ le nombre de polyominos verticalement convexes de largeur k et d'aire n . Pour $1 \leq k \leq n$, on a :*

$$h_{k,n} = \sum_{i,j \geq 0} \binom{k-i-1}{i} \binom{2k-j-2}{j} \binom{k-2i-1}{n-k-i-j}.$$

Une conséquence immédiate de ce lemme est le Théorème 2.4.1.

Théorème 2.4.1. *Soit $r_{k,m}$ le nombre de polycubes plateaux de largeur k et d'aire latérale m . Pour $k \geq 1$ et $m \geq 2k$, nous avons la formule de convolution suivante :*

$$r_{k,m} = \sum_{l=k}^{m-k} h_{k,l} h_{k,m-l}.$$

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0	0
5	1	6	0	0	0	0	0
6	1	21	1	0	0	0	0
7	1	56	10	0	0	0	0
8	1	126	55	1	0	0	0
9	1	252	220	14	0	0	0
10	1	462	715	105	1	0	0
11	1	792	2002	560	18	0	0
12	1	1287	5005	2380	171	1	0
13	1	2002	11440	8568	1140	22	0
14	1	3003	24310	27132	5985	253	1
15	1	4368	48620	77520	26334	2024	26
16	1	6188	92378	203490	100947	12650	351
17	1	8568	167960	497420	346104	65780	3276
18	1	11628	293930	1144066	1081575	296010	23751
19	1	15504	497420	2496144	3124550	1184040	142506
20	1	20349	8171908	5200300	8436285	4252145	736281
21	1	26334	1307504	10400600	21474180	14307150	3365856
22	1	33649	2042975	2005830	51895935	44352165	13884156
23	1	42504	31244550	37442160	119759850	129024480	52451256
24	1	53130	6906900	67863915	265182525	354817320	183579396
25	1	65780	10015001	119759850	565722720	927983760	600805296

TABLE 2.1 – Les premières valeurs de $s_{k,n}$, le nombre de polycubes plateaux dirigés de largeur k et d'aire latérale n .

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle du Théorème 2.3.1. Nous utilisons le Lemme 2.4.1 pour le nombre de polyominos verticalement convexes. \square

Du Théorème 2.4.1, nous déduisons la série génératrice pour une largeur k fixée.

Théorème 2.4.2. *Soit $R_k(p)$ la série génératrice des polycubes plateaux de largeur k selon l'aire latérale (codée par p). Alors,*

$$R_k(p) = C_{k-1}(p)^2,$$

où

$$C_k(p) = \frac{p^{k+1}}{(1-p)^{2k+1}} \sum_{i=0}^k D_{k-i,i} p^i.$$

Preuve. La preuve est la même que celle du Théorème 2.3.1. La série génératrice des polyominos verticalement convexes de largeur k selon à l'aire est donnée par

$$\frac{p^k}{(1-p)^{2k-1}} \sum_{i=0}^{k-1} D_{k-i-1,i} p^i \quad [22].$$

\square

Notons que C_k est la série génératrice de la suite anti-diagonale dans le triangle de Tribonacci [29] au niveau k multipliée par le facteur $\frac{p^{k+1}}{(1-p)^{2k+1}}$ (voir Figure 2.4).

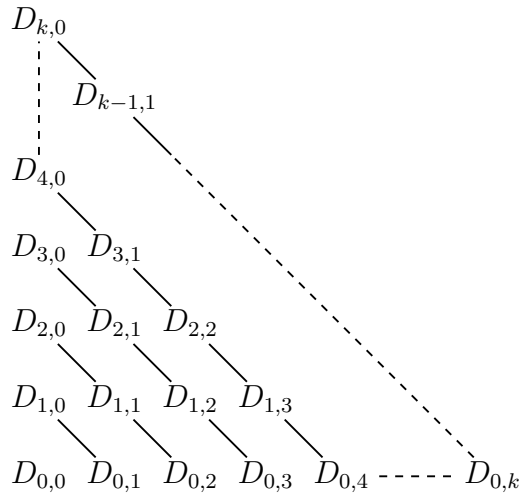


FIGURE 2.4 – Transversale anti-diagonale du triangle de Tribonacci.

Les premières valeurs de $r_{k,m}$ sont données dans le Tableau 2.2.

2.5 Résultats asymptotiques

Dans cette section, nous présentons des résultats obtenus combinatoirement. Ils peuvent aussi être obtenus de façon algébrique à partir du Lemme 2.4.1 et du Théorème 2.4.1.

$m \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7
2	1	0	0	0	0	0	0
3	1	0	0	0	0	0	0
4	1	1	0	0	0	0	0
5	1	8	0	0	0	0	0
6	1	34	1	0	0	0	0
7	1	104	16	0	0	0	0
8	1	259	126	1	0	0	0
9	1	560	666	24	0	0	0
10	1	1092	2701	280	1	0	0
11	1	1968	9052	2152	32	0	0
12	1	3333	26257	12418	498	1	0
13	1	5368	68002	57922	5080	40	0
14	1	8294	160732	229048	38567	780	1
15	1	12376	352352	793144	234178	9960	48
16	1	17927	725153	2462851	1191540	94318	1126
17	1	25312	1414348	6980624	5249012	710584	17304
16	1	34952	2633878	18309136	20506003	4457930	196953
17	1	47328	4711448	44921072	72354830	24048920	1778848
18	1	62985	8135078	103994372	233915707	114248221	13331808
19	1	82536	13613804	228782192	7008599688	486806272	85565538
20	1	106666	22155539	48109488	1964393375	1887595700	481457252
21	1	136136	35165504	971764880	5190268342	6738878720	2418499500
22	1	171787	54569064	1893273221	13010791823	22364636385	11003497968
23	1	214544	82963254	3570426344	31111765764	69550800504	45877909970

TABLE 2.2 – Les premières valeurs de $r_{k,m}$, le nombre de polycubes plateaux de largeur k et d'aire latérale m .

2.5.1 Polyominos verticalement convexes

Soit $h_{k,n}$ le nombre de polyominos verticalement convexes de largeur k et d'aire n . Les premières valeurs sont données dans le Tableau 2.3.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	9	8	1	0	0	0	0	0	0
5	1	16	31	12	1	0	0	0	0	0
6	1	25	85	68	16	1	0	0	0	0
7	1	36	190	260	121	20	1	0	0	0
8	1	49	371	777	604	190	24	1	0	0
9	1	64	658	1960	2299	1180	275	28	1	0
10	1	81	1086	4368	7221	5509	2052	376	32	1

TABLE 2.3 – Les premières valeurs de $h_{k,n}$, le nombre de polyominos verticalement convexes de largeur k et d'aire n .

Quelques valeurs spécifiques sont données dans le théorème suivant.

Théorème 2.5.1.

1. $h_{k,k} = 1$ pour $k \geq 1$.
2. $h_{k,k+1} = 4k - 4$ pour $k \geq 2$.
3. $h_{k,k+2} = 8k^2 - 19k + 16$ pour $k \geq 3$.

Preuve. Les preuves de ces formules sont basées sur un même principe. Nous prenons un polyomino d'aire k et de largeur k . Puis à partir de ce polyomino, nous construisons tous les polyominos d'aire $k + i$ de largeur k en ajoutant i cellules par découpage et collage de façon à obtenir un polyomino. Pour cette raison, nous allons seulement détailler la preuve de $h_{k,k+2}$.

Considérons un polyomino d'aire k et de largeur k et énumérons toutes les façons d'ajouter des cellules pour obtenir un polyomino verticalement convexe. Il y a deux principaux cas :

— Les deux cellules sont ajoutées dans la même colonne :

- * Si nous ajoutons les deux cellules dans la première colonne, nous devons coller la deuxième colonne sur une des 3 cellules de la première colonne. Nous avons alors 3 possibilités (voir Figure 2.5).

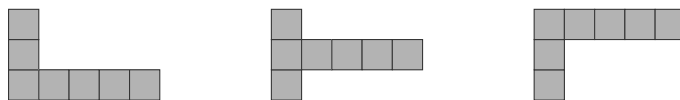


FIGURE 2.5 – Ajout de deux cellule dans la première colonne.

- * Le cas de l'ajout dans la dernière colonne est similaire au cas de l'ajout dans la première colonne. Nous avons donc 3 possibilités.
- * Dans le dernier sous-cas, nous ajoutons deux cellules sur une des $(k-2)$ colonnes du milieu. Nous avons 3 collages possibles à gauche et pour chacun d'eux, nous avons 3 collages possibles à droite. Nous obtenons donc 9 constructions possibles. En sommant pour toutes les colonnes, nous obtenons $9(k-2)$ possibilités (voir Figure 2.6).

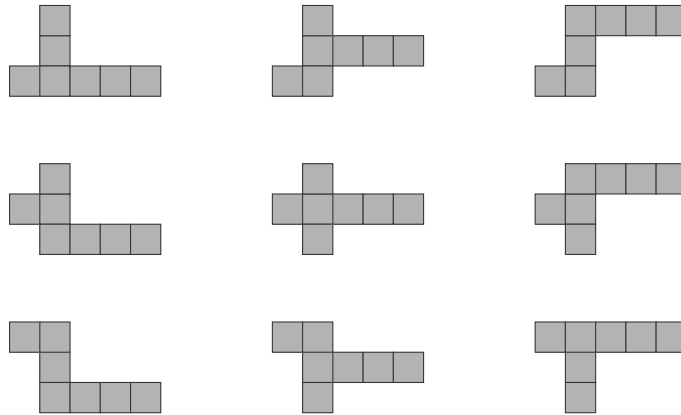


FIGURE 2.6 – ajout de deux cellules dans une colonne du milieu.

- Les deux cellules sont ajoutées dans des colonnes différentes :
 - * Nous ajoutons deux cellules dans deux colonnes consécutives :
 - Nous ajoutons une cellule dans la première colonne et l'autre dans la deuxième. Nous avons 3 collages entre la première et la deuxième colonne (les deux sont de hauteur 2) et nous en avons 2 à droite de la deuxième colonne. Il y a donc 6 possibilités (voir Figure 2.7).
 - Une cellule est ajoutée dans la dernière colonne et la seconde dans l'avant-dernière colonne. Ce sous-cas est semblable au cas de l'ajout sur la première et la deuxième colonne. Il y a 3 collages entre les deux dernières colonnes et 2 à gauche. Nous avons donc 6 possibilités.

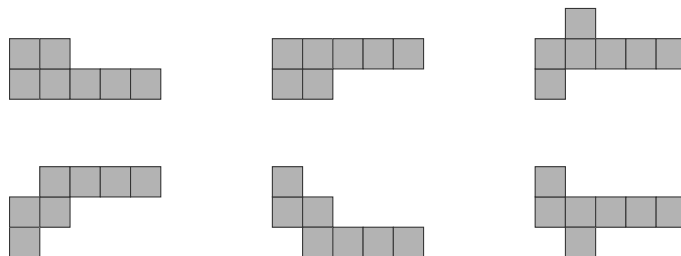


FIGURE 2.7 – Ajout d'une cellule dans la première et la deuxième colonne.

- Les deux cellules sont ajoutées dans deux colonnes consécutives différentes de la première et la dernière. Nous avons 3 collages possibles entre les deux colonnes choisies. Nous avons aussi 2 collages à gauche et 2 à droite, ce qui

donne 12 collages possibles. En sommant les collages pour toutes les colonnes possibles, nous obtenons $12(k - 3)$ possibilités (voir Figure 2.8).

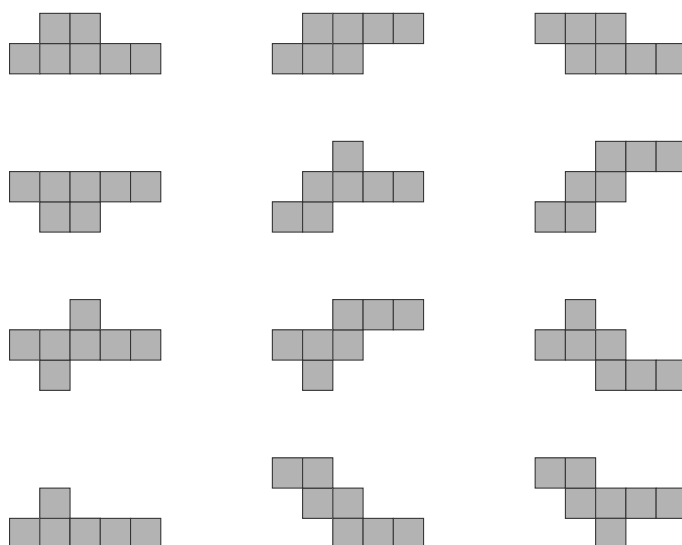


FIGURE 2.8 – Ajout de deux cellules dans deux colonnes consécutives différentes de la première et la dernière.

* Si on ajoute deux cellules dans deux colonnes non-consécutives, nous avons les sous-cas suivants :

- ▶ Une cellule est ajoutée dans la première colonne et l'autre dans la dernière colonne. Nous avons 2 collages à droite de la première colonne et deux à gauche de la dernière colonne. Il y a donc 4 possibilités dans ce sous-cas (voir Figure 2.9).

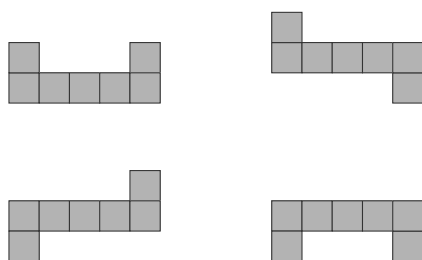


FIGURE 2.9 – Ajout de deux cellules dans la première et dernière colonne.

- ▶ Une cellule est ajoutée dans la première colonne et la seconde cellule dans une colonne du milieu différente de la deuxième. Nous avons 2 collages à droite de la première colonne. Pour l'autre colonne, nous en avons 2 à droite et 2 à gauche. Ceci donne 8 collages possibles. En sommant pour tous les ajouts possibles sur une colonne du milieu différente de la deuxième, nous obtenons $8(k - 3)$ possibilités (voir Figure 2.10).

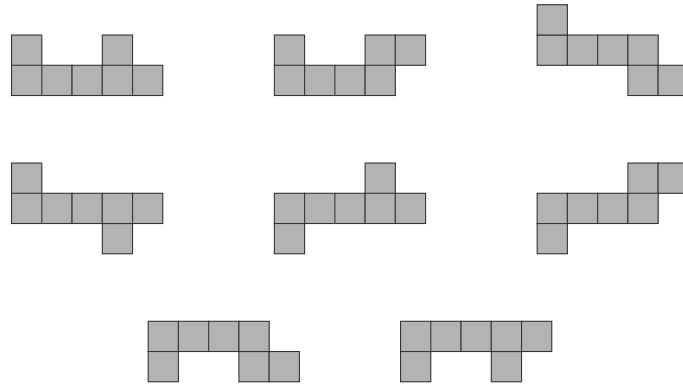


FIGURE 2.10 – Ajout de deux cellules dans la première colonne et dans une colonne du milieu différente de la deuxième.

- ▶ Une cellule est ajoutée dans la dernière colonne et une autre dans une colonne du milieu différente de l'avant-dernière. Ce sous-cas est similaire au précédent et nous avons $8(k - 3)$ possibilités.
- ▶ Le sous-cas où deux cellules sont ajoutées dans deux colonnes non-consécutives différentes de la première et la dernière et équivalent au pavage linéaire de longueur $1 \times (k - 1)$ avec deux dominos et $k - 5$ carrés (voir Figure 2.11).



FIGURE 2.11 – Un pavage linéaire et son polyomino équivalent.

Le nombre de $1 \times n$ pavages utilisant exactement j dominos est

$$\binom{n-j}{j}, (j = 0, 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor) \quad [14].$$

Dans ce sous-cas $n = k - 1$ et $j = 2$. Donc nous avons $\binom{k-3}{2}$ possibilités de choisir deux colonnes non consécutives différentes de la première et la dernière. Pour chaque collage, nous avons 16 constructions différentes. En sommant sur toutes les colonnes possibles, nous obtenons $16 \binom{k-3}{2}$ possibilités (voir Figure 2.12).

En sommant tous les cas, nous obtenons $8k^2 - 19k + 16$ possibilités.

□

Dans le cas général, nous avons la formule du théorème suivant.

Théorème 2.5.2. $h_{k,k+i}$ est un polynôme de degré i dont le terme de plus haut degré est $\frac{4^i}{i!} k^i$ pour $k \geq i$.

Preuve. Considérons un polyomino de largeur k et d'aire k et énumérons toutes les possibilités d'ajout de i cellules.

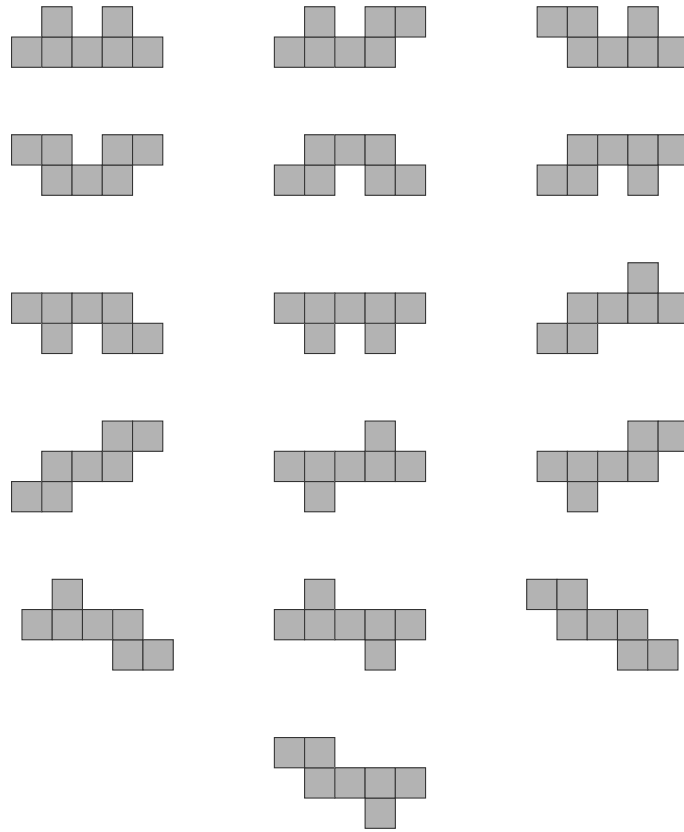


FIGURE 2.12 – Ajout de deux cellules dans deux colonnes non consécutives.

Si nous ajoutons i cellules sur i colonnes non-consécutives différentes de la première et la dernière, ça reviendrait à trouver le nombre de pavages linéaires de longueur $1 \times (k - 1)$ avec deux dominos et i carrés. Nous avons donc $\binom{k-i-1}{i}$ choix de colonne. Pour chaque choix, nous avons 4^i collages possibles. Nous avons donc $4^i \binom{k-i-1}{i}$ possibilités.

L'expression $4^i \binom{k-i-1}{i}$ est un polynôme de degré i dont le terme de plus haut degré est $\frac{4^i}{i!} k^i$.

Dans tous les autres cas d'ajout de cellules dans des colonnes avec au moins deux consécutives, nous avons $\binom{k-2}{i} - \binom{k-i-1}{i}$ choix possibles de colonnes. L'expression $\binom{k-2}{i} - \binom{k-i-1}{i}$ est un polynôme de degré $i - 1$.

Dans les cas restants, nous choisissons au maximum $i - 1$ colonnes, ce qui implique un polynôme de degré inférieur ou égal à i .

□

Du Théorème [2.5.2](#) et les premières valeurs de $h_{k,n}$, nous obtenons le corollaire suivant après avoir calculé l'interpolation polynomiale.

Corollaire 2.5.1.

$$h_{k,k+3} = \frac{32}{3}k^3 - 44k^2 + \frac{268}{3}k - 76 \text{ pour } k \geq 4.$$

$$h_{k,k+4} = \frac{32}{3}k^4 - \frac{200}{3}k^3 + \frac{1403}{6}k^2 - \frac{2717}{6}k + 384 \text{ pour } k \geq 5.$$

$$h_{k,k+5} = \frac{128}{15}k^5 - \frac{224}{3}k^4 + \frac{1174}{3}k^3 - \frac{3784}{3}k^2 + \frac{35522}{15}k - 2004 \text{ pour } k \geq 6.$$

$$h_{k,k+6} = \frac{256}{45}k^6 - \frac{992}{15}k^5 + \frac{4292}{9}k^4 - \frac{13427}{6}k^3 + \frac{617753}{90}k^2 - \frac{189503}{15}k + 10672$$

pour $k \geq 7$.

2.5.2 Polycubes plateaux

Dans le cas des polycubes plateaux, le raisonnement est similaire à celui utilisé pour les polyominoes verticalement convexes.

Soit $r_{k,m}$ le nombre de polycubes plateaux de largeur k et d'aire latérale m .

Théorème 2.5.3.

1. $r_{k,2k} = 1$, avec $k \geq 1$.
2. $r_{k,2k+1} = 8k - 8$, avec $k \geq 2$.
3. $r_{k,2k+2} = 32k^2 - 70k + 48$, avec $k \geq 3$.

Preuve. La preuve de ces formules est basée sur le même principe. Pour construire un polycube plateau de largeur k et d'aire latérale $2k + i$, on commence par construire deux polyominoes de largeur k et d'aire k . Ensuite, nous énumérons toutes les façons d'ajouter i cellules dans les deux polyominoes. Pour chaque couple de polyominoes verticalement convexes, on associe un unique polycube plateau. Nous détaillerons la preuve de $r_{k,2k+2}$.

Considérons deux polyominoes d'aire k et de largeur k et énumérons toutes les façons d'ajouter deux cellules aux polyominoes pour obtenir deux polyominoes verticalement convexes. Nous avons les cas suivants :

- Une cellule est ajoutée dans le premier polyomino et l'autre dans le second, de la même façon que dans le Théorème 2.5.1. Nous avons $4k - 4$ possibilités de construction pour chaque polyomino. Donc, nous obtenons $(4k - 4)^2$ possibilités.
- Les deux cellules sont ajoutées dans le même polyomino. Ce cas est énuméré dans le Théorème 2.5.1. Donc, nous obtenons $2 \times (8k^2 - 19k + 16)$ possibilités.

En sommant tous les cas, nous obtenus le résultat. □

Théorème 2.5.4. $r_{k,2k+i}$ est un polynôme de degré i dont le terme de plus haut degré est $\frac{8^i}{i!}k^i$ pour $k \geq i$.

Preuve. Considérons deux polyominos d'aire k et de largeur k et énumérons toutes les façons d'ajouter i cellules dans un ou les deux polyominos pour former des polyominos verticalement convexes.

À chaque couple de polyominos verticalement convexes, nous associons un unique polycube plateau, d'après la propriété de projection des polycubes plateau [22].

Si nous ajoutons j cellules dans le premier polyomino, le nombre de possibilités est un polynôme de degré j avec le coefficient de k^j égal à $\frac{4^j}{j!}$, d'après le Théorème 2.5.2.

Ajoutons maintenant les $i - j$ cellules restantes dans le second polyomino, le nombre de possibilités est un polynôme de degré $i - j$ avec le coefficient de k^{i-j} égal à $\frac{4^{i-j}}{(i-j)!}$.

Le nombre de possibilités pour ajouter i cellules dans les deux polyominos est alors un polynôme de degré i avec le coefficient de k^i est $\frac{4^i}{j!(i-j)!}$.

En sommant les coefficients de k^i pour tous les j 's possibles nous obtenons,

$$\sum_{j=0}^i \frac{4^i}{j!(i-j)!} = 4^i \sum_{j=0}^i \frac{1}{j!(i-j)!} = \frac{4^i}{i!} \sum_{j=0}^i \frac{i!}{j!(i-j)!} = \frac{4^i 2^i}{i!} = \frac{8^i}{i!}.$$

□

Comme dans la sous-section précédente, en utilisant le Théorème 2.5.4 et les premières valeurs de $r_{k,m}$, nous avons le corollaire suivant après avoir calculé leur interpolation polynomiale,

Corollaire 2.5.2.

$$r_{k,k+3} = \frac{256}{3}k^3 - 304k^2 + \frac{1376}{3}k - 280 \text{ pour } k \geq 4.$$

$$r_{k,k+4} = \frac{512}{3}k^4 - \frac{2624}{3}k^3 + \frac{6454}{3}k^2 - \frac{8509}{3}k + 1632 \text{ pour } k \geq 5.$$

$$r_{k,k+5} = \frac{4096}{15}k^5 - \frac{5632}{3}k^4 + \frac{19888}{3}k^3 - \frac{42104}{3}k^2 + \frac{85888}{5}k - 9512 \text{ pour } k \geq 6.$$

$$r_{k,k+6} = \frac{16384}{45}k^6 - \frac{48128}{15}k^5 + \frac{136256}{9}k^4 - 45444k^3 + \frac{3971986}{45}k^2 - \frac{1543582}{15}k + 55440 \text{ pour } k \geq 7.$$

2.6 Généralisation pour les polyhypercubes

La définition d'aire latérale peut être généralisée pour les polyhypercubes. Nous allons donc dans cette section généraliser les résultats du cas dirigé.

2.6.1 Formule explicite pour les polyhypercubes plateaux dirigés

Tout comme en dimension 3, il est possible de caractériser les polyhypercubes plateaux dirigés de dimension $d \geq 4$ par leur projection sur les plans.

Elle est donnée par le lemme suivant.

Lemme 2.6.1. *Pour $k \geq 1$, $d \geq 4$ et $2 \leq l \leq d$, la projection d'un polyhypercube de largeur k dans le plan (\vec{i}_1, \vec{i}_l) donne un polyomino verticalement convexe dirigé de largeur k .*

Preuve. Pour chaque polycube plateau dirigé, nous associons un $(d-1)$ -uplet de polyominos obtenus par projection du polyhypercube sur les plans (\vec{i}_1, \vec{i}_l) avec $2 \leq l \leq d$.

Soit A un $(d-1)$ -uplet de polyominos verticalement convexes dirigés. Supposons que nous pouvons construire deux polyhypercubes différents. Donc les polyhypercubes sont différents dans au moins un plateau dans (\vec{i}_1, \vec{i}_l) , avec $2 \leq l \leq d$.

Par conséquent les deux polyhypercubes ont des coordonnées différentes en (\vec{i}_1, \vec{i}_l) et leurs projections sur ces plans sont différentes, ce qui contredit l'hypothèse initiale. \square

Des Lemmes [2.3.1](#) et [2.6.1](#), nous déduisons le théorème suivant sur le nombre de polyhypercubes plateaux de dimension d selon la largeur et l'aire latérale.

Théorème 2.6.1. *Soit $p_{d,k,n}$ le nombre de polyhypercubes plateau dirigés de dimension d , largeur k et d'aire latérale n . Pour $d \geq 3$ et $n \geq (d-1)k$,*

$$p_{d,k,n} = \sum_{j_2+j_3+\dots+j_d=n} \prod_{l=2}^d \binom{j_l+k-2}{j_l-k}.$$

Preuve. Si un polyhypercube de dimension d a une largeur k et une aire latérale de n , alors d'après le Lemme [2.6.1](#), chaque une de ses projections dans un plan (\vec{i}_1, \vec{i}_l) donne un polyomino de largeur k et d'aire j_l , avec $j_l \geq k$, pour chaque l tel que $2 \leq l \leq d$. La somme des aires de tous les polyominos obtenus des projections est égale à n .

Du Lemme [2.3.1](#), il est établi que le nombre de polyominos verticalement convexes dirigés de largeur k et d'aire j_l est donc égal à $\binom{j_l+k-2}{j_l-k}$. Donc, le nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension d , de largeur k et dont les projections sur les plans (\vec{i}_1, \vec{i}_l) donne un polyomino d'aire j_l est $\prod_{l=2}^d \binom{j_l+k-2}{j_l-k}$, avec $2 \leq l \leq d$. La formule est finalement obtenue en sommant pour toutes les valeurs j_l , $2 \leq l \leq d$. \square

Théorème 2.6.2. *Pour $d \geq 3$ et $n \geq (d-1)k$,*

$$p_{d,k,n} = \binom{n+(d-1)k-d}{n-(d-1)k}.$$

Preuve. Prouvons le résultat par récurrence. En dimension 3, le nombre de polycubes plateaux dirigés de largeur k d'aire latérale n est égal à,

$$\binom{n+2k-3}{n-2k}.$$

Supposons maintenant que pour un d donné

$$p_{d,k,n} = \binom{n + (d-1)k - d}{n - (d-1)k},$$

Et prouvons que

$$p_{d+1,k,n} = \binom{n + dk - d - 1}{n - dk}.$$

D'après le Théorème [2.6.1](#), on peut écrire :

$$\begin{aligned} p_{d+1,k,n} &= \sum_{j_2+j_3+\dots+j_d=n} \prod_{l=2}^{d+1} \binom{j_l + k - 2}{j_l - k} \\ &= \sum_{j_{d+1}=k}^{n-(d-1)k} \binom{j_{d+1} + k - 2}{j_{d+1} - k} \sum_{j_2+j_3+\dots+j_d=n-j_{d+1}} \prod_{l=2}^d \binom{j_l + k - 2}{j_l - k} \\ &= \sum_{j_{d+1}=k}^{n-(d-1)k} \binom{j_{d+1} + k - 2}{j_{d+1} - k} \binom{n - j_{d+1} + (d-1)k - d}{n - j_{d+1} - (d-1)k}. \end{aligned}$$

En posant $i = j_{d+1} - k$, $m = n - dk$, $a = 2k - 2$ et $b = 2(d-1)k - d$, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^m \binom{i+a}{i} \binom{m-i+b}{m-i}.$$

En utilisant la même convolution de Vandermonde que celle du Théorème [2.3.2](#) et en remplaçant m , a et b par leur valeur, nous obtenons la formule.

□

2.6.2 Série génératrice

Soit $P_{d,k}(t)$ la série génératrice des polyhypercubes plateaux de dimension d et de largeur k selon l'aire latérale.

$$P_{d,k}(t) = \sum_{n \geq 1} p_{d,k,n} t^n.$$

Proposition 2.6.1. *Pour $k \geq 1$, $P_{d,k}(t)$ vérifie :*

$$P_{d,k}(t) = \frac{t^{k(d-1)}}{(1-t)^{2k(d-1)-(d-1)}}.$$

Preuve. En utilisant Théorème [2.6.1](#), nous obtenons

$$P_{d,k}(t) = \sum_{n \geq 0} \sum_{j_2+j_3+\dots+j_d=n} \prod_{l=2}^d \binom{j_l + k - 2}{j_l - k} t^n.$$

Si $2 \leq l \leq d$ et $j_l < k$ ou $j_l > n - (d-1)k$ alors

$$\prod_{l=2}^d \binom{j_l + k - 2}{j_l - k} = 0.$$

On obtient finalement :

$$\begin{aligned} P_{d,k}(t) &= \sum_{n \geq 0} \sum_{j_2 + j_3 + \dots + j_d = n} \prod_{l=2}^d \binom{j_l + k - 2}{j_l - k} t^n \\ &= \left(\sum_{j_2 \geq 0} \binom{j_2 + k - 2}{j_2 - k} t^{j_2} \right) \left(\sum_{j_3 \geq 0} \binom{j_3 + k - 2}{j_3 - k} t^{j_3} \right) \dots \left(\sum_{j_d \geq 0} \binom{j_d + k - 2}{j_d - k} t^{j_d} \right). \end{aligned}$$

D'après Barucci et al. [10], la série génératrice des polyominos verticalement convexes pour une largeur k fixée est donnée par :

$$\sum_{n \geq 0} \binom{n + k - 2}{n - k} t^n = \frac{t^k}{(1-t)^{2k-1}}.$$

En remplaçant l'équation dans la formule de $P_{d,k}$ nous obtenons la formule. \square

Soit

$$P_d(t, x) := \sum_{k \geq 1} P_{d,k}(t) x^k,$$

la série génératrice des polyhypercubes plateaux dirigés selon la largeur (codée par x) et l'aire latérale (codée par t).

De la Proposition 2.6.1, on obtient

$$P_d(t, x) = \frac{xt^{d-1}(1-t)^{d-1}}{(1-t)^{2(d-1)} - xt^{d-1}}. \quad (2.1)$$

De cette expression, nous déduisons le théorème suivant.

Théorème 2.6.3. *Soit $P_d(t)$ la série génératrice des polyhypercubes plateaux dirigés selon l'aire latérale. Alors, pour $d \geq 4$,*

$$P_d(t) = \frac{t^{d-1}(1-t)^{d-1}}{(1-t)^{2(d-1)} - t^{d-1}}.$$

Preuve. Il suffit de poser $x = 1$ dans l'équation 2.1. \square

Chapitre 3

Énumération des polycubes et polyhypercubes plateaux dirigés selon le volume

3.1 Introduction

Les polycubes plateaux dirigés ont été introduits en 2013 par Champarnaud *et al.* [24]. Ils ont pour intérêt d'être la plus petite famille contenant les polycubes parallélogrammes qu'il ait été possible de définir. De plus, Champarnaud *et al.* [24] en ont proposé une série génératrice selon la largeur et l'aire.

D'autre part, on rappelle que l'on peut construire de façon unique un polycube plateau dirigé à partir de deux polyominos verticalement convexes dirigés et que la projection de ce polycube sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) (\vec{i}, \vec{k}) donnent ces deux polyominos (voir Lemme 2.3.1 du Chapitre 2).

Dans ce chapitre, nous allons explorer cette famille d'une façon différente. En se basant sur leur construction, nous donnerons une formule explicite pour leur énumération selon la largeur et l'aire. Ce résultat sera ensuite généralisé en dimension $d \geq 4$.

Puis, en utilisant les caractéristiques des polycubes plateaux dirigés et les polyominos verticalement convexes dirigés, nous établirons une formule d'énumération selon la largeur, la hauteur et la profondeur.

Enfin, ce dernier résultat sera étendu à d'autres familles de polycubes.

3.2 Formule pour les polycubes

Soit $g_{k,n}$ le nombre de polycubes plateaux dirigés de volume n et de largeur k . Considérons dans un premier temps le cas $k = 1$.

Proposition 3.2.1. *Pour $n \geq 1$,*

$$g_{1,n} = \tau(n),$$

où $\tau(n)$ est le nombre de diviseurs de n .

Ce résultat, ainsi que sa preuve ont été donnés dans [24]. Nous en rappelons malgré tout la preuve, car nous l'utiliserons par la suite.

On peut noter que $\tau(n)$ correspond à la suite A000005 du OEIS [72].

Preuve. Puisqu'un polycube plateau de largeur 1 (un plateau) est un parallélépipède rectangulaire, son volume est égal au produit de sa largeur, sa hauteur et sa profondeur. Mais dans ce cas, la largeur est égale 1. Le volume est donc égal au produit de la hauteur et de la profondeur.

Trouver le nombre de polycubes plateaux de largeur 1 et de volume n revient donc à trouver tous les couples $(p, n/p) \in \mathbb{N}^{*2}$. Ceci revient à trouver tous les diviseurs de n qui sont en nombre de $\tau(n)$. □

La proposition suivante donne $g_{k,n}$ pour $k = 2$.

Proposition 3.2.2. *Pour $n \geq 2$,*

$$g_{2,n} = \sum_{i=1}^{n-1} i\tau(i)\tau(n-i).$$

Preuve. Considérons un premier plateau de volume i et un second de volume $n - i$ avec $1 \leq i \leq n - 1$. D'après la Proposition 3.2.1, il y a $\tau(i)$ plateaux possibles pour le premier et $\tau(n - i)$ pour le second.

Pour construire un polycube plateau dirigé à partir de ces deux plateaux, il faut coller la racine du second sur le premier afin de garder la propriété de direction. Il faut donc positionner la racine du second plateau sur une des i cellules composant le premier plateau. Nous avons donc i collages possibles. Nous avons alors $i\tau(i)\tau(n - i)$ polycubes plateaux dirigés de volume n , dont le premier plateau est de volume i et le second de volume $n - i$. En sommant pour toutes les valeurs de i nous obtenons le résultat. □

On trouvera sur la Figure 3.1 tous les polycubes plateaux dirigés de largeur 2 et de volume 4.

Pour une largeur k quelconque, nous avons la proposition suivante :

Proposition 3.2.3. *Pour $n \geq k \geq 1$,*

$$g_{k,n} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{k-1} \leq n-1 \\ i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \geq 1}} \tau(i_1)i_1\tau(i_2)i_2 \cdots \tau(i_{k-1})i_{k-1}\tau(n - i_1 - i_2 - \cdots - i_{k-1}).$$

Preuve. La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.2.2

Soient i_1, i_2, \dots et i_{k-1} les volumes des plateaux 1, 2, ... et $k - 1$ respectivement. Le $k^{\text{ème}}$ plateau est de volume $i_k = n - i_1 - i_2 - \cdots - i_{k-1}$.

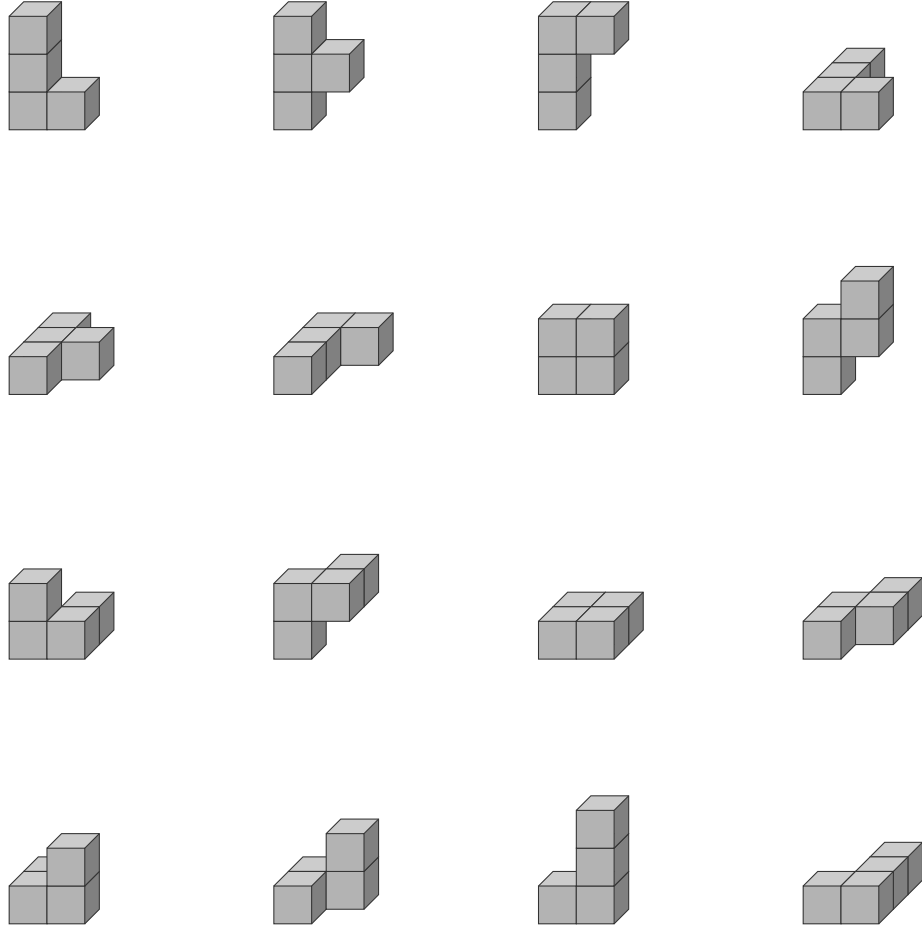


FIGURE 3.1 – Tous les polycubes plateaux dirigés de largeur 2 et de volume 4.

Aucun plateau ne peut être vide, donc $i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \geq 1$ et $i_1 + i_2 + \dots + i_{k-1} \leq n - 1$.

De plus, de façon similaire à la proposition précédente, pour chaque valeur i_j tel que $1 \leq j \leq k - 1$, il y a $\tau(i_j)$ plateaux.

Pour construire un polycube plateau dirigé, il faut coller la racine de chaque plateau $j + 1$ sur le plateau j , avec $1 \leq j \leq k - 1$. Le nombre de collage est alors égal $\tau(i_j) \cdot i_{j+1} \cdot \tau(i_{j+1})$. En répétant cette opération pour tous les plateaux, nous obtenons la formule

$$\tau(i_1)i_1\tau(i_2)i_2 \cdots \tau(i_{k-1})i_{k-1}\tau(n - i_1 - i_2 - \cdots - i_{k-1}).$$

Finalement, en sommant pour toutes les valeurs des i_j nous obtenons le résultat. □

À partir de la formule de la Proposition 3.2.3, on peut déduire la relation de récurrence suivante.

Corollaire 3.2.1. *Pour $n \geq k \geq 1$,*

$$g_{k,n} = \sum_{i=1}^{n-k+1} g_{k-1,n-i} \tilde{\tau}(i),$$

où $\tilde{\tau}(i) = i\tau(i)$.

Preuve. Nous avons

$$g_{k,n} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{k-1} \leq n-1 \\ i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \geq 1}} \tau(i_1) \cdot i_1 \cdot \tau(i_2) \cdot i_2 \cdots \tau(i_{k-1}) \cdot i_{k-1} \cdot \tau(n - i_1 - i_2 - \dots - i_{k-1}).$$

On pose $\tilde{\tau}(i) = i\tau(i)$, on obtient alors :

$$\begin{aligned} g_{k,n} &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{k-1} \leq n-1 \\ i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \geq 1}} \tilde{\tau}(i_1)\tilde{\tau}(i_2) \cdots \tilde{\tau}(i_{k-1}) \cdot \tau(n - i_1 - i_2 - \dots - i_{k-1}) \\ &= \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{k-1} \leq n-1 \\ i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \geq 1}} (\tilde{\tau}(i_1) \cdots \tilde{\tau}(i_{k-2})\tau(n - i_1 - \dots - i_{k-1}))\tilde{\tau}(i_{k-1}) \\ &= \sum_{i_{k-1}=1}^{n-k+1} \left(\sum_{i_1+\dots+i_{k-2} \leq n-i_{k-1}-1} \tilde{\tau}(i_1) \cdots \tilde{\tau}(i_{k-2})\tau(n - i_1 - \dots - i_{k-1}) \right) \tilde{\tau}(i_{k-1}) \\ &= \sum_{i=1}^{n-k+1} g_{k-1, n-i} \tilde{\tau}(i) \end{aligned}$$

□

La Figure 3.2 donne tous les polycubes de largeur 4 et de volume 5.

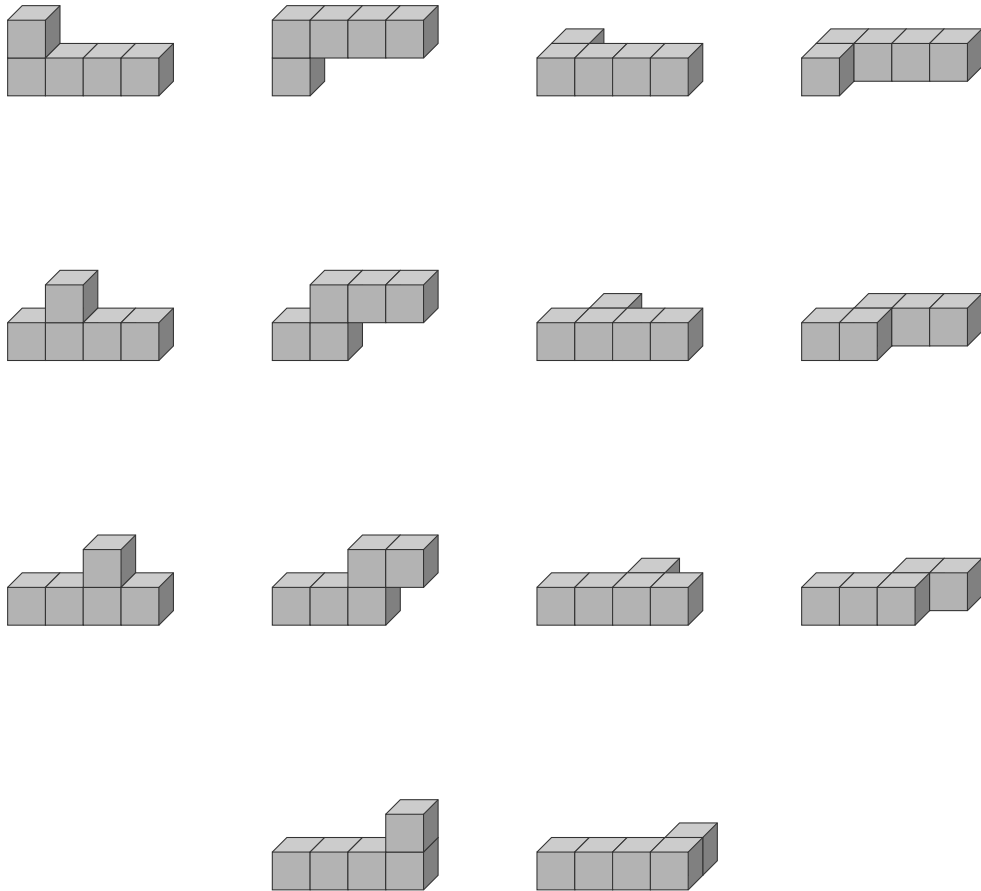


FIGURE 3.2 – Tous les polycubes plateaux dirigés de largeur 4 et de volume 5.

Le tableau suivant donne les premières valeurs de $g_{k,n}$, calculées dans [24]

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	6	1	0	0	0	0	0	0	0
4	3	16	10	1	0	0	0	0	0	0
5	2	35	46	14	1	0	0	0	0	0
6	4	60	147	92	18	1	0	0	0	0
7	2	98	378	403	154	22	1	0	0	0
8	4	148	824	1372	867	232	26	1	0	0
9	3	198	1638	3894	3714	1603	326	30	1	0
10	4	290	2948	9680	13068	8332	2675	436	34	1

TABLE 3.1 – Les premières valeurs du nombre de polycubes plateaux dirigés de largeur k et de volume n .

On peut noter qu'en sommant les valeurs de chaque ligne, nous obtenons les valeurs des polycubes plateaux dirigés de volume fixé. Une formule peut être déduite du Corollaire [3.2.1](#).

Corollaire 3.2.2. Soit g_n le nombre de polycubes plateaux dirigés de volume n . Pour $n \geq 1$,

$$g_n = \sum_{k=1}^n \sum_{i=1}^{n-k+1} g_{k-1, n-i} \tilde{\tau}(i).$$

Preuve. Il suffit de sommer sur toutes les largeur k possibles. □

3.3 Formule pour les polyhypercubes

Deux résultats concernant les polyhypercubes plateaux dirigés existent. Le premier par Carré *et al.* [\[22\]](#) qui ont donné une expression de la série génératrice selon la largeur et l'hypervolume. Le second par Champarnaud *et al.* [\[24\]](#) qui ont donnée des résultats asymptotiques.

Dans cette section, nous allons généraliser les résultats obtenus dans la section précédente. Nous donnerons une formule explicite pour le nombre de polyhypercubes plateaux dirigés pour une largeur et un hypervolume fixés.

Commençons par généraliser la fonction τ .

Définition 3.3.1. Pour $n, d \geq 1$, on note $\tau_d(n)$, le nombre de factorisations ordonnées de n en d facteurs.

Exemple 3.3.1. Pour $n = 8$ et $d = 3$, on a $\tau_3(8) = 10$.

Les factorisations ordonnées dans ce cas sont :

$$\begin{array}{cccccc} 1, 1, 8 & 1, 8, 1 & 8, 1, 1 & 1, 2, 4 & 1, 4, 2 \\ 2, 1, 4 & 2, 4, 1 & 4, 1, 2 & 4, 2, 1 & 2, 2, 2 \end{array}$$

On peut noter que, pour $d = 2$, nous obtenons $\tau_2(n) = \tau(n)$. Dans le Tableau 3.2, nous donnons quelques suites τ_d se trouvant dans l'OEIS [72] pour certaines valeurs de d .

d	Suite	d	Suite
3	A007425	8	A111218
4	A007426	9	A111219
5	A061200	10	A111220
6	A034695	11	A111221
7	A111217	12	A111306

TABLE 3.2 – Les suites τ_d dans l'OEIS.

Soit $g_{d,k,n}$, le nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension d , largeur k et hypervolume n .

Nous commençons par donner la formule de $g_{d,k,n}$ pour $k = 1$.

Proposition 3.3.1. *Pour $n \geq d \geq 1$,*

$$g_{d,1,n} = \tau_{d-1}(n).$$

Preuve. La preuve est similaire à celle de la Proposition 3.2.1. Un polyhypercube plateau dirigé de dimension d et de largeur 1 (hyperplateau) est hyperparallélépipède rectangulaire. Son hypervolume est alors égal au produit de sa largeur l_1 et les $k^{\text{ème}}$ hauteur l_k avec $2 \leq k \leq d$. Comme dans le cas d'un hyperplateau $l_1 = 1$, par conséquent l'hypervolume est égal à $\prod_{k=2}^d l_k$.

Trouver le nombre de polyhypercubes plateaux de largeur 1 et d'hypervolume n revient donc à trouver tous les $d - 1$ -uplets $(l_2, l_3, \dots, l_{d-1}, n/(l_2 l_3 \cdots l_{d-1})) \in \mathbb{N}^{*d-1}$. Ceci revient à chercher toutes les factorisations de n en $d - 1$ facteurs qui sont en nombre de $\tau_{d-1}(n)$. \square

Comme pour le cas $d = 3$, on peut déduire $g_{d,k,n}$, le nombre de polyhypercubes plateaux dirigés selon la largeur et l'hypervolume, par construction. La proposition suivante donne la formule pour $g_{d,k,n}$.

Proposition 3.3.2. *Pour $n \geq k \geq 1$ et $n \geq d \geq 3$,*

$$g_{d,k,n} = \sum_{\substack{i_1+i_2+\dots+i_{k-1} \leq n-1 \\ i_1, i_2, \dots, i_{k-1} \geq 1}} \tau_{d-1}(i_1) i_1 \cdots \tau_{d-1}(i_{k-1}) i_{k-1} \tau_{d-1}(n - i_1 - \cdots - i_{k-1}).$$

Preuve. La preuve se base sur le principe de collage de la Proposition 3.2.3. Pour construire un polyhypercube plateau dirigé de dimension d , de largeur k et d'hypervolume n , il faut démarrer d'un hyperplateau de volume i_1 puis coller successivement $k - 1$ hyperplateaux, avec comme contrainte la somme des volume des hyperplateaux égale à n .

D'après la proposition [3.3.1](#), nous savons que le nombre d'hyperplateaux de dimension d , de largeur 1 et d'hypervolume i_1 est égal à $\tau_{d-1}(i_1)$. De façon similaire pour i_2 , il y a donc $\tau_{d-1}(i_2)$ hyperplateaux possibles. La racine du deuxième hyperplateau doit coïncider avec une cellule du premier, il y a i_1 collages possibles (afin d'assurer la condition de direction). Nous avons donc $\tau_{d-1}(i_1) \cdot i_1 \cdot \tau_{d-1}(i_2)$ constructions possibles.

Nous répétons cette opération $k - 1$ fois pour tous les hyperplateaux restants. Nous obtenons alors $\tau_{d-1}(i_1) \cdot i_1 \cdot \tau_{d-1}(i_2) \cdot i_2 \cdots \tau_{d-1}(i_{k-1}) \cdot i_{k-1} \cdot \tau_{d-1}(n - i_1 - i_2 - \cdots - i_{k-1})$ constructions possibles.

Finalement, en sommant sur toutes les valeurs possibles des volumes des hyperplateaux, nous obtenons le résultat. \square

En calculant les premières valeurs de $g_{d,k,n}$ pour $d = 4, 5, 6, 7, 8$ nous obtenons les valeurs suivantes données dans les Tableaux [3.3](#), [3.4](#), [3.5](#), [3.6](#) et [3.7](#).

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	3	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	3	9	1	0	0	0	0	0	0	0
4	6	30	15	1	0	0	0	0	0	0
5	3	75	93	21	1	0	0	0	0	0
6	9	153	360	192	27	1	0	0	0	0
7	3	252	1104	1077	327	33	1	0	0	0
8	10	456	2754	4476	2442	498	39	1	0	0
9	6	576	6102	15419	13185	4671	170	45	1	0
10	5	1035	12266	43428	56655	31443	7980	948	51	1

TABLE 3.3 – Les premières valeurs de $g_{4,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 4, largeur k et volume n .

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	4	12	1	0	0	0	0	0	0	0
4	10	48	20	1	0	0	0	0	0	0
5	4	130	156	28	1	0	0	0	0	0
6	16	312	698	328	36	1	0	0	0	0
7	4	504	2428	2226	564	44	1	0	0	0
8	20	1072	6816	10704	5226	864	52	1	0	0
9	10	1260	16188	41352	33588	10210	1228	60	1	0
10	16	2740	36068	132840	167472	83624	17690	1656	68	1

TABLE 3.4 – Les premières valeurs de $g_{5,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 5, largeur k et volume n .

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	5	15	1	0	0	0	0	0	0	0
4	15	70	25	1	0	0	0	0	0	0
5	5	200	235	35	1	0	0	0	0	0
6	25	555	1185	500	45	1	0	0	0	0
7	5	875	4530	3970	865	55	1	0	0	0
8	35	2140	14150	21430	95555	1330	65	1	0	0
9	15	2340	35250	92100	70755	18940	1895	75	1	0
10	25	6025	86470	325460	396795	182005	33125	2560	85	1

TABLE 3.5 – Les premières valeurs de $g_{6,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 6, largeur k et volume n .

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	6	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	6	18	1	0	0	0	0	0	0	0
4	21	96	30	1	0	0	0	0	0	0
5	6	285	330	42	1	0	0	0	0	0
6	36	900	1845	708	54	1	0	0	0	0
7	6	1386	7590	6429	1230	66	1	0	0	0
8	56	3828	26136	38220	15765	1896	78	1	0	0
9	21	3906	67410	179262	131670	31581	2706	90	1	0
10	36	11670	180880	689064	814572	347556	55605	3660	102	1

TABLE 3.6 – Les premières valeurs de $g_{7,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 7, largeur k et volume n .

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	7	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	7	21	1	0	0	0	0	0	0	0
4	28	126	35	1	0	0	0	0	0	0
5	7	385	441	49	1	0	0	0	0	0
6	49	1365	2702	952	63	1	0	0	0	0
7	7	2058	11788	9723	1659	77	1	0	0	0
8	84	6328	44394	62832	24192	2562	91	1	0	0
9	28	6048	117558	317079	224469	48853	3661	105	1	0
10	49	20615	342958	1315020	1509543	605087	86450	4956	119	1

TABLE 3.7 – Les premières valeurs de $g_{8,k,n}$, le nombre de nombre de polyhypercubes plateaux dirigés de dimension 8, largeur k et volume n .

Dans Champarnaud *et al.* [24], il a été démontré que $g_{d,n,n-i}$ est un polynôme dont le terme du plus haut degré est égal à

$$\frac{2^i(d-1)^i}{i!}n^i.$$

Dans les deux propositions suivantes, nous allons donner l'expression des polynômes $g_{d,n,n-1}$ et $g_{d,n,n-2}$ ainsi que leurs démonstrations combinatoires.

Proposition 3.3.3. *Pour $n \geq k \geq 1$ et $n \geq d \geq 3$,*

$$g_{d,n,n-1} = (2d-1)n - 3(d-1).$$

Preuve. Soit un polyhypercube de dimension d , de largeur $n-1$ et d'hypervolume $n-1$. Calculons le nombre de façons d'ajouter une cellule sur un des $n-1$ hyperplateaux pour obtenir un nouveau polyhypercube plateau dirigé. Deux cas se présentent :

— On ajoute une cellule sur les $n-2$ premiers hyperplateaux. Nous avons donc $d-1$ collages possibles. Pour chaque collage, nous avons un hyperplateau de volume 2, donc l'hyperplateau suivant a 2 collages possibles. Il y a alors $2(d-1)(n-2)$ collages possibles.

— On ajoute une cellule sur le dernier hyperplateau, nous avons $d-1$ choix possibles.

En sommant les deux cas, on obtient le résultat. \square

Proposition 3.3.4. *Pour $n \geq k \geq 1$ et $n \geq d \geq 3$,*

$$g_{d,n,n-2} = 2(d-1)^2(n^2 - 5n + 6) + 3(d-1)n - 9(d-1).$$

Preuve. Soit un polyhypercube de dimension d de largeur $n-2$ et d'hypervolume $n-2$. Calculons le nombre de façons d'ajouter deux cellules sur un ou deux des $n-2$ hyperplateaux pour garder la propriété de polyhypercube plateau dirigé.

- Dans le premier cas, nous considérons les cellules sur le même hyperplateau.
 - On ajoute deux cellules sur les $(n - 3)$ premiers hyperplateaux. Nous avons donc $(d - 1)$ collages possibles et pour chaque collage nous avons un hyperplateau de volume 3 ce qui implique que l'hyperplateau suivant est collé de 3 façons possibles. Donc il y a $3(d - 1)(n - 3)$ collages possibles.
 - Si on ajoute les deux cellules sur le dernier hyperplateau, nous avons $(d - 1)$ choix possibles.
- Dans le deuxième cas, nous insérons les cellules sur deux hyperplateaux différents.
 - Nous rajoutons une cellule sur un des $n - 3$ premiers hyperplateaux et une sur le dernier hyperplateau. Le nombre de collage sur les $n - 3$ premiers hyperplateaux est $2(d - 1)(n - 3)$ car il y a d directions pour la cellule et, pour chaque collage, l'hyperplateau suivant est collé de 2 façons différentes. Le nombre de collages d'une cellule sur le dernier hyperplateau est égal à $(d - 1)$. Il y a donc $2(d - 1)^2(n - 3)$ collages possibles.
 - Dans le cas où aucune cellule n'est ajoutée dans le dernier hyperplateau, nous devons choisir 2 hyperplateaux parmi les $(n - 3)$, ce qui donne $\binom{n-3}{2}$ possibilités. De plus, nous avons établi que pour chaque hyperplateau il y a $2(d - 1)$ de collages possibles. L'opération est répétée deux fois. Nous avons donc $4(d - 1)^2 \binom{n-3}{2}$ collages.

En sommant les deux, on obtient le résultat. □

3.4 Énumération selon la largeur, la hauteur et la profondeur

Nous avons vu, dans le Chapitre 2, que la projection d'un polycube plateau dirigé sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{i}, \vec{k}) donne un polyomino verticalement-convexe dirigé sur chaque plan. Ces polyominos ont la même largeur que le polycube et la hauteur du premier (resp. second) est égale à la hauteur (resp. profondeur) du polycube. Ainsi, à partir de n'importe quel couple de polyominos vérifiant cette propriété, nous pouvons construire un unique polycube. Nous allons utiliser cette propriété pour énumérer les polycubes plateaux dirigés selon la largeur, la hauteur et la profondeur.

Commençons par rappeler un premier lemme dû à Delest [32].

Lemme 3.4.1. [32] *Pour $n, k \geq 1$, le nombre de polyominos verticalement-convexes dirigés de largeur k et de hauteur n est égal à*

$$\frac{1}{k} \sum_{r=0}^{M_p} \binom{k}{r+1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{k+n-2}{k+r-1},$$

où M_p est le minimum de $(k - 1)$ et $(n - 1)$.

La formule correspond à la suite [A259333](#) du OEIS [72].

Les premières valeurs sont données sur la Figure 3.3.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & & & & 1 \\
 & & & & & & & 1 & 1 \\
 & & & & & & 1 & 4 & 1 \\
 & & & & & 1 & 9 & 9 & 1 \\
 & & & 1 & 16 & 37 & 16 & 1 \\
 & 1 & 25 & 105 & 106 & 25 & 1 \\
 & 1 & 36 & 240 & 446 & 245 & 36 & 1 \\
 1 & 49 & 476 & 1421 & 1445 & 491 & 49 & 1
 \end{array}$$

FIGURE 3.3 – Les premières valeurs du nombre de polyominos verticalement convexes dirigés selon la largeur et la hauteur.

De ce lemme, nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 3.4.1. *Le nombre de polycubes plateaux de largeur k , de hauteur n et de profondeur m est égal à :*

$$\frac{1}{k^2} \sum_{r=0}^{M_{p_1}} \binom{k}{r+1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{k+n-2}{k+r-2} \sum_{r=0}^{M_{p_2}} \binom{k}{r+1} \binom{2k+r-1}{r} \binom{k+m-2}{k+r-1},$$

avec M_{p_1} (resp. M_{p_2}) le minimum de $k-1$ et $n-1$ (resp. $m-1$).

Preuve. En utilisant le principe de multiplication et le Lemme 3.4.1, nous obtenons le résultat. □

Les premières valeurs sont donnés dans la pyramide de la Figure 3.4.

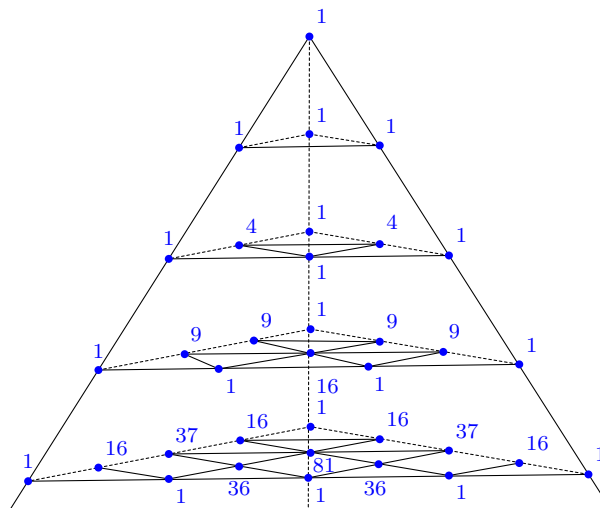


FIGURE 3.4 – Les premières valeurs des polycubes plateaux dirigés selon la largeur et la hauteur et la profondeur.

Chaque niveau correspond à une valeur $s = k + n + m$ du demi-périmètre. Le premier niveau correspond à la valeur $s = 3$, le deuxième à la valeur $s = 4, \dots$ etc....

Nous détaillons la lecture du quatrième niveau de la pyramide sur la Figure 3.5.

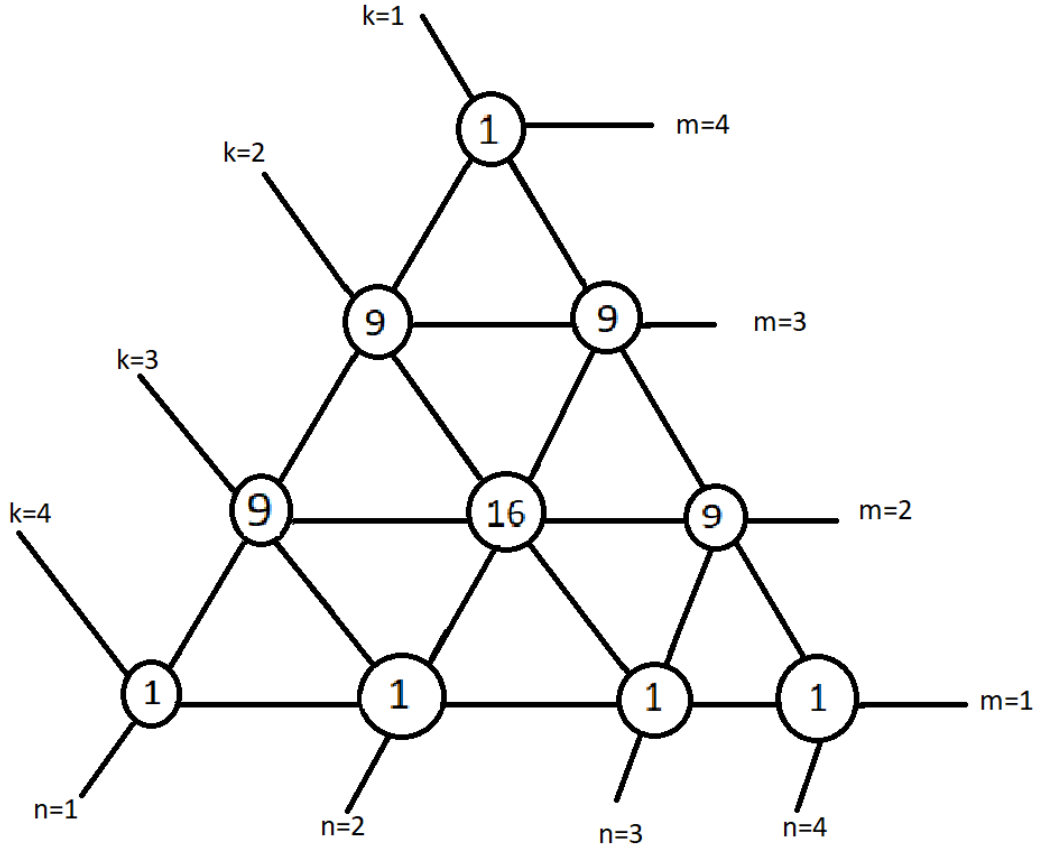


FIGURE 3.5 – Quatrième niveau de la pyramide.

3.5 Exploration d'autres familles de polycubes

Les polycubes convexes et les polycubes convexes dirigés ont été introduits par Champarnaud *et al.* et ont été énumérés selon la méthode dite générique [26].

Dans cette section, nous allons étendre la méthode de la section précédente aux familles des polycubes convexes et des polycubes convexes dirigés. Ces polycubes seront alors énumérés selon la largeur, la hauteur et la profondeur.

3.5.1 Polycubes convexes

La première famille étudiée est la famille des polycubes convexes. Dans cette famille, il n'y a pas de contrainte de direction entre les plateaux. On peut noter qu'il n'existe pas de formule explicite selon le volume pour les polycubes n'ayant pas de contrainte de direction.

Comme pour les polycubes plateaux dirigés, les projections d'un polycubes convexes sur les plans (\vec{i}, \vec{j}) et (\vec{i}, \vec{k}) donnent des polyominos convexes. Le lemme suivant donne le nombre de polyominos convexes selon la largeur et la hauteur.

Lemme 3.5.1. [46] *Pour $k, n \geq 1$, le nombre de polyominos convexes de largeur k et de hauteur n est égal à*

$$\binom{2(k+n)-4}{2k-2} + \frac{2(k+n)-5}{2} \binom{2(k+n)-6}{2k-3} - 2(k+n) \binom{k+n-2}{k-1} \binom{k+n-4}{k-2}.$$

La formule correspond à la suite [A259333](#) du OEIS [\[72\]](#).
 Les premières valeurs sont données dans le triangle de la Figure [3.6](#).

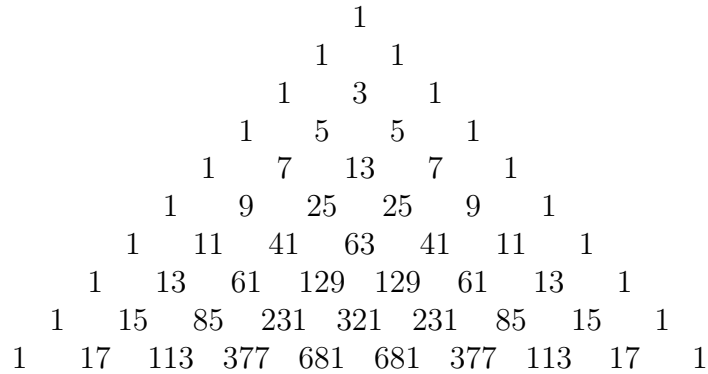


FIGURE 3.6 – Les premières valeurs du nombre de polyominoes convexes selon la largeur et la hauteur.

De ce lemme, nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 3.5.1. *Pour $k, n, m \geq 1$, le nombre de polycubes plateaux convexes de largeur k , de hauteur n et de profondeur m est égal à*

$$\prod_{i \in \{n, m\}} \binom{2(k+i)-4}{2k-2} + \frac{2(k+i)-5}{2} \binom{2(k+i)-6}{2k-3} - 2(k+i) \binom{k+i-2}{k-1} \binom{k+i-4}{k-2}.$$

Les premières valeurs sont donnés dans la pyramide de la Figure [3.7](#).

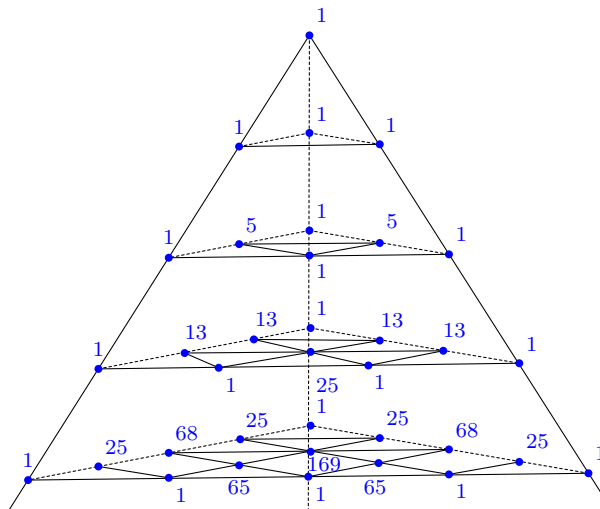


FIGURE 3.7 – Les premières valeurs des polycubes convexes selon la largeur et la hauteur et la profondeur.

3.5.2 Polycubes plateaux convexes dirigés

Les projections d'un polycube convexe dirigé donnent deux polyominoes convexes dirigés. Nous utilisons la même méthode pour le cas des polyominoes convexes. Commençons par donner le lemme sur le nombre des polyominoes convexes dirigés pour une largeur et une hauteur fixées.

Lemme 3.5.2. [6] Pour $k, n \geq 1$, le nombre de polyominos convexes dirigés de largeur k et de hauteur n est égal à

$$\binom{n+k-2}{k-1}.$$

La formule correspond à la suite [A259333](#) du OEIS [72].

Les premières valeurs sont données dans le triangle de la Figure 3.8.

			1							
		1		1						
		1	3		1					
		1	5	5		1				
		1	7	13	7		1			
		1	9	25	25	9		1		
		1	11	41	63	41	11		1	
		1	13	61	129	129	61	13		1

FIGURE 3.8 – Les premières valeurs du nombre de polyominos convexes dirigés selon la largeur et la hauteur.

De ce lemme, nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 3.5.2. Pour $k, n, m \geq 1$, le nombre de polycubes plateaux convexes dirigés de largeur k , de hauteur n et de profondeur m est égal à

$$\binom{n+k-2}{k-1} \binom{m+k-2}{k-1}.$$

Les premières valeurs sont donnés dans la pyramide de la Figure 3.9.

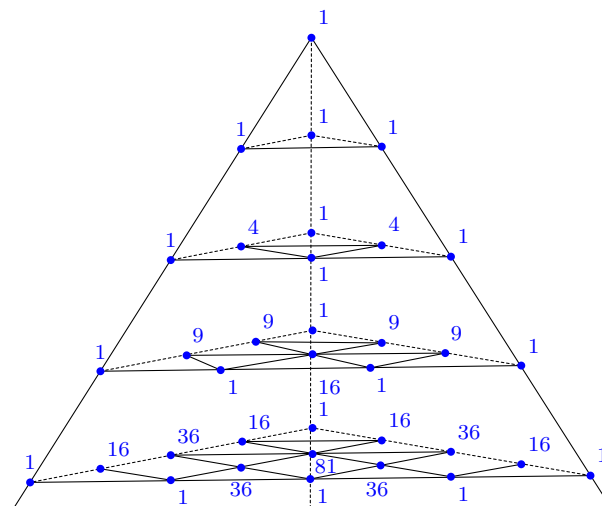


FIGURE 3.9 – Les premières valeurs des polycubes convexes dirigés selon la largeur, la hauteur et la profondeur.

En sommant les valeurs de chaque niveau, nous obtenons le nombre de polycubes convexes dirigés selon le périmètre. Ces valeurs correspondent à la suite [A178807](#) du OEIS.

Chapitre 4

Énumération des polycubes parallélogrammes

4.1 Introduction

Les polyominos parallélogrammes ont été introduits par Polya [66] en 1969. Ces polyominos sont des polyominos convexes avec une contraintes de croissance. Ils sont en bijection avec les *mots de Dyck* et leur série génératrice selon le périmètre (codé par t) est donnée par :

$$\frac{1 - 2t - \sqrt{1 - 4t}}{2} = \sum_{n \geq 2} C_n t^n \quad [36],$$

où $C_n = \binom{2n}{n} / (n + 1)$ dénote le $n^{\text{ème}}$ nombre de Catalan. D'autre énumération existent pour ces polyominos selon plusieurs paramètre. L'une d'elles, est celle de Bousquet-Mélou [15] qui, en 1996, a donné la série génératrice selon la hauteur de la colonne la plus à gauche (codée par s), la plus à droite (codée par t), le nombre de pas horizontal (codé par x), vertical (codé par y) et l'aire (codée par q) :

$$ty \frac{J_1(s)J_0(1) - J_1(1)J_0(s) + J_1(1)}{J_0(1)},$$

avec

$$J_1(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n s^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(sq)_{n-1} (syq)_{n-1} (1 - styq^n)},$$

$$J_0(s) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1} x^n s^n q^{\binom{n+1}{2}}}{(sq)_n (syq)_n (1 - styq^n)},$$

et

$$(a)_n = \prod_{i=0}^{n-1} (1 - aq^i).$$

En 2013 Champarnaud *et al.* [24] ont généralisé les polyominos parallélogrammes à la dimension 3 en introduisant les polycubes parallélogrammes.

Leur motivation provient du fait que ces objets apparaissent dans un modèle efficace

de validation d'applications en temps-réel [56]. Leur énumération s'est révélée impossible avec les méthodes précédemment utilisées pour les polycubes. Ils ont caractérisé la série génératrice $H(t, h, r, p, q)$ où t code la largeur, h la hauteur du dernier plateau, r la profondeur du dernier plateau, p le volume et q l'aire de la face la plus à droite du polycube.

$$\begin{aligned}
H(t, h, r, p, q) &= Pl(t, h, r, p, q) \\
&+ \sum_{n \geq 0} (n+1) H(t, 1, 1, p, 1) \frac{p^{n+1} q^{n+1} r^{n+1} t h}{(1 - p^{n+1} q^{n+1} h)^2} \\
&- \sum_{n \geq 0} (n+1) H(t, h p^{n+1} q^{n+1}, 1, p, 1) \frac{p^{n+1} q^{n+1} r^{n+1} t h}{(1 - p^{n+1} q^{n+1} h)^2} \\
&- \sum_{n \geq 0} (n+1) H(t, 1, r p^{n+1} q^{n+1}, p, 1) \frac{p^{n+1} q^{n+1} r t h^{n+1}}{1 - r p^{n+1} q^{n+1}} \\
&+ \sum_{m \geq 0} \sum_{n \geq 0} (n+1)(m+1) t h^{m+1} h^{n+1} (p q)^{n+m+1} \\
&\quad \times H(t, (h^{n+1} + 1) p^{n+1} q^{n+1}, (r^{m+1} + 1) p^{m+1} q^{m+1}, p, 1).
\end{aligned}$$

Ils ont aussi donné quelques asymptotiques sur le nombre de polycubes parallélogrammes selon la largeur et le volume.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons à l'énumération des polycubes parallélogrammes. Les méthodes classiques des polycubes se sont révélées inefficaces sur cette famille. Par conséquent, nous approchons la famille de façons différentes.

La première approche consiste à utiliser les séries génératrices de Dirichlet pour les énumérer selon la largeur et le volume. Pour obtenir cette série génératrice, il faut d'abord énumérer les polyominos parallélogrammes de la même façon. Cette méthode est ensuite étendue pour une dimension quelconque.

La seconde approche consiste à projeter les polycubes parallélogrammes, caractériser ces projections, puis à faire l'énumération selon la largeur, la hauteur et la profondeur.

4.2 Série génératrice de Dirichlet pour les polycubes parallélogrammes

4.2.1 Formules pour les polyominos et polycubes parallélogrammes

Soit a_{m_1, m_2, \dots, m_k} le nombre de polyominos parallélogrammes de largeur k et dont l'aire (ou la hauteur car les deux sont égales) de la $i^{\text{ème}}$ colonne est égale m_i , où $1 \leq i \leq k$.

La proposition suivante est une conséquence de la définition des polyominos parallélogrammes. Nous en donnons la démonstration, car nous l'utiliserons pour le cas des polycubes parallélogrammes.

Proposition 4.2.1. *Pour un entier $k \geq 1$ et $m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N}^*$, nous avons :*

$$a_{m_1, m_2, \dots, m_k} = \begin{cases} 1, & \text{si } k = 1, \\ \prod_{j=1}^{k-1} \min(m_j, m_{j+1}), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Pour le cas $k = 1$, les polyominos considérés (de largeur 1) sont réduits à une colonne. Donc pour chaque valeur m_1 , il n'y a qu'un seul polyomino possible.

Pour déterminer a_{m_1, \dots, m_k} dans le cas $k \geq 2$, nous devons construire tous les polyominos possibles. Considérons une colonne d'aire m_1 et collons successivement toutes les autres colonnes une par une.

Le nombre de collages que l'on peut réaliser de la deuxième colonne, d'aire m_2 , sur la première colonne d'aire m_1 tout en maintenant la propriété du polyomino parallélogramme est égal à $\min(m_1, m_2)$. Une illustration de cette construction est donnée sur la Figure 4.1. En répétant la même opération pour les autres colonnes, on obtient la formule de a_{m_1, \dots, m_k} . \square

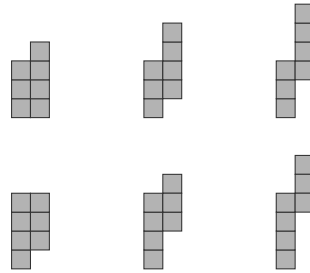


FIGURE 4.1 – Construction des polyominos parallélogrammes à partir de deux colonnes.

Notons qu'en sommant pour toutes les partitions ordonnées d'un entier n en k parties, nous obtenons $b_{k,n}$ le nombre de polyominos parallélogrammes de largeur k et d'aire n donné par le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.1. *Pour les entiers $n \geq k \geq 1$,*

$$b_{k,n} = \sum_{\substack{m_1, m_2, \dots, m_k \in \mathbb{N} \\ m_1 + m_2 + \dots + m_k = n}} a_{m_1, m_2, \dots, m_k}.$$

Les premières valeurs de $b_{k,n}$ sont données dans le Tableau 4.1.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	1	2	1	0	0	0	0	0	0	0
4	1	4	3	1	0	0	0	0	0	0
5	1	6	8	4	1	0	0	0	0	0
6	1	9	17	13	5	1	0	0	0	0
7	1	12	32	34	19	6	1	0	0	0
8	1	16	55	78	58	26	7	1	0	0
9	1	20	89	160	154	90	34	8	1	0
10	1	25	136	305	365	269	131	43	9	1

TABLE 4.1 – Les premières valeurs de $b_{k,n}$, le nombre de polyominos parallélogrammes de largeur k et d'aire n .

En sommant les valeurs de chaque ligne du Tableau 4.1, nous obtenons le nombre de polyominos parallélogrammes à n cellules, qui correspond à la suite A006958 du OEIS [72].

La Proposition 4.2.1 peut être généralisée en dimension 3 de la façon suivante.

Proposition 4.2.2. Soit p_{n_1, n_2, \dots, n_k} le nombre de polycubes parallélogrammes de largeur k et dont le $i^{\text{ème}}$ plateau est de volume n_i avec $i = 1, \dots, k$.

$$p_{n_1, n_2, \dots, n_k} = \begin{cases} \tau(n_1), & \text{si } k = 1, \\ \sum_{v_1 | n_1, \dots, v_k | n_k} \prod_{i=1}^{k-1} \min(v_i, v_{i+1}) \min\left(\frac{n_i}{v_i}, \frac{n_{i+1}}{v_{i+1}}\right), & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Pour un volume fixé n_i d'un plateau, il y a exactement $\tau(n_i)$ plateaux possibles, où $\tau(n_i)$ est le nombre de diviseurs de n_i , la preuve est donnée dans la Proposition 3.2.1 du Chapitre 3. Un exemple est montré sur la Figure 4.2.

Si l'on considère deux plateaux de volume n_i et n_{i+1} , et de hauteurs respectives v_i et v_{i+1} , on peut déduire que leur profondeur est donnée par $\frac{n_i}{v_i}$ et $\frac{n_{i+1}}{v_{i+1}}$ respectivement. Pour coller ces deux plateaux, on procède de la même manière que pour les polyominos, mais en prenant en compte la hauteur et la profondeur des plateaux. Ainsi, le nombre de collages possibles entre le plateau i et le plateau $i + 1$ est donné par $\min(v_i, v_{i+1}) \times \min\left(\frac{n_i}{v_i}, \frac{n_{i+1}}{v_{i+1}}\right)$. Un exemple est illustré sur la Figure 4.3.

Finalement, en sommant pour toutes les hauteurs de tous les plateaux, nous obtenons la formule. □



FIGURE 4.2 – Tous les plateaux de volume 6.

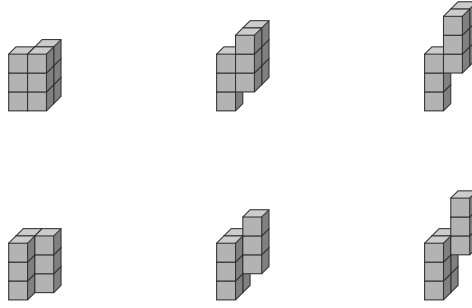


FIGURE 4.3 – Exemple de collage de deux plateaux.

En sommant pour toutes les partitions ordonnées d'un entier n en k parties, nous obtenons $c_{k,n}$ le nombre de polycubes parallélogrammes de largeur k et de volume n dans le corollaire suivant.

Corollaire 4.2.2.

$$c_{k,n} = \sum_{\substack{n_1, n_2, \dots, n_k \in \mathbb{N} \\ n_1 + n_2 + \dots + n_k = n}} p_{n_1, n_2, \dots, n_k}.$$

Les premiers valeurs de $c_{k,n}$ sont données dans le tableau suivant.

$n \setminus k$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	2	1	0	0	0	0	0	0	0	0
3	2	4	1	0	0	0	0	0	0	0
4	3	10	6	1	0	0	0	0	0	0
5	2	18	22	8	1	0	0	0	0	0
6	4	32	59	38	10	1	0	0	0	0
7	2	44	132	132	58	12	1	0	0	0
8	4	70	264	374	245	82	14	1	0	0
9	3	84	469	916	836	406	110	16	1	0
10	4	126	808	2015	2438	1614	623	142	18	1

TABLE 4.2 – Les premières valeurs de $c_{k,n}$, le nombre de polycubes parallélogrammes de largeur k et d'aire n .

Les valeurs de la diagonale correspondent aux résultats trouvés expérimentalement dans [24].

4.2.2 Série génératrice de Dirichlet

Soit $V_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ la série génératrice de Dirichlet des polyominoes parallélogrammes de largeur k , où x_i code l'aire de la $i^{\text{ème}}$ colonne avec $1 \leq i \leq k$. Nous la définissons de la façon suivante :

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) := \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1} \frac{\min(n_1, n_2) \cdots \min(n_{k-1}, n_k)}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \cdots n_k^{x_k}}.$$

Avant de donner un algorithme permettant d'exprimer la série génératrice de Dirichlet en termes de la fonction Zeta multiple, nous donnons les formules pour $k = 1$, $k = 2$, $k = 3$ et $k = 4$.

— $k = 1$,

$$V_1(x_1) = \sum_{n_1 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1}} = \zeta_1(x_1).$$

— $k = 2$,

$$\begin{aligned} V_2(x_1, x_2) &= \sum_{n_1, n_2 \geq 1} \frac{\min(n_1, n_2)}{n_1^{x_1} n_2^{x_2}} \\ &= \sum_{n_1 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1} n_2^{x_2-1}} + \sum_{n_2 > n_1 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1-1} n_2^{x_2}} + \sum_{n_1 = n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1+x_2-1}}. \end{aligned}$$

Donc

$$V_2(x_1, x_2) = \zeta_2(x_1, x_2 - 1) + \zeta_2(x_2, x_1 - 1) + \zeta_1(x_1 + x_2 - 1).$$

— $k = 3$

$$\begin{aligned} V_3(x_1, x_2, x_3) &= \sum_{n_1, n_2, n_3 \geq 1} \frac{\min(n_1, n_2) \min(n_2, n_3)}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} n_3^{x_3}} \\ &= \sum_{n_1 > n_2 > n_3 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1} n_2^{x_2-1} n_3^{x_3-1}} + \sum_{n_1 > n_3 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1} n_2^{x_2-2} n_3^{x_3}} \\ &+ \sum_{n_2 > n_1 > n_3 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1-1} n_2^{x_2} n_3^{x_3-1}} + \sum_{n_2 > n_3 > n_1 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1-1} n_2^{x_2} n_3^{x_3-1}} \\ &+ \sum_{n_3 > n_1 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1-1} n_2^{x_2-1} n_3^{x_3}} + \sum_{n_3 > n_2 > n_1 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1-1} n_2^{x_2-1} n_3^{x_3}} \\ &+ \sum_{n_1 = n_2 > n_3 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1+x_2-1} n_3^{x_3-1}} + \sum_{n_1 = n_3 > n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1+x_3} n_2^{x_2-2}} \\ &+ \sum_{n_2 = n_3 > n_1 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1-1} n_2^{x_2+x_3-1}} + \sum_{n_3 > n_1 = n_2 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1+x_2-2} n_3^{x_3}} \\ &+ \sum_{n_2 > n_1 = n_3 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1+x_3-2} n_2^{x_2}} + \sum_{n_1 > n_2 = n_3 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1} n_2^{x_2+x_3-2}} \\ &+ \sum_{n_1 = n_2 = n_3 \geq 1} \frac{1}{n_1^{x_1+x_2+x_3-2}}. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_3(x_1, x_2, x_3) &= \zeta_3(x_1, x_2 - 1, x_3 - 1) + \zeta_3(x_1, x_3, x_2 - 2) \\ &+ \zeta_3(x_2, x_1 - 1, x_3 - 1) + \zeta_3(x_2, x_3 - 1, x_1 - 1) \\ &+ \zeta_3(x_3, x_1, x_2 - 2) + \zeta_3(x_3, x_2 - 1, x_1 - 1) \\ &+ \zeta_2(x_1 + x_2 - 1, x_3 - 1) + \zeta_2(x_1 + x_2, x_3 - 2) \\ &+ \zeta_2(x_2 + x_3 - 1, x_1 - 1) + \zeta_2(x_3, x_1 + x_2 - 2) \\ &+ \zeta_2(x_2, x_1 + x_2 - 2) + \zeta_2(x_1, x_2 + x_3 - 2) \\ &+ \zeta_1(x_1 + x_2 + x_3 - 2). \end{aligned}$$

— $k = 4$

$$\begin{aligned}
V_4(x_1, x_2, x_3, x_4) = & \zeta_4(x_1, x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1) + \zeta_4(x_1, x_2 - 1, x_4, x_3 - 2) \\
& + \zeta_4(x_1, x_3, x_2 - 2, x_4 - 1) + \zeta_4(x_1, x_3, x_4 - 1, x_2 - 2) + \zeta_4(x_1, x_4, x_2 - 1, x_3 - 2) \\
& + \zeta_4(x_1, x_4, x_3 - 1, x_2 - 2) + \zeta_4(x_2, x_1 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1) + \zeta_4(x_2, x_1 - 1, x_4, x_3 - 2) \\
& + \zeta_4(x_2, x_3 - 1, x_1 - 1, x_4 - 1) + \zeta_4(x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1, x_1 - 1) + \zeta_4(x_2, x_4, x_1 - 1, x_3 - 2) \\
& + \zeta_4(x_2, x_4, x_3 - 2, x_1 - 1) + \zeta_4(x_3, x_2 - 1, x_1 - 1, x_4 - 1) + \zeta_4(x_3, x_2 - 1, x_4 - 1, x_1 - 1) \\
& + \zeta_4(x_3, x_1, x_2 - 2, x_4 - 1) + \zeta_4(x_3, x_1, x_4 - 1, x_2 - 2) + \zeta_4(x_3, x_4 - 1, x_2 - 1, x_1 - 1) \\
& + \zeta_4(x_3, x_4 - 1, x_1, x_2 - 2) + \zeta_4(x_4, x_2, x_3 - 2, x_1 - 1) + \zeta_4(x_4, x_2, x_1 - 1, x_3 - 2) \\
& + \zeta_4(x_4, x_3 - 1, x_2 - 1, x_1 - 1) + \zeta_4(x_4, x_3 - 1, x_1, x_2 - 2) + \zeta_4(x_4, x_1, x_2 - 1, x_3 - 2) \\
& + \zeta_4(x_4, x_1, x_3 - 1, x_2 - 2) + \zeta_3(x_1 + x_2 - 1, x_3 - 1, x_4 - 1) + \zeta_3(x_1 + x_2 - 1, x_4, x_3 - 2) \\
& + \zeta_3(x_3, x_1 + x_2 - 2, x_4 - 1) + \zeta_3(x_4, x_1 + x_2 - 1, x_3 - 2) + \zeta_3(x_3, x_4 - 1, x_1 + x_2 - 2) \\
& + \zeta_3(x_4, x_3 - 1, x_1 + x_2 - 2) + \zeta_3(x_1 + x_3, x_2 - 2, x_4 - 1) + \zeta_3(x_1 + x_3, x_4 - 1, x_2 - 2) \\
& + \zeta_3(x_2, x_1 + x_3 - 2, x_4 - 1) + \zeta_3(x_4, x_1 + x_3 - 1, x_2 - 2) + \zeta_3(x_2, x_4, x_1 + x_3 - 3) \\
& + \zeta_3(x_4, x_2, x_1 + x_3 - 3) + \zeta_3(x_1 + x_4, x_2 - 1, x_3 - 2) + \zeta_3(x_1 + x_4, x_3 - 1, x_2 - 2) \\
& + \zeta_3(x_2, x_1 + x_4 - 1, x_3 - 2) + \zeta_3(x_3, x_1 + x_4 - 1, x_2 - 2) + \zeta_3(x_2, x_3 - 1, x_1 + x_4 - 2) \\
& + \zeta_3(x_3, x_2 - 1, x_1 + x_4 - 2) + \zeta_3(x_2 + x_3 - 1, x_1 - 1, x_4 - 1) + \zeta_3(x_2 + x_3 - 1, x_4 - 1, x_1 - 1) \\
& + \zeta_3(x_1, x_2 + x_3 - 2, x_4 - 1) + \zeta_3(x_4, x_2 + x_3 - 2, x_1 - 1) + \zeta_3(x_1, x_4, x_2 + x_3 - 3) \\
& + \zeta_3(x_4, x_1, x_2 + x_3 - 3) + \zeta_3(x_2 + x_4, x_1 - 1, x_3 - 2) + \zeta_3(x_2 + x_4, x_3 - 2, x_1 - 1) \\
& + \zeta_3(x_1, x_2 + x_4 - 1, x_3 - 2) + \zeta_3(x_3, x_2 + x_4 - 2, x_1 - 1) + \zeta_3(x_1, x_3, x_2 + x_4 - 3) \\
& + \zeta_3(x_3, x_1, x_2 + x_4 - 3) + \zeta_3(x_3 + x_4 - 1, x_1, x_2 - 2) + \zeta_3(x_3 + x_4 - 1, x_2 - 1, x_1 - 1) \\
& + \zeta_3(x_1, x_3 + x_4 - 1, x_2 - 2) + \zeta_3(x_2, x_3 + x_4 - 2, x_1 - 1) + \zeta_3(x_1, x_2 - 1, x_3 + x_4 - 2) \\
& + \zeta_3(x_2, x_1 - 1, x_3 + x_4 - 2) + \zeta_2(x_1 + x_2 - 1, x_3 + x_4 - 2) + \zeta_2(x_3 + x_4 - 1, x_1 + x_2 - 2) \\
& + \zeta_2(x_1 + x_3, x_2 + x_4 - 3) + \zeta_2(x_2 + x_4, x_1 + x_3 - 3) + \zeta_2(x_1 + x_4, x_2 + x_3 - 3) \\
& + \zeta_2(x_2 + x_3 - 1, x_1 + x_4 - 2) + \zeta_2(x_1 + x_2 + x_3 - 2, x_4 - 1) + \zeta_2(x_4, x_1 + x_2 + x_3 - 3) \\
& + \zeta_2(x_1 + x_2 + x_4 - 1, x_3 - 2) + \zeta_2(x_3, x_1 + x_2 + x_4 - 3) + \zeta_2(x_1 + x_3 + x_4 - 1, x_2 - 2) \\
& + \zeta_2(x_2, x_1 + x_3 + x_4 - 3) + \zeta_2(x_2 + x_3 + x_4 - 2, x_1 - 1) + \zeta_2(x_1, x_2 + x_3 + x_4 - 3) \\
& + \zeta_1(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 3).
\end{aligned}$$

Soit X_k l'ensemble des variables défini par

$$X_k = \{x_1, x_2, \dots, x_k\}.$$

Pour $k \geq 2$, nous avons le théorème suivant

Théorème 4.2.1. *Pour $k \geq 1$,*

$$V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \sum_{\substack{S \in \mathcal{S}(X) \\ l = \text{card}(S)}} \zeta_l(e_1, e_2, \dots, e_l),$$

où $S = (S_1, S_2, \dots, S_l)$ et pour $1 \leq i \leq l$, $e_i = \sum_{\substack{j=1 \\ x_j \in S_i}}^k x_j - f_i$, avec $f_i = \sum_{j=1}^k f_{i,j}^+ + f_{i,j}^-$,

$$f_{i,j}^+ = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{j+1} \in S_t, 1 \leq t \leq i-1 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

et

$$f_{i,j}^- = \begin{cases} 1, & \text{si } x_{j-1} \in S_t, 1 \leq t \leq i \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Nous commençons par donner tous les sous-ensembles ordonnés de l'ensemble $\{n_1, n_2, \dots, n_k\}$, en utilisant les relations $>$ et $=$. Notons que le nombre de ces sous-ensembles est égal au nombre de Fubini qui correspond à la suite [A000670](#) de OEIS [\[72\]](#).

Pour chaque sous-ensemble on associe $S = (S_1, S_2, \dots, S_l) \in S(X)$. Si $n_i = n_j$ alors $x_i, x_j \in S_t$ et si $n_i > n_j$ alors $n_i \in S_t, n_j \in S_m$ et $t < m$.

Pour $1 \leq j \leq k-1$ et $1 \leq i, t \leq l$, soient $x_j \in S_i$ et $x_{j+1} \in S_t$ avec $i > t$ (resp. $t < i$). Donc pour le n_j 's associé, on a $n_j < n_{j+1}$ (resp. $n_j > n_{j+1}$) et $\min(n_j, n_{j+1}) = n_j$ (resp. $\min(n_j, n_{j+1}) = n_{j+1}$). Ceci implique qu'en simplifiant la fraction, nous pouvons réduire la puissance de n_j (resp. n_{j+1}).

Sur le dénominateur nous aurons donc en facteur $n_j^{x_j-1} n_{j+1}^{x_{j+1}}$ (resp. $n_j^{x_j} n_{j+1}^{x_{j+1}-1}$). Et la variable dans la fonction zeta est $e_i = x_j - 1$ et $e_t = x_{j+1}$ (resp. $e_i = x_j$ and $e_t = x_{j+1} - 1$).

Si $x_j, x_{j+1} \in S_i$, on a alors $n_j = n_{j+1}$. En utilisant le même raisonnement, nous aurons dans la fonction zeta $e_i = x_j + x_{j+1} - 1$.

En appliquant le même raisonnement pour x_j et x_{j-1} , nous ajoutons -1 à la variable e_i ou e_t . La variable $f_{i,j}$ est donc définie pour compter -1 's pour chaque x_j dans S_i . Finalement, si le S_i contient qu'un élément, e_i est la somme de ses variables et la somme de leurs $f_{i,j}$.

□

L'Algorithme [1](#) donne la série génératrice de Dirichlet pour une largeur k .

Nous notons les fonctions suivantes :

- *Orderedpartition*(X) donne toutes les partitions ordonnées de X .
- *Index*() donne l'indice de l'élément, par exemple, $Index(x_i) = i$.
- *Append*() ajoute un élément à un vecteur, exemple $(1, 2).Append(4) = (1, 2, 4)$.

Soit $P_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$ la série génératrice de Dirichlet des polycubes parallélogrammes de largeur k et où x_i code le volume du $i^{\text{ème}}$ plateau, avec $1 \leq i \leq k$.

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_k) := \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1} \frac{\sum_{v_1 | n_1, \dots, v_k | n_k} \prod_{j=1}^{k-1} \min(v_j, v_{j+1})^{\min(\frac{n_j}{v_j}, \frac{n_{j+1}}{v_{j+1}})}}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}}$$

Le théorème suivant montre que cette série génératrice peut être exprimée en fonction de $V_k(x_1, x_2, \dots, x_k)$:

Théorème 4.2.2. *Pour $k \geq 1$,*

$$P_k(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left(V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \right)^2$$

Algorithm 1: La série génératrice de Dirichlet des polyominos parallélogrammes

input : k : Largeur du polyomino

output : V_k : La série génératrice de Dirichlet des polyominos parallélogramme de largeur k .

```
begin
   $X = \{\}$ 
   $V_k = 0$ 
  for  $i \leftarrow 1$  to  $k$  do
    |  $X \leftarrow X \cup \{x_i\}$ 
  end
   $P \leftarrow \text{Orderedpartition}(X)$ 
  for  $t \leftarrow 1$  to  $\text{Card}(P)$  do
    |  $S \leftarrow P[t]$ 
    |  $\zeta \leftarrow []$ 
    for  $i \leftarrow 1$  to  $\text{Card}(S)$  do
      |  $e_i \leftarrow 0$ 
      for  $j \leftarrow 1$  to  $\text{Card}(S[i])$  do
        |  $m \leftarrow \text{Index}(S[i, j])$ 
        |  $f1 \leftarrow 0$ 
        |  $f2 \leftarrow 0$ 
        |  $f \leftarrow 0$ 
        for  $r \leftarrow 1$  to  $i - 1$  do
          | if  $x_{m-1} \in S_r$  then
          | |  $f1 \leftarrow f1 + 1$ 
          | end
        end
        for  $r \leftarrow 1$  to  $i$  do
          | if  $x_{m+1} \in S_r$  then
          | |  $f2 \leftarrow f2 + 1$ 
          | end
        end
        |  $f \leftarrow f1 + f2$ 
        |  $e_i \leftarrow e_i + S[i, j] - f$ 
      end
    end
    |  $\zeta.\text{Append}(e_i)$ 
  end
   $V_k \leftarrow V_k + \zeta$ 
end
end
```

Preuve.

$$\begin{aligned}
P_k(x_1, x_2, \dots, x_k) &= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1} \frac{\sum_{v_1 | n_1, \dots, v_k | n_k} \prod_{j=1}^{k-1} \frac{\min(v_j, v_{j+1}) \min(\frac{n_j}{v_j}, \frac{n_{j+1}}{v_{j+1}})}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}}}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}} \\
&= \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \frac{\min(n_j, n_{j+1})}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}}}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}} \sum_{n_1, n_2, \dots, n_k \geq 1} \frac{\prod_{j=1}^{k-1} \frac{\min(n_j, n_{j+1})}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}}}{n_1^{x_1} n_2^{x_2} \dots n_k^{x_k}}
\end{aligned}$$

□

4.3 Énumération selon la hauteur, la largeur et la profondeur

Dans cette section, nous nous intéressons à l'énumération des polycubes parallélogrammes selon la largeur, la hauteur et la profondeur. Nous commençons par énumérer les polyominoes parallélogrammes selon la largeur et la hauteur. Ensuite, à partir de ces résultats, nous déduisons une formule pour les polycubes parallélogrammes selon la hauteur, la largeur et la profondeur.

Lemme 4.3.1. [37] *Soient $k, n \geq 1$ et $g_{k,n}$ le nombre de polyominoes parallélogrammes de largeur k et de hauteur n . alors,*

$$g_{k,n} = \frac{1}{k+n-1} \binom{k+n-1}{k} \binom{k+n-1}{n}.$$

À partir de ce lemme nous en déduisons le théorème suivant :

Théorème 4.3.1. *Soit $s_{k,n,m}$ le nombre de polycubes parallélogrammes de largeur k , hauteur n et profondeur m . Alors pour $k, n, m \geq 1$, nous avons,*

$$s_{k,n,m} = \frac{nm}{k^2(n+k-1)(m+k-1)} \binom{n+k-1}{k-1}^2 \binom{m+k-1}{k-1}^2$$

Preuve. Pour chaque paire de polyominoes parallélogrammes ayant la même largeur k , nous pouvons construire un unique polycube de largeur k . Si la hauteur du premier est n , alors la hauteur du polycube est aussi n et, si la hauteur du deuxième est m , alors la profondeur du polycube est aussi m .

D'après Lemme [4.3.1], le nombre de polyominoes parallélogramme de largeur k et de hauteur n est

$$\frac{1}{n+k-1} \binom{n+k-1}{k} \binom{n+k-1}{n}.$$

Donc, en faisant le produit on obtient :

$$s_{k,n,m} = \frac{1}{(n+k-1)(m+k-1)} \binom{n+k-1}{n} \binom{n+k-1}{k} \binom{m+k-1}{m} \binom{m+k-1}{k}.$$

En utilisant l'identité binomiale suivante :

$$\binom{n+k-1}{k} = \binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} \quad [67],$$

nous obtenons,

$$\begin{aligned} \frac{1}{(n+k-1)} \binom{n+k-1}{k} \binom{n+k-1}{k-1} &= \frac{1}{(n+k-1)} \left[\binom{n+k}{k} - \binom{n+k-1}{k-1} \right] \binom{n+k-1}{k-1} \\ &= \frac{1}{(n+k-1)} \left[\left(\frac{n+k}{k} - 1 \right) \binom{n+k-1}{k-1} \right] \binom{n+k-1}{k-1} \\ &= \frac{n}{k(n+k-1)} \binom{n+k-1}{k-1}^2, \end{aligned}$$

En remplaçant, on obtient le résultat. □

Quelques séquences de l'OEIS [72] apparaissent pour certaines valeurs k , n and m . Nous en donnons quelques-unes.

— Si $n = m$ on obtient la suite [A174158]. Sa valeur est

$$\left(\binom{k-1}{n-1} \binom{k}{n-1} / n \right)^2.$$

— Si $n = k = 2$ on obtient la suite [A045943]. Sa valeur est

$$3m(m+1)/2.$$

Il correspondent aux nombres triangulaires de Matchstick.

— Si $n = m$ et $k = 1$ on obtient la suite [A000891]. Sa valeur est

$$(2n)!(2(n+1))!/(n!(n+1)!)^2.$$

— Si $\sum_{n+k=l} s_{k,n,n}$ on obtient la suite [A319743].

4.4 Généralisation pour une dimension quelconque

Dans cette section, les résultats trouvés pour les polycubes sont généralisés pour une dimension $d \geq 4$.

De cette définition, nous déduisons le lemme suivant :

Lemme 4.4.1. *La projection d'un polyhypercube parallélogramme sur chaque plan donne un polyomino parallélogramme.*

Démonstration. La preuve est similaire à celle du Lemme [2.6.1] du Chapitre 2. □

De ce lemme, nous déduisons que les résultats des deux sections précédentes, peuvent être généralisés au cas d'une dimension $d \geq 4$.

Soit $P_{d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k)$ la série génératrice des polyhypercubes parallélogrammes de dimension d , de largeur k et où x_i code le volume du $i^{\text{ème}}$ hyperplateau. Alors, $P_{d,k}$ peut être

exprimée en fonction de V_k la série génératrice des polyomino parallélogrammes de largeur k .

Théorème 4.4.1. *Pour $d \geq 4$ et $k \geq 1$,*

$$P_{d,k}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \left(V_k(x_1, x_2, \dots, x_k) \right)^{d-1}.$$

Preuve. La preuve est la même que le cas de dimension 3. Cela se déduit du fait que la projection des polyhypercubes parallélogrammes dans chaque plan donne un polyomino parallélogramme. Le volume du $i^{\text{ème}}$ hyperplateau est égal au produit des aires des $i^{\text{ème}}$ colonnes des polyomino obtenus par les projections $1 \leq i \leq k$. \square

Comme rappelé dans la section précédente, l'énumération des polycubes parallélogrammes est reliée au cas des polyomino. Plus exactement, par définition d'un polycube parallélogramme dans [22], les projections d'un polycube parallélogramme sur les plans $(0, \vec{i}, \vec{j})$ et $(0, \vec{i}, \vec{k})$ donnent deux polyomino parallélogrammes. Ces derniers ont la même largeur que le polycube. Ainsi, à partir de deux polyomino parallélogrammes de même largeur, nous pouvons construire un unique polycube. Un exemple est donné sur la Figure 4.4.

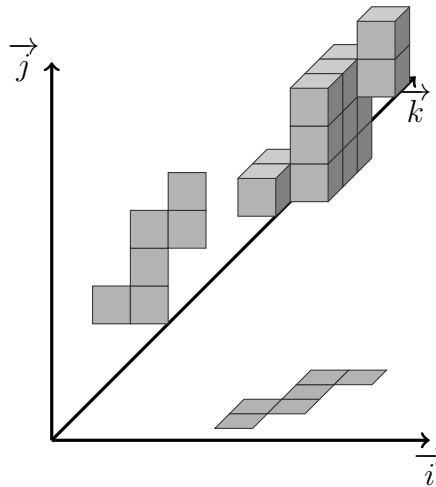


FIGURE 4.4 – Polycube parallélogramme et ses projections.

Soit $s_{k,n_1,\dots,n_{d-1}}$ le nombre de polyhypercubes parallélogrammes de dimension d , largeur k et dont la $i^{\text{ème}}$ hauteur est égale à n_i , avec $i = 1 \dots d - 1$.

Théorème 4.4.2. *Pour $d \geq 4$, $k \geq 1$ et $n_i \geq 1$ avec $i = 1 \dots d - 1$,*

$$s_{k,n_1,\dots,n_{d-1}} = \frac{1}{k^{d-1}} \prod_{i=1}^{d-1} \frac{n_i}{n_i + k - 1} \binom{n_i + k - 1}{k - 1}^2.$$

Preuve. La preuve de ce théorème est similaire à celle du cas d'un polycube. Comme vu dans la Section 4.3, la projection d'un hyperpolycube sur les différents plans donne des polyomino parallélogramme sur chacune d'elle. La largeur de chaque polyomino est égal à

celle du polycube et les hauteur de chaque polyomino correspondent à la $i^{\text{ème}}$ hauteur du polyhypercube. Nous en déduisons donc la formule. \square

Chapitre 5

Énumération des polyominos parallélogramme et des polycubes espaliers

5.1 Introduction

Certaines sous-familles particulières des polycubes parallélogrammes ont été étudiés dans la littérature. Citons, par exemple, les polycubes espaliers qui sont une généralisation des diagrammes de Ferrers [22]. Les premières valeurs de cette énumération, selon le volume, sont données dans la suite A229915 du OEIS [72].

Dans ce chapitre, nous proposons une autre nouvelle approche pour les polyominos parallélogrammes. Pour cela, nous exploitons la propriété de collage vue dans la Proposition 4.2.1 du Chapitre 4 pour les énumérer selon l'aire.

Nous nous intéressons ensuite aux polycubes espaliers que nous allons énumérer selon la largeur, la hauteur et la profondeur ainsi que le demi-périmètre.

5.2 Polyominos parallélogrammes à colonne fixée

Énumérons, dans un premier temps, les polyominos parallélogrammes selon l'aire et un nouveau paramètre la hauteur de la plus courte colonne.

Soit un polyomino parallélogramme R . Notons par C la colonne dont la hauteur est la plus courte. Sa hauteur est notée c .

Dans le polyomino parallélogramme représenté dans Figure 5.1, la plus courte colonne est la quatrième colonne et sa hauteur est égale à 2.

Soit $a_{n,c}$ le nombre de polyominos parallélogrammes d'aire n et dont la plus petite colonne est de hauteur c .

Pour énumérer ces polyominos selon ces paramètres, nous utilisons la Proposition 4.2.1 du Chapitre 4 sur les polyominos parallélogrammes : le nombre de collages entre deux colonnes de hauteurs n_1 et n_2 est égal $\min(n_1, n_2)$ (Voir Figure 5.2).

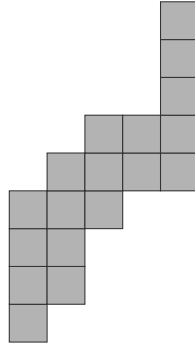


FIGURE 5.1 – Polyomino parallélogramme dont la colonne la plus courte est la 4^{ème}.

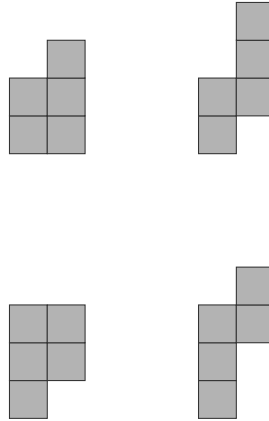


FIGURE 5.2 – Collages de deux colonnes pour former un polyomino parallélogramme.

Pour réaliser cette énumération, on commence par fixer la colonne dont la hauteur est la plus courte. Puis, nous énumérons tous les cas de collage de polyominos à droite et à gauche de cette colonne. Il faut noter qu'il peut y avoir plusieurs colonnes dont la hauteur est minimale.

Pour éviter toute ambiguïté, on construit tous les polyominos parallélogrammes (non-vides) de la façon suivante :

- On considère une colonne C de hauteur $c \geq 1$ qui sera la colonne la plus courte.
- On colle ensuite, à sa gauche, un polyomino parallélogramme dont chaque colonne est de hauteur strictement supérieurs à c .
- Puis on colle à la droite de C un polyomino parallélogramme dont chaque colonne est de hauteur supérieure ou égale à c .

Il est à noter que les polyominos parallélogrammes que l'on colle à C peuvent être vides.

Cette construction étant unique pour un polyomino parallélogramme donné, on peut en déduire une récurrence pour calculer $a_{n,c}$. On obtient le théorème suivant.

Théorème 5.2.1. *Pour $n \geq c \geq 1$,*

$$a_{n,c} = \begin{cases} 1, & \text{si } n=c \\ c \left(\sum_{j \geq c+1} a_{n-c,j} + \sum_{k \geq c} a_{n-c,k} \right) + c^2 \sum_{i=1}^{n-c-1} \left(\sum_{j \geq c+1} a_{i,j} \right) \left(\sum_{k \geq c} a_{n-c-i,k} \right) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Dans le cas où $n = c$, nous avons une seule colonne.

Dans les autres cas, pour construire un polyomino parallélogramme d'aire n et dont la colonne la plus courte est égale à c , nous commençons par fixer cette colonne C . Il faut envisager trois cas :

- On colle uniquement à gauche de C un polyomino parallélogramme d'aire $n - c$ et dont la hauteur de la plus courte colonne est j . Ces polyominos sont en nombre de $a_{n-c,j}$. En sommant pour toutes les valeurs de j possibles, on obtient $\sum_{j \geq c+1} a_{n-c,j}$. Puisque la hauteur de C est c , il y a exactement c façons de coller à gauche à un polyomino parallélogramme.
- Finalement, il y a dans ce cas $c \sum_{j \geq c+1} a_{n-c,j}$ possibilités.
- On colle uniquement à droite de C un polyomino parallélogramme d'aire $n - c$ et dont la hauteur de la plus courte colonne est k . Par un raisonnement similaire au cas précédent, on obtient $c \sum_{k \geq c} a_{n-c,k}$ possibilités.
- Le dernier cas est celui où l'on colle à la fois à droite et à gauche de C un polyomino parallélogramme. Si l'aire du polyomino de droite est égale à i , alors l'aire de celui de gauche doit être égale à $n - c - i$. De plus, il y a c possibilités de collages à droite et à gauche, ce qui donne c^2 collages différents. En suivant le même raisonnement que précédemment, on obtient la facteur $c^2 \sum_{i=1}^{n-c-1} (\sum_{j \geq c+1} a_{i,j}) (\sum_{k \geq c} a_{n-c-i,k})$.

En sommant tous les cas nous obtenons la formule. □

Le Tableau 5.1 donne les premières valeurs de $a_{n,c}$, le nombre de polyominos parallélogrammes d'aire n et dont la hauteur de la plus courte colonne est égale à c .

$n \setminus c$	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0
3	3	0	1	0	0	0	0
4	6	2	0	1	0	0	0
5	15	4	0	0	1	0	0
6	34	8	3	0	0	1	0
7	82	16	6	0	0	0	1

TABLE 5.1 – Les premières valeurs de $a_{n,c}$.

En sommant chaque ligne, nous obtenons la suite A006958 de OEIS [72] qui énumère le nombre de polyominos parallélogrammes à n cellules.

Détaillons à titre d'exemple le calcul de $a_{5,1}$.

Commençons par fixer une colonne C de hauteur 1 (voir Figure 5.3).



FIGURE 5.3 – Colonne de hauteur 1.

Dans le premier cas, nous collons à gauche de la cellule un polyomino parallélogramme

d'aire 4 et dont la plus courte colonne est supérieure strictement à 1. Il y en a 3, un dont la plus courte colonne est 4 et deux dont la plus courte est 2 (voir Figure 5.4).

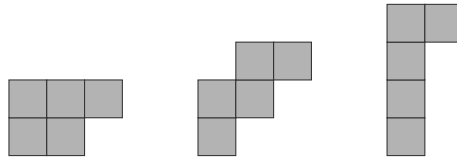


FIGURE 5.4 – Collage d'un polyomino à gauche d'aire 4.

Dans le deuxième cas, nous collons un polyomino parallélogramme d'aire 4 à droite de la cellule et dont la plus courte colonne est de hauteur supérieure ou égale à 1. Il y a 9 possibilités (voir Figure 5.5).

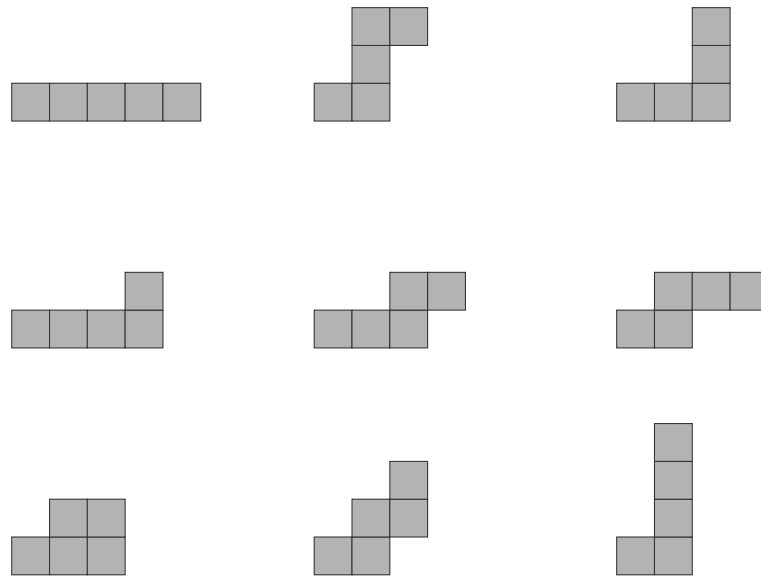


FIGURE 5.5 – Collage d'un polyomino à gauche d'aire 4.

Dans le troisième cas, nous collons à gauche de la cellule un polyomino parallélogramme d'aire 3 et dont la hauteur de la plus courte colonne est supérieure strictement à 1 et nous collons à droite un polyomino parallélogramme d'aire 1 dont la hauteur de la plus courte colonne est supérieure ou égale à 1. Nous avons 1 possibilité à gauche et une possibilité à droite, ce qui donne un polyomino parallélogramme possible (voir Figure 5.6).

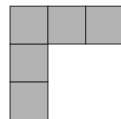


FIGURE 5.6 – Collage d'un polyomino parallélogramme à gauche d'aire 3 et à droite d'aire 1.

Dans le quatrième cas, nous collons un polyomino parallélogramme à gauche d'aire 2 et dont la hauteur de la plus courte colonne est supérieure strictement à 1 et nous collons à droite un polyomino parallélogramme d'aire 2 et dont la hauteur de la plus courte colonne

est supérieure ou égale à 1. Nous avons 1 possibilité à gauche et 2 possibilités à droite, ce qui donne deux polyominos parallélogrammes possibles (voir Figure 5.7).

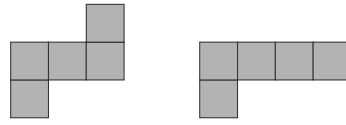


FIGURE 5.7 – Collage d’un polyomino parallélogramme à gauche d’aire 2 et à droite d’aire 2.

Dans le dernier cas, nous collons un polyomino à gauche de la cellule d’aire 1 et dont la hauteur de la plus courte colonne est supérieure strictement à 1 et nous collons à droite un polyomino d’aire 3 dont la hauteur de la plus courte colonne est supérieure ou égale à 1. Cette situation n’est pas possible car un polyomino d’aire 1 aura forcément une colonne de hauteur 1 (une cellule).

5.3 Énumération des polycubes espaliers

Dans cette section, nous nous intéressons à l’énumération des polycubes espaliers selon la hauteur, la largeur et la profondeur.

Soit $E(x, y, z)$ la série génératrice des polycubes espaliers selon la largeur (codée par x), la hauteur (codée par y) et la profondeur (codée par z).

La série génératrice vérifie donc l’équation fonctionnelle de la proposition suivante.

Proposition 5.3.1.

$$E(x, y, z) = \frac{xyz}{(1-y)(1-z)} + E(x, y, z) \frac{x}{(1-y)(1-z)}.$$

Preuve. Pour énumérer les polycubes, on doit considérer deux cas (voir Figure 5.8) :

- Le polycube est un plateau, la série génératrice est alors déduite de la façon suivante :
Considérons un plateau de hauteur h et de profondeur p . Sa contribution dans la série génératrice est alors de

$$xy^h z^p.$$

Si on somme pour toutes les hauteurs et profondeurs possibles on obtient :

$$x \sum_{h \geq 1} y^h \sum_{p \geq 1} z^p,$$

qui est égale à

$$\frac{xyz}{(1-y)(1-z)}.$$

- Le polycube espalier est un plateau collé à un autre polycube espalier, la série génératrice est alors déduite de la façon suivante :

Collons à droite du polycube espalier un plateau plus haut que le dernier plateau de h cellules et plus en profondeur de p cellules. La contribution dans la série génératrice est alors de

$$E(x, y, z)xy^h z^p.$$

Si on somme pour toutes les hauteurs et profondeurs possibles on obtient :

$$E(x, y, z)x \sum_{h \geq 0} y^h \sum_{p \geq 0} z^p,$$

qui est égale à

$$E(x, y, z) \frac{x}{(1-y)(1-z)}.$$

Il faut noter que l'on somme pour $h, p \geq 0$ car le plateau ajouté peut être de même hauteur ou profondeur que le dernier plateau du polycube espalier.

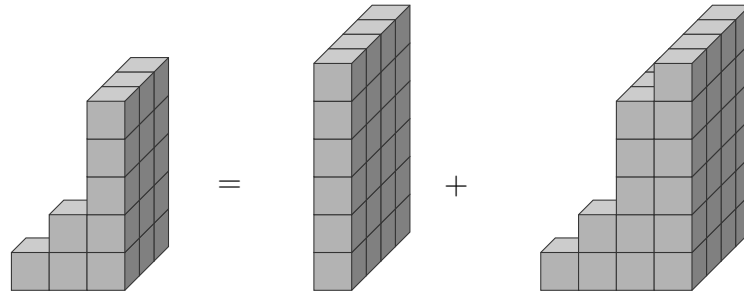


FIGURE 5.8 – Décomposition d'un polycube espalier.

□

En résolvant l'équation, nous obtenons la série génératrice des polycubes espaliers.

Proposition 5.3.2. *La série génératrice des polycubes espaliers selon la largeur (codée par x), la hauteur (codée par y) et la profondeur (codée par z) est :*

$$E(x, y, z) = \frac{xyz}{(1-y)(1-z) - x}.$$

En mettant $t = x = y = z$, nous obtenons la série génératrice selon le demi-périmètre.

Théorème 5.3.1. *La série génératrice des polycubes espaliers selon le demi-périmètre (codée par t) est :*

$$E(x) = \frac{t^3}{1 - 3t - t^2}.$$

De la série génératrice, nous déduisons la proposition suivante.

Proposition 5.3.3. *Soit s_t le nombre de polycubes espaliers de demi-périmètre t . On a*

$$s_t = F_{2(t-2)},$$

où F_n dénote le $n^{\text{ème}}$ nombre de Fibonacci.

Preuve. En développant la série génératrice, nous obtenons le résultat. □

Conclusion

Nous nous sommes intéressés dans cette thèse à l'énumération de quelques familles de polycubes.

Dans la première partie, nous avons énuméré les polycubes plateau et les polycubes plateaux dirigés selon différents paramètres. Nous avons d'abord introduit un nouveau paramètre, l'aire latérale, qui nous a permis de proposer une nouvelle énumération. L'intérêt de ce paramètre est double, il permet d'une part d'énumérer les polycubes indépendamment de la direction et aussi il permet d'approximer l'aire. En effet, à notre connaissance ce problème reste ouvert pour toutes les familles de polycubes connues. Nous avons ensuite généralisé quelques résultats pour les polyhypercubes. Nous avons aussi exploité les propriétés de collage et de projection pour énumérer des polycubes convexes dirigés ou non.

Dans une deuxième partie, nous avons approché les polycubes parallélogramme de différentes façons. En utilisant les séries génératrices de Dirichlet et les projections. Ces résultats, nous ont permis d'obtenir quelques nouvelles pistes pour cette famille. Nous avons aussi énuméré les polyominoes parallélogrammes et les polycubes espaliers, deux familles liées aux polycubes parallélogrammes.

En utilisant le paramètre de l'aire latérale, on pourrait approcher d'autres familles de polycubes avec des contraintes de convexité et de symétrie.

Aussi, il serait intéressant d'utiliser les propriétés de projections pour trouver d'autres relations entre polyominoes et polycubes.

Bibliographie

- [1] G. Aleksandrowicz and G. Barequet. Counting d-dimensional polycubes and nonrectangular planar polyominoes. *International Journal of Computational Geometry & Applications*, 19(03) :215–229, 2009.
- [2] G. E. Andrews. *The theory of partitions*. Number 2. Cambridge university press, 1998.
- [3] A. Arabi, H. Belbachir, and J.-Ph. Dubernard. Enumeration of parallelogram polycubes. *arXiv preprint arXiv :2105.00971*, 2021.
- [4] A. Arabi, H. Belbachir, and J.-Ph. Dubernard. Enumeration of plateau polycubes with respect to their lateral area. *Indian Journal of Pure and Applied Mathematics*, pages 1–17, 2023.
- [5] E. Barcucci, F. Bertoli, A. Del Lungo, and R. Pinzani. The average height of directed column-convex polyominoes having square, hexagonal and triangular cells. *Mathematical and Computer Modelling*, 26(8-10) :27–36, 1997.
- [6] E. Barcucci, A. Frosini, and S. Rinaldi. On directed-convex polyominoes in a rectangle. *Discrete mathematics*, 298(1-3) :62–78, 2005.
- [7] E. Barcucci, A. D. Lungo, E. Pergola, and R. Pinzani. Eco : a methodology for the enumeration of combinatorial objects. *Journal of Difference Equations and Applications*, 5(4-5) :435–490, 1999.
- [8] E. Barcucci, A. Del Lungo, M. Nivat, and R. Pinzani. Reconstructing convex polyominoes from horizontal and vertical projections. *Theoretical computer science*, 155(2) :321–347, 1996.
- [9] E. Barcucci, R. Pinzani, E. Rodella, and R. Sprugnoli. A characterization of binary search networks. In *Fundamentals of Computation Theory : 8th International Conference, FCT'91 Gosen, Germany, September 9–13, 1991 Proceedings*, pages 126–135. Springer, 1991.
- [10] E. Barcucci, R. Pinzani, and R. Sprugnoli. Directed column-convex polyominoes by recurrence relations. In *Colloquium on Trees in Algebra and Programming*, pages 282–298. Springer, 1993.
- [11] G. Barequet and G. Ben-Shachar. Algorithms for counting minimum-perimeter lattice animals. *Algorithmica*, 85(1) :75–99, 2023.

- [12] G. Barequet, S. W. Golomb, and D. A. Klarner. Polyominoes. In *Handbook of Discrete and Computational Geometry*, pages 359–380. Chapman and Hall/CRC, 2017.
- [13] R. Barequet, G. Barequet, and G. Rote. Formulae and growth rates of high-dimensional polycubes. *Combinatorica*, 30 :257–275, 2010.
- [14] A. T. Benjamin and J. J. Quinn. *Proofs that really count : the art of combinatorial proof*, volume 27. American Mathematical Soc., 2003.
- [15] M. Bousquet-Mélou. A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons. *Discrete Mathematics*, 154(1-3) :1–25, 1996.
- [16] M. Bousquet-Mélou. Percolation models and animals. *European Journal of Combinatorics*, 17(4) :343–369, 1996.
- [17] M. Bousquet-Mélou and R. Brak. Exactly solved models. *Polygons, polyominoes and polycubes*, pages 43–78, 2009.
- [18] M. Bousquet-Mélou and A. Rechnitzer. The site-perimeter of bargraphs. *Advances in Applied Mathematics*, 31(1) :86–112, 2003.
- [19] M. Bousquet-Mélou. *Combinatoire énumérative*. habilitation, LaBRI Université de Bordeaux I, 1996.
- [20] A. Boussicault, S. Rinaldi, and S. Socci. The number of directed k-convex polyominoes. *Discrete Mathematics*, 343(3) :111731, 2020.
- [21] S. R. Broadbent and J. M. Hammersley. Percolation processes : I. crystals and mazes. In *Mathematical proceedings of the Cambridge philosophical society*, volume 53, pages 629–641. Cambridge University Press, 1957.
- [22] C. Carré, N. Debroux, M. Deneufchâtel, J.-Ph. Dubernard, C. Hillairet, J.-G. Luque, and O. Mallet. Enumeration of polycubes and dirichlet convolutions. *J. Integer Seq.*, 18(11) :15–11, 2015.
- [23] G. Castiglione and A. Restivo. Reconstruction of l-convex polyominoes. *Electronic Notes in Discrete Mathematics*, 12 :290–301, 2003.
- [24] J.-M. Champarnaud, Q. Cohen-Solal, J.-Ph. Dubernard, and H. Jeanne. Enumeration of specific classes of polycubes. *the electronic journal of combinatorics*, 20(4) :P26, 2013.
- [25] J.-M. Champarnaud, J.-Ph. Dubernard, and H. Jeanne. An efficient algorithm to test whether a binary and prolongeable regular language is geometrical. *International Journal of Foundations of Computer Science*, 20(04) :763–774, 2009.
- [26] J.-M. Champarnaud, J.-Ph. Dubernard, and H. Jeanne. A generic method for the enumeration of various classes of directed polycubes. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, Vol. 15 no. 1, 2013.
- [27] A. Choquet-Geniet and G. Largeteau-Skapin. Real-time scheduling using regularity criteria and a geometrical approach. *International Journal of Critical Computer-Based Systems*, 2(3-4) :266–287, 2011.

- [28] Henry Cohn, Michael Larsen, and James Propp. The shape of a typical boxed plane partition. *arXiv preprint math/9801059*, 1998.
- [29] L. Comtet. *Advanced Combinatorics : The art of finite and infinite expansions*. Springer Science & Business Media, 1974.
- [30] A. R. Conway and A. J. Guttmann. On two-dimensional percolation. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 28(4) :891, 1995.
- [31] M. Delest, J.-Ph. Dubernard, and I. Dutour. Parallelogram polyominoes and corners. *Journal of Symbolic Computation*, 20(5-6) :503–515, 1995.
- [32] M.-P. Delest. *Utilisation des langages algébriques et du calcul formel pour le codage et l'énumération des polyominos*. Thèse de doctorat, Bordeaux 1, 1987.
- [33] M.-P. Delest. Generating functions for column-convex polyominoes. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 48(1) :12–31, 1988.
- [34] M. P. Delest and S. Dulucq. Enumeration of directed column-convex animals with a given perimeter and area. *Croatica Chemica Acta*, 66(1) :59–80, 1993.
- [35] M.-P. Delest, D. Gouyou-Beauchamps, and B. Vauquelin. Enumeration of parallelogram polyominoes with given bond and site perimeter. *Graphs and Combinatorics*, 3 :325–339, 1987.
- [36] M.-P. Delest and G. Viennot. Algebraic languages and polyominoes enumeration. *Theoretical Computer Science*, 34(1-2) :169–206, 1984.
- [37] E. Deutsch. Dyck path enumeration. *Discrete Mathematics*, 204(1-3) :167–202, 1999.
- [38] D. Dhar. Equivalence of the two-dimensional directed-site animal problem to baxter's hard-square lattice-gas model. *Physical Review Letters*, 49(14) :959, 1982.
- [39] J.-Ph. Dubernard. *Énumérations, Automates et Langages Géométriques*. habilitation, Université de Rouen-Normandie, 2011.
- [40] J.-Ph. Dubernard and I. Dutour. Énumération de polyominos convexes dirigés. *Discrete Mathematics*, 157(1-3) :79–90, 1996.
- [41] M. Eden. A two-dimensional growth process. In *Fourth Berkeley symposium on mathematical statistics and probability*, pages 223–239, 1961.
- [42] S. Feretić. The area generating function for the column-convex polyominoes on the checkerboard lattice. *Croatica Chemica Acta*, 68(1) :75–90, 1995.
- [43] S. Feretić. A perimeter enumeration of column-convex polyominoes. *Discrete Mathematics & Theoretical Computer Science*, 9, 2007.
- [44] S. Feretić and D. Svrtan. Combinatorics of diagonally convex directed polyominoes. *Discrete Mathematics*, 157(1-3) :147–168, 1996.
- [45] W. Gao and W. Wang. Second atom-bond connectivity index of special chemical molecular structures. *Journal of Chemistry*, 2014, 2014.

- [46] I. Gessel. On the number of convex polyominoes. *Ann. Sci. Math. Québec*, 24(1) :63–66, 2000.
- [47] Solomon W Golomb. Checker boards and polyominoes. *The American Mathematical Monthly*, 61(10) :675–682, 1954.
- [48] A. Goupil, M.-E. Pellerin, and de J. Wouters d’oplinter. Partially directed snake polyominoes. *Discrete Applied Mathematics*, 236 :223–234, 2018.
- [49] D. Gouyou-Beauchamps and G. Viennot. Equivalence of the two-dimensional directed animal problem to a one-dimensional path problem. *Advances in Applied Mathematics*, 9(3) :334–357, 1988.
- [50] A. J. Guttmann. History and introduction to polygon models and polyominoes. *Polygons, Polyominoes and Polycubes*, pages 1–21, 2009.
- [51] F. Harary and R. C. Read. The enumeration of tree-like polyhexes. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society*, 17(1) :1–13, 1970.
- [52] M. Hoffman. Multiple harmonic series. *Pacific Journal of Mathematics*, 152(2) :275–290, 1992.
- [53] I. Jensen. Counting polyominoes : A parallel implementation for cluster computing. In *Computational Science—ICCS 2003 : International Conference, Melbourne, Australia and St. Petersburg, Russia June 2–4, 2003 Proceedings, Part III 3*, pages 203–212. Springer, 2003.
- [54] I. Jensen and A. J. Guttmann. Statistics of lattice animals (polyominoes) and polygons. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 33(29) :L257, 2000.
- [55] D. A. Klarner. Some results concerning polyominoes. *Fibonacci Quart*, 3(9) :20, 1965.
- [56] G. Largeteau-Skapin and D. Geniet. Quantification du taux d’invalidité d’applications temps réel à contraintes strictes. *Revue des Sciences et Technologies de l’Information-Série TSI : Technique et Science Informatiques*, 27(5) :589–625, 2008.
- [57] K. Y. Lin. Perimeter generating function for row-convex polygons on the rectangular lattice. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 23(20) :4703, 1990.
- [58] K. Y. Lin and S. J. Chang. Rigorous results for the number of convex polygons on the square and honeycomb lattices. *Journal of Physics A : Mathematical and General*, 21(11) :2635, 1988.
- [59] W. F. Lunnon. Counting polyominoes. *Computers in number theory*, pages 347–372, 1971.
- [60] S. Luther and S. Mertens. Counting lattice animals in high dimensions. *Journal of Statistical Mechanics : Theory and Experiment*, 2011(09) :P09026, 2011.
- [61] T. Mansour, J. L. Ramírez, and D. A. Toquica. Counting lattice points on bargraphs of catalan words. *Mathematics in Computer Science*, pages 1–13, 2021.
- [62] T. Mansour and A. S. Shabani. Smooth column convex polyominoes. *Discrete & Computational Geometry*, 68(2) :525–539, 2022.

- [63] T. Mansour and M. Shattuck. Bargraph statistics on words and set partitions. *Journal of Difference Equations and Applications*, 23(6) :1025–1046, 2017.
- [64] Toufik Mansour and Reza Rastegar. Enumeration of various animals on the triangular lattice. *European Journal of Combinatorics*, 94 :103294, 2021.
- [65] George Martin. *Polyominoes : A guide to puzzles and problems in tiling*. Cambridge University Press, 1991.
- [66] G. Pólya. On the number of certain lattice polygons. *Journal of Combinatorial Theory*, 6(1) :102–105, 1969.
- [67] J. Quaintance and H. W. Gould. *Combinatorial identities for Stirling numbers : the unpublished notes of HW Gould*. World Scientific, 2015.
- [68] R. C. Read. Contributions to the cell growth problem. *Canadian Journal of Mathematics*, 14 :1–20, 1962.
- [69] D. H. Redelmeier. Counting polyominoes : yet another attack. *Discrete Mathematics*, 36(2) :191–203, 1981.
- [70] C. Richard. Scaling behaviour of two-dimensional polygon models. *Journal of Statistical Physics*, 108 :459–493, 2002.
- [71] E. Duchian and S. Rinaldi and G. Schaeffer. The number of z-convex polyominoes. *Advances in applied mathematics*, 40(1) :54–72, 2008.
- [72] N. J. Sloane. Oeis foundation inc. *The On-Line Encyclopedia of Integer Sequences*.
- [73] D. Stau. Introduction to percolation theory, 1994.
- [74] H. N. V. Temperley. Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules. *Physical Review*, 103(1) :1, 1956.
- [75] G. X. Viennot. Heaps of pieces, i : Basic definitions and combinatorial lemmas. In *Combinatoire énumérative : Proceedings of the “Colloque de combinatoire énumérative”, held at Université du Québec à Montréal, May 28–June 1, 1985*, pages 321–350. Springer, 2006.
- [76] X. G. Viennot. *A survey of polyominoes enumeration*. Institut Mittag-Leffler, 1991.
- [77] H. S. Wilf. *generatingfunctionology*. CRC press, 2005.
- [78] Z. Yarahmadi and A. R. Ashrafi and S. Moradi. Extremal polyomino chains with respect to zagreb indices. *Applied mathematics letters*, 25(2) :166–171, 2012.
- [79] T. Yuba and M. Hoshi. Binary search networks : a new method for key searching. *Information processing letters*, 24(1) :59–65, 1987.