N° d'ordre : 09/2023-D/MT

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques

THÈSE DE DOCTORAT EN SCIENCES

Présentée pour l'obtention du grade de **DOCTEUR**

En : **Mathématiques**

Spécialité : Algèbre et Théories des Nombres

Par : **DJOUMAKH AKILA**

Sujet

SUITES RÉCURRENTES SOLUTIONS D'ÉQUATIONS DIOPHANTIENNES

Soutenue publiquement, le 24/05/2023, devant le jury composé de :

M. MIHOUBI Miloud	Professeur	USTHB	Président
M. BEHLOUL Djilali	Professeur	USTHB	Directeur de thèse
M. AHMIA Moussa	MCA	U. Jijel	Examinateur
M. RIHANE Salah Eddine	MCA	ENSM-Alger	Examinateur
M. AIT-AMRANE Lyes	Professeur	ESI	Invité

Remerciements

Arrivant à faire une thèse on dit "Al-hamdou li Allah". Je voudrais aussi adresser toute ma gratitude à mon directeur de thèse le Professeur BEHLOUL DJILALI pour son encadrement, sa rigueur, sa grande disponibilité et au professeur AIT AMRANE Lyes de l'École Supérieure d'Informatique (ESI) pour son aide très importante, sa patience, sa disponibilité, ses conseils précieux et ses remarques pertinentes, qui ont contribué à alimenter ma réfléxion.

Je voudrais aussi adresser mes vifs remerciements au Professeur MIHOUBI Miloud de la faculté de Mathématiques pour m'avoir fait l'honneur de présider ce jury.

Aussi, pour m'avoir fait l'honneur d'accepter de faire partie de ce jury et d'avoir bien voulu examiner ce travail, je tiens vivement à remercier Monsieur AHMIA Moussa MCA à l'université Mohammed Seddik BenYahia de Jijel. Monsieur RIHANE Salah Eddine MCA à l'école nationale supérieure de mathématiques

C'est avec une grande émotion que je désire remercier les personnes qui jouent un rôle important dans ma vie personnelle, académique et professionnelle.

Je remercie infiniment mes parents de leur soutien et de leur amour.

Je remercie mon mari pour son encouragement, sa compréhension, sa patiente et surtout d'avoir cru en moi.

Je ne peux pas terminer mes remerciements sans remercier mes amies qui représentent une force pour moi.

Merci à tous.

Résumé — Dans cette thèse, on présente des nouvelles identités impliquant les suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas. Ensuite, on résout complètement certaines équations Diophantiennes en termes de suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas.

Mots clés : Suite bi-périodique de Fibonacci, suite bi-périodique de Lucas, équation Diophantienne, équation de Pell-Fermat.

Abstract — In this thesis, we present new identities involving bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences. Then, we solve completely some quadratic Diophantine equations involving bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences.

Keywords : Bi-periodic Fibonacci sequence, Bi-periodic Lucas sequence, Diophantine equation, Pell-Fermat equation

Table des matières

Notations

1. $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \cdots\}$: ensembles des entiers naturels.
2. $\mathbb{N}^* = \{1, 2, 3, \cdots\}$: ensembles des entiers naturels non nuls.
3. $\mathbb{Z}$: ensembles des entiers rationnels.
4. $\mathbb{Q}$: ensembles des nombres rationnels.
5. $\mathbb{R}$: ensembles des nombres réels.
6. $\mathbb{C}$: ensembles des nombres complexes.
7. ξ : la fonction de parité, i.e. $\xi(n) = 1$ si n est pair et $\xi(n) = 0$ si n est impair.
8. $\lfloor x \rfloor$: la partie entière d'un réel x, i.e. l'unique entier rationnel k vérifiant : $x - 1 < k \leq x$
9. F_n : n-ieme terme de la suite de Fibonacci.
10. L_n : n-ieme terme de la suite de Lucas.
11. q_n : n-ieme terme de la suite bi-periodique de Fibonacci.
12. l_n : n-ieme terme de la suite bi-periodique de Lucas.
13. u_n : n-ieme terme de la suite généralisée de Fibonacci.
14. v_n : n-ieme terme de la suite généralisée de Lucas.

Introduction

Les équations Diophantiennes et les suites récurrentes linéaires ont plusieurs applications dans beaucoup de sciences comme la biologie et l'astronomie, ...etc, et par ce fait, ils ont intéréssé plusieurs auteurs. De nombreuses méthodes ont été utilisées à l'étude théorique des équations Diophantiennes, parmi elles la résolution en terme de suites récurrentes qui a intéressé plusieurs auteurs :[Bil14 ; DBK13 ; AAB17 ; DK09 ; Jon76 ; KD13 ; McD95 ; Sav09].

Dans cette thèse nous présentons des nouvelles identités sur des suites récurrentes appelées les suites bi-périodiques de Fibonacci $(q_n)_n$ et de Lucas $(l_n)_n$, qui sont une généralisation de suites de Fibonacci et de Lucas définies respectivement par Edson et Yayenie dans [EY09], comme suit :

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad n \geq 2,$$

Et par Bilgici dans [Bil14], comme suit :

$$l_0 = 2, \quad l_1 = a, \quad l_n = \begin{cases} bl_{n-1} + l_{n-2}, & \text{si } n \text{ est pair} \\ al_{n-1} + l_{n-2}, & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}, \quad n \geq 2.$$

Ensuite, nous utilisons ces identités pour définir des équations Diophantiennes quadratiques et nous détaillons également la résolution complète de certaines équations Diophantiennes quadratiques résultant de certaines identities trouvées.

Tout au long de ce travail, a et b sont supposés être des entiers non nuls et $\Delta = (ab)^2 + 4ab > 0$. Par une simple déduction, on peut voir que $a \mid q_{2n}$ et $a \mid l_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nous utilisons les deux notations suivantes : $t_n = \dfrac{q_{2n}}{a}$ et $s_n = \dfrac{l_{2n+1}}{a}$.

Ce travail est présenté en trois chapitres :

Dans le premier chapitre, nous nous interessons aux méthodes de résolution des équations Diophantiennes. Ce chapitre est composé de trois parties : La première partie est consacrée à des rappels concernant un outil très important dans la résolution des équations Diophantiennes, c'est les fractions continues. Ensuite, nous rappelons certaines propriétés des équations Diophantiennes et leurs méthodes de résolution classiques, en particulier, l'équation de Pell-Fermat et l'équation de Pell-Fermat généralisée.

Le deuxième chapitre est consacré à des rappels, des exemples et des identités sur les suites récurrentes linéaires, on s'interesse aux suites bi-périodiques de Fibonacci $(q_n)_n$ et de Lucas $(l_n)_n$, définies précedement. Les auteurs [EY09] et [Bil14] ont donné les formules de Binet des suites $(q_n)_n$ et $(l_n)_n$ et ces formules ont donné des nouvelles identités sur les suites $(q_n)_n$ et $(l_n)_n$. Elles sont les suivantes : Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, nous listons ici les identités qui sont nécessaires dans notre travail, elles se trouvent dans [Bil14].

$$q_{n-1} + q_{n+1} = l_n,$$

$$l_{n-1} + l_{n+1} = (ab+4)q_n,$$

$$\Delta \left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(m+1)\xi(n+1)} \left(\frac{1}{ab}\right)^{1-\xi(n+1)\xi(m+1)} q_m q_n + \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m)} l_m l_n = 2 l_{m+n},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)\xi(m)} q_n l_m - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m+1)} q_m l_n = 2(-1)^m q_{n-m},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m)} l_n l_m - \Delta \left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(n+1)\xi(m+1)} \left(\frac{1}{ab}\right)^{1-\xi(n+1)\xi(m+1)} q_n q_m = 2(-1)^m l_{n-m},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)\xi(m)} q_n l_m + \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m+1)} q_m l_n = 2 q_{n+m},$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 - \Delta \left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(n+1)} \left(\frac{1}{ab}\right)^{\xi(n)} q_n^2 = 4(-1)^n.$$

Nous avons utilisé ces formules pour établir et prouver par déduction de nouvelles identités sur les suites $(q_n)_n$ et $(l_n)_n$ qui représente la première partie de notre contribution.
Le troisieme chapitre s'intitule "Solutions d'équations Diophatiennes en termes de suites généralisées de Fibonacci et de Lucas" qui résume la deuxième partie de notre contribution, où nous avons pu résoudre les équations Diophantiennes quadratiques suivantes :

$$x^2 - \Delta y^2 = 4,$$

$$x^2 - \Delta y^2 = 4^k,$$

$$(ab)x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -4,$$

$$x^2 + abs_n xy - aby^2 = q_{2n+1}^2,$$

$$x^2 - l_{2n} xy + y^2 = -(ab)t_n^2,$$

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -(ab)s_n^2,$$

$$x^2 - \Delta t_n xy - \Delta y^2 = -(ab)l_{2n}^2,$$

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = s_n^2,$$

$$x^2 - (ab)s_n xy - (ab)y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2,$$

$$x^2 - l_{2n} xy + y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n^2.$$

Les solutions de ces équations sont exprimées en termes de suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas.

Chapitre 1

Méthodes classiques de résolution des équations Diophantiennes

Sommaire

1.1 Introduction

La théorie des équations Diophantiennes est un sujet classique qui consiste à résoudre une équation de la forme $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$, où f est une fonction à n variables et $x_1, x_2, \dots, x_n$ doivent être des entiers ou des nombres rationnels. Le nom de ces équations est en l'honneur du mathématicien Diophante qui a fait son travail et a vécu à Alexandrie vers 300 après JC. Il était bien connu par son ancien texte Arithmetica de Diophante qui comprenait treize livres, mais seuls six manuscrits grecs ont survécu à l'ère moderne, et ils ont été édités et traduits plusieurs fois.

L'étude des équations Diophantiennes a permis de développer de nombreux outils dans la théorie des nombres. Par exemple, pour la preuve du dernier théorème de Fermat, de nombreux outils issus de la géométrie algébrique, des courbes elliptiques, de la théorie algébrique des nombres, etc. ont été développés.

Parmi les 23 problèmes posés par Hilbert en 1900, le 10ème problème concernait les équations Diophantiennes. Hilbert a demandé s'il existait une méthode universelle pour résoudre toutes les équations Diophantiennes. Nous le reformulons ici : *« Étant donné une équation Diophantienne avec un nombre quelconque de quantités inconnues et avec des coefficients numériques intégraux rationnels : Concevoir un processus selon lequel il peut être déterminé* *par un nombre fini d'opérations si l'équation est résoluble en nombres entiers ».*

Puisqu'il n'y a pas de méthode générale pour résoudre les équations Diophantiennes, certaines techniques ont été trouvées pour résoudre des familles particulières d'équations Diophantiennes. Beaucoup de mathématiciens comme Pierre De Fermat, Leonhard Euler, Joseph Louis Lagrange et Henri Poincaré ont des travaux intéressants sur le sujet. De nombreux outils ont également été développés tels que la théorie algébrique des nombres et la théorie des formes linéaires en logarithmes.

1.2 Fractions continues

Dans cette section, on rappelle certaines propriétés des fractions continues qui seront utiles dans le présent chapitre.

1.2.1 Algorithme d'Euclide

L'algorithme d'Euclide consiste à effectuer les divisions euclidiennes successives des diviseurs et des restes comme suit :

$$\begin{array}{rclcl} a & = & bq_1 + r_1 & \textit{avec} & 0 \leq r_1 < b \\ b & = & r_1 q_2 + r_2 & \textit{avec} & 0 \leq r_2 < r_1 \\ r_1 & = & r_2 q_3 + r_3 & \textit{avec} & 0 \leq r_3 < r_2 \\ \ldots & & & & \end{array}$$

Le **pgcd** sera le dernier reste non nul.

Théorème 1.2.1 (Théorème de Bézout)

Soit a et b deux entiers non nuls. Alors, il existe des entiers relatifs u et v tels que

$pgcd(a, b) = au + bv$.

Démonstration. Soit E l'ensemble formé par les entiers naturels strictement positifs de la forme $ma + nb$ où $m, n \in \mathbb{Z}$.

E est une partie de $\mathbb{N}$ non vide : on vérifie facilement que $|a| \in E$.

E admet donc un plus petit élément d tel que $d = au + bv$.

- $pgcd(a, b) = D$ divise a et b donc D divise $au + bv = d$ et donc $D \leq d$
- Montrons que d divise a.

  Divisons a par d, on a alors $a = dq + r$ avec $0 \leq r < d$. On isole le reste et on remplace d par $au + bv$: $r = a - dq = a - auq - bvq = a(1 - uq) + b(-vq)$.

  Donc $r = 0$. En effet si $r \neq 0$ alors $r \in E$, or $r < d$ et d est le plus petit élément de E, cela est absurde.

  Et si $r = 0$ donc d divise a. En faisant le même raisonnement, on montrerait que d divise aussi b. d divise a et b donc $d \leq D$.

  Donc $D = d$.

□

Lemme 1.2.1 (Lemme de Gauss)

Soient a, b et c trois entiers tels que a divise bc et $pgcd(a, b) = 1$, alors a divise c.

Démonstration. Comme $pgcd(a, b) = 1$ alors d'après le lemme de Bézout, donc il existe $u, v \in\ Z$ tels que $au + bv = 1$. On multiplie les deux membres par c, on a $acu + bcv = c$. Or a divise bc alors a divise $acu + bcv = c$. □

1.2.2 Definitions et notations

Définition 1.2.1

Une expression de la forme :

$$a_0 + \cfrac{b_0}{a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \ddots}}}}$$

est appelée ***une fraction continue****. En général, les nombres* $a_1, a_2, a_3, \ldots, b_1, b_2, b_3, \ldots$ *peuvent être des nombres réels ou complexes, et le nombre de termes peut être fini ou infini.*

Exemple 1.2.1

Considérons le nombre d'or : $\phi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1.61803$ *qui est solution de l'équation* $x^2 - x - 1 = 0$*. On peut aussi l'écrire comme suit :*

$$\phi = 1 + \frac{1}{\phi} = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\phi}}}}}$$

Et on peut même continuer à l'infini

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{\ddots}}}}}$$

*cette dernière expression est appelée **la fraction continue infinie** de ϕ.*

Définition 1.2.2

Une fraction continue infinie *est une expression de la forme suivante :*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \cfrac{1}{a_4 + \ddots}}}}$$

avec $a_0 \in \mathbb{R}$ *et* $a_i \in \mathbb{R}_+$.

*Et **une fraction continue simple finie** est de la forme*

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}.$$

avec $a_0 \in \mathbb{Z}$ *et* $a_i \in \mathbb{N}^*, \forall 1 \leq i \leq n$.

Dans la suite, nous nous limiterons aux fractions continues simples. Nous utiliserons la notation $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n]$ pour l'expression ci-dessus.

Exemple 1.2.2

Pour obtenir la fraction continue de $\dfrac{67}{29}$ *on devise* 67 *par* 29, *on obtient*

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{9}{29} = 2 + \cfrac{1}{\cfrac{29}{9}}.$$

Ensuite, on divise 29 *par* 9 *pour obtenir*

$$\frac{29}{9} = 3 + \frac{2}{9} = 3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}.$$

Enfin, on divise 9 *par* 2 *pour obtenir*

$$\frac{9}{2} = 4 + \frac{1}{2},$$

D'où

$$\frac{67}{29} = 2 + \frac{1}{\frac{29}{9}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{\frac{9}{2}}} = 2 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4 + \frac{1}{2}}} = [2, 3, 4, 2]$$

Définition 1.2.3

Soit x un réel positif de fraction continue $[a_0, a_1, a_2, \ldots]$, on a

- *les entiers a_k s'appellent **les quotients partiels** de la fraction continue.*
- *la fraction continue $C_k = [a_0, a_1, \ldots, a_k]$ s'appelle **la réduite d'ordre** k (ou bien la $k^{\text{ième}}$ **réduite**) de x .*
- *les réels $[a_k, a_{k+1}, \ldots]$ s'appellent **les quotients complets** de x.*

1.2.3 Algorithme de décomposition en fraction continue

Définition 1.2.4

Soit α un réel positif. On associe à α deux suites (éventuellement finies) : une suite $(a_n)_n$ de nombres entiers naturels et une suite $(\alpha_n)_{n\geq 0}$ de nombres réels définies par $\alpha_0 = [\alpha_0] = \alpha$ et $a_0 = \lfloor \alpha \rfloor$ et

$$\begin{cases} a_k & := & \lfloor \alpha_k \rfloor \\ \alpha_{k+1} & := & \dfrac{1}{\alpha_k - a_k}, \end{cases} \quad \forall k \geq 0 \,.$$

Si $\alpha_n \in \mathbb{N}$ l'algorithme s'arrête et on obtient une fraction continue finie, sinon elle est infinie.

Exemple 1.2.3

Développons $\dfrac{27}{22}$ en fraction continue en utilsant l'algorithme précédent.
On calcul $a_0 = \lfloor\dfrac{27}{22}\rfloor = 1$, donc $\alpha_1 = \dfrac{1}{\dfrac{27}{22} - 1} = \dfrac{22}{5}$.

Comme $\dfrac{22}{5} \notin \mathbb{N}$, on pose encore

$$a_1 = \lfloor\frac{22}{5}\rfloor = 4 \quad et \quad \alpha_2 = \frac{1}{\dfrac{22}{5} - 4} = \frac{5}{2}.$$

Et $\dfrac{5}{2} \notin \mathbb{N}$, on pose encore

$$a_2 = \lfloor\frac{5}{2}\rfloor = 2 \quad et \quad \alpha_3 = \frac{1}{\dfrac{5}{2} - 2} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$

L'algorithme s'arrête car $2 \in \mathbb{N}$, et on a

$$\frac{27}{22} = [a_0, a_1, a_2, \alpha_3] = [1, 4, 2, 2] = 1 + \cfrac{1}{4 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}.$$

Proposition 1.2.1

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que α_n existe. Alors

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] := a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{\alpha_n}}}}.$$

Si la suite $(a_n)_n$ est finie de longueur N, α a une écriture unique comme fraction continue *finie, et on écrit*

$$\alpha := [a_0, a_1, \ldots, a_N].$$

Sinon α *a une fraction continue infinie, et on écrit comme notation*

$$\alpha := [a_0, a_1, \ldots].$$

Démonstration. On raisonne par récurrence sur n. Si $n = 0$ alors, par définition $\alpha := \alpha_0 = [\alpha_0]$. Il est aussi clair que

$$\alpha = \alpha_0 = a_0 + \frac{1}{\alpha_1} = [a_0, \alpha_1] = [a_0, a_1 + \frac{1}{\alpha_2}] = [a_0, a_1, \alpha_2] = \ldots = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n].$$

Supposons que, $\alpha_{n+1} = \dfrac{1}{\alpha_n - a_n}$ existe. Alors, en remarquant que

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n + \frac{1}{\alpha_{n+1}}],$$

sachant que, par définition $\alpha_n = a_n + \dfrac{1}{\alpha_{n+1}}$. On obtient alors,

$$[a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n, \alpha_{n+1}] = [a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}, \alpha_n] = \alpha.$$

Pour l'unicité, on peut utiliser le même raisonnement. □

1.2.4 Développement des fractions rationnelles

Il est clair que toute fraction continue simple est un nombre rationnel

Théorème 1.2.2 ([Old63],p.14)

Toute fraction continue simple finie représente un nombre rationnel. Inversement, tout *nombre rationnel p/q peut être représenté comme une fraction continue simple finie ; avec les exceptions à noter ci-dessous, la représentation est unique.*

Remarque 1.2.1

Si on suppose que

$$\frac{p}{q} = a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ldots + \cfrac{1}{a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}} = [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n]. \tag{1.1}$$

On remarque qu'une fois le développement (1.1) est obtenue on peut toujours modifier le dernier terme a_n, de sorte que le nombre de termes dans le développement est pair ou impair, selon notre choix. Pour voir cela, notez que si a_n, est supérieur à 1, nous pouvons écrire

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}.$$

Donc

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-1}, a_n - 1, 1].$$

D'autre part, si $a_n = 1$, alors $\dfrac{1}{a_{n-1} + \dfrac{1}{a_n}} = \dfrac{1}{(a_{n-1} + 1)}$,
de sorte que le developpement 1.1 devient :

$$\frac{p}{q} = [a_1, a_2, a_3, \cdots, a_{n-2}, a_{n-1} + 1].$$

Alors la représentation d'un rationnel en fraction continue n'est pas unique car on peut toujours modifier le dernier terme a_n

D'où le résultat suivant :

Théorème 1.2.3 ([Car92]p.16)

Tout nombre rationnel p/q peut être exprimé comme une fraction continue simple finie dans laquelle le dernier terme peut être modifié de manière à rendre le nombre de termes dans le développement pair ou impair.

1.2.5 Propriétés des réduites d'une fraction continue

Pour chaque fraction continue on définit $p_0, \ldots, p_n$ et $q_0, \ldots, q_n$ comme suit :

$$\begin{array}{rclrcl} p_0 & = & a_0, & q_0 & = & 1; \\ p_1 & = & a_0 a_1 + 1, & q_1 & = & a_1; \\ p_k & = & a_k p_{k-1} + p_{k-2}, & q_k & = & a_k q_{k-1} + q_{k-2}; \end{array}$$

Pour tout $k = 2, \ldots, n$.

Proposition 1.2.2 ([Old63],p.67)

Avec les notations précédentes on a :

1. $C_k = [a_0, a_1, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$;
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad p_n q_{n-1} - q_n p_{n-1} = (-1)^{n-1}$;
3. $C_k - C_{k-1} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_k q_{k-1}}$, *pour* $1 \leq k \leq n$;
4. $C_k - C_{k-2} = \frac{(-1)^{k-1} a_k}{q_k q_{k-2}}$, *pour* $2 \leq k \leq n$.

Démonstration.

1. La démonstration se fait par récurrence sur n. Pour $n = 0$, c'est évident car $[a_0] = \frac{p_0}{q_0}$. De même pour $n = 1$, on a $[a_0, a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1} = \frac{a_0 a_1 + 1}{a_1} = \frac{p_1}{q_1}$.
   Soit $n \geq 2$, supposons que pour tout entier $k \leq n$, on a $[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k] = \frac{p_k}{q_k}$.

Par définition des p_k et q_k il est clair que,

$$\begin{aligned}[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}] &= [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n + \frac{1}{a_{n+1}}] \\ &= \frac{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})p_{n-1} + p_{n-2}}{(a_n + \frac{1}{a_{n+1}})q_{n-1} + q_{n-2}}.\end{aligned}$$

D'où, en multipliant le numérateur et le dénominateur par a_{n+1}, alors

$$[a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, a_{n+1}] = \frac{a_{n+1}p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}q_n + q_{n-1}} = \frac{p_{n+1}}{q_{n+1}} = C_{n+1}.$$

2. Si $k = 1$, alors

$$p_1q_0 - p_0q_1 = (a_0a_1 + 1)1 - a_0a_1 = 1.$$

Par déduction, si $k \geq 2$, alors

$$\begin{aligned}p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k &= (a_kp_{k-1} + p_{k-2})q_{k-1} - p_{k-1}(a_kq_{k-1} + q_{k-2}) \\ &= -(p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1}) = -(-1)^{k-2} = (-1)^{k-1}.\end{aligned}$$

3. En utilisant (i) and (ii), on obtient :

$$C_k - C_{k-1} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-1}}{q_{k-1}} = \frac{p_kq_{k-1} - p_{k-1}q_k}{q_kq_{k-1}} = \frac{(-1)^{k-1}}{q_kq_{k-1}}.$$

4. Finallement, on a

$$C_k - C_{k-2} = \frac{p_k}{q_k} - \frac{p_{k-2}}{q_{k-2}} = \frac{p_kq_{k-2} - p_{k-2}q_k}{q_kq_{k-2}},$$

Et

$$\begin{aligned}p_kq_{k-2} - q_kp_{k-2} &= (a_kp_{k-1} + p_{k-2})q_{k-2} - (a_kq_{k-1} + q_{k-2})p_{k-2} \\ &= a_k(p_{k-1}q_{k-2} - p_k - 2q_{k-1}) = (-1)^{k-2}a_k.\end{aligned}$$

□

Corollaire 1.2.1

Soit $x = [a_0, a_1, \ldots]$, *et* $\frac{p_n}{q_n}$ *la réduite d'ordre* n *de* x. *On a les égalités suivantes :*

1. *Pour tout* $n \geq 2$, $\quad x = \dfrac{\alpha_n p_{n-1} + p_{n-2}}{\alpha_n q_{n-1} + q_{n-2}}$.
2. *Pour tout* $n \geq 2$, $\quad p_n q_{n-2} - q_n p_{n-2} = (-1)^n a_n$.
3. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{p_n}{p_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0]$
4. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad \dfrac{q_n}{q_{n-1}} = [a_n, a_{n-1}, \ldots, a_1]$

Démonstration. Consulter [Old63],p.28. □

Remarque 1.2.2

Les entiers p_n *et* q_n *sont toujours premiers entre eux. A partir de l'égalité* 2 *du corollaire précédent, on peut évidement donner une solution particulière de l'équation Diophantienne linéaire* $ax + by = 1$ *où* a, b *des entiers positifs non nuls.*

Théorème 1.2.4 ([Car92],p.16)

Notons $\frac{a}{b} = [a_0, a_1, \ldots, a_N]$ *le développement en fraction continue du rationnel* $\frac{a}{b}$. *Alors l'équation* $ax + by = 1$ *admet une solution entière donnée par :*

- $(q_{N-1}, -p_{N-1})$ *si* N *impair.*
- $(-q_{N-1}, p_{N-1})$ *si* N *pair.*

1.2.5.1 Meilleure approximation

On montre dans cette section que les réduites p_k/q_k d'un α irrationnel donnent les meilleures approximations de α par des rationnels.

Proposition 1.2.3 ([Old63],p. 74)

1. *Soit* α *un nombre irrationnel et soit* $C_k = p_k/q_k$ *pour* $k \geq 0$ *les réduites de la fraction continue de* α. *Si* $r, s \in \mathbb{Z}$ *avec* $s > 0$ *et* k *est un entier positif tel que*

$$|s\alpha - r| < |q_k\alpha - p_k|,$$

alors $s \geq q_{k+1}$.

2. *Si* α *est irrationnel et* r/s *est un nombre rationnel avec* $s > 0$ *tel que*

$$\left|\alpha - \frac{r}{s}\right| < \frac{1}{2s^2},$$

alors r/s *est une réduite de* α.

Théorème 1.2.5 ([Car92])

Soit $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *un irrationnel. On a pour tout entier* $n \in \mathbb{N}^*$

$$x - \frac{p_n}{q_n} = \frac{(-1)^n}{q_n(\alpha_{n+1}q_n + q_{n-1})}$$

où α_n *le* n^ième *quotient complet de* x.

Corollaire 1.2.2

1. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad |x - \frac{p_n}{q_n}| < \frac{1}{q_n q_{n-1}}$.
2. *Pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$ $\quad (q_n x - p_n) \times (q_{n-1}x - p_{n-1}) < 0$.
3. *La suite* $(|q_n x - p_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ *est décroissante.*

Théorème 1.2.6 (Meilleure approximation [Lan95],p.9)

Soit $x = [a_0, a_1, a_2, \ldots]$ *un irrationnel, et soit* $r = p/q$ *un rationnel. S'il existe un entier*

$n \in \mathbb{N}^*$ tel que $q < q_n$ et $r \neq p_n/q_n$. Alors,

$$\left| x - \frac{p_{n-1}}{q_{n-1}} \right| < \frac{q}{q_{n-1}} |x - r|$$

1.2.6 Nombres irrationnels quadratiques

Définition 1.2.5

Un nombre α est dit irrationnel quadratique réel. C'est-à-dire, $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ s'il est racine de l'équation suivante :

$$AX^2 + BX + C = 0, \quad A, B, C \in \mathbb{Z}, \quad A \neq 0,$$

et $\delta := B^2 - 4AC > 0$ le discrimant du polynôme $AX^2 + BX + C$ un entier naturel qui n'est pas un carré parfait.

Comme $\delta \neq 0$, le polynôme $AX^2 + BX + C$ admet une autre racine notée $\overline{\alpha}$. Le nombre $\overline{\alpha}$ est appelé le conjugué de α.
Ainsi, on peut écrire $\alpha = (a + b\sqrt{\delta})/f$, avec $a = -B, \quad b = 1 \quad et \quad f = 2A$.
Noter que

$$\alpha = \frac{a + b\sqrt{\delta}}{f} = \frac{af + \sqrt{\delta b^2 f^2}}{f^2} = \frac{P_0 + \sqrt{d}}{Q_0}$$

est une représentation de α avec des entiers

$$P_0 = a, \; Q_0 = f^2 = 4A^2, \quad d = \delta b^2 f^2 \tag{1.2}$$

où d n'est pas un carré parfait, et tel que $Q_0 \mid (d - P_0^2)$. D'où le résultat suivant

Proposition 1.2.4

Soit α un irrationnel quadratique, alors α est de la forme $p + q\sqrt{D}$ où $p, q \in \mathbb{Q}$ et D est sans facteur carré.

Définition 1.2.6

*On dit que α est **irrationnel quadratique réduit** si α est irrationnel quadratique tel que $\alpha > 1$ et $-1 < \bar{\alpha} < 0$.*

Soit α un irrationnel quadratique réel. On définit récursivement la suite $(a_k)_k$

$$\begin{aligned} \alpha_k &= \frac{P_k + \sqrt{d}}{Q_k}, \\ a_k &= \lfloor \alpha_k \rfloor, \\ P_{k+1} &= a_k Q_k - P_k, \\ Q_{k+1} &= \frac{d - P_{k+1}^2}{Q_k}, \end{aligned} \tag{1.3}$$

Pour $k = 0, 1, \ldots$ et P_0, Q_0 définies par les formules (1.2).

Proposition 1.2.5

La fraction continue $[a_0, a_1, \ldots]$ donnée dans (1.3) est la fraction continue de α.

Démonstration. Soit $k \geq 0$ et supposons que P_k et Q_k sont des entiers avec $Q_k \mid (d - P_k^2)$. Alors $P_{k+1} = a_k Q_k - P_k$ est un entier et

$$d - P_{k+1}^2 = d - (a_k Q_k - P_k)^2 = (d - P_k^2) + Q_k(2a_k P_k - a_k^2 Q_k) \equiv 0[Q_k].$$

Ainsi, $Q_{k+1} = (d - P_{k+1}^2)/Q_k$ est un entier qui vérifie clairement $Q_{k+1} \mid (d - P_{k+1}^2)$. Comme

d n'est pas un carré parfait, les suites $(P_k)_{k\geq 0}$ et $(Q_k)_{k\geq 0}$ sont bien définies. De plus on a ,

$$\begin{aligned}
\alpha_k - a_k &= \frac{P_k+\sqrt{d}}{Q_k} - a_k &= \frac{\sqrt{d}-(a_kQ_k-P_k)}{Q_k} &= \frac{\sqrt{d}-P_{k+1}}{Q_k} \\
&= \frac{d-P_{k+1}^2}{Q_k\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right)} &= \frac{Q_kQ_{k+1}}{Q_k\left(\sqrt{d}+P_{k+1}\right)} &= \frac{1}{\alpha_{k+1}}
\end{aligned}$$

En particulier, $\alpha_{k+1} > 0$. De plus, $\alpha_k = [a_k, \alpha_{k+1}]$. Appliquer la formule ci-dessus avec $k = 0, 1, \ldots$, on obtient

$$\alpha = \alpha_0 = [a_0, \alpha_1] = [a_0, a_1, \alpha_1] = \ldots = [a_0, a_1, \ldots].$$

□

Définition 1.2.7

Soit α un irrationnel et $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$. Si la suite $(a_n)_n$ est périodique à partir d'un certain rang N, on dit que la fraction continue de α est périodique à partir d'un certain rang N.

Notation 1.2.1

Soit $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ un irrationnel quadratique. Si la suite $(a_n)_n$ est périodique à partir d'un certain rang N de période T, on notera

$$\alpha = [a_0, a_1, \ldots, a_{N-1}, \overline{a_N, \ldots, a_{N+T-1}}].$$

Théorème 1.2.7 (Lagrange[Lan95])

Un irrationnel α est quadratique si et seulement si sa fraction continue est périodique.

Théorème 1.2.8 (Galois)

Soit $\alpha = [a_0, a_1, \ldots]$ un irrationnel quadratique, α est réduit si et seulement si, il est purement périodique i.e si et seulement si la suite $(a_n)_n$ est périodique à partir du rang

$N = 0$.

Proposition 1.2.6

Soit α un irrationnel quadratique réduit. On a

$$\alpha = \overline{[a_0, a_1, \ldots, a_T]} \quad et \quad -\frac{1}{\bar{\alpha}} = [\overline{a_n, a_{n-1}, \ldots, a_0}] \quad où \quad n \in \mathbb{N}.$$

1.2.7 Fraction continue de la racine d'un entier D

Théorème 1.2.9 ([Car92])

Soit D un entier naturel qui n'est pas un carré parfait. Le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$ est de la forme suivante :

$$\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}].$$

Démonstration. Soit $a_0 = \lfloor \sqrt{D} \rfloor$, il est clair que $a_0 + \sqrt{D}$ est irrationnel quadratique car α est racine de $(X - a_0)^2 - D$. De plus, par définition, on a $\alpha > 1$ et $\overline{\alpha} = a_0 - \sqrt{D} \in]-1, 0[$. Ainsi, α est réduit. On en déduit d'après le théorème de Galois que son développement est purement périodique. On a donc,

$$a_0 + \sqrt{D} = [\overline{2a_0, a_1, \ldots, a_n}] \quad où \quad n \in \mathbb{N}.$$

Ce qui équivalent à

$$\begin{aligned} \sqrt{D} &= [2a_0, a_1, \ldots, a_n, 2a_0, a_1, \ldots, a_n] - a_0 \\ &= [a_0, a_1, \ldots, a_n, \overline{2a_0, a_1, \ldots, a_n}] \\ &= [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_n, 2a_0}]. \end{aligned}$$

D'où le résultat □

Si d est un entier positif qui n'est pas un carré, la fraction continue de $\sqrt{d}$ est périodique. Si k est la plus petite période, cette fraction continue s'écrit

$$\sqrt{d} = [a_0, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, a_1, \ldots, a_k, \ldots] = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_k}],$$

avec $a_k = 2a_0$ et $a_0 = \lfloor \sqrt{d} \rfloor$. De plus $(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1})$ est un palindrome :

$$a_j = a_{k-j} \ \ \textit{pour} \ \ 1 \leq j < k-1.$$

Le nombre rationnel dont le développement en fraction continue est $[a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}]$ est une bonne approximation de $\sqrt{d}$. Le développement de $\sqrt{d}$ en fraction continue est alors dit périodique de période k.

Exemple 1.2.4 *1. Pour $D = 17$, on part de $\alpha = \lfloor \sqrt{17} \rfloor + \sqrt{17} = 4 + \sqrt{17}$ puis on écrit successivement :*

$$\begin{aligned}
\alpha &= 8 + (\sqrt{17} - 4) = 8 + \frac{1}{\sqrt{17}+4} = 8 + \frac{1}{\alpha_1},\\
\alpha_1 &= \sqrt{17} + 4 = 8 + \frac{1}{\sqrt{17}+4} = 8 + \frac{1}{\alpha_2},\\
\alpha_2 &= \sqrt{17} + 4 = 8 + \frac{1}{\sqrt{17}+4} = 8 + \frac{1}{\alpha_3},\\
&\vdots\\
&\vdots
\end{aligned}$$

$$\sqrt{17} + 4 = 8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\sqrt{17}+4}} = 4 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{8 + \cfrac{1}{\sqrt{17}+4}}}}}}.$$

D'où

$$\sqrt{17} = [4, 8, 8, \ldots] = [4, \overline{8}].$$

2. Pour $D = 21$*, on part de* $\alpha = \lfloor\sqrt{21}\rfloor + \sqrt{21} = 4 + \sqrt{21}$ *puis on écrit successivement :*

$$\begin{aligned}
\alpha &= 8 + (\sqrt{21} - 4) = 8 + \frac{5}{\sqrt{21}+4} = 8 + \frac{1}{\alpha_1},\\
\alpha_1 &= \frac{\sqrt{21}+4}{5} = 1 + \frac{\sqrt{21}-1}{5} = 1 + \frac{5}{\sqrt{21}+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_2},\\
\alpha_2 &= \frac{\sqrt{21}+1}{4} = 1 + \frac{\sqrt{21}-3}{4} = 1 + \frac{4}{\sqrt{21}+3} = 1 + \frac{1}{\alpha_3},\\
\alpha_3 &= \frac{\sqrt{21}+3}{3} = 2 + \frac{\sqrt{21}-3}{3} = 2 + \frac{3}{\sqrt{21}+3} = 2 + \frac{1}{\alpha_4},
\end{aligned}$$

$$\alpha_4 = \frac{\sqrt{21}+3}{4} = 1 + \frac{\sqrt{21}-1}{4} = 1 + \frac{4}{\sqrt{21}+1} = 1 + \frac{1}{\alpha_5},$$
$$\alpha_5 = \frac{\sqrt{21}+1}{5} = 1 + \frac{\sqrt{21}-4}{5} = 1 + \frac{1}{\sqrt{21}+4} = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

D'où $\alpha = [\overline{8,1,1,2,1,1}]$ *et* $\sqrt{21} = [1, \overline{8,1,1,2,1,1}]$.

1.3 Équations Diophantiennes

1.3.1 Définition générale

Définition 1.3.1

Une équation Diophiantienne est une équation de la forme $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$*, où* f *est une fonction à* n *variables et* $x_1, x_2, \ldots, x_n$ *doivent être des entiers ou des nombres rationnels.*

Exemple 1.3.1

Quelques exemples des équations Diophantiennes :

$ax + by = c$	*Equation linéaire du premier degré à deux variables x, y et trois paramètres entiers a, b, c.*
$x^n + y^n = z^n$	*Pour $n = 2$ il existe une infinité de solutions en nombres entiers positifs non nuls, les triplets pythagoriciens. Le dernier théorème de Fermat établie que pour $n > 2$, cette équation n'a pas de solution en entiers positifs non nuls.*
$x^2 - Dy^2 = \pm 1$	*L'équation de Pell-Fermat.*
$x^4 + y^4 + z^4 = w^4$	*Conjecturé par Euler à ne pas avoir une solution non triviale. Prouvé par Elkies, qu'elle a une infinité de solutions positives.*
$x^n - y^m = 1$	*L'équation de Catalan (1814–1894) $(n, m \geq 2)$.*
$ax^2 + by^2 = cz^2$	*L'équation de Legendre.*
$x^2 - d = p^n$	*L'équation de Ramanujuan (1887–1920)-Nagell (1895–1988), ($d < 0$, $n \in \mathbb{N}$, p un nombre premier).*

1.3.2 Équations Diophantiennes linéaires de degré 1 à n variables

Soit l'équation Diophantienne $a_1x_1 + \ldots + a_nx_n = b$ où $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ et $b \in \mathbb{Z}$. la proposition suivante donne une condition nécessaire et suffisante pour l'existence des solutions.

Proposition 1.3.1

Soient $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{Z}$. L'équation Diophantienne

$$a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = b \tag{1.4}$$

possède une solution ssi $pgcd(a_i)_{1\leq i\leq n}$ *divise* b*. Et l'ensemble des solutions est donné par*

$$\left\{\frac{b}{pgcd(a_i)_{1\leq i\leq n}}V_1 + k_1V_2 + \cdots + k_{n-1}V_n, k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}\right\}$$

où les V_i *sont les colonnes de* $V \in GL_n(\mathbb{Z})$*, qui vérifie* $(a_1, \ldots, a_n)V = (d, 0, ..., 0)$*.*

Démonstration. L'idée est de réécrire l'équation Diophantienne sous la forme d'un problème matriciel :

$$(a_1, \ldots, a_n)^t(x_1, \ldots, x_n) = (b) \Leftrightarrow Ax = b.$$

Par des opérations élémentaires sur la matrice $A = (a_1, \ldots, a_n)$, on se ramène à une matrice de la forme $(d, 0, \ldots, 0)$ où $d = pgcd(a_i)_{1\leq i\leq n}$, i.e. il existe une matrice V inversible (V est la matrice des opérations élémentaires de la mise sous forme échelonnée) tel que $AV = (d, 0, \ldots, 0)$, c'est la forme normale de Smith [1]. En fait, dans des notations évidentes, $Ax = b$ se réécrit $AVy = b$ où $y = V^{-1}x$. On a donc $AVy = (d, 0, \ldots, 0)y = b$, Comme $d \mid b$ (car l'équation 1.4 admet une solution). se résout facilement et on obtient $y =^t (b/d, k_1, \ldots, k_{n-1})$ où $k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$, puis on remonte à x grâce à la relation $x = Vy$. on a donc

$$x = V(b/d, k_1, \ldots, k_{n-1}) = \frac{b}{d}V_1 + k_1V_2 + \ldots + k_{n-1}V_n.$$

Réciproquement, on suppose qu'il existe une matrice inversible $V \in GL_n(\mathbb{Z})$ qui satisfait la condition $(a_1, \ldots, a_n)V = (d, 0, \ldots, 0)$. Soit $k_1, \ldots, k_{n-1} \in \mathbb{Z}$, on a $(a_1, \ldots, a_n)(b/dV_1 + k_1V_2 + \ldots + k_{n-1}V_n) = (a_1, \ldots, a_n)V^t(b/d, k_1, \ldots, k_{n-1}) = (d, 0, \ldots, 0)^t(b/d, k_1, \ldots, k_{n-1}) = b$ D'où le résultat. □

1. Soit $A \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$. Alors on peut calculer une matrice diagonale $B \in M_{n,p}(\mathbb{Z})$ dont les coefficients diagonaux b_i sont positifs ou nuls et vérifient $b_i \mid b_{i+1}$ pour $i = 1, ..., inf(n,p)-1$ et des matrices inversibles $L \in GL_n(\mathbb{Z})$ et $R \in GL_p(\mathbb{Z})$ telles que $B = LAR$. La matrice B vérifiant ces propriétés est unique. On l'appelle **la forme normale de Smith** de A.

1.3.3 Système de congruences et théoreme chinois des restes

On s'interesse dans cette section à la résolution des équations Diophantiennes linéaires sous forme de système de congruences. Le théorème suivant est le théorème d'existence des solutions

Théorème 1.3.1 (Théorème chinios des restes)
Soit $m_1, m_2, \ldots, m_p$ une suite d'entiers strictement positifs et premiers entre eux deux à deux.
Alors le système de congruences suivant

$$\begin{cases} x & \equiv & a_1[m_1] \\ x & \equiv & a_2[m_2] \\ & \ldots & \\ x & \equiv & a_p[m_p] \end{cases}$$

admet une solution unique x modulo $M = m_1 m_2 \ldots m_p$ donnée par

$$x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \ldots + a_p M_p y_p [M],$$

avec $M = m_1 m_2 \ldots m_p$, $M_i = \frac{M}{m_i}$ et $y_i M_i \equiv 1[m_i]$, pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$

Démonstration. **i** Existence :

Comme $pgcd(M_i, m_i) = 1$, donc il existe un entier y_i tel que $y_i M_i \equiv 1[m_i]$, pour tout $i = 1, 2, \ldots; p$. On a $x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \ldots + a_p M_p y_p [M]$, donc $x \equiv a_1 M_1 y_1 + a_2 M_2 y_2 + \ldots + a_p M_p y_p [m_i]$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$ mais $M_j \equiv 0[m_i]$ pour tous $i \neq j$ alors $x \equiv a_i M_i y_i [m_i]$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$ mais $y_i M_i \equiv 1[m_i]$ pour tout $i = 1, 2, \ldots, p$, d'où $x \equiv a_i[m_i]$ pour tout $i = 1, 2, \ldots; p$

ii Unicité de la solution modulo M

Soient x, y deux solutions, i.e

$$\begin{cases} x & \equiv & a_1[m_1] \\ x & \equiv & a_2[m_2] \\ & \dots & \\ x & \equiv & a_p[m_p] \end{cases} et \begin{cases} y & \equiv & a_1[m_1] \\ y & \equiv & a_2[m_2] \\ & \dots & \\ y & \equiv & a_p[m_p] \end{cases}$$

alors $x - y \equiv 0[m_i]$ pour tout $i = 1, 2, \dots, p$ et comme les m_i sont premiers entre eux deux à deux $\forall i = 1, 2, \dots, p$ donc $x - y \equiv 0[m_1 \times m_2 \times \dots \times m_r]$ i.e

$$x - y \equiv 0[M].$$

□

1.4 Méthodes de résolution classiques

On va exposer les principales méthodes classiques de résolution des équations Diophantiennes.

1.4.1 La réduction modulaire (méthode de Gauss)

Cette méthode est utilisée pour prouver qu'une équation Diophantienne n'a pas de solution, il est souvent efficace de considérer la même équation modulo un entier N et de prouver qu'il n'y pas de solution dans cette nouvelle situation. Le principe est de voir si certains coefficients de l'équation sont multiples d'un nombre N et on cherche à résodre cette équation dans $\mathbb{F}_N$. Si elle n'a pas de solutions dans l'anneau $\mathbb{F}_N = \mathbb{Z}/N\mathbb{Z}$, alors elle n'a pas de solutions dans $\mathbb{Z}$. Et si elle a des solutions dans $\mathbb{F}_N$, alors on cherche à voir si ces solutions peuvent être étendues en des solutions dans $\mathbb{Z}$. Pour plus de détails vous pouvez consulter [AAC+10].

Exemple 1.4.1

L'équation $x^3 + 5 = 117y^3$ *n'a pas de solutions entières.*

En effet, si on considère l'équation modulo $N = 9$*, c'est à dire dans l'anneau* $\mathbb{Z}/9\mathbb{Z}$*. Alors* $x^3 \equiv 4[9]$*, or les cubes modulo* 9 *sont* 0*,* 1 *et* -1*, c'est donc impossible. i.e cette équation n'admet pas de solution.*

Exemple 1.4.2

l'équation $x^2 - 3y^2 = 7$ *n'a pas de solutions entières. En effet, si on considère l'équation modulo* $N = 4$*, c'est à dire dans l'anneau* $\mathbb{Z}/4\mathbb{Z}$*. D'un côté* $x^2 - 3y^2 \equiv 7[4]$ *alors* $x^2 + y^2 \equiv 3[4]$*,*

D'un autre côté, on a

$x \setminus y$	*0*	*1*	*2*	*3*
0	*0*	*1*	*0*	*1*
1	*1*	*2*	*1*	*2*
2	*0*	*1*	*0*	*1*
3	*1*	*2*	*1*	*2*

$: x^2 + y^2 \ mod \ \ 4$

donc la congruence $x^2 + y^2 \equiv 3[4]$ *est impossible. Ainsi l'équation* $x^2 - 3y^2 = 7$ *n'a aucune solution dans* $\mathbb{Z}^2$*.*

1.4.2 Méthodes des inégalités

Cette méthode consiste à restreindre les intervalles dans lesquel les variables varient et permet parfois de déterminer les valeurs possibles de certaines variables.

Exemple 1.4.3

Soit à résoudre l'équation suivante : $x^3 + y^3 = (x + y)^2$.

Remaquons d'abord que toutes les paires de la forme $(m, -m), m \in \mathbb{Z}$,*sont solutions.*

Si $x + y \neq 0$ *: On a*

$$(x + y)^2 - (x^3 + y^3) = (x + y)^2 - (x + y)(x^2 - xy + y^2) = (x + y)(x + y - x^2 - y^2 + xy).$$

Alors

$$(x + y)(x + y - x^2 - y^2 + xy) = 0.$$

Ce qui équivaut à $\begin{cases} x + y & = & 0 \\ x^2 + y^2 - xy - x - y & = & 0 \end{cases}$

ainsi $\begin{cases} x & = & -y \\ (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2 & = & 2 \end{cases}$

Donc les valeurs possibles de x *et* y *sont comme suit :*

x, y	*0*	*1*	*2*
0	*(0,0)*	*(0,1)*	*(0,2)*
1	*(1,0)*	*(1,1)*	*(1,2)*
2	*(2,0)*	*(2,1)*	*(2,2)*

Posons $f(x, y) = (x - y)^2 + (x - 1)^2 + (y - 1)^2$, *alors* $f(2, 2) = 2$, $f(1, 0) = f(0, 1) = 2$ *et* $f(2, 1) = f(1, 2) = 2$.

D'où l'ensemble des solutions de l'équation $x^3 + y^3 = (x+y)^2$ *est*

$$\{(0,1),(1,0),(2,1),(1,2),(2,2)\}$$

Exemple 1.4.4

Soit à résoudre dans $(\mathbb{N}^*)^3$ *l'équation* $4xyz = 3(xy + xz + yz)$. *Les variables* x, y, z *jouent des rôles symétriques, donc on peut supposer que* $x \leq y \leq z$ *;*

les autres solutions s'obtiennent par les permutations $\sigma \in S_3$.

L'équation s'écrit $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{4}{3}$.

On a $\dfrac{4}{3} = \dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{3}{x}$ *donc* $x \leq \dfrac{9}{4}$ *alors* $x \in \{1, 2\}$.

- *Si* $x = 1$ *alors* $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{2}{y} \Rightarrow y \leq 6$

  et $\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} \leq \dfrac{1}{y} \Rightarrow y \geq 3$

  alors $y \in \{3, 4, 5, 6\}$

  — *Si* $y = 3$ *alors* z *n'existe pas.*

  — *Si* $y = 4$ *alors* $\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{z}$ *d'où* $z = 12$.

  — *Si* $y = 5$ *alors* z *n'existe pas.*

  — *Si* $y = 6$ *alors* $\frac{1}{3} = \frac{1}{6} + \frac{1}{z}$ *d'où* $z = 6$

  Donc $(1, 4, 12)$, $(1, 6, 6)$ *sont des solutions.*

- *Si* $x = 2$ *alors* $\dfrac{5}{6} = \dfrac{1}{y} + \dfrac{1}{z} = \dfrac{2}{y} \Rightarrow y \leq 2$ *alors* $y \in \{1, 2\}$

  — *Si* $y = 1$ *alors* z *n'existe pas.*

  — *Si* $y = 2$ *alors* $z = 3$

  Donc $(2, 2, 3)$ *est une solution.*

On conclut que l'ensemble des solutions est

$$S = \{\sigma(1,4,12), \sigma(1,6,6), \sigma(2,2,3)\}, \quad avec \quad \sigma \in \mathcal{S}_3$$

1.4.3 Méthode de la factorisation

La factorisation s'avère très utile lorsque l'on a besoin de modifier l'équation en faisant des manipulations algébriques.

On dispose des factorisations

1. $a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-}2 + b^{n-1}); n \in \mathbb{N}^*$.
2. $a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots - ab^{n-}2 + b^{n-1})$, n entier natuel impair.
3. Toute expression de la forme $\alpha x + \beta y + \gamma xy + \theta$ peut en général se factoriser sous la forme $(ax+b)(cy+d)+e$.

Exemple 1.4.5

Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}^2$*, l'équation* $x^3 - y^3 = 19$.

On a $x^3 - y^3 = (x-y)(xy + x^2 + y^2)$.

Donc $(x-y)(xy+x^2+y^2) = 19$*, comme* $x^3 - y^3 = 19 \geq 0$ *donc* $x \geq y$

ainsi

$$\begin{cases} x-y &= 1 \\ xy+x^2+y^2 &= 19 \end{cases} \quad ou \quad \begin{cases} x-y &= 19 \\ xy+x^2+y^2 &= 1 \end{cases}$$

On a donc deux cas à distinguer :

- *Cas* $x = y+1$ *: alors* $(y+1)y + (y+1)^2 + y^2 = 19 \Leftrightarrow 3y + 3y^2 + 1 = 19 \Leftrightarrow 3(y+3)(y-2) = 0$ *d'où* $(x,y) = (3,2), (-2,-3)$
- *cas* $x = y+19$ *alors* $(y+19)y + (y+19)^2 + y^2 = 1 \Leftrightarrow y^2 + 19y + 120 = 0$ *est sans solution entière.*

On conclut que l'ensemble des solutions est : $\{(3,2), (-2,-3)\}$

1.4.4 Descente infinie de Fermat

La descente infinie est une méthode introduite par Fermat. Le but de cette méthode est de prouver qu'une certaine équation Diophantienne n'admet pas (ou très peu) de solutions. Pour cela, on part d'une solution hypothétique et on construit une nouvelle, strictement plus petite pour au moins l'une des variables à valeurs dans N.

Dans ce paragraphe, on explique la méthode de Pierre de Fermat qu'il a été l'un des premiers mathématiciens qui à utiliser une méthode de preuve appelée la "descente infinie". Considérons une équation Diophantienne. On veut montrer qu'elle n'a que des solutions non triviales. On suppose qu'il existe une solution non triviale, on choisit des conditions de minimalité sur cette solution. Puis on construit une solution non triviale qui est plus petite que la première. On aboutit alors à une contradiction. Il est plus simple de voir la méthode sur un exemple pour comprendre.

Soit $P(n)$ une propriété dépendante de l'entier naturel n. On cherche à démontrer que $P(n)$ est fausse pour tout n. Pour cela, on raisonne par l'absurde :

— On suppose que pour un certain entier n, $P(n)$ est vraie.

— On démontre par ailleurs que pour chaque entier naturel n pour lequel $P(n)$ est vraie, il existe un entier naturel m strictement inférieur à n pour lequel $P(m)$ est également vraie.

On conclut donc que $P(n)$ n'est jamais vraie, car la suite des entiers naturels vérifiant la propriété P ne peut pas être strictement décroissante et infinie.

Exemple 1.4.6

Soit à résoudre dans $\mathbb{Z}^3$, *l'équation* $x^2 + y^2 = 7z^2$

— *1er cas* $z = 0$ *alors* $x^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = y = 0$ *donc* $(0, 0, 0)$ *est une solution.*

— *2ème cas* $y = 0$ *alors* $x^2 = 7z^2 \Rightarrow |x| = \sqrt{7}|z|$ *d'où* $x = z = 0$ *donc* $(0, 0, 0)$ *est une solution.*

— *3ème cas* $x = 0$ *alors* $y^2 = 7z^2$ *donc* $|y| = \sqrt{7}|z| \Rightarrow y = z = 0$ *donc* $(0, 0, 0)$ *est une solution.*

Supposons que l'équation $x^2+y^2 = 7z^2$ *admet une solution* (x_0, y_0, z_0) *tels que* $x_0 > 0, y_0 > 0$ *et* $z_0 > 0$ *avec* x_0 *minimal.*

On a $x_0^2 + y_0^2 = 7z_0^2$ *alors* $7 \mid (x_0^2 + y_0^2) \Leftrightarrow (7 \mid x_0 \quad et \quad 7 \mid y_0)$ *, posons* $x_0 = 7x_1$ *et* $y_0 = 7y_1$ *alors* $(7x_1)^2 + (7y_1)^2 = 7z_0^2$ *donc* $7(x_1^2 + y_1^2) = z_0^2$ *alors* $7 \mid z_0^2$ *d'où* $7 \mid z_0$*, posons* $z_0 = 7z_1$ *alors* $7(x_0^2 + y_0^2) = (7z_1)^2$ *donc* $x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$ *donc* (x_1, y_1, z_1) *est une solution de* $x^2 + y^2 = 7z^2$ *avec* $x_1 < x_0$ *: c'est une contradiction car* x_0 *est minimal.*

On conclut que $(0, 0, 0)$ *est l'unique solution de* $x^2 + y^2 = 7z^2$*.*

1.4.5 Équation de Pell-Fermat $x^2 - Dy^2 = \pm 1$

Définition 1.4.1

On appelle équation de Pell-Fermat l'équation Diophantienne d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *de la forme suivante :*

$$x^2 - Dy^2 = \pm 1$$

où D *est un entier positif qui n'est pas un carré parfait. On dira qu'une solution* (x, y) *de l'équation de* ***Pell-Fermat*** *est positive si* $x, y \in \mathbb{N}^*$*.*

Remarque 1.4.1

Les $(x, y) = (1, 0)$ *et* $(-1, 0)$ *sont appelées les solutions triviales de l'équation de Pell-Fermat.*

Si $D = K^2$ *est un carré parfait, alors* $x^2 - Dy^2 = \pm 1 \Leftrightarrow (x - Ky)(x + Ky) = \pm 1$ *qui n'a pas beaucoup d'intérêt.*

Si $D < 0$ *alors l'équation* $x^2 - Dy^2 = \pm 1$ *n'a qu'un nombre fini de solutions qu'on peut déterminer, pour une valeur de* D *donnée.*

On remarque que $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *est une solution de l'équation de Pell-Fermat si et seulement si* $(-x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *est une solution et si et seulement si* $(-x, -y) \in \mathbb{Z}^2$ *est aussi une solution. Si nous trouvons toutes les solutions de* $\mathbb{N}^2$*, d'où on trouve toutes les solutions sur* $\mathbb{Z}^2$*. Ainsi dans cette section on s'intéresse seulement à trouver les solution positives.*

Définition 1.4.2

On appelle ***solution fondamentale*** *de l'équation de Pell-Fermat, l'unique solution positive* (x_0, y_0) *telle que, pour toute autre solution positive* (x, y)*, on ait* $y > y_0 > 0$*.*

Si la solution fondamentale existe alors elle est unique. En effet, si $x = x_0$ alors comme $x^2 - Dy^2 = x_0^2 - Dy_0^2$, on en deduit que $y = y_0$.

Existence : La solution fondamentale existe et on peut la calculer en utlisant les "fractions continues".

Notons

- ◇ $\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_m, 2a_0}]$: le développement en fraction continue périodique de $\sqrt{D}$.
- ◇ $\dfrac{p_k}{q_k}$: La $k^{ième}$ réduite de $\sqrt{D}$.
- ◇ (α_n) : la suite des quotients complets.

Théorème 1.4.1 ([AA15])

Si m est impair, alors le couple (p_m, q_m) *est la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat* $x^2 - Dy^2 = 1$ *et l'équation* $x^2 - Dy^2 = -1$ *n'a pas de solution entière.*

Sinon le couple (p_m, q_m) *est la solution fondamentale de l'équation de Pell-Fermat* $x^2 - Dy^2 = -1$ *et l'équation* $x^2 - Dy^2 = 1$ *admet* (p_{2m+1}, q_{2m+1}) *comme solution fondamentale.*

Démonstration. Sachant que $\sqrt{D} = [a_0, \overline{a_1, a_2, \ldots, a_m, 2a_0}] = [a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m, \alpha_{m+1}]$ avec

α_{m+1} est le $(m+1)^{ième}$ quotient complet de D. En particulier, on a

$$\alpha_{m+1} = [\overline{2a_0, a_1, a_2, \ldots, a_m}] = a_0 + \sqrt{D}$$

Ainsi,

$$\sqrt{D} = \frac{(a_0 + \sqrt{D})p_m + p_{m-1}}{(a_0 + \sqrt{D})q_m + q_{m-1}} \Leftrightarrow q_m D + (a_0 q_m + q_{m-1})\sqrt{D} = a_0 p_m + p_{m-1} + p_m \sqrt{D}$$

Or $q_m D$, $(a_0 q_m + q_{m-1})$, $(a_0 p_m + p_{m-1})$ et p_m sont des entiers, comme $\sqrt{D}$ est irrationnel, il est clair que

$$q_m D = a_0 p_m + p_{m-1} \quad et \quad a_0 q_m + q_{m-1} = p_m.$$

D'où

$$p_{m-1} = q_m D - a_0 p_m \quad et \quad q_{m-1} = p_m - a_0 q_m$$

Et d'autre part, nous avons $p_m q_{m-1} - q_m p_{m-1} = (-1)^{m-1}$ alors

$$p_m^2 - D q_m^2 = p_m q_{m-1} - q_m p_{m-1} = (-1)^{m-1}$$

Il en résulte que si m est impair, $(-1)^{m-1} = 1$ le couple (p_m, q_m) est une solution positive de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$. Sinon , $(-1)^{m-1} = -1$, alors (p_m, q_m) est une solution positive de l'équation $x^2 - Dy^2 = -1$. $\square$

Expression des solutions

Théorème 1.4.2

Les solutions entiers naturels de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ *sont données par*

$$x + \sqrt{D}y = (x_0 + \sqrt{D}y_0)^n, \quad n \in \mathbb{N},$$

où $(x_0, y_0) \in \mathbb{N}^2, x^2 - Dy_0^2 = 1$ *avec* $y_0 > 0$ *minimal.*

Le couple (x_0, y_0) *est appelé la solution fondamentale.*

Démonstration. Voir [[AA15]] □

Corollaire 1.4.1

Les solutions entières de l'équation $x^2 - Dy^2 = 1$ *sont données par*

$$x + \sqrt{D}y = \pm(x_0 + \sqrt{D}y_0)^n, \quad n \in \mathbb{Z}$$

où (x_0, y_0) *est la solution fondamentale.*

1.4.6 Les équations de Pell-Fermat généralisées

Dans la section précédente on avait présenté la méthode des fractions continues pour la résolution des équations de Pell-Fermat. On va voir maintenant qu'on peut étendre cette méthode à une classe d'équations appelées les équations de Pell-Fermat généralisées.

Définition 1.4.3

On appelle équation de Pell-Fermat généralisée une équation d'inconnue $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ *de la* *forme*

$$x^2 - Dy^2 = K \tag{1.5}$$

où $K \in \mathbb{Z}$, $|K| \neq 1$ et D est un entier positif qui n'est pas un carré parfait. Il est clair qu'on peut supposer que x et y sont positifs.

Proposition 1.4.1
Si $0 < |K| < \sqrt{D}$, alors toutes les solutions (x, y) en entiers positifs de l'équation de (1.5) ont la propriété que x/y est une réduite dans le développement en fraction continue de $\sqrt{D}$

Démonstration. Soit (x, y) une solution positive. On va distinguer deux cas de K.

— Si $K \geq 1$,on a donc $\dfrac{x}{y} > \sqrt{D}$. On factorise l'équation (1.5) en facteurs positifs

$$(x - \sqrt{D}y)(x + \sqrt{D}y) = K,$$

on obtient

$$(x - y\sqrt{D})^2 + (x - \sqrt{D}y)(2y\sqrt{D}) = K,$$

et donc

$$0 < \frac{x}{y} - \sqrt{D} < \frac{K}{2y^2\sqrt{D}} \leq \frac{\sqrt{D}}{2y^2\sqrt{D}} = \frac{1}{2y^2}$$

d'où le résultat.

— Si $K < 0$,on réécrit l'equation (1.5) comme suit

$$y^2 - \frac{1}{D}x^2 = -\frac{K}{D},$$

on échange les rôles de x et y et obtenir une équation dans laquelle le membre de droite est positif. En procédant comme précédemment, on obtient

$$\left(y - \frac{x}{\sqrt{D}}\right)^2 + \left(y - \frac{x}{\sqrt{D}}\right)\left(\frac{2x}{\sqrt{D}}\right) = -\frac{K}{D},$$

donc

$$0 < \frac{y}{x} - \frac{1}{\sqrt{D}} < \frac{-K}{2x^2\sqrt{D}} < \frac{\sqrt{D}}{2x^2\sqrt{D}} = \frac{1}{2x^2}$$

D'après la proposition 1.2.3 on en déduit dans les deux cas, que x/y est une réduite de $\sqrt{D}$ si $K > 0$, et que y/x est une réduite de $1 = /\sqrt{D} = [0, \sqrt{D}]$ si $K < 0$. Or, cette dernière condition est équivalente au fait que x/y est une réduite de $\sqrt{D}$. □

Proposition 1.4.2

Si $D > 1$ est un entier qui n'est pas un carré parfait et $\alpha = \alpha_0 = \sqrt{D}$, alors

$$p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2 = (-1)^k Q_k.$$

Démonstration. On observe que $P_0 = 0$, $Q_0 = 1$, $P_1 = \lfloor\sqrt{D}\rfloor$ et $Q_1 = D - P_0^2 = D - \lfloor\sqrt{D}\rfloor^2$. Ainsi, $p_0^2 - dq_0^2 = \lfloor\sqrt{D}\rfloor^2 - d = -Q_1$. Supposons que $k \geq 2$. On écrit

$$\sqrt{D} = \alpha = [a_0, \ldots, a_{k-1}, \alpha_k] = \frac{\alpha_k p_{k-1} + pk - 2}{\alpha_k q_{k-1} + q_{k-2}} = \frac{\left(P_k + \sqrt{D}\right) p_{k-1} + Q_k p_{k-2}}{\left(P_k + \sqrt{D}\right) q_{k-1} + Q_k q_{k-2}},$$

par suite

$$Dq_{k-1} + \sqrt{D}\left(P_k q_{k-1} + Q_{k-1} q_{k-2}\right) = P_k p_{k-1} + Q_k p_{k-2} + p_{k-1}\sqrt{D}.$$

Ainsi, par identification

$$Dq_{k-1} = P_k p_{k-1} + Q_k p_{k-2} \quad et \quad p_{k-1} = P_k q_{k-1} + Q_k q_{k-2}.$$

On en déduit, en utilisant l'égalité $p_{k-1}q_{k-2} - q_{k-1}p_{k-2} = (-1)^{k-2} = (-1)^k$ que

$$p_{k-1}^2 - Dq_{k-1}^2 = (p_{k-1}q_{k-2} - p_{k-2}q_{k-1})Q_k = (-1)^k Q_k.$$

$\square$

Chapitre 2

Suites récurrentes linéaires et identités

Sommaire

2.1 Introduction

Les suites récurrentes linéaires constituent une partie fondamentale dans la théorie des nombres, en particulier dans la résolution de certaines classes d'équations Diophantiennes. Les suites récurrentes linéaires sont largement étudiées et utilisées comme outils importants dans d'autres domaines des mathématiques [Eve+03]. En outre, ces suites apparaissent partout en mathématiques et en informatique.

2.2 Quelques propriétés des suites récurrentes linéaires

Définition 2.2.1

Une suite $(u_n)_{n\geq 0}$ *est dite suite récurrente linéaire d'ordre* m *à coefficients constants et à termes dans un corps* $\mathbb{K}$*, s'il existe un entier naturel non nul* m *et des éléments* $a_1, a_2, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$*, non tous nuls, vérifiant la relation de récurrence suivante :*

$$u_{n+m} = a_1 u_{n+m-1} + a_2 u_{n+m-2} + \cdots + a_m u_n. \tag{2.1}$$

Une suite récurrente linéaire d'ordre m est détrminée par ses m premiers termes et sa relation de récurrence.

Définition 2.2.2

Le polynôme caractéristique associé à la relation (2.1) *(ou générateur de la suite* $(u_n)_{n\geq 0}$*) est le polynôme défini comme suit :*

$$P(X) = X^m - a_1 X^{m-1} - a_2 X^{m-2} - \cdots - a_m.$$

Supposons que le polynôme P peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = \prod_{i=1}^{k} (X - \alpha_i)^{r_i} \in \mathbb{K}[X],$$

où les α_i sont les racines de P de multiplicité r_i et $\sum_{i=1}^{k} r_i = m$.

Proposition 2.2.1

Supposons que $P(X) \in \mathbb{Z}[X]$ admet k racines distinctes, alors il existe $c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbb{Q}(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k)$ tels que

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i^n, \qquad \forall n \geq 0.$$

Démonstration. Soit

$$u(z) = \sum_{n \geq 0} u_n z^n.$$

On remarque que

$$\begin{aligned} u(z)\left(1 - a_1 z - \ldots - a_k z^k\right) &= u_0 + (u_1 - u_0 a_1)z + (u_2 - u_1 a_1 - u_2 a_0)z^2 \\ &\quad + \ldots + \sum_{m \geq k} \left(u_m - a_1 u_{m-1} - \ldots - a_k u_{m-k}\right) z^m \\ &:= P(z), \end{aligned}$$

où $P(z) = \sum_{m=0}^{k-1} \left(u_m - a_1 u_{m-1} - \ldots - a_m u_0\right) z^m \in \mathbb{C}[z]$. Donc,

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{P(z)}{1 - a_1 z - \ldots - a_k z^k} = \frac{P(z)}{z^k f(1/z)} = \frac{P(z)}{z^k \prod_{i=1}^{k} (1/z - \alpha_i)} \\ &= \frac{P(z)}{\prod_{i=1}^{k} (1 - z\alpha_i)} = \sum_{i=1}^{k} \frac{c_i}{1 - z\alpha_i} \end{aligned}$$

pour certains coefficients $c_i \in \mathbb{K}$. Pour la dernière étape, nous avons utilisé la théorie des fractions partielles avec le fait que les racines $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ sont distincts et le degré de $P(z)$

est inférieur à k. Si

$$|z| < \rho := \min\{|\alpha_i|^{-1} : i = 1, \ldots, k\},$$

alors

$$\frac{1}{1 - z\alpha_i} = \sum_{n\geq 0} (z\alpha_i)^n = \sum_{n\geq 0} \alpha_i^n z^n, \qquad \forall n \geq 0.$$

Donc, pour $|z| < \rho$, on obtient :

$$\sum_{n\geq 0} u_n z^n = u(z) = \sum_{i=1}^{k} c_i \sum_{n\geq 0} \alpha_i^n z^n = \sum_{n\geq 0} \left(\sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i^n \right) z^n.$$

Par identification des coefficients, on obtient :

$$u_n = \sum_{i=1}^{k} c_i \alpha_i^n, \qquad \forall n \geq 0.$$

$\square$

Une suite récurrente $(u_n)_n$ est dite **non dégénérée** si aucun des quotients $\dfrac{\alpha_i}{\alpha_j}$ n'est racine de l'unité, avec $1 \leq i < j \leq s$.

— Si $k = 3$, alors la suite récurrente est appelée **suite récurrente linéaire ternaire**.

Parmis les suites récurrentes lineaires ternaires connues sont la suite Tribonacci :

$$T_0 = T_1 = 0, \quad T_2 = 1, \quad T_{n+3} = T_{n+2} + T_{n+1} + T_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0,$$

et la suite de Berstel :

$$B_0 = B_1 = 0, \quad B_2 = 1, \quad B_{n+3} = 2B_{n+2} - 4B_{n+1} + 4T_n \quad \text{pour} \quad n \geq 0.$$

— Si $k = 2$, alors la suite récurrente est appelée **suite récurrente linéaire binaire**.

Dans ce cas son polynôme caractériqtique est de la forme : $P(X) = X^2 - a_1 X - a_2 =$

$(X-\alpha_1)(X-\alpha_2)$, avec $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Un des exemples les plus connus des suites récurrentes linéaires binaires est la suite de Horadam $(W_n) = (W_n(a,b;P,Q))$ définie par :

$$W_0 = a, \quad W_1 = b, \quad \text{et} \quad W_n = PW_{n-1} + QW_{n-2} \quad \text{pour} \quad n \geq 2.$$

où a, b, P et Q sont des entiers, $PQ \neq 0$ et $(a,b) \neq (0,0)$. Cette suite a été introduite par Horadam en 1965 [Hor65].

Soit P et Q des entiers et Soit $(U_n) = (U_n(P,Q))$ et $(V_n) = (V_n(P,Q))$ les suites définies respectivement par :

$$\begin{aligned} U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_n &= PU_{n-1} - QU_{n-2} \qquad n \geq 2, \\ V_0 = 2, \quad V_1 = P, \quad V_n &= PV_{n-1} - QV_{n-2} \qquad n \geq 2. \end{aligned}$$

Par conséquent, le polynôme caractéristique de ces suites récurrentes linéaires est donné par :

$$X^2 - PX + Q,$$

dont les racines sont :

$$\alpha = \frac{P+\sqrt{D}}{2} \quad \text{et} \quad \beta = \frac{P-\sqrt{D}}{2},$$

où $D = P^2 - 4Q$ est le discriminant du polynôme caractéristique que l'on supposera non nul, de sorte que l'on ait $\alpha \neq \beta$. Les racines α et β vérifient les propriétés suivantes :

$$\alpha + \beta = P, \quad \alpha\beta = Q \quad \text{et} \quad (\alpha - \beta)^2 = D.$$

Les suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ sont appelées suites de Lucas de première et seconde espèce respectivement. Ces suites s'écrivent aussi respectivement par les formules suivantes dites formules de Binet :

$$U_n = \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \quad \text{et} \quad V_n = \alpha^n + \beta^n, \qquad n \geq 0.$$

La plupart des suites de Lucas bien connues et intéressantes, de première et seconde espèce, sont résumées dans le tableau suivant :

Suite de Fibonacci	$F_0 = 0,\ F_1 = 1,\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2},\ \ n \geq 2$	$F_n = \frac{\alpha_1^n - \beta_1^n}{\alpha_1 - \beta_1}$
Suite de Lucas	$L_0 = 2,\ L_1 = 1,\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2},\ \ n \geq 2$	$L_n = \alpha_1^n + \beta_1^n$
Suite de Pell	$P_0 = 0,\ P_1 = 1,\ P_n = 2P_{n-1} + P_{n-2},\ \ n \geq 2$	$P_n = \frac{\alpha_2^n - \beta_2^n}{\alpha_2 - \beta_2}$
Suite de Pell-Lucas	$Q_0 = 2,\ Q_1 = 2,\ Q_n = 2Q_{n-1} + Q_{n-2},\ \ n \geq 2$	$Q_n = \alpha_2^n + \beta_2^n$
Suite de Jacobsthal	$J_0 = 0,\ J_1 = 1,\ J_n = J_{n-1} + 2J_{n-2},\ \ n \geq 2$	$J_n = \frac{\alpha_3^n - \beta_2^n}{\alpha_3 - \beta_2}$
Suite de Jacobsthal-Lucas	$j_0 = 2,\ j_1 = 1,\ j_n = j_{n-1} + 2j_{n-2},\ \ n \geq 2$	$j_n = \alpha_3^n + \beta_3^n$
Suite de balancing	$B_0 = 0,\ B_1 = 1,\ B_n = 6B_{n-1} + B_{n-2},\ \ n \geq 2$	$B_n = \frac{\alpha_4^n - \beta_4^n}{\alpha_4 - \beta_4}$
La suite compagnon de de la suite balancing	$b_0 = 0,\ b_1 = 6,\ b_n = 6b_{n-1} + b_{n-2},\ \ n \geq 2$	$b_n = \alpha_4^n + \beta_4^n$

Avec $(\alpha_1, \beta_1) = (\frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{1-\sqrt{5}}{2})$, $(\alpha_2, \beta_2) = (1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2})$, $(\alpha_3, \beta_3) = (2, -1)$ et $(\alpha_4, \beta_4) = (3 + 2\sqrt{2}, 3 - 2\sqrt{2})$.

2.2.1 La suite de Fibonacci et la suite de Lucas

La suite de Fibonacci qui est une suite récurrente linéaire d'ordre deux, elle est définie comme suit :

$$\begin{cases} F_0 = 0, \quad F_1 = 1, \\ F_n = F_{n-1} + F_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

Le polynôme caractéristique associé à la suite de Fibonacci $(F_n)_n$ est donc : $X^2 - X - 1$.
Et la suite de Lucas $(L_n)_n$ définie par :

$$\begin{cases} L_0 = 2, \quad L_1 = 1, \\ L_n = L_{n-1} + L_{n-2}, \quad n \geq 2. \end{cases}$$

2.2.2 La suite de Fibonacci généralisée $(u_n)_n$ et la suite de Lucas généralisée $(v_n)_n$

Dans cette section nous allons parler d'une certaine généralisation de la suite de Fibonacci et de la suite de Lucas qui ont été aussi utilsées par cetains auteurs pour prouver qu'elles sont solutions de certaines équations Diophantiennes (voir [AAB17], [KD13]).
Cette généralisation est définie comme suit :
Soit $p \geq 3$ un entier, la suite de Fibonacci généralisée $(u_n)_n$ est définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 1, \quad et \;\; u_n = pu_{n-1} - u_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{2.2}$$

La suite de Lucas généralisée $(v_n)_n$ est définie par :

$$v_0 = 2, \quad v_1 = p, \quad et \;\; v_n = pv_{n-1} - v_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{2.3}$$

Les termes u_n et v_n sont appelés respectivement les $n^{ièmes}$ nombres généralisés de Fibonacci et de Lucas. De plus, les nombres généralisés de Fibonacci et de Lucas peuvent être prolongés aux indices négatifs comme suit :

$$u_{-n} = -u_n, \qquad et \quad v_{-n} = v_n, \qquad n \geq 0.$$

Les suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$ vérifient les identités suivantes :

$$\begin{gathered}
u_n^2 - pu_n u_{n-1} + u_n^2 = 1, \\
v_n^2 - pv_n v_{n-1} + v_n^2, \\
v_m u_n - u_m v_n = 2u_{n-m}, \\
v_m v_n - (p^2 - 4)u_m u_n = 2v_{n-m}, \\
u_n u_{m+1} - u_m u_{n-1} = u_{n+m}, \\
v_m v_n + (p^2 - 4)u_m u_n = 2v_{n+m}, \\
u_m v_n + v_m u_n = 2u_{n+m}, \\
u_{n+1} - u_{n-1} = v_n, \\
v_{n+1} - v_{n-1} = (p^2 - 4)u_n, \\
v_n^2 - (p^2 - 4)u_n^2 = 4, \\
u_{m+1} v_n - u_m v_{n-1} = v_{n+m},
\end{gathered}$$

pour tous $n, m \in \mathbb{Z}$. Pour des informations plus détaillées sur ces suites et ces identités, consulter [Rab96 ; Rib91 ; Hor65 ; Rib89].

On remarque que les suites de Fibonacci et de Lucas d'indices pairs sont des cas particuliers des suites $(u_n)_n$ et $(v_n)_n$, pour $p = 3$. Avec $u_n = F_{2n}$ et $v_n = L_{2n}$.

2.3 Suites bi-périodiques de Fibonacci - Suites bi-bériodiques de Lucas

La suite de Fibonacci et la suite de Lucas ainsi que leurs différentes généralisations satisfont plusieurs propriétés (voir par exemple [Car64; VH69; Hor65; Kos19; Rib91; Fib89]). Il y a plusieurs généralisations de la suite de Fibonacci, soit en préservant les conditions initiales ou en préservant la relation de récurence.
Une des dernières généralisations est la suite bi-périodique de Fibonacci $(q_n)_{n\geq 0}$, qui a été définie par Edson et Yayenie [EY09] comme suit :

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad et \;\; q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{si } \; n \; \text{ est pair} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{si } \; n \; \text{ est impair} \end{cases}, \quad n \geq 2, \tag{2.4}$$

où a et b sont des nombres réels non nuls.
Il est clair que si $a = b = 1$, on obtient la suite de Fibonacci. Si $a = b = 2$, on obtient la suite de Pell et si $a = b = k$, on obtient les suites k-Fibonacci.

La suite bi-périodique de Lucas $(l_n)_{n\geq 0}$ définie par Bilgici [Bil14] comme suit :

$$l_0 = 2, \quad l_1 = a, \quad l_n = \begin{cases} bl_{n-1} + l_{n-2}, & \text{si } \; n \; \text{ est pair} \\ al_{n-1} + l_{n-2}, & \text{si } \; n \; \text{ est impair} \end{cases}, \quad n \geq 2. \tag{2.5}$$

Si $a = b = 1$, on obtient la suite de Lucas.
Si $a = b = 2$, on obtient la suite de Pell-Luacas.
Si $a = b = k$, alors la suite $(l_n)_n$ devient la suite k-Lucas définie dans [Fal11].

2.3.1 Fonctions génératrices des suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(l_n)_{n\geq 0}$

Théorème 2.3.1 ([EY09])

La fonction génératrice[1] *de la suite bi-peériodique de Fibonacci* $(q_n)_{n\geq 0}$ *est :*

$$F(x) = \frac{x(1+ax-x^2)}{1-(ab+2)x^2+x^4}.$$

Démonstration. On a :

$$F(x) = q_0 + q_1 x + q_2 x^2 + \ldots + q_k x^k + \ldots = \sum_{m=0}^{+\infty} q_m x^m.$$

En multipliant $F(x)$ par bx, on obtient :

$$bxF(x) = bq_0 x + bq_1 x^2 + bq_2 x^3 + \ldots + bq_k x^{k+1} + \ldots = \sum_{m=0}^{+\infty} bq_m x^{m+1} = \sum_{m=1}^{+\infty} q_{m-1} x^m,$$

et en multipliant $F(x)$ par x^2, on obtient :

$$x^2 F(x) = q_0 x^2 + q_1 x^3 + q_2 x^4 + \ldots + q_k x^{k+2} + \ldots = \sum_{m=0}^{+\infty} q_m x^{m+2} = \sum_{m=2}^{+\infty} q_{m-2} x^m.$$

Puisque $q_{2k+1} = bq_{2k} + q_{2k-1}, q_0 = 0$ et $q_1 = 1$, on obtient :

$$\left(1 - bx - x^2\right) F(x) = x + \sum_{m=1}^{+\infty} \left(q_{2m} - bq_{2m-1} - q_{2m-2}\right) x^{2m}$$

1. Une fonction génératrice (appelée autrefois série génératrice, terminologie encore utilisée en particulier dans le contexte de la théorie des probabilités) est une série formelle dont les coefficients codent une suite $(a_n)_n$ de nombres.

et puisque $q_{2k} = aq_{2k-1} + q_{2k-2}$, on obtient :

$$\begin{aligned}
(1 - bx - x^2)\, F(x) &= x + \sum_{m=1}^{\infty} (a-b) q_{2m-1} x^{2m} \\
&= x + (a-b)x \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m-1} x^{2m-1}.
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Posons $f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{2m-1} x^{2m-1}$, puisque

$$\begin{aligned}
q_{2k+1} &= bq_{2k} + q_{2k-1} &&= b(aq_{2k-1} + q_{2k-2} + q_{2k-1} \\
&= (ab+1)q_{2k-1} + bq_{2k-2} &&= (ab+1)q_{2k-1} + q_{2k-1} - q_{2k-3} \\
&= (ab+2)q_{2k-1} - q_{2k-3},
\end{aligned}$$

nous avons

$$\Big(1 - (ab+2)x^2 + x^4\Big)\, f(x) = x - x^3 + \sum_{m=3}^{\infty} \left(q_{2m-1} - (ab+2)q_{2m-3} + q_{2m-5}\right) x^{2m-1} = x - x^3.$$

Par conséquent,

$$f(x) = \frac{x - x^3}{1 - (ab+2)x^2 + x^4}.$$

On remplace cette dernière dans (2.6), on obtient :

$$\Big(1 - bx - x^2\Big)\, F(x) = x + (a-b)x \left(\frac{x - x^3}{1 - (ab+2)x^2 + x^4} \right).$$

Après avoir simplifié l'expression ci-dessus, nous obtenons le résultat

$$F(x) = \frac{x\,(1 + ax - x^2)}{1 - (ab+2)x^2 + x^4}.$$

$\square$

Théorème 2.3.2 ([Bil14])

La fonction génératrice de la suite bi-périodique de Lucas $(l_n)_{n\geq 0}$ *est*

$$L(x) = \frac{2 + ax - (ab+2)x^2 + ax^3}{1 - (ab+2)x^2 + x^4}.$$

Pour la démonstration de ce théorème on a besoin du lemme suivant :

Lemme 2.3.1

La suite bi-périodique de Lucas $(l_m)_{m\geq 0}$ *satisfait les propriétés suivantes*

$$l_{2n} = (ab+2)l_{2n-2} - l_{2n-4},$$

et

$$l_{2n+1} = (ab+2)l_{2n-1} - l_{2n-3}.$$

Démonstration. On a

$$L(x) = l_0 + l_1 x + l_2 x^2 + \cdots + l_k x^k + \cdots = \sum_{m=0}^{+\infty} l_m x^m = L_0(x) + L_1(x),$$

avec $L_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{2m} x^{2m}$ et $L_1(x) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{2m+1} x^{2m+1}$. On remarque

$$L_0(x) = 2 + (ab+2)x^2 + \sum_{m=2}^{\infty} l_{2m} x^{2m},$$

et

$$(ab+2)x^2 L_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} (ab+2) l_{2m} x^{2m+2} = 2(ab+2)x^2 + \sum_{m=2}^{\infty} (ab+2) l_{2m-2} x^{2m},$$

et

$$x^4L_0(x) = \sum_{m=0}^{\infty} l_{2m}x^{2m+4} = \sum_{m=2}^{\infty} l_{2m-4}x^{2m}.$$

Puisque $l_{2n} = (ab+2)l_{2n-2} - l_{2n-4}$, on obtient :

$$\left(1-(ab+2)x^2+x^4\right)L_0(x) = 2-(ab+2)x^2,$$

On obtient donc

$$L_0(x) = \frac{2-(ab+2)x^2}{1-(ab+2)x^2+x^4}.$$

De même, on trouve

$$L_1(x) = \frac{a+ax^3}{1-(ab+2)x^2+x^4}.$$

Puisque $L(x) = L_0(x) + L_1(x)$, on obtient :

$$L(x) = \frac{2+ax-(ab+2)x^2+ax^3}{1-(ab+2)x^2+x^4}.$$

□

2.3.2 Formules de Binet

Dans [EY09], les auteurs généralisent la formule de Binet à la suite bi-périodique de Fibonacci $(q_n)_{n\geq 0}$ comme suit :

Théorème 2.3.3 ([EY09])
Le $n^{\text{ième}}$ terme de la suite bi-périodique de Fibonacci $(q_n)_{n\geq 0}$ est donné par :

$$q_n = \frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}}\left(\frac{\alpha^n-\beta^n}{\alpha-\beta}\right), \quad n \geq 0, \tag{2.7}$$

où $\alpha = \dfrac{ab+\sqrt{\Delta}}{2}$ *et* $\beta = \dfrac{ab-\sqrt{\Delta}}{2}$ *sont les racines de l'équation quadratique* $x^2 - abx - ab = 0$*, avec* $\Delta = a^2b^2 + 4ab$ *et* $\xi(n) = n - 2\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$ *est la fonction de parité, c'est-à-dire* $\xi(n) = 0$ *quand* n *est pair et* $\xi(n) = 1$ *quand* n *est impair.*

Remarque 2.3.1

— *Les nombres* α *et* β *vérifient les propriétés suivantes :*
$\alpha^2 = ab(\alpha+1), \quad \beta^2 = ab(\beta+1), \quad \alpha+\beta = ab, \quad \alpha\beta = -ab, \quad \alpha-\beta = \sqrt{\Delta},$
$\dfrac{1}{\alpha} + \dfrac{1}{\beta} = -1, \quad (\alpha+1)(\beta+1) = 1, \quad \alpha+1 = \dfrac{\alpha^2}{ab}, \quad \beta+1 = \dfrac{\beta^2}{ab}, \quad -\beta(\alpha+1) = \alpha,$
$-\alpha(\beta+1) = \beta.$

— *La fonction de parité* ξ *vérifie les propriétés suivantes :*

$$\begin{aligned}
\xi(m+n) &= \xi(m) + \xi(n) - 2\xi(n)\xi(m), \\
\xi(m)\xi(n+1) &= \frac{1}{2}\left[\xi(m) + \xi(n+1) - \xi(m+n+1)\right], \\
\xi(m+1)\xi(n+1)) &= \frac{1}{2}\left[\xi(m+1) + \xi(n+1) - \xi(m+n)\right], \\
\xi(m) &= m - 2\lfloor \frac{m}{2} \rfloor.
\end{aligned}$$

Démonstration. Soient α et β les racines de l'équation caractéristique $x^2 - abx - ab = 0$. D'après Théorème 2.3.1, la fonction génératrice de la suite $(q_n)_n$ est donnée par la formule suivante :

$$F(x) = \frac{x\,(1 + ax - x^2)}{1 - (ab+2)x^2 + x^4}.$$

La décomposition en fraction de $F(x)$ est donnée par :

$$F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta}\left[\frac{a(\alpha+1) - \alpha x}{x^2 - (\alpha+1)} - \frac{a(\beta+1) - \beta x}{x^2 - (\beta+1)}\right].$$

Le développement de Maclaurin de la fonction $\dfrac{A - Bz}{z^2 - C}$ est le suivant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} BC^{-n-1} z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} AC^{-n-1} z^{2n},$$

donc la fonction génératrice peut s'écrire comme suit :

$$\begin{aligned}
F(x) = \frac{1}{\alpha - \beta} &\left[\frac{a(\alpha + 1) - \alpha x}{x^2 - (\alpha + 1)} - \frac{a(\beta + 1) - \beta x}{x^2 - (\beta + 1)} \right] \\
&= \frac{1}{\alpha - \beta} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{-\beta(\alpha + 1)^{n+1} + \alpha(\beta + 1)^{n+1}}{(\alpha + 1)^{n+1}(\beta + 1)^{n+1}} x^{2n+1} \right] + \\
&\qquad \frac{a}{\alpha - \beta} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(\beta + 1)(\alpha + 1)^{n+1} - (\alpha + 1)(\beta + 1)^{n+1}}{(\alpha + 1)^{n+1}(\beta + 1)^{n+1}} x^{2n} \right].
\end{aligned}$$

En utilisant les propriétés des nombres α et β données dans la Remarque 2.3.1, on obtient :

$$\begin{aligned}
F(x) &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ab} \right)^{n+1} \frac{-\beta\alpha^{2n+2} + \alpha\beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a \left(\frac{1}{ab} \right)^{n} \frac{(\beta + 1)\alpha^{2n+2} - (\alpha + 1)\beta^{2n+2}}{\alpha - \beta} x^{2n}, \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{ab} \right)^{n} \frac{\alpha^{2n+1} - \beta^{2n+1}}{\alpha - \beta} x^{2n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a \left(\frac{1}{ab} \right)^{n} \frac{\alpha^{2n} - \beta^{2n}}{\alpha - \beta} x^{2n}.
\end{aligned}$$

En combinant les deux sommes, on obtient :

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^{1-\xi(n)} \left(\frac{1}{ab} \right)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} q_n x^n,$$

d'où

$$q_n = \frac{a^{\xi(n+1)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta} \right).$$

□

On remarque que pour $a = b = 1$ on trouve $q_n = \dfrac{\alpha^n - \beta^n}{\alpha - \beta}$, qui est la formule de Binet pour la suite de Fibonacci classique.

Dans [Bil14], l'auteur obtient certaines propriétés de la suite de Lucas bi-périodique $(l_n)_{n\geq 0}$ et donne certaines relations entre les suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(l_n)_{n\geq 0}$. En particulier, il cite la formule de Binet de la suite bi-périodique de Lucas $(l_n)_{n\geq 0}$ comme suit :

Théorème 2.3.4 ([EY09])

Le n^{ieme} terme de la suite bi-périodique de Lucas $(l_n)_{n\geq 0}$ est donné par :

$$l_n = \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \left(\alpha^n + \beta^n\right), \qquad n \geq 0. \tag{2.8}$$

Démonstration. Soient α et β les racines de l'équation caractéristique $x^2 - abx - ab = 0$ et soit $L(x) = L_0(x) + L_1(x)$ la fonction génératrice de la suite bi-périodique de Lucas. Utilisons les identités mentionnées dans la Remarque 2.3.1 et le développement de Maclaurin de la fonction $\dfrac{Az+B}{z^2-C}$ qui est comme suit :

$$\frac{Az+B}{z^2-C} = -\sum_{n=0}^{+\infty} AC^{-n-1}z^{2n+1} - \sum_{n=0}^{+\infty} BC^{-n-1}z^{2n},$$

On simplifie $L_0(x)$ et $L_1(x)$ comme suit :

$$\begin{aligned} L_0(x) &= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[\frac{(ab+2)\alpha - ab}{(\alpha+1)^{n+1}} - \frac{(ab+2)\beta + ab}{(\beta+1)^{n+1}}\right] x^{2n} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}\left[(ab+2)\frac{\alpha^{2n+1}-\beta^{2n+1}}{(ab)^n} - (ab)\frac{\alpha^{2n+2}-\beta^{2n+2}}{(ab)^{n+1}}\right] x^{2n} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta}\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{(ab)^n}\left[\alpha^{2n}\left((ab+2)\alpha-\alpha^2\right) - \beta^{2n}\left((ab+2)\beta - \beta^{2n}\right)\right] x^{2n}. \end{aligned}$$

Puisque $(ab+2)\alpha - \alpha^2 = \alpha - \beta$ et $(ab+2)\beta - \beta^2 = \beta - \alpha$, on obtient :

$$L_0(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^n}\left(\alpha^{2n} + \beta^{2n}\right) x^{2n},$$

de même on trouve :

$$L_1(x) = a\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(ab)^{n+1}} \left(\alpha^{2n+1} + \beta^{2n+1}\right) x^{2n+1}.$$

D'où

$$L(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor}} (\alpha^n + \beta^n) x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} l_n x^n.$$

□

A partir des formules de Binet (2.7) et (2.8), les suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas peuvent être prolongés aux indices négatifs comme suit :

Corollaire 2.3.1

$$q_{-n} = (-1)^{n+1} q_n, \qquad n \in \mathbb{Z}, \tag{2.9}$$

et

$$l_{-n} = (-1)^n l_n, \qquad n \in \mathbb{Z}. \tag{2.10}$$

2.3.3 Les identités généralisées de Cassini, Catalan et d'Ocagne.

2.3.3.1 Les identités généralisées de la suite $(q_n)_{n\geq}$

Théorème 2.3.5 (L'identité de Cassini généralisée[Yay11])

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$a^{1-\xi(n)} b^{\xi(n)} q_{n-1} q_{n+1} - a^{\xi(n)} b^{1-\xi(n)} q_n^2 = (-1)^n a.$$

Puisque l'identité de Cassini est un cas particulier de l'identité de Catalan, comme indiqué ci-dessous, il suffit de prouver l'identité de Catalan.

Théorème 2.3.6 (L'identité de Catalan généralisée [Yay11])

Pour tous entiers positifs n et r, avec $n \geq r$, on a :

$$a^{\xi(n+r)}b^{1-\xi(n-r)}q_{n-r}q_{n+r} - a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}q_n^2 = a^{\xi(r)}b^{1-\xi(r)}(-1)^{n+1-r}q_r^2.$$

Démonstration. En utilisant la formule de Binet (2.7), on obtient :

$$a^{\xi(n+r)}b^{1-\xi(n-r)}q_{n-r}q_{n+r} = a^{\xi(n+r)}b^{1-\xi(n-r)}\left(\frac{a^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n-r}{2}\rfloor}}\right)\left(\frac{a^{1-\xi(n+r)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n+r}{2}\rfloor}}\right)\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta},$$

Donc

$$\begin{aligned} a^{\xi(n+r)}b^{1-\xi(n-r)}q_{n-r}q_{n+r} &= \left(\frac{a^{2-\xi(n-r)}b^{1-\xi(n-r)}}{(ab)^{n-\xi(n-r)}}\right)\frac{\alpha^{n-r}-\beta^{n-r}}{\alpha-\beta}\frac{\alpha^{n+r}-\beta^{n+r}}{\alpha-\beta} \\ &= \left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)\frac{\alpha^{2n}-(\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r}+\beta^{2r})+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}. \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}q_n^2 &= a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}\left(\frac{a^{2-2\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}\right)\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \left(\frac{a}{(ab)^{2\lfloor\frac{n}{2}+\xi(n)-1}}\right)\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2} \\ &= \left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)\frac{\alpha^{2n}-2(\alpha\beta)^n+\beta^{2n}}{(\alpha-\beta)^2}. \end{aligned}$$

D'où

$$\begin{aligned}
a^{\xi(n+r)}b^{1-\xi(n-r)}q_{n-r}q_{n+r} - a^{\xi(n)}b^{1-\xi(n)}q_n^2 &= \left(\frac{a}{(ab)^{n-1}}\right)\frac{2(\alpha\beta)^n - (\alpha\beta)^{n-r}(\alpha^{2r}+\beta^{2r})}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \left(\frac{-a}{(ab)^{n-1}}\right)(\alpha\beta)^{n-r}\frac{\alpha^{2r}-2\alpha^r\beta^r+\beta^{2r}}{(\alpha-\beta)^2} \\
&= \left(\frac{-a}{(ab)^{n-1}}\right)(-ab)^{n-r}\left(\frac{\alpha^r-\beta^r}{\alpha-\beta}\right)^2 \\
&= (-1)^{n+1-r}\frac{a}{(ab)^{r-1}}\cdot\frac{(ab)^{\lfloor\frac{r}{2}\rfloor}}{a^{2-2\xi(r)}}q_r^2 \\
&= (-1)^{n+1-r}a^{2\xi(r)-1}(ab)^{1-\xi(r)}q_r^2 \\
&= (-1)^{n+1-r}a^{\xi(r)}b^{1-\xi(r)}q_r^2.
\end{aligned}$$

□

Théorème 2.3.7 (L'identité de d'Ocagne généralisée [Yay11])

Pour tous entiers positifs n et m, avec $m \geq n$, on a :

$$a^{\xi(nm+m)}b^{\xi(nm+n)}q_m q_{n+1} - a^{\xi(nm+n)}b^{\xi(nm+m)}q_{m+1}q_n = a^{\xi(m-n)}(-1)^{m-n}q_{m-n}.$$

Démonstration. La preuve est similaire à la preuve du théorème précédent . □

2.3.3.2 Les identités généralisées de la suite $(l_n)_{n\geq}$

Théorème 2.3.8 (L'identité de Cassini généralisée [EY09])

Pour tout $n \geq 0$, on a :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} l_{n-1}l_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 = (-1)^{n+1}(ab+4).$$

Démonstration. En utilisant la formule de Binet et la propriété $\xi(m) = m - 2\lfloor\frac{m}{2}\rfloor$, on obtient :

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} l_{n-1}l_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 = \\
\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} \frac{1}{a^{\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor}b^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\frac{1}{a^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}b^{\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) \\
-\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)}\left(\frac{1}{a^{\lfloor\frac{n}{2}\rfloor}b^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor}}(\alpha^n+\beta^n)\right)^2 \\
= a^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-n-1}b^{n+1-2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}\left(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\right)\left(\alpha^{n+1}-\beta^{n+1}\right) \\
- a^{\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n-1}{2}\rfloor-n-1}b^{n+1-2\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n}{2}\rfloor-\lfloor\frac{n+2}{2}\rfloor}\left(\alpha^n+\beta^n\right)^2
\end{aligned}$$

donc

$$\begin{aligned}
\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)} l_{n-1}l_{n+1} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 &= (ab)^{-n}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}) - (ab)^{-n}(\alpha^n+\beta^n)^2 \\
&= (ab)^{-n}[\alpha^{n-1}\beta^{n+1}+\alpha^{n+1}\beta^{n-1}-2\alpha^n\beta^n] \\
&= \frac{(\alpha\beta)^n}{(ab)^n}\left[\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\alpha}-2\right] \\
&= (-1)^n\frac{1}{\alpha\beta}[\alpha^2+\beta^2-2\alpha\beta] \\
&= \frac{(-1)^{n+1}}{ab}(\alpha-\beta)^2
\end{aligned}$$

et une application des formules cités dans la Remarque 2.3.1 nous donne le résultat. □

Théorème 2.3.9 (L'identité de Catalan généralisée[EY09])

Pour tous entiers n et r positifs, avec $n \geq r$, on a :

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+r)} l_{n-r}l_{n+r} - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 = \frac{(-1)^{n+r}}{(ab)^n}\left(\alpha^r-\beta^r\right)^2.$$

2.4 Quelques identités sur les suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(l_n)_{n\geq 0}$

De nombreux auteurs ont étudié les propriétés des suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas, voir par exemple [Bil14 ; EY09 ; JC16 ; Yay11]. Dans la suite de ce chapitre nous avons besoin de quelques identités sur les suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(l_n)_{n\geq 0}$ pour prouver des nouvelles identités. Nous allons les résumer dans cette section.

Proposition 2.4.1 ([Bil14])

Soient $n, m \in \mathbb{Z}$, alors on a :

$$q_{n-1} + q_{n+1} = l_n, \quad et \tag{2.11}$$

$$l_{n-1} + l_{n+1} = (ab+4)q_n. \tag{2.12}$$

Démonstration. À partir de la formule de Binet (2.7), on écrit

$$\begin{aligned} q_{n-1} + q_{n+1} &= \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n-1} - \beta^{n-1}}{\alpha - \beta} \right) + \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}} \left(\frac{\alpha^{n+1} - \beta^{n+1}}{\alpha - \beta} \right) \\ &= \frac{a^{\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n-1}{2} \rfloor}} \frac{1}{(\alpha - \beta)} \left[\alpha^n \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{ab} \right) - \beta^n \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{ab} \right) \right]. \end{aligned}$$

Puisque

$$\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{\alpha}{ab} \right) = \frac{\alpha - \beta}{ab} \quad et \quad \left(\frac{1}{\beta} + \frac{\beta}{ab} \right) = \frac{\beta - \alpha}{ab},$$

on obtient :

$$q_{n-1} + q_{n+1} = l_n.$$

□

Proposition 2.4.2 ([Bil14])

Pour $n, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\Delta\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(m+1)\xi(n+1)}\left(\frac{1}{ab}\right)^{1-\xi(n+1)\xi(m+1)} q_m q_n + \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m)} l_m l_n = 2l_{m+n}, \tag{2.13}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)\xi(m)} q_n l_m + \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m+1)} q_m l_n = 2q_{n+m}, \tag{2.14}$$

Démonstration. À partir des formules de Binet des suites $(q_n)_{n\geq 0}$ et $(l_n)_{n\geq 0}$, on écrit

$$l_{m+n} = \frac{a^{\xi(n+m)}}{(ab)^{\lfloor \frac{n+m+1}{2} \rfloor}}\left(\alpha^{n+m} + \beta^{n+m}\right),$$

et

$$q_m q_n = \frac{a^{2-(\xi(m)+\xi(n))}}{(ab)^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor}} \frac{1}{(\alpha-\beta)^2}\left(\alpha^{m+n} - \alpha^m\beta^n - \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n}\right),$$

et

$$l_m l_n = \frac{a^{\xi(m)+\xi(n)}}{(ab)^{\lfloor \frac{m+1}{2} \rfloor + \lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor}}\left(\alpha^{m+n} + \alpha^m\beta^n + \alpha^n\beta^m + \beta^{m+n}\right).$$

selon la parité de n et m, il y trois cas à discuter

1. Si n et m sont pairs, on obtient

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha-\beta)^2}{a^2} q_m q_n + l_n l_m\right] = l_{n+m}.$$

2. Si n et m sont impairs, on obtient

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha-\beta)^2}{ab} q_m q_n + \frac{b}{a} l_n l_m\right] = l_{n+m}.$$

3. Si l'un de m et n est pair et l'autre impair, on trouve

$$\frac{1}{2}\left[\frac{(\alpha-\beta)^2}{ab} q_m q_n + l_n l_m\right] = l_{n+m}.$$

En considérant les trois dernières équations ensemble, nous obtenons la première identité de la proposition. La deuxième identité est obtenue de la même manière.

□

Si on remplace n par $(-n)$ dans Proposition 2.4.2 et en utilisant le Corollaire 2.3.1, on obtient les formules de soustraction suivantes :

Corollaire 2.4.1

Pour $n, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+1)\xi(m)} q_n l_m - \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m+1)} q_m l_n = 2(-1)^m q_{n-m}, \tag{2.15}$$

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)\xi(m)} l_n l_m - \Delta\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(n+1)\xi(m+1)} \left(\frac{1}{ab}\right)^{1-\xi(n+1)\xi(m+1)} q_n q_m = 2(-1)^m l_{n-m}. \tag{2.16}$$

Corollaire 2.4.2

Pour $n, m \in \mathbb{Z}$, on a

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n)} l_n^2 - \Delta\left(\frac{1}{a^2}\right)^{\xi(n+1)} \left(\frac{1}{ab}\right)^{\xi(n)} q_n^2 = 4(-1)^n. \tag{2.17}$$

Démonstration. Il suffit de prendre $m = n$ dans le corollaire pécédent. □

Nous donnons maintenant certaines nouvelles identités impliquant les suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas qui seront utiles par la suite.

2.5 Des nouvelles identités impliquant des suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas.

Il existe différentes méthodes pour dériver les identités des suites bi-périodiques de Fibonacci et de Lucas, telles que l'utilisation de la formule de Binet, l'induction, les matrices, etc. L'induction nous a permis d'obtenir un grand nombre de nouvelles identités que nous allons presenter dans cette section. Tout au long de cette partie, a et b sont supposés être des entiers non nuls et $\Delta = (ab)^2 + 4ab > 0$. Par une simple induction, en utilisant (2.4) et (2.5), on peut voir que $a \mid q_{2n}$ et $a \mid l_{2n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, nous mettons $t_n = \dfrac{q_{2n}}{a}$ et $s_n = \dfrac{l_{2n+1}}{a}$.

Proposition 2.5.1

Soient $n, m, k \in \mathbb{Z}$, alors

$$\left(-\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+k)[1-\xi(n+m)]} q_{n+m}^2 + (-1)^{1+\xi(n+k)[1-\xi(n+m)]} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+k)} l_{n-k} q_{n+m} q_{m+k} + \left(-\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+k)\xi(n+m)} q_{m+k}^2 = \left(-\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+m)[1-\xi(n+k)]} q_{n-k}^2.$$

Démonstration. Selon la parité de $(n+m)$ et $(m+k)$, il y a quatre cas à étudier.

1. Si $(n+m)$ et $(n+k)$ sont pairs, nous devons prouver la formule suivante :

$$q_{n+m}^2 - l_{n-k} q_{n+m} q_{m+k} + q_{m+k}^2 = q_{n-k}^2. \tag{2.18}$$

On considère le cas n, m et k pairs. Le cas n, m et k impairs se fait avec la même méthode.

De l'identité (2.14), on a

$$\begin{cases} q_n l_m + q_m l_n = 2q_{n+m} \\ q_k l_m + q_m l_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.19}$$

En multipliant la première identité de (2.19) par q_k et la seconde par q_n, et la soustraction des résultats, nous obtenons

$$q_m \left(l_n q_k - l_k q_n\right) = 2 \left(q_{n+m} q_k - q_{m+k} q_n\right).$$

En utilisant l'identité (2.15), on obtient

$$q_m q_{n-k} = q_{m+k} q_n - q_{n+m} q_k. \tag{2.20}$$

En multipliant la première identité de (2.19) par l_k et la seconde par l_n, et la soustraction des résultats, nous obtenons

$$l_m \left(q_n l_k - q_k l_n\right) = 2 \left(q_{n+m} l_k - q_{m+k} l_n\right).$$

En utilisant l'identité (2.15), on obtient

$$l_m q_{n-k} = q_{n+m} l_k - q_{m+k} l_n. \tag{2.21}$$

De (2.17), on remarque que

$$\left(l_m q_{n-k}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) \left(q_m q_{n-k}\right)^2 = 4q_{n-k}^2.$$

En utilisant (2.20) et (2.21), nous obtenons

$$(q_{n+m}l_k - q_{m+k}l_n)^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_{m+k}q_n - q_{n+m}q_k)^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

2. Si $(n+m)$ est pair et $(n+k)$ est impair, on doit prouver

$$-\left(\frac{b}{a}\right)q_{n+m}^2 + \left(\frac{b}{a}\right)l_{n-k}q_{n+m}q_{m+k} + q_{m+k}^2 = q_{n-k}^2. \tag{2.22}$$

On considère le cas n, m pairs et k impair. Le cas n, m impairs et k pair se fait avec la même méthode. De (2.14), nous avons

$$\begin{cases} q_n l_m + q_m l_n = 2q_{n+m} \\ q_k l_m + \left(\frac{b}{a}\right) q_m l_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.23}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m q_{n-k} = q_{n+m}q_k - q_{m+k}q_n \tag{2.24}$$

et

$$l_m q_{n-k} = q_{m+k}l_n - \left(\frac{b}{a}\right)q_{n+m}l_k. \tag{2.25}$$

A partir de (2.17), on remarque que

$$(l_m q_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_m q_{n-k})^2 = 4q_{n-k}^2.$$

En utilisant (2.24) et (2.25), nous obtenons

$$\left[q_{m+k}l_n - \left(\frac{b}{a}\right) q_{n+m}l_k\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_{n+m}q_k - q_{m+k}q_n)^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

3. Si $(n+m)$ est impair et $(n+k)$ est pair, on doit prouver

$$q_{n+m}^2 - l_{n-k}q_{n+m}q_{m+k} + q_{m+k}^2 = -\left(\frac{b}{a}\right) q_{n-k}^2. \tag{2.26}$$

On considère le cas n, k impairs et m pair. Le cas n, k pairs et m impair se fait avec la même méthode. De la formule (2.14), nous avons

$$\begin{cases} q_n l_m + \left(\frac{b}{a}\right) q_m l_n = 2q_{n+m} \\ q_k l_m + \left(\frac{b}{a}\right) q_m l_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.27}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m q_{n-k} = \left(\frac{a}{b}\right)(q_{n+m}q_k - q_{m+k}q_n) \tag{2.28}$$

et

$$l_m q_{n-k} = q_{m+k}l_n - q_{n+m}l_k. \tag{2.29}$$

A partir de (2.17), on remarque que

$$(l_m q_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_m q_{n-k})^2 = 4q_{n-k}^2.$$

En utilisant (2.28) et (2.29), nous obtenons

$$(q_{m+k}l_n - q_{n+m}l_k)^2 - \left(\frac{\Delta}{b^2}\right)(q_{n+m}q_k - q_{m+k}q_n)^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

4. Si $(n+m)$ et $(n+k)$ sont impairs, on doit prouver

$$q_{n+m}^2 - \left(\frac{b}{a}\right) l_{n-k}q_{n+m}q_{m+k} - \left(\frac{b}{a}\right) q_{m+k}^2 = q_{n-k}^2. \tag{2.30}$$

On considère le cas n impair et m, k pairs. Le cas n pair et m, k impairs se fait avec la même méthode. De l'identité (2.14), on a

$$\begin{cases} q_n l_m + \left(\frac{b}{a}\right) q_m l_n = 2q_{n+m} \\ q_k l_m + q_m l_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.31}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient :

$$q_m q_{n-k} = q_{m+k}q_n - q_{n+m}q_k \tag{2.32}$$

et

$$l_m q_{n-k} = q_{n+m}l_k - \left(\frac{b}{a}\right) q_{m+k}l_n. \tag{2.33}$$

A partir de (2.17), on remarque que

$$(l_m q_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_m q_{n-k})^2 = 4q_{n-k}^2.$$

En utilisant (2.32) et (2.33), nous obtenons

$$\left[q_{n+m}l_k - \left(\frac{b}{a}\right) q_{m+k}l_n\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_{m+k}q_n - q_{n+m}q_k)^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

□

Proposition 2.5.2

Soient $n, m, k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+m)[1-\xi(n+k)]} l_{n+m}^2 - \Delta\left(\frac{1}{a^2}\right)^{1-\xi(n+k)}\left(\frac{1}{ab}\right)^{\xi(n+k)} q_{n-k}l_{n+m}q_{m+k} + (-1)^{1-\xi(n+k)}\left(\frac{\Delta}{ab}\right)\left(\frac{b}{a}\right)^{[1-\xi(n+k)][1-\xi(n+m)]} q_{m+k}^2 = (-1)^{\xi(n+m)+\xi(n+k)}\left(\frac{b}{a}\right)^{[1-\xi(n+m)]\xi(n+k)} l_{n-k}^2.$$

Démonstration. Selon la parité de $(n+m)$ et $(m+k)$, il y a quatre cas à discuter.

1. Si $(n+m)$ et $(n+k)$ sont pairs, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) l_{n+m}q_{n-k}q_{m+k} - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) q_{m+k}^2 = l_{n-k}^2. \tag{2.34}$$

On considère le cas n, m et k pairs. Le cas n, m et k impairs se fait avec la même méthode. A partir des identités (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{a^2}\right) q_nq_m + l_nl_m = 2l_{n+m} \\ q_kl_m + q_ml_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.35}$$

En multipliant la première identité de (2.35) par q_k et la seconde par l_n, et la soustraction des résultats, nous obtenons

$$q_m \left[\left(\frac{\Delta}{a^2} \right) q_n q_k - l_k l_n \right] = 2 \left(l_{n+m} q_k - q_{m+k} l_n \right).$$

En utilisant l'identité (2.16), nous obtenons

$$q_m l_{n-k} = q_{m+k} l_n - l_{n+m} q_k.$$

En multipliant la première identité de (2.35) par l_k et la seconde par $\left(\frac{\Delta}{a^2} \right) q_n$, et la soustraction des résultats, nous obtenons

$$l_m \left[l_n l_k - \left(\frac{\Delta}{a^2} \right) q_n q_k \right] = 2 \left[l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{a^2} \right) q_{m+k} q_n \right].$$

En utilisant l'identité (2.16) nous obtenons

$$l_m l_{n-k} = l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{a^2} \right) q_{m+k} q_n.$$

De (2.17), on voit que

$$\left(l_m l_{n-k} \right)^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2} \right) \left(q_m l_{n-k} \right)^2 = 4 l_{n-k}^2,$$

c'est-à-dire,

$$\left[l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{a^2} \right) q_{m+k} q_n \right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2} \right) \left(q_{m+k} l_n - l_{n+m} q_k \right)^2 = 4 l_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.15) et (2.17) nous obtenons le résultat.

2. Si $(n+m)$ est pair et $(n+k)$ est impair, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) l_{n+m} q_{n-k} q_{m+k} + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k}^2 = -\left(\frac{b}{a}\right) l_{n-k}^2. \tag{2.36}$$

On considère le cas n, m pairs et k impair. Le cas n, m impairs et k pair se fait avec la même méthode.

A partir des identités (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ q_k l_m + \left(\frac{b}{a}\right) q_m l_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.37}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m l_{n-k} = \left(-\frac{b}{a}\right) (l_{n+m} q_k - q_{m+k} l_n)$$

et

$$l_m l_{n-k} = l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k} q_n.$$

De (2.17), on voit que

$$(l_m l_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) (q_m l_{n-k})^2 = 4l_{n-k}^2,$$

i.e.,

$$\left[l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k} q_n\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) \left[\left(-\frac{b}{a}\right) (l_{n+m} q_k - q_{m+k} l_n)\right]^2 = 4l_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.15) et (2.17) nous obtenons le résultat.

3. Si $(n+m)$ est impair et $(n+k)$ est pair, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) l_{n+m} q_{n-k} q_{m+k} - \left(\frac{\Delta}{b^2}\right) q_{m+k}^2 = -\left(\frac{a}{b}\right) l_{n-k}^2. \tag{2.38}$$

On considère le cas n, k impairs et m pair. Le cas n, k pairs et m impair se fait avec la même méthode. A partir des identités (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{ab}\right) q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ q_k l_m + \left(\dfrac{b}{a}\right) q_m l_k = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.39}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m l_{n-k} = l_{n+m} q_k - q_{m+k} l_n$$

et

$$l_m l_{n-k} = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k} q_n - \left(\frac{b}{a}\right) l_{n+m} l_k.$$

De (2.17), on voit que

$$(l_m l_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) (q_m l_{n-k})^2 = 4l_{n-k}^2,$$

i.e.,

$$\left[\left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k} q_n - \left(\frac{b}{a}\right) l_{n+m} l_k\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) [l_{n+m} q_k - q_{m+k} l_n]^2 = 4l_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.15) et (2.17) nous obtenons le résultat.

4. Si $(n+m)$ et $(n+k)$ sont impairs, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) l_{n+m} q_{n-k} q_{m+k} + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k}^2 = l_{n-k}^2. \tag{2.40}$$

On considère le cas n impair et m, k pairs. Le cas n pair et m, k impairs se fait avec la même méthode. A partir des identités (2.13) et (2.14), on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ q_m l_k + q_k l_m = 2q_{m+k} \end{cases}. \tag{2.41}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m l_{n-k} = q_{m+k} l_n - l_{n+m} q_k.$$

et

$$l_m l_{n-k} = l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k} q_n.$$

De (2.17) nous voyons que

$$(l_m l_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) (q_m l_{n-k})^2 = 4l_{n-k}^2,$$

c'est-à-dire,

$$\left[l_{n+m} l_k - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{m+k} q_n\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) [q_{m+k} l_n - l_{n+m} q_k]^2 = 4l_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.15) et (2.17) nous obtenons le résultat.

$\square$

Proposition 2.5.3

Soeint $n, m, k \in \mathbb{Z}$. Alors

$$\left(\frac{-b}{a}\right)^{\xi(n+m)\xi(n+k)} l_{n+m}^2 - (-1)^{\xi(n+m)\xi(n+k)} \left(\frac{b}{a}\right)^{\xi(n+k)} l_{n-k}l_{n+m}l_{m+k} + \left(\frac{-b}{a}\right)^{[1-\xi(n+m)]\xi(n+k)} l_{m+k}^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right)\left(\frac{-b}{a}\right)^{[1-\xi(n+m)][1-\xi(n+k)]} q_{n-k}^2.$$

Démonstration. Selon la parité de $(n+m)$ et $(m+k)$, il y a quatre cas.

1. Si $(n+m)$ et $(n+k)$ sont pairs, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - l_{n-k}l_{n+m}l_{m+k} + l_{m+k}^2 = -\left(\frac{\Delta}{a^2}\right) q_{n-k}^2. \tag{2.42}$$

On considère le cas n, m et k pairs. Le cas n, m et k impairs se fait avec la même méthode. De l'identité (2.13), on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ \left(\frac{\Delta}{a^2}\right) q_m q_k + l_m l_k = 2l_{m+k} \end{cases}. \tag{2.43}$$

En multipliant la première identité de (2.43) par l_k et la seconde par l_n, et la soustraction des résultats, nous obtenons

$$\left(\frac{\Delta}{a^2}\right) q_m \left(q_n l_k - q_k l_n\right) = 2\left(l_{n+m}l_k - l_{m+k}l_n\right).$$

En utilisant l'identité (2.15), nous obtenons

$$q_m q_{n-k} = \left(\frac{a^2}{\Delta}\right)\left(l_{n+m}l_k - l_{m+k}l_n\right).$$

En multipliant la première identité de (2.43) par q_k et la seconde par q_n, et la soustraction des résultats, nous obtenons

$$l_m\left(l_n q_k - q_n l_k\right) = 2\left(l_{n+m} q_k - l_{m+k} q_n\right).$$

En utilisant l'identité (2.15), nous obtenons

$$l_m q_{n-k} = l_{m+k} q_n - l_{n+m} q_k.$$

De (2.17), on voit que

$$\left(l_m q_{n-k}\right)^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)\left(q_m q_{n-k}\right)^2 = 4q_{n-k}^2,$$

i.e.,

$$\left[\left(\frac{a^2}{\Delta}\right)\left(l_{n+m} l_k - l_{m+k} l_n\right)\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)\left[l_{m+k} q_n - l_{n+m} q_k\right]^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

2. Si $(n+m)$ est pair et $(n+k)$ est impair, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - \left(\frac{b}{a}\right) l_{n-k} l_{n+m} l_{m+k} - \left(\frac{b}{a}\right) l_{m+k}^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{n-k}^2. \tag{2.44}$$

On considère le cas n, m pairs et k impair. Le cas n, m impairs et k pair se fait avec la même méthode. De l'identité (2.13), on a

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{a^2}\right) q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ \left(\dfrac{\Delta}{ab}\right) q_m q_k + l_m l_k = 2l_{m+k} \end{cases}. \tag{2.45}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m q_{n-k} = \left(\frac{ab}{\Delta}\right)(l_{m+k}l_n - l_{n+m}l_k)$$

et

$$l_m q_{n-k} = l_{n+m}q_k - \left(\frac{b}{a}\right) l_{m+k}q_n.$$

De (2.17), on voit que

$$(l_m q_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_m q_{n-k})^2 = 4q_{n-k}^2,$$

i.e.,

$$\left[l_{n+m}q_k - \left(\frac{b}{a}\right) l_{m+k}q_n\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)\left(\frac{ab}{\Delta}\right)^2 [l_{m+k}l_n - l_{n+m}l_k]^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

3. Si $(n+m)$ est impair et $(n+k)$ est pair, on doit prouver

$$l_{n+m}^2 - l_{n-k}l_{n+m}l_{m+k} + l_{m+k}^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{n-k}^2. \tag{2.46}$$

On considère le cas n, k impairs et m pair. Le cas n, k pairs et m impair se fait avec la même méthode. De l'identité (2.13), on a

$$\begin{cases} \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_m q_k + l_m l_k = 2l_{m+k} \end{cases}. \tag{2.47}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m q_{n-k} = \left(\frac{ab}{\Delta}\right)(l_{m+k}l_n - l_{n+m}l_k)$$

et

$$l_m q_{n-k} = l_{n+m}q_k - l_{m+k}q_n.$$

De (2.17), on voit que

$$(l_m q_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_m q_{n-k})^2 = 4q_{n-k}^2,$$

i.e.,

$$(l_{n+m}q_n - l_{m+k}q_n)^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)\left(\frac{ab}{\Delta}\right)^2(l_{m+k}l_n - l_{n+m}l_k)^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

4. Si $(n+m)$ et $(n+k)$ sont impairs, il faut prouver

$$\left(\frac{-b}{a}\right)l_{n+m}^2 + \left(\frac{b}{a}\right)l_{n-k}l_{n+m}l_{m+k} + l_{m+k}^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right)q_{n-k}^2. \tag{2.48}$$

On considère le cas n impair et m, k pairs. Le cas n pair et m, k impairs se fait avec la même méthode. De l'identité (2.13), on a

$$\begin{cases} \left(\dfrac{\Delta}{ab}\right)q_n q_m + l_n l_m = 2l_{n+m} \\ \left(\dfrac{\Delta}{a^2}\right)q_m q_k + l_m l_k = 2l_{m+k} \end{cases}. \tag{2.49}$$

Avec le même procédé que précédemment, on obtient

$$q_m q_{n-k} = \left(\frac{ab}{\Delta}\right)(l_{n+m}l_k - l_{m+k}l_n)$$

et

$$l_m q_{n-k} = l_{m+k}q_n - \left(\frac{b}{a}\right) l_{n+m}q_k.$$

De (2.17), on voit que

$$(l_m l_{n-k})^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)(q_m l_{n-k})^2 = 4q_{n-k}^2,$$

i.e.,

$$\left[l_{m+k}q_n - \left(\frac{b}{a}\right) l_{n+m}q_k\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{a^2}\right)\left(\frac{ab}{\Delta}\right)^2 \left[l_{n+m}l_k - l_{m+k}l_n\right]^2 = 4q_{n-k}^2.$$

Enfin, en développant et en utilisant les identités (2.16) et (2.17) nous obtenons le résultat.

□

Chapitre 3

Solutions d'équations Diophantiennes en termes de suites récurrentes

Sommaire

3.1 Introduction

Les principales questions qui ont été posé pour les équations Diophantiennes au début étaient : L'équation est-elle résoluble ? Si elle est résoluble, l'ensemble des solutions de cette équation est-il fini ou infini ? Si elle est résoluble, est-il possible de donner une procédure efficace pour trouver toutes les solutions ? En effet, les questions que l'on peut se poser concernant les solutions des équations Diophantiennes sont nombreuses.

Dans ce chapitre, nous étudierons les solutions de quelques types d'équations Diophantiennes concernant un exemple des suites récurrentes linéaires qui sont les suites de Fibonacci et de Lucas et ses généralisations.

Il y a beaucoup de travaux sur les équations Diophantiennes impliquants des suites récurrentes, soit les suites de Fibonacci et de Lucas, soit les suites généralisées des suites de Fibonacci et de Lucas (voir [AAB17 ; Bil14 ; DBK13 ; DK09 ; Jon76 ; KD13 ; McD95 ; Sav09]).

Notre but dans le présent chapitre, est de déterminer toutes les solutions entières (x, y) des équations Diophantiennes suivantes :

$$x^2 - \Delta y^2 = 4,$$

$$x^2 - \Delta y^2 = 4^k,$$

$$(ab)x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -4,$$

$$x^2 + abs_n xy - aby^2 = q_{2n+1}^2,$$

$$x^2 - l_{2n} xy + y^2 = -(ab)t_n^2,$$

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -(ab)s_n^2,$$

$$x^2 - \Delta t_n xy - \Delta y^2 = -(ab)l_{2n}^2,$$

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = s_n^2,$$

$$x^2 - (ab)s_n xy - (ab)y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2,$$

$$x^2 - l_{2n} xy + y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n^2.$$

3.2 Solutions de certaines équations Diophantiennes en termes de suites généralisées de Fibonacci et de Lucas

De nombreux auteurs ont étudié diverses équations Diophantiennes impliquant des suites récurrentes linéaires, on va résumer certains résultats des ces travaux dans cette section.

Dans [DK09] les auteurs ont utilsé les matrices pour obtenir des nouvelles identités des nombres de Fibonacci et de Lucas, sachant qu'il existe différentes méthodes pour dériver des identités des nombres de Fibonacci et de Lucas ou de ses généralisations, telles que l'utilisation de la formule de Binet, la déduction, les matrices, etc. Ensuite, Ils ont résolu les équations Diophantiennes qui sont résumées dans le tableau suivant :

Équation	**Solutions**	**Conditions**
$x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = -L_n^2$,	$(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$	pour un nombre entier impair m
$x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^ny^2 = L_n^2$,	$(x, y) = \pm(L_{n+m}, F_m)$	pour un nombre entier pair m
$x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = -5F_n^2$,	$(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$	pour un nombre entier pair m
$x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = 5F_n^2$,	$(x, y) = \pm(L_{n+m}, L_m)$	pour un nombre entier impair m
$x^2 - L_nxy + (-1)^ny^2 = -F_n^2$,	$(x, y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$	pour un nombre entier impair m

Équation	Solutions	Conditions
$x^2 - L_nxy + (-1)^n y^2 = F_n^2,$	$(x,y) = \pm(F_{n+m}, F_m)$	pour un nombre entier pair m
$x^2 - L_nxy - y^2 = -1$	$(x,y) = \pm\left(F_{(2k+2)n}/F_n, F_{(2k+1)n}/F_n\right),$	avec $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_nxy - y^2 = 1,$	$(x,y) = \pm\left(F_{(2k+1)n}/F_n, F_{2kn}/F_n\right),$	avec $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - 5F_nxy - 5(-1)^n y^2 = 1$	$(x,y) = \pm\left(L_{(2k+1)n}/L_n, F_{2kn}/L_n\right)$	avec $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_nxy + (-1)^n y^2 = -5$	$(x,y) = \pm\left(L_{n+m}/F_n, L_m/F_n\right)$	avec m entier pair
$x^2 - L_nxy + (-1)^n y^2 = 5$	$(x,y) = \pm\left(L_{n+m}/F_n, L_m/F_n\right)$	avec m entier impair
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = -5F_n^2$	$(x,y) = \pm\left(L_{(2k+3)n}/L_n, L_{(2k+1)n}/L_n\right)$	si n est un entier pair et $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = 5F_n^2$	$(x,y) = \pm\left(L_{(2k+3)n}/L_n, L_{(2k+1)n}/L_n\right)$	si n est un entier impair et $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = F_n^2,$	$(x,y) = \pm\left(F_{(2k+2)n}/L_n, F_{2kn}/L_n\right)$	avec $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = -L_n^2$	$(x,y) = \pm\left(F_{(2k+3)n}/F_n, F_{(2k+1)n}/F_n\right)$	$\forall n \geq 2$ entier impair et $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = L_n^2,$	$(x,y) = \pm\left(F_{(k+2)n}/F_n, F_{kn}/F_n\right)$	n entier pair et $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = L_n^2,$	$(x,y) = \pm\left(F_{(2k+2)n}/F_n, F_{2kn}/F_n\right)$	n entier impair et $k \in \mathbb{Z}$
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = -5L_n^2,$	$(x,y) = \pm\left(L_{2n+m}/F_n, L_m/F_n\right)$	avec m entier pair
$x^2 - L_{2n}xy + y^2 = 5L_n^2$	$(x,y) = \pm(L_{2n+m}/F_n, L_m/F_n)$	avec m entier impair.
$u^2 - 5v^2 = 4^k,$	$(u,v) = \left(2^{k-1}L_{2m}, 2^{k-1}F_{2m}\right)$	$k \geq 0$

Équation	Solutions	Conditions
$u^2 - 5v^2 = -4^k, \quad k \geq 0$	$(u,v) = \left(2^{k-1}L_{2m+1}, 2^{k-1}F_{2m+1}\right)$	avec $m \geq 0$.
$u^2 - 5v^2 = 1$	$(u,v) = (L_{6m}/2, F_{6m}/2)$	avec $m \geq 0$.
$x^2 - xy - y^2 = -4^k, \quad k \geq 0$	$(x,y) = \left(2^k F_{2m+2}, 2^k F_{2m+1}\right)$	avec $m \geq 0$.
$x^2 - xy - y^2 = 4^k, \quad k \geq 0$	$(x,y) = \left(2^k F_{2m+1}, 2^k F_{2m}\right)$	avec $m \geq 0$.
$u^2 - 5v^2 = 4 \cdot 5^k,$	$(u,v) = \begin{cases} \left(5^{(k+1)/2}F_{2m+1}, 5^{(k-1)/2}L_{2m+1}\right) \\ \left(5^{k/2}L_{2m}, 5^{k/2}F_{2m}\right) \end{cases}$	*k est un entier impair,* *k est un entier pair,*
$u^2 - 5v^2 = -4 \cdot 5^k,$	$(u,v) = \begin{cases} \left(5^{(k+1)/2}F_{2m}, 5^{(k-1)/2}L_{2m}\right) \\ \left(5^{k/2}L_{2m+1}, 5^{k/2}F_{2m+1}\right) \end{cases}$	*k est un entier impair,* *k est un entier pair,*
$x^2 - xy - y^2 = 5^k,$	$(u,v) = \begin{cases} \left(5^{(k-1)/2}L_{2m+2}, 5^{(k-1)/2}L_{2m+1}\right) \\ \left(5^{k/2}F_{2m+1}, 5^{k/2}F_{2m}\right) \end{cases}$	*k est un entier impair,* *k est un entier pair,*
$x^2 - xy - y^2 = -5^k,$	$(u,v) = \begin{cases} \left(5^{(k-1)/2}L_{2m+1}, 5^{(k-1)/2}L_{2m}\right) \\ \left(5^{k/2}F_{2m+2}, 5^{k/2}F_{2m+1}\right) \end{cases}$	*k est un entier impair,* *k est un entier pair,*

D'autre auteurs comme dans [KD13] ont traité certaines équations Diophantiennes. En utilisant deux types de suites généralisées de Fibonacci et de Lucas (U_n), (V_n) et (u_n), (v_n) définies comme suit :

La suite généralisée de Fibonacci $(U_n)_n$ avec le paramètre $k \geq 1$:

$$U_0 = 0, \quad U_1 = 1, \quad U_n = kU_{n-1} + U_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

et la suite généralisée de Lucas $(V_n)_n$ est définie de manière similaire par :

$$V_0 = 2, \quad V_1 = K, \quad V_n = kV_{n-1} + V_{n-2} \quad \forall n \geq 2$$

De plus, la suite de Fibonacci généralisée $(u_n)_n$ avec le paramètre k, est définie par

$$u_0 = 0,\ u_1 = 1 \quad et \quad u_n = ku_{n-1} - u_{n-2}, \quad \forall n \geq 2, \tag{3.1}$$

et la suite de Lucas généralisée $(v_n)_n$ définie par

$$v_0 = 2,\ v_1 = k \quad et \quad v_n = kv_{n-1} - v_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{3.2}$$

où $k \geq 3$ entier. Et ils ont obtenu des solutions entières de certaines équations Diophantiennes telles que :

Équation	**Solutions**	**Conditions**
$x^2 + kxy - y^2 = \pm 1$	$(x, y) = \mp(U_n, U_{n-1})$	avec $n \in \mathbb{Z}$
$x^2 - kxy + y^2 = \mp 1,$	$(x, y) = (U_n, U_{n-1})$	avec $n \geq 0$
$u^2 - (k^2 + 4)v^2 = \mp 4$	$(u, v) = (V_n, U_n)$	avec $n \geq 0$
$x^2 - kxy - y^2 = \mp(k^2 + 4)$	$(x, y) = \mp(V_n, V_{n-1})$	avec $n \in \mathbb{Z}$
$x^2 - kxy - y^2 = \mp(k^2 + 4)$	$(x, y) = (V_n, V_{n-1})$	avec $n \in \mathbb{N}$ et $(k^2 + 4)$ un entier sans facteur carré
$x^2 - (k^2+4)xy + (k^2+4)y^2 = \mp k^2$	$(x, y) = \mp(V_{n+1}, U_n)$	avec $n \in \mathbb{Z}$
$x^2 - kxy + y^2 = -(k^2 - 4)$	$(x, y) = \mp(v_n, v_{n-1})$	avec $n \in \mathbb{Z}$

Dans [AAB17] les auteurs ont donné des nouvelles identités sur les suites de généralisées de Fibonacci et de Lucas en utilisant la méthode de déduction. Ensuite ils ont résolu complètement les équations Diophantiennes résumées dans la tableau suivant :

Équation	**Solutions**	**Conditions**
$x^2-(p^2-4)u_nxy-(p^2-4)y^2=v_n^2,$	$(x,y)=\pm(v_{n+m},u_m)\ et\ (-v_{n-m},u_m), m\in\mathbb{Z}$	pour $\lvert p\rvert>2$ et $n\in\mathbb{Z}$
$x^2-pxy+y^2=1$	$(x,y)=\pm(u_{m\pm1},u_m), m\in\mathbb{Z}$	pour $\lvert p\rvert>2$
$x^2-(p^2-4)y^2=4,$	$(x,y)=(\pm v_n,\pm u_n), n\in\mathbb{Z}$	pour $\lvert p\rvert>2$
$x^2-(p^2-4)y^2=4^k,$	$(x,y)=(\pm 2^{k-1}v_n,\pm 2^{k-1}u_n), n\in\mathbb{Z}$	pour $\lvert p\rvert>2$ avec p impair
$x^2-(p^2-4)y^2=1,$	$(x,y)=\begin{cases}(\pm v_{2m}/2,\pm u_{2m}/2) & m\in\mathbb{Z}\\ (\pm v_{3m}/2,\pm u_{3m}/2) & \end{cases}$	*si p est pair* *si p est impair*
$x^2-v_nxy+y^2=u_n^2,$	$(x,y)=\begin{cases}\pm(u_{n+m},u_m)\ \ et\ \ \pm(u_{m-n},u_m)\\ (x,x),\ \ x\in\mathbb{Z}\end{cases}$	*si* $n\neq0$ *si* $n=0$
$x^2-(p^2-4)u_nxy-(p^2-4)y^2=1$	$(x,y)=\begin{cases}(\pm v_{2k+1}/v_n,\pm u_{2kn}/v_n)\\ & m\in\mathbb{Z}\\ (\pm v_{2m}/2,\pm u_m/2)\\ (\pm v_{3m}/2,\pm u_{3m}/2)\end{cases}$	*si* $n\neq0$ *si* $n=0$ *donc* $\begin{cases}si\ \ p\ \ est\ \ pair\\ si\ \ p\ \ est\ \ pair\end{cases}$

Équation	Solutions	Conditions
$x^2 - v_n xy + y^2 = 1,$	$(x,y) = \begin{cases} \pm(u_{(k+1)n}/u_n, u_{kn}/u_n);, \\ \pm(u_{(k-1)n}/u_n, u_{kn}/u_n) \\ (r \pm 1, r), \quad r \in \mathbb{Z} \end{cases}$	$si \;\; n \neq 0$ $si \;\; n \neq 0$ $si \;\; n = 0$
$x^2 - v_{2n} xy + y^2 = u_n^2,$	$(x,y) = \begin{cases} \pm(u_{2(k+1)n}/v_n, u_{kn}/v_n) \\ \pm(u_{2(k-1)n}/v_n, u_{kn}/v_n) \\ (r, r), \quad r \in \mathbb{Z} \end{cases}$	$si \;\; n \neq 0$ $si \;\; n \neq 0$ $si \;\; n = 0$
$x^2 - v_{2n} xy + y^2 = v_n^2,$	$(x,y) = \begin{cases} \pm(u_{(k+2)n}/u_n, u_{kn}/u_n) \\ \pm(u_{(k-2)n}/u_n, u_{kn}/u_n) \\ (r \pm 2, r), \quad r \in \mathbb{Z} \end{cases}$	$si \;\; n \neq 0$ $si \;\; n \neq 0$ $si \;\; n = 0$
$x^2 - pxy + y^2 = 4^k$	$(x,y) = (\pm 2^k u_{m\pm1}, \pm 2^k u_m), m \in \mathbb{Z}$	pour $k \geq 0$ et $\lvert p \rvert > 2$ avec p impair

En termes des suites généralisées de Fibonacci et de Lucas définies dans (3.1) et (3.2) avec un paramètre $p \geq 3$ entier.

Les auteurs dans [BK19] ont présenté certaines identités impliquant la suite de Fibonacci généralisée $(U_n) = (U_n(p,1))$ et la suite de Lucas généralisée $(V_n) = (V_n(p,1))$ définies comme suit :

$$U_0 = 0, \; U_1 = 1 \quad et \quad U_n = pU_{n-1} + U_{n-2}, \quad \forall n \geq 2, \tag{3.3}$$

et la suite de Lucas généralisée $(V_n)_n$ définie par

$$V_0 = 2, \; V_1 = k \quad et \quad V_n = pV_{n-1} + V_{n-2}, \quad \forall n \geq 2. \tag{3.4}$$

ou $p \geq 1$ entier.

Et ils ont donné toutes les solutions des équations Diophantiennes suivantes :

Équation	Solutions	Conditions
$x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^ny^2=-V_n^2$	$(x,y)=\mp(V_{n+m},U_m)$,	$m\in\mathbb{Z}$ impair
$x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^ny^2=V_n^2$	$(x,y)=\mp(V_{n+m},U_m)$,	$m\in\mathbb{Z}$ pair
$x^2-(p^2+4)U_nxy-(p^2+4)(-1)^ny^2=1$	$(x,y)=\mp(V_{n+m},U_m)$,	$m\in\mathbb{Z}$ pair
$x^2-V_nxy+(-1)^ny^2=-(p^2+4)U_n^2$	$(x,y)=\mp(V_{n+m},V_m)$,	$m\in\mathbb{Z}$ pair
$x^2-V_nxy+(-1)^ny^2=(p^2+4)U_n^2$	$(x,y)=\mp(V_{n+m},V_m)$,	$m\in\mathbb{Z}$ impair
$x^2-V_{2n}xy+y^2=-(p^2+4)U_n^2$	$(x,y)=\mp(V_{(2t+3)n}/V_n,V_{(2t+1)n}/V_n)$,	si $n\in\mathbb{Z}$ pair , avec $m\in\mathbb{Z}$
$x^2-V_nxy+(-1)^ny^2=-(p^2+4)$,	$(x,y)=\mp(V_{n+m}/U_n,V_m/U_n)$,	avec $m\in\mathbb{Z}$ pair et $U_n\mid V_m$
$x^2-V_{2n}xy+y^2=(p^2+4)U_n^2$	$(x,y)=\mp(V_{(2t+3)n}/V_n,V_{(2t+1)n}/V_n)$,	si $n\in\mathbb{Z}$ impair , avec $m\in\mathbb{Z}$
$x^2-V_nxy+(-1)^ny^2=-(p^2+4)$,	$(x,y)=\mp(V_{n+m}/U_n,V_m/U_n)$,	avec $m\in\mathbb{Z}$ impair et $U_n\mid V_m$
$x^2-V_{2n}xy+y^2=-(p^2+4)V_n^2$,	$(x,y)=\mp(V_{2n+m}/U_n,V_m/U_n)$,	avec $m\in\mathbb{Z}$ pair et $U_n\mid V_m$
$x^2-V_{2n}xy+y^2=(p^2+4)V_n^2$,	$(x,y)=\mp(V_{2n+m}/U_n,V_m/U_n)$,	avec $m\in\mathbb{Z}$ impair et $U_n\mid V_m$
$x^2-V_nxy+(-1)^ny^2=-U_n^2$	$(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$,	avec $m\in\mathbb{Z}$ impair
$x^2-V_nxy+(-1)^ny^2=U_n^2$	$(x,y)=\mp(U_{n+m},U_m)$,	avec $m\in\mathbb{Z}$ pair

Équation	Solutions	Conditions
$x^2 - V_{2n}xy + y^2 = U_n^2$	$(x,y) = \mp(U_{(2t+2)n}/V_n, U_{2tn}/V_n)$,	avec $t \in \mathbb{Z}$
$x^2 - V_{2n}xy + y^2 = -V_n^2$	$(x,y) =$ $\mp(U_{(2t+3)n}/U_n, U_{(2t+1)n}/U_n)$,	si n est impair, avec $t \in \mathbb{Z}$
$x^2 - V_nxy \pm y^2 = -1$	$(x,y) =$ $\mp(U_{(2t+2)n}/U_n, U_{(2t+1)n}/U_n)$,	si n est impair, avec $t \in \mathbb{Z}$
$x^2 - V_nxy \pm y^2 = 1$	$(x,y) = \mp(U_{(2t+1)n}/U_n, U_{2tn}/U_n)$,	si n est impair, avec $t \in \mathbb{Z}$

en termes des suites $(U_n)_n$ et $(V_n)_n$ avec $p \geq 1$ et $p^2 + 4$ est sans facteur carré.

3.3 Solutions de certaines équations Diophantiennes en termes de suites bi-periodiques de Fibonacci et de Lucas

Les identités (2.17), (2.22), (2.26), (2.36), (2.38), (2.40), (2.44) et (2.46) proposent d'explorer les solutions des équations Diophantiennes listées précédemment. Pour cela, nous avons besoin de la proposition suivante qui est donnée dans la [CAR07, Proposition 6.3.16. p. 355].

Proposition 3.3.1 (Le théorème de structure)
*Si $D > 0$ n'est pas un carré et est congru à 0 ou 1 modulo 4. L'équation de Pell $x^2 - Dy^2 = \pm 4$ a une infinité de solutions donnée de la manière suivante. Si (x_0, y_0) est une solution avec y_0 strictement positif et minimal (et $x_0 > 0$, disons), la **solution générale** est donnée par*

$$\frac{x+\sqrt{D}y}{2} = \pm\left(\frac{x_0+\sqrt{D}y_0}{2}\right)^k,$$

pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.3.1

Il est bien connu que si D *est un entier strictement positif sans facteur carré, alors toute les solutions entières de* $x^2 - Dy^2 = 1$ *sont données par*

$$x+\sqrt{D}y = \pm\left(x_0+\sqrt{D}y_0\right)^n, \quad n \in \mathbb{Z},$$

où (x_0, y_0) *est la solution positive minimale. Puisque nous avons* $x_0+\sqrt{D}y_0 = -\left(-x_0+\sqrt{D}y_0\right)^{-1}$, *alors* $x+\sqrt{D}y = \pm\left(-x_0+\sqrt{D}y_0\right)^k$ *avec* $k = -n \in \mathbb{Z}$.

Le lemme suivant existe sous une forme équivalente dans [Jon03], mais nous préférons donner une preuve simple impliquant des nombres bi-périodiques.

Lemme 3.3.1

Toutes les solutions entières de l'équation Diophantienne

$$x^2 - \Delta y^2 = 4 \tag{3.5}$$

sont $(x, y) = \pm\left(l_{2k}, \frac{q_{2k}}{a}\right)$ *avec* $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Une solution fondamentale de l'équation (3.5) est $(x_0, y_0) = (ab+2, 1)$. Ainsi, selon le théorème de structure, les solutions de l'équation (3.5) vérifient

$$\frac{x+\sqrt{\Delta}y}{2} = \pm\left(\frac{ab+2+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, on obtient pour le signe " + "

$$\begin{cases} \dfrac{x+\sqrt{\Delta}y}{2} = \left(\dfrac{ab+2+\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k = (\alpha+1)^k = \left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k, & (k \in \mathbb{Z}). \\ \dfrac{x-\sqrt{\Delta}y}{2} = \left(\dfrac{ab+2-\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k = (\beta+1)^k = \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k, & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Qui équivaut à

$$\begin{cases} x = \left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k = \dfrac{\alpha^{2k}+\beta^{2k}}{(ab)^k} = l_{2k}, & (k \in \mathbb{Z}). \\ y = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k - \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k\right] = \dfrac{1}{(ab)^k}\left[\dfrac{\alpha^{2k}-\beta^{2k}}{\sqrt{\Delta}}\right] = t_{2k}, & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Procéder de la même manière pour le signe " − " , on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm(l_{2k}, \frac{q_{2k}}{a})$.

Inversement, à partir de (2.17) nous avons

$$l_{2k}^2 - \Delta\left(\frac{q_{2k}}{a}\right)^2 = 4,$$

ce qui signifie que $\pm\left(l_{2k}, \dfrac{q_{2k}}{a}\right)$ sont des solutions de (3.5). □

Lemme 3.3.2

Supposons que $x^2 - \Delta y^2 = 4^k$ avec $k \geq 2$. Si ab est impair, alors x et y sont des nombres pairs.

Démonstration. Supposons que ab soit impair, on pose $ab = 2c+1$ puis $(ab)^2 + 4ab = (2c+1)^2 + 4(2c+1) = 4c(c+3) + 5 \equiv 5[8]$. Puisque $k \geq 2$, on a $x^2 - [(ab)^2 + 4ab]\, y^2 \equiv 0[8]$. Ainsi, $x^2 - [(ab)^2 + 4ab]\, y^2 \equiv x^2 - 5a^2[8]$. Mais $x^2 - 5y^2 \equiv 0[8]$ si et seulement si soit $x^2, y^2 \equiv 0[8]$ ou $x^2, y^2 \equiv 4[8]$. Nous concluons que soit $x, y \equiv 0, 4[8]$ ou $x, y \equiv 2, 6[8]$, c'est-à-dire que l'on conclut que x et y sont pairs. $\square$

Remarque 3.3.2

Si ab est pair, la conclusion du lemme précédent n'est pas vraie. En effet, pour $k = 4$ et $ab = 16$, l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 4^k$ devient $x^2 - 2^6 \cdot 5y^2 = 2^8$. On en déduit que $2^3 \mid x$. Soit $x = 2^3 x_1$. Alors l'équation $x^2 - 2^6 \cdot 5y^2 = 2^8$ devient $x_1^2 - 5y^2 = 4$. Il est clair que $(x_1, y) = (3, 1)$ est une solution et y est impair.

Corollaire 3.3.1

Soit $k \geq 1$ un entier. Alors toutes les solutions entières (x, y) de l'équation $x^2 - \Delta y^2 = 4^k$ avec ab impair sont $\pm\left(2^{k-1} l_{2m}, 2^{k-1} \frac{q_{2m}}{a}\right)$ avec $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Par déduction en utilisant les lemmes (3.3.1-3.3.2), les détails sont laissés au lecteur. $\square$

Pour résoudre l'équation Diophantienne dans le lemme suivant, il faut étudier plusieurs cas.

Lemme 3.3.3

Toutes les solutions entières de l'équation Diophantienne

$$(ab)x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -4 \tag{3.6}$$

sont $(x, y) = \pm\left(\frac{l_{2k-1}}{a}, q_{2k-1}\right)$, où $k \in \mathbb{Z}$.

Démonstration. Soit $t = -ab$, alors l'équation (3.6) devient

$$tx^2 - (t-4)y^2 = 4. \tag{3.7}$$

Il est clair que $pgcd(t, t-4) = 1, 2$ ou 4. Ainsi, nous avons trois cas.

1. Si $pgcd(t, t-4) = 1$, alors $t \equiv 1[2]$. Puisque $x^2 \equiv x[2]$ et $y^2 \equiv y[2]$, on obtient de l'équation (3.7) que $x - y \equiv 0[2]$, i.e, x et y ont la même parité. Soit le changement de variables suivant

$$\begin{cases} u &= \frac{-1}{2}\left[tx + (t-4)y\right] \\ v &= \frac{1}{2}(x+y) \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} x &= \frac{-1}{2}\left[u + (t-4)v\right] \\ y &= \frac{1}{2}(u+tv), \end{cases}$$

alors, en utilisant le fait que $t(t-4) = \Delta$, l'équation (3.7) devient

$$u^2 - \Delta v^2 = 4. \tag{3.8}$$

Donc d'après lemme 3.3.1, on a

$$\begin{cases} u = l_{2k}, & (k \in \mathbb{Z}). \\ v = \dfrac{q_{2k}}{a}, & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

A partir des identités (2.11) et (2.12) nous obtenons

$$u = q_{2k-1} + q_{2k+1} \quad \text{et} \quad v = \frac{l_{2k-1} + l_{2k+1}}{a(4-t)}.$$

Ainsi,

$$x = -\frac{1}{2}\left[l_{2k} + (t-4)\frac{l_{2k-1} + l_{2k+1}}{a(4-t)}\right] = \frac{l_{2k-1}}{a},$$

et

$$y = \frac{1}{2}\left(q_{2k-1} + q_{2k+1} - bq_{2k}\right) = q_{2k-1}.$$

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm\left(\frac{l_{2k-1}}{a}, q_{2k-1}\right)$.

2. Si $pgcd(t, t-4) = 2$, on pose $s = \frac{t}{2}$, alors l'équation (3.7) devient

$$sx^2 - (s-2)y^2 = 2. \tag{3.9}$$

Puisque s est impair, on en déduit que x et y ont la même parité. Soit donc le changement de variables suivant :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u & = & -\frac{1}{2}\left[sx + (s-2)y\right] \\ v & = & \frac{1}{2}(x+y) \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{rcl} x & = & -u-(s-2)v \\ y & = & u+sv. \end{array}\right.$$

L'équation (3.9) devient

$$u^2 - s(s-2)v^2 = 1. \tag{3.10}$$

La solution minimale de (3.10) est $(u_0, v_0) = (s-1, 1)$. Ainsi, d'après la remarque (3.3.1), les solutions de l'équation (3.10) vérifient

$$u + \sqrt{s(s-2)}v = \pm\left(1 - s + \sqrt{s(s-2)}\right)^k, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, on obtient pour le signe " + "

$$\left\{\begin{array}{l} u + \sqrt{s(s-2)}v = \left(1 - s + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k = (\alpha+1)^k = \left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k, \\ u - \sqrt{s(s-2)}v = \left(1 - s - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k = (\beta+1)^k = \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k, \end{array}\right. \quad (k \in \mathbb{Z}).$$

Qui équivaut à

$$\left\{\begin{array}{ll} u = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k\right], & (k \in \mathbb{Z}). \\ v = \dfrac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k - \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k\right], & (k \in \mathbb{Z}). \end{array}\right.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
x &= \left(\frac{-1}{2}-\frac{s-2}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k+\left(\frac{-1}{2}+\frac{s-2}{\sqrt{\Delta}}\right)\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k\\
&= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k+\frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k\\
&= \frac{\alpha^{2k-1}+\beta^{2k-1}}{(ab)^k}\\
&= \frac{l_{2k-1}}{a}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
y &= \left[\frac{1}{2}+\frac{s}{\sqrt{\Delta}}\right]\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k+\left[\frac{1}{2}-\frac{s}{\sqrt{\Delta}}\right]\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k\\
&= \frac{-\beta}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k+\frac{\alpha}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k\\
&= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{\alpha^{2k-1}-\beta^{2k-1}}{(ab)^{k-1}}\right]\\
&= q_{2k-1}.
\end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ " , on trouve que toutes les solutions sont $(x,y)=\pm\left(\frac{l_{2k-1}}{a},q_{2k-1}\right)$.

3. Si $pgcd(t,t-4)=4$, soit $s=\frac{t}{4}$, alors l'équation (3.7) devient

$$sx^2-(s-1)y^2=1. \tag{3.11}$$

Soit le changement de variables suivant

$$\left\{\begin{array}{lcl} u &=& -sx-(s-1)y\\ v &=& x+y \end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} x &=& -u-(s-1)v\\ y &=& u+sv \end{array}\right. .$$

Ainsi, l'équation (3.11) devient

$$u^2-s(s-1)v^2=1. \tag{3.12}$$

La solution minimale de (3.12) est $(u_0, v_0) = (2s-1, 2)$. Autrement dit, si $(u, 1)$ est une solution de (3.12), alors

$$u^2 = s^2 - s + 1 = \left(s - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \Longrightarrow (2u)^2 - (2s-1)^2 = 3,$$

i.e., $(2u-2s+1)(2u+2s-1) = 3$, qui conduit à $s = 0$ ou 1, cela contredit l'hypothèse $\Delta = 16s(s-1) > 0$. Ainsi, d'après la Remarque 3.3.1, les solutions de l'équation (3.12) vérifient

$$u + \sqrt{s(s-1)}v = \pm\left(1 - 2s + 2\sqrt{s(s-1)}\right)^k, \qquad (k \in \mathbb{Z}).$$

Ainsi, on obtient pour le signe " + "

$$\begin{cases} u + \sqrt{s(s-1)}v = \left(1 - 2s + \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k = (\alpha+1)^k = \left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k, & (k \in \mathbb{Z}). \\ u - \sqrt{s(s-1)}v = \left(1 - 2s - \dfrac{\sqrt{\Delta}}{2}\right)^k = (\beta+1)^k = \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k, & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Qui équivaut à

$$\begin{cases} u = \dfrac{1}{2}\left[\left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k\right], & (k \in \mathbb{Z}). \\ v = \dfrac{2}{\sqrt{\Delta}}\left[\left(\dfrac{\alpha^2}{ab}\right)^k - \left(\dfrac{\beta^2}{ab}\right)^k\right], & (k \in \mathbb{Z}). \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} x &= \left[\frac{-1}{2} - \frac{2(s-1)}{\sqrt{\Delta}}\right]\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left[\frac{-1}{2} + \frac{2(s-1)}{\sqrt{\Delta}}\right]\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k \\ &= \frac{1}{\alpha}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \frac{1}{\beta}\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k \\ &= \frac{\alpha^{2k-1} + \beta^{2k-1}}{(ab)^k} \\ &= \frac{l_{2k-1}}{a} \end{aligned}$$

Et

$$\begin{aligned} y &= \left[\frac{1}{2} + \frac{2s}{\sqrt{\Delta}}\right]\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \left[\frac{1}{2} - \frac{2s}{\sqrt{\Delta}}\right]\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k \\ &= \frac{-\beta}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\alpha^2}{ab}\right)^k + \frac{\alpha}{\sqrt{\Delta}}\left(\frac{\beta^2}{ab}\right)^k \\ &= \frac{1}{\sqrt{\Delta}}\left[\frac{\alpha^{2k-1} - \beta^{2k-1}}{(ab)^{k-1}}\right] \\ &= q_{2k-1}. \end{aligned}$$

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm\left(\frac{l_{2k-1}}{a}, q_{2k-1}\right)$.

Inversement, à partir de (2.17) nous avons

$$\begin{aligned} \left(\tfrac{b}{a}\right) l_{2k-1}^2 - \left(\tfrac{\Delta}{ab}\right) q_{2k-1}^2 = -4 \quad &\Leftrightarrow \quad ab\left(\frac{l_{2k-1}}{a}\right)^2 - \left[\frac{(ab)^2 + 4ab}{ab}\right] q_{2k-1}^2 = -4 \\ &\Leftrightarrow \quad ab\left(\frac{l_{2k-1}}{a}\right)^2 - (ab+4)q_{2k-1}^2 = -4, \end{aligned}$$

ce qui signifie que $\pm\left(\dfrac{l_{2k-1}}{a}, q_{2k-1}\right)$ sont des solutions de (3.6). □

Théorème 3.3.1

Soit n un entier.

1. *Toutes les solutions entières (x, y) de*

$$x^2 + abs_n xy - aby^2 = q_{2n+1}^2 \tag{3.13}$$

sont $\pm\left(q_{2(n-m)+1}, \frac{q_{2m}}{a}\right)$, *où* $m \in \mathbb{Z}$.

2. *Toutes les solutions entières* (x, y) *de*

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = s_n^2 \tag{3.14}$$

sont $\pm\left(\frac{l_{2(n+m)+1}}{a}, \frac{q_{2m}}{a}\right)$, *où* $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. Supposons que

$$x^2 + abs_n xy - aby^2 = q_{2n+1}^2.$$

Alors

$$(2x + abs_n y)^2 - ab(4 + abs_n^2)y^2 = 4q_{2n+1}^2.$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$(2x + abs_n y)^2 - \Delta q_{2n+1}^2 y^2 = 4q_{2n+1}^2. \tag{3.15}$$

On en déduit que $q_{2n+1} \mid (2x + abs_n y)$, et donc

$$(3.15) \Longleftrightarrow z^2 - \Delta y^2 = 4, \tag{3.16}$$

où $z = \dfrac{2x + abs_n y}{q_{2n+1}}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.1, les solutions de l'équation (3.16) sont $(z, y) = \pm(l_{2m}, t_m)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Pour le signe " + " on obtient

$$\begin{cases} z = \dfrac{2x + abs_n y}{q_{2n+1}} = l_{2m} \\ y = t_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = l_{2m}\, q_{2n+1} - abs_n y \\ y = t_m \end{cases}.$$

De (2.15), on obtient $x = q_{2(n-m)+1}$.

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm\left(q_{2(n-m)+1}, \frac{q_{2m}}{a}\right), m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, on remplace dans (2.22) n par $(2n+k+1)$ et m par $(2m-2n-k-1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$q_{2m-2n-1}^2 + \left(\frac{b}{a}\right) l_{2n+1} q_{2m-2n-1} q_{2m} - \left(\frac{b}{a}\right) q_{2m}^2 = q_{2n+1}^2.$$

De (2.9), on obtient

$$q_{2(n-m)+1}^2 + \left(\frac{b}{a}\right) l_{2n+1} q_{2(n-m)+1} q_{2m} - \left(\frac{b}{a}\right) q_{2m}^2 = q_{2n+1}^2,$$

ce qui signifie que $\pm\left(q_{2(n-m)+1}, \frac{q_{2m}}{a}\right), m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.13).

2. Supposons que

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = s_n^2.$$

Alors

$$\left[2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y\right]^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right)\left[\left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2 - 4\right] y^2 = 4s_n^2.$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$\left[2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y\right]^2 - \Delta s_n^2 y^2 = 4s_n^2. \tag{3.17}$$

On en déduit que $s_n \mid \left[2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y\right]$; en conséquence,

$$(3.17) \iff z^2 - \Delta y^2 = 4. \tag{3.18}$$

où $z = \dfrac{2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y}{s_n}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.1, les solutions de l'équation

(3.18) sont $(z, y) = \pm(l_{2m}, t_m)$, $\quad m \in \mathbb{Z}$.

Pour le signe " $+$ " on obtient

$$\begin{cases} z &= l_{2m} \\ y &= t_m \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= l_{2m}s_n + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}t_m \\ y &= t_m \end{cases}.$$

De (2.13), on obtient $x = \frac{l_{2(n+m)+1}}{a} = s_{2(n+m)+1}$.

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm\left(\frac{l_{2(n+m)+1}}{a}, \frac{q_{2m}}{a}\right), m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, en remplaçant dans (2.40) n par $(2n + k + 1)$ et m par $(2m - k)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$l^2_{2(n+m)+1} - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2m}l_{2(n+m)+1}q_{2n+1} + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q^2_{2m} = l^2_{2n+1},$$

ce qui signifie que $\pm\left(\frac{l_{2(n+m)+1}}{a}, \frac{q_{2m}}{a}\right), m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.14).

$\square$

Théorème 3.3.2

Soit n un entier et on suppose que ab est un entier sans facteur carré.

1. *Toutes les solutions entières (x, y) de*

$$x^2 - l_{2n}xy + y^2 = -(ab)t^2_n \tag{3.19}$$

sont $\pm(q_{2(n+m)-1}, q_{2m-1})$ avec $m \in \mathbb{Z}$, si $n \neq 0$ et (x, x) avec $x \in \mathbb{Z}$, si $n = 0$.

2. Toutes les solutions entières (x, y) de

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -(ab)s_n^2 \tag{3.20}$$

sont $\pm(l_{2(n+m)}, q_{2m-1})$, où $m \in \mathbb{Z}$.

3. Toutes les solutions entières (x, y) de

$$x^2 - \Delta t_n xy - \Delta y^2 = -(ab)l_{2n}^2 \tag{3.21}$$

sont $\pm(bl_{2(n+m)-1}, q_{2m-1})$, où $m \in \mathbb{Z}$.

Démonstration.

1. Supposons que $n \neq 0$ et

$$x^2 - l_{2n}xy + y^2 = -(ab)t_n^2.$$

Alors

$$(2x - l_{2n}y)^2 - (l_{2n}^2 - 4)y^2 = -4(ab)t_n^2.$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$(2x - l_{2n}y)^2 - \Delta t_n^2 y^2 = -4(ab)t_n^2. \tag{3.22}$$

On en déduit que $t_n \mid (2x - l_{2n}y)$, et donc

$$(3.22) \iff z^2 - \Delta y^2 = -4(ab), \tag{3.23}$$

où $z = \dfrac{2x - l_{2n}y}{t_n}$. Puisque (ab) est un entier sans facteur carré et $(ab) \mid \Delta$, alors

$(ab) \mid z$, et ainsi

$$(3.23) \Longleftrightarrow (ab)w^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -4, \tag{3.24}$$

où $w = \dfrac{z}{ab}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.3, les solutions de l'équation (3.24) sont $(w, y) = \pm (s_{m-1}, q_{2m-1})$, $m \in \mathbb{Z}$.

Pour le signe " $+$ ", on obtient

$$\begin{cases} w &= \dfrac{2x - l_{2n}y}{(ab)t_n} = s_{m-1} \\ y &= q_{2m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= (ab)t_n s_{m-1} + l_{2n}y \\ y &= q_{2m-1} \end{cases}.$$

De (2.14), on obtient $x = q_{2(n+m)-1}$.

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm \left(q_{2(n+m)-1}, q_{2m-1}\right), m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, en remplaçant dans (2.26) n par $(2n + k)$ et m par $(2m - k - 1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$q^2_{2(n+m)-1} - l_{2n} q_{2(n+m)-1} q_{2m-1} + q^2_{2m-1} = -\left(\frac{b}{a}\right) q^2_{2n},$$

ce qui signifie que $\pm \left(q_{2(n+m)-1}, q_{2m-1}\right), m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.19).

Si $n = 0$, l'équation (3.19) devient $(x - y)^2 = 0$.

2. On suppose que

$$x^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} xy + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -(ab)s_n^2.$$

Alors

$$\left[2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y\right]^2 + \left[4\left(\frac{\Delta}{ab}\right) - \left(\frac{\Delta}{ab}\right)^2 q^2_{2n+1}\right] y^2 = -4(ab)s_n^2.$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$\left[2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y\right]^2 - \Delta s_n^2 y^2 = -4(ab)s_n^2. \tag{3.25}$$

On en déduit que $s_n \mid \left[2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y\right]$, et donc

$$(3.25) \iff z^2 - \Delta y^2 = -4(ab), \tag{3.26}$$

où $z = \dfrac{2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y}{s_n}$. Puisque (ab) est un entier sans facteur carré et $(ab) \mid \Delta$, alors $(ab) \mid z$, et ainsi

$$(3.26) \iff (ab)w^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -4, \tag{3.27}$$

où $w = \dfrac{z}{ab}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.3, les solutions de l'équation (3.27) sont $(w, y) = \pm (s_{m-1}, q_{2m-1})$, $m \in \mathbb{Z}$.

Pour le signe " + ", on obtient

$$\begin{cases} w = \dfrac{2x - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y}{(ab)s_n} = s_{m-1} \\ y = q_{2m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = (ab)s_n s_{m-1} + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} y \\ y = q_{2m-1} \end{cases}.$$

De (2.13), on obtient $x = l_{2(n+m)}$.

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm \left(l_{2(n+m)}, q_{2m-1}\right), m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, en remplaçant dans (2.36) n par $(2n + k + 1)$ et m par $(2m - k - 1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$l_{2(n+m)}^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1} l_{2(n+m)} q_{2m-1} + \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2m-1}^2 = -\left(\frac{b}{a}\right) l_{2n+1}^2,$$

ce qui signifie que $\pm\left(l_{2(n+m)}, q_{2m-1}\right), m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.20).

3. On suppose que
$$x^2 - \Delta t_n xy - \Delta y^2 = -(ab)l_{2n}^2.$$
Alors
$$(2x - \Delta t_n y)^2 - \left(\Delta^2 t_n^2 + 4\Delta\right) y^2 = -4(ab)l_{2n}^2.$$
En utilisant (2.17), on obtient
$$(2x - \Delta t_n y)^2 - \Delta l_{2n}^2 y^2 = -4(ab)l_{2n}^2. \tag{3.28}$$
On en déduit que $l_{2n} \mid (2x - \Delta t_n y)$, et donc
$$(3.28) \Longleftrightarrow z^2 - \Delta y^2 = -4(ab), \tag{3.29}$$
où $z = \dfrac{2x - \Delta t_n y}{l_{2n}}$. Puisque (ab) est un entier sans facteur carré et $(ab) \mid \Delta$, alors $(ab) \mid z$, et ainsi
$$(3.29) \Longleftrightarrow (ab)w^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) y^2 = -4, \tag{3.30}$$
où $w = \dfrac{z}{ab}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.3, les solutions de l'équation (3.30) sont $(w, y) = \pm(s_{m-1}, q_{2m-1})$, $m \in \mathbb{Z}$.

Pour le signe " + ", on obtient
$$\begin{cases} w &= \dfrac{2x - \Delta t_n y}{(ab)l_{2n}} = s_{m-1} \\ y &= q_{2m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x &= (ab)l_{2n}s_{m-1} + \Delta t_n y \\ y &= q_{2m-1} \end{cases}.$$
De (2.13), on obtient $x = bl_{2(n+m)-1}$.

En procédant de la même manière pour le signe " − ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm\left(bl_{2(n+m)-1}, q_{2m-1}\right), m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, en remplaçant dans (2.38) n par $(2n+k)$ et m par $(2m-k-1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$l_{2(n+m)-1}^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n} l_{2(n+m)-1} q_{2m-1} - \left(\frac{\Delta}{b^2}\right) q_{2m-1}^2 = -\left(\frac{a}{b}\right) l_{2n}^2,$$

ce qui signifie que $\pm\left(bl_{2(n+m)-1}, q_{2m-1}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.21).

□

Théorème 3.3.3

Soit n un entier et on suppose que $ab+4$ est un entier sans facteur carré.

1. *Toutes les solutions entières (x, y) de*

$$x^2 - (ab)s_n xy - (ab)y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2 \tag{3.31}$$

sont $\pm\left(l_{2(n+m)}, \frac{l_{2m-1}}{a}\right)$, où $m \in \mathbb{Z}$.

2. *Toutes les solutions entières (x, y) de*

$$x^2 - l_{2n} xy + y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n^2 \tag{3.32}$$

sont $\pm\left(\frac{l_{2(n+m)-1}}{a}, \frac{l_{2m-1}}{a}\right)$ avec $m \in \mathbb{Z}$, si $n \neq 0$ et (x, x) avec $x \in \mathbb{Z}$, si $n = 0$.

Démonstration.

1. On suppose que

$$x^2 - (ab)s_n xy - (ab)y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2.$$

Alors

$$[2x - (ab)s_n y]^2 - \left[(ab)^2 s_n^2 + 4(ab)\right] y^2 = 4\left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2.$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$[2x-(ab)s_ny]^2-\Delta q_{2n+1}^2y^2=4\left(\frac{\Delta}{ab}\right)q_{2n+1}^2. \tag{3.33}$$

On en déduit que $q_{2n+1} \mid [2x-(ab)s_ny]$, et donc

$$(3.33)\Longleftrightarrow z^2-\Delta y^2=4(ab+4), \tag{3.34}$$

où $z=\dfrac{2x-(ab)s_ny}{q_{2n+1}}$. Puisque $(ab+4)$ est un entier sans facteur carré et $(ab+4)\mid\Delta$, alors $(ab+4)\mid z$, et donc

$$(3.34)\Longleftrightarrow (ab)y^2-\left(\frac{\Delta}{ab}\right)w^2=-4, \tag{3.35}$$

où $w=\dfrac{z}{ab+4}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.3, les solutions de l'équation (3.35) sont $(y,w)=\pm\left(s_{m-1},q_{2m-1}\right)$, $m\in\mathbb{Z}$.

Pour le signe " $+$ ", on obtient

$$\begin{cases} y &= & s_{m-1} \\ w &= & \dfrac{2x-(ab)s_ny}{(ab+4)q_{2n+1}} = q_{2m-1} \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} y &= & s_{m-1} \\ 2x &= & \left(\frac{\Delta}{ab}\right)q_{2n+1}q_{2m-1}+(ab)s_ny \end{cases}.$$

De (2.13), on obtient $x=l_{2(n+m)}$.

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x,y)=\pm\left(l_{2(n+m)},\frac{l_{2m-1}}{a}\right),m\in\mathbb{Z}$.

Inversement, en remplaçant dans (2.44) n par $(2n+k+1)$ et m par $(2m-k-1)$

pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$l_{2(n+m)}^2 - \left(\frac{b}{a}\right) l_{2n+1} l_{2(n+m)} l_{2m-1} - \left(\frac{b}{a}\right) l_{2m-1}^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q_{2n+1}^2,$$

ce qui signifie que $\pm\left(l_{2(n+m)}, \frac{l_{2m-1}}{a}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.31).

2. Supposons que $n \neq 0$ et

$$x^2 - l_{2n}xy + y^2 = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n^2.$$

Alors

$$(2x - l_{2n}y)^2 - \left(l_{2n}^2 - 4\right) y^2 = 4\left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n^2.$$

En utilisant (2.17), on obtient

$$(2x - l_{2n}y)^2 - \Delta t_n^2 y^2 = 4\left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n^2. \tag{3.36}$$

On en déduit que $t_n \mid (2x - l_{2n}y)$, et donc

$$(3.36) \Longleftrightarrow z^2 - \Delta y^2 = 4(ab+4), \tag{3.37}$$

où $z = \dfrac{2x - l_{2n}y}{t_n}$. Puisque $(ab+4)$ est un entier sans facteur carré et $(ab+4) \mid \Delta$, alors $(ab+4) \mid z$, et donc

$$(3.37) \Longleftrightarrow (ab)y^2 - \left(\frac{\Delta}{ab}\right) w^2 = -4, \tag{3.38}$$

où $w = \dfrac{z}{ab+4}$. Ainsi, d'après Lemme 3.3.3, les solutions de l'équation (3.38) sont $(y, w) = \pm\left(s_{m-1}, q_{2m-1}\right)$, $m \in \mathbb{Z}$.

Pour le signe " + ", on obtient

$$\begin{cases} y = s_{m-1} \\ w = \dfrac{2x - l_{2n}y}{(ab+4)t_n} = q_{2m-1} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = s_{m-1} \\ 2x = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) t_n q_{2m-1} + l_{2n}y \end{cases}.$$

De (2.13), on obtient $x = \frac{l_{2(n+m)-1}}{a}$.

En procédant de la même manière pour le signe " $-$ ", on trouve que toutes les solutions sont $(x, y) = \pm\left(\frac{l_{2(n+m)-1}}{a}, \frac{l_{2m-1}}{a}\right), m \in \mathbb{Z}$.

Inversement, en remplaçant dans (2.46) n par $(2n+k)$ et m par $(2m-k-1)$ pour $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$l^2_{2(n+m)-1} - l_{2n}l_{2(n+m)-1}l_{2m-1} + l^2_{2m-1} = \left(\frac{\Delta}{ab}\right) q^2_{2n},$$

ce qui signifie que $\pm\left(\frac{l_{2(n+m)-1}}{a}, \frac{l_{2m-1}}{a}\right), m \in \mathbb{Z}$, sont des solutions de (3.32).

Si $n = 0$, l'équation (3.32) devient $(x-y)^2 = 0$.

$\square$

Conclusion et perspectives

Dans cette thèse, nous avons pu découvrir et établir de nouvelles identités sur des suites récurrentes appelées les suites bi-périodiques de Fibonacci (définies par Edson et Yayenie en 2009 [EY09]) et de Lucas (définies par Bilgici en 2014 [Bil14]) respectivement comme suit :

$$q_0 = 0, \quad q_1 = 1, \quad q_n = \begin{cases} aq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{si} \ \ n \ \ \text{est pair} \\ bq_{n-1} + q_{n-2}, & \text{si} \ \ n \ \ \text{est impair} \end{cases}, \quad n \geq 2,$$

Et

$$l_0 = 2, \quad l_1 = a, \quad l_n = \begin{cases} bl_{n-1} + l_{n-2}, & \text{si} \ \ n \ \ \text{est pair} \\ al_{n-1} + l_{n-2}, & \text{si} \ \ n \ \ \text{est impair} \end{cases}, \quad n \geq 2.$$

Où a et b sont des réels non nuls.

Ensuite, nous avons exploité ces identités pour définir une dizaine d'équations Diophantiennes quadratiques paramétrées.

Grace à des transformations algébriques et à de judicieux changement de variables, nous avons pu ramener nos équations à des équations de Pell, qu'on a résolu. Certaines de ces équations sont résolues sous certaines conditions simples et suffisantes sur les paramètres. Nous avons constaté que les solutions de ces équations sont aussi exprimées en termes de suites bi-périodique de Fibonacci et de Lucas.

Enfin comme perspectives, on espère que cette approche va donner lieu à d'autres identités pour d'autres généralisations et d'autres équations Diophantiennes intéressantes.

Bibliography

[AA14] Titu Andreescu and Dorin Andrica. « Equations with solution in terms of Fibonacci and Lucas sequences ». In: *Analele Universitatii " Ovidius" Constanta-Seria Matematica* 22.3 (2014), pp. 5–12.

[AA15] Titu Andreescu and Dorin Andrica. « Why Quadratic Diophantine Equations? » In: *Quadratic Diophantine Equations*. Springer, 2015, pp. 1–8 (cit. on pp. 35, 37).

[AAB17] Lyes Ait-Amrane and Djilali Behloul. « On some Diophantine equations involving generalized Fibonacci and Lucas numbers ». In: *Colloquium Mathematicum*. Vol. 150. Instytut Matematyczny Polskiej Akademii Nauk. 2017, pp. 257–268 (cit. on pp. 1, 47, 81, 85).

[AABD22] Lyes Ait-Amrane, Djilali Behloul, and Akila Djoumakh. « Diophantine equations involving the bi-periodic Fibonacci and Lucas sequences ». In: *Acta et Commentationes Universitatis Tartuensis de Mathematica* 26.1 (2022), pp. 129–152.

[AAC+10] Titu Andreescu, Dorin Andrica, Ion Cucurezeanu, et al. *An introduction to Diophantine equations: a problem-based approach*. Springer, 2010 (cit. on p. 29).

[ATK85] S. D. Dimitar A. T. Krassimir A. C. Liliya. « A new perspective to the generalization of the Fibonacci sequence ». In: 23.1 (1985), pp. 21–28.

[Bar13] Biswajit Barik. « Lucas sequence, its properties and generalisation ». PhD thesis. 2013.

[Bil14] Goksal Bilgici. « Two generalizations of Lucas sequence ». In: *Applied Mathematics and Computation* 245 (2014), pp. 526–538 (cit. on pp. 1, 2, 49, 52, 56, 62, 81, 109).

[BK19] Bahar Demirtürk Bitim and Refik Keskin. « Solutions of Some Diophantine Equations in terms of Generalized Fibonacci and Lucas Numbers ». In: *Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics* 48.2 (2019), pp. 451–459 (cit. on p. 87).

[CAR07] Henri Cohen, S Axler, and KA Ribet. *Number theory: Volume I: Tools and diophantine equations*. Vol. 560. Springer, 2007 (cit. on p. 89).

[Car64] Leonard Carlitz. « A note on Fibonacci numbers ». In: *Fibonacci Quart* 1.1 (1964), pp. 15–28 (cit. on p. 49).

[Car92] D Carl. « Olds ». In: *Continued Fractions* 9 (1992) (cit. on pp. 14, 16, 17, 21).

[CT16] Arzu Coskun and Necati Taskara. « The matrix sequence in terms of bi-periodic Fibonacci numbers ». In: *Communications Faculty of Sciences University of Ankara Series A1 Mathematics and Statistics* 68.2 (2016), pp. 1939–1949.

[DBK13] Bahar Demirtürk Bitim and Refik Keskin. « On some Diophantine equations ». In: *Journal of Inequalities and Applications* 2013.1 (2013), pp. 1–12 (cit. on pp. 1, 81).

[DK09] Bahar Demirtürk and Refik Keskin. « Integer solutions of some Diophantine equations via Fibonacci and Lucas numbers ». In: *J. Integer Seq* 12.8 (2009), p. 8 (cit. on pp. 1, 81, 82).

[Eve+03] Graham Everest et al. *Recurrence sequences*. Vol. 104. American Mathematical Society Providence, RI, 2003 (cit. on p. 42).

[EY09] Marcia Edson and Omer Yayenie. « A New Generalization of Fibonacci Sequence & Extended Binet's Formula ». In: (2009) (cit. on pp. 1, 2, 49, 50, 53, 56, 60–62, 109).

[Fal11] Sergio Falcon. « On the k-Lucas numbers ». In: *International Journal of Contemporary Mathematical Sciences* 6.21 (2011), pp. 1039–1050 (cit. on p. 49).

[Fay17] Bernadette Faye. « Diophantine Equation with Arithmetic functions and Binary recurrent sequences ». In: *arXiv preprint arXiv:*1712.04345 (2017).

[Fib89] Vajda S Fibonacci. « Lucas numbers, and the Golden Section. Theory and applications ». In: *Chichester: Ellis Horword* (1989) (cit. on p. 49).

[GYL] H. G. Shin G. Y. Lee S. G. Lee. « The Binet formula and representations of $k-$generalized Fibonacci numbers ». In: 39 ().

[GYL97] H. G. Shin G. Y. Lee S. G. Lee. « On the $k-$generalized Fibonacci matrix Q_k ». In: 251 (1997), pp. 73–88.

[Has21] Hayder Raheem Hashim. « Diophantine Equations Related to Linear Recurrence Sequences ». PhD thesis. 2021.

[Hog69] Verner E Hoggatt. *Fibonacci and Lucas numbers.* Houghton Mifflin, 1969.

[Hor61] A. F. Horadam. « A generalized Fibonacci sequence ». In: 68.5 (1961), pp. 455–459.

[Hor65] Alwyn Francis Horadam. « Basic properties of a certain generalized sequence of numbers ». In: *The Fibonacci Quarterly* 3.3 (1965), pp. 161–176 (cit. on pp. 45, 48, 49).

[Jai69] D. V. Jaiswal. « On a generalized Fibonacci sequence ». In: Part A 7 (1969), pp. 67–71.

[JC16] Sang Pyo Jun and Kwang Ho Choi. « Some properties of the generalized Fibonacci sequence $(q_n)_n$ by matrix methods ». In: *Korean Journal of Mathematics* 24.4 (2016), pp. 681–691 (cit. on p. 62).

[Jol15] Paul Jolissaint. *Fonctions génératrices et relations de récurrence.* Presses polytechniques et universitaires romandes, 2015.

[Jon03] James P Jones. « Representation of solutions of Pell equations using Lucas sequences ». In: *Annales Mathematicae et Informaticae.* Vol. 30. Eszterházy Károly Egyetem Líceum Kiadó. 2003, pp. 75–86 (cit. on p. 90).

[Jon75] James P Jones. « Diophantine Representation of the Fibonacci numbers ». In: 13.1 (1975), pp. 84–88.

[Jon76] James P Jones. « Diophantine representation of the Lucas numbers ». In: (1976) (cit. on pp. 1, 81).

[KD13] Refik Keskin and Bahar Demirtürk. « Solutions of Some Diophantine Equations Using Generalized Fibonacci and Lucas Sequences ». In: *Ars Comb.* 111 (2013), pp. 161–179 (cit. on pp. 1, 47, 81, 84).

[Kos19] Thomas Koshy. *Fibonacci and Lucas Numbers with Applications, Volume 2.* John Wiley & Sons, 2019 (cit. on p. 49).

[Lan95] Serge Lang. *Introduction to diophantine approximations.* Springer Science & Business Media, 1995 (cit. on pp. 17, 20).

[Luc09] F Luca. « Effective methods for diophantine equations ». In: *Winter School on Explicit Methods in Number Theory* (2009).

[McD95] W. L. McDaniel. *Diophantine representation of Lucas sequences.* Vol. 33. 1. 1995, pp. 59–63 (cit. on pp. 1, 81).

[Mor69] Louis Joel Mordell. *Diophantine equations.* Academic press, 1969.

[Old63] C.D. Olds. « Continued Fractions ». In: *Anneli Lax New Mathematical Liberary* 9 (1963) (cit. on pp. 12, 14, 16, 17).

[Pon68] J. C. Pond. « Generalized Fibonacci Summations ». In: 6 (1968), pp. 97–108.

[Rab96] Stanley Rabinowitz. « Algorithmic manipulation of Fibonacci identities ». In: *Applications of Fibonacci numbers*. Springer, 1996, pp. 389–408 (cit. on p. 48).

[Rib89] P Ribenboim. « Square classes of Fibonacci and Lucas numbers ». In: *Portugaliae mathematica* 46 (1989), pp. 159–175 (cit. on p. 48).

[Rib91] Paulo Ribenboim. *The Little Book of Bigger Primes*. Springer Science & Business Media, 1991 (cit. on pp. 48, 49).

[Ric11] T. Richez. « Les fractions continues ». In: *Université de Strasbourg* (2011).

[Sav09] Diana Savin. « About a Diophantine equation ». In: *An. Stiint. Univ."Ovidius" Constanta Ser. Mat* 17 (2009), pp. 241–250 (cit. on pp. 1, 81).

[Sbu02] G. Sburlati. « Generalized Fibonacci sequences and linear congruences ». In: 40 (2002), pp. 446–456.

[Tan17] Elif Tan. « On bi-periodic Fibonacci and Lucas numbers by matrix method ». In: *Ars Combinatoria* 133 (2017).

[VH69] E Verner and Jr Hoggatt. « Fibonacci and Lucas numbers ». In: *The Fibonacci Association* (1969) (cit. on p. 49).

[Yay11] Omer Yayenie. « A note on generalized Fibonacci sequences ». In: *Applied Mathematics and Computation* 217.12 (2011), pp. 5603–5611 (cit. on pp. 57, 59, 60, 62).

[Yes12] Deniz Yesilyurt. *Solving Linear Diophantine Equations and Linear Congruential Equations*. 2012.