

N° d'ordre : 118/2022-C/MT

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté des mathématiques



Thèse de Doctorat

Présentée pour l'obtention du grade de Docteur

En : Mathématiques

Spécialité : Analyse : Equations aux Dérivées Partielles et Applications

Par : **KAMEL El-Hadi**

Thème

**Stabilisation uniforme pour une équation des ondes
semi-linéaire avec des coefficients variables et des
conditions aux limites non-linéaires**

Soutenue publiquement, le 23/11/2022, devant le jury composé de :

M. M. MEDJDEN	Professeur	à l'USTHB	Président
M. A. KHEMMOUDJ	Professeur	à l'USTHB	Directeur de thèse
M. A. CHOUTRI	Professeur	à l'ENS-Kouba	Examinateur
M. A. TOUZALINE	Professeur	à l'USTHB	Examinateur
M. A. AINOUZ	Maître de conférences/B	à l'USTHB	Invité

Table des matières

Notations	vii
Introduction générale	1
1 Rappels d'analyse fonctionnelle	9
1.1 Dualité et réflexivité dans les espaces de Banach	9
1.2 Convergence faible et convergence faible*	10
1.3 Espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq \infty$	12
1.4 Espaces de Sobolev $W^{m,p}, 1 \leq p \leq \infty$	14
1.5 Notions de géométrie Riemannienne	19
2 Existence et unicité de la solution du problème étudié	24
2.1 Introduction	24
2.2 Position du problème	25
2.3 Résultat principal	27
2.3.1 Estimations à priori	30
2.3.2 Passage à la limite	36
2.3.3 Unicité	40
3 Stabilisation uniforme de l'équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec des conditions aux limites non-linéaires	43

3.1	Position du problème	43
3.2	Résultat principal	45
3.3	Démonstration du résultat principal	46
3.3.1	Absorption des termes d'ordre inférieur	55
	Conclusion et perspectives	65
	Bibliographie	79

Résumé

Dans cette thèse, on s'intéresse à l'existence et l'unicité de la solution et à la stabilisation uniforme pour les équations des ondes semi-linéaires avec des coefficients variables et une condition aux limites non linéaire.

On commence cette thèse par démontrer l'existence et l'unicité de la solution pour un problème des ondes semi-linéaire à coefficients variables et une condition aux limites non linéaire en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin.

Ensuite, nous étudions le comportement asymptotique lorsque $t \rightarrow \infty$ de la solution d'une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables et une condition aux limites non linéaire en présence d'un terme de dissipation sur le bord, et on démontre le résultat de stabilisation uniforme du problème. La stabilisation exponentielle a été obtenue en utilisant la géométrie riemannienne.

Mots clés. Equation des ondes semi-linéaire, coefficients variables, méthode de Faedo-Galerkin, stabilisation uniforme.

Abstract

In this thesis, the existence and uniqueness of the solution, the uniform stabilization for a semi linear wave equation with variable coefficients and nonlinear boundary conditions are considered.

We begin this thesis with the proof of the existence and uniqueness of the solution for a semi linear wave equation with variable coefficients and nonlinear boundary conditions using the Faedo-Galerkin method.

Finally, we study the asymptotic behavior as t tends to infinity of the solution for a semi linear wave equation with variable coefficients and nonlinear boundary conditions, in the presence of a dissipative term on the boundary, and we prove the uniform stabilization result of the problem. The uniform decay rates is established by the Riemannian geometry.

Key words. Semi linear wave equation, variable coefficients, Faedo-Galerkin method, uniform stabilization.

Remerciements

Je remercie tout d'abord **Allah** de la force, de la volonté et de la patience qu'il m'a donné tout au long de la préparation de cette thèse pour que le travail arrive à son terme.

Je remercie vivement Monsieur Ammar KHEMMOUDJ de l'USTHB, mon directeur de thèse pour son soutien, ses conseils et son implication dans mon travail.

Je remercie également Monsieur Abdelhamid AINOUZ de l'USTHB pour son soutien, son implication dans mon travail, il a toujours été disponible pour donner de l'aide.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Monsieur Mohammed MEDJDEN de l'USTHB pour m'avoir fait l'honneur en acceptant de présider le jury.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Arezki TOUZALINE de l'USTHB et à Monsieur Abdelaziz CHOUTRI de l'ENS-Kouba qui me font l'honneur d'être membres du jury.

Je tiens à remercier chaleureusement mes parents, mes frères et mes soeurs pour leur appui sans réserve durant les années de préparation de cette thèse.

Pour conclure, j'adresse mes sincères remerciements à tous mes collègues pendant mes études universitaires à l'Université de Mohamed Boudiaf-M'sila et puis à l'USTHB, ils ont rendu l'étude et la recherche agréables et beaucoup plus faciles pour moi. Je remercie également mes amis et tous ceux qui de près ou de loin ont contribué à la réussite de cette thèse.

Dédicaces

Je dédie ce travail à mes chers parents.

Notations

Ω :	Un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière.
ν :	Le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω .
$\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}$:	La dérivée normale de u relativement à l'opérateur \mathcal{A} .
u' :	La dérivée de $u : (t, x) \rightarrow u(t, x)$ par rapport à la variable t .
∇u :	Le gradient de u par rapport à la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$.
Δu :	Le Laplacien de u par rapport à la variable $x = (x_1, \dots, x_n)$.
$C^n(\Omega)$:	L'espace des fonctions continûment différentiables n -fois, sur Ω , pour $n \in \mathbb{N}$.
$\mathcal{D}(\Omega)$:	L'espace des fonctions indéfiniment différentiables et à support compact.
$\mathcal{D}'(\Omega)$:	Le dual de $\mathcal{D}(\Omega)$, i.e. l'espace des distributions sur Ω .
$L^p(\Omega)$:	L'espace des fonctions de puissance p -ième intégrable sur Ω , $1 \leq p < \infty$.
$L^\infty(\Omega)$:	L'espace des fonctions bornées sur Ω .
$L^p(0; T; X)$	L'espace des fonctions mesurables $u : \Omega \rightarrow X$ tel que $\ u(x)\ _X \in L^p(0, T)$.
$W^{m,p}(\Omega)$:	L'espace de Sobolev, $1 \leq p \leq \infty$, $m \in \mathbb{N}$, ($W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega)$, $p = 2$).
$W_0^{m,p}(\Omega)$:	L'adhérence de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\Omega)$; ($W_0^{m,2}(\Omega) = H_0^m(\Omega)$, $p = 2$).
$H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$:	L'espace des fonctions dans $H^1(\Omega)$ qui s'annulent sur Γ_0 .
$H^{-m}(\Omega)$:	Le dual de $H_0^m(\Omega)$.
(\cdot, \cdot) :	Le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$.
\rightharpoonup :	La convergence faible.
\hookrightarrow :	Injection continue.
$E(t)$:	Energie associée au problème.

Introduction générale

La théorie du contrôle des équations paraboliques ou hyperboliques est un travail important dans le domaine des équations aux dérivées partielles. La théorie du contrôle consiste à l'analyse des propriétés d'évolution affichées par une équation, en réponse à des données initiales. Autrement dit, la théorie du contrôle vise à influencer une équation en choisissant des données appropriées (des données initiales ou des fonctions de commandes, appelées 'contrôles') afin d'obtenir un résultat et un comportement souhaité, prédéterminé. Pour la théorie du contrôle, les exemples canoniques d'objectifs recherchés incluent : les problèmes de contrôle optimal, les problèmes de contrôlabilité et les problèmes de stabilisation.

La stabilisation pour les problèmes d'évolution et en particulier pour l'équation des ondes est donc un des résultats classiques de la théorie du contrôle, il consiste à forcer un système non stable à l'origine (i.e., sans contrôle) à devenir asymptotiquement stable quand le temps t tend vers l'infini. Autrement dit, La stabilisation consiste à trouver un opérateur de feedback frontière ou interne de sorte que l'énergie du système décroisse uniformément ou exponentiellement vers zéro quand le temps t tend vers l'infini. Cette notion est appelée stabilisation frontière ou interne selon les travaux de D. L. Russell [86].

Stabilisation de l'équation des ondes :

Soit Ω un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^n dont la frontière Γ est de classe C^2 . Supposons que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où Γ_0 et Γ_1 sont deux sous ensembles de Γ avec $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$ et $\overline{\Omega} = \Omega \cup \Gamma$. De plus, on suppose que $mes(\Gamma_0) \neq 0$.

Considérons le problème classique des ondes suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (0.0.1)$$

La **stabilisation interne** du problème (0.0.1) consiste à chercher un opérateur $F : H \times V \rightarrow \mathbb{K}$ appelé opérateur de feedback interne (ou terme d'amortissement interne) de sorte que l'énergie associée au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u + F(u, u') = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (0.0.2)$$

notée par $E(t)$, décroisse et converge vers zéro quand t tend vers l'infini.

La **stabilisation frontière** du problème (0.0.1) consiste à chercher un opérateur $G : H \times V \rightarrow \mathbb{K}$, appelé opérateur de feedback frontière (ou terme d'amortissement sur la

frontière) de sorte que l'énergie associée au problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \Delta u = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu}(x, t) = G(u, u') & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega, \end{array} \right. \quad (0.0.3)$$

décroisse et converge vers zéro quand t tend vers l'infini.

La stabilisation est dite **exponentielle** si l'énergie associée $E(t)$ converge d'une manière exponentielle vers zéro quand t tend vers l'infini, i.e.

$$E(t) \leq Ce^{-\omega t}, \quad \text{pour tout } t > 0,$$

où C, ω sont des constantes positives, C dépend uniquement des données initiales, ω désigne le taux de décroissance de l'énergie.

Les travaux antérieurs

Les problèmes de contrôle et de stabilisation pour les équations aux dérivés partielles ont été traité pendant longtemps par plusieurs auteurs. Dans cette partie, on résume les travaux antérieurs sur la stabilisation (interne et frontière) pour les équations des ondes.

Soit $A(x)$ une matrice symétrique, positive pour tout $x \in \mathbb{R}^n$ dont les éléments sont de classe C^∞ . Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ un ensemble ouvert et borné avec une frontière régulière $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$.

Soit $T > 0$ donné. Considérons le problème suivant des ondes à coefficients variables

$$\begin{cases} u'' = \operatorname{div}(A(x)\nabla u) & \text{dans } (0, T) \times \Omega, \\ u = 0 & \text{sur } (0, T) \times \Gamma_0, \\ u(0, x) = u_0(x), \quad u'(0, x) = u_1(x) & \text{sur } \Omega. \end{cases} \quad (0.0.4)$$

Pour faciliter, on distingue deux cas de l'équation (0.0.4).

Cas 1. $A \equiv I$ (coefficients constants).

Stabilisation interne de l'équation des ondes à coefficients constants :

En ce qui concerne la stabilisation interne pour les équations des ondes lorsque $A \equiv I$, en 1990, Y. You a prouvé dans [98], la décroissance de l'énergie et la contrôlabilité exacte pour l'équation de Petrovsky avec un terme d'amortissement linéaire et un terme d'amortissement non linéaire. Dans [36], les auteurs ont obtenu des estimations sur le taux de décroissance pour une équation des ondes avec une dissipation frictionnelle linéaire et localisée dans un domaine borné. Pour le cas d'un terme d'amortissement non linéaire, on trouve également de nombreux travaux, comme celui de I. Lasiecka et D. Tataru dans [49], les auteurs ont traité le taux de la décroissance de l'énergie pour l'équation des ondes semi-linéaire avec une dissipation frictionnelle non linéaire et localisée dans un domaine borné en présence d'un terme source, ou encore [87] de S. Berrimi et S.A. Messaoudi sur la décroissance exponentielle pour les solutions d'une équation viscoélastique avec une dissipation frictionnelle non linéaire et localisée. Pour d'autres exemples, voir [7, 43, 67, 70, 101] pour le cas d'un terme de dissipation linéaire, quand l'équation des ondes contient un terme de dissipation non linéaire, voir [14, 30, 41, 69, 89].

Stabilisation frontière de l'équation des ondes à coefficients constants :

Les équations avec dissipations frontières ont été étudiées depuis plus de 50 ans par plusieurs mathématiciens, et comme notre problème étudié dans cette thèse contient une dissipation frontière, on présente de manière détaillée les travaux réalisés de la contrôlabilité et de la stabilisation de la frontière. Pour cette partie, on peut notamment citer les travaux de :

En 1974, D. L. Russell dans [85] a démontré des théorèmes de contrôlabilité exacte pour l'équation des ondes (0.0.4) en considérant un contrôle frontière, après ça, en 1975, J. Quinn et D. L. Russell [79] ont traité la stabilité et obtenu une décroissance de l'énergie pour des solutions des équations hyperboliques avec un terme d'amortissement frontière.

En 1979, G. Chen dans [19, 20] a démontré la décroissance exponentielle du problème (0.0.4) de la frontière sous certaines conditions géométriques.

En 1988, J. L. Lions [62, 63] a étudié le problème (0.0.4), et il a élaboré l'inégalité d'observabilité particulière et obtenu des contrôles aux frontières constructifs. Par ailleurs, en présence d'un feedback (ou un terme de dissipation) linéaire sur la frontière, on peut citer parmi les résultats de stabilisation obtenus plus tard, les travaux [39, 40, 90, 93]. On trouve également plusieurs résultats pour les équations ayant un feedback frontière non linéaires, notamment I. Lasiecka et D. Tataru dans [48] qui assurent un bon traitement de la stabilisation frontière d'une équation (Eq (0.0.5)) des ondes semi-linéaire avec une dissipation non linéaire sur le bord

$$\begin{cases} u_{tt} = \Delta u - f_0(u) & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \frac{\partial u}{\partial \gamma} = g(u_t|_{\Gamma_1}) - f_1(u|_{\Gamma_1}) & \text{dans } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ u(0) = u^0 \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega), \quad u_t(0) = u^1 \in L^2(\Omega), \end{cases} \quad (0.0.5)$$

la décroissance exponentielle de l'énergie du problème (0.0.5) a été prouvée sous certaines hypothèses sur les deux termes non linéaires $f_0(u)$ et $f_1(u)$ et sur le terme de dissipation non linéaire $g(u_t)$. Les auteurs ont également présenté la technique d'absorption des termes d'ordre inférieur en détail, on aura besoin de cette technique dans le chapitre 3 quand on veut absorber les termes d'ordre inférieur. Pour d'autres exemples liés à la stabilisation frontière, voir [19–21, 24, 37, 40, 45–47, 55, 76, 100].

Lorsque les équations des ondes contiennent un terme mémoire, la stabilisation et la décroissance exponentielle de l'énergie ont été étudiées par divers auteurs pour les équations des ondes viscoélastiques, voir par exemple [8, 38, 78, 87, 94].

Cas 2. $A \neq I$ (coefficients variables).

Stabilisation interne et frontière de l'équation des ondes à coefficients variables :

Les méthodes de multiplicateurs classiques ont été largement utilisées pour la contrôlabilité et la stabilisation des équations des ondes, voir par exemple [19–21, 40, 42, 44, 50–55, 64, 71, 72], mais, c'était seulement pour les problèmes à coefficients constants. Dans l'analyse classique, les méthodes de multiplicateurs ne fonctionnent pas pour les problèmes à coefficients variables. L'utilisation de la géométrie riemannienne est une généralisation de la méthode de multiplicateur classique, cette approche a été introduite par P.F. Yao dans [95] pour étudier l'équation suivante des ondes à coefficients variables

$$y'' - \sum_{i,j=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(a_{ij}(x) \frac{\partial y}{\partial x_i} \right) = 0 \quad \text{dans } \Omega, \quad (0.0.6)$$

où

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j \geq a \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2, \quad x \in \Omega, \xi \in \mathbb{R}^n,$$

l'auteur a établi les inégalités d'observabilité pour la contrôlabilité exacte de l'équation des ondes à coefficients variables par la géométrie riemannienne sous certaines conditions

géométriques pour le problème de Dirichlet et pour le problème de Neumann. Dans [95], P. F. Yao a également présenté quelques exemples importants pour vérifier les inégalités d'observabilité. Ensuite, plusieurs auteurs ont suivi les études sur la stabilisation en utilisant la géométrie riemannienne pour des cas plus généralisés, comme Cavalcanti et al. [15], les auteurs ont établi la stabilisation uniforme pour un problème de Cauchy-Ventcel à coefficients variables défini comme suit

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_{tt} - \mathcal{A}u + a(x)g_1(u_t) = 0 & \text{dans } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ v_{tt} - \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} + \mathcal{A}_T v + a(x)g_2(v_t) = 0 & \text{dans } \Gamma_1 \times \mathbb{R}_+, \\ u = v & \text{sur } \Gamma \times \mathbb{R}_+, \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times \mathbb{R}_+, \\ (u(0), v(0)) = (u^0, v^0) & \text{sur } \Omega \times \Gamma, \\ (u_t(0), v_t(0)) = (u^1, v^1) & \text{sur } \Omega \times \Gamma, \end{array} \right. \quad (0.0.7)$$

où

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}_0(A(x)\nabla_0 u),$$

$$\mathcal{A}_T u = -\operatorname{div}_{0T}(A(x)\nabla_0 u),$$

la décroissance exponentielle de l'énergie pour ce problème a été démontrée en utilisant la méthode de la géométrie riemannienne. Pour d'autres exemples sur la stabilisation des problèmes à coefficients variables, on peut se référer aux [11–13, 16, 56, 57, 74, 77, 91] dans le cas d'une stabilisation interne et aux [17, 27–29, 31, 32, 59, 68, 73, 75, 81, 94] dans le cas d'une stabilisation frontière.

Dans cette thèse, nous nous intéressons à la stabilisation pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec une condition aux limites non linéaire, en considérant un terme de dissipation frontière $c_3(x)u'$. Le résultat principal de la stabilisation exponentielle

et sa démonstration se trouvent dans le chapitre 3.

Cette thèse comporte trois chapitres :

- Dans le premier chapitre, nous rappelons les définitions et les propriétés de base de l'analyse fonctionnelle qui seront utilisées dans la thèse.

- Dans le deuxième chapitre, nous présentons notre problème de l'équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec des conditions aux limites non homogènes en présence des fonctions non linéaires dans le domaine Ω ainsi que dans sa frontière Γ , et ensuite, nous démontrons notre résultat d'existence et d'unicité de la solution faible pour ce problème. Pour la démonstration, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin.

- Le troisième chapitre est consacré à démontrer un résultat de stabilisation uniforme pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec des conditions aux limites non homogènes et un terme de dissipation $c_3(x)u'$ sur le bord Γ_1 . Premièrement, on présente les définitions et les notations sur la géométrie Riemannienne. Ensuite, on énonce dans la troisième section notre résultat principal de la stabilisation uniforme. Dans la quatrième section, on démontre le résultat principal de la stabilisation uniforme, i.e. on démontre que l'énergie associée au problème étudié converge d'une manière exponentielle vers zéro lorsque t tend vers l'infini. La démonstration du résultat principal est obtenue en combinant la géométrie riemannienne, la théorie des semi-groupes et la technique d'absorption des termes d'ordre inférieur introduite par I. Lasiecka dans [47] et puis développée par Lasiecka et Tataru dans [48].

Chapitre 1

Rappels d'analyse fonctionnelle

Dans ce chapitre, nous rappelons sans démonstration quelques définitions et propriétés de base sur les espaces fonctionnelles qui seront utilisées dans la thèse. Les démonstrations peuvent être trouvées dans certaines références comme Adams et Fourier [1], Aubin [3], Lieb et Loss [60], Lions [61], Brezis [5], Rudin [82, 83] ou encore Cioranescu [92].

1.1 Dualité et réflexivité dans les espaces de Banach

Soit E et F deux espaces de Banach

Définition 1.1. On note par $\mathcal{L}(E, F)$ l'espace de toutes les fonctions linéaires et continues de E dans F . Cet espace est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{\mathcal{L}(E, F)} = \sup_{\substack{x \in E \\ \|x\|_E = 1}} \|f(x)\|_F.$$

Définition 1.2. Si E un espace de Banach, l'ensemble des applications linéaires et continues de E dans \mathbb{R} s'appelle l'espace dual (ou le dual topologique) de E qui noté par E' .

Le dual E' est caractérisé comme suit :

$$E' = \mathcal{L}(E, \mathbb{R}).$$

1.2. Convergence faible et convergence faible*

Si $f \in E'$, l'image $f(u)$ de $u \in E$ est notée par $\langle f, u \rangle_{E',E}$. Le crochet $\langle \cdot, \cdot \rangle_{E',E}$ est appelé le crochet de dualité entre E' et E .

Définition 1.3. L'espace dual de E' , noté E'' s'appelle le bidual de E .

Théorème 1.1.1. Soit E un espace vectoriel normé. Alors, il existe $\mathcal{F} \in \mathcal{L}(E, E'')$ telle que

$$\begin{cases} \mathcal{F} \text{ est injective,} \\ \|\mathcal{F}(u)\|_{E''} = \|u\|_E. \end{cases}$$

Démonstration. Voir Dautray et Lions [26]. □

Définition 1.4. Soit E un espace de Banach. On dit que E est réflexif si

$$\mathcal{F}(E) = E''.$$

1.2 Convergence faible et convergence faible*

Soit E un espace de Banach, muni de la norme $\|\cdot\|_E$.

Définition 1.5. Soit $\{x_n\}$ une suite de E . On dit que x_n converge fortement vers $x \in E$ ssi

$$\|x_n - x\|_E \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

On note $x_n \rightarrow x$ dans E .

Définition 1.6. Soit $\{x_n\}$ une suite de E . On dit que x_n converge faiblement vers $x \in E$ ssi

$$\forall x' \in E, \quad \langle x', x_n \rangle_{E',E} \rightarrow \langle x', x \rangle_{E',E} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E .

Définition 1.7. Soit $\{x_n\}$ une suite de E' . On dit que x_n converge faiblement* vers $x \in E'$ ssi

$$\forall x' \in E, \langle x_n, x' \rangle_{E',E} \rightarrow \langle x, x' \rangle_{E',E} \quad \text{dans } \mathbb{R}.$$

On note $x_n \rightharpoonup x$ faiblement* dans F .

Proposition 1.1. Si $\{x_n\}$ converge fortement vers x , alors $\{x_n\}$ converge faiblement vers x .

Démonstration. Voir [92]. □

Proposition 1.2. [22] Soient E, F deux espaces de Banach et $f \in \mathcal{L}(E, F)$. Soient $\{x_n\} \in E$ et $x \in E$ telles que $x_n \rightharpoonup x$ faiblement dans E . Alors,

$$f(x_n) \rightharpoonup f(x) \quad \text{faiblement dans } F.$$

Théorème 1.2.1. (Eberlein-Smulian) Soient E un espace réflexif et $\{x_n\}$ une suite bornée dans E . Alors, il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ et $x \in E$ telle que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{faiblement dans } E.$$

Démonstration. Voir Yosida [97] ou Zeidler [99]. □

Théorème 1.2.2. Soient E un espace séparable et $\{x_n\}$ une suite bornée dans E' . Alors, il existe une sous suite $\{x_{n_k}\}$ de $\{x_n\}$ et $x \in E'$ telle que

$$x_{n_k} \rightharpoonup x \quad \text{faiblement* dans } E'.$$

Démonstration. Voir Cioranescu et Donato [92, 97, 99]. □

1.3 Espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq \infty$

Nous rappelons la définition et certaines propriétés de base des espaces de Lebesgue $L^p, 1 \leq p \leq \infty$. pour plus de propriétés sur les espaces L^p . Voir Adams et Fourier [1]

Soient \mathcal{O} un ensemble ouvert de \mathbb{R}^n et Ω un ensemble borné de \mathbb{R}^n .

Définition 1.8. Soient $1 \leq p, p' \leq \infty$. On dit que p et p' sont deux exposants conjugués ssi $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Dans la suite, on considère que p et p' sont conjugués.

Proposition 1.3. [22](Inégalité de Minkowski) Pour tout $a, b > 0$ et $p > 1$,

$$ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{p'}b^{p'}. \quad (1.3.1)$$

D'une manière plus générale, pour tout $\eta > 0$,

$$ab \leq \eta a^p + C_\eta b^{p'}, \quad C_\eta = \frac{1}{p'(p\eta)^{p'-1}}, \quad (1.3.2)$$

à noter que $C_\eta \rightarrow \infty$ quand $\eta \rightarrow 0$.

En particulier, pour $p = p' = 2$, on obtient les inégalités de Cauchy-Schwarz et donc (1.3.1), (1.3.2) deviennent

$$ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2, \quad ab \leq \eta a^2 + C_\eta b^2. \quad (1.3.3)$$

Définition 1.9. Soit $1 \leq p, < \infty$. On définit les espaces suivants

$$\mathcal{D}(\mathcal{O}) = \{f \in \mathcal{C}^\infty(\mathcal{O}) \mid \text{supp } f \text{ est compact}\}, \quad (1.3.4)$$

$$L^p(\mathcal{O}) = \{f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable telle que } \|f\|_p < \infty\}, \quad (1.3.5)$$

$$L^\infty(\mathcal{O}) = \{f : \mathcal{O} \rightarrow \mathbb{R} \mid f \text{ est mesurable telle que } \|f\|_\infty < \infty\} \quad (1.3.6)$$

où

$$\|f\|_p = \left(\int_{\mathcal{O}} |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.3.7)$$

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \mathcal{O}} \text{ess}|f(x)| = \inf \{C, |f| \leq C \text{ p.p. sur } \mathcal{O}\}. \quad (1.3.8)$$

On définit aussi

$$L^p_{\text{loc}}(\mathcal{O}) = \{f \mid f \in L^p(\omega), \text{ pour tout ouvert borné } \omega \text{ avec } \bar{\omega} \subset \mathcal{O}\}. \quad (1.3.9)$$

Proposition 1.4. [92] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $L^p(\mathcal{O})$ est un espace de Banach pour la norme $\|\cdot\|_p$.

Si $p = 2$, l'espace $L^p(\mathcal{O})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{L^2(\mathcal{O})} = \int_{\mathcal{O}} f(x)g(x)dx. \quad (1.3.10)$$

Proposition 1.5. [92] Si $1 < p < \infty$, l'espace $L^p(\mathcal{O})$ est réflexif et séparable à la fois, tandis que $L^1(\mathcal{O})$ est seulement séparable. Alors $L^\infty(\mathcal{O})$ n'est ni réflexif ni séparable.

Proposition 1.6. [22](Inégalité de Hölder) Soit $1 \leq p, p' \leq \infty$. Alors

$$\int_{\mathcal{O}} |f(x)g(x)|dx \leq \|f\|_{L^p(\mathcal{O})} \|g\|_{L^{p'}(\mathcal{O})}. \quad (1.3.11)$$

Si $p = 2$, cette inégalité est appelée l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Une conséquence de l'inégalité de Hölder, ce sont les injections suivantes.

Corollaire 1.1. Soient $1 \leq p \leq q \leq \infty$. Alors

$$L^q(\Omega) \subset L^p(\Omega) \quad (1.3.12)$$

avec

$$\|f\|_q \leq K_\Omega \|f\|_p,$$

où la constante K_Ω dépend de Ω et p .

Proposition 1.7. (Inégalité de Hölder généralisée) Soient $1 \leq p_1, \dots, p_m, q \leq \infty$ telles que

$$\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = \frac{1}{q},$$

et soient $f_j \in L^{p_j}(\Omega)$ avec $1 \leq j \leq m$. Alors

$$\|f_1 \dots f_m\|_q \leq \|f_1\|_{p_1} \dots \|f_m\|_{p_m}.$$

Démonstration. Voir Cherrier et Milani [22]. □

Définition 1.10. Soient $(E, \|\cdot\|_E)$ et $(F, \|\cdot\|_F)$ deux espaces de Banach.

- i) On dit que F s'injecte continûment dans E si $F \subset E$, et l'injection est continue, i.e. il existe $k > 0$ telle que, pour tout $f \in F$,

$$\|f\|_E \leq K \|f\|_F.$$

On note $F \hookrightarrow E$.

- ii) On dit que l'injection $F \hookrightarrow E$ est compacte si, en plus, de toute suite bornée dans F , on peut extraire une sous suite qui converge dans E .

1.4 Espaces de Sobolev $W^{m,p}, 1 \leq p \leq \infty$

Soit $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. On pose

$$|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n,$$

et

$$\partial^\alpha = \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \dots \partial_{x_1}^{\alpha_1}},$$

où, pour $|\alpha| = 0$, ∂^0 égale à l'identité.

Définition 1.11. Soit $1 \leq p \leq \infty$. On définit les espaces suivants

$$W^{m,p}(\mathcal{O}) = \{f \mid f \in L^p(\mathcal{O}), \partial^\alpha f \in L^p(\mathcal{O}), |\alpha| \leq m\}, \quad (1.4.1)$$

où la dérivée est prise au sens de distribution.

Pour $m = 1$ et $p = 2$, on note $W^{1,2}(\mathcal{O}) = H^1(\mathcal{O})$, i.e.

$$H^1(\mathcal{O}) = \left\{ f \mid f \in L^2(\mathcal{O}), \frac{\partial f}{\partial x_i} \in L^2(\mathcal{O}), i = 1, \dots, m \right\}, \quad (1.4.2)$$

Pour $p = 2$, on note $W^{m,2}(\mathcal{O}) = H^m(\mathcal{O})$, i.e.

$$H^m(\mathcal{O}) = \{f \mid f \in L^2(\mathcal{O}), \partial^\alpha f \in L^2(\mathcal{O}), |\alpha| \leq m\}, \quad (1.4.3)$$

$$W_0^{m,p}(\Omega) := \text{L'adherance de } \mathcal{D}(\Omega) \text{ dans } W^{m,p}(\Omega). \quad (1.4.4)$$

Pour $m = 1$ et $p = 2$, on note $W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$, i.e.

$$H_0^1(\Omega) = \{f \in H^1(\Omega) : f|_{\partial\Omega} = 0\}, \quad (1.4.5)$$

On note par $H^{-1}(\Omega)$ le dual de l'espace $H_0^1(\Omega)$, i.e. $H^{-1}(\Omega) = (H_0^1(\Omega))'$.

Proposition 1.8. [92] Soit $p \in \mathbb{R}$ avec $1 \leq p \leq \infty$. L'espace $W^{m,p}(\mathcal{O})$ est un espace de Banach pour la norme

$$\|f\|_{W^{m,p}(\mathcal{O})} = \left(\sum_{|\alpha| \leq m} \|\partial^\alpha f\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Si $p = 2$, l'espace $H^m(\mathcal{O})$ est un espace de Hilbert pour le produit scalaire

$$(f, g)_{H^m(\mathcal{O})} = \sum_{|\alpha| \leq m} (\partial^\alpha f, \partial^\alpha g)_{L^2(\mathcal{O})}.$$

Théorème 1.4.1. Soit Ω un domaine borné dans \mathbb{R}^n . On suppose que Ω est à frontière Lipschitzienne. Soient $m \in \mathbb{N}_{\geq 1}$ et $1 \leq p < \infty$.

i) Si $(mp < n$ et $1 \leq q \leq p' = \frac{np}{n-mp})$ ou $(mp < n$ et $1 \leq q < \infty)$. Alors

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

ii) Si $(mp < n$ et $1 \leq q < p' = \frac{np}{n-mp})$ ou $(mp = n$ et $1 \leq q < \infty)$. Alors, l'injection suivante est compacte

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

iii) Si $(m = n$ et $p = 1$ et $1 \leq q \leq \infty)$. Alors

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega).$$

iv) Si $mp > n$. Alors, l'injection suivante est compacte

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow C^0(\overline{\Omega}).$$

Démonstration. Voir Adams et Fourier [1]. □

Remarque 1.4.1. On suppose que Ω est un domaine borné quelconque dans \mathbb{R}^n (i.e. sans aucune condition sur les bords $\partial\Omega$). Alors, toutes les injections du Théorème (1.4.1) sont valables en remplaçant l'espace $W^{m,p}(\Omega)$ par $W_0^{m,p}(\Omega)$.

Théorème 1.4.2. (*Théorème de traces*) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n à frontière de classe

C^m . Si $mp < n$ et $1 \leq q \leq p' = \frac{np}{n-mp}$. Alors

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma). \quad (1.4.6)$$

Si $n = 2$ et $1 \leq q < \infty$. Alors

$$W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma). \quad (1.4.7)$$

Démonstration. Voir Adams et Fourier [1]. □

Remarque 1.4.2. D'après le théorème de traces, on a, en particulier pour $m = 1$ et $p = 2$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Gamma)$ (avec q définie dans le théorème).

Théorème 1.4.3. [92] (*Formule de Green*) Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière et $u, v \in H^1(\Omega)$. Alors,

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} dx = \int_{\Gamma} uv \cdot \eta ds - \int_{\Omega} v \frac{\partial u}{\partial x_i} dx \quad (1.4.8)$$

où η est le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω .

Corollaire 1.1. Soit Ω un ouvert borné de \mathbb{R}^n de frontière Γ régulière et $u, v \in H^1(\Omega)$, $A \in (C^\infty)^{n \times n}$. Alors,

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u) \cdot v dx = \int_{\Gamma} v \cdot \frac{\partial u}{\partial \eta_A} ds - \int_{\Omega} \nabla u^T A(x) \nabla v dx, \quad (1.4.9)$$

où $\frac{\partial v}{\partial \eta_A} = A(x) \frac{\partial v}{\partial x_i} \cdot \eta = A(x) \nabla v \cdot \eta$.

Définition 1.12. (L'espace $L^p(a, b; X)$). Soient X un espace de Banach et $]a, b[$ un intervalle dans \mathbb{R} . Pour $1 \leq p \leq \infty$, on note par $L^p(a, b; X)$ l'espace des (classes de) fonctions $f :]a, b[\rightarrow$

X qui sont mesurables telles que $\|f\|_X \in L^p(]a, b[)$, i.e.

$$L^p(a, b; X) = \left\{ f :]a, b[\rightarrow X \mid f \text{ est mesurable telle que } \|f\|_{L^p(a,b;X)} < \infty \right\}, \quad (1.4.10)$$

où

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \left(\int_a^b \|f(x)\|_X^p dx \right)^{\frac{1}{p}}, \quad (1.4.11)$$

$$\|f\|_{L^p(a,b;X)} = \sup_{a \leq x \leq b} \text{ess} \|f(x)\|_X = \inf \{ C, \|f\|_X \leq C \text{ p.p. sur }]a, b[\}. \quad (1.4.12)$$

Le théorème suivant joue un rôle important dans l'étude des équations aux dérivées partielles, il sera beaucoup utilisé dans notre étude.

Théorème 1.4.4. Soient $B_0 \subset B \subset B_1$, trois espaces de Banach tels que B_0 et B_1 sont réflexifs. On suppose que l'injection $B_0 \hookrightarrow B_1$ est compacte. On définit l'espace

$$W = \left\{ v \mid v \in L^{p_0}(a, b; B_0), v' = \frac{\partial v}{\partial t} \in L^{p_1}(a, b; B_1) \right\}, \quad (1.4.13)$$

où $1 < p_0, p_1 < \infty$, muni de la norme

$$\|v\|_W = \|v\|_{L^{p_0}(a,b;B_0)} + \|v'\|_{L^{p_1}(a,b;B_1)}. \quad (1.4.14)$$

Alors, l'injection $W \hookrightarrow L^{p_0}(a, b; B)$ est compacte.

Démonstration. Voir Lions [61, Théorème 5.1 p. 58]. □

Pour démontrer l'existence et l'unicité, on aura besoin du lemme suivant.

Lemme 1.4.1. [92] (*Lemme de Grönwall*) Soit v une fonction dans $C([0, T])$, on suppose qu'il existe une constante positive k telle que

$$v(t) \leq k + \int_0^t v(s) ds, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.4.15)$$

Alors

$$v(t) \leq ke^T, \quad \forall t \in [0, T]. \quad (1.4.16)$$

1.5 Notions de géométrie Riemannienne

Dans cette section, on présente les définitions et les notations de base sur la géométrie Riemannienne dont on aura besoin dans nos calculs. Toutes les définitions et les notations sont standards et classiques dans la littérature, voir [56, 92, 95, 96].

Métrie Riemannienne

Définition 1.13. Soit M une variété lisse de dimension d . On dit que g est une métrique Riemannienne sur M si pour chaque espace tangentiel M_x ($x \in M$), il existe un produit scalaire $g_x(\cdot, \cdot)$ sur M_x . Autrement dit, g est une application continue de M dans l'ensemble des formes bilinéaires symétriques et définies positives sur M_x .

La couple (M, g) est appelée variété Riemannienne.

L'exemple suivant est un exemple principal d'une variété Riemannienne.

Exemple. Soit $A = (a_{ij})$ est une matrice de fonctions de classe C^∞ dans \mathbb{R}^n , vérifiant $a_{ij} = a_{ji}$, on suppose que A vérifie (A1). Définissons

$$G(x) = [A(x)]^{-1} = (g_{ij}(x)), \quad i, j = 1, \dots, n, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (1.5.1)$$

Pour chaque $x \in \mathbb{R}^n$, on définit le produit scalaire et la norme sur l'espace tangent $\mathbb{R}_x^n = \mathbb{R}^n$ par

$$g(X, Y) = (X, Y)_g = \sum_{i,j=1}^n g_{ij}(x) \alpha_i \beta_j, \quad (1.5.2)$$

$$|X|_g = (X, X)_g^{\frac{1}{2}}, \quad \forall X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad Y = \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i}. \quad (1.5.3)$$

Il est facile à vérifier qu'à partir de (2.2.4), (\mathbb{R}^n, g) est une variété riemannienne munie de la métrique riemannienne g . La métrique g est la métrique euclidienne si et seulement si $G(x) = I$ est la matrice identique sur \mathbb{R}^n .

Métrique Euclidienne

Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, on note par

$$\begin{aligned} X \cdot Y &= \sum_{j=1}^n \alpha_j \beta_j, & |X|_0 &= (X \cdot X)^{\frac{1}{2}}, \\ \forall X &= \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i}, & Y &= \sum_{i=1}^n \beta_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathbb{R}_x^n, \end{aligned} \quad (1.5.4)$$

la métrique euclidienne sur \mathbb{R}^n . Pour $x \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$A(x)X = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \alpha_j \right) \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \forall X = \sum_{i=1}^n \alpha_i \frac{\partial}{\partial x_i} \in \mathbb{R}_x^n. \quad (1.5.5)$$

Donc, en rappelant la dérivée co-normale, on a

$$\frac{\partial u}{\partial \nu_A} = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) \cdot \nu_i = (A(x) \nabla_0 u) \cdot \nu. \quad (1.5.6)$$

Dans (1.5.6), et ci-après, l'indice inférieur '0' signifie que l'opérateur différentiel est dans la métrique euclidienne.

Définition 1.14. Pour $f \in C^1(\Omega)$ et $X = \sum_{i=1}^n \alpha_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i}$ un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n ,

$$\nabla_0 f = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} \quad \text{et} \quad \text{div}_0(X) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \alpha_i(x)}{\partial x_i} \quad (1.5.7)$$

représentent le gradient de f et la divergence de X dans la métrique euclidienne, respectivement.

Quelques relations

On définit le gradient $\nabla_g f$ de f , associé à une métrique riemannienne g , par le théorème de représentation de Riesz, par

$$X(f) = \langle \nabla_g f, X \rangle_g, \quad f \in C^1(\bar{\Omega}). \quad (1.5.8)$$

où X est un champ de vecteurs sur (\mathbb{R}^n, g) . Le lemme suivant (voir [95, Lemma 2.1]) fournit d'autres relations qui seront utilisées pour démontrer plusieurs résultats dans ce chapitre.

Lemme 1.5.1. Soit $X = [x_1, \dots, x_n]$ un système de coordonnées dans \mathbb{R}^n . Soit $f, h \in C^1(\bar{\Omega})$. Enfin, soient H, X deux champs de vecteurs. En considérant les notations ci-dessus, on a

$$\langle H(x), A(x)X(x) \rangle_g = H(x) \cdot X(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5.9)$$

$$\nabla_g f(x) = \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial f}{\partial x_j} \right) = A(x) \nabla_0 f, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.5.10)$$

si $X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, alors, grâce à (1.5.8) et (1.5.10),

$$X(f) = \langle \nabla_g f, X \rangle_g = \langle A(x) \nabla_0 f, X \rangle_g = \nabla_0 f \cdot X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_i}, \quad (1.5.11)$$

de (1.5.8)–(1.5.10),

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g f, \nabla_g h \rangle_g &= \nabla_g f(h) = \langle A(x) \nabla_0 f, \nabla_g h \rangle_g \\ &= \nabla_0 f \cdot \nabla_g h = \nabla_0 f A(x) \nabla_0 h, \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.5.12)$$

si H est un champ de vecteurs sur (\mathbb{R}^n, g)

$$\begin{aligned} \langle \nabla_g f, \nabla_g (H(f)) \rangle_g &= DH \langle \nabla_g f, \nabla_g f \rangle_g + \frac{1}{2} \operatorname{div}_0 (|\nabla_g f|_g^2 H)(x) \\ &\quad - \frac{1}{2} (|\nabla_g f|_g^2(x)) (\operatorname{div}_0 H)(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \end{aligned} \quad (1.5.13)$$

où DH désigne la différentielle covariante (discuté ci-dessous).

d'après (2.2.1), (1.5.7) et (1.5.10)

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) = - \operatorname{div}_0(A(x) \nabla_0 u), \\ &= - \operatorname{div}_0(\nabla_g u), \quad u \in C^2(\Omega). \end{aligned} \tag{1.5.14}$$

Différentielle covariante

On note par D la connexion de Levi-Civita dans la géométrie Riemannienne g . Soient

$$H = \sum_{k=1}^n h_k \frac{\partial}{\partial x_k}, \quad X = \sum_{k=1}^n \xi_k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{1.5.15}$$

deux champs de vecteurs sur (\mathbb{R}^n, g) . La différentielle covariante DH de H représente une forme bilinéaire sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_x^n$, pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, définie par

$$DH(Y, X) = \langle D_X H, Y \rangle_g, \quad \forall X, Y \in \mathbb{R}_x^n, \tag{1.5.16}$$

où $D_X H$ désigne la dérivée covariante de H par rapport à X .

Formule de Green et formule de la divergence

Soit H un champ de vecteurs sur \mathbb{R}^n et $f, z \in C^1(\overline{\Omega})$. Alors,

- (i) De [55], en référence aux notations précédentes, on a la formule de Green dans la métrique riemannienne

$$\int_{\Omega} (\mathcal{A}u) z dx = \int_{\Omega} \langle \nabla_g u, \nabla_g z \rangle_g dx - \int_{\Gamma} z \frac{\partial u}{\partial \nu_A} d\sigma, \tag{1.5.17}$$

(ii) De [95], on a la formule de la divergence dans la métrique euclidienne

$$\operatorname{div}_0(fH) = f \operatorname{div}_0(H) + H(f), \quad (1.5.18)$$

et

$$\int_{\Omega} \operatorname{div}_0(H) dx = \int_{\Gamma} H \cdot \nu d\sigma. \quad (1.5.19)$$

Chapitre 2

Existence et unicité de la solution du problème étudié

2.1 Introduction

Dans ce chapitre, on utilise la méthode de Faedo-Galerkin pour démontrer l'existence globale d'une unique solution faible pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec des conditions aux limites non homogènes de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + \mathcal{A}u + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -f_2(u, x) - c_3(x)u' & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (*)$$

sous des hypothèses appropriées sur le domaine Ω , la matrice A , les fonctions f, g et h , et les données initiales u^0 et u^1 .

Le problème (*) représente un cas particulier d'une grande catégorie d'équations aux dérivées partielles, appelée équations hyperboliques. L'étude des équations hyperboliques est très importante non seulement du point de vue de la théorie générale, mais aussi en raison de

ses applications dans la dynamique des fluides en mécanique, la théorie d'élasticité, l'optique, les ondes, la diffusion directe et inverse. Pour des résultats plus généraux concernant ce type d'équations, le lecteur peut consulter [65, 66] de Lions et Magenes, voir aussi [2, 33, 34, 58].

2.2 Position du problème

Soit Ω un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^n dont la frontière Γ est de classe C^2 . Supposons que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où Γ_0 et Γ_1 sont deux sous ensembles de Γ avec $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. De plus, on suppose que $mes(\Gamma_0) \neq 0$.

Considérons le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' + \mathcal{A}u + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, T), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, T), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -f_2(u, x) - c_3(x)u' & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, T), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega. \end{array} \right. \quad (2.2.1)$$

où

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u), \quad x = [x_1, \dots, x_n], \quad (2.2.2)$$

$A = (a_{ij})$ est une matrice de fonctions de classe C^∞ dans \mathbb{R}^n telle que $a_{ij} = a_{ji}$. ν est le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω et $\nu_{\mathcal{A}} = A\nu$.

Hypothèses

(A1) On suppose que l'opérateur différentiel du second ordre \mathcal{A} vérifie la condition d'ellipticité. Il existe $\lambda > 0$ telle que

(i)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > \lambda \sum_{i,j=1}^n \xi_i^2, \quad x \in \bar{\Omega}, \quad 0 \neq \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad (2.2.3)$$

(ii)

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x)\xi_i\xi_j > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad 0 \neq \xi = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)^T \in \mathbb{R}^n. \quad (2.2.4)$$

(A2) Supposons que

$$c_3(x) \in L^\infty(\Gamma_1), \quad c_3(x) \geq c_0 > 0, \quad \text{a.e. in } \Gamma_1. \quad (2.2.5)$$

(A3) Soit $f_1 : \mathbb{R} \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans $\mathbb{R} \times \Omega$ et différentiable par rapport à sa première variable, telle que

$$|f_1(u, y)| \leq c_1(|u|^{\rho+1} + |u| + 1), \quad (2.2.6)$$

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, y) \right| \leq c_1(|u|^\rho + 1), \quad (2.2.7)$$

$$f_1(0, y) = 0, \quad (2.2.8)$$

où

$$c_1 > 0, \quad 0 < \rho < \frac{2}{n-2} \text{ si } n \geq 3.$$

On suppose qu'il existe une fonction $F_1(u, y)$ telle que

$$F_1(u, y) \geq 0, \quad (2.2.9)$$

$$\exists \eta_1 > 0 : (1 + \eta_1)F_1(u, y) \leq f_1(u, y)u, \quad (2.2.10)$$

où

$$F_1(z, y) = \int_0^z f_1(s, y) ds.$$

(A4) soit $f_2 : \mathbb{R} \times \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue dans $\mathbb{R} \times \bar{\Omega}$ et différentiable par rapport à

sa première variable, telle que

$$|f_2(u, y)| \leq c_2(|u|^{q-1} + |u| + 1), \quad (2.2.11)$$

$$f_2(0, y) = 0, \quad (2.2.12)$$

où $c_2 > 0$, $\frac{3}{2} \leq q < \infty$ si $n = 2$, et $\frac{3}{2} \leq q \leq \frac{n}{n-2}$ si $n \geq 3$.

On suppose qu'il existe une fonction $F_2(u, y)$ telle que

$$F_2(u, y) \geq 0, \quad (2.2.13)$$

$$\exists \eta_2 > 0 : (1 + \eta_2)F_2(u, y) \leq f_2(u, y)u, \quad (2.2.14)$$

où

$$F_2(z, y) = \int_0^z f_2(s, y) ds.$$

2.3 Résultat principal

Nous énonçons dans cette partie, le résultat principal d'existence et d'unicité de la solution du problème (2.2.1) pour des conditions initiales u_0 et u_1 supposées dans des espaces appropriés pour obtenir une solution u assez régulière. Introduisons l'espace

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) = \left\{ u \in H^1(\Omega); u|_{\Gamma_0} = 0 \right\}.$$

Le théorème d'existence et d'unicité est le suivant

Théorème 2.3.1. Supposons que les conditions (2.2.3)-(2.2.14) sont vérifiées et soit $\{u^0, u^1\} \in [H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)] \times H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$ vérifiant la condition de compatibilité

$$\frac{\partial u_0}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} = -f_2(u_0, x) - c_3(x)u_1 \text{ sur } \Gamma_1. \quad (2.3.1)$$

2.3. Résultat principal

Alors, pour tout $T > 0$, il existe une unique solution faible globale u du problème (2.2.1) telle que

$$u \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad (2.3.2)$$

$$u' \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), \quad (2.3.3)$$

$$u'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.3.4)$$

On va démontrer le théorème d'existence et d'unicité (Théorème 2.3.1) en utilisant la méthode de Faedo-Galerkin (voir [6, 9, 10, 18, 61, 92]).

La procédure d'étude est la suivante :

- Étape 1 : On définit la solution u_m du problème (\mathcal{P}_m) (page 25).

- Étape 2 : On établit certaines estimations sur u_m , u'_m et u''_m (qu'on appellera estimations 'à priori').

- Étape 3 :
 - En utilisant les résultats de compacité faible de la boule unité dans un espace de Hilbert (resp. un espace de Banach) (resp. le dual d'un espace normé), on peut extraire de la suite u_m (resp. u'_m) (resp. u''_m) une sous-suite $u_{m'}$ (resp. $u'_{m'}$) (resp. $u''_{m'}$) qui converge faiblement (ou faiblement*) vers u (resp. u') (resp. u'').
 - On utilise le lemme de J. Lions [61, Lemme 1.3] pour prouver la convergence faible de $f_1(u_{m'}, x)$ (resp. $f_2(u_{m'}, x)$) vers $f_1(u, x)$ (resp. $f_2(u, x)$) dans $L^2(0, T; L^2(\Omega))$ (resp. $L^2(0, T; L^2(\Gamma))$).

- Étape 4 : On montre que u est la solution exacte du problème (2.2.1).

Démonstration. Comme $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ est séparable, il admet un ensemble dénombrable dense (une base). Soit $(\omega_k)_{k \in \mathbb{N}}$ une base dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ qui est un système orthonormé dans $L^2(\Omega)$. Soit $T > 0$ fixé. Notons V_m l'espace engendré par $\omega_1, \dots, \omega_m$.

Soit

$$u_m(t) = \sum_{i=1}^m u_{im}(t) \omega_i \quad (2.3.5)$$

la solution du problème suivant

$$(\mathcal{P}_m) = \left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_m \in V_m \text{ telle que} \\ (u_m''(t), w_j) + \int_{\Omega} \nabla u_m(t)^T A(x) \nabla w_j dx + \int_{\Omega} f_1(u_m(t), x) w_j dx \\ + \int_{\Gamma} f_2(u_m, x) w_j d\sigma + \int_{\Gamma} c_3(x) u_m'(t) w_j d\sigma = 0 \\ \forall w_j \in V_m \\ u_m(0) = u_m^0, \quad u_m'(0) = u_m^1 \end{array} \right. \quad (2.3.6)$$

où

$$u_m^0 \rightarrow u^0 \quad \text{dans } H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega) \quad m \rightarrow \infty, \quad (2.3.7)$$

$$u_m^1 \rightarrow u^1 \quad \text{dans } H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \quad m \rightarrow \infty \quad (2.3.8)$$

où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire dans $L^2(\Omega)$. On note

$$\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx, \quad \|u\|_{L^p(\Gamma)}^p = \int_{\Gamma} |u|^p d\sigma, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n).$$

D'après les résultats généraux sur les systèmes d'équations différentielles [23], le système

(2.3.6)–(2.3.8) admet une unique solution locale sur $[0, t_m[$, $t_m \in [0, T[$. Comme les deux termes non-linéaires f_1 et f_2 sont globalement lipschitziennes, alors, d’après le lemme de Zorn, on peut prolonger la solution en un intervalle maximal $[0, T[$, $T \in [0, \infty[$.

A la prochaine étape, on trouve des estimations à priori pour la solution du système (2.3.6)–(2.3.8) de sorte qu’elle peut être prolongée en dehors de $[0, T[$ afin d’obtenir une unique solution définie pour tout $t > 0$, en utilisant un argument standard de compacité.

2.3.1 Estimations à priori

Première estimation :

On multiplie l’équation (2.3.6) d’indice i par $2u'_{im}(t)$ et l’on somme en i , il vient

$$\begin{aligned} & 2 \int_{\Omega} u''_m(t) u'_m(t) dx + 2 \int_{\Omega} \nabla u_m(t)^T A(x) \nabla u'_m(t) dx + 2 \int_{\Omega} f_1(u_m, x) u'_m(t) dx \\ & + 2 \int_{\Gamma} f_2(u_m, x) u'_m(t) d\sigma + 2 \int_{\Gamma} c_3(x) u'_m(t) u'_m(t) dx = 0. \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

En utilisant la symétrie de A et l’hypothèse (2.2.5), on déduit

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \|u'_m\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \nabla u_m(t)^T A(x) \nabla u_m(t) dx + 2 \int_{\Omega} F_1(u_m, x) dx + 2 \int_{\Gamma} F_2(u_m, x) d\sigma \right\} \\ & + 2c_0 \|u'_m(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 0. \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

On intègre (2.3.10) sur $]0, t[$, $t \in [0, t_m[$ et on utilise (2.2.10), (2.2.14) et le fait que

$F_j(u, x) \geq 0$, $j = 1, 2$ pour obtenir

$$\begin{aligned} & \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_0 \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \\ & \leq \|u_m^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} F_1(u_m^0, x) dx + 2 \int_{\Gamma} F_1(u_m^0, x) d\sigma \\ & \leq \|u_m^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2 \int_{\Omega} |f_1(u_m^0, x)| |u_m^0| dx + 2 \int_{\Gamma} |f_1(u_m^0, x)| |u_m^0| d\sigma \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

2.3. Résultat principal

De (2.3.11), en tenant compte des (2.2.6), (2.2.11), l'inégalité $ab \leq \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{2}b^2$ et l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)$, ($a, b, c \geq 0$), on trouve

$$\begin{aligned}
& \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_0 \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \\
& \leq \|u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m^0\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u_m^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
& \quad + 4c_1 (\|u_m^0\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{2(\rho+1)} + \|u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Omega|) \\
& \quad + 4c_2 (\|u_m^0\|_{L^{2(q-1)}(\Gamma)}^{2(q-1)} + \|u_m^0\|_{L^2(\Gamma)}^2 + |\Gamma|)
\end{aligned} \tag{2.3.12}$$

Mais, grâce au théorème d'injections de Sobolev, on a

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^\kappa(\Omega)$$

$$\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}.$$

Si on tient compte des valeurs de ρ dans les hypothèses, on déduit

$$2(\rho + 1) < \frac{2n}{n-2} = \kappa, \tag{2.3.13}$$

et par conséquent

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega), \tag{2.3.14}$$

et du théorème de traces, on a les injections suivantes

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Gamma), \tag{2.3.15}$$

$$H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(q-1)}(\Gamma), \tag{2.3.16}$$

2.3. Résultat principal

D'après les convergences (2.3.7), (2.3.8), les injections (2.3.14), (2.3.15) et (2.3.16), il existe une constante positive M' telle que

$$\begin{aligned} & \|u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u_m^0\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|u_m^1\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & + 4c_1(\|u_m^0\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{2(\rho+1)} + \|u_m^0\|_{L^2(\Omega)}^2 + |\Omega|) + 4c_2(\|u_m^0\|_{L^{2(q-1)}(\Gamma)}^{2(q-1)} + \|u_m^0\|_{L^2(\Gamma)}^2 + |\Gamma|) \\ & \leq M'. \end{aligned}$$

Alors, l'équation (2.3.12) peut être écrite comme

$$\begin{aligned} & \|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \\ & \leq M' + c \int_0^t \{ \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 \} ds. \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

Maintenant, on applique le lemme de Grönwall pour avoir la première estimation à priori

$$\|u'_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \leq L_1, \quad (2.3.18)$$

où L_1 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

Deuxième estimation

Premièrement, on montre que $u_m''(0)$ est bornée dans $L^2(\Omega)$. En effet, on multiplie (2.3.6) par $u_{im}''(0)$, on prend $t = 0$ et on somme en i de 1 à m . Compte tenu de la formule de Green et de la condition de compatibilité (2.3.1), on obtient

$$\int_{\Omega} u_m''(0)u_m''(0)dx = - \int_{\Omega} \operatorname{div}(A(x)\nabla u_m(0))u_m''(0)dx - \int_{\Omega} f_1(u_m(0), x)u_m''(0)dx. \quad (2.3.19)$$

2.3. Résultat principal

D'après (2.3.19) et en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, il vient

$$\begin{aligned} \|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq \\ &\left\{ \|\operatorname{div}(A(x)\nabla u_m(0))\|_{L^2(\Omega)} + c_1[\|u_m^0\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{\rho+1} + \|u_m^0\|_{L^2(\Omega)} + 1] \right\} \|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (2.3.20)$$

Puisque $A \in C^\infty$ et d'après (2.3.7), on trouve que $\operatorname{div}(A(x)\nabla u_m(0)) \in L^2(\Omega)$, de l'injection (2.3.14), on déduit $u_m(0) \in L^{2(\rho+1)}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors (2.3.20) donne

$$\|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)} \leq L_2. \quad (2.3.21)$$

où L_2 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

En dérivant (2.3.6) en t , il vient

$$\begin{aligned} &(u_m'''(t), w_j) + \int_{\Omega} \nabla u_m'(t)^T A(x) \nabla w_j dx + \int_{\Gamma} c_3(x) u_m''(t) w_j d\sigma \\ &= - \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(u_m, x) u_m'(t) w_j dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial f_2}{\partial u_m}(u_m, x) u_m'(t) w_j d\sigma. \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

En multipliant (2.3.22) par $2u_m''(t)$, en sommant en i de 1 à m et en utilisant (2.2.3) et (2.2.5), on obtient

$$\begin{aligned} &\frac{d}{dt} \left\{ \|u_m''(t)\|^2 + \lambda \|\nabla u_m'(t)\|^2 \right\} + 2c_0 \int_{\Gamma} |u_m''(t)|^2 d\sigma \\ &\leq -2 \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(u_m, x) u_m'(t) u_m''(t) dx - 2 \int_{\Gamma} \frac{\partial f_2}{\partial u_m}(u_m, x) u_m'(t) u_m''(t) d\sigma \end{aligned} \quad (2.3.23)$$

En intégrant (2.3.23) sur $(0, t)$, en utilisant les hypothèses (2.2.6), (2.2.11) et l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on trouve

$$\begin{aligned} &\|u_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2c_0 \int_0^t \int_{\Gamma} |u_m''(s)|^2 d\sigma ds \\ &\leq \|u_m''(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m'(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + J_1 + J_2, \end{aligned} \quad (2.3.24)$$

où

$$\begin{aligned} J_1 &= -2 \int_0^t \int_{\Omega} \frac{\partial f_1}{\partial u_m}(u_m, x) u'_m(t) u''_m(t) dx ds, \\ J_2 &= -2 \int_0^t \int_{\Gamma} \frac{\partial f_2}{\partial u_m}(u_m, x) u'_m(t) u''_m(t) d\sigma ds. \end{aligned}$$

La convergence (2.3.8) et l'estimation (2.3.21) impliquent l'existence d'une constante positive M'' , telle que

$$\|u''_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \beta \|\nabla u'_m(0)\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq M''. \quad (2.3.25)$$

Maintenant, on détermine des estimations pour les termes J_1 et J_2 :

Si on tient compte des valeurs de ρ dans les hypothèses, on déduit

$$0 < \rho n < \frac{2n}{n-2} = \kappa, \quad (2.3.26)$$

et par conséquent

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^\kappa(\Omega) \hookrightarrow L^{\rho n}(\Omega) \quad (2.3.27)$$

En appliquant l'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} J_1 &\leq 2c \int_0^t \int_{\Omega} (|u_m(s)|^\rho + 1) |u'_m(s)| |u''_m(s)| dx ds \\ &\leq 2c \int_0^t \| |u_m(s)|^\rho \|_{L^n(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^\kappa(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\quad + 2c \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &= 2c \int_0^t \| |u_m(s)|^\rho \|_{L^{\rho n}(\Omega)} \|u'_m(s)\|_{L^\kappa(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\quad + 2c \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds, \end{aligned} \quad (2.3.28)$$

donc, l'injection (2.3.27) implique que

$$\begin{aligned} J_1 &\leq 2c \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)} ds \\ &\leq c \int_0^t (\|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|u''_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2) ds. \end{aligned} \quad (2.3.29)$$

De la même manière, comme $\frac{1}{2} \leq (q-1) \leq \frac{2}{n-2}$ (l'hypothèse sur q), on a

$$\frac{3}{2} \leq \frac{n}{2} \leq (q-1)n \leq \frac{2n}{n-2} = \kappa, \quad n \geq 3,$$

donc, grâce au théorème de traces, on obtient les injections

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^{n(q-1)}(\Gamma). \quad (2.3.30)$$

$$H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \hookrightarrow L^\kappa(\Gamma). \quad (2.3.31)$$

En appliquant l'inégalité de Hölder pour $\frac{1}{\kappa} + \frac{1}{n} + \frac{1}{2} = 1$, on obtient

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2c \int_0^t \int_{\Gamma} (|u_m(s)|^{q-1} + 1) |u'_m(s)| |u''_m(s)| dx ds \\ &\leq 2c \int_0^t \| |u_m(s)|^{q-1} \|_{L^n(\Gamma)} \|u'_m(s)\|_{L^\kappa(\Gamma)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} ds \\ &\quad + 2c \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} ds \\ &= 2c \int_0^t \|u_m(s)\|_{L^{n(q-1)}(\Gamma)}^{q-1} \|u'_m(s)\|_{L^\kappa(\Gamma)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} ds \\ &\quad + 2c \int_0^t \|u'_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} ds, \end{aligned} \quad (2.3.32)$$

Alors, les injections (2.3.30), (2.3.31) et l'inégalité $ab \leq \eta a^2 + \frac{1}{4\eta} b^2$ impliquent que

$$\begin{aligned} J_2 &\leq 2c \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)} \|u''_m(s)\|_{L^2(\Gamma)} ds \\ &\leq \frac{c}{4\eta} \int_0^t \|\nabla u'_m(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 ds + \eta \int_0^t \|u''_m(s)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds. \end{aligned} \quad (2.3.33)$$

En insérant les estimations J_1 et J_2 dans (2.3.24), on en déduit

$$\begin{aligned} & \|u_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (2c_0 - \eta) \int_0^t \int_{\Gamma} |u_m''(t)|^2 d\sigma ds \\ & \leq M'' + c_\eta \int_0^t \left\{ \|u_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} ds, \end{aligned} \quad (2.3.34)$$

et par conséquent, pour η assez petit, on trouve

$$\begin{aligned} & \|u_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \int_{\Gamma} |u_m''(t)|^2 d\sigma ds \\ & \leq M'' + c_\eta \int_0^t \left\{ \|u_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} ds, \end{aligned} \quad (2.3.35)$$

Maintenant, on applique le lemme de Grönwall pour avoir la deuxième estimation à priori

$$\|u_m''(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla u_m'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|u_m''(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \leq L_3, \quad (2.3.36)$$

où L_3 est une constante positive indépendante de $m \in \mathbb{N}$.

2.3.2 Passage à la limite

D'après les estimations précédentes (2.3.18) et (2.3.36), on a

$$u_m \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad (2.3.37)$$

$$u_m' \in L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)), \quad (2.3.38)$$

$$u_m'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.39)$$

$$u_m'' \in L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)), \quad (2.3.40)$$

(on peut facilement démontrer que $u_{m'} \in H^2(\Omega)$ i.e. $\Delta u_{m'} \in L^2(\Omega)$, en prenant $A(x) = I$, voir cf. Lions [61, p. 19]).

2.3. Résultat principal

comme $H^1(\Omega) \hookrightarrow H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)$, on a également

$$u_m \in L^\infty(0, T; H^{\frac{1}{2}}(\Gamma)), \quad (2.3.41)$$

et par conséquent, on peut extraire une sous suite de u_m , notée par $u_{m'}$, telle que

$$u_{m'} \rightharpoonup u \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)), \quad (2.3.42)$$

$$u_{m'}'' \rightharpoonup u'' \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.43)$$

$$u_{m'}' \rightharpoonup u' \quad \text{faiblement}^* \text{ dans } L^\infty(0, T; H_{\Gamma_0}^1(\Omega)). \quad (2.3.44)$$

De (2.3.37)-(2.3.41), et puisque les deux injections $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ et $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma) \hookrightarrow L^2(\Gamma)$ sont compactes, on peut appliquer le théorème de Aubin-Lions [61, Théorème 5.1] pour obtenir

$$u_{m'} \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)), \quad (2.3.45)$$

$$u_{m'} \rightarrow u \quad \text{fortement dans } L^2(0, T; L^2(\Gamma)). \quad (2.3.46)$$

Prenons $u_m = u_{m'}$ dans (2.3.6), on en déduit

$$\begin{aligned} & (u_{m'}''(t), w_j) + \int_{\Omega} \nabla u_{m'}(t)^T A(x) \nabla w_j dx + \int_{\Omega} f_1(u_{m'}(t), x) w_j dx \\ & + \int_{\Gamma} f_2(u_{m'}(t), x) w_j d\sigma + \int_{\Gamma} c_3(x) u_{m'}'(t) w_j d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.3.47)$$

Grâce à (2.3.42) et (2.3.44), on a les convergences suivantes

$$(u_{m'}'', w_j) \rightarrow (u'', w_j) \quad \text{dans } L^\infty(0, T), \quad (2.3.48)$$

$$\int_{\Omega} \nabla u_{m'}^T A(x) \nabla w_j dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u^T A(x) \nabla w_j dx \quad \text{dans } L^\infty(0, T), \quad (2.3.49)$$

$$\int_{\Gamma} c_3(x) u'_m w_j d\sigma \rightarrow \int_{\Gamma} c_3(x) u'_m w_j d\sigma \quad \text{dans } L^\infty(0, T), \quad (2.3.50)$$

Analyse des termes non linéaires f_1 et f_2

D'après la convergence forte (2.3.45) et la continuité de $f_1(u, x)$ en u , on a

$$f_1(u_m, x) \rightarrow f_1(u, x) \quad \text{p.p. dans } \Omega \times (0, \infty). \quad (2.3.51)$$

D'autre part, en tenant compte de l'hypothèse (2.2.6), des injections $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ et $H^1_{\Gamma_0}(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega)$ et de l'inégalité $(a + b + c)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)$, ($a, b, c \geq 0$), on trouve

$$\begin{aligned} \|f_1(u_{m'}, x)\|_{L^2(\Omega)}^2 &\leq 4c_1^2 \int_{\Omega} \left\{ |u_{m'}|^{2(\rho+1)} + |u_{m'}|^2 + 1 \right\} dx \\ &\leq 4c_1^2 \|u_{m'}(t)\|_{L^{2(\rho+1)}(\Omega)}^{2(\rho+1)} + 4c_1^2 \|u_{m'}(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + 4c_1^2 |\Omega| \\ &\leq 4c_1^2 \|\nabla u_{m'}(t)\|_{L^2(\Omega)}^{2(\rho+1)} + 4c_1^2 |\Omega|, \end{aligned}$$

et par conséquent, en utilisant l'estimation à priori (2.3.18), il existe une constante positive L_2 , telle que

$$\|f_1(u_m, x)\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega))} \leq L_2. \quad (2.3.52)$$

En combinant les deux résultats (2.3.51), (2.3.52) et en appliquant le lemme de Lions [61, Lemme 1.3], il en résulte que

$$f_1(u_m, x) \rightharpoonup f_1(u, x) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Omega)). \quad (2.3.53)$$

De la même manière, d'après la convergence forte (2.3.46) et en considérant la continuité de $f_2(u, x)$ en u , on a

$$f_2(u_{m'}, x) \rightarrow f_2(u, x) \quad \text{p.p. dans } \Gamma \times (0, \infty). \quad (2.3.54)$$

2.3. Résultat principal

D'autre part, en tenant compte de l'hypothèse (2.2.11) et de l'inégalité

$(a + b + c)^2 \leq 4(a^2 + b^2 + c^2)$, on trouve

$$\begin{aligned}
\|f_2(u_{m'}, x)\|_{L^2(\Gamma)}^2 &\leq \int_{\Gamma} |f_2(u_{m'}, x)|^2 d\sigma \\
&\leq 4c_2^2 \int_{\Gamma} (|u_{m'}(t)|^{2(q-1)} + |u_{m'}(t)|^2 + 1) d\sigma \\
&\leq 4c_2^2 |\Gamma| + 4c_2^2 \|u_{m'}(t)\|_{L^{2(q-1)}(\Gamma)}^{2(q-1)} + 4c_2^2 \|u_{m'}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2,
\end{aligned} \tag{2.3.55}$$

Puisque $H^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2(q-1)}(\Gamma)$, il est clair que

$$\|f_2(u_{m'}, x)\|_{L^2(\Gamma)}^2 \leq 4c_2^2 |\Gamma| + 4c_2^2 \|u_m(t)\|_{H^1(\Omega)}^{2(q-1)} + 4c_2^2 \|u_{m'}(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2, \tag{2.3.56}$$

et par conséquent, en utilisant l'estimation à priori (2.3.18), il existe une constante positive L_3 , telle que

$$\|f_2(u_{m'}, x)\|_{L^2(0,T;L^2(\Gamma))} \leq L_3, \tag{2.3.57}$$

En combinant les deux résultats (2.3.54), (2.3.57) et en appliquant [61, Lemme 1.3], il en résulte que

$$f_2(u_{m'}, x) \rightharpoonup f_2(u, x) \quad \text{faiblement dans } L^2(0, T; L^2(\Gamma)). \tag{2.3.58}$$

Grâce aux convergences (2.3.48)-(2.3.50), (2.3.53), et (2.3.58) et par passage à la limite dans (2.3.47) et de la densité de la base $w_1 \cdots w_m$ dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, on déduit

$$\begin{aligned}
&(u''(t), v(t)) + \int_{\Omega} \nabla u(t)^T A(x) \nabla v(t) dx + (f_1(u, x), v(t)) + \int_{\Gamma} f_2(u, x) v(t) d\sigma \\
&+ \int_{\Gamma} c_3(x) u' v(t) d\sigma = 0, \quad \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).
\end{aligned} \tag{2.3.59}$$

Il nous reste à vérifier que les conditions initiales $u(x, 0) = u^0(x)$ et $u'(x, 0) = u^1(x)$ ont lieu.

D'après les convergences (2.3.42), (2.3.44) et en utilisant [61, Lemme 1.2], on a, en particulier $u_{m'}(x, 0) \rightharpoonup u(x, 0)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, et (2.3.7) implique que

$u_{m'}(x, 0) = u_{m'}^0 \rightarrow u^0$ dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$, alors $u(x, 0) = u^0(x)$.

De la même manière, on a $u'_{m'}(x, 0) \rightarrow u'(x, 0)$ faiblement dans $L^2(\Omega)$, et (2.3.8) implique que $u'_{m'}(x, 0) = u_{m'}^1 \rightarrow u^1$ dans $H_{\Gamma_0}^1(\Omega)$, alors $u'(x, 0) = u^1(x)$.

2.3.3 Unicité

Maintenant, on prouve l'unicité du problème (2.2.1). Soient u_1 et u_2 deux solutions différentes du problème (\mathcal{P}), alors $z = u_1 - u_2$ vérifie le problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } z \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \text{ telle que} \\ (z'', v) + \int_{\Omega} \nabla z^T A(x) \nabla v dx + \int_{\Omega} [f_1(u_1, x) - f_1(u_2, x)] v dx \\ + \int_{\Gamma} [f_2(u_1, x) - f_2(u_2, x)] v d\sigma + \int_{\Gamma} c_3(x) z' v d\sigma = 0, \\ \forall v \in H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \\ z(x, 0) = z'(x, 0) = 0, \quad x \in \Omega. \end{array} \right. \quad (2.3.60)$$

Prenons $v = 2z'(t)$ dans (2.3.60), on obtient

$$\begin{aligned} (z''(t), 2z'(t)) + 2 \int_{\Omega} \nabla z(t)^T A(x) \nabla z'(t) dx + 2 \int_{\Omega} [f_1(u_1, x) - f_1(u_2, x)] z'(t) dx \\ + 2 \int_{\Gamma} [f_2(u_1, x) - f_2(u_2, x)] z'(t) d\sigma + \int_{\Gamma} c_3(x) |z'(t)|^2 d\sigma = 0. \end{aligned} \quad (2.3.61)$$

Mais, d'après la symétrie de A , l'équation (2.3.61) équivaut à

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left\{ \|z'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} \nabla z(t)^T A(x) \nabla z(t) dx \right\} + \int_{\Gamma} c_3(x) |z(t)|^2 d\sigma \\ = - \int_{\Omega} [f_1(u_1, x) - f_1(u_2, x)] z'(t) dx + \int_{\Gamma} [f_2(u_1, x) - f_2(u_2, x)] z'(t) d\sigma. \end{aligned} \quad (2.3.62)$$

2.3. Résultat principal

En intégrant sur $(0, t)$ et en considérant la condition elliptique sur A , il est clair que

$$\|z'(s)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + c_0 \int_0^t \|z'(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \leq J_3 + J_4 \quad (2.3.63)$$

où

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_0^t \int_{\Omega} [f_1(u_1, x) - f_1(u_2, x)] z'(t) dx dt, \\ J_4 &= \int_0^t \int_{\Gamma} [f_2(u_1, x) - f_2(u_2, x)] z'(t) d\sigma dt. \end{aligned}$$

Maintenant, on va démontrer des estimations pour J_3 et J_4 :

En utilisant l'hypothèse (2.2.6), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité

$|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$, on trouve

$$\begin{aligned} J_3 &\leq c_1 \int_0^t \int_{\Omega} \left\{ |u_1(t) - u_2(t)|^{\rho+1} + |u_1(t) - u_2(t)| \right\} |z'(t)| dx dt \\ &\leq c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |z(t)|^{2(\rho+1)} dx dt + c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |z(t)|^2 dx dt + c_1 \int_0^t \int_{\Omega} |z'(t)|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.64)$$

comme $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \subset L^{2(\rho+1)}(\Omega) \subset L^2(\Omega)$, alors (2.3.64) s'écrit

$$J_3 \leq c_1 \int_0^t \|z'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + c_1 \int_0^t \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \quad (2.3.65)$$

De la même manière, en utilisant l'hypothèse (2.2.11), l'inégalité de Cauchy-Schwarz et l'inégalité $|\|u\| - \|v\|| \leq \|u - v\|$, on trouve

$$\begin{aligned} J_4 &\leq c_2 \int_0^t \int_{\Gamma} \left\{ |u_1(t) - u_2(t)|^{q-1} + |u_1(t) - u_2(t)| \right\} |z'(t)| dx dt \\ &\leq \frac{c_2}{4\eta} \int_0^t \int_{\Gamma} |z(t)|^{2(q-1)} dx dt + \frac{c_2}{4\eta} \int_0^t \int_{\Gamma} |z(t)|^2 dx dt + \eta \int_0^t \int_{\Gamma} |z'(t)|^2 dx dt, \end{aligned} \quad (2.3.66)$$

2.3. Résultat principal

comme $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \subset L^{2(q-1)}(\Gamma)$ et $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \subset L^2(\Gamma)$, alors (2.3.66) s'écrit

$$J_4 \leq \eta \int_0^t \|z'(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 dt + c_\eta \int_0^t \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 dt, \quad (2.3.67)$$

En insérant les estimations J_3 et J_4 dans (2.3.63), on en déduit

$$\begin{aligned} & \|z'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \lambda \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + (2c_0 - \eta) \int_0^t \int_\Gamma |z'(t)|^2 d\sigma ds \\ & \leq c_\eta \int_0^t \left\{ \|z'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 \right\} ds, \end{aligned} \quad (2.3.68)$$

Maintenant, on applique le lemme de Grönwall pour obtenir l'inégalité suivante

$$\|z'(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla z(t)\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_0^t \|z'(t)\|_{L^2(\Gamma)}^2 ds \leq 0, \quad (2.3.69)$$

donc,

$$z = 0,$$

par conséquent,

$$u_1 = u_2,$$

d'où, l'unicité du problème (2.2.1). Ceci achève la démonstration du Théorème 2.3.1. \square

Chapitre 3

Stabilisation uniforme de l'équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec des conditions aux limites non-linéaires

3.1 Position du problème

Dans la suite, on note $Q = \Omega \times]0, T[$, $\Sigma = \Gamma \times]0, T[$, $\Sigma_i = \Gamma_i \times]0, T[$, $i = 0, 1$ et $\|u\|_{L^p(\Omega)}^p = \int_{\Omega} |u|^p dx$, pour $1 \leq p < \infty$. Considérons l'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

muni du produit scalaire

$$\langle U, V \rangle_{\mathcal{H}} = \int_{\Omega} \nabla u_1^T \cdot A(x) \cdot \nabla u_2 dx + \int_{\Omega} v_1 v_2 dx,$$

où $U = (u_1, v_1)^T$, $V = (u_2, v_2)^T$.

Soit Ω un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^n dont la frontière Γ est de classe C^2 . Supposons que $\Gamma = \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, où Γ_0 et Γ_1 sont deux sous ensembles de Γ avec $\overline{\Gamma_0} \cap \overline{\Gamma_1} = \emptyset$. De plus, on suppose que $mes(\Gamma_0) \neq 0$.

Considérons le problème suivant

$$\begin{cases} u'' + \mathcal{A}u + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -f_2(u, x) - c_3(x)u' & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega. \end{cases} \quad (3.1.1)$$

où

$$\mathcal{A}u = -\operatorname{div}(A(x)\nabla u), \quad x = [x_1, \dots, x_n], \quad (3.1.2)$$

$A = (a_{ij})$ est une matrice de fonctions de classe C^∞ dans \mathbb{R}^n , telle que $a_{ij} = a_{ji}$. ν est le vecteur unitaire normal à Γ orienté vers l'extérieur de Ω et $\nu_{\mathcal{A}} = A\nu$. Afin d'obtenir la stabilisation uniforme du problème (3.1.1), nous devons ajouter aux hypothèses (A1)–(A4) (qui viennent dans le chapitre 3), l'hypothèse suivante

(A5) Il existe un champ de vecteurs H sur la variété riemannienne (\mathbb{R}^n, g) tel que

$$DH(X, X) \geq b|X|_g^2, \quad \forall X \in \mathbb{R}_x^n, \quad x \in \bar{\Omega} \quad (3.1.3)$$

pour une certaine constante $b > 0$.

On suppose aussi que H satisfait à

$$H \cdot \nu \leq 0 \quad \text{if } x \in \Gamma_0, \quad (3.1.4)$$

$$H \cdot \nu \geq \delta > 0 \quad \text{if } x \in \Gamma_1, \quad \text{pour certaine } \delta > 0. \quad (3.1.5)$$

Remarque 3.1.1. L'existence d'un champ de vecteurs vérifie (A5) a été établi dans [95], où quelques exemples sont donnés. En particulier, pour $\mathcal{A} = I$, on peut prendre $H = x - x_0$.

La figure suivante (Fig 3.1) représente un exemple d'un domaine Ω satisfaisant aux conditions précédentes.

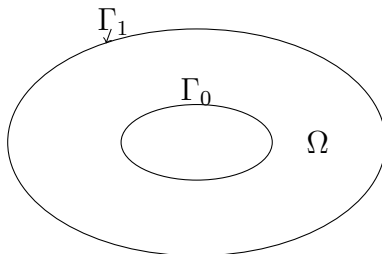


Fig. 3.1

Notre objectif principal dans ce chapitre est de prouver la stabilisation uniforme pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables et une condition au bord non linéaire $f_2(u, x)$ en présence d'un terme source et d'un feedback frontière $c_3(x)u'$. On établit sous les hypothèses précédentes (A1)–(A5) que l'énergie associée au problème (3.1.1) décroît de manière exponentielle vers 0 lorsque $t \rightarrow \infty$ (Théorème 3.2.1). Pour y parvenir, on combine la géométrie riemannienne, développée par P.F. Yao dans [95] et la méthode développée par I. Lasiecka dans [47] et puis par I. Lasiecka et D. Tataru dans [48], et on termine la démonstration en utilisant la théorie des semi-groupes.

3.2 Résultat principal

Dans cette section on présente le résultat principal de la stabilisation uniforme pour l'équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables.

En multipliant la première équation dans le problème (3.1.1) par u' , en intégrant sur Ω et en utilisant la formule de Green, il vient

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx + \int_{\Omega} F_1(u, x) dx + \int_{\Gamma_1} F_2(u, x) d\sigma \right\} \\ & = -c_3(x) \|u'\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 = E'(t). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

3.3. Démonstration du résultat principal

L'énergie E est définie par

$$E(t) = \frac{1}{2} \left\{ \|u'\|_{L^2(\Omega)}^2 + \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx \right\} + \int_{\Omega} F_1(u, x) dx + \int_{\Gamma_1} F_2(u, x) d\sigma.$$

En intégrant (3.2.1) sur $(0, t)$, on a

$$E(t) - E(0) = -c_3(x) \int_0^t \|u'\|_{L^2(\Gamma_1)}^2 ds \leq 0, \quad \forall t > 0. \quad (3.2.2)$$

Par conséquent, l'énergie est une fonction décroissante par rapport au temps.

Notre résultat de la stabilisation est le suivant.

Théorème 3.2.1. Supposons que (A1)–(A4) sont vérifiées. Soient u la solution du problème (3.1.1) et H un champ de vecteurs sur la variété riemannienne (\mathbb{R}^n, g) satisfaisant à (A5). Alors, pour toute constante $M > 1$, il existe une constante $w > 0$ telle que

$$E(t) \leq M e^{-wt} E(0), \quad \forall t \geq 0. \quad (3.2.3)$$

3.3 Démonstration du résultat principal

Dans cette partie, nous démontrerons le Théorème 3.2.1 en plusieurs étapes, pour cela, nous avons besoin d'énoncer certains résultats.

Lemme 3.3.1. [95, Proposition 2.1, Partie 1] Soient u une solution du problème suivant

$$u'' + \mathcal{A}u + f_1(u, x) = 0, \quad \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \quad (3.3.1)$$

3.3. Démonstration du résultat principal

et H un champ de vecteurs dans $\overline{\Omega}$. Alors

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(u) d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) H \cdot \nu d\sigma dt \\
&= \int_{\Omega} u' H(u)|_0^T + \int_0^T \int_{\Omega} DH(\nabla_g u, \nabla_g u) dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) \operatorname{div}_0 H dx dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) H(u) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Démonstration. On multiplie (3.3.2) par $H(u)$ et on intègre dans Ω , on trouve

$$\int_{\Omega} u'' H(u) dx + \int_{\Omega} \mathcal{A}u H(u) dx + \int_{\Omega} f_1(u, x) H(u) dx = 0. \tag{3.3.3}$$

En utilisant la formule de Green et le Lemme 1.5.1, les parties (1.5.10), (1.5.12) et (1.5.13), on obtient

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \mathcal{A}u H(u) dx &= \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_i} (H(u)) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(u) d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \nabla_g u (H(u)) dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(u) d\sigma \\
&= \int_{\Omega} \langle \nabla_g u, \nabla_g (H(u)) \rangle_g dx - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(u) d\sigma \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} DH(\nabla_g u, \nabla_g u) dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} |\nabla_g u|_g^2 H \cdot \nu d\sigma dt - \int_{\Gamma} \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} H(u) d\sigma \\
&- \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 \operatorname{div}_0 (H) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

3.3. Démonstration du résultat principal

D'autre part, on intègre par partie et on tient compte de (1.5.18), on déduit

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} u'' H(u) dx \\
&= \int_{\Omega} u' H(u) \Big|_0^T dx - \int_{\Omega} \int_0^T u' H(u') dt dx \\
&= (u', H(u)) \Big|_0^T dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \int_0^T H((u')^2) dx dt \\
&= (u', H(u)) \Big|_0^T dx + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} (u')^2 \operatorname{div}_0(H) dx dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma} (u')^2 H \cdot \nu d\sigma dt.
\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Les équations (3.3.5) et (3.3.4), ainsi que (3.3.1), donnent (3.3.2). \square

Lemme 3.3.2. Soit u une solution du problème (3.1.1) et $P \in C^2(\overline{\Omega})$. Alors

$$\begin{aligned}
& \int_0^T \int_{\Omega} P(|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) dx dt = (u', uP) \Big|_0^T + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u^2 \mathcal{A}P dx dt \\
&+ \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} u^2 \nabla_g P \cdot \nu d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) uP d\sigma dt \\
&- \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' uP d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) uP dx dt.
\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Démonstration. On utilise ici la même technique comme dans [95, Proposition 2.1, Partie 2].

Du Lemme 1.5.1, on a

$$\mathcal{A}P = - \sum_{i=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial P}{\partial x_j} \right) = \operatorname{div}_0(A(x) \nabla_0 P), \tag{3.3.7}$$

D'après (3.3.7) et la formule (1.5.18), on obtient

$$\begin{aligned}
\langle \nabla_g u, \nabla_g(Pu) \rangle_g(x) &= P |\nabla_g u|_g^2(x) + u \langle \nabla_g u, \nabla_g P \rangle_g(x) \\
&= P |\nabla_g u|_g^2 + \frac{1}{2} \nabla_g P(u^2) \\
&= P |\nabla_g u|_g^2 + \frac{1}{2} \operatorname{div}_0(u^2 \nabla_g P) + \frac{1}{2} u^2 \mathcal{A}P,
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

3.3. Démonstration du résultat principal

Il résulte de (3.3.1), (1.5.19), (3.3.8) et de la formule de Green que

$$\begin{aligned}
(u', uP)|_0^T &= \int_0^T [(u_{tt}, uP) + (u', u'P)] dt \\
&= \int_0^T [(-\mathcal{A} - f_1(u, x), uP) + (u', u'P)] dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} [-\langle \nabla_g u, \nabla_g(uP) \rangle_g - f_1(u, x)uP + |u'|^2 P] dx dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x)uP d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x)u'uP d\sigma dt \\
&= \int_0^T \int_{\Omega} P(|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) dx dt - \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x)uP d\sigma dt \\
&\quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} u^2 \mathcal{A} P dx dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} u^2 \nabla_g P \cdot \nu d\sigma dt \\
&\quad - \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x)uP dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x)u'uP d\sigma dt.
\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

L'équation (3.3.6) se déduit de (3.3.9). \square

Maintenant, nous traitons les valeurs de $|\nabla_g u|_g^2$ et de $H(u)$ sur le bord Γ (voir [56], [95]).

Pour $x \in \Gamma$, le vecteur $\nabla_g u$ se décompose en la somme directe dans (\mathbb{R}_x^n, g) comme suit

$$\nabla_g u(x) = \left\langle \nabla_g u(x), \frac{\nu_{\mathcal{A}}(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} \right\rangle_g \frac{\nu_{\mathcal{A}}(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g} + \nabla_{g\tau} u, \tag{3.3.10}$$

où $\nabla_{g\tau} u$ représente le gradient tangentiel. Il résulte de (3.3.10) que

$$\begin{aligned}
|\nabla_g u|_g^2 &= \nabla_g u(u) = \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \langle \nabla_g u(x), \nu_{\mathcal{A}}(x) \rangle_g^2 + |\nabla_{g\tau} u|_g^2 \\
&= \frac{1}{|\nu_{\mathcal{A}}|_g^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right)^2 + |\nabla_{g\tau} u|_g^2.
\end{aligned} \tag{3.3.11}$$

De la même façon, H peut s'écrire comme suit

$$H(u) = \langle \nabla_g u, H \rangle_g = \frac{H(x) \cdot \nu(x)}{|\nu_{\mathcal{A}}(x)|_g^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right) + \langle \nabla_{g\tau} u, H \rangle_g. \tag{3.3.12}$$

3.3. Démonstration du résultat principal

En substituant $P = \frac{1}{2}\operatorname{div}_0 H$ dans le Lemme 3.3.2 (Eq. (3.3.6)), on trouve

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} \operatorname{div}_0 H (|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) dx dt \\
&= \frac{1}{2} (u', u \operatorname{div}_0 H)|_0^T + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} u^2 \mathcal{A} \operatorname{div}_0 H dx dt \\
& \quad + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Gamma_1} u^2 \nabla_g \operatorname{div}_0 H \cdot \nu d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) u \operatorname{div}_0 H d\sigma dt \\
& \quad - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' u \operatorname{div}_0 H d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) u \operatorname{div}_0 H dx dt.
\end{aligned} \tag{3.3.13}$$

En combinant (3.3.13) avec le Lemme 3.3.1, il vient

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) H \cdot \nu d\sigma dt = \int_{\Omega} u' H(u)|_0^T + \frac{1}{2} (u', u \operatorname{div}_0 H)|_0^T \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) H(u) dx dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) u \operatorname{div}_0 H dx dt \\
& \quad + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} u^2 \mathcal{A} \operatorname{div}_0 H dx dt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Gamma_1} u^2 \nabla_g \operatorname{div}_0 H \cdot \nu d\sigma dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) H(u) d\sigma dt + \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) u \operatorname{div}_0 H d\sigma dt \\
& \quad - \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' H(u) d\sigma dt - \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' u \operatorname{div}_0 H d\sigma dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Omega} DH(\nabla_g u, \nabla_g u) dx dt.
\end{aligned} \tag{3.3.14}$$

Maintenant, estimons les termes du membre de droite de (3.3.14), grâce à l'inégalité Cauchy-Schwarz, on a

$$\int_{\Omega} u' H(u)|_0^T + \frac{1}{2} (u', u \operatorname{div}_0 H)|_0^T \leq C[E(0) + E(T)] \tag{3.3.15}$$

et

$$\begin{aligned}
& \left| \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Omega} u^2 \mathcal{A} \operatorname{div}_0 H dx dt + \frac{1}{4} \int_0^T \int_{\Gamma_1} u^2 \nabla_g \operatorname{div}_0 H \cdot \nu d\sigma dt \right| \\
& \leq C \int_0^T \int_{\Omega} u^2 dx dt + C \int_0^T \int_{\Gamma_1} u^2 d\sigma dt
\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

où C représente une constante positive qui peut être différente selon différents endroits.

3.3. Démonstration du résultat principal

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz et l'hypothèse (A4), on a

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' H(u) d\sigma dt \right| \\ & \leq C \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) |\nabla_g u|_g^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) |u'|^2 d\sigma dt \right], \end{aligned} \quad (3.3.17)$$

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' u \operatorname{div}_0 H d\sigma dt \right| \\ & \leq C \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) |u|^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) |u'|^2 d\sigma dt \right], \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) H(u) d\sigma dt \right| \\ & \leq C \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} |\nabla_g u|_g^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} (|u|^{2(q-1)} + |u|^2 + 1) d\sigma dt \right], \end{aligned} \quad (3.3.19)$$

et

$$\left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) u \operatorname{div}_0 H d\sigma dt \right| \leq C \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} (|u|^{2(q-1)} + |u|^2 + 1) d\sigma dt \right]. \quad (3.3.20)$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz, l'inégalité $ab \leq \varepsilon a^2 + \frac{1}{4\varepsilon} b^2$, $a, b, \varepsilon > 0$ et l'hypothèse (A3), on trouve

$$\begin{aligned} & \left| \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) H(u) dx dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx dt + \frac{C}{4\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} (|u|^{2(\rho+1)} + |u|^2 + 1) dx dt, \end{aligned} \quad (3.3.21)$$

et

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{2} \int_0^T \int_{\Omega} f_1(u, x) u \operatorname{div}_0 H dx dt \right| \\ & \leq \varepsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx dt + \frac{C}{4\varepsilon} \int_0^T \int_{\Omega} (|u|^{2(\rho+1)} + |u|^2 + 1) dx dt, \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

pour tout ε , en insérant (3.3.15)-(3.3.21) et (3.3.22) dans (3.3.14), de (3.1.3) et en utilisant

3.3. Démonstration du résultat principal

le fait que $H \cdot \nu \geq 0$ sur Γ_1 et $u = 0$ sur Γ_0 , on obtient

$$\begin{aligned}
& b \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx dt \\
& \leq C \left[\int_0^T \int_{\Omega} 2\varepsilon |\nabla_g u|_g^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \{c_3(x)|u'|^2 + [c_3(x) + 1]|\nabla_g u|_g^2\} d\sigma dt \right. \\
& \quad \left. + E(0) + E(T) \right] + C \left[\int_0^T \int_{\Omega} \{|u|^{2(\rho+1)} + [c_3(x) + 1]|u|^2 + 1\} dx dt \right. \\
& \quad \left. + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \{|u|^2 + |u|^{2(q-1)} + 1\} d\sigma dt \right]. \tag{3.3.23}
\end{aligned}$$

D'après [55, Lemma 7.2], on a

$$\begin{aligned}
& \int_{\tau}^{T-\tau} \int_{\Gamma_1} |\nabla_{g\tau} u|_g^2 d\sigma dt \\
& \leq C_{\tau, \ell, \rho} \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left\{ \left| \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}} \right|^2 + |u'|^2 \right\} d\sigma dt + C_T \|u\|_{L^2(0, T; H^{1/2+\ell}(\Omega))} \right. \\
& \quad \left. + \int_0^T \int_{\Omega} |f_1(u, x)|^2 dx dt \right], \tag{3.3.24}
\end{aligned}$$

où $\tau, \ell > 0$ sont arbitrairement petits et ρ comme dans l'hypothèse. On applique (3.3.23), en remplaçant $(0, T)$ par $(\tau, T - \tau)$ et en tenant compte de la décomposition dans (3.3.11) et du résultat de régularité dans (3.3.24), on obtient

$$\begin{aligned}
& b \int_{\tau}^{T-\tau} \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx dt \\
& \leq C \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} \{[c_3^2(x) + c_3(x) + 1]|u'|^2\} d\sigma dt + E(0) + E(T) + R(u) \right],
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
R(u) &= \int_0^T \int_{\Omega} \{|u|^{2(\rho+1)} + |u|^2 + 1\} dx dt \\
& \quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \{|u|^2 + |u|^{2(q-1)} + 1\} d\sigma dt + \|u\|_{L^2(0, T; H^{1/2+\ell}(\Omega))}.
\end{aligned}$$

3.3. Démonstration du résultat principal

D'autre part, pour τ fixée

$$b \left\{ \int_0^\tau \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 dx dt + \int_{T-\tau}^T \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 dx dt \right\} \leq 2b\tau E(0).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} & b \int_0^T \int_\Omega |\nabla_g u|_g^2 dx dt \\ & \leq C \left[\int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x) |u'|^2 d\sigma dt + E(0) + E(T) + R(u) \right], \end{aligned} \quad (3.3.25)$$

où $c(x)$ est une fonction positive définie par

$$c(x) = c_3^2(x) + c_3(x) + 1. \quad (3.3.26)$$

Choisissons $P = \frac{1}{2}b$, où b est une constante positive donnée dans (3.1.3). D'après le Lemme 3.3.2, on a

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}b \int_0^T \int_\Omega (|u'|^2 - |\nabla_g u|_g^2) dx dt = \frac{1}{2}b(u', u)|_0^T + \frac{1}{2}b \int_0^T \int_\Omega f_1(u, x) u dx dt \\ & + \frac{1}{2}b \int_0^T \int_{\Gamma_1} f_2(u, x) u d\sigma dt + \frac{1}{2}b \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) u' u d\sigma dt \\ & \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) |u'|^2 d\sigma dt + E(0) + E(T) + R(u) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.27)$$

En combinant (3.3.14)-(3.3.27), on obtient

$$\int_0^T E(t) dt \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x) |u'|^2 d\sigma dt + E(0) + E(T) + R(u) \right\}. \quad (3.3.28)$$

On estime maintenant $R(u)$ en fonction de

$$\int_0^T \int_\Omega |u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt + E(0).$$

Proposition 3.1. Soit Ω un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^n dont la frontière Γ est de classe C^2 . Soit T assez grand. Alors, pour chaque solution u de (3.1.1), on a l'estimation suivante

$$R(u) \leq C_T(E(0)) \left\{ \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt + E(0) \right\}. \quad (3.3.29)$$

où la constante $C_T(E(0))$ demeure bornée pour une valeur bornée de $E(0)$.

Démonstration. On rappelle que

$$\begin{aligned} R(u) &= \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ |u|^{2(\rho+1)} + |u|^2 + 1 \right\} dxdt \\ &\quad + \int_0^T \int_{\Gamma_1} \left\{ |u|^2 + |u|^{2(q-1)} + 1 \right\} d\sigma dt + \|u\|_{L^2(0,T;H^{1/2+\ell}(\Omega))}. \end{aligned} \quad (3.3.30)$$

Notons que $H_{\Gamma_0}^1(\Omega) \subset L^{2(\rho+1)}(\Omega)$ et considérons l'hypothèse (2.2.9), (2.2.13), on obtient

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u|^{2(\rho+1)} dxdt \leq C \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dxdt \leq CTE(0). \quad (3.3.31)$$

Grâce au théorème de traces et à l'hypothèse (A4), on a $H^1(\Omega) \subset L^{2(q-1)}(\Gamma_1)$, donc

$$\begin{aligned} &\int_0^T \int_{\Gamma_1} \left\{ |u|^2 + |u|^{2(q-1)} \right\} d\sigma dt \\ &\leq C \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt + C \int_0^T \int_{\Omega} \left\{ |u|^2 + |\nabla_g u|_g^2 \right\} dxdt \\ &\leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dxdt + E(0) \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.32)$$

Puisque $E(0) > 0$, il est clair que

$$\int_0^T \int_{\Omega} 1 dxdt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} 1 d\sigma dt = \frac{(|\Omega| + |\Gamma_1|)}{E(0)} .TE(0) \leq C_T E(0). \quad (3.3.33)$$

D'après [48], on a

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^{1/2+\ell}(\Omega))} \leq \epsilon \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla_g u|_g^2 dx dt + \frac{C}{4\epsilon} \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt. \quad (3.3.34)$$

En combinant (3.3.30)–(3.3.34) et en choisissant ϵ assez petit, on trouve (3.3.29). \square

Par conséquent, (3.3.28) devient

$$\begin{aligned} \int_0^T E(t) dt \leq C \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x) |u'|^2 d\sigma dt + E(0) + E(T) \right. \\ \left. + \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.35)$$

En appliquant la relation de dissipation (3.2.2), i.e. $\forall T \geq 0$,

$$E(0) = E(T) + \int_0^T \int_{\Gamma_1} c_3(x) |u'|^2 d\sigma dt, \quad (3.3.36)$$

on obtient

Proposition 3.2. Pour T assez grand, l'estimation suivante a lieu, pour la solution u de

(3.1.1)

$$\begin{aligned} E(T) \leq C_T (E(0)) \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x) |u'|^2 d\sigma dt \right. \\ \left. + \int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt \right\}, \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

où la constante $C_T (E(0))$ demeure bornée pour une valeur bornée de $E(0)$.

3.3.1 Absorption des termes d'ordre inférieur

Maintenant, nous allons procéder à l'élimination des termes d'ordre inférieur $\int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt$ et $\int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt$ qui apparaissent dans le membre de droite de (3.3.37) en utilisant un argument de 'compacité-unicité' non linéaire comme dans I. Lasiecka [47] et Lasiecka et al. [48].

3.3. Démonstration du résultat principal

Lemme 3.3.3. Soit Ω un domaine ouvert et borné de \mathbb{R}^n dont la frontière Γ est de classe C^2 . Soit u la solution de (3.1.1). Alors, l'estimation suivante a lieu pour un temps T assez grand

$$\int_0^T \int_{\Omega} |u|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u|^2 d\sigma dt \leq C(E(0)) \int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x) |u'|^2 d\sigma dt, \quad (3.3.38)$$

où la constante $C(E(0))$ demeure bornée pour une valeur bornée de $E(0)$.

Démonstration. On utilise ici la preuve par l'absurde. si le Lemme 3.3.3 est faux, alors, il existe une sous suite $\{(u_l(0), u_l'(0))\}_{l=1}^{\infty}$ et une suite correspondante $\{(u_l(t), u_l'(t))\}_{l=1}^{\infty}$ qui vérifie pour tout l ,

$$\begin{cases} u_l'' + \mathcal{A}u_l + f_1(u_l, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u_l(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u_l}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -f_2(u_l, x) - c_3(x)u_l' & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u_l(x, 0) = u_l^0, \quad u_l'(x, 0) = u_l^1(x) & \text{dans } \Omega, \end{cases} \quad (3.3.39)$$

avec

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \frac{\int_0^T \int_{\Omega} |u_l|^2 dx dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u_l|^2 d\sigma dt}{\int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x) |u_l'|^2 d\sigma dt} = \infty \quad (3.3.40)$$

et la suite d'énergie initiale $\{(u_l(0), u_l'(0))\}_{l=1}^{\infty}$ notée par $E(u_l(0))$ est uniformément bornée en l .

D'après la relation d'énergie (3.2.2), la suite $E(u_l(t))$ est aussi uniformément bornée pour

3.3. Démonstration du résultat principal

$0 \leq t \leq T$. Par conséquent, il existe une sous suite u_l , telle que

$$\begin{cases} u_l \rightharpoonup u & \text{faiblement dans } H^1(Q), \\ u_l \rightarrow u & \text{fortement dans } L^2(Q), \\ u_l \rightarrow u & \text{fortement dans } L^2(\Sigma). \end{cases} \quad (3.3.41)$$

On considère maintenant deux possibilités

Cas 1. $u \neq 0$

D'après le résultat de compacité [88, Corollaire 4], les hypothèses (A3) et (A4), en utilisant les injections de Sobolev et les convergences dans (3.3.41), il s'ensuit que

$$f_1(u_l, x) \rightarrow f_1(u, x) \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Omega)), \quad (3.3.42)$$

$$f_2(u_l, x) \rightarrow f_2(u, x) \quad \text{fortement dans } L^\infty(0, T; L^2(\Gamma)). \quad (3.3.43)$$

De (3.3.40), on déduit que $c(x)u'_l \rightarrow 0$ dans $L^2(\Sigma_1)$. Alors, grâce aux convergences (3.3.42), (3.3.43), on peut passer à la limite dans le problème (3.3.39) pour arriver à

$$\begin{cases} u'' + \mathcal{A}u + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -f_2(u, x), \quad u' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3.44)$$

De plus, si on dérive (3.3.44) par rapport à t et on pose $u' = v$, alors v est une solution du

problème

$$\begin{cases} v' + \mathcal{A}v + \frac{\partial f_1}{\partial u}(u, x)v = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = v = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3.45)$$

En vertu de l'hypothèse (A3), il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\left| \frac{\partial f_1}{\partial u} \right|^n \leq C(|u|^{\frac{2n}{n-2}} + 1).$$

Puisque $H^1(\Omega) \subset L^{\frac{2n}{n-2}}(\Omega)$, on a $\frac{\partial f_1}{\partial u} \in L^\infty(0, T; L^n(\Omega))$, alors, pour $T > 2 \text{ diam } \Omega$, on peut appliquer le résultat d'unicité de A. Ruiz [84] adapté à notre cas, ce qui implique que $v = u' = 0$. Alors, à partir de (3.3.44), on obtient l'équation elliptique suivante

$$\begin{cases} \mathcal{A}u = -f_1(u, x) & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -f_2(u, x) & \text{dans } \Gamma_1 \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3.46)$$

En multipliant la première équation dans (3.3.46) par u et en utilisant la formule de Green, il vient

$$\int_{\Omega} \{ |\nabla_g u|_g^2 + f_1(u, x)u \} dx + \int_{\Gamma_1} f_2(u, x)u d\sigma = 0. \quad (3.3.47)$$

En vertu de (2.2.9), (2.2.10), (2.2.13) et de (2.2.14), on a $u = 0$, ce qui contredit notre hypothèse que $u \neq 0$.

Cas 2. $u = 0$.

3.3. Démonstration du résultat principal

Posons

$$\lambda_l = \left(\|u_l\|_{L^2(Q)}^2 + \|u_l\|_{L^2(\Sigma)}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.3.48)$$

$$\tilde{u}_l = \frac{1}{\lambda_l} \cdot u_l. \quad (3.3.49)$$

Alors

$$\|\tilde{u}_l\|_{L^2(Q)}^2 + \|\tilde{u}_l\|_{L^2(\Sigma)}^2 = 1. \quad (3.3.50)$$

Comme $u = 0$, de (3.3.40), nous avons

$$\lambda_l \rightarrow 0, \quad \text{as } l \rightarrow \infty. \quad (3.3.51)$$

Donc, on voit que \tilde{u}_l satisfait à

$$\begin{cases} \tilde{u}_l'' + \mathcal{A}\tilde{u}_l + \frac{f_1(u_l, x)}{\lambda_l} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \tilde{u}_l(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial \tilde{u}_l}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -\frac{f_2(u_l, x)}{\lambda_l} - c_3(x)\tilde{u}_l' & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3.52)$$

Compte tenu de la relation de dissipation (3.3.36) (appliquée à u_l) et de l'estimation (3.3.37), nous avons, pour tout $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} E_l(t) \leq C_T (E_l(0)) & \left\{ \int_0^T \int_{\Gamma} c(x) |u_l'|^2 dx dt \right. \\ & \left. + \int_0^T \int_{\Omega} |u_l|^2 d\sigma dt + \int_0^T \int_{\Gamma_1} |u_l|^2 dx dt \right\}. \end{aligned} \quad (3.3.53)$$

(où $E_l(0)$ est obtenue en remplaçant u^0 et u^1 par u_l^0 et u_l^1 respectivement dans $E(0)$).

En divisant les deux membres de l'inégalité (3.3.53) par λ_l , on déduit que la suite $E(\tilde{u}_l(t))$

3.3. Démonstration du résultat principal

est uniformément bornée pour $0 \leq t \leq T$. Donc, il existe une sous suite \tilde{u}_l , telle que

$$\begin{cases} \tilde{u}_l \rightarrow u & \text{faiblement dans } H^1(Q), \\ \tilde{u}_l \rightarrow u & \text{fortement dans } L^2(Q), \\ \tilde{u}_l \rightarrow u & \text{fortement dans } L^2(\Sigma). \end{cases} \quad (3.3.54)$$

Pour faire un passage à la limite dans le problème (3.3.52), on a besoin de la proposition suivante

Proposition 3.3.

$$c_3(x)\tilde{u}_l' \rightarrow 0 \quad \text{fortement dans } L^2(\Sigma), \quad (3.3.55)$$

$$\frac{f_2(u_l, x)}{\lambda_l} \rightarrow \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x)\tilde{u} \quad \text{fortement dans } L^2(\Sigma), \quad (3.3.56)$$

$$\frac{f_1(u_l, x)}{\lambda_l} \rightarrow \frac{\partial f_1}{\partial u}(0, x)\tilde{u} \quad \text{fortement dans } L^2(Q), \quad (3.3.57)$$

où λ_l est donné par (3.3.48).

Démonstration. La convergence (3.3.55) se déduit directement grâce aux (3.3.40) et (3.3.49).

Pour la deuxième convergence, on a

$$\begin{aligned} \Delta_l &= \left\| \frac{f_2(u_l, x)}{\lambda_l} - \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x)\tilde{u}_l \right\|_{L^2(\Sigma)}^2 \\ &= \int_{|u_l| \leq \varepsilon} \left| \frac{f_2(u_l, x)}{\lambda_l} - \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x)\tilde{u}_l \right|^2 dxdt + \int_{|u_l| > \varepsilon} \left| \frac{f_2(u_l, x)}{\lambda_l} - \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x)\tilde{u}_l \right|^2 dxdt. \end{aligned} \quad (3.3.58)$$

3.3. Démonstration du résultat principal

En utilisant l'inégalité $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ et (3.3.49), il vient

$$\begin{aligned} \Delta_l &\leq \int_{|u_l| \leq \varepsilon} \tilde{u}_l^2 \left| \frac{f_2(u_l, x)}{u_l} - \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x) \right|^2 dx dt \\ &\quad + 2 \int_{|u_l| > \varepsilon} \frac{f_2^2(u_l, x)}{\lambda_l^2} dx dt + 2 \left| \frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x) \right|^2 \int_{|u_l| > \varepsilon} |\tilde{u}_l|^2 dx dt. \end{aligned} \quad (3.3.59)$$

Alors, à partir de (A4), on a

$$\Delta_l \leq \|\tilde{u}_l\|_{L^2(\Sigma)}^2 \zeta_\varepsilon^2 + C \int_{|u_l| > \varepsilon} \left[\frac{|u_l|^{2(q-1)}}{\lambda_l^2} + \frac{|u_l|^2}{\lambda_l^2} + \frac{1}{\lambda_l^2} \right] dx dt, \quad (3.3.60)$$

où $\zeta_\varepsilon = \sup_{|y| \leq \varepsilon} \left| \frac{f_2(y, x)}{y} - \frac{\partial f_2}{\partial y}(0, x) \right|$, $\zeta_\varepsilon \rightarrow 0$ as $\varepsilon \rightarrow 0$.

Puisque $|u_l| > \varepsilon$ dans le deuxième terme de membre de droite de (3.3.60), on voit que

$$\begin{aligned} \Delta_l &\leq \|\tilde{u}_l\|_{L^2(\Sigma)}^2 \zeta_\varepsilon^2 \\ &\quad + C \int_{|u_l| > \varepsilon} \frac{|u_l|^{2(q-1)}}{\lambda_l^2} \left[1 + \frac{1}{\varepsilon^{2(q-1)-2}} + \frac{1}{\varepsilon^{2(q-1)}} \right] dx dt, \\ &\leq \|\tilde{u}_l\|_{L^2(\Sigma)}^2 \zeta_\varepsilon^2 + C_\varepsilon \lambda_l^{2(q-1)-2} \cdot \|\tilde{u}_l\|_{L^{2(q-1)}(\Sigma)}^{2(q-1)}. \end{aligned} \quad (3.3.61)$$

D'après le théorème de traces et l'hypothèse (A4), on a

$$\begin{aligned} H^1(\Omega) &\subset L^{2(q-1)}(\Sigma), \\ H^1(\Omega) &\subset L^2(\Sigma). \end{aligned} \quad (3.3.62)$$

En utilisant les injections précédentes pour le dernier membre de (3.3.61), on conclut que

$$\Delta_l \leq C \|\tilde{u}_l\|_{H^1(\Omega)}^2 \zeta_\varepsilon^2 + C_\varepsilon \lambda_l^{2(q-1)-2} \cdot \|\tilde{u}_l\|_{H^1(\Omega)}^{2(q-1)}. \quad (3.3.63)$$

Puisque \tilde{u}_l est bornée dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ et $2(q-1) - 2 > 0$, en considérant la limite dans

3.3. Démonstration du résultat principal

(3.3.51), on voit que le second terme de membre de droite de (3.3.63) satisfait à

$$\begin{aligned}
& \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_l \left[C_\varepsilon \lambda_l^{2(q-1)-2} \cdot \|\tilde{u}_l\|_{H^1(\Omega)}^{2(q-1)} \right] \\
&= \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_l C_\varepsilon \lambda_l^{2(q-1)-2} \cdot \lim_{l \rightarrow \infty} \sup_l \|\tilde{u}_l\|_{H^1(\Omega)}^{2(q-1)} \\
&\leq \lim_{l \rightarrow \infty} C_\varepsilon \lambda_l^{2(q-1)-2} \cdot \sup_l \|\tilde{u}_l\|_{H^1(\Omega)}^{2(q-1)} = 0,
\end{aligned} \tag{3.3.64}$$

par conséquent

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \sup_l \Delta_l \leq \sup_l \|\tilde{u}_l\|_{H^1(\Omega)}^2 \zeta_\varepsilon^2, \tag{3.3.65}$$

et lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$,

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \Delta_l = 0, \tag{3.3.66}$$

où nous avons utilisé le fait que \tilde{u}_l est bornée dans $L^\infty(0, T; H^1(\Omega))$ et $\zeta_\varepsilon \rightarrow 0$, lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

Donc, on trouve (3.3.56).

La convergence (3.3.57) peut être prouvée de la même manière . □

En appliquant la Proposition 3.3 et par passage à la limite dans le problème (3.3.52), il vient

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\tilde{u}'' + \mathcal{A}\tilde{u} + \frac{\partial f_1}{\partial u}(0, x)\tilde{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\
\frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -\frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x)\tilde{u} & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\
\tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty). \\
\tilde{u}' = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty).
\end{array} \right. \tag{3.3.67}$$

3.3. Démonstration du résultat principal

De plus, on fait le changement de variable $\tilde{u}' = v$, il est clair que

$$\begin{cases} v' + \mathcal{A}v + \frac{\partial f_1}{\partial u}(0, x)v = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial v}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ v = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3.68)$$

On applique à nouveau le résultat d'unicité de A. Ruiz [84], on obtient $v = \tilde{u}' = 0$.

Alors, grâce à (3.3.67), on a

$$\begin{cases} \mathcal{A}\tilde{u} + \frac{\partial f_1}{\partial u}(0, x)\tilde{u} = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \nu_{\mathcal{A}}}(x, t) = -\frac{\partial f_2}{\partial u}(0, x)\tilde{u} & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ \tilde{u} = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty). \end{cases} \quad (3.3.69)$$

Comme dans le cas 1, en multipliant la première équation dans (3.3.69) par \tilde{u} , on trouve $\tilde{u} = 0$, ce qui contredit (3.3.50). ce qui achève la démonstration du Lemme 3.3. \square

En combinant la Proposition 3.2 et le Lemme 3.3.3, on conclut, pour T assez grand que

$$E(T) \leq C \int_0^T \int_{\Gamma_1} c(x)|u'|^2 d\sigma dt, \quad (3.3.70)$$

où $c(x)$ est une fonction positive donné dans (3.3.26).

De (3.3.70), utilisons l'hypothèse (2.2.5) et appliquons la relation de dissipative (3.2.2) pour obtenir

$$E(T) \leq \frac{C}{1+C}E(0), \quad (3.3.71)$$

En combinant l'estimation (3.3.71) avec les propriétés des semi-groupes (cf. J. Rauch et M.Taylor [4, 80]), on trouve finalement

3.3. Démonstration du résultat principal

$$E(t) \leq M e^{-wt} E(0), \quad \forall t \geq 0,$$

avec

$$M = \frac{1}{1 + \frac{1}{C}}, \quad \text{et } w = \frac{1}{T} \log M.$$

La démonstration du Théorème 3.2.1 est maintenant achevée.

Conclusion et perspectives

• Conclusion

Dans cette thèse, nous avons étudié la stabilisation exponentielle pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec une condition au bord non linéaire et un feedback frontière, sous des hypothèses appropriées sur les données initiales (le déplacement u_0 , la vitesse u_1 et la dérivée normale relativement à l'opérateur \mathcal{A} du déplacement u_0), sur les coefficients variables a_{ij} de la matrice A , sur les fonctions non linéaires f_1, f_2 et sur le terme de dissipation $c_3(x)u'$.

Nous avons démontré :

- (a) **L'existence et l'unicité** de la solution faible pour le problème étudié dans des espaces fonctionnels convenables.
- (b) **La stabilisation exponentielle**, en utilisant la géométrie riemannienne, i.e., nous avons démontré que pour toute constante $M > 1$, il existe une constante $w > 0$ telle que l'énergie associée au problème étudié satisfait à cette estimation

$$E(t) \leq M e^{-wt} E(0), \quad \forall t \geq 0,$$

• Perspectives

En ce qui concerne **les perspectives**, de nombreuses questions sont encore ouvertes. Il serait intéressant de poursuivre cette étude. Quatre questions sont envisageables

- (1) Est-il possible d'obtenir une stabilisation générale (ou même exponentielle) pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec une condition au bord non linéaire et un terme de dissipation localisé dans Ω (une stabilisation interne au lieu d'une stabilisation frontière) i.e., un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + f_1(u, x) + c(x)u' = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(x, t) = -f_2(u, x) & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où

$$c(x) \in L^\infty(\Gamma_1), \quad c(x) \geq c_0 > 0, \quad \text{a.e. in } \Gamma_1$$

et f_1 et f_2 sont des fonctions non linéaires satisfaisantes aux conditions (A3) et (A4).

- (2) Nous envisageons d'étudier la stabilisation générale (ou même exponentielle) pour une équation des ondes semi-linéaire à coefficients variables avec une condition au bord non linéaire et un terme de dissipation non linéaire sur le bord Γ , i.e. un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(x, t) = -f_2(u, x) - c|u'|^\rho u' & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où c est une constante positive. La constante ρ et les fonctions non linéaires f_1 et f_2 sont satisfaisantes aux conditions (A3) et (A4).

- (3) Nous envisageons également d'étudier la stabilisation générale (ou même exponentielle) pour une équation des ondes viscoélastiques à coefficients variables avec une condition au bord non linéaire et un terme de dissipation non linéaire sur le bord Γ , i.e. un système de la forme

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'' - \operatorname{div}(A(x)\nabla u) + \int_0^t g(t-s)\operatorname{div}(A(x)\nabla u)ds + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ \frac{\partial u}{\partial \nu_A}(x, t) = \int_0^t g(t-s)\frac{\partial u}{\partial \nu_A}(s)ds - f_2(u, x) - h(u') & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{array} \right.$$

où $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq n}$ est une matrice symétrique et définie positive, les coefficients $a_{ij}(x)$ sont dans C^∞ . Les fonctions g, h, f_1 et f_2 sont supposées vérifiant les hypothèses suivantes

3.3. Démonstration du résultat principal

i) $g : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ est une fonction décroissante satisfaisant à

$$1 - \int_0^\infty g(s)ds = l > 0,$$

et il existe une fonction décroissante $\xi : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ satisfaisante à

$$g'(t) \leq -\xi(t)H(g(t)), \quad \forall t > 0, \quad \text{et} \quad \int_0^\infty \xi(s)ds = \infty,$$

où $H : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ est une fonction croissante et convexe de classe $C^1(0, \infty)$ vérifiant $H(0) = H'(0) = 0$. De plus, H est de classe $C^1([0, r])$, ($r \leq g(0)$).

ii) $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction croissante de classe C^0 telle que

$$h(s)s > 0, \quad \forall s \neq 0,$$

et il existe une fonction croissante $\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et de classe C^1 avec $\psi(0) = 0$ et $c_i > 0, i = 1, 2$, telle que

$$\psi(|s|) \leq |h(s)| \leq \psi^{-1}(|s|), \quad |s| \leq 1,$$

$$c_1|s| \leq |h(s)| \leq c_2|s|, \quad |s| \geq 1,$$

où ψ^{-1} désigne l'inverse de la fonction ψ .

iii) Les fonctions non linéaires f_1 et f_2 vérifient les conditions (A3) et (A4).

(4) Il est intéressant d'étudier le tau de décroissance pour une équation des ondes semi-linéaire avec un terme d'amortissement viscoélastique et des conditions aux limites dynamiques en présence d'un terme source, i.e. un système de la forme

$$\begin{cases} u'' - k_\Omega \Delta u' - \Delta u + f_1(u, x) = 0 & \text{dans } \Omega \times (0, +\infty), \\ u(x, t) = 0 & \text{sur } \Gamma_0 \times (0, +\infty), \\ u'' - \frac{\partial}{\partial \nu} (u + k_\Omega u') - k_\Gamma \Delta_\Gamma (\alpha u' + u) + f_2(u, x) = 0 & \text{sur } \Gamma_1 \times (0, +\infty), \\ u(x, 0) = u^0, \quad u'(x, 0) = u^1(x) & \text{dans } \Omega \end{cases}$$

où Δ_Γ désigne l'opérateur de Laplace-Beltrami sur le bord Γ_1 par rapport à la variable x , $\Delta u'$ désigne le terme d'amortissement viscoélastique ou le terme d'amortissement fort. k_Ω , k_Γ et α sont des constantes positives. Les fonctions $f_1(u, x)$ et $f_2(u, x)$ sont supposées vérifiant les hypothèses (A3) et (A4).

Afin d'assurer la présence d'un terme de dissipation et par conséquent la décroissance de l'énergie, on suppose que

$$\max \{k_\Omega, k_\Gamma \alpha\} > 0.$$

- (5) On peut également envisager comme perspective l'approximation numérique des problèmes de stabilisation étudiés.

Bibliographie

- [1] A. Adams et J. F. Fournier, *Sobolev Spaces*, Vancouver, Canada, 2003.
- [2] S. Alinhac, *Hyperbolic Partial Differential Equations*, *Universitext book series*, Springer-Verlag New York, 2009.
- [3] T. Aubin, *Some Nonlinear Problems in Riemannian Geometry*, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [4] V. Barbu, *Nonlinear Semigroups and Differential Equations in Banach Spaces*, Noordhoff, 1976.
- [5] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle : théorie et applications*, Masson, Paris, 1983.
- [6] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti et J. Ferreira, *Existence and uniform decay for a non-linear viscoelastic equation with strong damping*, *Math. Meth. Appl. Sci.* **24**, (2001), 1043-1053.
- [7] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos. Cavalcanti et J. A. Soriano. Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equation with localized damping, *EJDE.* **2002**, no. 44, (2002), 1-14.
- [8] M.M. Cavalcanti, V.N. Domingos Cavalcanti et J.A. Soriano, *Exponential decay for the solution of semilinear viscoelastic wave equations with localized damping*, *SIAM J. Control Optim.* **42**, no. 4 (2003), 1310-1324.

- [9] M. M. Cavalcanti, V. N. D. Cavalcanti, et T. F. Ma, *Exponential decay of the viscoelastic Euler-Bernoulli equation with a nonlocal dissipation in general domains*, Diff. and Integ. Eqs. **17**, no. 5-6, (2004), 495-510.
- [10] M. Cavalcanti et V. Cavalcanti, *Homogenization and Uniform Stabilization for a Non-linear Hyperbolic Equation in Domains with Holes of Small Capacity*, EJDE, **2004**, no. 55, 1-19.
- [11] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, et J. A. Soriano, Uniform stabilization of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping, Methods Appl. Anal. **15**, no. 4, (2008), 405-425.
- [12] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, et J. A. Soriano, Asymptotic stability of the wave equation on compact surfaces and locally distributed damping—a sharp result, Trans. Amer. Math. Soc. **361**, no. 9, (2009), 4561-4580.
- [13] M. M. Cavalcanti, V. N. Domingos Cavalcanti, R. Fukuoka, et J. A. Soriano, Uniform stabilization of the wave equation on compact manifolds and locally distributed damping—a sharp result, J. Math. Anal. Appl. **351**, no.2, (2009), 661-674.
- [14] M.M. Cavalcanti, F.R. Dias Silva, V.N. Domingos Cavalcanti, *Uniform decay rates for the wave equation with nonlinear damping locally distributed in unbounded domains with finite measure*, SIAM J. Control Optim. **52**, no. 1, (2014), 545-580.
- [15] M.M. Cavalcanti, A. Khemmoudj et M. Madjden, *Uniform stabilization of the damped Cauchy-Ventcel problem with variable coefficients and dynamic boundary conditions*, J. Math. Anal. App. **338**, no. 2, (2007), 900-930.
- [16] M.M. Cavalcanti et al., *Uniform decay rate estimates for the wave equation in an inhomogeneous medium by simultaneous interior and boundary feedbacks*, J. Math. Anal. Appl. **495**, no.1, (2021).

- [17] S. G. Chai et Y. X. Guo, Boundary stabilization of wave equations with variable coefficients and memory, *J. Diff. Integ. Eqs.* **17**, no. 5-6, (2004), 669-680.
- [18] B. L. Chen, *Galerkin Method for a Quasilinear Parabolic Equation with Nonlocal Boundary Conditions*, Proceedings of the Third International Conference, Boundary Value Problems, Integral Equations and Related Problems, Beijing and Baoding, China, 2010.
- [19] G. Chen, Energy decay estimates and exact boundary value controllability for the wave equation in a bounded domain, *J. Math. Pures.* **58**, no. 9, (1979), 249-273.
- [20] G. Chen, Control and stabilization for wave equation in a bounded domain I, *SIAM J. Control and Opt.* **17**, no. 1 (1979), 66-81.
- [21] G. Chen, Control and stabilization for wave equation in a bounded domain II, *SIAM J. Control and Opt.* **19**, no. 1 (1981), 114-122.
- [22] P. Cherrier et A. Milani, *Linear and Quasi-linear Evolution Equations in Hilbert Spaces*, Graduate Studies in Mathematics, Vol. 135, American Mathematical Society Providence, Rhode Island, 2010.
- [23] E. A. Coddington et N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, McGraw-Hill Book Company, Etats Unis, 1955.
- [24] F. Conard et M. Pierre, *Stabilization of second order evolution equations by unbounded nonlinear feedback*, *Annales de l'Institut Henri Poincaré C, Analyse non linéaire.* **11**, no. 5, (1994), 485-515.
- [25] R. Dautray et J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 2, Evolution Problems I, Paris, 1984.
- [26] R. Dautray et J. L. Lions, *Mathematical Analysis and Numerical Methods for Science and Technology*, Vol. 5, Evolution Problems I, Paris, 1984.

- [27] L. Deng et P. F. Yao, *Global smooth solutions for semilinear Schrodinger equations with boundary feedback on 2-dimensional Riemannian manifolds*, J. Syst. Sci. Complex. **22**, no. 4, (2009), 749-776.
- [28] L. Deng et P. F. Yao, *Boundary controllability for the semilinear Schrodinger equations on Riemannian manifolds*, J. Math. Anal. Appl. **372**, no. 1, (2010), 19-44.
- [29] B. Z. Guo et Z. C. Shao, *On exponential stability of a semilinear wave equation with variable coefficients under the nonlinear boundary feedback*, Nonlinear Anal. **71**, no. 12, (2009), 5961-5978.
- [30] T.G. Ha et J.Y. Park, *Stabilization of the viscoelastic Euler-Bernoulli type equation with a local nonlinear dissipation*. Dyn. Partial Differ. Equ. **6**, no. 4, (2009), 335-366
- [31] I. Hamchi, *Uniform decay rates for second-order hyperbolic equations with variable coefficients*, Asymptot. Anal. **57**, no. 1-2, (2008), 71-82
- [32] I. Hamchi et S. E. Rebiai, *Indirect boundary stabilization of a system of Schrodinger equations with variable coefficients*, NoDEA. Nonl. Diff. Eqs. Appl. **15**, no. 4-5, (2008), 639-653.
- [33] A. Haraux, *Comportement à l'infini pour une équation d'ondes non linéaire dissipative*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. A–B, **287**, (1978), 507-509.
- [34] M. Ikawa, *Hyperbolic Partial Differential Equations and Wave Phenomena*, (Traduit par B. I. Kurpita), Translations of Mathematical Monographs, Iwanami Series in Modern Mathematics, Japon, 1997.
- [35] E. Kamel, A. Ainouz et A. Khemmoudj. *Uniform Stabilization for a Semilinear Wave Equation with Variable Coefficients and Nonlinear Boundary Conditions*. Taiwanese J. Math. **26**, no. 5, (2022), 981-1001.

- [36] Y.H. Kang, M.J.Lee et I.H. Jungb, *Sharp energy decay estimates for the wave equation with a local degenerate dissipation*, Computers and Mathematics with Applications. **57**, no. 1, (2009), 21-27.
- [37] A. Khemmoudj et M. Medjden, *Exponential decay for the semilinear damped Cauchy-Ventcel problem*, Bol. Soc. Parana. Mat. **22**, no. 2, (2004), 97-116.
- [38] A. Khemmoudj et L. Seghour, *Exponential stabilization of a viscoelastic wave equation with dynamic boundary conditions*, Nonlinear Differ. Equ. Appl. **22**, no. 5, (2015), 1259-1286.
- [39] V. Komornik et E. Zuazua, *A direct method for boundary stabilization of the wave equation*, J. Math. pures and app. **69**, no. 2, (1990), 33-54.
- [40] V. Komornik, *Exact controllability and stabilization, the multiplier method*, Masson-John Wiley, Paris, 1994.
- [41] V. Komornik, *Decay Estimates for the Wave Equation with Internal Damping*, International Series of Numerical Mathematics. **118**, (1994), 253-266.
- [42] J. E. Lagnese, *Decay of solutions of wave equations in a bounded region with boundary dissipation*, J. Differential Equations. **50**, no. 2, (1983), 163-182.
- [43] J. E. Lagnese, *Control of wave processes with distributed controls supported on a subregion*, SIAM J. Control Optim. **21**, no. 1, (1983), 68-85.
- [44] J. E. Lagnese, *Boundary Stabilization of Thin Plates*, SIAM Studies in Applied and Numerical Mathematics, 1989.
- [45] J. E. Lagnese, *Uniform asymptotic energy estimates for solutions of the equations of dynamic plane elasticity with nonlinear dissipation at the boundary*, Nonlinear Analysis, **16**, no. 1, (1991), 35-54.
- [46] J. E. Lagnese et G.Leugering, *Uniform stabilization of a nonlinear beam by nonlinear boundary feedback*, J. Differential Equations. **91**, no. 2, (1991), 355-388.

- [47] I. Lasiecka, *Global Uniform Decay Rates for the Solutions to Wave Equation with Nonlinear Boundary conditions*, *Applicable Analysis*. **47**, no. 1-4, (1992), 191-212.
- [48] I. Lasiecka et D. Tataru, *Uniform Boundary Stabilization of Semilinear Wave Equations with Nonlinear Boundary Damping*, *Diff. and Integ. Eqs.* **6**, no. 3, (1993), 507-533.
- [49] I. Lasiecka et D. Toundykov, *Energy decay rates for the semilinear wave equation with nonlinear localized damping and source terms*, *SIAM J. Control Optim.* **88**, no. 2, (1990), 466-477.
- [50] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Exact controllability of the wave equation with Neumann boundary control*, *Appl. Math. Optimiz.* **19**, (1989), 243-209.
- [51] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Regularity theory for a class of a Euler-Bernoulli equations : A cosine operator approach*, *Boll. Un. Mat. Ital.* no. 7, 3-B (1989), 199-228.
- [52] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with controls in Dirichlet Neumann boundary conditions : A nonconservative case*, *SIAM J. Contr. and Optim.* **27**, no. 2, (1989), 330-373.
- [53] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Exact controllability of the Euler-Bernoulli equation with boundary controls for displacement and moment*, *J. Math. Anal. Appl.* **146**, no. 1, (1990), 1-33.
- [54] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Exact controllability of semilinear abstract systems with applications to waves and plates boundary control problems*, *Appl. Math. Optim.* **23**, no. 1, (1991), 109-145.
- [55] I. Lasiecka et R. Triggiani, *Uniform stabilization of the wave equation with Dirichlet or Neumann feedback control without geometric conditions*, *Applied Mathematics and Optimization.* **25**, no. 2, (1992), 189-224.

- [56] I. Lasiecka, R. Triggiani et P. F. Yao, *Inverse/Observability Estimates for Second-Order Hyperbolic Equations with Variable Coefficients*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **235**, (1999), 13-57.
- [57] I. Lasiecka et X. Wang, *Intrinsic Decay Rate Estimates for Semilinear Abstract Second Order Equations with Memory*, In book : New Prospects in Direct, Inverse and Control Problems for Evolution Equations, Springer INdAM Series 10, (2014), 271-303.
- [58] P. D. Lax, *Hyperbolic Partial Differential Equations (Courant Lecture Notes)*, American Math. Soc./Courant Inst. of Math. Scie, 2006.
- [59] J. Li et S. Chai, *Energy decay for a nonlinear wave equation of variable Coefficients with acoustic boundary conditions and a time-varying delay in the boundary feedback*, Nonlinear Analysis. **112**, (2015), 105-117.
- [60] E. H. Lieb et M. Loss, *Analysis*, 2nd ed., Graduate Series in Mathematics, **14**, American Mathematical Society ; Providence, RI, 2001.
- [61] J.L. Lions, *Quelques méthodes de Résolution des Problèmes aux Limites Non Linéaires*, Dunod, Paris, 1969.
- [62] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués - Tome 1*, Contôlabilité exacte, Dunod, Paris, 1988.
- [63] J. L. Lions, *Contrôlabilité exacte, perturbations et stabilisation de systèmes distribués - Tome 2, Perturbations*, Dunod, Paris, 1988.
- [64] J. L. Lions, *Exact controllability, stabilization and perturbations for distributed system*, SIAM Review, **30**, no. 1, (1988), 1-68.
- [65] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 1*, Dunod, Paris, 1968.
- [66] J. L. Lions et E. Magenes, *Problèmes aux limites non homogènes et applications. Vol. 2*, Dunod, Paris, 1968.

- [67] K. Liu, *Locally distributed control and damping for the conservative system*, SIAM Control Optim. **35**, no. 5, (1997), 1574-1590.
- [68] W. Liu, *Exponential Stability of the Energy of the wave Equation with Variable Coefficients and a boundary Distributed Delay*, Z. Naturforsch. **69**, (2014), 547-552.
- [69] P. Martinez, *A new method to obtain decay rate estimates for dissipative systems with localized damping*. Rev. Mat. Complut. **12**, (1999), 251-283.
- [70] G. Menz, *Exponential stability of wave equations with potential and indefinite damping*, Jour. of Diff. Eq. **242**, no. 1, (2007), 171-191,
- [71] C. S. Morawetz, *Time decay for nonlinear Klein-Gordon equations*, Proc. Royal. Soc. London A. **306**, no. 1486, (1968), 291-296.
- [72] C. S. Morawetz, *Decay for solutions of the exterior problem for the wave equation*, Comm. Pure Appl. Math. **28**, no. 2, (1975), 229-246.
- [73] S. Nicaise et C. Pignotti, *Stabilization of the wave equation with variable coefficients and boundary condition of memory type*, Asymptot. Anal. **50**, no. 1-2, (2006), 31-67.
- [74] S. Nicaise et C. Pignotti, *Internal and boundary observability estimates for the heterogeneous Maxwell's system*, Appl. Math. Optim. **54**, no. 1, (2006), 47-70.
- [75] S. Nicaise et C. Pignotti, *Exponential and polynomial stability estimates for the wave equation and Maxwell's system with memory boundary conditions*, Functional analysis and evolution equations, The Gunter Lumer Volume, (2007), 515-530.
- [76] S. Nicaise, C. Pignotti et J. Valein, *Exponential stability of the wave equation with boundary time-varying delay*, Discrete and Continuous Dynamical Systems Series S. **4**, no. 3, (2011), 693-722.
- [77] Z. Ning, C. Shena et X. Zhao, *Stabilization of the wave equation with variable coefficients and a delay in dissipative internal feedback*, J. Math. Anal. Appl. **405**, no. 2, (2013), 148-155.

- [78] J.Y. Park et S.H. Park, *General decay for quasilinear viscoelastic equations with nonlinear weak damping*, Journal of Mathematical Physics. **50**, no. 8, (2009), 1-10.
- [79] J. Qiu et D. L. Russell, *Asymptotic stability and energy decay rates for solutions of hyperbolic equations with boundary damping*, MRC Technical Summary Report CA 1575, Université de Wisconsin-Madison, Nov., 1975.
- [80] J. Rauch et M. Taylor, *Exponential Decay of Solutions to hyperbolic Equations in Bounded Domains*, Indiana Univ. Math. J. **24**, no. 1, (1974), 79-86.
- [81] S. E. Rebiai, *Boundary stabilization of Schrodinger equations with variable coefficients*, Afr. Diaspora J. Math. **1**, no. 1, (2004), 33-41.
- [82] W. Rudin, *Real and Complex Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1974.
- [83] W. Rudin, *Functional Analysis*, McGraw-Hill, New York, 1973.
- [84] A. Ruiz, *Unique continuation for weak solutions of the wave equation plus a potential*, J. Math. Pures Appl. **71**, no. 5, (1992), 455-467.
- [85] D. L. Russell, *Exact boundary value controllability theorems for wave and heat processes in starcomplemented regions*, Differential Games and Control Theory, Roxin, Liu, Sternberg, eds., Marcel Dekker, New York, 1974.
- [86] D. L. Russell, *Controlability and Stabilization for linear partial differential equations*, Recent progress and open questions, S.I.A.M, J. Cont. Opt. **20**, no. 4, (1978), 639-739.
- [87] B. Said et S.A. Messaoudi, *Exponential Decay of solutions to a viscoelastic equation with nonlinear localized damping*, EJDE. **2004**, no. 88, (2004), 1-10.
- [88] J. Simon, *Compact acts in the space $L^p(0, T; B)$* , Annali di Mat. Pura ed Applicata. **146**, (1987), 65-96.
- [89] L. R. T. Tebou, *Stabilization of the wave equation with localized nonlinear damping*, J. Differential Equations. **145**, no. 2, (1998), 502-524.

- [90] R. Triggiani, *Wave equation on a bounded domain with boundary dissipation : An operator approach*, Journal of Mathematical Analysis and Applications. **137**, no. 2, (1989), 438-461.
- [91] R. Triggiani et P. F. Yao, Carleman estimates with no lower-order terms for general Riemann wave equations. Global uniqueness and observability in one shot, Appl. Math. Optim. **46**, no. 2, (2002), 331-375.
- [92] H. Wu, C.L. Shen, et Y.L. Yu, *An Introduction to Riemannian Geometry (in Chinese)*, Univ. of Beijing, 1989.
- [93] A. Wyler, Stability of wave equations with dissipative boundary conditions in a bounded domain, Differential Integral Equations. **7**, no. 2, (1994), 345-366.
- [94] C. Xiaomin et Y. Pengfei, *General decay rate estimates for viscoelastic wave equation with variable coefficients*, J Syst Sci Complex. **27**, no. 5, (2014), 836-852.
- [95] P. F. Yao, *On the observability inequalities for exact controllability of wave equations with variable coefficients*, SIAM J. Control Optim. **37**, no. 5, (1999), 1568-1599.
- [96] P. F. Yao, *Modeling and Control in Vibrational and Structural Dynamics. A Differential Geometric Approach*, Boca Raton, FL : CRC Press, 2011.
- [97] K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer-Verlag, Berlin, 1964.
- [98] Y. You, *Energy Decay and Exact Controllability for the Petrovsky Equation in a Bounded Domain*, advances in applied mathematics. **11**, no. 2, (1990), 372-388.
- [99] K. Yosida, *Nonlinear Functional Analysis and its Applications*, Springer-Verlag, Vol. 1 et 2, Berlin, 1980.
- [100] E. Zuazua, *Uniform stabilization of the wave equation by nonlinear boundary feedback*, SIAM J. Control Optim. **88**, no. 2, (1990), 466-477.
- [101] E. Zuazua, Exponential decay for the semilinear wave equation with locally distributed damping. Commun. Part. Differ. Equ. **15**, no. 2, (1990), 205-235.