

Num d'ordre : 65/2023. C/MT

**République Algérienne Démocratique et Populaire**  
**Ministère de l'Enseignement supérieur et de la Recherche Scientifique**  
**L'Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene**  
**Faculté des Mathématiques**



**Thèse de Doctorat**  
**Présentée pour l'obtention du grade de Docteur**  
**en : MATHÉMATIQUES**  
**Spécialité : Equations aux dérivées partielles**

**Par :**  
**GALLEZE Sami**

**Sujet**

**Conditions de transmission approchées pour un  
problème avec inclusion mince**

Soutenue publiquement le 22/06/2023 devant le jury composé de :

M.	T. Ali-Ziane	Professeur	à l'USTHB	Président
M.	K. E. Boutarene	Maitre de conférence/A	à l'USTHB	Directeur de Thèse
M.	M. Hachama	Professeur	à l'U. Blida 1	Examinateur
M.	H. Haddadou	Professeur	à l'ESI	Examinateur.
Mme.	S. Mahoui	Maitre de conférence/A	à l'USTHB	Examinatrice.

*A ma famille, mes amis.*

# REMERCIEMENT

Les travaux décrits dans ce manuscrit n'auraient pas vu le jour sans le soutien aussi bien scientifique qu'humain que m'a apporté mon directeur de thèse, Monsieur Khaled El-Ghaouti BOUTARENE. Ses compétences, sa sympathie, sa patience ainsi que son sérieux avec lesquels il m'a encadré, m'ont été indispensables pour mener à bien ce travail. Il a par ailleurs œuvré pour que cette thèse se passe dans de bonnes conditions et m'a encouragé pour donner plus d'efforts et a cru en mes capacités.

Je tiens à remercier les membres de mon jury de thèse pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail et pour les remarques constructives qu'ils ont fait sur mon manuscrit de thèse.

Je remercie Monsieur Tarik ALI ZIANE d'avoir bien voulu accepter de présider le jury d'examen de mon travail.

J'adresse mes vifs remerciements à monsieur Mohamed HACHAMA et à monsieur Hamid HADDADOU pour m'avoir honoré et accepté d'examiner ce travail.

Je tiens également à remercier Madame Sihem MAHOUI de m'avoir fait l'honneur de participer à ce jury de thèse et d'examiner mon travail.

Je remercie également tous les membres du laboratoire AMNEDP, pour m'avoir permis d'accéder à cette famille et ce groupe de qualité.

Les mots les plus simples étant les plus forts, j'adresse toute mon affection à ma famille d'avoir eu confiance en moi et de m'avoir soutenue dans la voie que j'ai choisie.

Pour terminer, je tiens à remercier mes confrères, jeunes doctorant de la faculté de mathématiques, ce fut des années magnifiques que nous venons de partager, ainsi que toutes les bonnes personnes que j'ai rencontré soit dans la cour de la faculté, l'administration, les salles des doctorants, la bibliothèques, les salles d'enseignements ou bien dans les couloirs des blocs, et qui grâce à eux mes années furent très agréables et énormément instructives.

<h1 style="margin: 0;">TABLE DES MATIÈRES</h1>
--

Introduction	ix
<b>I Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de Helmholtz</b>	<b>1</b>
<b>1 Position du problème et géométrie différentielle</b>	<b>3</b>
1.1 Position du problème . . . . .	3
1.2 Géométrie différentielle . . . . .	9
1.2.1 Paramétrisation de $\Gamma$ . . . . .	11
1.2.2 Paramétrisation de la couche mince $\Omega_m^\varepsilon$ . . . . .	11
<b>2 Développement asymptotique</b>	<b>13</b>
2.1 Hiérarchie des équations . . . . .	13
2.2 Calcul des trois premiers termes . . . . .	16
2.2.1 Terme d'ordre 0 . . . . .	16
2.2.2 Terme d'ordre 1 . . . . .	16
2.2.3 Terme d'ordre 2 . . . . .	18

<b>3</b>	<b>Problème approché</b>	<b>26</b>
3.1	Existence et unicité . . . . .	28
3.2	Estimation de l'erreur . . . . .	34
<b>II</b>	<b>Analyse asymptotique pour un problème de Helmholtz avec couche mince d'épaisseur non constante</b>	<b>40</b>
<b>4</b>	<b>Description du problème et aspect géométrique</b>	<b>42</b>
4.1	Paramétrisation de la couche mince $\Omega_m^\varepsilon$ . . . . .	45
<b>5</b>	<b>Analyse asymptotique</b>	<b>48</b>
5.1	Calcul des deux premiers termes . . . . .	50
5.1.1	Terme d'ordre 0 . . . . .	50
5.1.2	Terme d'ordre 1 . . . . .	51
5.1.3	Terme d'ordre 2 . . . . .	53
<b>6</b>	<b>Conditions de transmission approchées</b>	<b>62</b>
6.1	Stabilité uniforme . . . . .	63
6.2	Existence et unicité . . . . .	67
6.3	Estimation de l'erreur . . . . .	70
	<b>Conclusion et perspectives</b>	<b>74</b>
<b>A</b>	<b>Opérateurs de Fredholm</b>	<b>76</b>
<b>B</b>	<b>Opérateurs pseudo-différentiels</b>	<b>79</b>
B.1	Symboles . . . . .	79
B.2	Opérateurs pseudo-différentiels . . . . .	80
B.3	Hypoellipticité et ellipticité . . . . .	82
B.4	Opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés . . . . .	82
<b>C</b>	<b>Théorème et Lemmes de Rellich</b>	<b>84</b>

# NOTATIONS

- $\Omega_\infty$  : domaine extérieur hétérogène de  $\mathbb{R}^2$ .
- $\Gamma_i$  : frontière de l'obstacle.
- $\Omega_-^\varepsilon$  : ouvert borné de frontière  $\Gamma_i$ .
- $\Gamma_-^\varepsilon$  : frontière de  $\Omega_-^\varepsilon$ .
- $\Omega_m^\varepsilon$  : couche mince recouvrant  $\Omega_-^\varepsilon$ .
- $\Omega_+^\varepsilon$  : domaine extérieur infini de frontière  $\Gamma_+^\varepsilon$ .
- $\alpha_\varepsilon(x)$  : fonction décrivant les contrastes du milieu par rapport à  $\Omega_+^\varepsilon$ .
- $k_\varepsilon(x)$  : fonction décrivant les propriétés réfractives du milieu par rapport à  $\Omega_+^\varepsilon$ .
- $\alpha_+, \alpha_-$  : constantes décrivant les contrastes des milieux.
- $k_+, k_-, k_m$  : constantes décrivant les propriétés réfractives des milieux.
- $u^\varepsilon$  : solution du problème de Helmholtz.
- $u_{inc}$  : onde incidente.
- $\Gamma_\pm^\varepsilon$  : interfaces entre les différents domaines.
- $u_\pm^\varepsilon, u_m^\varepsilon$  : restrictions de  $u^\varepsilon$  aux domaines  $\Omega_\pm^\varepsilon, \Omega_m^\varepsilon$ .
- $\mathbf{n}_\pm$  : vecteurs unitaires normaux à  $\Gamma_+^\varepsilon, \Gamma_-^\varepsilon$ .
- $\partial_{\mathbf{n}_\pm}$  : dérivées dans la direction des vecteurs  $\mathbf{n}_\pm$ .
- $H^1(\Omega)$  : espace de Sobolev défini par  $H^1(\Omega) = \{u \in L^2(\Omega) / \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i \in \{1, 2\}\}$ .

- $H_{loc}^1(\Omega_\infty)$  : espace de Sobolev des fonctions localement intégrables sur  $\Omega_\infty$
- $u_+^n$  et  $u_-^n$  : les termes du développement asymptotique de  $u^\varepsilon$  dans  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$  respectivement, où  $n$  est un entier naturel.
- $U_m^\varepsilon$  : la restriction de  $u^\varepsilon$  à  $\Omega_m^\varepsilon$ , exprimée dans des coordonnées locales  $(t, s)$ .
- $U_m^n$  : les termes du développement asymptotique de  $U_m^\varepsilon$  dans  $\Omega_m$ , indépendants de  $\varepsilon$ , où  $n$  est un entier naturel.
- $d_1\varepsilon$  et  $d_2\varepsilon$  : les épaisseurs des couches minces  $\Omega_{m,1}^\varepsilon$  et  $\Omega_{m,2}^\varepsilon$  respectivement.
- $\partial_s$  : la dérivée par rapport à la variable locale  $s$ .
- $l_\Gamma$  : la longueur de l'interface  $\Gamma$ .
- $\Omega_+$  : La région extérieure du domaine sans couche mince et avec  $\Gamma$ .
- $\Omega_-$  : La région intérieure du domaine sans couche mince et avec  $\Gamma$ .
- $\Gamma$  : La frontière entre  $\Omega_+$  et  $\Omega_-$ .
- $u^{\varepsilon,ap}$  : La solution approchée.
- $u_+^{\varepsilon,ap}$  : La restriction de la solution approchée  $u^{\varepsilon,ap}$  à  $\Omega_+$ .
- $u_-^{\varepsilon,ap}$  : La restriction de la solution approchée  $u^{\varepsilon,ap}$  à  $\Omega_-$ .
- $\tilde{\Omega}_+^\varepsilon$  : Intersection du domaine positif avec l'ensemble  $\Omega$ .
- $\|\cdot\|_{H^1}$  : Norme dans l'espace de Sobolev  $H^1$ .
- $T$  : Opérateur de Steklov-Poincaré.
- $\mathbb{H}^1(\Omega)$  : Espace de Hilbert défini par  $\mathbb{H}^1(\Omega) := \left\{ v = (v_-, v_+) \in H^1(\Omega_-) \times H^1(\tilde{\Omega}_+) , v_-|_{\Gamma_i} = 0 \right\}$ .
- $\gamma_-(t)$  : La paramétrisation de l'interface  $\Gamma_-^\varepsilon$ , où  $t$  est la longueur d'arc de  $\gamma_-$ .
- $K$  : opérateur compact.
- $\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)$  espace de Hilbert défini par  $\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma) = \left\{ v = (v_-, v_+) \in H^1(\Omega_-) \times H^1(\tilde{\Omega}_+) ; u_{\pm}|_\Gamma \in H^1(\Gamma) \right\}$ .
- $T_\pm$  : Opérateurs de Steklov-Poincaré associés aux domaines  $\Omega_\pm$ .



# INTRODUCTION GENERALE

Après la seconde guerre mondiale, le système Radar a connu un essor fulgurant. Il est utilisé dans plusieurs secteurs de grandes importances comme la météorologie, le contrôle du trafic aérien, la surveillance du trafic routier ainsi que la sécurité routière, terrestre, maritime et aérienne. Il existe plusieurs types de radars avec des capacités et émissions différentes. L'évolution technologique a permis le développement des radars, où nous avons vu naître des radars à capacité accrue qui permettent une couverture tridimensionnelle très large, la capacité de détecter des structures de petite taille et infrasonores avec anticipation de leur trajectoire, un balayage à haut débit, en plus d'augmenter la précision dans la classification des cibles pour réduire le fardeau de l'analyse des données avec une analyse numérique plus rapide des données entrantes.

Puisqu'il est impossible d'éviter la détection et la surveillance radar, en évitant les ondes émises par le radar, il existe plusieurs techniques et stratégies pour réduire les impacts ou les éliminer complètement (la furtivité radar) parmi lesquelles agir sur les formes et les angles des objets (la géométrie) ainsi que les recouvrir d'un revêtement spécial (une couche mince) qui absorbe les ondes émises par le radar. Ces dernières techniques demandent beaucoup de précision et d'exactitude.

Une des conditions nécessaires pour l'amélioration de la détection et de la furtivité radar est de prendre en considération la structure ainsi que la peinture recouvrant l'objet,

c'est à dire nous aurons à faire à des problèmes de propagation, émission ou diffusion posés sur des domaines contenant des couches minces.

La résolution numérique de ces problèmes (éléments finis ... cf. e.g., [14, 25]) pose plusieurs défis. Tout d'abord, la discrétisation à l'échelle de l'épaisseur de la couche mince entraîne un maillage très fin avec un grand nombre d'éléments, ce qui peut rendre les calculs longs et coûteux en termes de ressources computationnelles. De plus, cette discrétisation fine peut conduire à des instabilités numériques, telles que la pollution de la solution ou la perte de précision, nécessitant ainsi des méthodes de résolution numérique appropriées pour obtenir des résultats fiables. De plus, les problèmes posés sur des domaines avec des couches minces peuvent présenter des phénomènes de nature multiscale, où des caractéristiques différentes se manifestent à des échelles variées. Cela implique la nécessité de développer des techniques de modélisation et de simulation adaptées pour capturer les interactions entre les différentes échelles et assurer une représentation précise du comportement physique. Enfin, les problèmes avec des couches minces peuvent également poser des défis liés à la géométrie complexe, à la modélisation des interfaces, aux conditions aux limites appropriées et à la prise en compte des propriétés des matériaux constituant la couche mince. La recherche de méthodes numériques efficaces et précises pour résoudre ces problèmes est donc essentielle pour avancer dans notre compréhension des phénomènes physiques.

L'utilisation des méthodes asymptotiques se révèle être une approche prometteuse pour surmonter les défis liés à la résolution numérique des problèmes définis dans des domaines contenant des couches minces. Ces méthodes offrent plusieurs avantages significatifs. Premièrement, elles permettent de réduire considérablement la complexité des calculs en fournissant des approximations analytiques ou semi-analytiques des solutions. Ainsi, au lieu d'une résolution numérique coûteuse à l'échelle fine de la couche mince, les méthodes asymptotiques offrent la possibilité d'obtenir des résultats précis avec une complexité réduite. Deuxièmement, les méthodes asymptotiques fournissent des informations essentielles sur le comportement de la solution à différentes échelles, ce qui permet de capturer efficacement les phénomènes multiscales. Cette approche permet de séparer les contributions dominantes provenant de différentes parties du domaine, ce qui facilite la modélisation et la simulation. De plus, les méthodes asymptotiques permettent souvent d'obtenir des expressions analytiques pour certaines quantités d'intérêt, ce qui facilite leur interprétation et leur utilisation dans la conception et l'optimisation des dispositifs. En-

fin, les méthodes asymptotiques offrent une flexibilité dans l'incorporation de conditions aux limites et de propriétés matérielles complexes, ce qui permet de modéliser avec précision les interfaces et les comportements spécifiques des couches minces. En combinant ces avantages, l'utilisation des méthodes asymptotiques dans la résolution des problèmes avec des couches minces peut conduire à des gains importants en termes de temps de calcul, de précision et de compréhension des phénomènes physiques sous-jacents. Cela ouvre la voie à de nouvelles avancées dans des domaines tels que la modélisation radar, la conception de matériaux avancés et la simulation de dispositifs technologiques.

Parmi les travaux de recherche antérieurs qui ont traité de problèmes similaires ou connexes, nous pouvons citer [17] où les auteurs étudient le comportement des potentiels de tension en régime permanent dans un matériau composé d'un milieu bidimensionnel entouré d'une fine couche rugueuse intégrée par un milieu ambiant. Dans [20] les auteurs traitent de la diffraction d'une onde acoustique par une structure constituée d'un anneau mince diélectrique contenant un grand nombre d'hétérogénéités disposées périodiquement. Enfin, [19] est dédié à l'étude des modèles asymptotiques associés à la diffusion des ondes électromagnétiques provenant d'anneaux minces qui contiennent des hétérogénéités régulièrement espacées. Pour les problèmes posés sur des domaines contenant des inclusions minces, des conditions de transmission approchées (également appelées conditions aux limites d'impédance ou de type Ventcel) ont été proposées par plusieurs auteurs ([7, 9, 11, 17, 18, 27, 28, 31, 35]), qui font l'intérêt de cette thèse, et qui sont définies sur des interfaces artificielles pour remplacer l'effet de la couche mince.

Dans cette thèse, notre objectif est d'utiliser la méthode du développement multi-échelle pour approcher la solution d'un problème modélisant des phénomènes de propagation, émission ou diffusion posés sur des domaines contenant des couches minces. La méthode du développement multi-échelle offre une approche puissante pour la résolution de problèmes multiscales en décomposant la solution en une série d'expansions, où chaque terme représente une contribution spécifique à une échelle particulière. Cette méthode présente plusieurs avantages significatifs. Tout d'abord, elle permet de réduire la complexité des calculs en fournissant des approximations analytiques ou semi-analytiques des solutions. En identifiant les contributions dominantes à différentes échelles, on peut simplifier considérablement la résolution numérique et réduire le temps de calcul requis. Cette approche a été largement étudiée et appliquée avec succès dans divers domaines de recherche. Des travaux tels que ceux de Bensoussan et al. [5] et Givoli [22] ont démontré

l'efficacité de la méthode du développement multi-échelle dans la résolution de problèmes complexes.

De plus, la méthode du développement multi-échelle permet de capturer efficacement les phénomènes multiscales et les comportements locaux des ondes. En décomposant la solution en termes de différentes échelles, on peut prendre en compte les effets subtils qui se produisent à des échelles spécifiques. Cette approche offre une meilleure compréhension des interactions entre les ondes et les structures du domaine étudié. Des études telles que celles de Ockendon et Tayler [26] et de Hou et Wu [23] ont illustré l'utilité de la méthode du développement multi-échelle dans la résolution de problèmes de propagation d'ondes.

En conclusion, l'utilisation de la méthode du développement multi-échelle pour approcher la solution d'un problème de propagation, diffusion ou émission d'ondes dans un domaine bi-dimensionnel présente des avantages significatifs. Cette méthode offre une approche efficace pour résoudre des problèmes multiscales, réduire la complexité des calculs et capturer avec précision les comportements locaux des ondes. En intégrant ces avancées méthodologiques, nous pouvons espérer obtenir des modèles plus précis et des simulations plus rapides, facilitant ainsi la compréhension des phénomènes physiques sous-jacents et contribuant à l'amélioration de la conception et de l'optimisation des dispositifs.

## Exemple

Dans cet exemple, nous incitons le lecteur à visualiser une situation pratique où notre méthode pourrait être appliquée plus simplement. En effet, en utilisant notre approche, une géométrie droite, les calculs sont très simple et moins susceptibles d'introduire des erreurs. Cela permet aux lecteurs de bien comprendre la méthode (du développement multi-échelle de l'analyse asymptotique) et de connaître ses démarches.

En conclusion, cet exemple est choisi pour démontrer l'applicabilité pratique et les avantages de la méthode proposée. Les situations concrètes, telles le choix des géométries ayant des courbures qui sont un peu plus compliqué à traiter illustrent les causes qui motivent l'utilisation de notre approche, à savoir la nécessité d'une précision accrue, d'une efficacité améliorée et d'une réduction des erreurs.

### Position du problème

Soit  $\delta$  un nombre réel strictement positif très petit et soient

$$\Omega = \mathbb{R}^2, \quad \Omega_+^\delta = \mathbb{R} \times \left] \frac{1}{2}\delta, +\infty \right[, \quad \Omega_-^\delta = \mathbb{R} \times \left] -\infty, -\frac{1}{2}\delta \right[,$$

et nous considérons la couche mince, d'épaisseur  $\delta$  séparant  $\Omega_+^\delta$  et  $\Omega_-^\delta$ ,

$$\Omega_m^\delta = \left] -\frac{1}{2}\delta, \frac{1}{2}\delta \right[.$$

Nous considérons aussi les interfaces

$$\Gamma_{\delta,1} = \mathbb{R} \times \left\{ \frac{-1}{2}\delta \right\} \quad \text{et} \quad \Gamma_{\delta,2} = \mathbb{R} \times \left\{ \frac{1}{2}\delta \right\}.$$

Étant données trois constantes strictement positives  $\alpha^+$ ,  $\alpha^-$  et  $\alpha_m$  et deux fonctions  $f^+$  et  $f^-$  à support compact dans  $\Omega_+^\delta$  et  $\Omega_-^\delta$  respectivement.

Nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution  $u_\delta$  du problème de Laplace suivant :

$$\begin{cases} -\alpha^\pm \Delta u_\delta^\pm = f^\pm & \text{dans } \Omega_\pm^\delta & (0.0.1a) \\ \Delta u_{m,\delta} = 0 & \text{dans } \Omega_m^\delta, & (0.0.1b) \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur les interfaces  $\Gamma_+^\delta$  et  $\Gamma_-^\delta$

$$\begin{cases} u_{m,\delta} \left( x, \frac{\delta}{2} \right) = u_\delta^+ \left( x, \frac{\delta}{2} \right) \end{cases} \quad (0.0.1c)$$

$$\begin{cases} u_{m,\delta} \left( x, \frac{-\delta}{2} \right) = u_\delta^- \left( x, \frac{-\delta}{2} \right) \end{cases} \quad (0.0.1d)$$

$$\begin{cases} \alpha_m \partial_y u_{m,\delta} \left( x, \frac{\delta}{2} \right) = \alpha^+ \partial_y u_\delta^+ \left( x, \frac{\delta}{2} \right) \end{cases} \quad (0.0.1e)$$

$$\begin{cases} \alpha_m \partial_y u_{m,\delta} \left( x, \frac{-\delta}{2} \right) = \alpha^- \partial_y u_\delta^- \left( x, \frac{-\delta}{2} \right) \end{cases} \quad (0.0.1f)$$

où  $u_\delta^\pm = u_\delta|_{\Omega_\pm^\delta}$  et  $u_{m,\delta} = u_\delta|_{\Omega_m^\delta}$ .

Nous considérons une interface  $\Gamma$  positionnée à l'intérieure de  $\Omega_m^\delta$  parallèle à  $\Gamma_{\delta,1}$  et  $\Gamma_{\delta,2}$  divisant  $\Omega$  en deux parties. Soit

$$\Gamma = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 / y = p\delta, p \in \mathbb{R} \},$$

alors  $\Omega$  se répartie en

$$\Omega_+ = \mathbb{R} \times ]p\delta, +\infty[ \quad \text{et} \quad \Omega_- = \mathbb{R} \times ]-\infty, p\delta[.$$

### Développement asymptotique et le calcul des trois premiers termes

Nous considérons deux développements asymptotiques de la solution  $u^\delta$  sur  $\Omega$  : Loin de la couche mince, ou le développement asymptotique externe, qui est donné par l'ansatz

$$u_\delta^\pm = \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^\pm \quad \text{dans } \Omega_\pm^\delta, \quad (0.0.2)$$

où les fonctions  $u_n^\pm$  sont définies sur  $\Omega_\pm$  et sont indépendantes de  $\delta$ , elles vérifient

$$-\alpha^\pm \Delta u_\delta^\pm = \delta_{0,n} f^\pm \quad \text{dans } \Omega_\pm,$$

où  $\delta_{0,n}$  est le symbole de Kronecker.

Au voisinage de la couche mince, nous définissons le changement d'échelle  $z = y/\delta$ , alors nous donnons le développement asymptotique intérieur par

$$u_{m,\delta}(x, y) = U_{m,\delta}(x, z) = \sum_{n \geq 0} \delta^n U_{m,n}(x, z), \quad \forall (x, y) \in \Omega_m^\delta, \quad (0.0.3)$$

où les fonctions  $U_{m,n}$  sont définies sur  $\Omega_m$  et sont indépendants de  $\delta$ .

S'appuyant sur (0.0.1b), (0.0.3) et  $\partial_y u_{m,\delta} = \delta^{-1} \partial_z U_{m,\delta}$ , nous obtenons

$$(\partial_x^2 + \delta^{-2} \partial_z^2) \left[ \sum_{n \geq 0} \delta^n U_n^{m,\delta}(x, z) \right] = 0 \quad \text{dans } \Omega_m,$$

identifiant les termes de même puissance en  $\delta$ , nous aurons

$$\partial_z^2 U_{m,0} = 0, \quad (0.0.4)$$

$$\partial_z^2 U_{m,1} = 0, \quad (0.0.5)$$

$$\partial_z^2 U_{m,2} + \partial_x^2 \hat{u}_{m,0} = 0, \quad (0.0.6)$$

$$\partial_z^2 U_{m,3} + \partial_x^2 \hat{u}_{m,1} = 0. \quad (0.0.7)$$

**Remarque 1.** *Le vecteur unitaire tangent (resp. normal) en tout point de  $\Gamma$  est  $(0, 1)$  (resp.  $(1, 0)$ ).*

Le développement de Taylor au voisinage de  $y = a\delta$  est

$$\begin{aligned} u_n^-(x, \alpha) &= u_{n|\Gamma}^- - \delta(a+p) \partial_y u_{n|\Gamma}^- - \frac{\delta^2}{2} (a+p)^2 \partial_y^2 u_{n|\Gamma}^- + \dots, \\ u_n^+(x, \alpha) &= u_{n|\Gamma}^+ + \delta(a-p) \partial_y u_{n|\Gamma}^+ + \frac{\delta^2}{2} (a-p)^2 \partial_y^2 u_{n|\Gamma}^+ + \dots, \end{aligned}$$

alors les conditions (0.0.1c), (0.0.1d), (0.0.1e) et (0.0.1f) deviennent

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^- \left( x, \frac{-1}{2} \right) &= u_{0|\Gamma}^- + \delta \left[ u_{1|\Gamma}^- - \left( \frac{-1}{2} + p \right) \partial_y u_{0|\Gamma}^- \right] \\ &+ \delta^2 \left[ u_{2|\Gamma}^- - \left( \frac{-1}{2} + p \right) \partial_y u_{1|\Gamma}^- + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{-1}{2} + p \right)^2 \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^- \right] + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \delta^n U_{m,n} \left( x, \frac{-1}{2} \right), \end{aligned} \quad (0.0.8)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n \geq 0} \delta^n \alpha^- \partial_y u_n^- \left( x, \frac{-1}{2} \right) &= \partial_y u_{0|\Gamma}^- + \delta \left[ \partial_y u_{1|\Gamma}^- - \left( \frac{-1}{2} + p \right) \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^- \right] \\ &+ \delta^2 \left[ \partial_y u_{2|\Gamma}^- - \left( \frac{-1}{2} + p \right) \partial_y^2 u_{1|\Gamma}^- + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{-1}{2} + p \right)^2 \partial_y^3 u_{0|\Gamma}^- \right] + \dots \\ &= \sum_{n \geq 0} \delta^{n-1} \alpha_m \partial_z U_{m,n} \left( x, \frac{-1}{2} \right), \end{aligned} \quad (0.0.9)$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \delta^n u_n^+ \left( x, \frac{1}{2} \right) &= u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left[ u_{1|\Gamma}^+ + \left( \frac{1}{2} - p \right) \partial_y u_{0|\Gamma}^+ \right] \\
&+ \delta^2 \left[ u_{2|\Gamma}^+ + \left( \frac{1}{2} - p \right) \partial_y u_{1|\Gamma}^+ + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - p \right)^2 \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] + \dots \\
&= \sum_{n \geq 0} \delta^n U_{m,n} \left( x, \frac{1}{2} \right), \tag{0.0.10}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \geq 0} \delta^n \alpha^+ \partial_y u_n^+ \left( x, \frac{1}{2} \right) &= \partial_y u_{0|\Gamma}^+ + \delta \left[ \partial_y u_{1|\Gamma}^+ + \left( \frac{1}{2} - p \right) \partial_y^2 u_{0|\Gamma}^+ \right] \\
&+ \delta^2 \left[ \partial_y u_{2|\Gamma}^+ + \left( \frac{1}{2} - p \right) \partial_y^2 u_{1|\Gamma}^+ + \frac{\delta^2}{2} \left( \frac{1}{2} - p \right)^2 \partial_y^3 u_{0|\Gamma}^+ \right] + \dots \\
&= \sum_{n \geq 0} \delta^{n-1} \alpha_m \partial_z U_{m,n} \left( x, \frac{1}{2} \right). \tag{0.0.11}
\end{aligned}$$

De (0.0.4)-(0.0.7) et en identifiant les termes de mêmes puissance en  $\delta$  de (0.0.8)-(0.0.11), nous obtenons

$$\begin{cases} -\alpha^\pm \Delta u_0^\pm & = f^\pm, \\ u_i^+|_\Gamma - u_0^-|_\Gamma & = 0, \\ \alpha^+ \partial_y u_0^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_y u_0^-|_\Gamma & = 0. \end{cases} \quad \text{dans } \Omega_\pm^\delta,$$

$$\begin{cases} -\alpha^\pm \Delta u_1^\pm & = 0, \quad \text{dans } \Omega_\pm^\delta, \\ u_1^+|_\Gamma - u_1^-|_\Gamma & = \frac{2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^+ \alpha_\delta - 2p\alpha^+ \alpha_\delta + 2p\alpha^- \alpha_\delta - \alpha^- \alpha_\delta}{4\alpha^- \alpha^+ \alpha_\delta} \\ & \quad \times (\alpha^+ \partial_y u_0^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_y u_0^-|_\Gamma) \\ \alpha^+ \partial_y u_1^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_y u_1^-|_\Gamma & = \frac{-2\alpha_\delta - 2p\alpha^+ + 2p\alpha^- + \alpha^- + \alpha^+}{4} \\ & \quad \times (\partial_x^2 u_0^+|_\Gamma + \partial_x^2 u_0^-|_\Gamma) \end{cases}$$



$$\left\{ \begin{array}{l}
-\alpha^\pm \Delta u_2^\pm = 0, \quad \text{dans } \Omega_\pm^\delta, \\
u_2^+|_\Gamma - u_2^-|_\Gamma = \frac{2\alpha^+\alpha^- - \alpha^-\alpha_\delta - 2p\alpha^+\alpha_\delta - \alpha_\delta\alpha^+ + 2p\alpha^-\alpha_\delta}{4\alpha_\delta\alpha^+\alpha^-} \\
\quad \times (\alpha^+ \partial_y u_1^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_y u_1^-|_\Gamma) \\
+ \frac{4\alpha_\delta(\alpha^- - \alpha^+)p^2 + 4(\alpha^+\alpha^- - \alpha_\delta^2)p - \alpha_\delta\alpha^+ + \alpha_\delta\alpha^-}{8\alpha_\delta\alpha^+\alpha^-} \\
\quad \times (\alpha^+ \partial_x^2 u_0^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_x^2 u_0^-|_\Gamma) \\
+ \frac{2\alpha_\delta\alpha^+ + 2\alpha_\delta\alpha^- - 2\alpha^+\alpha^- - 2\alpha_\delta^2}{8\alpha_\delta\alpha^+\alpha^-} \\
\quad \times (\alpha^+ \partial_x^2 u_0^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_x^2 u_0^-|_\Gamma) \\
\alpha^+ \partial_y u_2^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_y u_2^-|_\Gamma = \frac{-2\alpha_\delta + \alpha^+ + \alpha^- - 2p\alpha^+ + 2p\alpha^-}{4} (\partial_x^2 u_1^+|_\Gamma + \partial_x^2 u_1^-|_\Gamma) \\
+ \left( \frac{4\alpha_\delta(\alpha^{+2} - \alpha^{-2})p^2 + 4(\alpha_\delta^2\alpha^+ + \alpha_\delta^2\alpha^- - \alpha^{+2}\alpha^- - \alpha^{-2}\alpha^+)p}{16\alpha_\delta\alpha^+\alpha^-} \right. \\
+ \left. \frac{2\alpha_\delta^2\alpha^+ - 2\alpha_\delta^2\alpha^- - \alpha_\delta\alpha^{+2} + \alpha_\delta\alpha^{-2} + 2\alpha^{+2}\alpha^- - 2\alpha^+\alpha^{-2}}{16\alpha_\delta\alpha^+\alpha^-} \right) \\
\quad \times \partial_x^2 (\alpha^+ \partial_y u_0^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_y u_0^-|_\Gamma).
\end{array} \right.$$

### Conditions de transmission approchées

Nous tranquons (0.0.2) et (0.0.3) à l'ordre 2, c'est à dire nous considérons

$$\varphi = u_0 + \delta u_1 + \delta^2 u_2,$$

alors

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\alpha^\pm \Delta \varphi^\pm \\
\varphi^+|_\Gamma - \varphi^-|_\Gamma \\
\alpha^+ \partial_y \varphi^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_y \varphi^-|_\Gamma
\end{array} \right. = \begin{array}{l}
f^\pm, \text{ dans } \Omega_\pm^\delta, \\
\frac{2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m}{4\alpha_m \alpha^+ \alpha^-} \\
\times \delta(\alpha^+ \partial_y \varphi^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_y \varphi^-|_\Gamma) \\
+ \frac{4\alpha_m(\alpha^- - \alpha^+)p^2 + 4(\alpha^+ \alpha^- - \alpha_m^2)p - \alpha_m \alpha^+ + \alpha_m \alpha^-}{4\alpha_m \alpha^+ \alpha^-} \\
\times \delta^2(\alpha^+ \partial_x^2 \varphi^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_x^2 \varphi^-|_\Gamma) \\
+ \frac{2\alpha_m \alpha^+ + 2\alpha_m \alpha^- - 2\alpha^+ \alpha^- - 2\alpha_m^2}{8\alpha_m \alpha^+ \alpha^-} \\
\times \delta^2(\alpha^+ \partial_x^2 \varphi^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_x^2 \varphi^-|_\Gamma) + O(\delta^3). \\
-2\alpha_m + \alpha^+ + \alpha^- - 2p\alpha^+ + 2p\alpha^- \\
\frac{4}{4} \\
\times \delta(\partial_x^2 \varphi^+|_\Gamma + \partial_x^2 \varphi^-|_\Gamma) \\
+ \left( \frac{4\alpha_m(\alpha^{+2} - \alpha^{-2})p^2 + 4(\alpha_m^2 \alpha^+ + \alpha_m^2 \alpha^- - \alpha^{+2} \alpha^- - \alpha^{-2} \alpha^+)p}{4(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right. \\
\left. + \frac{2\alpha_m^2 \alpha^+ - 2\alpha_m^2 \alpha^- - \alpha_m \alpha^{+2} + \alpha_m \alpha^{-2} + 2\alpha^{+2} \alpha^- - 2\alpha^{-2} \alpha^+}{4(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right) \\
\times \delta(\partial_x^2 \varphi^+|_\Gamma - \partial_x^2 \varphi^-|_\Gamma) + O(\delta^3).
\end{array}$$

Ainsi en négligeant tous les termes de puissances supérieures à 3, Nous aurons le système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l}
-\alpha^\pm \Delta u_{ap}^\pm \\
u_{ap}^+|_\Gamma - u_{ap}^-|_\Gamma \\
\alpha^+ \partial_y u_{ap}^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_y u_{ap}^-|_\Gamma
\end{array} \right. = \begin{array}{l}
f^\pm, \text{ dans } \Omega_\pm^\delta, \\
\frac{2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m}{4\alpha_m \alpha^+ \alpha^-} \\
\times \delta(\alpha^+ \partial_y u_{ap}^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_y u_{ap}^-|_\Gamma) \\
+ \frac{4\alpha_m(\alpha^- - \alpha^+)p^2 + 4(\alpha^+ \alpha^- - \alpha_m^2)p - \alpha_m \alpha^+ + \alpha_m \alpha^-}{4\alpha_m \alpha^+ \alpha^-} \\
\times \delta^2(\alpha^+ \partial_x^2 u_{ap}^+|_\Gamma + \alpha^- \partial_x^2 u_{ap}^-|_\Gamma) \\
+ \frac{2\alpha_m \alpha^+ + 2\alpha_m \alpha^- - 2\alpha^+ \alpha^- - 2\alpha_m^2}{8\alpha_m \alpha^+ \alpha^-} \\
\times \delta^2(\alpha^+ \partial_x^2 u_{ap}^+|_\Gamma - \alpha^- \partial_x^2 u_{ap}^-|_\Gamma). \\
-2\alpha_m + \alpha^+ + \alpha^- - 2p\alpha^+ + 2p\alpha^- \\
\frac{4}{4} \\
\times \delta(\partial_x^2 u_{ap}^+|_\Gamma + \partial_x^2 u_{ap}^-|_\Gamma) \\
+ \left( \frac{4\alpha_m(\alpha^{+2} - \alpha^{-2})p^2 + 4(\alpha_m^2 \alpha^+ + \alpha_m^2 \alpha^- - \alpha^{+2} \alpha^- - \alpha^{-2} \alpha^+)p}{4(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right. \\
\left. + \frac{2\alpha_m^2 \alpha^+ - 2\alpha_m^2 \alpha^- - \alpha_m \alpha^{+2} + \alpha_m \alpha^{-2} + 2\alpha^{+2} \alpha^- - 2\alpha^{-2} \alpha^+}{4(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right) \\
\times \delta(\partial_x^2 u_{ap}^+|_\Gamma - \partial_x^2 u_{ap}^-|_\Gamma).
\end{array}$$

La formulation variationnelle du problème précédent est donnée par

$$\begin{aligned}
& \alpha^+ \int_{\Omega^+} \Delta u_{ap}^+ v^+ + \alpha^- \int_{\Omega^-} \Delta u_{ap}^- v^- + \alpha^+ \int_{\Omega^+} \nabla u_{ap}^+ \nabla v^+ + \alpha^- \int_{\Omega^-} \nabla u_{ap}^- \nabla v^- \\
& + \frac{2\alpha_m \alpha^+ \alpha^-}{(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m) \delta} \int_{\Gamma} (u_{ap}^+|_{\Gamma} - u_{ap}^-|_{\Gamma})(v^- - v^+) d\Gamma \\
& + \left( \frac{24(\alpha_m \alpha^+ \alpha^- - \alpha_m \alpha^{+2})p^2 + 24(\alpha^{+2} \alpha^- - \alpha_m^2 \alpha^+)p - 8\alpha_m^2 \alpha^+ + 2\alpha_m \alpha^{+2}}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{14\alpha_m \alpha^+ \alpha^- - 8\alpha^{+2} \alpha^-}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right) \delta \int_{\Gamma} \partial_x^2 u_{ap}^+|_{\Gamma} v^+ d\Gamma \\
& + \left( \frac{8(\alpha_m \alpha^{+2} - \alpha_m \alpha^+ \alpha^-)p^2 + 8(\alpha_m^2 \alpha^+ - \alpha^{+2} \alpha^-)p + 2\alpha_m \alpha^{+2} - 2\alpha_m \alpha^+ \alpha^-}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right) \delta \\
& \times \int_{\Gamma} \partial_x^2 u_{ap}^+|_{\Gamma} v^- d\Gamma + \left( \frac{8(\alpha_m \alpha^{-2} - \alpha_m \alpha^+ \alpha^-)p^2 + 8(\alpha^{-2} \alpha^+ - \alpha_m^2 \alpha^-)p}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right. \\
& \quad \left. + \frac{2\alpha_m \alpha^{-2} - 2\alpha_m \alpha^+ \alpha^-}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right) \delta \int_{\Gamma} \partial_x^2 u_{ap}^-|_{\Gamma} v^+ d\Gamma \\
& + \left( \frac{24(\alpha_m \alpha^+ \alpha^- - \alpha_m \alpha^{-2})p^2 + 24(\alpha_m^2 \alpha^- - \alpha^{-2} \alpha^+)p - 8\alpha_m^2 \alpha^- + 2\alpha_m \alpha^{-2}}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} + \right. \\
& \quad \left. \frac{14\alpha_m \alpha^+ \alpha^- - 8\alpha^+ \alpha^{-2}}{8(2\alpha^+ \alpha^- - \alpha^- \alpha_m - 2p\alpha^+ \alpha_m - \alpha_m \alpha^+ + 2p\alpha^- \alpha_m)} \right) \delta \int_{\Gamma} \partial_x^2 u_{ap}^-|_{\Gamma} v^- d\Gamma = 0.
\end{aligned}$$

Pour  $p = \frac{\alpha^+ \alpha^- - \alpha_{\delta}^2 \pm \sqrt{\alpha_{\delta}^4 + \alpha^{+2} \alpha^{-2} - \alpha_{\delta}^2 \alpha^{+2} - \alpha_{\delta}^2 \alpha^{-2}}}{2\alpha_{\delta} \alpha^+ - 2\alpha_{\delta} \alpha^-}$ , nous aurons

$$8(\alpha_{\delta} \alpha^{+2} - \alpha_{\delta} \alpha^+ \alpha^-)p^2 + 8(\alpha_{\delta}^2 \alpha^+ - \alpha^{+2} \alpha^-)p + 2\alpha_{\delta} \alpha^{+2} - 2\alpha_{\delta} \alpha^+ \alpha^- = 0,$$

$$8(\alpha_{\delta} \alpha^{-2} - \alpha_{\delta} \alpha^+ \alpha^-)p^2 + 8(\alpha^{-2} \alpha^+ - \alpha_{\delta}^2 \alpha^-)p - 2\alpha_{\delta} \alpha^+ \alpha^- + 2\alpha_{\delta} \alpha^{-2} = 0,$$

ainsi la formulation variationnelle devient

$$\begin{aligned}
& \alpha^+ \int_{\Omega^+} \Delta u_{ap}^+ v^+ + \alpha^- \int_{\Omega^-} \Delta u_{ap}^- v^- + \alpha^+ \int_{\Omega^+} \nabla u_{ap}^+ \nabla v^+ + \alpha^- \int_{\Omega^-} \nabla u_{ap}^- \nabla v^- + \\
& \quad \frac{2\alpha_m \alpha^+ \alpha^-}{(\alpha_m^2 + \alpha^+ \alpha^- - \alpha_m \alpha^+ - \alpha_m \alpha^- \mp \sqrt{\alpha_m^4 + \alpha^{+2} \alpha^{-2} - \alpha_m^2 \alpha^{+2} - \alpha_m^2 \alpha^{-2}}) \delta} \\
& \quad \times \int_{\Gamma} (u_{ap}^+|_{\Gamma} - u_{ap}^-|_{\Gamma})(v^- - v^+) d\Gamma - \\
& \quad \left( \frac{8\alpha^+ (\alpha_m - \alpha^+) (\alpha_m - \alpha^-)}{8(\alpha_m^2 + \alpha^+ \alpha^- - \alpha_m \alpha^+ - \alpha_m \alpha^- \mp \sqrt{\alpha_m^4 + \alpha^{+2} \alpha^{-2} - \alpha_m^2 \alpha^{+2} - \alpha_m^2 \alpha^{-2}}) \delta} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \delta \int_{\Gamma} \partial_x^2 u_{ap}^+|_{\Gamma} v^+ d\Gamma - \\ & \left( \frac{8\alpha^-(\alpha_m - \alpha^+)(\alpha_m - \alpha^-)}{8(\alpha_m^2 + \alpha^+\alpha^- - \alpha_m\alpha^+ - \alpha_m\alpha^- \mp \sqrt{\alpha_m^4 + \alpha^{+2}\alpha^{-2} - \alpha_m^2\alpha^{+2} - \alpha_m^2\alpha^{-2}})} \right) \\ & \times \delta \int_{\Gamma} \partial_x^2 u_{ap}^-|_{\Gamma} v^- d\Gamma = 0. \end{aligned}$$

Pour  $(\alpha_m > \alpha^- \text{ et } \alpha_m > \alpha^+)$  ou  $(\alpha_m < \alpha^- \text{ et } \alpha_m < \alpha^+)$ , il est simple de voir que la forme bilinéaire associé au problème (0.0.1a)-(0.0.1f) est coercive, ce qui n'est pas le cas pour  $\alpha^{\mp} < \alpha_m < \alpha^{\pm}$ , alors nous allons surmonter cette difficulté en utilisant une technique particulière qui consiste à transformer la forme bilinéaire en une équation pseudo-différentielle sur  $\Gamma$  qui nous permettra de montrer l'existence et l'unicité d'une solution approchée et de donner une estimation de l'erreur.

# Organisation de la thèse

Le manuscrit est divisé deux parties :

## **Partie I : "Conditions de transmission de type Ventcel pour le problème de Helmholtz"**

Cette partie est contituée de 4 chapitres.

### **Chapitre 1 : "Position du problème et géométrie différentielle"**

Dans La première section de ce chapitre, nous définissons le problème initial et démontrons des résultats d'existence et d'unicité de sa solution.

La deuxième section a pour but d'introduire les principaux outils de la géométrie différentielle afin de reformuler notre problème dans un domaine fixe (indépendant de  $\varepsilon$ ). Cette technique est un outil essentiel pour déterminer un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$ .

### **Chapitre 2 : "Développement asymptotique"**

Dans ce chapitre, divisé en deux sections, nous définissons un développement asymptotique de la solution, calculons ses trois premiers termes et énonçons un théorème le justifiant.

### **Chapitre 3 : "Problème approché"**

A partir des résultats du chapitre 2, nous dérivons un problème approché modélisant l'effet de la couche mince par des conditions de transmission approchées, faisant intervenir des opérateurs différentiels tangentiels d'ordre 2, appelées des conditions de type Ventcel. Enfin, nous établirons une estimation d'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

## **Partie 2 : "Analyse asymptotique pour un problème de Helmholtz avec couche mince d'épaisseur non constante"**

Dance cette partie, nous nous intéressons au problème de Helmholtz défini sur  $\mathbb{R}^2$  contenant une couche mince d'épaisseur non-constante.

#### **Chapitre 4 :** "Description du problème et aspect géométrique"

Dans ce chapitre, nous décrivons le problème étudié et nous rappelons les notions fondamentales de géométrie différentielle pour réécrire les équations du problème dans un domaine fixe indépendant de  $\varepsilon$ .

#### **Chapitre 5 :** "Analyse asymptotique"

Nous dérivons dans ce chapitre un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  en fonction du petit paramètre  $\varepsilon$ . Nous présentons une hiérarchie d'équations définies dans un domaine fixe (indépendant de  $\varepsilon$ ). Nous donnons ensuite les trois premiers termes du développement asymptotique ainsi que le théorème de convergence justifiant notre ansatz.

#### **Chapitre 6 :** "Conditions de transmission approchées"

Dans ce chapitre, nous dérivons des modèles approchés avec des conditions de transmission de type Ventcel. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution et énonçons une estimation d'erreur.

Enfin, nous terminons ce travail par une conclusion et des perspectives.

# Première partie

## Conditions de transmission de type Ventcel pour un problème de Helmholtz





# CHAPITRE

## 1

# POSITION DU PROBLÈME ET GÉOMÉTRIE DIFFÉRENTIELLE

## 1.1 Position du problème

Soit  $\Omega_\infty$  un domaine extérieur hétérogène de  $\mathbb{R}^2$  dans lequel l'onde se propage. Son complémentaire est un compact de  $\mathbb{R}^2$ , de classe  $\mathcal{C}^\infty$  et de frontière  $\Gamma_i$  représentant l'obstacle.

Le domaine  $\Omega_\infty$  est composé de trois sous-domaines : un ouvert borné  $\Omega_-^\varepsilon$  de frontière  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_-^\varepsilon$  ; une couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$  recouvrant  $\Omega_-^\varepsilon$ , d'épaisseur constante  $\varepsilon > 0$  suffisamment petite ; et un domaine extérieur infini  $\Omega_+^\varepsilon$  de  $\mathbb{R}^2$ , de frontière  $\Gamma_+^\varepsilon$ , et défini par  $\Omega_+^\varepsilon = \Omega_\infty \setminus (\Omega_-^\varepsilon \cup \overline{\Omega_m^\varepsilon})$  (cf. Fig. 1.1).

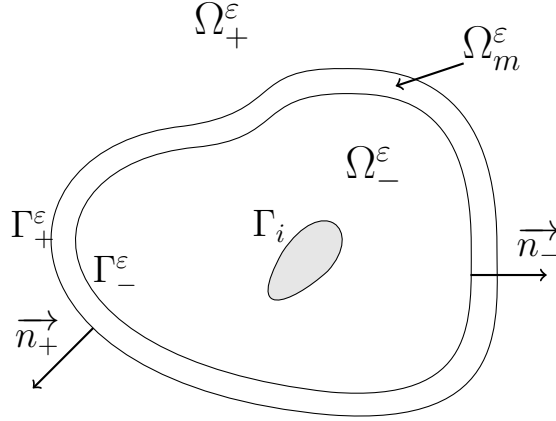


FIGURE 1.1 – La géométrie du problème.

Soient  $\alpha_\varepsilon$  et  $k_\varepsilon$  deux fonctions strictement positives définies sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} \alpha_+ & \text{si } x \text{ dans } \Omega_+^\varepsilon, \\ 1 & \text{si } x \text{ dans } \Omega_m^\varepsilon, \\ \alpha_- & \text{si } x \text{ dans } \Omega_-^\varepsilon, \end{cases} \text{ et } k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k_+ & \text{si } x \text{ dans } \Omega_+^\varepsilon, \\ k_m & \text{si } x \text{ dans } \Omega_m^\varepsilon, \\ k_- & \text{si } x \text{ dans } \Omega_-^\varepsilon. \end{cases} \quad (1.1.1)$$

Dans (1.1.1),  $\alpha_\varepsilon$  et  $k_\varepsilon^2$  décrivent respectivement les contrastes et les propriétés réfractives des milieux  $\Omega_-^\varepsilon$  et  $\Omega_m^\varepsilon$  par rapport au domaine de propagation extérieur  $\Omega_+^\varepsilon$ . Nous supposons que toutes les constantes  $\alpha_\pm$ ,  $k_\pm^2$  et  $k_m^2$  sont indépendantes de  $\varepsilon$  et  $\alpha_\pm \in ]0, 1[$  ou  $\alpha_\pm \in ]1, +\infty[$ .

Sous les hypothèses submentionnées, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de Helmholtz suivant

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon + k_\varepsilon^2 u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \cup \Omega_m^\varepsilon \cup \Omega_+^\varepsilon, & (1.1.2a) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_i, & (1.1.2b) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u^\varepsilon - u_{inc}) = 0, & & (1.1.2c) \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur les interfaces  $\Gamma_\pm^\varepsilon$

$$\begin{cases} u_\pm^\varepsilon = u_m^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, & (1.1.2d) \\ \alpha_\pm \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_\pm^\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_m^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, & (1.1.2e) \end{cases}$$

où  $\partial_{\mathbf{n}_+}$  et  $\partial_{\mathbf{n}_-}$  désignent les dérivées dans la direction des vecteurs unitaires normaux  $\mathbf{n}_+$  et  $\mathbf{n}_-$  à  $\Gamma_+^\varepsilon$  et  $\Gamma_-^\varepsilon$  respectivement (Fig. 1.1);  $u_+^\varepsilon$ ,  $u_m^\varepsilon$  et  $u_-^\varepsilon$  sont les restrictions de

$u^\varepsilon$  respectivement aux domaines  $\Omega_+^\varepsilon$ ,  $\Omega_m^\varepsilon$  et  $\Omega_-^\varepsilon$ ;  $u_{inc}$  étant l'onde incidente définie par  $u_{inc} = e^{ik_+(x \cdot d)}$ , où  $d$  est un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^2$  donnant la direction de l'onde plane  $u_{inc}$ .

Le théorème suivant donne un résultat d'unicité de la solution  $u^\varepsilon$ ,

**Théorème 2.** *Le problème (1.1.2) admet au plus une solution  $u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega_\infty)$ .*

*Démonstration.* Considérons le problème homogène suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H_{loc}^1(\Omega_\infty) \text{ telle que} & (1.1.3a) \\ \Delta u^\varepsilon + k_\varepsilon^2 u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon \cup \Omega_m^\varepsilon \cup \Omega_+^\varepsilon, & (1.1.3b) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_i, & (1.1.3c) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u^\varepsilon = 0, & & (1.1.3d) \end{array} \right.$$

avec

$$\left\{ \begin{array}{ll} u_\pm^\varepsilon = u_m^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, & (1.1.3e) \\ \alpha_\pm \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_\pm^\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_m^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, & (1.1.3f) \end{array} \right.$$

En appliquant un résultat de régularité de la solution des problèmes élliptiques (cf. [3]), nous aurons  $(u_-^\varepsilon, u_m^\varepsilon, u_+^\varepsilon) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-^\varepsilon}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_m^\varepsilon}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_+^\varepsilon})$ .

Nous tranquons maintenant le domaine  $\Omega_\infty$  par  $B(O, R)$ , la boule de centre O et de rayon  $R$  suffisamment grand pour contenir l'obstacle et la couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$  (cf. Fig. 1.2). Nous posons  $\widehat{\Omega}_+^\varepsilon = \Omega_+^\varepsilon \cap B(O, R)$ . Multipliant l'équation (1.1.3b) par  $\overline{u^\varepsilon}$  et intégrant sur  $B(O, R)$  tout en utilisant la formule de Green, nous obtenons

$$\begin{aligned} & \alpha_- \int_{\Omega_-^\varepsilon} |\nabla u_-^\varepsilon|^2 - k_-^2 |u_-^\varepsilon|^2 d\Omega_-^\varepsilon + \int_{\Omega_m^\varepsilon} |\nabla u_m^\varepsilon|^2 - k_m^2 |u_m^\varepsilon|^2 d\Omega_m^\varepsilon \\ & + \alpha_+ \int_{\widehat{\Omega}_+^\varepsilon} |\nabla u_+^{\varepsilon, ap}|^2 - k_+^2 |u_+^\varepsilon|^2 d\widehat{\Omega}_+^\varepsilon = \alpha_+ \int_{S_R} \partial_R u_+^\varepsilon \overline{u_+^\varepsilon} dS_R, \end{aligned} \quad (1.1.4)$$

où  $\partial_R$  désigne la normale unitaire extérieure à la sphère  $S_R$ . D'où

$$\text{Im} \left( \alpha_+ \int_{S_R} \partial_R u_+^\varepsilon \overline{u_+^\varepsilon} dS_R \right) \leq 0. \quad (1.1.5)$$

Par ailleurs, comme

$$\frac{k_+}{2} \int_{S_R} |u_+^\varepsilon|^2 dS_R = \frac{1}{2k_+} \left[ k_+^2 \int_{S_R} |u_+^\varepsilon|^2 dS_R + \int_{S_R} |\partial_R u_+^\varepsilon|^2 dS_R - 2k_+ \text{Im} \left( \int_{S_R} \partial_R u_+^\varepsilon \overline{u_+^\varepsilon} dS_R \right) \right]$$

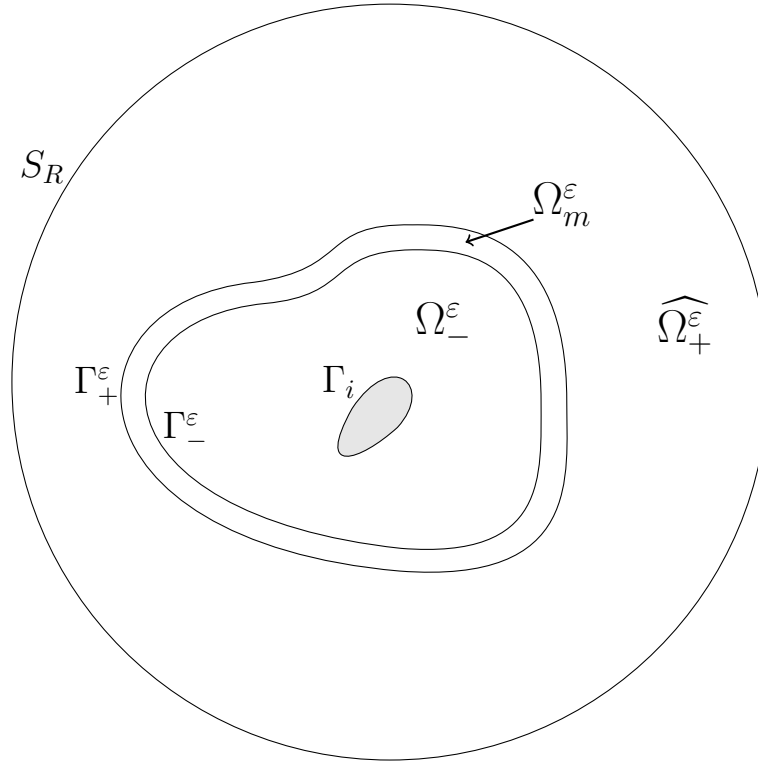


FIGURE 1.2 – La boule  $B(O, R)$ .

$$- \frac{1}{2k_+} \int_{S_R} |\partial_R u_+^\epsilon|^2 dS_R + \text{Im} \left( \int_{S_R} \partial_R u_+^\epsilon \overline{u_+^\epsilon} dS_R \right),$$

de (1.1.5), il découle

$$\frac{k_+}{2} \int_{S_R} |u_+^\epsilon|^2 dS_R \leq \frac{1}{2k_+} \int_{S_R} |\partial_R u_+^\epsilon - ik_+ u_+^\epsilon|^2 dS_R.$$

Utilisant la condition de radiation (1.1.3d), nous pouvons écrire  $\forall \epsilon > 0$

$$\begin{aligned} \int_{S_R} |u_+^\epsilon|^2 dS_R &\leq \frac{1}{k_+^2} \int_{S_R} |\partial_R u_+^\epsilon - ik_+ u_+^\epsilon|^2 dS_R \\ &\leq \frac{1}{k_+^2} \frac{\epsilon^2}{R^2} \text{mes}(S_R), \end{aligned}$$

ainsi

$$\lim_{R \rightarrow +\infty} \int_{S_R} |u_+^\epsilon|^2 dS_R = 0.$$

En vertu du lemme 46 (de Rellich, Annexe D), nous obtenons  $u_+^\epsilon = 0$  sur  $\Omega_\infty \setminus \overline{B(O, R)}$ .

Par conséquent, comme  $Im(k_{\pm}^2) \neq 0$  et la partie imaginaire de (1.1.4) nous déduisons que  $u^\varepsilon = 0$  sur  $\Omega_\infty$ .  $\square$

Pour montrer l'existence de la solution, nous tronquons le domaine  $\Omega_\infty$  et ramenons (1.1.2) à un problème posé sur un domaine borné en utilisant les opérateurs de Steklov-Poincaré.

Soit  $\Omega$  un domaine borné de  $\mathbb{R}^2$  contenant la couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$  et de bord  $\partial\Omega$  assez régulier (au moins de classe  $\mathcal{C}^2$ ) (cf. Fig. 1.3). Nous pouvons par exemple considérer la boule  $B(O, R)$  comme utilisé dans la démonstration du théorème 2. Nous posons maintenant  $\widehat{\Omega}_+^\varepsilon = \Omega_+^\varepsilon \cap \Omega$ .

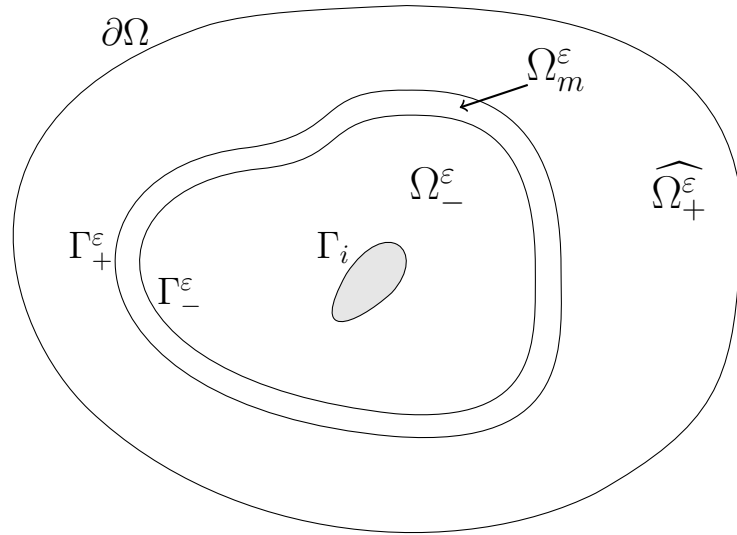


FIGURE 1.3 – Le domaine  $\Omega$ .

Nous introduisons l'opérateur de Steklov-Poincaré  $T$  défini de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  par  $T\varphi = -\partial_{n_\Omega}\omega$ , où  $\partial_{n_\Omega}$  est la normale unitaire extérieure au bord  $\partial\Omega$  et  $\omega$  est l'unique solution (cf. [24]) du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Trouver } \omega \in H_{loc}^1(\Omega_\infty \setminus \Omega) \text{ telle que} & (1.1.6a) \\ \Delta\omega + k_+^2\omega = 0 & \text{dans } \Omega_\infty \setminus \Omega, \quad (1.1.6b) \\ \omega = \varphi & \text{sur } \partial\Omega, \quad (1.1.6c) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) \omega = 0, & (1.1.6d) \end{array} \right.$$

L'opérateur  $T$  est pseudo-différentiel d'ordre 1 (cf. e.g., [4] [33]), il est linéaire continu de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . Ainsi, (1.1.2) est remplacé par un problème défini sur un domaine borné  $\Omega$  avec une condition aux limites sur  $\partial\Omega$

$$(\partial_{n_\Omega} + T)u^\varepsilon = (\partial_{n_\Omega} + T)u_{inc},$$

appelé condition transparente, i.e., (1.1.2) est équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega) \text{ telle que} & (1.1.7a) \\ \Delta u^\varepsilon + k_\varepsilon u^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega, & (1.1.7b) \\ u^\varepsilon = 0 & \text{sur } \Gamma_i, & (1.1.7c) \\ (\partial_{n_\Omega} + T)u^\varepsilon = (\partial_{n_\Omega} + T)u_{inc} & \text{sur } \partial\Omega. & (1.1.7d) \end{cases}$$

Une formulation variationnelle de (1.1.7) est donnée par

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega), & (1.1.8a) \\ a_\varepsilon(u, v) = \int_\Omega \nabla u^\varepsilon \nabla \bar{v} - u^\varepsilon \bar{v} \, d\Omega + \langle Tu^\varepsilon|_{\partial\Omega}, \bar{v}|_{\partial\Omega} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)} & (1.1.8b) \\ = l_\varepsilon(v), & (1.1.8c) \end{cases}$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}$  désigne le crochet de dualité entre  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  et  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $l_\varepsilon$  est une forme linéaire sur  $H^1(\Omega)$  donné par

$$l_\varepsilon(v) = \int_{\partial\Omega} (\partial_{n_\Omega} + T)u_{inc} \bar{v} \, d\partial\Omega.$$

Notons que la forme bilinéaire  $a_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  n'est pas coercive, c'est pour cela que nous allons ramener, par perturbation, le problème (1.1.8) à une alternative de Fredholm. Soit l'opérateur  $T_0$  défini de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$  par  $T_0\phi = -\partial_{n_\Omega}\omega_0$  où  $\omega$  est l'unique solution du problème

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega_0 \in H^1(\Omega_\infty \setminus \bar{\Omega}), \\ \Delta\omega_0 - \omega_0 = 0 & \text{dans } \Omega_\infty \setminus \bar{\Omega} \\ \omega_0 = 0, & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Le lemme suivant donne quelques propriétés de cet opérateur. Pour la preuve, nous incitons le lecteur à consulter [4]

**Lemme 3.** *L'opérateur  $T_0$  est borné et coercif de  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^{-1/2}(\partial\Omega)$ . De plus, il existe un opérateur compact  $K$  défini  $H^{1/2}(\partial\Omega)$  dans  $H^{3/2}(\partial\Omega)$  tel que :*

$$T = T_0 + K.$$

Le théorème suivant donne le résultat d'existence de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.1.8) équivalent au problème(1.1.2)

**Théorème 4.** *Le problème (1.1.8) admet une unique solution  $u^\varepsilon$  dans  $H^1(\Omega)$ .*

*Démonstration.* Soient  $\tilde{a}_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  et  $\tilde{b}_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  deux formes bilinéaires définies sur  $H^1(\Omega)$  par

$$\begin{aligned}\tilde{a}_\varepsilon(u, v) &= \int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{v} \, d\Omega + \langle T_0 u, \bar{v} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}, \\ \tilde{b}_\varepsilon(u, v) &= - \int_{\Omega} k_\varepsilon u \bar{v} \, d\Omega + \langle K u, \bar{v} \rangle_{H^{-1/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)}.\end{aligned}$$

Le problème (1.1.8) est alors équivalent à

$$\begin{cases} \text{Trouver } u^\varepsilon \in H^1(\Omega), \forall v \in H^1(\Omega) \\ \tilde{a}_\varepsilon(u^\varepsilon, v) + \tilde{b}_\varepsilon(u^\varepsilon, v) = l_\varepsilon(v). \end{cases}$$

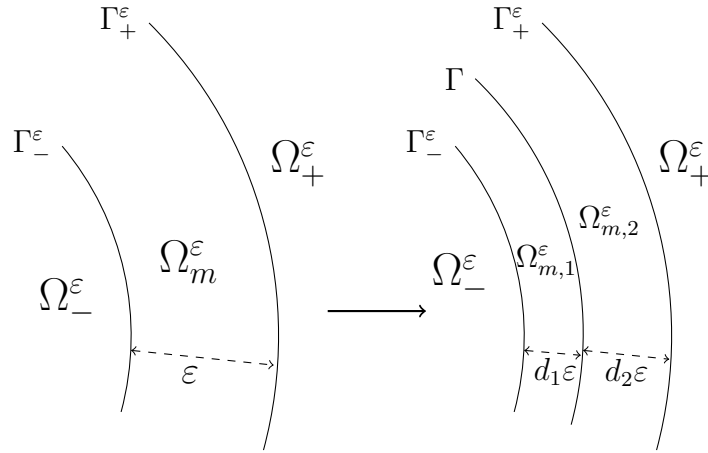
Il est clair d'après le lemme 3 que  $\tilde{a}_\varepsilon$  est coercive. Par ailleurs, compte tenu de la compacité de l'injection  $H^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$  (Voir théorème 49) et de l'opérateur  $K$ , nous déduisons que si  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont deux suites faiblement convergentes dans  $H^1(\Omega)$  vers  $\tilde{u}$  et  $\tilde{v}$  respectivement, alors

$$\tilde{b}_\varepsilon(u_n, v_n) \longrightarrow \tilde{b}_\varepsilon(\tilde{u}, \tilde{v}).$$

Par conséquent, d'après le corollaire 31, l'équivalence entre (1.1.2) et (1.1.8) ainsi que le résultat d'unicité de la solution permettent d'achever la preuve.  $\square$

## 1.2 Géométrie différentielle

Dans cette section, nous adopterons la même technique que celle utilisée dans [7, 11]. Nous considérons une interface  $\Gamma$  parallèle à  $\Gamma_\pm^\varepsilon$  divisant  $\Omega_m^\varepsilon$  en deux couches minces  $\Omega_{m,1}^\varepsilon$  et  $\Omega_{m,2}^\varepsilon$  d'épaisseur  $d_1\varepsilon$  et  $d_2\varepsilon$  respectivement, où  $d_1$  et  $d_2$  sont des nombres réels strictement positifs satisfaisants  $d_1 + d_2 = 1$  (cf. Fig. 1.4).


 FIGURE 1.4 – Zoom sur la couche mince, avec et sans l'interface  $\Gamma$ .

Le problème (1.1.2) est équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^\varepsilon + k_+^2 u_+^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_+^\varepsilon, & (1.2.1a) \\ \Delta u_-^\varepsilon + k_-^2 u_-^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon, & (1.2.1b) \\ \Delta u_{m,1}^\varepsilon + k_m^2 u_{m,1}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{m,1}^\varepsilon, & (1.2.1c) \\ \Delta u_{m,2}^\varepsilon + k_m^2 u_{m,2}^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega_{m,2}^\varepsilon, & (1.2.1d) \\ u_-^\varepsilon = 0 & \text{dans } \Gamma_i, & (1.2.1e) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^\varepsilon - u_{inc}) = 0, & & (1.2.1f) \end{cases}$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_+^\varepsilon = u_{m,2}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_+^\varepsilon, & (1.2.1g) \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}_+} u_\pm^\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}_+} u_{m,2}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_+^\varepsilon, & (1.2.1h) \\ u_{m,1}^\varepsilon = u_{m,2}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, & (1.2.1i) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_{m,1}^\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}} u_{m,2}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma, & (1.2.1j) \\ u_-^\varepsilon = u_{m,1}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon, & (1.2.1k) \\ \alpha_- \partial_{\mathbf{n}_-} u_-^\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}_-} u_{m,1}^\varepsilon & \text{sur } \Gamma_-^\varepsilon, & (1.2.1l) \end{cases}$$

où  $\partial_{\mathbf{n}}$  désigne la dérivée dans la direction du vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  à  $\Gamma$



### 1.2.1 Paramétrisation de $\Gamma$

Soit  $\Gamma$  une courbe fermée régulière  $\mathcal{C}^\infty$  paramétrée par  $\gamma$  telle que

$$\begin{aligned} \gamma : (0, l_\Gamma) &\longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \end{aligned}$$

où  $l_\Gamma$  est la longueur de  $\Gamma$  et  $t$  est la longueur d'arc de  $\gamma$ . Les vecteurs unitaires tangent et normal  $\tau(t)$  et  $\mathbf{n}(t)$  sur  $\Gamma$  à  $\gamma(t)$  sont donnés par

$$\tau(t) := \frac{d\gamma(t)}{dt} = (n_2(t), -n_1(t)), \quad \mathbf{n}(t) := (n_1(t), n_2(t)).$$

On rappelle les formules de Frénet définissant la courbure  $c(t)$  de  $\Gamma$  au point  $\gamma(t)$  ([21])

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = -c(t)\mathbf{n}, \quad \frac{d\mathbf{n}(t)}{dt} = c(t)\tau.$$

### 1.2.2 Paramétrisation de la couche mince $\Omega_m^\varepsilon$

Soit  $I_\varepsilon = (-d_1\varepsilon, d_2\varepsilon)$ . Nous paramétrons la couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$  par le  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme de variétés  $\psi$  (cf. [21]) définie sur  $(0, l_\Gamma) \times I_\varepsilon$  par

$$\begin{cases} (0, l_\Gamma) \times I_\varepsilon & \xrightarrow{\psi} \Omega_m^\varepsilon \\ (t, \eta) & \rightarrow x := \gamma(t) + \eta\mathbf{n}(t). \end{cases}$$

A toute fonction  $v$  définie sur  $\Omega_m^\varepsilon$ , nous associons la fonction  $\tilde{v}$  définie sur  $(0, l_\Gamma) \times I_\varepsilon$  par

$$\begin{cases} \tilde{v}(t, \eta) & := v(x), \\ x & = \psi(t, \eta), \end{cases}$$

nous aurons

$$\nabla_{t,\eta}\tilde{v}(t, \eta) = \begin{pmatrix} \partial_t\tilde{v}(t, \eta) \\ \partial_\eta\tilde{v}(t, \eta) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1 + \eta c(t))n_2(t) & -(1 + \eta c(t))n_1(t) \\ n_1(t) & n_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_{x_1}v(x) \\ \partial_{x_2}v(x) \end{pmatrix},$$

donc

$$\nabla v(x) = \begin{pmatrix} \partial_{x_1}v(x) \\ \partial_{x_2}v(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_2(t)}{1+\eta c(t)} & n_1(t) \\ \frac{-n_1(t)}{1+\eta c(t)} & n_2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t\tilde{v}(t, \eta) \\ \partial_\eta\tilde{v}(t, \eta) \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, l'expression du Laplacien dans les variables  $(t, \eta)$  est

$$\Delta v = \left[ \partial_\eta^2 + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_\eta + \frac{1}{1 + \eta c(t)} \partial_t \left( \frac{1}{1 + \eta c(t)} \partial_t \right) \right] \tilde{v}.$$

En raison de la dépendance de  $\Omega_m^\varepsilon$  du paramètre  $\varepsilon$ , nous ne pouvons pas donner un développement asymptotique de  $u^\varepsilon$  en fonction de  $\varepsilon$  (cf. [4]). Par conséquent, nous transformons  $\Omega_m^\varepsilon$  en un domaine fixe indépendant de  $\varepsilon$ . Nous introduisons le changement d'échelle  $s = \eta/\varepsilon$  et l'intervalle  $I = (-d_1, d_2)$  tels que le  $\mathcal{C}^\infty$ -difféomorphisme  $\Phi$ , défini par

$$\begin{cases} \Omega_m := (0, l_\Gamma) \times I & \xrightarrow{\Phi} \Omega_m^\varepsilon \\ (t, s) & \rightarrow x := \gamma(t) + \varepsilon \mathbf{sn}(t), \end{cases}$$

paramétrise la couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$ .

D'où l'expression du Laplacien dans les coordonnées  $(t, s)$  est

$$\begin{aligned} \Delta v &= \varepsilon^{-2} \left[ \partial_s^2 V + \varepsilon \frac{c(t)}{1 + \varepsilon s c(t)} \partial_s V + \frac{\varepsilon^2}{1 + \varepsilon s c(t)} \partial_t \left( \frac{1}{1 + \varepsilon s c(t)} \partial_t \right) V \right] \\ &= \varepsilon^{-2} \left( \partial_s^2 V - \sum_{j=1}^N \varepsilon^j A_j V + \varepsilon^{N+1} T_N V \right), \end{aligned} \quad (1.2.2)$$

où  $T_N$  est un opérateur borné par rapport à  $\varepsilon$ . En particulier

$$A_1 = -c(t) \partial_s, \quad (1.2.3)$$

$$A_2 = s c^2(t) \partial_s - \partial_t^2, \quad (1.2.4)$$

$$A_3 = -s^2 c^3(t) \partial_s + 2s c(t) \partial_t^2 + s c'(t) \partial_t. \quad (1.2.5)$$

**Remarque 5.** *Dans toute la suite, nous noterons par  $u|_\Gamma$  la trace de  $u$  sur  $\Gamma$  indifféremment dans les coordonnées locales ou les coordonnées cartésiennes.*

## CHAPITRE

### 2

# DÉVELOPPEMENT ASYMPTOTIQUE

Ce chapitre est dédié au développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.1.2) en fonction de  $\varepsilon$ . Nous dérivons une hiérarchie d'équations définies dans un domaine fixe (indépendant de  $\varepsilon$ ). Ensuite, nous donnons les trois premiers termes du développement asymptotique. Enfin, nous énonçons un théorème justifiant la convergence du développement asymptotique.

## 2.1 Hiérarchie des équations

Il est impossible de déterminer un développement asymptotique en fonction de  $\varepsilon$  uniformément sur tout le domaine  $\Omega_\infty$  (cf., e.g., [4, 16, 20, 30]), ceci est dû au phénomène de couche limite au voisinage de la couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$ .

Par conséquent, nous considérons deux développements asymptotiques : un développement asymptotique extérieur correspondant au développement asymptotique de la so-

lution  $u^\varepsilon$  restreinte à  $\Omega_+^\varepsilon$  et  $\Omega_-^\varepsilon$ , écrit en coordonnées cartésiennes  $x = (x_1, x_2)$  (échelle macroscopique) et donné par l'ansatz

$$u_+^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_+^n \text{ dans } \Omega_+^\varepsilon, \quad (2.1.1)$$

$$u_-^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_-^n \text{ dans } \Omega_-^\varepsilon, \quad (2.1.2)$$

où les termes  $u_+^n$  et  $u_-^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont indépendants de  $\varepsilon$ , définis sur  $\Omega_+ := \Omega_+^\varepsilon \cup \Gamma_2^\varepsilon \cup \Omega_{m,2}^\varepsilon$  et  $\Omega_- := \Omega_-^\varepsilon \cup \Gamma_1^\varepsilon \cup \Omega_{m,1}^\varepsilon$  respectivement et vérifient

$$\begin{cases} \Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^n + k_-^2 u_-^n = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^n = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^n - \delta_{0,n} u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (2.1.3)$$

avec  $\delta_{0,n}$  étant le symbole de Kronecker. Et un développement asymptotique intérieur correspondant au développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  restreinte à  $\Omega_m^\varepsilon$ , écrit en coordonnées locales  $(t, s)$  (échelle microscopique) et donné par l'ansatz

$$u_m^\varepsilon(x_1, x_2) = U_m^\varepsilon(t, s) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_m^n(t, s) \text{ dans } \Omega_m, \quad (2.1.4)$$

où  $U_m^n$  sont indépendants de  $\varepsilon$ .

Le développement de Taylor par rapport à la variable normale donne

$$\begin{aligned} u_-^\varepsilon|_{\Gamma_-^\varepsilon} &= u_-^0|_\Gamma + \varepsilon (u_-^1|_\Gamma - d_1 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma) + \varepsilon^2 \left( u_-^2|_\Gamma - d_1 \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma + \frac{d_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma \right) + \dots, \\ \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^\varepsilon|_{\Gamma_-^\varepsilon} &= \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma + \varepsilon (\alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma - \alpha_- d_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_\Gamma - \alpha_- d_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^1|_\Gamma + \alpha_- \frac{d_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_-^0|_\Gamma \right) + \dots, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_+^\varepsilon|_{\Gamma_+^\varepsilon} &= u_+^0|_\Gamma + \varepsilon (u_+^1|_\Gamma + d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma) + \varepsilon^2 \left( u_+^2|_\Gamma + d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + \frac{d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma \right) + \dots, \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^\varepsilon|_{\Gamma_+^\varepsilon} &= \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + \varepsilon (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + \alpha_+ d_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma) \\ &+ \varepsilon^2 \left( \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_\Gamma + \alpha_+ d_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^1|_\Gamma + \alpha_+ \frac{d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^0|_\Gamma \right) + \dots. \end{aligned}$$

Les conditions de transmission (1.2.1g) et (1.2.1k) impliquent

$$\begin{aligned}
U_m^0(t, -d_1) + \varepsilon U_m^1(t, -d_1) + \varepsilon^2 U_m^2(t, -d_1) &+ \dots \\
&= u_-^0|_\Gamma + \varepsilon (u_-^1|_\Gamma - d_1 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \varepsilon^2 \left( u_-^2|_\Gamma - d_1 \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma + \frac{d_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma \right) \quad (2.1.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U_m^0(t, d_2) + \varepsilon U_m^1(t, d_2) + \varepsilon^2 U_m^2(t, d_2) &+ \dots \\
&= u_+^0|_\Gamma + \varepsilon (u_+^1|_\Gamma + d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma) \\
&+ \varepsilon^2 \left( u_+^2|_\Gamma + d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + \frac{d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma \right) + \dots \quad (2.1.6)
\end{aligned}$$

et les conditions (1.2.1h) et (1.2.1l) donnent

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1} \partial_s U_m^0(t, -d_1) + \partial_s U_m^1(t, -d_1) &+ \varepsilon \partial_s U_m^2(t, -d_1) + \varepsilon^2 \partial_s U_m^3(t, -d_1) + \dots \\
&= \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma + \varepsilon (\alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma - \alpha_- d_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \varepsilon^2 \left( \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_\Gamma - \alpha_- d_1 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^1|_\Gamma + \alpha_- \frac{d_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_-^0|_\Gamma \right) \quad (2.1.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon^{-1} \partial_s U_m^0(t, d_2) + \partial_s U_m^1(t, d_2) &+ \varepsilon \partial_s U_m^2(t, d_2) + \varepsilon^2 \partial_s U_m^3(t, d_2) + \dots \\
&= \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + \varepsilon (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + \alpha_+ d_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma) \\
&+ \varepsilon^2 \left( \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_\Gamma + \alpha_+ d_2 \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^1|_\Gamma + \alpha_+ \frac{d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^0|_\Gamma \right) \quad (2.1.8)
\end{aligned}$$

Insérant le développement (2.1.4) dans (1.1.2a) tout en utilisant (1.2.2), nous obtenons par identification des termes de même puissance en  $\varepsilon$  l'hierarchie d'équations,  $\forall (t, s) \in (0, l_\Gamma) \times I$

$$\partial_s^2 U_m^0 = 0, \quad (2.1.9)$$

$$\partial_s^2 U_m^1 = A_1 U_m^0, \quad (2.1.10)$$

$$\partial_s^2 U_m^2 = A_1 U_m^1 + A_2 U_m^0 - k_m^2 U_m^0, \quad (2.1.11)$$

$$\partial_s^2 U_m^3 = A_1 U_m^2 + A_2 U_m^1 + A_3 U_m^0 - k_m^2 U_m^1, \quad (2.1.12)$$

$\vdots$

## 2.2 Calcul des trois premiers termes

Dans ce paragraphe, nous calculons les trois premiers termes du développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$ .

### 2.2.1 Terme d'ordre 0

L'équation (2.1.9) et les conditions (2.1.7) et (2.1.8) donnent

$$\partial_s U_m^0 = 0.$$

En utilisant (2.1.5) et (2.1.6), nous aurons

$$U_m^0(t, s) = u_-^0|_\Gamma = u_+^0|_\Gamma, \quad \forall (t, s) \in \Omega_m. \quad (2.2.1)$$

L'équation (2.1.10) implique

$$\partial_s^2 U_m^1 = A_1 U_m^0 = -c(t) \partial_s U_m^0 = 0.$$

En utilisant (2.1.7) et (2.1.8), nous obtenons

$$\partial_s U_m^1(t, s) = \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma = \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma, \quad \forall (t, s) \in \Omega_m. \quad (2.2.2)$$

Par conséquent, de (2.1.3), (2.2.1) et (2.2.2),  $(u_-^0, u_+^0)$  est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0 = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^0 + k_-^2 u_-^0 = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_+^0 = u_-^0 & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 = \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0 & \text{sur } \Gamma, \\ u_-^0 = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^0 - u_{inc}) = 0. \end{cases}$$

Notons que le terme  $(u_-^0, u_+^0)$  n'est autre que la solution du problème sans la couche mince.

### 2.2.2 Terme d'ordre 1

La relation (2.2.2) avec la condition (2.1.5) donnent

$$U_m^1(t, s) = (\alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma) s + u_-^1|_\Gamma + d_1 (\alpha_- - 1) \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma, \quad \forall (t, s) \in \Omega_m. \quad (2.2.3)$$

Donc (2.1.6) implique

$$u_+^1|_\Gamma - u_-^1|_\Gamma = \frac{\alpha_+\alpha_- - d_2\alpha_- - d_1\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-}(\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_\Gamma + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma). \quad (2.2.4)$$

De (2.1.11), nous aurons

$$\begin{aligned} \partial_s^2 U_m^2 &= A_1 U_m^1 + A_2 U_m^0 - k_m^2 U_m^0 \\ &= -c(t)\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma - k_m^2 u_-^0|_\Gamma. \end{aligned}$$

En utilisant (2.1.7), nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_s U_m^2 &= [-c(t)\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma - k_m^2 u_-^0|_\Gamma] (s + d_1) \\ &\quad + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_\Gamma - d_1\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma. \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

A l'aide de la condition (2.1.8) à l'ordre 1, nous aurons

$$\begin{aligned} \alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_\Gamma - \alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_\Gamma &= [-c(t)\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma - k_m^2 u_-^0|_\Gamma] (d_2 + d_1) \\ &\quad - d_2\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma - d_1\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma \\ &= -c(t)\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma - k_m^2 u_-^0|_\Gamma \\ &\quad - d_2\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma - d_1\alpha_-\partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Comme

$$\Delta = \frac{1}{1 + \eta c(t)} \partial_t \left( \frac{1}{1 + \eta c(t)} \partial_t \right) + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_\eta + \partial_\eta^2,$$

et

$$\Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0,$$

il s'en suit

$$\frac{-\eta c'(t)}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_t u_+^n + \frac{1}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_t^2 u_+^n + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_\eta u_+^n + \partial_\eta^2 u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0.$$

Par passage à la limite  $\eta \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$\partial_t^2 u_+^n|_{\eta=0} + c(t)\partial_\eta u_+^n|_{\eta=0} + \partial_\eta^2 u_+^n|_{\eta=0} + k_+^2 u_+^n|_{\eta=0} = 0,$$

i.e.,

$$\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^n|_\Gamma = -\partial_t^2 u_+^n|_\Gamma - c(t)\partial_{\mathbf{n}} u_+^n|_\Gamma - k_+^2 u_+^n|_\Gamma, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.2.7)$$

De même pour  $u_-^n$ , nous aurons

$$\partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^n|_{\Gamma} = -\partial_t^2 u_-^n|_{\Gamma} - c(t)\partial_{\mathbf{n}} u_-^n|_{\Gamma} - k_-^2 u_-^n|_{\Gamma}, \quad \forall n \geq 0. \quad (2.2.8)$$

Donc (2.2.6) devient

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_{\Gamma} &= \frac{d_1 \alpha_- + d_2 \alpha_+ - 1}{2} (\partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma}) \\ &+ \frac{d_1 \alpha_- k_-^2 + d_2 \alpha_+ k_+^2 - k_m^2}{2} (u_+^0|_{\Gamma} + u_-^0|_{\Gamma}). \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Par conséquent, de (2.1.3), (2.2.4) et (2.2.9),  $(u_-^1, u_+^1)$  est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^1 + k_+^2 u_+^1 = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^1 + k_-^2 u_-^1 = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^1 = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^1) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u_+^1 - u_-^1 &= \frac{\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{2 \alpha_+ \alpha_-} (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0), \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1 - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1 &= \frac{d_1 \alpha_- + d_2 \alpha_+ - 1}{2} (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\ &+ \frac{d_1 \alpha_- k_-^2 + d_2 \alpha_+ k_+^2 - k_m^2}{2} (u_+^0 + u_-^0). \end{aligned}$$

### 2.2.3 Terme d'ordre 2

En utilisant (2.2.5) et la condition (2.1.5), nous obtenons  $\forall (t, s) \in \Omega_m$ ,

$$\begin{aligned} U_m^2(t, s) &= u_-^2|_{\Gamma} + (\alpha_- s + d_1 \alpha_- - d_1) \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_{\Gamma} - \left( \frac{s^2}{2} + d_1 s + \frac{d_1^2}{2} \right) c(t) \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma} \\ &- \left( \frac{s^2}{2} + d_1 s + \frac{d_1^2}{2} \right) \partial_t^2 u_-^0 + \left( \frac{d_1^2}{2} - d_1^2 \alpha_- - d_1 \alpha_- s \right) \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_{\Gamma} \\ &- \left( \frac{d_1^2}{2} + \frac{s^2}{2} + d_1 s \right) k_m^2 u_-^0|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

Comme

$$U_m^2(t, d_2) = u_+^2|_{\Gamma} + d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} + \frac{d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma},$$



nous trouvons

$$\begin{aligned} u_+^2|_\Gamma - u_-^2|_\Gamma &= -\frac{1}{2}(c(t)\alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^0 + k_m^2 u_-^0) - d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma \\ &\quad + (\alpha_- - d_1) \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma - \frac{d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma + \left( \frac{d_1^2}{2} - d_1 \alpha_- \right) \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^0|_\Gamma. \end{aligned}$$

De (2.2.7) et (2.2.8), nous aurons

$$\begin{aligned} u_+^2|_\Gamma - u_-^2|_\Gamma &= -d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + (\alpha_- - d_1) \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma \\ &\quad + \frac{d_2^2}{2} (\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + k_+^2 u_+^0|_\Gamma) - \frac{1}{2} (c(t) \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^0 + k_m^2 u_-^0) \\ &\quad - \left( \frac{d_1^2}{2} - d_1 \alpha_- \right) (\partial_t^2 u_-^0|_\Gamma + c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma + k_-^2 u_-^0|_\Gamma). \end{aligned}$$

En utilisant les conditions de transmission (2.2.1), (2.2.2) et (2.2.9), nous aurons

$$\begin{aligned} u_+^2|_\Gamma - u_-^2|_\Gamma &= \frac{\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{2\alpha_+ \alpha_-} (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma) \\ &\quad + \frac{d_1 \alpha_+ \alpha_-^2 - d_2 \alpha_+^2 \alpha_- + d_1 d_2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) + d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{4\alpha_+ \alpha_-} (\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma) \\ &\quad + c(t) \frac{(d_1 - d_2) \alpha_- \alpha_+ + d_2^2 \alpha_- - d_1^2 \alpha_+}{4\alpha_+ \alpha_-} (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma) \\ &\quad + \frac{(d_1 k_-^2 \alpha_- - d_2 k_+^2 \alpha_+) \alpha_+ \alpha_- + d_1 d_2 (k_+^2 \alpha_+^2 - k_-^2 \alpha_-^2) + k_m^2 (d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)}{4\alpha_+ \alpha_-} \\ &\quad \times (u_+^0|_\Gamma + u_-^0|_\Gamma), \end{aligned}$$

et à l'aide de (2.2.4), nous obtenons

$$\begin{aligned} u_+^2|_\Gamma - u_-^2|_\Gamma &= \frac{\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{2\alpha_+ \alpha_-} (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma) \\ &\quad + \frac{d_1 \alpha_+ \alpha_-^2 - d_2 \alpha_+^2 \alpha_- + d_1 d_2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) + d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{4\alpha_+ \alpha_-} (\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma) \\ &\quad + c(t) \frac{(d_1 - d_2) \alpha_- \alpha_+ + d_2^2 \alpha_- - d_1^2 \alpha_+}{2(\alpha_+ \alpha_- - d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-)} (u_+^1|_\Gamma - u_-^1|_\Gamma) \\ &\quad + \frac{(d_1 k_-^2 \alpha_- - d_2 k_+^2 \alpha_+) \alpha_+ \alpha_- + d_1 d_2 (k_+^2 \alpha_+^2 - k_-^2 \alpha_-^2) + k_m^2 (d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)}{4\alpha_+ \alpha_-} \\ &\quad \times (u_+^0|_\Gamma + u_-^0|_\Gamma). \end{aligned} \tag{2.2.11}$$

L'équation (2.1.12) implique

$$\partial_s U_m^3(t, s) = \left[ 2c^2(t) \Psi_1(t) + c(t) k_m^2 U_m^0 - \partial_t^2 (\Psi_1(t)) + 3c(t) \partial_t^2 U_m^0 + c'(t) \partial_t U_m^0 - k_m^2 \Psi_1(t) \right] \frac{s^2}{2}$$

$$- [c(t)\Psi_2(t) + \partial_t^2\Phi_1(t) + k_m^2\Phi_1(t)] s + \varphi(t), \quad (2.2.12)$$

où

$$\begin{aligned} \Psi_1(t) &= \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma} = \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}, \\ \Psi_2(t) &= \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} + (d_2 - d_2 \alpha_+) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + (d_2 k_m^2 - d_2 k_+^2 \alpha_+) u_+^0|_{\Gamma}, \\ \Phi_1(t) &= u_-^1|_{\Gamma} + (\alpha_- - 1) d_1 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma} \\ &= u_+^1|_{\Gamma} + (1 - \alpha_+) d_2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}, \end{aligned}$$

et  $\varphi$  est une fonction définie sur  $\Gamma$  indépendante de  $s$ . En utilisant les conditions de transmission (2.1.7) à l'ordre 2, nous trouvons

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma} - d_1 \alpha_- \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^1|_{\Gamma} + \frac{\alpha_- d_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_-^0|_{\Gamma} \\ &- [2c^2(t)\Psi_1(t) + c(t)k_m^2 U_m^0 - \partial_t^2(\Psi_1(t)) + 3c(t)\partial_t^2 U_m^0 + c'(t)\partial_t U_m^0 - k_m^2 \Psi_1(t)] \frac{d_1^2}{2} \\ &- [c(t)\Psi_2(t) + \partial_t^2\Phi_1(t) + k_m^2\Phi_1(t)] d_1. \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant (6.3.3) et la condition de transmission (2.1.8), nous obtenons

$$\begin{aligned} \varphi(t) &= \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_{\Gamma} + d_2 \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^1|_{\Gamma} + \frac{\alpha_+ d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^0|_{\Gamma} \\ &- [2c^2(t)\Psi_1(t) + c(t)k_m^2 U_m^0 - \partial_t^2(\Psi_1(t)) + 3c(t)\partial_t^2 U_m^0 + c'(t)\partial_t U_m^0 - k_m^2 \Psi_1(t)] \frac{d_2^2}{2} \\ &+ [c(t)\Psi_2(t) + \partial_t^2\Phi_1(t) + k_m^2\Phi_1(t)] d_2. \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} &\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_{\Gamma} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma} = -d_1 \alpha_- \partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^1|_{\Gamma} - d_2 \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^1|_{\Gamma} - \frac{\alpha_+ d_2^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^0|_{\Gamma} + \frac{\alpha_- d_1^2}{2} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_-^0|_{\Gamma} \\ &- d_2 \partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} - d_2 k_m^2 u_+^1|_{\Gamma} - d_1 c \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_{\Gamma} - d_1 \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma} - d_1 k_m^2 u_-^1|_{\Gamma} - d_2 c \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} \\ &- \left( \frac{d_1^2}{2} k_m^2 \alpha_+ + d_1^2 \alpha_+ c^2(t) - d_2^2 c^2(t) \alpha_+ - \frac{d_2^2}{2} k_m^2 \alpha_+ + k_m^2 d_2^2 - k_m^2 d_1^2 \frac{\alpha_+}{\alpha_-} \right) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} \\ &- \left( d_1^2 \alpha_- k_-^2 - d_2^2 \alpha_+ k_+^2 + \frac{d_2 - d_1}{2} k_m^2 \right) c(t) u_+^0|_{\Gamma} - \left( \frac{d_1 - d_2}{2} \right) c'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} \\ &- \left( d_1^2 \alpha_- - d_2^2 \alpha_+ + \frac{d_1}{2} - \frac{d_2}{2} \right) c(t) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} \\ &- \left( d_2^2 - \frac{\alpha_+}{\alpha_-} d_1^2 + \frac{d_1 - d_2}{2} \alpha_+ \right) \partial_t^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}). \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Maintenant, rappelant que

$$\Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n = \frac{-\eta c'(t)}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_t u_+^n + \frac{1}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_t^2 u_+^n + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_\eta u_+^n + \partial_\eta^2 u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à  $\eta$  conduit à

$$\begin{aligned} & \frac{-c'(t) [1 + \eta c(t)]^3 + 3c(t) [1 + \eta c(t)]^2 \eta c'}{[1 + \eta c(t)]^6} \partial_t u_+^n + \frac{\eta c'(t)}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_\eta \partial_t u_+^n \\ & - \frac{2c}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_t^2 u_+^n + \frac{1}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_\eta \partial_t^2 u_+^n - \frac{c^2(t)}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_\eta u_+^n + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_\eta^2 u_+^n + \partial_\eta^3 u_+^n \\ & + k_+^2 \partial_\eta u_+^n = 0. \end{aligned}$$

Prenant la limite  $\eta \rightarrow 0$ , nous obtenons

$$-c'(t) \partial_t u_+^n|_\Gamma - 2c(t) \partial_t^2 u_+^n|_\Gamma + \partial_n \partial_t^2 u_+^n|_\Gamma - c^2(t) \partial_n u_+^n|_\Gamma + c(t) \partial_n^2 u_+^n|_\Gamma + \partial_n^3 u_+^n|_\Gamma + k_+^2 \partial_n u_+^n|_\Gamma = 0,$$

par conséquent

$$\partial_n^3 u_+^n|_\Gamma = c'(t) \partial_t u_+^n|_\Gamma + 2c \partial_t^2 u_+^n|_\Gamma - \partial_n \partial_t^2 u_+^n|_\Gamma + c^2(t) \partial_n u_+^n|_\Gamma - c(t) \partial_n^2 u_+^n|_\Gamma - k^2 \partial_n u_+^n|_\Gamma. \quad (2.2.14)$$

En utilisant l'identité (2.2.7), la relation (2.2.14) devient

$$\begin{aligned} \partial_n^3 u_+^n|_\Gamma &= 3c(t) \partial_t^2 u_+^n|_\Gamma + (2c^2(t) - k_+^2) \partial_n u_+^n|_\Gamma + c'(t) \partial_t u_+^n|_\Gamma \\ &- \partial_n \partial_t^2 u_+^n|_\Gamma + c(t) k_+^2 u_+^n|_\Gamma, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

De la même manière pour  $u_-^n$ , nous trouvons que

$$\begin{aligned} \partial_n^3 u_-^n|_\Gamma &= 3c(t) \partial_t^2 u_-^n|_\Gamma + (2c^2(t) - k_-^2) \partial_n u_-^n|_\Gamma + c'(t) \partial_t u_-^n|_\Gamma \\ &- \partial_n \partial_t^2 u_-^n|_\Gamma + c(t) k_-^2 u_-^n|_\Gamma, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Par conséquent, avec (2.2.15) et (2.2.16) pour  $n = 0$ , la condition de transmission (2.2.13) devient

$$\begin{aligned} & \alpha_+ \partial_n u_+^2|_\Gamma - \alpha_- \partial_n u_-^2|_\Gamma = -d_1 \alpha_- \partial_n^2 u_-^1|_\Gamma - d_2 \alpha_+ \partial_n^2 u_+^1|_\Gamma - d_2 c(t) \alpha_+ \partial_n u_+^1|_\Gamma \\ & - d_2 \partial_t^2 u_+^1|_\Gamma - d_2 k_m^2 u_+^1|_\Gamma - d_1 c(t) \alpha_- \partial_n u_-^1|_\Gamma - d_1 \partial_t^2 u_-^1|_\Gamma - d_1 k_m^2 u_-^1|_\Gamma \\ & + \left( \frac{d_2^2 \alpha_+}{2} k_+^2 - \frac{d_1^2 \alpha_+}{2} k_-^2 - \frac{d_1}{2} k_m^2 \alpha_+ + \frac{d_2}{2} k_m^2 \alpha_+ - \frac{k_m^2 d_2^2 \alpha_- - k_m^2 d_1^2 \alpha_+}{\alpha_-} \right) \partial_n u_+^0|_\Gamma \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\alpha_+ d_2^2 k_+^2}{2} - \frac{\alpha_- d_1^2 k_-^2}{2} - \frac{d_2 k_m^2}{2} + \frac{d_1 k_m^2}{2} \right) c(t) u_+^0|_\Gamma \\
& + \left( \frac{d_2}{2} - \frac{d_1}{2} + \frac{\alpha_- d_1^2}{2} - \frac{\alpha_+ d_2^2}{2} \right) c(t) \partial_t^2 u_+^0|_\Gamma \\
& + \left( \frac{\alpha_+ d_1^2 - \alpha_- d_2^2}{\alpha_-} - d_1 \alpha_+ + d_2 \alpha_+ \right) \partial_t^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma) \\
& + \left( -\frac{d_1}{2} + \frac{d_2}{2} - \frac{\alpha_+ d_2^2}{2} + \frac{\alpha_- d_1^2}{2} \right) c'(t) \partial_t u_+^0|_\Gamma.
\end{aligned}$$

De nouveau, nous utilisons l'identité

$$\begin{aligned}
\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^1|_\Gamma &= -\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma - c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma - k_+^2 u_+^1|_\Gamma, \\
\partial_{\mathbf{n}}^2 u_-^1|_\Gamma &= -\partial_t^2 u_-^1|_\Gamma - c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma - k_-^2 u_-^1|_\Gamma,
\end{aligned}$$

nous obtenons

$$\begin{aligned}
& \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_\Gamma - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_\Gamma = (d_2 \alpha_+ - d_2) \partial_t^2 u_+^1|_\Gamma + (d_1 \alpha_- - d_1) \partial_t^2 u_-^1|_\Gamma \\
& + d_2 \alpha_+ k_+^2 u_+^1|_\Gamma - d_2 k_m^2 u_+^1|_\Gamma - d_1 k_m^2 u_-^1|_\Gamma + d_1 \alpha_- k_-^2 u_-^1|_\Gamma \\
& + \left( \frac{d_2^2 \alpha_+ k_+^2}{2} - \frac{d_1^2 \alpha_- k_-^2}{2} - \frac{d_1 - d_2}{2} k_m^2 \alpha_+ - \frac{k_m^2 d_2^2 \alpha_- - k_m^2 d_1^2 \alpha_+}{\alpha_-} \right) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma \\
& + \left( \frac{\alpha_+ d_2^2 k_+^2}{2} - \frac{\alpha_- d_1^2 k_-^2}{2} - \frac{d_2 - d_1}{2} k_m^2 \right) c(t) u_+^0|_\Gamma + \left( \frac{d_2 - d_1}{2} - \frac{\alpha_+ d_2^2 - \alpha_- d_1^2}{2} \right) \\
& \times c(t) \partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \left( \frac{\alpha_+ d_1^2 - \alpha_- d_2^2}{\alpha_-} - d_1 \alpha_+ + d_2 \alpha_+ \right) \partial_t^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1}{2} - \frac{\alpha_+ d_2^2 - \alpha_- d_1^2}{2} \right) c'(t) \partial_t u_+^0|_\Gamma.
\end{aligned}$$

En utilisant les conditions de transmission

$$\begin{aligned}
u_+^0|_\Gamma &= u_-^0|_\Gamma, \\
\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma &= \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma, \\
u_+^1|_\Gamma &= u_-^1|_\Gamma + \frac{\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{\alpha_-} \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma,
\end{aligned}$$

nous aurons

$$\begin{aligned}
& \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_\Gamma - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_\Gamma = \frac{(d_2 \alpha_+ + d_1 \alpha_- - 1)}{2} (\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^1|_\Gamma) \\
& + \frac{(d_2 \alpha_+ k_+^2 + d_1 \alpha_- k_-^2 - k_m^2)}{2} (u_-^1|_\Gamma + u_+^1|_\Gamma)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\alpha_+ d_1 k_m^2 - \alpha_- d_2 k_m^2 - \alpha_+^2 d_1 d_2 k_+^2 + \alpha_-^2 d_1 d_2 k_-^2 + \alpha_+^2 \alpha_- d_2 k_+^2 - \alpha_+ \alpha_-^2 d_1 k_-^2}{4\alpha_- \alpha_+} \right) \\
& \times (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) + \left( \frac{-\alpha_- d_1^2 k_-^2 + \alpha_+ d_2^2 k_+^2 - d_2 k_m^2 + d_1 k_m^2}{4} \right) \\
& \times c(t) (u_+^0|_{\Gamma} + u_-^0|_{\Gamma}) + \left( \frac{-d_1 + d_2 - \alpha_+ d_2^2 + \alpha_- d_1^2}{4} \right) c(t) (\partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{-d_1 + d_2 - \alpha_+ d_2^2 + \alpha_- d_1^2}{4} \right) c'(t) (\partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \frac{(d_2 \alpha_+ - d_1 \alpha_-)(\alpha_+ \alpha_- - d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-) + (d_2 - d_1) \alpha_+ \alpha_- + d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-}{4\alpha_+ \alpha_-} \\
& \times (\alpha_+ \partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_- \partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}).
\end{aligned}$$

Puisque

$$\frac{2\alpha_+ \alpha_-}{\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+} (\partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma}) = (\alpha_+ \partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_- \partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}),$$

donc

$$\begin{aligned}
& \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_{\Gamma} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma} = \frac{(d_2 \alpha_+ + d_1 \alpha_- - 1)}{2} [\partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma}] \\
& + \frac{(d_2 \alpha_+ k_+^2 + d_1 \alpha_- k_-^2 - k_m^2)}{2} (u_-^1|_{\Gamma} + u_+^1|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{\alpha_+ d_1 k_m^2 - \alpha_- d_2 k_m^2 - \alpha_+^2 d_1 d_2 k_+^2 + \alpha_-^2 d_1 d_2 k_-^2 + \alpha_+^2 \alpha_- d_2 k_+^2 - \alpha_+ \alpha_-^2 d_1 k_-^2}{4\alpha_- \alpha_+} \right) \\
& \times (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{\alpha_+ d_2^2 k_+^2 - \alpha_- d_1^2 k_-^2 + d_1 k_m^2 - d_2 k_m^2}{4} \right) c(t) (u_+^0|_{\Gamma} + u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_- d_1^2 - \alpha_+ d_2^2}{4} \right) c(t) (\partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_- d_1^2 - \alpha_+ d_2^2}{4} \right) c'(t) (\partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \frac{(d_2 \alpha_+ - d_1 \alpha_-)(\alpha_+ \alpha_- - d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-) + (d_2 - d_1) \alpha_+ \alpha_- + d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-}{2(\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)} \\
& \times (\partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma}).
\end{aligned}$$

Finalement, en utilisant (2.2.4), nous obtenons

$$\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_{\Gamma} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma} = \frac{(d_2 \alpha_+ + d_1 \alpha_- - 1)}{2} (\partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma})$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{(d_2\alpha_+k_+^2 + d_1\alpha_-k_-^2 - k_m^2)}{2} (u_-^1|_\Gamma + u_+^1|_\Gamma) \\
& + \left( \frac{\alpha_+d_1k_m^2 - \alpha_-d_2k_m^2 - \alpha_+^2d_1d_2k_+^2 + \alpha_-^2d_1d_2k_-^2 + \alpha_+^2\alpha_-d_2k_+^2 - \alpha_+\alpha_-^2d_1k_-^2}{2(\alpha_+\alpha_- - d_2\alpha_- - d_1\alpha_+)} \right) (u_+^1|_\Gamma - u_-^1|_\Gamma) \\
& + \left( \frac{\alpha_+d_2^2k_+^2 - \alpha_-d_1^2k_-^2 + d_1k_m^2 - d_2k_m^2}{4} \right) c(t) (u_+^0|_\Gamma + u_-^0|_\Gamma) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_-d_1^2 - \alpha_+d_2^2}{4} \right) c(t) (\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_-d_1^2 - \alpha_+d_2^2}{4} \right) c'(t) (\partial_t u_+^0|_\Gamma + \partial_t u_-^0|_\Gamma) \\
& + \frac{(d_2\alpha_+ - d_1\alpha_-)(\alpha_+\alpha_- - d_1\alpha_+ - d_2\alpha_-) + (d_2 - d_1)\alpha_+\alpha_- + d_1\alpha_+ - d_2\alpha_-}{2(\alpha_+\alpha_- - d_2\alpha_- - d_1\alpha_+)} \\
& \quad \times (\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^1|_\Gamma). \tag{2.2.17}
\end{aligned}$$

Par conséquent, de (2.1.3), (2.2.11) et (2.2.17),  $(u_-^2, u_+^2)$  est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^2 + k_+^2 u_+^2 = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^2 + k_-^2 u_-^2 = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^2 = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^2) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned}
u_+^2 - u_-^2 & = \frac{\alpha_+\alpha_- - d_2\alpha_- - d_1\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+\partial_n u_+^1 + \alpha_-\partial_n u_-^1) \\
& + \frac{d_1\alpha_+\alpha_-^2 - d_2\alpha_+^2\alpha_- + d_1d_2(\alpha_+^2 - \alpha_-^2) + d_2\alpha_- - d_1\alpha_+}{4\alpha_+\alpha_-} (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\
& + c(t) \frac{(d_1 - d_2)\alpha_-\alpha_+ + d_2^2\alpha_- - d_1^2\alpha_+}{2(\alpha_+\alpha_- - d_1\alpha_+ - d_2\alpha_-)} (u_+^1 - u_-^1) \\
& + \frac{(d_1k_-^2\alpha_- - d_2k_+^2\alpha_+)\alpha_+\alpha_- + d_1d_2(k_+^2\alpha_+^2 - k_-^2\alpha_-^2) + k_m^2(d_2\alpha_- - d_1\alpha_+)}{4\alpha_+\alpha_-} (u_+^0 + u_-^0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\alpha_+\partial_n u_+^2 - \alpha_-\partial_n u_-^2 & = \frac{(d_2\alpha_+ + d_1\alpha_- - 1)}{2} (\partial_t^2 u_+^1 + \partial_t^2 u_-^1) \\
& + \frac{(d_2\alpha_+k_+^2 + d_1\alpha_-k_-^2 - k_m^2)}{2} (u_-^1 + u_+^1) \\
& + \left( \frac{\alpha_+d_1k_m^2 - \alpha_-d_2k_m^2 - \alpha_+^2d_1d_2k_+^2 + \alpha_-^2d_1d_2k_-^2 + \alpha_+^2\alpha_-d_2k_+^2 - \alpha_+\alpha_-^2d_1k_-^2}{2(\alpha_+\alpha_- - d_2\alpha_- - d_1\alpha_+)} \right) (u_+^1 - u_-^1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{\alpha_+ d_2^2 k_+^2 - \alpha_- d_1^2 k_-^2 + d_1 k_m^2 - d_2 k_m^2}{4} \right) c(t) (u_+^0 + u_-^0) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_- d_1^2 - \alpha_+ d_2^2}{4} \right) c(t) (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\
& + \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_- d_1^2 - \alpha_+ d_2^2}{4} \right) c'(t) (\partial_t u_+^0 + \partial_t u_-^0) \\
& + \frac{(d_2 \alpha_+ - d_1 \alpha_-)(\alpha_+ \alpha_- - d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-) + (d_2 - d_1) \alpha_+ \alpha_- + d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-}{2(\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)} (\partial_t^2 u_+^1 - \partial_t^2 u_-^1).
\end{aligned}$$

De plus, en utilisant (6.3.3) et la condition (2.1.5), le profil  $U_m^2$  est donné par

$$\begin{aligned}
U_m^2(t, s) &= u_-^2|_\Gamma + (\alpha_- s + d_1 \alpha_- - d_1) \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma s \\
&- \left( \frac{d_1^2}{2} k_-^2 - d_1^2 \alpha_- k_-^2 - d_1 \alpha_- s k_-^2 + \frac{d_1^2}{2} k_m^2 + \frac{s^2}{2} k_m^2 + d_1 k_m^2 s \right) u_-^0|_\Gamma \\
&- \left( \frac{s^2}{2} + d_1 s + d_1^2 - d_1^2 \alpha_- - d_1 \alpha_- s \right) \partial_t^2 u_-^0 \\
&- \left( \frac{s^2}{2} \alpha_- - \frac{d_1^2}{2} \alpha_- + \frac{d_1^2}{2} \right) c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma.
\end{aligned}$$

Nous avons calculé les trois premiers termes des développements asymptotiques (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.4). Nous pouvons continuer à tout ordre puisque les données sont suffisamment régulières. Nous énonçons maintenant un théorème de convergence justifiant l'ansatz (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.4) en estimant l'erreur commise en tronquant les développements à un nombre fini de termes. Une preuve complète donnant les théorèmes d'existence et d'unicité de la série  $(u_-^n)_n$ ,  $(u_+^n)_n$  et  $(U_m^n)_n$  et une estimation de l'erreur est (Voir Théorème 33, [8]).

Soient  $N \in \mathbb{N}$  et  $\tilde{\Omega}_+^\varepsilon$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\tilde{\Omega}_+^\varepsilon := \Omega_+^\varepsilon \cap \Omega$ . Nous fixons

$$u_-^{\varepsilon, (N)} := \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_-^n, \quad u_+^{\varepsilon, (N)} := \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_+^n \text{ et } u_m^{\varepsilon, (N)} := \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_m^n,$$

où  $u_m^n(x) := U_m^n(t, s)$ ;  $\forall x = \Phi(t, s) \in \Omega_m^\varepsilon$ .

**Théorème 6** (Théorème de convergence). *Pour tout entier  $N$ , il existe une constante  $c$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\left\| u_-^\varepsilon - u_-^{\varepsilon, (N)} \right\|_{H^1(\Omega_-^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \left\| u_m^\varepsilon - u_m^{\varepsilon, (N)} \right\|_{H^1(\Omega_m^\varepsilon)} + \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\varepsilon, (N)} \right\|_{H^1(\tilde{\Omega}_+^\varepsilon)} \leq c \varepsilon^{N+1}.$$

## CHAPITRE

### 3

# PROBLÈME APPROCHÉ

Dans ce chapitre, qui constitue la partie principale de cette partie, en se basant sur les précédents résultats nous extrayons un problème, que nous appellerons "problème approché", avec des conditions de transmission de type Ventcel modélisant l'effet de la couche mince.

De la même manière que [7, 11], nous tronquons les séries (2.1.1), (2.1.2) et (2.1.4) en ne gardant que les trois premiers termes et en négligeant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 3. Cela donne un candidat  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$ , pour approcher la solution exacte  $u^\varepsilon$  loin de la couche mince, solution du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_+^{\varepsilon,ap} + k_+^2 u_+^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^{\varepsilon,ap} + k_-^2 u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^{\varepsilon,ap} - u_{inc}) = 0, & \end{array} \right. \quad (3.0.1a)$$



avec les conditions de transmission, de type Ventcel, sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap} &= \varepsilon \mathcal{A}_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon \mathcal{A}_3 (u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_4 (u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}), \end{aligned} \quad (3.0.1b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap} &= (\varepsilon \mathcal{B}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2) (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ (\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_4) (u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \mathcal{B}_5 (u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon^2 \mathcal{B}_6 (\partial_t u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \mathcal{B}_7 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} - \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \end{aligned} \quad (3.0.1c)$$

où

$$\mathcal{A}_1 = \frac{\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{2\alpha_+ \alpha_-}, \quad (3.0.2)$$

$$\mathcal{A}_2 = \frac{d_1 \alpha_+ \alpha_-^2 - d_2 \alpha_+^2 \alpha_- + d_1 d_2 (\alpha_+^2 - \alpha_-^2) + d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+}{4\alpha_+ \alpha_-}, \quad (3.0.3)$$

$$\mathcal{A}_3 = c(t) \frac{(d_1 - d_2) \alpha_+ \alpha_- + d_2^2 \alpha_- - d_1^2 \alpha_+}{2(\alpha_+ \alpha_- - d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-)}, \quad (3.0.4)$$

$$\mathcal{A}_4 = \frac{(d_1 k_-^2 \alpha_- - d_2 k_+^2 \alpha_+) \alpha_+ \alpha_- + d_1 d_2 (k_+^2 \alpha_+^2 - k_-^2 \alpha_-^2) + k_m^2 (d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)}{4\alpha_+ \alpha_-}, \quad (3.0.5)$$

$$\mathcal{B}_1 = \frac{(d_2 \alpha_+ + d_1 \alpha_- - 1)}{2}, \quad (3.0.6)$$

$$\mathcal{B}_2 = \frac{d_2 - d_1 + \alpha_- d_1^2 - \alpha_+ d_2^2}{4} c(t), \quad (3.0.7)$$

$$\mathcal{B}_3 = \frac{d_2 \alpha_+ k_+^2 + d_1 \alpha_- k_-^2 - k_m^2}{2}, \quad (3.0.8)$$

$$\mathcal{B}_4 = \frac{\alpha_+ d_2^2 k_+^2 - \alpha_- d_1^2 k_-^2 + d_1 k_m^2 - d_2 k_m^2}{4} c(t), \quad (3.0.9)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_5 &= \frac{\alpha_+ d_1 k_m^2 - \alpha_- d_2 k_m^2 - \alpha_+^2 d_1 d_2 k_+^2 + \alpha_-^2 d_1 d_2 k_-^2 + \alpha_+^2 \alpha_- d_2 k_+^2 - \alpha_+ \alpha_-^2 d_1 k_-^2}{2(\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)} \\ &= -\frac{\mathcal{A}_4}{\mathcal{A}_1}, \end{aligned} \quad (3.0.10)$$

$$\mathcal{B}_6 = \left( \frac{d_2 - d_1 + \alpha_- d_1^2 - \alpha_+ d_2^2}{4} \right) c'(t) = \partial_t \mathcal{B}_2, \quad (3.0.11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_7 &= \frac{(d_2 \alpha_+ - d_1 \alpha_-)(\alpha_+ \alpha_- - d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-) + (d_2 - d_1) \alpha_+ \alpha_- + d_1 \alpha_+ - d_2 \alpha_-}{2(\alpha_+ \alpha_- - d_2 \alpha_- - d_1 \alpha_+)} \\ &= -\frac{\mathcal{A}_2}{\mathcal{A}_1}. \end{aligned} \quad (3.0.12)$$

Notons que  $\mathcal{A}_1 \neq 0$  puisque nous avons supposé  $\alpha_{\pm} \in ]1, +\infty[$  ou  $\alpha_{\pm} \in ]0, 1[$ .

A partir de la solution approchée  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$ , nous en déduisons, de (2.2.1), (2.2.3) et (2.2.10), que  $u_m^{\varepsilon,ap}$  est définie dans  $\Omega_m^\varepsilon$  par

$$\begin{aligned} u_m^{\varepsilon,ap}(x) &:= U_m^{\varepsilon,ap}(t, s) := u_-^{\varepsilon,ap}|_\Gamma + \varepsilon(\alpha_- s + d_1 \alpha_- - d_1) \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}|_\Gamma \\ &- \varepsilon^2 \left( \frac{d_1^2}{2} k_-^2 - d_1^2 \alpha_- k_-^2 - d_1 \alpha_- s k_-^2 + \frac{d_1^2}{2} k_m^2 + \frac{s^2}{2} k_m^2 + d_1 k_m^2 s \right) u_-^{\varepsilon,ap}|_\Gamma \\ &- \varepsilon^2 \left( \frac{s^2}{2} + d_1 s + d_1^2 - d_1^2 \alpha_- - d_1 \alpha_- s \right) \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}|_\Gamma \\ &- \varepsilon^2 \left( \frac{s^2}{2} \alpha_- - \frac{d_1^2}{2} \alpha_- + \frac{d_1^2}{2} \right) c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}|_\Gamma, \quad \forall x = \Phi(t, s) \in \Omega_m^\varepsilon. \end{aligned} \quad (3.0.13)$$

### 3.1 Existence et unicité

Nous énonçons maintenant un théorème donnant un résultat d'unicité de la solution  $u^{\varepsilon,ap}$  du problème (3.0.1).

**Théorème 7.** *Le problème (3.0.1) admet au plus une solution.*

*Démonstration.* Nous considérons le problème homogène associé au problème (3.0.1)

$$\begin{cases} \Delta u_+^{\varepsilon,ap} + k_+^2 u_+^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_+, & (3.1.1) \\ \Delta u_-^{\varepsilon,ap} + k_-^2 u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_-, & (3.1.2) \\ u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{sur } \Gamma_i, & (3.1.3) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u_+^{\varepsilon,ap} = 0, & & (3.1.4) \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap} &= \varepsilon \mathcal{A}_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon \mathcal{A}_3 (u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_4 (u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap} &= (\varepsilon \mathcal{B}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2) (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ (\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_4) (u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \mathcal{B}_5 (u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon^2 \mathcal{B}_6 (\partial_t u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \mathcal{B}_7 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} - \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Les résultats de régularité standard pour les problèmes elliptiques (cf., e.g., [3]) montrent que  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap}) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_+})$ . Soit  $B_R$  la boule de centre  $O$  et de rayon  $R$

suffisamment grande pour contenir  $\Omega_-$  et soit  $\Omega_R$  le domaine de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\Omega_R := B_R \cap \Omega_+$ .

Multipliant les équations (3.1.1) et (3.1.2) par  $\overline{u_+^{\varepsilon,ap}}$  et  $\overline{u_-^{\varepsilon,ap}}$  respectivement et utilisant la formule de Green, nous aurons

$$\begin{aligned}
& \alpha_- \int_{\Omega_-} |\nabla u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Omega_- - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} |u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Omega_- + \alpha_+ \int_{\Omega_R} |\nabla u_+^{\varepsilon,ap}|^2 d\Omega_R \\
& - \alpha_+ k_+^2 \int_{\Omega_R} |u_+^{\varepsilon,ap}|^2 d\Omega_R - \int_{\Gamma} \frac{\varepsilon \mathcal{A}_3 - 1}{2\varepsilon \mathcal{A}_1} |u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Gamma \\
& + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_4) (|u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}|^2) d\Gamma - \frac{1}{2} \int_{\Gamma} (\varepsilon \mathcal{B}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2) (|\partial_t u_-^{\varepsilon,ap} + \partial_t u_+^{\varepsilon,ap}|^2) d\Gamma \\
& + \varepsilon \mathcal{B}_5 \int_{\Gamma} (|u_+^{\varepsilon,ap}|^2 - |u_-^{\varepsilon,ap}|^2) d\Gamma - \varepsilon \mathcal{B}_7 \int_{\Gamma} (|\partial_t u_+^{\varepsilon,ap}|^2 - |\partial_t u_-^{\varepsilon,ap}|^2) d\Gamma \\
& = \alpha_+ \int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_+^{\varepsilon,ap} \overline{u_+^{\varepsilon,ap}} dS_R, \tag{3.1.7}
\end{aligned}$$

où  $S_R$  désigne le cercle de centre  $O$  et de rayon  $R$ . Prenant la partie imaginaire de (3.1.7), nous obtenons

$$\text{Im} \left( \int_{S_R} \partial_{\mathbf{R}} u_+^{\varepsilon,ap} \overline{u_+^{\varepsilon,ap}} dS_R \right) = 0.$$

Il résulte de la condition de radiation (3.1.4) et du lemme de Rellich [29] que  $u_+^{\varepsilon,ap} = 0$  dans  $\Omega_+$ .

Le problème (3.1.1)-(3.1.6) se réduit donc à

$$\begin{cases} \Delta u_-^{\varepsilon,ap} + k_-^2 u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$u_-^{\varepsilon,ap} = -\varepsilon \mathcal{A}_1 (\alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}) - \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 (\partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \mathcal{A}_3 (u_-^{\varepsilon,ap}) - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4 (u_-^{\varepsilon,ap}),$$

$$\begin{aligned}
\alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap} = & - (\varepsilon \mathcal{B}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2) (\partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) - (\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_4) (u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \mathcal{B}_5 (u_-^{\varepsilon,ap}) \\
& - \varepsilon^2 \mathcal{B}_6 \partial_t u_-^{\varepsilon,ap} + \varepsilon \mathcal{B}_7 (\partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}).
\end{aligned}$$

Ceci implique

$$\left[ \left( \frac{1}{\mathcal{A}_1} - \varepsilon \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} - \varepsilon^2 \mathcal{B}_3 - \varepsilon^3 \mathcal{B}_4 \right) I - (\varepsilon^2 \mathcal{B}_1 + \varepsilon^3 \mathcal{B}_2) \partial_t^2 - \varepsilon^3 \mathcal{B}_6 \partial_t \right] u_-^{\varepsilon,ap}|_{\Gamma} = 0. \tag{3.1.8}$$

Multipliant l'équation (3.1.8) par  $\overline{u_-^{\varepsilon,ap}}|_\Gamma$  et intégrant sur  $\Gamma$ , nous obtenons

$$\int_\Gamma \left( \frac{1}{\mathcal{A}_1} - \varepsilon \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} - \varepsilon^2 \mathcal{B}_3 - \varepsilon^3 \mathcal{B}_4 \right) |u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Gamma + \int_\Gamma (\varepsilon^2 \mathcal{B}_1 + \varepsilon^3 \mathcal{B}_2) |\partial_t u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Gamma = 0. \quad (3.1.9)$$

Comme  $\alpha_\pm \in ]1, +\infty[$  ou  $\alpha_\pm \in ]0, 1[$ , alors  $\mathcal{A}_1 \mathcal{B}_1 > 0$ , et puisque  $\varepsilon$  est assez petit, il existe une constante positive  $C$  telle que

$$\begin{aligned} C \left( \|u_-^{\varepsilon,ap}\|_{L^2(\Gamma)}^2 + \|\partial_t u_-^{\varepsilon,ap}\|_{L^2(\Gamma)}^2 \right) &\leq \int_\Gamma \left| \frac{1}{\mathcal{A}_1} - \varepsilon \frac{\mathcal{A}_3}{\mathcal{A}_1} - \varepsilon^2 \mathcal{B}_3 - \varepsilon^3 \mathcal{B}_4 \right| |u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Gamma \\ &+ \varepsilon^2 \int_\Gamma |\mathcal{B}_1 + \varepsilon \mathcal{B}_2| |\partial_t u_-^{\varepsilon,ap}|^2 d\Gamma \\ &= 0. \end{aligned}$$

Cela conduit à  $u_-^{\varepsilon,ap}|_\Gamma = 0$ . D'où  $u_-^{\varepsilon,ap}$  est solution du problème

$$\begin{cases} \Delta u_-^{\varepsilon,ap} + k_-^2 u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{sur } \Gamma, \\ \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{on } \Gamma, \\ u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{sur } \Gamma_i. \end{cases}$$

Donc  $u_-^{\varepsilon,ap} = 0$  dans  $\Omega_-$  (cf. [24]), ce qui prouve l'unicité de la solution  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$ .  $\square$

Pour montrer l'existence de la solution  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$ , nous transformons le problème (3.0.1) en une équation pseudo-différentielle définie sur  $\Gamma$ . Pour cela, nous introduisons les opérateurs de Steklov-Poincaré (cf. [4]) (appelés aussi opérateurs de Dirichlet-to-Neumann)  $T_-$  et  $T_+$  définis de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  par  $T_- \varphi := \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-|_\Gamma$ , où  $u_-$  est la solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta u_- + k_-^2 u_- = 0 & \text{in } \Omega_-, \\ u_- = \varphi & \text{sur } \Gamma, \\ u_- = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \end{cases}$$

et  $T_+ \psi := \alpha_+ \partial_{-\mathbf{n}} u_+|_\Gamma$ , où  $u_+$  est la solution du problème au limite suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ u_+ = \psi & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u_+ = 0, \end{cases}$$

Les opérateurs de Steklov-Poincaré  $T_-$  et  $T_+$  sont des opérateurs pseudo-différentiels elliptiques de symbole réel d'ordre 1 (cf. [32, 33, 34]).

**Remarque 8.** *La fonction  $u_-$  n'est définie que dans le cas où la constante  $k_-^2$  n'appartient pas au spectre de l'opérateur fermé  $(-\Delta, H_0^1(\Omega_-))$ . On supposera donc que cette condition soit vérifiée.*

La définition des opérateurs de Steklov-Poincaré nous permet de réécrire le problème (3.0.1) en un système pseudo-différentiel équivalent : Trouver  $(\omega, \varkappa) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ , tel que :

$$\Lambda \begin{pmatrix} \omega \\ \varkappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon \mathcal{A}_1 g \\ -g \end{pmatrix}, \quad (3.1.10)$$

où  $\omega$  et  $\varkappa$  sont les traces de  $u_+^{\varepsilon, ap}$  et  $u_-^{\varepsilon, ap}$  sur  $\Gamma$  respectivement,

$$g = T_+(u_{inc}|_\Gamma) + \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_{inc}|_\Gamma,$$

et  $\Lambda = (\Lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  est une matrice d'opérateurs pseudo-différentiels définie par

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= (1 - \varepsilon \mathcal{A}_3 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4)I + \varepsilon \mathcal{A}_1 T_+ - \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 \partial_t^2, \\ \Lambda_{12} &= (-1 + \varepsilon \mathcal{A}_3 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4)I - \varepsilon \mathcal{A}_1 T_- - \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 \partial_t^2, \\ \Lambda_{21} &= (-\varepsilon \mathcal{B}_3 - \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4)I - T_+ - \varepsilon(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_7 + \varepsilon \mathcal{B}_2) \partial_t^2 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_6 \partial_t, \\ \Lambda_{22} &= (-\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4)I - T_- - \varepsilon(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_7 + \varepsilon \mathcal{B}_2) \partial_t^2 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_6 \partial_t. \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'existence. Pour  $\alpha_+ \neq \alpha_-$ , nous avons :

**Théorème 9.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , si  $g \in H^{k-\frac{5}{2}}(\Gamma)$  alors le problème (3.0.1) admet une unique solution  $(u_-^{\varepsilon, ap}, u_+^{\varepsilon, ap}) \in H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\bar{\Omega}_+)$ .*

*Démonstration.* Posons

$$\begin{aligned} \Lambda &= M_1^\varepsilon \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + M_2^\varepsilon \begin{pmatrix} T_+ & 0 \\ 0 & T_- \end{pmatrix} + M_3^\varepsilon \begin{pmatrix} -\partial_t^2 & 0 \\ 0 & -\partial_t^2 \end{pmatrix} + M_4^\varepsilon \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix} \\ &= (M_1^\varepsilon - M_3^\varepsilon) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + M_2^\varepsilon \begin{pmatrix} T_+ & 0 \\ 0 & T_- \end{pmatrix} + M_4^\varepsilon \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix} + M_3^\varepsilon \begin{pmatrix} I - \partial_t^2 & 0 \\ 0 & I - \partial_t^2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

où

$$M_1^\varepsilon = \begin{pmatrix} 1 - \varepsilon \mathcal{A}_3 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4 & -1 + \varepsilon \mathcal{A}_3 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4 \\ -\varepsilon \mathcal{B}_3 - \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4 & -\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4 \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned}
M_2^\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon \mathcal{A}_1 & -\varepsilon \mathcal{A}_1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \\
M_3^\varepsilon &= \begin{pmatrix} \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 & \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 \\ \varepsilon(\mathcal{B}_1 + \mathcal{B}_7 + \varepsilon \mathcal{B}_2) & \varepsilon(\mathcal{B}_1 - \mathcal{B}_7 + \varepsilon \mathcal{B}_2) \end{pmatrix}, \\
M_4^\varepsilon &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\varepsilon^2 \mathcal{B}_6 & -\varepsilon^2 \mathcal{B}_6 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

L'opérateur  $I - \partial_t^2$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 2, elliptique, auto-adjoint et semi-borné ( cf. [6]), il est donc de Fredholm d'indice zéro et envoie  $H^s(\Gamma)$  dans  $H^{s-2}(\Gamma)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ .

Comme  $\det(M_3^\varepsilon) \neq 0$ , alors l'opérateur

$$M_3^\varepsilon \begin{pmatrix} \partial_t^2 - I & 0 \\ 0 & \partial_t^2 - I \end{pmatrix} : H^s(\Gamma) \times H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-2}(\Gamma) \times H^{s-2}(\Gamma)$$

est de Fredholm d'indice zéro.

Puisque  $\partial_t$ ,  $T_+$  et  $T_-$  sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, ils sont définis de  $H^s(\Gamma)$  dans  $H^{s-1}(\Gamma)$ , et comme  $H^{s-1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s-2}(\Gamma)$  est une injection compacte, alors l'opérateur

$$(M_1^\varepsilon - M_3^\varepsilon) \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} + M_2^\varepsilon \begin{pmatrix} T_+ & 0 \\ 0 & T_- \end{pmatrix} + M_4^\varepsilon \begin{pmatrix} \partial_t & 0 \\ 0 & \partial_t \end{pmatrix} : H^s(\Gamma) \times H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-2}(\Gamma) \times H^{s-2}(\Gamma)$$

est compact. Par conséquent  $\Lambda$  est de Fredholm d'indice zéro.

L'équivalence du système (3.1.10) au problème (3.0.1) et le théorème 7 montrent que l'unicité de la solution  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$  implique que pour tout entier  $k \geq 1$ , si  $(\varepsilon \mathcal{A}_1 g, -g) \in H^{k-\frac{5}{2}}(\Gamma) \times H^{k-\frac{5}{2}}(\Gamma)$ , il existe une solution unique  $(\omega, \varkappa) \in H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  de (3.1.10) ce qui conduit à l'existence d'une unique solution  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap}) \in H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\overline{\Omega}_+)$ . D'où le théorème.  $\square$

**Remarque 10.** Notons que le théorème 9 reste valable lorsque  $\alpha_+ = \alpha_-$  et  $d_1 \neq 1/2$ .

Dans le cas où  $\alpha_+ = \alpha_-$  et  $d_1 = d_2 = 1/2$ , la matrice d'opérateurs pseudo-différentiels  $\Lambda$  devient

$$\Lambda_{11} = (1 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4)I + \varepsilon \mathcal{A}_1 T_+,$$

$$\begin{aligned}
\Lambda_{12} &= (-1 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4)I - \varepsilon \mathcal{A}_1 T_-, \\
\Lambda_{21} &= (-\varepsilon \mathcal{B}_3 - \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4)I - T_+ - \varepsilon \mathcal{B}_1 \partial_t^2, \\
\Lambda_{22} &= (-\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4)I - T_- - \varepsilon \mathcal{B}_1 \partial_t^2.
\end{aligned}$$

Nous avons alors le théorème suivant.

**Théorème 11.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , si  $\alpha_+ = \alpha_-$ ,  $g \in H^{k-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  et*

$$\frac{\varepsilon^2 \mathcal{A}_4 - 1}{\varepsilon \mathcal{A}_1} \notin \sigma(T_+), \quad (3.1.11)$$

alors le problème (3.0.1) admet une solution unique  $(u_-^{\varepsilon, ap}, u_+^{\varepsilon, ap}) \in H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\overline{\Omega}_+)$ .

*Démonstration.* Soit  $k$  un entier dans  $\mathbb{N}^*$ . Compte tenu de (3.1.11),  $\Lambda_{11}^{-1}$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $-1$ . Donc, de la première équation du système (3.1.10) nous avons

$$\omega = -\Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12} \varkappa + \varepsilon \mathcal{A}_1 \Lambda_{11}^{-1} g.$$

Alors (3.1.10) est réduit à l'équation

$$K \varkappa := (K_1 + K_2 + K_3) \varkappa = \theta,$$

où

$$\begin{aligned}
K_1 &= (-\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon \mathcal{B}_5 - \varepsilon^2 \mathcal{B}_4)I + (\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon \mathcal{B}_5 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_4) \Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12}, \\
K_2 &= -T_- + T_+ \Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12}, \\
K_3 &= -\varepsilon \mathcal{B}_1 \partial_t^2 \Lambda_{11}^{-1} (\Lambda_{11} - \Lambda_{12}), \\
\theta &= -g - \varepsilon \mathcal{A}_1 \Lambda_{21} \Lambda_{11}^{-1} g.
\end{aligned}$$

Utilisant les mêmes arguments que dans le théorème 9, basés sur l'alternative de Fredholm, nous allons prouver que  $K$  est de Fredholm d'indice 0.

Puisque  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$  sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 0, 1 et 2 respectivement, ils envoient  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-1/2}(\Gamma)$ ,  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-3/2}(\Gamma)$  et  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-5/2}(\Gamma)$  respectivement.

Les injections  $H^{k-1/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{k-5/2}(\Gamma)$  et  $H^{k-3/2}(\Gamma) \hookrightarrow H^{k-5/2}(\Gamma)$  étant compactes et  $\mathcal{B}_1 \neq 0$ , alors l'opérateur  $K$  défini de  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-5/2}(\Gamma)$  est une perturbation compacte de  $K_3$ .

Puisque  $\partial_t^2$  est de Fredholm d'indice 0, il s'en suit que pour montrer que  $K_3$  est de Fredholm d'indice 0, il suffit de montrer que l'opérateur  $\Lambda_{11} - \Lambda_{12} = T_+ + T_- + \frac{2}{\varepsilon \mathcal{A}_1} I$  défini de  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-3/2}(\Gamma)$  est inversible. Considérons l'équation

$$\left( T_+ + T_- + \frac{2}{\varepsilon \mathcal{A}_1} I \right) \varphi = \psi, \quad \psi \in H^{k-3/2}(\Gamma), \quad k \geq 1. \quad (3.1.12)$$

Utilisant la définition des opérateurs  $T_+$  et  $T_-$ , l'équation (3.1.12) est équivalente au problème aux limites

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_- + k_-^2 u_- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_- = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ u_- = u_+ & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_- - \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+ + \frac{2}{\varepsilon \mathcal{A}_1} u_+ = \psi & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u_+ = 0, & \end{array} \right. \quad (3.1.13)$$

où  $\varphi = u_-|_{\Gamma} = u_+|_{\Gamma}$ . Le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm montrent que, pour tout  $k$  dans  $\mathbb{N}^*$ , si  $\psi \in H^{k-3/2}(\Gamma)$ , alors le problème (3.1.13) admet une unique solution  $(u_-, u_+)$  dans  $H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\overline{\Omega}_+)$ , et donc il existe une trace unique de Dirichlet  $\varphi \in H^{k-1/2}(\Gamma)$ .

Il en résulte que l'opérateur  $T_+ + T_- + \frac{2}{\varepsilon \mathcal{A}_1} I$ , défini de  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-3/2}(\Gamma)$ , est inversible. La fin de la démonstration est similaire à celle du théorème 9.  $\square$

**Remarque 12.** *Comme alternative de la condition (3.1.11), nous pouvons remplacer cette dernière par*

$$\frac{-1 - \varepsilon^2 \mathcal{A}_4}{\varepsilon \mathcal{A}_1} \notin \sigma(T_-). \quad (3.1.14)$$

*Il est facile de vérifier que la preuve du théorème 11 avec la condition (3.1.14) est presque la même.*

## 3.2 Estimation de l'erreur

Dans ce paragraphe, nous allons établir une solution approchée  $u^{\varepsilon, ap}$  de la solution exacte  $u^\varepsilon$  et une estimation de l'erreur. Intuitivement, nous définissons la solution appro-



chée  $u^{\varepsilon,ap}$ , en utilisant  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$  et (3.0.13), par

$$u^{\varepsilon,ap} = \begin{cases} u_+^{\varepsilon,ap} & \text{dans } \Omega_+^\varepsilon, \\ u_m^{\varepsilon,ap} & \text{dans } \Omega_m^\varepsilon, \\ u_-^{\varepsilon,ap} & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon. \end{cases}$$

Le théorème suivant donne une estimation d'erreur entre la solution  $u^{\varepsilon,ap}$  du problème approché et la solution exacte  $u^\varepsilon$

**Théorème 13.** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\|u_-^\varepsilon - u_-^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\Omega_-^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|u_m^\varepsilon - u_m^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\Omega_m^\varepsilon)} + \|u_+^\varepsilon - u_+^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_+^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^3.$$

Pour pouvoir démontrer le théorème 13, nous aurons besoin d'un résultat de stabilité. Soit  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  l'espace de Hilbert défini par

$$\mathbb{H}^1(\Omega) := \left\{ v = (v_-, v_+) \in H^1(\Omega_-) \times H^1(\tilde{\Omega}_+), v_-|_{\Gamma_i} = 0 \right\},$$

où  $\tilde{\Omega}_+ = \Omega_+ \cap \Omega$  et  $b_\varepsilon(\cdot, \cdot)$  est la forme bilinéaire sur  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  définie par

$$\begin{aligned} b_\varepsilon(u, v) &:= \alpha_- \int_{\Omega_-} \nabla u_- \cdot \nabla v_- \, d\Omega_- - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} u_- v_- \, d\Omega_- \\ &+ \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \nabla u_+ \cdot \nabla v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ - \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} u_+ v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ \\ &- \frac{1}{2} \lambda_\varepsilon \int_{\Gamma} (u_- - u_+) (v_- - v_+) \, d\Gamma \\ &+ \alpha_+ \langle T u_+, v_+ \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)}, \end{aligned}$$

où  $\lambda_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$  et  $T$  est un opérateur de Steklov-Poincaré défini de  $H^{1/2}(\Gamma_\infty)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_\infty)$  par  $T\varphi := -\partial_{\mathbf{n}_{\tilde{\Omega}_\infty}} w|_{\Gamma_\infty}$ , avec  $\tilde{\Omega}_\infty$  est un domaine extérieur de  $\mathbb{R}^2$  et de frontière  $\Gamma_\infty$ ,  $\mathbf{n}_{\tilde{\Omega}_\infty}$  indique la normale unitaire à  $\Gamma_\infty$  dirigée extérieurement vers  $\Omega$  et  $w$  est la solution au problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta w + k_+^2 w = 0 & \text{in } \tilde{\Omega}_\infty, \\ w = \varphi & \text{on } \Gamma_\infty, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} |x|^{1/2} (\partial_{|x|} - ik_+) w = 0. \end{cases}$$

Nous avons le lemme suivant, dont la preuve peut être trouvée dans [8].

**Lemme 14.** *Pour tout  $h_\varepsilon \in (\mathbb{H}^1(\Omega))'$ , il existe une constante positive  $c$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que la solution du problème variationnel*

$$\begin{cases} \text{Trouver } u \in \mathbb{H}^1(\Omega), \forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega), \\ b_\varepsilon(u, v) = h_\varepsilon(v), \end{cases}$$

*satisfait*

$$\|u\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-1/2} \|h_\varepsilon\|_{(\mathbb{H}^1(\Omega))'}.$$

*Preuve du théorème 13.* Compte tenu de

$$\|U_m^{\varepsilon, ap} - U_m^{\varepsilon, (2)}\|_{H^1(\Omega_m)} \leq c \left( \|u_-^{\varepsilon, ap} - u_-^{\varepsilon, (2)}\|_{H^1(\Omega_-)} + \varepsilon^3 \|u_-^1\|_{H^1(\Omega_-)} + \varepsilon^3 \|u_-^2\|_{H^1(\Omega_-)} \right),$$

où  $c$  est une constante indépendante de  $\varepsilon$ , et du théorème 6 (de convergence), il suffit d'estimer  $\|u_-^{\varepsilon, ap} - u_-^{\varepsilon, (2)}\|_{H^1(\Omega_-)}$ . Comme dans [11], nous déterminons un développement asymptotique pour  $u_-^{\varepsilon, ap}$  et  $u_+^{\varepsilon, ap}$  en utilisant l'ansatz

$$u_-^{\varepsilon, ap} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n w_-^n \quad \text{et} \quad u_+^{\varepsilon, ap} = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n w_+^n, \quad (3.2.1)$$

où les termes  $w_-^n$  et  $w_+^n$  sont indépendants de  $\varepsilon$ . En insérant (3.2.1) dans problème (3.0.1) et en identifiant les termes de même puissance de  $\varepsilon$ , nous obtenons la hiérarchie d'équations

$$\begin{cases} \Delta w_+^n + k_+^2 w_+^n = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta w_-^n + k_-^2 w_-^n = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ w_-^n = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (w_+^n - \delta_{0,n} u_{inc}) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} w_+^n - w_-^n &= \mathcal{A}_1(\alpha_+ \partial_n w_+^{n-1} + \alpha_- \partial_n w_-^{n-1}) + \mathcal{A}_2(\partial_t^2 w_+^{n-2} + \partial_t^2 w_-^{n-2}) \\ &+ \mathcal{A}_3(w_+^{n-1} - w_-^{n-1}) + \mathcal{A}_4(w_+^{n-2} + w_-^{n-2}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_n w_+^n - \alpha_- \partial_n w_-^n &= \mathcal{B}_1(\partial_t^2 w_+^{n-1} + \partial_t^2 w_-^{n-1}) + \mathcal{B}_2(\partial_t^2 w_+^{n-2} + \partial_t^2 w_-^{n-2}) \\ &+ \mathcal{B}_3(w_+^{n-1} + w_-^{n-1}) + \mathcal{B}_4(w_+^{n-2} + w_-^{n-2}) \\ &+ \mathcal{B}_5(w_+^{n-1} - w_-^{n-1}) + \mathcal{B}_6(\partial_t w_+^{n-2} + \partial_t w_-^{n-2}) \\ &+ \mathcal{B}_7(\partial_t^2 w_+^{n-1} - \partial_t^2 w_-^{n-1}), \end{aligned}$$

où  $(\mathcal{A}_i)_{1 \leq i \leq 4}$  et  $(\mathcal{B}_i)_{1 \leq i \leq 7}$  sont définis par les formules (6.3.3)-(3.0.12) avec la convention que  $w_-^{-1} = w_-^{-2} = w_+^{-1} = w_+^{-2} = 0$ . Un calcul simple montre que les termes  $(w_-^n, w_+^n)$  coïncide avec  $(u_-^n, u_+^n)$ , pour  $n \in \{0, 1, 2\}$ . De plus, chaque terme dans (3.2.1) est borné dans  $\mathbb{H}^1(\Omega)$  (cf. [11, Théorème 4.1]).

Soit  $R_w$  le reste obtenu en tronquant les développements asymptotiques (3.2.1) à l'ordre 4

$$\begin{aligned} R_w|_{\Omega_-} &= R_{w_-} = u_-^{\varepsilon, ap} - w_-^0 - \varepsilon w_-^1 - \varepsilon^2 w_-^2 - \varepsilon^3 w_-^3 - \varepsilon^4 w_-^4, \\ R_w|_{\Omega_+} &= R_{w_+} = u_+^{\varepsilon, ap} - w_+^0 - \varepsilon w_+^1 - \varepsilon^2 w_+^2 - \varepsilon^3 w_+^3 - \varepsilon^4 w_+^4. \end{aligned}$$

Donc  $R_w$  est la solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta R_{w_+} + k_+^2 R_{w_+} = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta R_{w_-} + k_-^2 R_{w_-} = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ R_{w_-} = 0 & \text{sur } \Gamma_i, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) R_{w_+} = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} R_{w_+} - R_{w_-} &= \varepsilon \mathcal{A}_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} R_{w_+} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} R_{w_-}) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_2 (\partial_t^2 R_{w_+} + \partial_t^2 R_{w_-}) \\ &+ \varepsilon \mathcal{A}_3 (R_{w_+} - R_{w_-}) + \varepsilon^2 \mathcal{A}_4 (R_{w_+} + R_{w_-}) + \varepsilon^5 \mathcal{A}_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} w_+^4 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} w_-^4) \\ &+ \varepsilon^5 \mathcal{A}_2 (\partial_t^2 w_+^3 + \partial_t^2 w_-^3) + \varepsilon^6 \mathcal{A}_2 (\partial_t^2 w_+^4 + \partial_t^2 w_-^4) + \varepsilon^5 \mathcal{A}_3 (w_+^4 - w_-^4) \\ &+ \varepsilon^5 \mathcal{A}_4 (w_+^3 + w_-^3) + \varepsilon^6 \mathcal{A}_4 (w_+^4 + w_-^4), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} R_{w_+} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} R_{w_-} &= (\varepsilon \mathcal{B}_1 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_2) (\partial_t^2 R_{w_+} + \partial_t^2 R_{w_-}) + (\varepsilon \mathcal{B}_3 + \varepsilon^2 \mathcal{B}_4) (R_{w_+} + R_{w_-}) \\ &+ \varepsilon \mathcal{B}_5 (R_{w_+} - R_{w_-}) + \varepsilon^2 \mathcal{B}_6 (\partial_t R_{w_+} + \partial_t R_{w_-}) + \varepsilon \mathcal{B}_7 (\partial_t^2 R_{w_+} - \partial_t^2 R_{w_-}) \\ &+ \mathcal{B}_1 \varepsilon^5 (\partial_t^2 w_+^4 + \partial_t^2 w_-^4) + \mathcal{B}_2 \varepsilon^5 (\partial_t^2 w_+^3 + \partial_t^2 w_-^3) + \mathcal{B}_2 \varepsilon^6 (\partial_t^2 w_+^4 + \partial_t^2 w_-^4) \\ &+ \mathcal{B}_3 \varepsilon^5 (w_+^4 + w_-^4) + \mathcal{B}_4 \varepsilon^5 (w_+^3 + w_-^3) + \mathcal{B}_4 \varepsilon^6 (w_+^4 + w_-^4) \\ &+ \mathcal{B}_5 \varepsilon^5 (w_+^4 - w_-^4) + \mathcal{B}_6 \varepsilon^5 (\partial_t w_+^3 + \partial_t w_-^3) + \mathcal{B}_6 \varepsilon^6 (\partial_t w_+^4 + \partial_t w_-^4) \\ &+ \mathcal{B}_7 \varepsilon^5 (\partial_t^2 w_+^4 - \partial_t^2 w_-^4). \end{aligned}$$

Ce qui conduit, pour tout  $v = (v_-, v_+) \in \mathbb{H}^1(\Omega)$ , à la formulation variationnelle

$$\alpha_- \int_{\Omega_-} \nabla R_{w_-} \cdot \nabla v_- \, d\Omega_- - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} R_{w_-} v_- \, d\Omega_- + \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \nabla R_{w_+} \cdot \nabla v_+ \, d\tilde{\Omega}_+$$

$$\begin{aligned}
& - \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} R_{w_+} v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ - \int_{\Gamma} \frac{-1 + \mathcal{A}_3 \varepsilon}{2\mathcal{A}_1 \varepsilon} (R_{w_+} - R_{w_-})(v_+ - v_-) \, d\Gamma \\
& + \alpha_+ \langle TR_{w_+}, v_+ \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)} \\
& = h_\varepsilon(v),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
h_\varepsilon(v) &= \frac{-\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} (\mathcal{B}_1 + \varepsilon \mathcal{B}_2) \partial_t^2 (R_{w_+} + R_{w_-})(v_+ + v_-) \, d\Gamma - \frac{\mathcal{B}_3}{2} \varepsilon \int_{\Gamma} (R_{w_+} + R_{w_-})(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\mathcal{B}_7}{2} \varepsilon \int_{\Gamma} \partial_t^2 (R_{w_+} - R_{w_-})(v_+ + v_-) \, d\Gamma - \frac{\mathcal{B}_5}{2} \varepsilon \int_{\Gamma} (R_{w_+} - R_{w_-})(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_6 \partial_t (R_{w_+} + R_{w_-})(v_+ + v_-) \, d\Gamma + \frac{\mathcal{A}_2}{2\mathcal{A}_1} \varepsilon \int_{\Gamma} \partial_t^2 (R_{w_+} + R_{w_-})(v_+ - v_-) \, d\Gamma \\
& + \frac{\mathcal{A}_4}{2\mathcal{A}_1} \varepsilon \int_{\Gamma} (R_{w_+} + R_{w_-})(v_+ - v_-) \, d\Gamma - \frac{\varepsilon^2}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_4 (R_{w_+} + R_{w_-})(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& + \frac{\varepsilon^4}{2} \int_{\Gamma} (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} w_+^4 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} w_-^4)(v_+ - v_-) \, d\Gamma + \frac{\mathcal{A}_2}{2\mathcal{A}_1} \varepsilon^4 \int_{\Gamma} \partial_t^2 (w_+^3 + w_-^3)(v_+ - v_-) \, d\Gamma \\
& + \varepsilon^4 \int_{\Gamma} \frac{\mathcal{A}_3}{2\mathcal{A}_1} (w_+^4 - w_-^4)(v_+ - v_-) \, d\Gamma + \frac{\mathcal{A}_4}{2\mathcal{A}_1} \varepsilon^4 \int_{\Gamma} (w_+^3 + w_-^3)(v_+ - v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\varepsilon^5}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_4 (w_+^3 + w_-^3)(v_+ + v_-) \, d\Gamma - \frac{\varepsilon^5}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_2 (\partial_t^2 w_+^3 + \partial_t^2 w_-^3)(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\varepsilon^5}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_6 (\partial_t w_+^3 + \partial_t w_-^3)(v_+ + v_-) \, d\Gamma - \frac{\mathcal{B}_1}{2} \varepsilon^5 \int_{\Gamma} (\partial_t^2 w_+^4 + \partial_t^2 w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\mathcal{B}_3}{2} \varepsilon^5 \int_{\Gamma} (w_+^4 + w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma - \frac{\mathcal{B}_7}{2} \varepsilon^5 \int_{\Gamma} (\partial_t^2 w_+^4 - \partial_t^2 w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\mathcal{B}_5}{2} \varepsilon^5 \int_{\Gamma} (w_+^4 - w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma + \frac{\mathcal{A}_2}{2\mathcal{A}_1} \varepsilon^5 \int_{\Gamma} (\partial_t^2 w_+^4 + \partial_t^2 w_-^4)(v_+ - v_-) \, d\Gamma \\
& + \frac{\mathcal{A}_4}{2\mathcal{A}_1} \varepsilon^5 \int_{\Gamma} (w_+^4 + w_-^4)(v_+ - v_-) \, d\Gamma - \frac{\varepsilon^6}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_2 (\partial_t^2 w_+^4 + \partial_t^2 w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma \\
& - \frac{\varepsilon^6}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_4 (w_+^4 + w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma - \frac{\varepsilon^6}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{B}_6 (\partial_t w_+^4 + \partial_t w_-^4)(v_+ + v_-) \, d\Gamma.
\end{aligned}$$

En utilisant le lemme 14, nous obtenons

$$\|R_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c\varepsilon^{-1/2} \left[ \varepsilon \|R_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \varepsilon^4 \|w_3\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \varepsilon^4 \|w_4\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \right],$$

où  $c$  est une constante positive indépendante de  $\varepsilon$ . Par conséquent

$$\|R_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq \frac{c\varepsilon^{7/2}}{1 - c\varepsilon^{1/2}} \left( \|w_3\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|w_4\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \right).$$

Comme  $\varepsilon$  est assez petit, il s'ensuit que

$$\|R_w\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \leq c\varepsilon^3 \left( \|w_3\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} + \|w_4\|_{\mathbb{H}^1(\Omega)} \right).$$

D'où le théorème.

□

## Deuxième partie

Analyse asymptotique pour un  
problème de Helmholtz avec couche  
mince d'épaisseur non constante



## CHAPITRE

### 4

# DESCRIPTION DU PROBLÈME ET ASPECT GÉOMÉTRIQUE

Dans cette partie, nous nous proposons d'étudier le comportement asymptotique de la solution d'un problème de Helmholtz défini dans  $\mathbb{R}^2$  contenant une inclusion mince d'épaisseur non constante.

Plus précisément, considérons un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  noté  $\Omega_\varepsilon$ , de frontière  $\Gamma_\varepsilon$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ , recouvert d'une couche mince  $\Omega_{m,2}^\varepsilon$  d'épaisseur non constante de frontière  $\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_\varepsilon^+$ . L'interface  $\Gamma_\varepsilon^-$  est paramétrée par

$$\begin{aligned} \gamma_- : (0, l_{\Gamma_\varepsilon^-}) &\longrightarrow \Gamma_\varepsilon^- \\ t &\longrightarrow \gamma_-(t), \end{aligned}$$

où  $l_{\Gamma_\varepsilon^-}$  est la longueur de  $\Gamma_\varepsilon^-$  et  $t$  est la longueur d'arc de  $\gamma_-$ , l'interface  $\Gamma_\varepsilon^+$  est paramétrée par

$$\Gamma_\varepsilon^+ = \left\{ \gamma_-(t) + \varepsilon f(t) \mathbf{n}_- \mid t \in (0, l_{\Gamma_\varepsilon^-}) \right\},$$



où  $\mathbf{n}_-$  est le vecteur unitaire normal extérieur à  $\Gamma_-^\varepsilon$ ,  $\varepsilon f$  est l'épaisseur de la couche mince  $\Omega_{m,2}^\varepsilon$  telle que  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $(0, l_{\Gamma_-^\varepsilon})$  bornée et strictement positive, et soit  $\Omega_+^\varepsilon$  un domaine extérieur de frontière  $\Gamma_+^\varepsilon$  défini par (cf. Fig. 4.1)

$$\Omega_+^\varepsilon = \mathbb{R}^2 \setminus (\Omega_-^\varepsilon \cup \overline{\Omega_{m,2}^\varepsilon}).$$

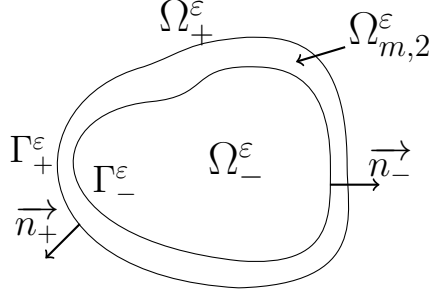


FIGURE 4.1 – Le domaine du problème.

Soient  $\alpha_\varepsilon$  et  $k_\varepsilon$  deux fonctions strictement positives définies sur  $\mathbb{R}^2$  par

$$\alpha_\varepsilon(x) = \begin{cases} \alpha_+ & \text{si } x \text{ dans } \Omega_+^\varepsilon, \\ 1 & \text{si } x \text{ dans } \Omega_{m,2}^\varepsilon, \\ \alpha_- & \text{si } x \text{ dans } \Omega_-^\varepsilon, \end{cases} \quad \text{et } k_\varepsilon(x) = \begin{cases} k_+ & \text{si } x \text{ dans } \Omega_+^\varepsilon, \\ k_m & \text{si } x \text{ dans } \Omega_{m,2}^\varepsilon, \\ k_- & \text{si } x \text{ dans } \Omega_-^\varepsilon. \end{cases} \quad (4.0.1)$$

Dans (4.0.1),  $\alpha_\varepsilon$  et  $k_\varepsilon^2$  décrivent respectivement les contrastes et les propriétés réfractives des milieux  $\Omega_-^\varepsilon$  et  $\Omega_{m,2}^\varepsilon$  par rapport au domaine de propagation extérieur  $\Omega_+^\varepsilon$ . Nous supposons que toutes les constantes  $\alpha_\pm$ ,  $k_\pm^2$  et  $k_m^2$  sont indépendantes de  $\varepsilon$  et  $\alpha_\pm < 1 < \alpha_\mp$ .

Dans cette partie, nous nous intéressons au comportement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u^\varepsilon + k_\varepsilon^2 u^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega_+^\varepsilon \cup \Omega_{m,2}^\varepsilon \cup \Omega_-^\varepsilon, \quad (4.0.2a) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^\varepsilon - u_{inc}) = 0, & \quad (4.0.2b) \end{cases}$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_{m,2}^\varepsilon = u_\pm^\varepsilon, & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \quad (4.0.2c) \\ \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_{m,2}^\varepsilon = \alpha_\pm \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_\pm^\varepsilon, & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, \quad (4.0.2d) \end{cases}$$

où  $\partial_{\mathbf{n}_+}$  et  $\partial_{\mathbf{n}_-}$  désignent les dérivées dans la direction des vecteurs unitaires normaux  $\mathbf{n}_+$  et  $\mathbf{n}_-$  à  $\Gamma_+^\varepsilon$  et  $\Gamma_-^\varepsilon$  respectivement (Fig. 4.1);  $u_+^\varepsilon$ ,  $u_{m,2}^\varepsilon$  et  $u_-^\varepsilon$  sont les restrictions de  $u^\varepsilon$

respectivement aux sous-domaines  $\Omega_+^\varepsilon$ ,  $\Omega_{m,2}^\varepsilon$  et  $\Omega_-^\varepsilon$ ;  $u_{inc}$  est l'onde incidente définie par  $u_{inc} = e^{ik_+(x \cdot d)}$ , avec  $d$  étant un vecteur unitaire de  $\mathbb{R}^2$  donnant la direction de l'onde plane  $u_{inc}$ .

Dans la première partie, nous avons étudié un problème similaire où nous avons considéré  $\alpha_\pm \in ]0, 1[$  ou  $\alpha_\pm \in ]1, +\infty[$ . Nous avons déterminé des conditions de transmission de type Ventcel sur une interface  $\Gamma$  séparant la couche mince en deux sous-couches minces. La technique utilisée dans la première partie n'est pas convenable pour le problème étudié dans cette partie, alors nous adopterons une approche similaire à celle utilisée dans [9]; nous considérons une interface  $\Gamma$  parallèle à  $\Gamma_-^\varepsilon$  divisant  $\Omega_-^\varepsilon$  en deux sous-domaines : un domaine borné  $\Omega_-$  et une couche mince  $\Omega_{m,1}^\varepsilon$  d'épaisseur  $d\varepsilon$  où  $d$  est un nombre strictement positif (cf. Fig. 4.2).

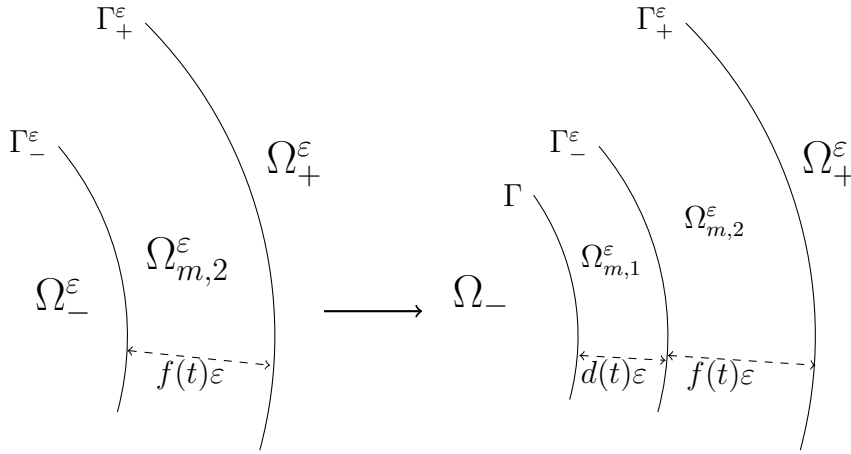


FIGURE 4.2 – Le domaine avec et sans l'interface  $\Gamma$ .

Le problème (4.0.2) est alors équivalent au problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^\varepsilon + k_+^2 u_+^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega_+^\varepsilon, & (4.0.3a) \\ \Delta u_{m,2}^\varepsilon + k_{m,2}^2 u_{m,2}^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega_{m,2}^\varepsilon, & (4.0.3b) \\ \Delta u_{m,1}^\varepsilon + k_-^2 u_{m,1}^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega_{m,1}^\varepsilon, & (4.0.3c) \\ \Delta u_-^\varepsilon + k_-^2 u_-^\varepsilon = 0, & \text{dans } \Omega_-^\varepsilon, & (4.0.3d) \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^\varepsilon - u_{inc}) = 0, & & (4.0.3e) \end{cases}$$

avec les conditions de transmission

$$\begin{cases} u_{m,2}^\varepsilon = u_\pm^\varepsilon, & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, & (4.0.3f) \\ u_{m,1}^\varepsilon = u_-^\varepsilon, & \text{sur } \Gamma, & (4.0.3g) \\ \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_{m,2}^\varepsilon = \alpha_\pm \partial_{\mathbf{n}_\pm} u_\pm^\varepsilon =, & \text{sur } \Gamma_\pm^\varepsilon, & (4.0.3h) \\ \partial_{\mathbf{n}} u_{m,1}^\varepsilon = \partial_{\mathbf{n}} u_-^\varepsilon, & \text{sur } \Gamma, & (4.0.3i) \end{cases}$$

où  $\partial_{\mathbf{n}}$  désigne la dérivée dans la direction du vecteur unitaire normal  $\mathbf{n}$  à  $\Gamma$  et  $u_{m,1}^\varepsilon = u^\varepsilon|_{\Omega_{m,1}^\varepsilon}$ .

**Remarque 15.** *L'existence et l'unicité de la solution du problème (4.0.2) sont assurés par le théorème 2 et le théorème 4.*

## 4.1 Paramétrisation de la couche mince $\Omega_m^\varepsilon$

Rappelons que la paramétrisation de  $\Gamma$  est

$$\begin{aligned} \gamma : (0, l_\Gamma) &\longrightarrow \Gamma \subset \mathbb{R}^2 \\ t &\longrightarrow \gamma(t) = (\gamma_1(t), \gamma_2(t)), \end{aligned}$$

où  $l_\Gamma$  est la longueur de  $\Gamma$  et  $t$  est la longueur d'arc de  $\gamma$ , rappelons aussi qu nous notons les vecteurs unitaires tangent et normal par  $\tau(t)$  et  $\mathbf{n}(t)$  respectivement.

Posons  $\Omega_m^\varepsilon = \Omega_{m,1}^\varepsilon \cup \Gamma \cup \Omega_{m,2}^\varepsilon$ ,  $I_1^\varepsilon = (0, d\varepsilon)$  et  $I_2^\varepsilon = (0, \varepsilon)$ . Si  $\varepsilon$  est assez petit alors les couches minces  $\Omega_{m,\beta}^\varepsilon$ ,  $\beta \in \{1, 2\}$ , peuvent être paramétrées par (cf. [21])

$$\begin{aligned} \Omega_{m,1}^\varepsilon &= \{x = \gamma(t) + \eta \mathbf{n}(t) \in \Omega_{m,1}^\varepsilon, (t, \eta) \in \Omega_{m,1}^\varepsilon := (0, l_\Gamma) \times I_1^\varepsilon\}, \\ \Omega_{m,2}^\varepsilon &= \{x = \gamma(t) + (d + \eta f(t)) \mathbf{n}(t) \in \Omega_{m,2}^\varepsilon, (t, \eta) \in \Omega_{m,2}^\varepsilon := (0, l_\Gamma) \times I_2^\varepsilon\}. \end{aligned}$$

Pour toute fonction  $v_\beta$  définie sur  $\Omega_{m,\beta}^\varepsilon$ , nous associons la fonction  $V_\beta$  définie sur  $\Omega_{m,\beta}$  par

$$\tilde{v}_\beta(t, \eta) := v_\beta(x), \quad (t, \eta) \in (0, l_\Gamma) \times I_\beta^\varepsilon,$$

alors, nous aurons

$$\nabla_{t,\eta} \tilde{v}_\beta(t, \eta) = \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{v}_\beta \\ \partial_\eta \tilde{v}_\beta \end{pmatrix} = M_\beta^\varepsilon \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_\beta \\ \partial_{x_2} v_\beta \end{pmatrix},$$

avec

$$M_1^\varepsilon = \begin{pmatrix} m_{11}^1 & m_{12}^1 \\ m_{21}^1 & m_{22}^1 \end{pmatrix}, \quad \text{et} \quad M_2^\varepsilon = \begin{pmatrix} m_{11}^2 & m_{12}^2 \\ m_{21}^2 & m_{22}^2 \end{pmatrix},$$

où

$$\begin{aligned}
 m_{11}^1 &= [1 + \eta d(t)c(t)]n_2 + \eta d'(t)n_1, \\
 m_{12}^1 &= -[1 + \eta d(t)c(t)]n_1 + \eta d'(t)n_2, \\
 m_{21}^1 &= d(t)n_1, \\
 m_{22}^1 &= d(t)n_2, \\
 m_{11}^2 &= [1 + (d(t)\varepsilon + \eta f(t))c(t)]n_2 + (d'(t)\varepsilon + \eta h'(t))n_1, \\
 m_{12}^2 &= -[1 + (d(t)\varepsilon + \eta f(t))c(t)]n_1 + (d'(t)\varepsilon + \eta h'(t))n_2, \\
 m_{21}^2 &= f(t)n_1, \\
 m_{22}^2 &= f(t)n_2,
 \end{aligned}$$

donc l'expression du Laplacien en coordonnées  $(t, \eta)$  est

$$\begin{aligned}
 \nabla v_1 &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_1 \\ \partial_{x_2} v_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_2}{1+\eta d(t)c(t)} & \frac{n_1}{d(t)} - \frac{\eta d'(t)n_2}{[1+\eta d(t)c(t)]d(t)} \\ \frac{-n_1}{1+\eta d(t)c(t)} & \frac{n_2}{d(t)} + \frac{\eta d'(t)n_1}{[1+\eta d(t)c(t)]d(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{v}_1 \\ \partial_\eta \tilde{v}_1 \end{pmatrix}, \\
 \nabla v_2 &= \begin{pmatrix} \partial_{x_1} v_2 \\ \partial_{x_2} v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{n_2}{1+(d(t)\varepsilon+\eta f(t))c(t)} & \frac{n_1}{f(t)} - \frac{(d'(t)\varepsilon+\eta h'(t))n_2}{[1+(d(t)\varepsilon+\eta f(t))c(t)]f(t)} \\ \frac{-n_1}{1+(d(t)\varepsilon+\eta f(t))c(t)} & \frac{n_2}{f(t)} + \frac{(d'(t)\varepsilon+\eta h'(t))n_1}{[1+(d(t)\varepsilon+\eta f(t))c(t)]f(t)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \partial_t \tilde{v}_2 \\ \partial_\eta \tilde{v}_2 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Comme dans la première partie, nous transformons  $\Omega_m^\varepsilon$  en un domaine fixe indépendant de  $\varepsilon$ . Soient le changement d'échelle  $s = \eta/\varepsilon$  et les intervalles  $I_1 = (0, d)$  et  $I_2 = (0, 1)$ . Nous introduisons les difféomorphismes  $\Phi_\beta$  de classe  $C^\infty$  définis par

$$\begin{cases} \Omega_{m,1} := (0, l_\Gamma) \times I_1 & \xrightarrow{\Phi_1} \Omega_{m,1}^\varepsilon \\ (t, s) & \rightarrow x := \gamma(t) + \varepsilon \mathbf{n}(t), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} \Omega_{m,2} := (0, l_\Gamma) \times I_2 & \xrightarrow{\Phi_2} \Omega_{m,2}^\varepsilon \\ (t, s) & \rightarrow x := \gamma(t) + (d(t) + sf(t))\varepsilon \mathbf{n}(t), \end{cases}$$

paramétrant  $\Omega_{m,\beta}^\varepsilon$ . Pour toute fonction  $v_\beta$  définie sur  $\Omega_{m,\beta}^\varepsilon$ , nous associons la fonction  $V_\beta$  définie sur  $\Omega_{m,\beta}$  par

$$\begin{cases} V_\beta(t, s) & := v_\beta(x), \\ x & = \Phi_\beta(t, s). \end{cases}$$

Ainsi l'expression du Laplacien en coordonnées  $(t, s)$  est

$$\Delta v_1 = \varepsilon^{-2} \left( \partial_s^2 - \sum_{j=1}^N \varepsilon^j A_{1,j} + \varepsilon^{N+1} T_{N,1} \right) V_1, \quad (4.1.1)$$

$$\Delta v_2 = \varepsilon^{-2} \left[ \frac{1}{f^2} \partial_s^2 - \sum_{j=1}^N \varepsilon^j A_{2,j} + \varepsilon^{N+1} T_{N,2} \right] V_2, \quad (4.1.2)$$

où  $T_{N,\beta}$  un opérateur borné par rapport à  $\varepsilon$ . En particulier

$$A_{1,1} = -c(t) \partial_s, \quad (4.1.3)$$

$$A_{1,2} = sc^2(t) \partial_s - \partial_t^2, \quad (4.1.4)$$

$$A_{1,3} = -s^2 c^3(t) \partial_s + 2sc(t) \partial_t^2 + sc'(t) \partial_t, \quad (4.1.5)$$

$$A_{2,1} = -\frac{c(t)}{f(t)} \partial_s, \quad (4.1.6)$$

$$A_{2,2} = 2sf'^{-1}(t) \partial_t \partial_s - s^2 f'^2(t) f^{-2}(t) \partial_s^2 - \partial_t^2 \\ - [2sf'^2(t) f^{-2}(t) - sf''(t) f^{-1}(t) - sc^2(t) - dc^2 f^{-1}] \partial_s, \quad (4.1.7)$$

$$A_{2,3} = \left( \frac{2s^3 c(t)}{f(t)} + \frac{2s^2 dc(t)}{f^2(t)} \right) f'^2(t) \partial_s^2 + \left( 4s^2 c(t) + \frac{4sdc(t)}{f(t)} \right) f'(t) \partial_t \partial_s \\ + (2sc(t) f(t) + 2dc(t)) \partial_t^2 - (d + sf(t)) c'(t) \partial_t + \left( -s^2 c^3(t) f(t) - 2sdc^3(t) - \frac{dc^3(t)}{f(t)} \right. \\ \left. - 2s^2 c(t) f''(t) + \frac{4s^2 c(t) f'^2(t)}{f(t)} - \frac{2sdc(t) f''(t)}{f(t)} + \frac{4sdc(t) f'^2(t)}{f^2(t)} - s^2 c'(t) f'(t) \right. \\ \left. - \frac{sdc'(t) f'(t)}{f(t)} \right) \partial_s. \quad (4.1.8)$$

Les dérivées normales sur  $\Gamma$ ,  $\Gamma_-^\varepsilon$  et  $\Gamma_+^\varepsilon$  se développent en fonction de  $\varepsilon$  comme

$$\partial_{\mathbf{n}} v_1|_\Gamma = \varepsilon^{-1} \partial_s V_1(t, 0), \quad (4.1.9)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_-} v_1|_{\Gamma_-^\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \partial_s V_1(t, d), \quad (4.1.10)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_-} v_2|_{\Gamma_-^\varepsilon} = \varepsilon^{-1} f^{-1} \partial_s V_2(t, 0), \quad (4.1.11)$$

$$\partial_{\mathbf{n}_+} v_2|_{\Gamma_+^\varepsilon} = \left[ \varepsilon^{-1} f^{-1} \partial_s + \varepsilon \left( \frac{1}{2} f'^2 f^{-1} \partial_s - f' \partial_t \right) + \dots \right] V_2(t, 1). \quad (4.1.12)$$

De plus, si  $v$  est une fonction définie sur  $\Omega_m^\varepsilon$ , qui est paramétrée par

$$\Omega_m^\varepsilon = \{x = \gamma(t) + \eta(d + f(t)) \mathbf{n}(t) \in \Omega_m^\varepsilon, (t, \eta) \in \Omega_m := (0, l_\Gamma) \times (0, \varepsilon)\}, \quad (4.1.13)$$

alors, en utilisant un développement de Taylor dans la variable normale  $\eta$ , la dérivée normale sur  $\Gamma_+^\varepsilon$  admet le développement

$$\partial_{\mathbf{n}_+} v|_{\Gamma_+^\varepsilon} = \partial_{\mathbf{n}} v|_\Gamma + \varepsilon [(f + d) \partial_{\mathbf{n}}^2 v|_\Gamma - f' \partial_t v|_\Gamma] + \dots \quad (4.1.14)$$

## CHAPITRE

### 5

# ANALYSE ASYMPTOTIQUE

Dans ce chapitre, nous dérivons un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (4.0.2) en fonction de  $\varepsilon$ . Nous présentons une hiérarchie d'équations définies dans un domaine fixe (indépendant de  $\varepsilon$ ). Ensuite nous donnons les trois deux premiers termes du développement asymptotique et un théorème de convergence justifiant l'ansatz.

En raison des phénomènes de couche limite, nous considérons deux développements asymptotiques : un développement asymptotique extérieur correspondant au développement de la solution  $u^\varepsilon$  restreint à  $\Omega_+^\varepsilon$  et à  $\Omega_-$ , écrit en coordonnées cartésiennes  $x = (x_1, x_2)$  (échelle macroscopique) et donné par l'ansatz

$$u_+^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_+^n \text{ dans } \Omega_+^\varepsilon, \quad (5.0.1)$$

$$u_-^\varepsilon = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n u_-^n \text{ dans } \Omega_-, \quad (5.0.2)$$

où les termes  $u_-^n$  et  $u_+^n$  ( $n \in \mathbb{N}$ ) sont indépendants de  $\varepsilon$  et respectivement définis sur  $\Omega_-$

et  $\Omega_+ := \Omega_+^\varepsilon \cup \Gamma_+^\varepsilon \cup \Omega_{m,2}^\varepsilon \cup \Gamma_-^\varepsilon \cup \Omega_{m,1}^\varepsilon$ . Ils satisfont

$$\begin{cases} \Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0, & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^n + k_-^2 u_-^n = 0, & \text{dans } \Omega_-, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^n - \delta_{0,n} u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (5.0.3)$$

dans lequel  $\delta_{0,n}$  indique le symbole de Kronecker. Et un développement asymptotique intérieur correspondant au développement asymptotique de  $u^\varepsilon$  restreint à  $\Omega_m^\varepsilon$ , écrit en coordonnées locales  $(t, s)$  (échelle microscopique) et défini par l'ansatz

$$u_{m,\beta}^\varepsilon(x_1, x_2) = U_{m,\beta}^\varepsilon(t, s) = \sum_{n \geq 0} \varepsilon^n U_{m,\beta}^n(t, s) \quad \text{in } \Omega_{m,\beta}, \quad \beta = 1, 2, \quad (5.0.4)$$

où  $U_{m,\beta}^n$  sont indépendants de  $\varepsilon$ .

En utilisant un développent de Taylor dans la variable normale, les conditions de transmission (4.0.2c) deviennent

$$U_{m,1}^0(t, 0) + \varepsilon U_{m,1}^1(t, 0) + \dots = u_-^0|_\Gamma + \varepsilon u_-^1|_\Gamma + \dots, \quad (5.0.5)$$

$$U_{m,1}^0(t, d) + \varepsilon U_{m,1}^1(t, d) + \dots = U_{m,2}^0(t, 0) + \varepsilon U_{m,2}^1(t, 0) + \dots, \quad (5.0.6)$$

$$U_{m,2}^0(t, 1) + \varepsilon U_{m,2}^1(t, 1) + \dots = u_+^0|_\Gamma + \varepsilon (u_+^1|_\Gamma + (d + f(t)) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma) + \dots, \quad (5.0.7)$$

et les condition (4.0.2d) deviennent

$$\varepsilon^{-1} \partial_s U_{m,1}^0(t, 0) + \partial_s U_{m,1}^1(t, 0) + \varepsilon \partial_s U_{m,1}^2(t, 0) + \dots = \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma + \varepsilon \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma + \dots, \quad (5.0.8)$$

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-1} \alpha_- \partial_s U_{m,1}^0(t, d) + \alpha_- \partial_s U_{m,1}^1(t, d) + \varepsilon \alpha_- \partial_s U_{m,1}^2(t, d) + \dots \\ = \frac{1}{f(t)} (\varepsilon^{-1} \partial_s U_{m,2}^0(t, 0) + \partial_s U_{m,2}^1(t, 0) + \varepsilon \partial_s U_{m,2}^2(t, 0)) + \dots, \end{aligned} \quad (5.0.9)$$

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon^{-1}}{f(t)} \partial_s U_{m,2}^0(t, 1) + \frac{1}{f(t)} \partial_s U_{m,2}^1(t, 1) \\ + \varepsilon \left( \frac{1}{f(t)} \partial_s U_{m,2}^2(t, 1) + \frac{f'^2(t)}{2f(t)} \partial_s U_{m,2}^0(t, 1) - f'(t) \partial_t U_{m,2}^0(t, 1) \right) + \dots \\ = \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + \varepsilon (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma + (d + f(t)) \alpha_+ \partial_n^2 u_+^0|_\Gamma - f'(t) \alpha_+ \partial_t u_+^0|_\Gamma) + \dots. \end{aligned} \quad (5.0.10)$$

En insérant la série (5.0.4) dans (4.0.2a), utilisant (4.1.1) et (4.1.2) puis faisant correspondre les termes de mêmes puissances en  $\varepsilon$ , nous obtenons, pour tout  $(t, s) \in (0, l_\Gamma) \times I_\beta$

$$\partial_s^2 U_{m,\beta}^0 = 0, \quad (5.0.11)$$

$$\partial_s^2 U_{m,\beta}^1 = A_{\beta,1} U_{m,\beta}^0, \quad (5.0.12)$$

$$\partial_s^2 U_{m,1}^2 = A_{1,1} U_{m,1}^1 + A_{1,2} U_{m,1}^0 - k_-^2 U_{m,1}^0, \quad (5.0.13)$$

$$\partial_s^2 U_{m,2}^2 = A_{2,1} U_{m,2}^1 + A_{2,2} U_{m,2}^0 - k_m^2 U_{m,2}^0, \quad (5.0.14)$$

$$\partial_s^2 U_{m,1}^3 = A_{1,1} U_{m,1}^2 + A_{1,2} U_{m,1}^1 + A_{1,3} U_{m,1}^0 - k_-^2 U_{m,1}^1, \quad (5.0.15)$$

$$\partial_s^2 U_{m,2}^3 = A_{2,1} U_{m,2}^2 + A_{2,2} U_{m,2}^1 + A_{2,3} U_{m,2}^0 - k_m^2 U_{m,2}^1. \quad (5.0.16)$$

## 5.1 Calcul des deux premiers termes

### 5.1.1 Terme d'ordre 0

L'équation (5.0.11) et les conditions (5.0.10) et (5.0.8) donnent

$$\partial_s U_{m,\beta}^0 = 0, \quad \beta \in \{1, 2\}.$$

En utilisant (5.0.7), (5.0.6) et (5.0.5), nous obtenons  $\forall(t, s) \in \Omega_{m,\beta}$

$$U_{m,\beta}^0(t, s) = u_-^0|_\Gamma = u_+^0|_\Gamma. \quad (5.1.1)$$

L'équation (5.0.12) implique

$$\partial_s^2 U_{m,\beta}^1 = A_{\beta,1} U_{m,\beta}^0 = 0.$$

Utilisant (5.0.10), (5.0.9) et (5.0.8), nous aurons  $\forall(t, s) \in \Omega_{m,\beta}$

$$\partial_s U_{m,2}^1(t, s) = f(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma, \quad \partial_s U_{m,1}^1(t, s) = \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma \quad \text{et} \quad \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma = \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma. \quad (5.1.2)$$

Les termes  $(u_-^0, u_+^0)$  sont solutions du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^0 + k_+^2 u_+^0 = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^0 + k_-^2 u_-^0 = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^0 - u_{inc}) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$  :

$$u_+^0 = u_-^0, \quad (5.1.3)$$

$$\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 = \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0. \quad (5.1.4)$$

De plus  $(U_m^n)_{0 \leq n \leq 1}$  est déterminée par

$$U_{m,\beta}^0(t, s) = u_-^0|_\Gamma = u_+^0|_\Gamma, \quad (5.1.5)$$

$\forall(t, s) \in (0, l_\Gamma) \times (0, 1)$ .



### 5.1.2 Terme d'ordre 1

La relation (5.1.2) avec les conditions (5.0.7) et (5.0.5) donnent  $\forall(t, s) \in \Omega_{m,\beta}$

$$\begin{aligned} U_{m,1}^1(t, s) &= u_-^1|_\Gamma + (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma) s, \\ U_{m,2}^1(t, s) &= u_+^1|_\Gamma + (d + f(t) - f(t)\alpha_+ + sf(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma. \end{aligned}$$

Alors (5.0.6) implique que

$$u_+^1|_\Gamma - u_-^1|_\Gamma = \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d + f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma). \quad (5.1.6)$$

De (5.0.13) et (5.0.14), nous avons

$$\begin{aligned} \partial_s^2 U_{m,1}^2 &= A_{1,1} U_{m,1}^1 + A_{1,2} U_{m,1}^0 - k_-^2 U_{m,1}^0 = -c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma - k_-^2 u_-^0|_\Gamma. \\ \partial_s^2 U_{m,2}^2 &= A_1 U_{m,2}^1 + A_2 U_{m,2}^0 - k_m^2 U_{m,2}^0 = -c(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_+^0|_\Gamma - k_m^2 u_+^0|_\Gamma. \end{aligned}$$

Utilisant (5.0.10) et (5.0.8), nous obtenons  $\forall(t, s) \in \Omega_{m,\beta}$

$$\partial_s U_{m,1}^2(t, s) = [-c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma - k_-^2 u_-^0|_\Gamma] s + \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma. \quad (5.1.7)$$

$$\begin{aligned} \partial_s U_{m,2}^2(t, s) &= [-c(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma - \partial_t^2 u_+^0|_\Gamma - k_m^2 u_+^0|_\Gamma] (s - 1) + f(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma \\ &\quad - c(t) f(t) f'(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma + f(t) f'(t) \partial_t u_+^0|_\Gamma + (d + f(t)) f(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma. \end{aligned} \quad (5.1.8)$$

Les conditions (5.0.9) à l'ordre 1 impliquent

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_\Gamma - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_\Gamma &= \frac{c(t)(f'(t) - df(t) - 1)}{f(t)} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma - \frac{df(t)\alpha_- + 1}{f(t)} \partial_t^2 u_+^0|_\Gamma \\ &\quad - \frac{dk_-^2 \alpha_- + k_m^2 u_+^0|_\Gamma - f'(t) \partial_t u_+^0|_\Gamma - (d + f(t)) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_\Gamma}{f(t)}. \end{aligned} \quad (5.1.9)$$

Comme

$$\begin{aligned} \Delta u_+ &= \left[ \frac{(1 + \eta c(t)(d + f(t))^2 + \eta^2 f'^2(t))}{(d + f(t))^2 (1 + \eta c(t)(d + f(t))^2)} \partial_\eta^2 - \frac{2\eta f'(t)}{(d + f(t))(1 + \eta c(t)(d + f(t))^2)} \partial_t \partial_\eta \right. \\ &\quad + \frac{1}{(1 + \eta c(t)(d + f(t))^2)} \partial_t^2 - \frac{\varepsilon dc'(t) + \eta c'(t) f(t)}{(1 + \eta c(t)(d + f(t))^3} \partial_t + \left( \frac{c(t)}{(d + f(t))(1 + \eta c(t)(d + f(t)))} \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\eta(-f(t)f''(t) + 2f'^2(t))}{(d + f(t))^2 (1 + \eta c(t)(d + f(t))^2} + \frac{\eta \varepsilon dc'(t) f(t) f'(t) + \eta^2 c'(t) f^2(t) f'(t)}{(d + f(t)) f^2 (1 + \eta c(t)(d + f(t))^3} \right) \partial_\eta \right] \tilde{u}_+. \end{aligned}$$

et

$$\partial_\eta u_+(t, \eta)|_{\eta=0} = (d + f(t)) \partial_{\mathbf{n}} u_+|_\Gamma,$$

il s'en suit qu'en prenant la limite  $\eta \rightarrow 0$ , nous aurons

$$\partial_t^2 u_+|_{\eta=0} + \frac{c(t)}{d+f(t)} \partial_\eta u_+^n|_{\eta=0} + \frac{1}{(d+f(t))^2} \partial_\eta^2 u_+^n|_{\eta=0} + k_+^2 u_+|_{\eta=0} = 0,$$

c'est à dire

$$\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+|_\Gamma = -\partial_t^2 u_+|_\Gamma - c(t) \partial_{\mathbf{n}} u_+|_\Gamma - k_+^2 u_+|_\Gamma. \quad (5.1.10)$$

Alors (5.1.9) devient

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1 - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1 &= \frac{(d+f(t))f(t)\alpha_+ - df(t)\alpha_- - 1}{2f(t)} (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\ &+ \frac{(d+f(t))f(t)k_+^2\alpha_+ - df(t)k_-^2\alpha_- - k_m^2}{2f(t)} (u_+^0 + u_-^0) \\ &+ \frac{c(t)(f^2(t) - 1)}{2f(t)} (\alpha_+ \partial_n u_+^0 + \alpha_- \partial_n u_-^0) \\ &+ \frac{f'(t)(\alpha_+ - 1)}{2} (\partial_t u_+^0 + \partial_t u_-^0). \end{aligned} \quad (5.1.11)$$

Les termes  $(u_-^1, u_+^1)$  sont solutions du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^1 + k_+^2 u_+^1 = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^1 + k_-^2 u_-^1 = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u_+^1 = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$  :

$$\begin{aligned} u_+^1 - u_-^1 &= \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d+f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0), \quad (5.1.12) \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1 - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1 &= \frac{(d+f(t))f(t)\alpha_+ - df(t)\alpha_- - 1}{2f(t)} (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\ &+ \frac{(d+f(t))f(t)k_+^2\alpha_+ - df(t)k_-^2\alpha_- - k_m^2}{2f(t)} (u_+^0 + u_-^0) \\ &+ \frac{c(t)(f^2(t) - 1)}{2f(t)} (\alpha_+ \partial_n u_+^0 + \alpha_- \partial_n u_-^0) \\ &+ \frac{f'(t)(\alpha_+ - 1)}{2} (\partial_t u_+^0 + \partial_t u_-^0). \end{aligned} \quad (5.1.13)$$

De plus  $(U_m^n)_{0 \leq n \leq 1}$  sont déterminées par

$$U_{m,1}^1(t, s) = u_-^1|_\Gamma + s \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_\Gamma, \quad (5.1.14)$$

$$U_{m,2}^1(t, s) = u_+^1|_\Gamma + (f + d - f(t)\alpha_+ + sf(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_\Gamma, \quad (5.1.15)$$

$$\forall (t, s) \in (0, l_\Gamma) \times (0, 1).$$

### 5.1.3 Terme d'ordre 2

Les relations (5.1.7) et (5.1.8) avec les conditions (5.0.7) et (5.0.5) donnent  $\forall(t, s) \in \Omega_{m,\beta}$

$$U_{m,1}^2(t, s) = [-c(t)\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} - k_-^2 u_-^0|_{\Gamma}] \frac{s^2}{2} + \partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_{\Gamma}s + u_-^2|_{\Gamma}. \quad (5.1.16)$$

$$\begin{aligned} U_{m,2}^2(t, s) &= [-c(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} - k_m^2 u_+^0|_{\Gamma}] \frac{s^2 - 2s + 1}{2} + [f(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_{\Gamma} \\ &\quad - c(t)f(t)f'(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} + f(t)f'(t)\partial_t u_+^0|_{\Gamma} + (d + f(t))f(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma}] (s - 1) \\ &\quad + (d + f(t))\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_{\Gamma} + \frac{(d + f(t))^2}{2}\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma} + u_+^2|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (5.1.17)$$

Donc (5.0.6) avec (5.1.10) et (5.1.13) nous obtenons

$$\begin{aligned} u_+^2|_{\Gamma} - u_-^2|_{\Gamma} &= -\frac{1}{2} [-c(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} - k_m^2 u_+^0|_{\Gamma}] + [f(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_{\Gamma} \\ &\quad - c(t)f(t)f'(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} + f(t)f'(t)\partial_t u_+^0|_{\Gamma} + (d + f(t))f(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma}] \\ &\quad - (d + f(t))\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_{\Gamma} - \frac{(d + f(t))^2}{2}\partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma} + [-c(t)\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} \\ &\quad - k_-^2 u_-^0|_{\Gamma}] \frac{d^2}{2} + d\partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (5.1.18)$$

$$\begin{aligned} u_+^2|_{\Gamma} - u_-^2|_{\Gamma} &= \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- + d\alpha_+ - (d + f(t))\alpha_-}{\alpha_+\alpha_-} \alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_{\Gamma} \\ &\quad + \left( \frac{(f(t) - 2f^2(t)f'(t) - 2df^2(t) - 2f^3(t))\alpha_+\alpha_- - (d^2f(t) + 2df^2(t) - 2d)\alpha_+}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\ &\quad \left. + \frac{(d + f(t))^2 f(t)\alpha_-}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) c(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} + \left( \frac{-2(d + f(t))f^2(t)\alpha_+^2\alpha_-}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\ &\quad \left. + \frac{-2d(d + f(t))f(t)\alpha_+^2 + (f(t) + 2d^2f(t) + f^3(t) + 2df^2(t))\alpha_+\alpha_- + 2d\alpha_+}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) \\ &\quad \times \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \left( \frac{-2(d + f(t))f^2(t)k_+^2\alpha_+^2\alpha_- - 2d(d + f(t))f(t)k_+^2\alpha_+^2}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\ &\quad \left. + \frac{+ [k_m^2 + d^2k_-^2 + (d + f(t))^2k_+^2]f(t)\alpha_+\alpha_- + 2dk_m^2\alpha_+}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) u_+^0|_{\Gamma} \\ &\quad + \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - d\alpha_+^2 + d\alpha_+}{\alpha_+\alpha_-} f'(t)\partial_t u_+^0|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (5.1.19)$$

Utilisant (5.1.13) nous aurons

$$u_+^2|_{\Gamma} - u_-^2|_{\Gamma} = \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- + d\alpha_+ - (d + f(t))\alpha_-}{\alpha_+\alpha_-} \alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_{\Gamma}$$

$$\begin{aligned}
& + \left( \frac{(-f(t) - 2f^2(t)f'(t) - 2df^2(t))\alpha_+\alpha_- + (-f^3(t) + d^2f(t) + 2f(t) + 2d)\alpha_-}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\
& \quad \left. - \frac{d^2f(t)\alpha_+}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) c(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} + \left( \frac{-2df^2(t)\alpha_+\alpha_-^2 + 2df(t)(d+f(t))\alpha_-^2}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\
& \quad \left. + \frac{-(f(t) + 2d^2f(t) + f^3(t) + 2df^2(t))\alpha_+\alpha_- + 2(d+f(t))\alpha_-}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} \\
& + \left( \frac{-2df^2(t)k_-^2\alpha_+\alpha_-^2 + 2d(d+f(t))f(t)k_-^2\alpha_-^2}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\
& \quad \left. + \frac{-[k_m^2 + d^2k_-^2 + (d+f(t))^2k_+^2]f(t)\alpha_+\alpha_- + 2(d+f(t))k_m^2\alpha_-}{2f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) u_+^0|_{\Gamma} \\
& + \frac{f(t)\alpha_+^2\alpha_- - (d+f(t))\alpha_+\alpha_- + (d+f(t))\alpha_-}{\alpha_+\alpha_-} f'(t)\partial_t u_+^0|_{\Gamma}. \tag{5.1.20}
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
u_+^2|_{\Gamma} - u_-^2|_{\Gamma} & = \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- + d\alpha_+ - (d+f(t))\alpha_-}{2\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{(-2f^2(t)f'(t) - 2df^2(t) - f^3(t))\alpha_+\alpha_- + (d - d^2f(t) - df^2(t))\alpha_+}{4f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\
& \quad \left. - \frac{(d+f(t) + d^2f(t) + df^2(t))\alpha_-}{4f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) c(t) (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{-(d+f(t))f^2(t)\alpha_+^2\alpha_- - df^2(t)\alpha_+\alpha_-^2 - df(t)(d+f(t))(\alpha_+^2 - \alpha_-^2)}{4f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\
& \quad \left. + \frac{d\alpha_+ + (d+f(t))\alpha_-}{4f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) (\partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{-(d+f(t))f^2(t)k_+^2\alpha_+^2\alpha_- - df^2(t)k_-^2\alpha_+\alpha_-^2 - d(d+f(t))f(t)(k_+^2\alpha_+^2 - k_-^2\alpha_-^2)}{4f(t)\alpha_+\alpha_-} \right. \\
& \quad \left. + \frac{dk_m^2\alpha_+ + (d+f(t))k_m^2\alpha_-}{4f(t)\alpha_+\alpha_-} \right) (u_+^0|_{\Gamma} + u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \frac{f(t)\alpha_+^2\alpha_- - d\alpha_+^2 - d\alpha_+\alpha_- + d\alpha_+ + (d+f(t))\alpha_-}{4\alpha_+\alpha_-} f'(t) (\partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t u_-^0|_{\Gamma}). \tag{5.1.21}
\end{aligned}$$

Les équations (5.0.15) et (5.0.16) impliquent que,  $\forall(t, s) \in \Omega_{m,\beta}$ ,

$$\begin{aligned}
\partial_s U_{m,1}^3(t, s) & = [c^2\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma} + c\partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} + ck_-^2 u_-^0|_{\Gamma} - k_-^2 (\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma}) - \partial_t^2 (\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma})] \frac{s^2}{2} \\
& + [c^2 (\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_{\Gamma}) + 2c(t)\partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} + c'(t)\partial_t u_-^0|_{\Gamma}] \frac{s^2}{2} \\
& + (-\partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma} - k_-^2 u_-^1|_{\Gamma} - c\partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_{\Gamma}) s + \partial_s U_{m,1}^3(t, 0),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_s U_{m,2}^3(t, s) &= -\frac{c(t)}{f(t)} [-c(t)\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} - k_m^2 u_-^0|_{\Gamma}] \left( \frac{1}{2} s^2 - s + \frac{1}{2} \right) \\
&+ [f'(t) f^{-1}(t) \partial_t ((f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}) - \partial_t^2 [(f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}]] \\
&- f'^2(t) f^{-2}(t) (f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + f''(t) f^{-1}(t) (f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + c^2(t) (f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} \\
&+ c(t) f(t) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} - f(t) c'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} - k_m^2 (f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}] \left( \frac{1}{2} s^2 - \frac{1}{2} \right) \\
&+ [dc^2 f^{-1} (f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} - \partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} - \partial_t^2 [(d + f(t) - f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}]] \\
&- c(t)\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} - c(t)(d + f(t))\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma} + c(t) f'(t)\alpha_+ \partial_t u_+^0|_{\Gamma} - c(t) f'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} \\
&+ 2dc(t) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} - k_m^2 u_+^1|_{\Gamma} - k_m^2 (d + f(t) - f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} - dc'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma}] (s - 1) \\
&+ \partial_s U_{m,2}^3(t, 1)
\end{aligned}$$

De la condition (5.0.8) à l'ordre 2, nous obtenons

$$\begin{aligned}
\partial_s U_{m,1}^3(t, s) &= [c^2 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma} + c \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} + ck_-^2 u_-^0|_{\Gamma} - k_-^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) - \partial_t^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma})] \frac{s^2}{2} \\
&+ [c^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) + 2c(t) \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} + c'(t) \partial_t u_-^0|_{\Gamma}] \frac{s^2}{2} \\
&+ (-\partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma} - k_-^2 u_-^1|_{\Gamma} - c \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_{\Gamma}) s + \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma},
\end{aligned}$$

Il s'en suit des conditions de transmission (5.0.9) à l'ordre 2

$$\begin{aligned}
&\frac{d^2}{2} \alpha_- c^2 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma} + \frac{d^2}{2} \alpha_- c \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} + \frac{d^2}{2} \alpha_- ck_-^2 u_-^0|_{\Gamma} - \frac{d^2}{2} \alpha_- k_-^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) - \frac{d^2}{2} \alpha_- \partial_t^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
&+ \frac{d^2}{2} \alpha_- c^2 (\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) + d^2 \alpha_- c(t) \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma} + \frac{d^2}{2} \alpha_- c'(t) \partial_t u_-^0|_{\Gamma} \\
&- d\alpha_- \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma} - d\alpha_- k_-^2 u_-^1|_{\Gamma} - d\alpha_- c \partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_{\Gamma} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma} \\
= &\frac{c}{2f^2} c(t)\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \frac{c}{2f^2} \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \frac{c}{2f^2} k_m^2 u_-^0|_{\Gamma} \\
&- \frac{1}{f} f'(t) f^{-1}(t) \partial_t ((f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}) + \frac{1}{2} \frac{1}{f} \partial_t^2 [(f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}] \\
&+ \frac{1}{f} f'^2(t) f^{-2}(t) (f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} - \frac{1}{2} f''(t) f^{-1}(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} - \frac{1}{2} c^2(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} \\
&- c(t) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \frac{1}{2} c'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \frac{1}{2} k_m^2 \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} \\
&- dc^2 f^{-1} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \frac{1}{f} \partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} + \frac{1}{f} \partial_t^2 [(d + f(t) - f(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma}] \\
&+ \frac{1}{f} c(t) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} + \frac{1}{f} c(t) (d + f(t)) \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^0|_{\Gamma} - \frac{1}{f} c(t) f'(t) \alpha_+ \partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \frac{1}{f} c(t) f'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} \\
&- \frac{1}{f} 2dc(t) \partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \frac{1}{f} k_m^2 u_+^1|_{\Gamma} + k_m^2 (d + f(t) - f(t)\alpha_+) \frac{1}{f} \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \frac{1}{f} dc'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma}
\end{aligned}$$

$$+\frac{1}{f}\partial_s U_{m,2}^3(t, 1). \quad (5.1.22)$$

Maintenant calculant le terme  $\partial_s U_{m,2}^3(t, 1)$  dans (5.1.22). De (5.0.10) à l'ordre 2, nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{f(t)}\partial_s U_{m,2}^3(t, 1) \\ &= (f'(t))^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + 2c(t)f'(t)(d+f(t))(\alpha_+ - 1) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} \\ &+ \alpha_+ \partial_n u_+^2|_{\Gamma} + (1 - \alpha_+) f'(t) \partial_t u_+^1|_{\Gamma} + f'(t)(d+f(t))(1 - \alpha_+) \partial_t \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} \\ &+ \frac{(d+f(t))^2}{2} \alpha_+ \partial_n^3 u_+^0|_{\Gamma} + (d+f(t))\alpha_+ \partial_n^2 u_+^1|_{\Gamma}. \end{aligned} \quad (5.1.23)$$

Rappelons que

$$\Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n = \frac{-\eta c'(t)}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_t u_+^n + \frac{1}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_t^2 u_+^n + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_{\eta} u_+^n + \partial_{\eta}^2 u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0.$$

La dérivée partielle par rapport à  $\eta$  implique que

$$\begin{aligned} & \frac{-c'(t)[1 + \eta c(t)]^3 + 3c(t)[1 + \eta c(t)]^2 \eta c'}{[1 + \eta c(t)]^6} \partial_t u_+^n + \frac{\eta c'(t)}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_{\eta} \partial_t u_+^n \\ & - \frac{2c}{[1 + \eta c(t)]^3} \partial_t^2 u_+^n + \frac{1}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_{\eta} \partial_t^2 u_+^n - \frac{c^2(t)}{[1 + \eta c(t)]^2} \partial_{\eta} u_+^n + \frac{c(t)}{1 + \eta c(t)} \partial_{\eta}^2 u_+^n + \partial_{\eta}^3 u_+^n + k_+^2 \partial_{\eta} u_+^n \\ & = 0. \end{aligned}$$

Prenant la limite  $\eta \rightarrow 0$ , nous aurons

$$-c'(t) \partial_t u_+^n|_{\Gamma} - 2c(t) \partial_t^2 u_+^n|_{\Gamma} + \partial_{\mathbf{n}} \partial_t^2 u_+^n|_{\Gamma} - c^2(t) \partial_{\mathbf{n}} u_+^n|_{\Gamma} + c(t) \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^n|_{\Gamma} + \partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^n|_{\Gamma} + k_+^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^n|_{\Gamma} = 0,$$

ainsi

$$\partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^n|_{\Gamma} = c'(t) \partial_t u_+^n|_{\Gamma} + 2c \partial_t^2 u_+^n|_{\Gamma} - \partial_{\mathbf{n}} \partial_t^2 u_+^n|_{\Gamma} + c^2(t) \partial_{\mathbf{n}} u_+^n|_{\Gamma} - c(t) \partial_{\mathbf{n}}^2 u_+^n|_{\Gamma} - k_+^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^n|_{\Gamma}. \quad (5.1.24)$$

Utilisant l'identité (5.1.10), la relation (5.1.24) devient

$$\begin{aligned} \partial_{\mathbf{n}}^3 u_+^n|_{\Gamma} &= 3c(t) \partial_t^2 u_+^n|_{\Gamma} + (2c^2(t) - k_+^2) \partial_{\mathbf{n}} u_+^n|_{\Gamma} + c'(t) \partial_t u_+^n|_{\Gamma} \\ &- \partial_{\mathbf{n}} \partial_t^2 u_+^n|_{\Gamma} + c(t) k_+^2 u_+^n|_{\Gamma}, \quad \forall n \geq 0. \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

Donc, utilisant (5.1.25) pour  $n = 0$  et (5.1.10) pour  $n \in \{0, 1\}$ , la relation (5.1.23) implique que

$$\frac{1}{f(t)}\partial_s U_{m,2}^3(t, 1) = (f'(t))^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + 2c(t)f'(t)(d+f(t))(\alpha_+ - 1) \partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \frac{(d+f(t))^2}{2} \alpha_+ c'(t) \partial_t u_+^0|_{\Gamma}$$

$$\begin{aligned}
& +\alpha_+\partial_n u_+^2|_\Gamma + (1-\alpha_+)f'(t)\partial_t u_+^1|_\Gamma + f'(t)(d+f(t))(1-\alpha_+)\partial_t\partial_n u_+^0|_\Gamma \\
& - (d+f(t))\alpha_+\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma - (d+f(t))\alpha_+c(t)\partial_n u_+^1|_\Gamma - (d+f(t))\alpha_+k_+^2 u_+^1|_\Gamma \\
& + \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+3c(t)\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+(2c^2(t)-k_+^2)\partial_n u_+^0|_\Gamma \\
& - \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+\partial_n\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+c(t)k_+^2 u_+^0|_\Gamma \tag{5.1.26}
\end{aligned}$$

alors (5.1.22) devient

$$\begin{aligned}
& \alpha_+\partial_n u_+^2|_\Gamma \\
= & \alpha_-\partial_n u_-^2|_\Gamma - \frac{1}{f(t)}c(t)\alpha_+\partial_n u_+^1|_\Gamma + (d+f(t))\alpha_+c(t)\partial_n u_+^1|_\Gamma - d\alpha_-c(t)\partial_n u_-^1|_\Gamma - (1-\alpha_+)f'(t)\partial_t u_+^1|_\Gamma \\
& - \frac{1}{f(t)}k_m^2 u_+^1|_\Gamma + (d+f(t))\alpha_+k_+^2 u_+^1|_\Gamma - d\alpha_-k_-^2 u_-^1|_\Gamma - \frac{1}{f(t)}\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma + (d+f(t))\alpha_+\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma \\
& - d\alpha_-\partial_t^2 u_-^1|_\Gamma + \frac{d^2}{2}\alpha_-c^2(t)\partial_n u_-^0|_\Gamma + \frac{d^2}{2}\alpha_-c(t)\partial_t^2 u_-^0|_\Gamma + \frac{d^2}{2}\alpha_-c(t)k_-^2 u_-^0|_\Gamma \\
& - \frac{d^2}{2}\alpha_-k_-^2(\partial_n u_-^0|_\Gamma) - \frac{d^2}{2}\alpha_-\partial_t^2(\partial_n u_-^0|_\Gamma) + \frac{d^2}{2}\alpha_-c^2(t)\partial_n u_-^0|_\Gamma + d^2\alpha_-c(t)\partial_t^2 u_-^0|_\Gamma \\
& + \frac{d^2}{2}\alpha_-c'(t)\partial_t u_-^0|_\Gamma - \frac{1}{2f^2(t)}c^2(t)\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma - \frac{c(t)}{2f^2(t)}\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma - \frac{c(t)}{2f^2(t)}k_m^2 u_-^0|_\Gamma \\
& + \frac{1}{f^2(t)}f'(t)\partial_t((f(t)\alpha_+)\partial_n u_+^0|_\Gamma) - \frac{1}{2}\frac{1}{f(t)}\partial_t^2[(f(t)\alpha_+)\partial_n u_+^0|_\Gamma] - \frac{f'^2(t)}{f^2(t)}\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma \\
& + \frac{1}{2}\frac{f''(t)}{f(t)}\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma + \frac{1}{2}c^2(t)\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma + c(t)\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma - \frac{1}{2}c'(t)\partial_t u_+^0|_\Gamma - \frac{1}{2}k_m^2\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma \\
& + dc^2(t)\frac{1}{f(t)}\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma - \frac{1}{f(t)}\partial_t^2[(d+f(t)-f(t)\alpha_+)\partial_n u_+^0|_\Gamma] + \frac{1}{f(t)}c(t)(d+f(t))\alpha_+\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma \\
& + \frac{1}{f(t)}c^2(t)(d+f(t))\alpha_+\partial_n u_+^0|_\Gamma + \frac{1}{f(t)}c(t)(d+f(t))\alpha_+k_+^2 u_+^0|_\Gamma + \frac{1}{f(t)}c(t)f'(t)\alpha_+\partial_t u_+^0|_\Gamma \\
& - \frac{1}{f(t)}c(t)f'(t)\partial_t u_+^0|_\Gamma + \frac{1}{f(t)}2dc(t)\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma - k_m^2(d+f(t)-f(t)\alpha_+)\frac{1}{f(t)}\partial_n u_+^0|_\Gamma \\
& - \frac{1}{f(t)}dc'(t)\partial_t u_+^0|_\Gamma - (f'(t))^2\partial_n u_+^0|_\Gamma - 2c(t)f'(t)(d+f(t))(\alpha_+-1)\partial_t u_+^0|_\Gamma \\
& - \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+c'(t)\partial_t u_+^0|_\Gamma - f'(t)(d+f(t))(1-\alpha_+)\partial_t\partial_n u_+^0|_\Gamma - \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+3c(t)\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma \\
& - \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+(2c^2(t)-k_+^2)\partial_n u_+^0|_\Gamma + \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+\partial_n\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma - \frac{(d+f(t))^2}{2}\alpha_+c(t)k_+^2 u_+^0|_\Gamma \tag{5.1.27}
\end{aligned}$$

Utilisant encore les conditions de transmission (5.1.1), (5.1.2), (5.1.6) et (5.1.9), nous

obtenons

$$\begin{aligned}
\alpha_+ \partial_n u_+^2|_\Gamma &= \alpha_- \partial_n u_-^2|_\Gamma - \mathcal{M} - \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{2} k_-^2 - d^2 c^2(t) + \frac{1}{f^2(t)} f'^2(t) - \frac{1}{2} c^2(t) + \right. \\
&+ \frac{1}{2} k_m^2 + \frac{1}{f(t)} \left[ \frac{(f''(t) - f''(t)\alpha_+)}{\alpha_+} \right] - d c^2(t) \frac{1}{f(t)} + \frac{(f'(t))^2}{\alpha_+} + \frac{(d + f(t))^2}{2} (2c^2(t) - k_+^2) \\
&+ k_m^2 \left( \frac{d + f(t) - f(t)\alpha_+}{\alpha_+} \right) \frac{1}{f(t)} - \frac{1}{f(t)} c^2(t) (d + f(t)) + \frac{c^2(t)}{2f^2(t)} - \frac{(f'(t))^2}{f^2(t)} \left. \right] (\alpha_+ \partial_n u_+^0|_\Gamma + \alpha_- \partial_n u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{d^2}{2} \alpha_- c k_-^2 - \frac{c}{2f^2} k_m^2 + \frac{1}{f} c(t) (d + f(t)) \alpha_+ k_+^2 - \frac{(d + f(t))^2}{2} \alpha_+ c(t) k_+^2 \right] (u_+^0|_\Gamma + u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \left[ \frac{d^2}{4} \alpha_- c'(t) - \frac{1}{4} c'(t) - \frac{1}{2f(t)} c(t) f'(t) - c(t) f'(t) (d + f(t)) (\alpha_+ - 1) \right. \\
&+ \left. \frac{1}{2f(t)} c(t) f'(t) \alpha_+ - \frac{(d + f(t))^2}{4} \alpha_+ c'(t) - \frac{1}{2} \frac{1}{f(t)} d c'(t) \right] (\partial_t u_+^0|_\Gamma + \partial_t u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{c(t)}{2f^2(t)} - \frac{3d^2}{2} \alpha_- c(t) - \frac{1}{f(t)} c(t) (d + f(t)) \alpha_+ - c(t) - \frac{1}{f(t)} 2dc(t) + \frac{(d + f(t))^2}{2} \alpha_+ 3c(t) \right] (\partial_t^2 u_+^0|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ \frac{(d + f(t))^2}{2} - \frac{d^2}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{f(t)} \left( \frac{d + f(t) - f(t)\alpha_+}{\alpha_+} \right) \right] (\alpha_+ \partial_t^2 \partial_n u_+^0|_\Gamma + \partial_t^2 \alpha_- \partial_n u_-^0|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} \left[ -2 \frac{1}{f(t)} \left( \frac{(f'(t) - f'(t)\alpha_+)}{\alpha_+} \right) - \frac{f'(t) (d + f(t)) (1 - \alpha_+)}{\alpha_+} \right] (\alpha_+ \partial_t \partial_n u_+^0|_\Gamma + \partial_t \alpha_- \partial_n u_-^0|_\Gamma),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\mathcal{M} &= \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - f(t) \right) c(t) (\alpha_+ \partial_n u_+^1|_\Gamma + \alpha_- \partial_n u_-^1|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} k_m^2 - (d + f(t)) \alpha_+ k_+^2 + d \alpha_- k_-^2 \right) (u_+^1|_\Gamma + u_-^1|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} (1 - \alpha_+) f'(t) (\partial_t u_+^1|_\Gamma + \partial_t u_-^1|_\Gamma) + \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - (d + f(t)) \alpha_+ + d \alpha_- \right) (\partial_t^2 u_+^1|_\Gamma + \partial_t^2 u_-^1|_\Gamma) \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - f(t) \right) c(t) \left[ \frac{(d + f(t)) f(t) \alpha_+ - d f(t) \alpha_- - 1}{2f(t)} (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - f(t) \right) c(t) \left[ \frac{(d + f(t)) f(t) k_+^2 \alpha_+ - d f(t) k_-^2 \alpha_- - k_m^2}{2f(t)} (u_+^0 + u_-^0) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - f(t) \right) c(t) \left[ \frac{c(t) (f^2(t) - 1)}{2f(t)} (\alpha_+ \partial_n u_+^0 + \alpha_- \partial_n u_-^0) \right] \\
&+ \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - f(t) \right) c(t) \left[ \frac{f'(t) (\alpha_+ - 1)}{2} (\partial_t u_+^0 + \partial_t u_-^0) \right] \\
&- d c(t) \frac{(d + f(t)) f(t) \alpha_+ - d f(t) \alpha_- - 1}{2f(t)} (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0)
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& -dc(t) \frac{(d+f(t))f(t)k_+^2\alpha_+ - df(t)k_-^2\alpha_- - k_m^2}{2f(t)} (u_+^0 + u_-^0) \\
& -dc^2(t) \frac{(f^2(t)-1)}{2f(t)} (\alpha_+\partial_n u_+^0 + \alpha_-\partial_n u_-^0) - dc(t) \frac{f'(t)(\alpha_+-1)}{2} (\partial_t u_+^0 + \partial_t u_-^0) \\
& + \left( \frac{1}{f(t)} k_m^2 - (d+f(t))\alpha_+ k_+^2 - d\alpha_- k_-^2 \right) \left( \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d+f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{4\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \right. \\
& + (1-\alpha_+) f'(t) \left( \frac{f'(t)\alpha_+\alpha_- - f'(t)\alpha_-}{4\alpha_+\alpha_-} \right) (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + (1-\alpha_+) f'(t) \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d+f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{4\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+\partial_t \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_t \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{1}{f(t)} - (d+f(t))\alpha_+ - d\alpha_- \right) \left( \frac{f''(t)\alpha_+\alpha_- - (f''(t))\alpha_-}{4\alpha_+\alpha_-} \right) (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{1}{f(t)} - (d+f(t))\alpha_+ - d\alpha_- \right) \left( \frac{f'(t)\alpha_+\alpha_- - f'(t)\alpha_-}{2\alpha_+\alpha_-} \right) (\alpha_+\partial_t \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_t \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
& + \left( \frac{1}{f(t)} - (d+f(t))\alpha_+ - d\alpha_- \right) \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d+f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{4\alpha_+\alpha_-} (\alpha_+\partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma})
\end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned}
\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^2|_{\Gamma} - \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^2|_{\Gamma} &= \vartheta_1 (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^1|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^1|_{\Gamma}) + \vartheta_2 (u_+^1|_{\Gamma} + u_-^1|_{\Gamma}) \\
&+ \vartheta_3 (\partial_t u_+^1|_{\Gamma} + \partial_t u_-^1|_{\Gamma}) + \vartheta_4 (\partial_t^2 u_+^1|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^1|_{\Gamma}) \\
&+ \vartheta_5 (\partial_t^2 u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t^2 u_-^0|_{\Gamma}) + \vartheta_6 (\partial_t u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t u_-^0|_{\Gamma}) \\
&+ \vartheta_7 (u_+^0|_{\Gamma} + u_-^0|_{\Gamma}) + \vartheta_8 (\alpha_+\partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t^2 \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
&+ \vartheta_9 (\alpha_+\partial_t \partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \partial_t \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}) \\
&+ \vartheta_{10} (\alpha_+\partial_{\mathbf{n}} u_+^0|_{\Gamma} + \alpha_-\partial_{\mathbf{n}} u_-^0|_{\Gamma}),
\end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned}
\vartheta_1 &= \frac{1}{2} \left( f(t) - \frac{1}{f(t)} \right) c(t), \\
\vartheta_2 &= \frac{1}{2} \left( (d+f(t))\alpha_+ k_+^2 - \frac{1}{f(t)} k_m^2 - d\alpha_- k_-^2 \right) \\
\vartheta_3 &= \frac{1}{2} (\alpha_+ - 1) f'(t) \\
\vartheta_4 &= \frac{1}{2} \left( (d+f)\alpha_+ - \frac{1}{f(t)} - d\alpha_- \right) \\
\vartheta_5 &= \frac{3d^2}{4} \alpha_- c(t) - \frac{c(t)}{4f^2(t)} + \frac{c(t)}{2f(t)} (d+f(t)) \alpha_+
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\frac{1}{2}c(t) + \frac{dc(t)}{f(t)} - \frac{3(d+f(t))^2}{4}\alpha_+c(t) \\
& +\frac{1}{2}\left(f(t) - \frac{1}{f(t)}\right)c(t)\left[\frac{(d+f(t))f(t)\alpha_+ - df(t)\alpha_- - 1}{2f(t)}\right] \\
& +dc(t)\frac{(d+f(t))f(t)\alpha_+ - df(t)\alpha_- - 1}{2f(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_6 &= -\frac{1}{4}c'(t) + \frac{d^2}{4}\alpha_-c'(t) - \frac{c(t)}{2f(t)}f'(t) + \alpha_+\frac{c(t)}{2f(t)}f'(t) - c(t)f'(t)(d+f(t))(\alpha_+ - 1) \\
& -\frac{(d+f(t))^2}{4}\alpha_+c'(t) - \frac{dc'(t)}{2f(t)} + dc(t)\frac{f'(t)(\alpha_+ - 1)}{2} \\
& +\frac{1}{2}\left(f(t) - \frac{1}{f(t)}\right)c(t)\left[\frac{f'(t)(\alpha_+ - 1)}{2}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_7 &= \frac{d^2}{4}\alpha_-c(t)k_-^2 - \frac{c(t)}{4f^2(t)}k_m^2 + \frac{c(t)}{2f(t)}(d+f(t))\alpha_+k_+^2 - \frac{(d+f(t))^2}{4}\alpha_+c(t)k_+^2 \\
& +\frac{1}{2}\left(f(t) - \frac{1}{f(t)}\right)c(t)\left[\frac{(d+f(t))f(t)k_+^2\alpha_+ - df(t)k_-^2\alpha_- - k_m^2}{2f(t)}\right] \\
& +dc(t)\frac{(d+f(t))f(t)k_+^2\alpha_+ - df(t)k_-^2\alpha_- - k_m^2}{2f(t)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_8 &= \frac{(d+f(t))^2 - d^2 - 1}{4} - \frac{1}{2}\frac{1}{f(t)}\left(\frac{(d+f(t) - f(t)\alpha_+)}{\alpha_+}\right) \\
& +\frac{1}{2}\left((d+f(t))\alpha_+ + d\alpha_- - \frac{1}{f(t)}\right)\left[\frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d+f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\vartheta_9 &= \frac{f'(t)(\alpha_+ - 1)}{f(t)\alpha_+} + \frac{f'(t)(d+f(t))(\alpha_+ - 1)}{2\alpha_+} \\
& +\frac{1}{2}(\alpha_+ - 1)f'(t)\frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d+f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-} \\
& +\left((d+f(t))\alpha_+ + d\alpha_- - \frac{1}{f(t)}\right)\left(\frac{f'(t)\alpha_+\alpha_- - (f'(t))\alpha_-}{2\alpha_+\alpha_-}\right)
\end{aligned}$$

$$\vartheta_{10} = -\frac{d^2}{4}k_-^2 + \frac{1}{2}d^2c^2(t) + \frac{1}{4}c^2(t) - \frac{(f'(t))^2}{2f^2(t)} - \frac{1}{2}\frac{1}{f(t)}\left[\frac{(f''(t) - f''(t)\alpha_+)}{\alpha_+}\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2} d c^2(t) f^{-1}(t) - \frac{(f'(t))^2}{2\alpha_+} + \frac{1}{2f(t)} c^2(t) (d + f(t)) - \frac{(d + f(t))^2}{4} (2c^2(t) - k_+^2) \\
& - k_m^2 \left( \frac{d + f(t) - f(t)\alpha_+}{2\alpha_+ f(t)} \right) - \frac{c^2(t)}{4f^2(t)} + \frac{(f'(t))^2}{2f^2(t)} + d \frac{c^2(t)(f^2(t) - 1)}{2f(t)} \\
& - \left( \frac{1}{f(t)} - f(t) \right) c^2(t) \frac{(f^2(t) - 1)}{4f(t)} + \frac{1}{4\alpha_+} (1 - \alpha_+)^2 (f'(t))^2 - \frac{1}{4} k_m^2 \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} k_m^2 - (d + f)\alpha_+ k_+^2 - d\alpha_- k_-^2 \right) \left( \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d + f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-} \right) \\
& - \frac{1}{2} \left( \frac{1}{f(t)} - (d + f)\alpha_+ - d\alpha_- \right) \left( \frac{f''(t)\alpha_+\alpha_- - f''(t)\alpha_-}{2\alpha_+\alpha_-} \right)
\end{aligned}$$

Maintenant, nous allons valider l'ansatz (5.0.1), (5.0.2) et (5.0.4) en donnant une estimation d'erreur effectuée en approchant la solution exacte de (4.0.2) par un développement asymptotique tronquée à l'ordre  $N \in \mathbb{N}$ .

Soit  $\tilde{\Omega}_+^\varepsilon$  un domaine de  $\mathbb{R}^2$  défini par  $\tilde{\Omega}_+^\varepsilon := \Omega_+^\varepsilon \cap \Omega$ . Nous posons

$$u_-^{\varepsilon,(N)} := \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_-^n, \quad u_+^{\varepsilon,(N)} := \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_+^n \text{ et } u_{m,\beta}^{\varepsilon,(N)} := \sum_{n=0}^N \varepsilon^n u_{m,\beta}^n,$$

où  $u_{m,\beta}^n(x) := U_{m,\beta}^n(t, s)$ ;  $\forall x = \Phi_\beta(t, s) \in \Omega_{m,\beta}^\varepsilon$ . Alors nous avons le théorème suivant.

**Théorème 16** (Théorème de convergence). *Pour tout entier  $N$ , il existe une constante  $c$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\begin{aligned}
& \left\| u_-^\varepsilon - u_-^{\varepsilon,(N)} \right\|_{H^1(\Omega_-^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \left\| u_{m,\beta}^\varepsilon - u_{m,1}^{\varepsilon,(N)} \right\|_{H^1(\Omega_{m,1}^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \left\| u_{m,2}^\varepsilon - u_{m,2}^{\varepsilon,(N)} \right\|_{H^1(\Omega_{m,2}^\varepsilon)} \\
& + \left\| u_+^\varepsilon - u_+^{\varepsilon,(N)} \right\|_{H^1(\tilde{\Omega}_+^\varepsilon)} \leq c \varepsilon^{N+1}.
\end{aligned}$$

*Démonstration.* Une preuve de l'existence, de l'unicité des séries  $(u_-^n)_n$ ,  $(u_+^n)_n$  et  $(U_{m,\beta}^n)_n$  et de l'estimation d'erreur peuvent être trouvées dans [8, 11].  $\square$

## CHAPITRE

### 6

# CONDITIONS DE TRANSMISSION APPROCHÉES

Dans ce chapitre, nous calculons les conditions de transmission de type Ventcel et les modèles approchés de la solution du problème initial. Nous démontrons l'existence et l'unicité de la solution du problème approché et énonçons une estimation d'erreur pour valider la convergence des conditions équivalentes.

Pour obtenir des conditions de transmission équivalentes d'ordre 2, nous tronquons la série (5.0.1) et (5.0.2) à l'ordre 1. Une approximation de la solution exacte  $u^\varepsilon$  loin de la couche mince est solution du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^{\varepsilon,ap} + k_+^2 u_+^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^{\varepsilon,ap} + k_-^2 u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^{\varepsilon,ap} - u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (6.0.1a)$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap} = \varepsilon \mathcal{C}_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}), \quad (6.0.1b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon, ap} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon, ap} &= \varepsilon \mathcal{D}_1 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon, ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon, ap}) + \varepsilon \mathcal{D}_2 (u_+^{\varepsilon, ap} + u_-^{\varepsilon, ap}) \\ &+ \mathcal{D}_3 (u_+^{\varepsilon, ap} - u_-^{\varepsilon, ap}) + \varepsilon \mathcal{D}_4 (\partial_t u_+^{\varepsilon, ap} + \partial_t u_-^{\varepsilon, ap}), \end{aligned} \quad (6.0.1c)$$

où

$$\mathcal{C}_1 = \frac{f(t)\alpha_+\alpha_- - (d + f(t))\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+\alpha_-}, \quad (6.0.2)$$

$$\mathcal{D}_1 = \frac{(d + f(t))f(t)\alpha_+ - df(t)\alpha_- - 1}{2f(t)}, \quad (6.0.3)$$

$$\mathcal{D}_2 = \frac{(d + f(t))f(t)k_+^2\alpha_+ - df(t)k_-^2\alpha_- - k_m^2}{2f(t)}, \quad (6.0.4)$$

$$\mathcal{D}_3 = c(t) \frac{(f^2(t) - 1)\alpha_+\alpha_-}{f(t)(f(t)\alpha_+\alpha_- - (d + f(t))\alpha_- + d\alpha_+)}, \quad (6.0.5)$$

$$\mathcal{D}_4 = \frac{f'(t)(\alpha_+ - 1)}{2}. \quad (6.0.6)$$

Notons que  $\mathcal{C}_1 \neq 0$  puisque nous avons supposé  $(\alpha_{\pm} < 1 < \alpha_{\mp})$ .

## 6.1 Stabilité uniforme

Nous allons prouver maintenant une estimation uniforme de la solution du problème (6.0.1) par rapport à  $\varepsilon$ . Ce résultat va nous permettre de démontrer l'unicité de la solution.

Pour cela, nous réécrivons le problème (6.0.1) dans un domaine tronqué (cf. [4]) afin de donner une formulation variationnelle du problème (6.0.1).

Rappelons que  $\Omega$  est un domaine régulier, de frontière  $\Gamma_{\infty}$ , contenant la couche mince  $\Omega_m^{\varepsilon}$  et notons par  $\tilde{\Omega}_{\infty}$  son complémentaire.

Nous introduisons l'opérateur de Steklov-Poincaré  $T$  défini de  $H^{1/2}(\Gamma_{\infty})$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_{\infty})$  par  $T\varphi := -\partial_{\mathbf{n}_{\tilde{\Omega}_{\infty}}} \omega$ , où  $\mathbf{n}_{\tilde{\Omega}_{\infty}}$  indique la normale unitaire à  $\Gamma_{\infty}$  extérieurement dirigée vers  $\Omega$ , et  $\omega$  est l'unique solution du problème suivant

$$\begin{cases} \text{Trouver } \omega \in H_{loc}^1(\tilde{\Omega}_{\infty}) \\ \Delta\omega + k_+^2\omega = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}_{\infty}, \\ \omega = \varphi & \text{sur } \Gamma_{\infty}, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) \omega = 0. \end{cases} \quad (6.1.1)$$

L'opérateur de Steklov-Poincaré  $T$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre 1 (cf. [4]) linéaire continu de  $H^{1/2}(\Gamma_{\infty})$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_{\infty})$ . Le lemme suivant donne une décomposition de l'opérateur de Steklov-Poincaré (cf. [4])

**Lemme 17.** Soient  $\phi \in H^{1/2}(\Gamma_\infty)$  et  $\varphi_0 \in H^1(\tilde{\Omega}_\infty)$  est l'unique solution du problème de diffusion coercif suivant

$$\begin{cases} \Delta\varphi_0 - \varphi_0 = 0 & \text{dans } \tilde{\Omega}_\infty \\ \varphi_0 = \phi & \text{sur } \Gamma_\infty. \end{cases}$$

Considérons  $T_0\phi = -\partial_{\mathbf{n}_{\tilde{\Omega}_\infty}}\varphi_0$ . Alors  $T_0$  est borné et coercif de  $H^{1/2}(\Gamma_\infty)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma_\infty)$ . De plus, il existe un opérateur compact  $K$  défini de  $H^{1/2}(\Gamma_\infty)$  dans  $H^{3/2}(\Gamma_\infty)$  tel que

$$T = T_0 + K. \quad (6.1.2)$$

Nous introduisons l'espace de Hilbert  $\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)$  défini par

$$\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma) = \left\{ v = (v_-, v_+) \in H^1(\Omega_-) \times H^1(\tilde{\Omega}_+); u_{\pm|\Gamma} \in H^1(\Gamma) \right\},$$

où  $\tilde{\Omega}_+ := \Omega_+ \cup \Omega$ . Une formulation variationnelle de (6.0.1) est donnée par

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Trouver } u_\infty^{\varepsilon, ap} := (u_-^{\varepsilon, ap}, u_+^{\varepsilon, ap}) \in \mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma), \forall v \in \mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma) \\ a_\varepsilon(u_\infty^{\varepsilon, ap}, v) := \alpha_- \int_{\Omega_-} \nabla u_-^{\varepsilon, ap} \cdot \nabla v_- \, d\Omega_- - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} u_-^{\varepsilon, ap} v_- \, d\Omega_- \\ \quad + \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \nabla u_+^{\varepsilon, ap} \cdot \nabla v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ - \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} u_+^{\varepsilon, ap} v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ \\ \quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} (\mathcal{D}_4 - \mathcal{D}'_1) (\partial_t u_+^{\varepsilon, ap} + \partial_t u_-^{\varepsilon, ap}) (v_+ + v_-) \, d\Gamma \\ \quad - \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{D}_1 (\partial_t u_-^{\varepsilon, ap} + \partial_t u_+^{\varepsilon, ap}) (\partial_t v_- + \partial_t v_+) \, d\Gamma \\ \quad + \frac{\varepsilon}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{D}_2 (u_-^{\varepsilon, ap} + u_+^{\varepsilon, ap}) (v_- + v_+) \, d\Gamma \\ \quad + \frac{1}{2} \int_{\Gamma} \mathcal{D}_3 (u_+^{\varepsilon, ap} - u_-^{\varepsilon, ap}) (v_+ + v_-) \, d\Gamma \\ \quad + \alpha_+ \langle T u_+^{\varepsilon, ap}|_{\Gamma_\infty}, v_+|_{\Gamma_\infty} \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_\infty)} \\ = l_\delta(v), \end{array} \right. \quad (6.1.3)$$

où  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_\infty)}$  désigne le crochet de dualité  $\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_\infty)$  et  $l_\delta$  est une forme linéaire arbitraire de  $H^1(\Omega)$ . Pour le problème (6.0.1),  $l_\delta$  est définie par

$$l_\varepsilon(v) := \alpha_+ \int_{\Gamma_\infty} \left( \partial_{\mathbf{n}_{\tilde{\Omega}_\infty}} + T \right) u_{inc} \bar{v} \, d\sigma.$$

Nous avons le théorème suivant

**Théorème 18.** Pour tout  $l_\varepsilon$  dans  $(\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma))'$ , il existe une constante positive  $c$ , indépendante de  $\varepsilon$ , telle que la solution  $u_\infty^{\varepsilon, ap}$  du problème (6.1.3) satisfait

$$\|u_\infty^{\varepsilon, ap}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)} \leq c\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \|l_\varepsilon\|_{(\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma))'}.$$

*Démonstration.* Montrons que l'estimation suivante est satisfaite

$$\|u_\infty^{\varepsilon, ap}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)} \leq c\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \sup_{v \in \mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)} \frac{|a_\varepsilon(u_\infty^{\varepsilon, ap}, v)|}{\|v\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)}}.$$

Pour cela, raisonnons par l'absurde. Supposant qu'il existe des suites  $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_\infty^{\varepsilon_n, ap})_{n \in \mathbb{N}}$  (notée  $(u_\infty^{n, ap})_{n \in \mathbb{N}}$ ) telles que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \varepsilon_n = 0, \quad \|\sqrt{\varepsilon_n} u_\infty^{n, ap}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)} = 1, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{\|\varphi\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)}=1} |a_{\varepsilon_n}(u_\infty^{n, ap}, \varphi)| = 0.$$

Du théorème de Rellich (théorème 49, Annexe C), nous pouvons extraire une sous-suite (notée aussi par  $(u_\infty^{n, ap})_{n \in \mathbb{N}}$ ) telle que

$$\begin{cases} \sqrt{\varepsilon_n} u_\infty^{n, ap} \rightarrow u_\infty^{0, ap} & \text{dans } \mathbb{L}^2(\Omega), \\ \sqrt{\varepsilon_n} u_\infty^{n, ap} \rightharpoonup u_\infty^{0, ap} & \text{dans } \mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma). \end{cases}$$

D'autre part, pour tout  $(v_-, v_+) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\tilde{\Omega}_+})$ , nous avons

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2\varepsilon_n} \int_\Gamma \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\mathcal{C}_1} (u_+^{n, ap} - u_-^{n, ap}) (v_+ - v_-) d\Gamma = \lim_{n \rightarrow +\infty} \alpha_- \int_{\Omega_-} \sqrt{\varepsilon_n} \nabla u_-^{n, ap} \cdot \nabla v_- d\Omega_- \\ & - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} \sqrt{\varepsilon_n} u_-^{n, ap} v_- d\Omega_- + \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \sqrt{\varepsilon_n} \nabla u_+^{n, ap} \cdot \nabla v_+ d\tilde{\Omega}_+ \\ & - \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} \sqrt{\varepsilon_n} u_+^{n, ap} v_+ d\tilde{\Omega}_+ - \frac{\varepsilon_n}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_1 \sqrt{\varepsilon_n} (\partial_t u_-^{n, ap} + \partial_t u_+^{n, ap}) (\partial_t v_- + \partial_t v_+) d\Gamma \\ & + \frac{\varepsilon_n}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_2 \sqrt{\varepsilon_n} (u_-^{n, ap} + u_+^{n, ap}) (v_- + v_+) d\Gamma + \frac{1}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_3 \sqrt{\varepsilon_n} (u_+^{n, ap} - u_-^{n, ap}) (v_+ + v_-) d\Gamma \\ & + \frac{\varepsilon_n}{2} \int_\Gamma (\mathcal{D}_4 - \mathcal{D}'_1) \sqrt{\varepsilon_n} (\partial_t u_+^{n, ap} + \partial_t u_-^{n, ap}) (v_+ + v_-) d\Gamma - \sqrt{\varepsilon_n} a_\varepsilon(u_+^{n, ap}, v) \\ & + \alpha_+ \langle \sqrt{\varepsilon_n} T u_+^{n, ap} |_{\Gamma_\infty}, v_+ |_{\Gamma_\infty} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)} \\ = & \alpha_- \int_{\Omega_-} \nabla u_-^{0, ap} \cdot \nabla v_- d\Omega_- - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} u_-^{0, ap} v_- d\Omega_- + \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \nabla u_+^{0, ap} \cdot \nabla v_+ d\tilde{\Omega}_+ \\ & - \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} u_+^{0, ap} v_+ d\tilde{\Omega}_+ + \frac{1}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_3 (u_+^{0, ap} - u_-^{0, ap}) (v_+ + v_-) d\Gamma \\ & + \alpha_+ \langle T u_+^{0, ap} |_{\Gamma_\infty}, v_+ |_{\Gamma_\infty} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)}. \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

Le terme de droite étant indépendant de  $\varepsilon$ , il s'en suit que,  $\forall (v_-, v_+) \in \mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\tilde{\Omega}_+})$ ,

$$\frac{1}{2\varepsilon_n} \int_\Gamma \frac{\sqrt{\varepsilon_n}}{\mathcal{C}_1} (u_+^{n, ap} - u_-^{n, ap}) (v_+ - v_-) d\Gamma = O(1).$$

Utilisant le fait que  $\mathcal{C}^\infty(\overline{\Omega_-}) \times \mathcal{C}^\infty(\overline{\tilde{\Omega}_+})$  est dense dans  $\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)$  et  $\mathcal{C}_1$  est borné dans  $\Gamma$ , nous obtenons pour  $v = \overline{u_\infty^{n,ap}}$

$$\|u_+^{n,ap} - u_-^{n,ap}\|_{L^2(\Gamma)} \leq c\varepsilon_n^{1/4}. \quad (6.1.5)$$

Par conséquent  $u_+^{0,ap} = u_-^{0,ap}$  sur  $\Gamma$  et pour tout  $v$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)$ , nous avons

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \sqrt{\varepsilon_n} a_{\varepsilon_n}(u_\infty^{n,ap}, v) &= \alpha_- \int_{\Omega_-} \nabla u_-^{0,ap} \cdot \nabla v_- \, d\Omega_- - \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} u_-^{0,ap} v_- \, d\Omega_- \\ &+ \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \nabla u_+^{0,ap} \cdot \nabla v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ - \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} u_+^{0,ap} v_+ \, d\tilde{\Omega}_+ \\ &+ \alpha_+ \langle T u_+^{0,ap}|_{\Gamma_\infty}, v_+|_{\Gamma_\infty} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)} = 0. \end{aligned} \quad (6.1.6)$$

Par conséquent, les résultats de l'unicité de la solution du problème :

$$\text{Trouver } u_\infty^{0,ap} \text{ dans } H^1(\Omega_- \cup \Gamma \cup \tilde{\Omega}_+) \text{ satisfaisant (6.1.6),}$$

basés sur le lemme de Rellich (lemme 48, Annexe C) et l'opérateur  $T$  impliquent que  $u_\infty^{0,ap} = 0$ .

Pour avoir la contradiction, nous allons démontrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sqrt{\varepsilon_n} u_\infty^{n,ap}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)} = 0$ . Puisque que  $u_\infty^{0,ap}$  est déterminé de manière unique alors c'est toute la suite  $(\sqrt{\varepsilon_n} u_\infty^{n,ap})_{n \in \mathbb{N}}$  qui converge vers  $u_\infty^{0,ap}$ . Il ne reste plus qu'à montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\sqrt{\varepsilon_n} \nabla u_\infty^{n,ap}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} \|\sqrt{\varepsilon_n} \nabla u_\infty^{n,ap}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 &\leq c\varepsilon_n \left( \alpha_- \int_{\Omega_-} \sqrt{\varepsilon_n} |\nabla u_-^{n,ap}|^2 \, d\Omega_- + \alpha_+ \int_{\tilde{\Omega}_+} \sqrt{\varepsilon_n} |\nabla u_+^{n,ap}|^2 \, d\tilde{\Omega}_+ \right) \\ &= c \mathcal{R} \left( \varepsilon_n a_\varepsilon(u_\infty^{n,ap}, \overline{u_\infty^{n,ap}}) + \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} \varepsilon_n |u_-^{n,ap}|^2 \, d\Omega_- \right. \\ &\quad \left. + \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} \varepsilon_n |u_+^{n,ap}|^2 \, d\tilde{\Omega}_+ - \int_\Gamma \frac{1}{2\mathcal{C}_1} |u_+^{n,ap} - u_-^{n,ap}|^2 \, d\Gamma \right. \\ &\quad \left. + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_1 |\partial_t u_+^{n,ap} + \partial_t u_-^{n,ap}|^2 \, d\Gamma - \frac{\varepsilon_n^2}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_2 |u_+^{n,ap} + u_-^{n,ap}|^2 \, d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_n}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_3 (u_+^{n,ap} - u_-^{n,ap}) \overline{(u_+^{n,ap} + u_-^{n,ap})} \, d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \frac{\varepsilon_n^2}{2} \int_\Gamma (\mathcal{D}_4 - \mathcal{D}'_1) (\partial_t u_+^{n,ap} + \partial_t u_-^{n,ap}) \overline{(u_+^{n,ap} + u_-^{n,ap})} \, d\Gamma \right. \\ &\quad \left. - \varepsilon_n \alpha_+ \langle T u_+^{n,ap}|_{\Gamma_\infty}, \overline{u_+^{n,ap}|_{\Gamma_\infty}} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)} \right). \end{aligned}$$



Utilisant le lemme 17, nous déduisons

$$\begin{aligned}
\|\sqrt{\varepsilon_n} \nabla u_\infty^{n,ap}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)}^2 &\leq \mathcal{R} \left( \varepsilon_n a_\varepsilon(u_\infty^{n,ap}, \overline{u_\infty^{n,ap}}) + \alpha_- k_-^2 \int_{\Omega_-} \varepsilon_n |u_-^{n,ap}|^2 d\Omega_- + \alpha_+ k_+^2 \int_{\tilde{\Omega}_+} \varepsilon_n |u_+^{n,ap}|^2 d\tilde{\Omega}_+ \right. \\
&\quad - \int_\Gamma \frac{1}{2\mathcal{C}_1} |u_+^{n,ap} - u_-^{n,ap}|^2 d\Gamma + \frac{\varepsilon_n^2}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_1 |\partial_t u_+^{n,ap} + \partial_t u_-^{n,ap}|^2 d\Gamma \\
&\quad - \frac{\varepsilon_n^2}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_2 |u_+^{n,ap} + u_-^{n,ap}|^2 d\Gamma - \frac{\varepsilon_n}{2} \int_\Gamma \mathcal{D}_3 (u_+^{n,ap} - u_-^{n,ap}) \overline{(u_+^{n,ap} + u_-^{n,ap})} d\Gamma \\
&\quad - \frac{\varepsilon_n^2}{2} \int_\Gamma (\mathcal{D}_4 - \mathcal{D}'_1) (\partial_t u_+^{n,ap} + \partial_t u_-^{n,ap}) \overline{(u_+^{n,ap} + u_-^{n,ap})} d\Gamma \\
&\quad \left. - \varepsilon_n \alpha_+ \langle K u_+^{n,ap}|_{\Gamma_\infty}, \overline{u_+^{n,ap}}|_{\Gamma_\infty} \rangle_{H^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times H^{1/2}(\Gamma_\infty)} \right).
\end{aligned}$$

Puisque  $K$  est compact  $\sqrt{\varepsilon} u_n \rightarrow 0$  dans  $\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)$ , nous obtenons

$$\langle \sqrt{\varepsilon_n} K u_+^{n,ap}|_{\Gamma_\infty}, \sqrt{\varepsilon} u_+^{n,ap}|_{\Gamma_\infty} \rangle_{\mathbb{H}^{-1/2}(\Gamma_\infty) \times \mathbb{H}^{1/2}(\Gamma_\infty)} \longrightarrow 0.$$

Finallement, les hypothèses  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathcal{R} \left[ a_\varepsilon(u_\infty^{n,ap}, \sqrt{\varepsilon_n} \overline{u_\infty^{n,ap}}) \right] = 0$  et (6.1.5) donnent

$$\|\sqrt{\varepsilon_n} \nabla u_\infty^{n,ap}\|_{\mathbb{L}^2(\Omega)} = 0,$$

ce qui contredit

$$\|\sqrt{\varepsilon_n} u_\infty^{n,ap}\|_{\mathbb{H}^1(\Omega, \Gamma)} = 1.$$

□

## 6.2 Existence et unicité

Pour montrer l'existence de la solution  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap})$ , nous introduisons les opérateurs de Steklov-Poincaré  $T_-$  et  $T_+$  définis de  $H^{1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{-1/2}(\Gamma)$  par  $T_- \varphi := \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-|_\Gamma$ , où  $u_-$  est la solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta u_- + k_-^2 u_- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_- = \varphi & \text{sur } \Gamma, \end{cases}$$

et par  $T_+ \psi := \alpha_+ \partial_{-\mathbf{n}} u_+|_\Gamma$ , où  $u_+$  est la solution du problème aux limites suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ u_+ = \psi & \text{sur } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u_+ = 0, \end{cases}$$

Les opérateurs  $T_-$  et  $T_+$  sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1 et elliptiques (cf. [32, 33, 34]).

**Remarque 19.** *La fonction  $u_-$  est définie uniquement dans le cas où la constante  $k_-^2$  n'appartient pas au spectre de l'opérateur  $(-\Delta, H_0^1(\Omega_-))$ . Nous supposons donc que cette condition est vérifiée.*

Nous supposons aussi que

$$d > \frac{1 - m^2\alpha_+}{m(\alpha_+ - \alpha_-)} \text{ ou } d < \frac{1 - M^2\alpha_+}{M(\alpha_+ - \alpha_-)}, \quad (6.2.1)$$

si  $\alpha_+ > \alpha_-$  et

$$d > \frac{M^2\alpha_+ - 1}{m(\alpha_- - \alpha_+)} \text{ ou } d < \frac{m^2\alpha_+ - 1}{M(\alpha_- - \alpha_+)}, \quad (6.2.2)$$

si  $\alpha_- > \alpha_+$ , où  $m = \min_{t \in \Gamma} f(t)$  et  $M = \max_{t \in \Gamma} f(t)$ .

**Remarque 20.** *Notons que si  $m^2\alpha_+ > 1$  quand  $\alpha_+ > \alpha_-$  ou  $M^2\alpha_+ < 1$  quand  $\alpha_- > \alpha_+$  alors les hypothèses (6.2.1)-(6.2.2) sont superflues.*

Utilisant la définition des opérateurs de Steklov-Poincaré, nous réécrivons le problème (6.0.1) en un système équivalent d'équations sur la frontière : Trouver  $(\omega, \varkappa) \in H^{1/2}(\Gamma) \times H^{1/2}(\Gamma)$ , telle que

$$\begin{cases} \Lambda_{11}\omega + \Lambda_{12}\varkappa = \varepsilon\mathcal{C}_1h, \\ \Lambda_{21}\omega + \Lambda_{22}\varkappa = -h, \end{cases} \quad (6.2.3)$$

où  $\omega$  et  $\varkappa$  sont les traces de  $u_+^{\varepsilon,ap}$  et  $u_-^{\varepsilon,ap}$  sur  $\Gamma$  respectivement,  $h = T_+(u_{inc}|_\Gamma) + \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_{inc}|_\Gamma$ , et  $(\Lambda_{ij})_{1 \leq i, j \leq 2}$  sont des opérateurs pseudo-différentiels définis par

$$\begin{aligned} \Lambda_{11} &= I + \varepsilon\mathcal{C}_1T_+, \\ \Lambda_{12} &= -I - \varepsilon\mathcal{C}_1T_-, \\ \Lambda_{21} &= (-\mathcal{D}_3 - \varepsilon\mathcal{D}_1 - \varepsilon\mathcal{D}_2)I - T_+ + \varepsilon\mathcal{D}_1(I - \partial_t^2) - \varepsilon\mathcal{D}_4\partial_t, \\ \Lambda_{22} &= (\mathcal{D}_3 - \varepsilon\mathcal{D}_1 - \varepsilon\mathcal{D}_2)I - T_- + \varepsilon\mathcal{D}_1(I - \partial_t^2) - \varepsilon\mathcal{D}_4\partial_t. \end{aligned}$$

Nous sommes maintenant en mesure d'énoncer le théorème d'existence. Nous avons

**Théorème 21.** *Pour tout entier  $k \geq 1$ , si  $h \in H^{k-\frac{3}{2}}(\Gamma)$  et*

$$-\frac{1}{\varepsilon\mathcal{C}_1(t)} \notin \sigma(T_+), \quad \forall t \in (0, l_\Gamma), \quad (6.2.4)$$

*alors le problème (6.0.1) admet une unique solution  $(u_-^{\varepsilon,ap}, u_+^{\varepsilon,ap}) \in H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\overline{\Omega}_+)$ .*

*Démonstration.* Soit  $k \in \mathbb{N}^*$ . En vertu de (6.2.4),  $\Lambda_{11}^{-1}$  est un opérateur pseudo-différentiel d'ordre  $-1$  bien défini. Ainsi, de la première équation de (6.2.3) nous obtenons

$$\omega = -\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{12}\varkappa + \varepsilon\Lambda_{11}^{-1}\mathcal{C}_1h,$$

donc

$$[\Lambda_{21}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{12} - \Lambda_{22}] \varkappa = [I + \varepsilon\Lambda_{21}\Lambda_{11}^{-1}\mathcal{C}_1] h.$$

L'opérateur  $I - \partial_t^2$  est pseudo-différentiel d'ordre 2, elliptique, semi borné et auto-adjoint (cf. [6]), il est de Fredholm d'indice zéro et envoie  $H^s(\Gamma)$  dans  $H^{s-2}(\Gamma)$ , pour tout  $s \in \mathbb{R}$ . En vertu de (6.2.1)-(6.2.2),  $\mathcal{D}_1 \neq 0$ , alors l'opérateur  $\mathcal{D}_1(I - \partial_t^2) : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-2}(\Gamma)$  est de Fredholm d'indice zéro. Comme  $\partial_t$ ,  $T_+$  et  $T_-$  sont des opérateurs pseudo-différentiels d'ordre 1, ils envoient  $H^s(\Gamma)$  dans  $H^{s-1}(\Gamma)$ , et sachant que l'injection  $H^{s-1}(\Gamma) \hookrightarrow H^{s-2}(\Gamma)$  est compacte, alors

$$(\mp\mathcal{D}_3 - \varepsilon\mathcal{D}_1 - \varepsilon\mathcal{D}_2) - T_{\pm} - \varepsilon\mathcal{D}_4\partial_t, \Lambda_{11} \text{ et } \Lambda_{12} : H^s(\Gamma) \rightarrow H^{s-2}(\Gamma)$$

sont des opérateurs compacts. Il s'en suit que pour montrer que  $\Lambda_{21}\Lambda_{11}^{-1}\Lambda_{12} - \Lambda_{22}$  est de Fredholm d'indice 0, il suffit de prouver que l'opérateur  $\Lambda_{11} - \Lambda_{12} = T_+ + T_- + \frac{2}{\varepsilon\mathcal{C}_1}I$  défini de  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-3/2}(\Gamma)$  est inversible. Considérons l'équation

$$\left(T_+ + T_- + \frac{2}{\varepsilon\mathcal{C}_1}I\right)\varphi = \psi, \quad \psi \in H^{k-3/2}(\Gamma), \quad k \geq 1. \quad (6.2.5)$$

La définition des opérateurs  $T_+$  et  $T_-$  montre que l'équation (6.2.5) est équivalente au problème aux limites suivant

$$\left\{ \begin{array}{ll} \Delta u_+ + k_+^2 u_+ = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_- + k_-^2 u_- = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ u_- = u_+ & \text{sur } \Gamma, \\ \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_- - \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+ + \frac{2}{\varepsilon\mathcal{C}_1} u_+ = \psi & \text{on } \Gamma, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) u_+ = 0, & \end{array} \right. \quad (6.2.6)$$

où  $\varphi = u_-|_{\Gamma} = u_+|_{\Gamma}$ . Des arguments standards basés sur le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm montrent que, pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ , si  $\psi \in H^{k-3/2}(\Gamma)$  alors le problème (6.2.6) admet une unique solution  $(u_-, u_+)$  dans  $H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\overline{\Omega}_+)$ , donc il existe une unique

trace de Dirichlet  $\varphi \in H^{k-1/2}(\Gamma)$ . Par conséquent, l'opérateur  $T_+ + T_- + \frac{2}{\varepsilon \mathcal{C}_1} I$ , défini de  $H^{k-1/2}(\Gamma)$  dans  $H^{k-3/2}(\Gamma)$ , est inversible, alors  $\Lambda_{21} \Lambda_{11}^{-1} \Lambda_{12} - \Lambda_{22}$  est de Fredholm d'indice 0.

L'équivalence du système (6.2.3) au problème (6.0.1) et le théorème 18 montrent que l'unicité de  $(u_-^{\varepsilon, ap}, u_+^{\varepsilon, ap})$  implique que pour tout entier  $k \geq 1$ , si  $(\varepsilon \mathcal{C}_1 h, -h) \in H^{k-\frac{3}{2}}(\Gamma) \times H^{k-\frac{3}{2}}(\Gamma)$ , il existe une unique solution  $(\omega, \varkappa) \in H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma) \times H^{k-\frac{1}{2}}(\Gamma)$  de (6.2.3) ce qui conduit à l'existence d'une unique solution  $(u_-^{\varepsilon, ap}, u_+^{\varepsilon, ap}) \in H^k(\Omega_-) \times H_{loc}^k(\bar{\Omega}_+)$ . D'où le théorème.  $\square$

### 6.3 Estimation de l'erreur

Dans cette section, nous définissons la solution approchée  $u^{\varepsilon, ap}$  de la solution exacte  $u^\varepsilon$  et prouvons une estimation de l'erreur comise en approchant  $u^\varepsilon$  par  $u^{\varepsilon, ap}$ . Notons que  $u_\infty^{\varepsilon, ap}$  est la solution du problème (6.0.1), posons

$$u^{\varepsilon, ap} = \begin{cases} u_+^{\varepsilon, ap} & \text{in } \Omega_+^\varepsilon, \\ u_{m, \beta}^{\varepsilon, ap} & \text{in } \Omega_{m, \beta}^\varepsilon, \\ u_-^{\varepsilon, ap} & \text{in } \Omega_-^\varepsilon, \end{cases}$$

où  $u_{m, \beta}^{\varepsilon, ap}$  sont obtenues de (5.1.5)-(5.1.15) en ajoutant et soustrayant un terme d'ordre 1 en  $\varepsilon$  tout en négligeant tous les termes d'ordre supérieur ou égal à 2. Nous avons  $\forall (t, s) \in \Omega_{m, \beta}^\varepsilon$

$$u_{m, 1}^{\varepsilon, ap}(x) := U_{m, 1}^{\varepsilon, ap}(t, s) := u_{-|\Gamma}^{\varepsilon, ap} + s \varepsilon \partial_{\mathbf{n}} u_{-|\Gamma}^{\varepsilon, ap}, \quad (6.3.1)$$

$$u_{m, 2}^{\varepsilon, ap}(x) := U_{m, 2}^{\varepsilon, ap}(t, s) := u_{+|\Gamma}^{\varepsilon, ap} + \varepsilon (f(t) + d - f(t)\alpha_+ + sf(t)\alpha_+) \partial_{\mathbf{n}} u_{+|\Gamma}^{\varepsilon, ap}. \quad (6.3.2)$$

Nous avons l'estimation de l'erreur suivante

**Théorème 22.** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\|u_-^\varepsilon - u_-^{\varepsilon, ap}\|_{H^1(\Omega_-^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|u_{m, 1}^\varepsilon - u_{m, 1}^{\varepsilon, ap}\|_{H^1(\Omega_{m, 1}^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|u_{m, 2}^\varepsilon - u_{m, 2}^{\varepsilon, ap}\|_{H^1(\Omega_{m, 2}^\varepsilon)} + \|u_+^\varepsilon - u_+^{\varepsilon, ap}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_+^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^2.$$

*Démonstration.* Le théorème 22 se démontre facilement en reprenant les idées de la démonstration du théorème 13 et en utilisant le lemme 14  $\square$

**Remarque 23.** *Cas d'une couche mince d'épaisseur constante*

*Dans le cas où la couche mince est d'épaisseur constante  $\varepsilon$  ( $f \equiv 1$ ), et en utilisant la même*

téchnique que celle utilisé dans le cas d'une couche mince non constante, les premiers termes du développement asymptotique externe  $(u_+^n, u_-^n)_{0 \leq n \leq 2}$  vérifient le problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^n + k_+^2 u_+^n = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^n + k_-^2 u_-^n = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^n - \delta_{0,n} u_{inc}) = 0, \end{cases}$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$  :

**A l'ordre 0.**

$$\begin{aligned} u_+^0 &= u_-^0, \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 &= \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0, \end{aligned}$$

**A l'ordre 1.**

$$\begin{aligned} u_+^1 - u_-^1 &= \mu_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0), \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1 - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1 &= \vartheta_1 (u_+^0 + u_-^0) + \vartheta_2 (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0). \end{aligned}$$

**A l'ordre 2.**

$$\begin{aligned} u_+^2|_{\Gamma} - u_-^2|_{\Gamma} &= \mu_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^1 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^1) + \mu_2 (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\ &\quad + \mu_3 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0) + \mu_4 (u_+^0 + u_-^0), \\ \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^2 - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^2 &= \vartheta_1 (u_+^1 + u_-^1) + \vartheta_2 (\partial_t^2 u_+^1 + \partial_t^2 u_-^1) + \vartheta_3 (\partial_t^2 u_+^0 + \partial_t^2 u_-^0) \\ &\quad + \vartheta_4 (\partial_t u_+^0 + \partial_t u_-^0) + \vartheta_5 (u_+^0 + u_-^0) + \vartheta_6 (\alpha_+ \partial_t^2 \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 + \partial_t^2 \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0) \\ &\quad + \vartheta_7 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^0 + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^0), \end{aligned}$$

où

$$\begin{aligned} \mu_1 &= \frac{\alpha_+ \alpha_- - (1+d)\alpha_- + d\alpha_+}{2\alpha_+ \alpha_-}, \\ \mu_2 &= \frac{-(1+d)\alpha_+^2 \alpha_- - d\alpha_+ \alpha_-^2 - d(1+d)\alpha_+^2 + d(1+d)\alpha_-^2 + d\alpha_+ + (1+d)\alpha_-}{4\alpha_+ \alpha_-}, \\ \mu_3 &= c(t) \frac{(-1-2d)\alpha_+ \alpha_- + (1+d)^2 \alpha_- - d^2 \alpha_+}{2(\alpha_+ \alpha_- - (1+d)\alpha_- + d\alpha_+)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mu_4 &= \left( \frac{-(1+d)k_+^2\alpha_+^2\alpha_- - dk_-^2\alpha_+\alpha_-^2 - d(1+d)k_+^2\alpha_+^2 + d(1+d)k_-^2\alpha_-^2 + dk_m^2\alpha_+}{4\alpha_+\alpha_-} \right. \\
&\quad \left. + \frac{(1+d)k_m^2\alpha_-}{4\alpha_+\alpha_-} \right), \\
\vartheta_1 &= \frac{(1+d)k_+^2\alpha_+ - dk_-^2\alpha_- - k_m^2}{2}, \\
\vartheta_2 &= \frac{(1+d)\alpha_+ - d\alpha_- - 1}{2}, \\
\vartheta_3 &= c(t) \frac{d^2\alpha_- - (1+d)^2\alpha_+ - 2d - 1}{4}, \\
\vartheta_4 &= c'(t) \frac{d^2\alpha_- - (1+d)^2\alpha_+ - 2d - 1}{4} = \partial_t \vartheta_3, \\
\vartheta_5 &= c(t) \frac{(1+d)^2k_+^2\alpha_+ - d^2k_-^2\alpha_- - (1+2d)k_m^2}{4}, \\
\vartheta_6 &= \frac{(1+d)\alpha_+^2\alpha_- + d\alpha_+\alpha_-^2 + d(1+d)\alpha_+^2 - d(1+d)\alpha_-^2 - d\alpha_+ - (1+d)\alpha_-}{2(\alpha_+\alpha_- - (1+d)\alpha_- + d\alpha_+)} = -\frac{\mu_2}{\mu_1}, \\
\vartheta_7 &= \left( \frac{(1+d)k_+^2\alpha_+^2\alpha_- + dk_-^2\alpha_+\alpha_-^2 + d(1+d)k_+^2\alpha_+^2 - d(1+d)k_-^2\alpha_-^2 - dk_m^2\alpha_+}{2(\alpha_+\alpha_- - (1+d)\alpha_- + d\alpha_+)} \right. \\
&\quad \left. - \frac{(1+d)k_m^2\alpha_-}{2(\alpha_+\alpha_- - (1+d)\alpha_- + d\alpha_+)} \right) = -\frac{\mu_4}{\mu_1}.
\end{aligned}$$

Les termes du développement asymptotique intérieur sont donnés par :  $\forall (t, s) \in (0, l_\Gamma) \times I_\beta$

$$U_{m,\beta}^0(t, s) = u_-^0|_\Gamma = u_+^0|_\Gamma, \quad (6.3.3)$$

$$U_{m,1}^1(t, s) = u_-^1|_\Gamma + s\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma, \quad (6.3.4)$$

$$U_{m,2}^1(t, s) = u_+^1|_\Gamma + (1+d-\alpha_+ + s\alpha_+)\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_\Gamma, \quad (6.3.5)$$

$$U_{m,1}^2(t, s) = [-c(t)\partial_{\mathbf{n}}u_-^0|_\Gamma - \partial_t^2u_-^0|_\Gamma - k_-^2u_-^0|_\Gamma] \frac{s^2}{2} + \partial_{\mathbf{n}}u_-^1|_\Gamma s + u_-^2|_\Gamma, \quad (6.3.6)$$

$$\begin{aligned}
U_{m,2}^2(t, s) &= \frac{s^2 - 2s + 1}{2} [-c(t)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^0|_\Gamma - \partial_t^2u_+^0|_\Gamma - k_m^2u_+^0|_\Gamma] \\
&\quad + (s-1) [\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_\Gamma + (1+d)\alpha_+\partial_{\mathbf{n}}^2u_+^0|_\Gamma] \\
&\quad + (1+d)\partial_{\mathbf{n}}u_+^1|_\Gamma + \frac{(1+d)^2}{2}\partial_{\mathbf{n}}^2u_+^0|_\Gamma + u_+^2|_\Gamma.
\end{aligned} \quad (6.3.7)$$

En tronquant les développements asymptotiques à l'ordre 2 et négligeant tout les termes d'ordre supérieur ou égal à 3, une approximation de  $u^\varepsilon$  loin de la couche mince est solution

du problème suivant

$$\begin{cases} \Delta u_+^{\varepsilon,ap} + k_+^2 u_+^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_+, \\ \Delta u_-^{\varepsilon,ap} + k_-^2 u_-^{\varepsilon,ap} = 0 & \text{dans } \Omega_-, \\ \lim_{|x| \rightarrow +\infty} \sqrt{|x|} (\partial_{|x|} - ik_+) (u_+^{\varepsilon,ap} - u_{inc}) = 0, \end{cases} \quad (6.3.8a)$$

avec les conditions de transmission sur  $\Gamma$

$$\begin{aligned} u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap} &= \varepsilon \mu_1 (\alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} + \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon^2 \mu_2 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon \mu_3 (u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon^2 \mu_4 (u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}), \end{aligned} \quad (6.3.8b)$$

$$\begin{aligned} \alpha_+ \partial_{\mathbf{n}} u_+^{\varepsilon,ap} - \alpha_- \partial_{\mathbf{n}} u_-^{\varepsilon,ap} &= (\varepsilon \vartheta_1 + \varepsilon^2 \vartheta_5) (u_+^{\varepsilon,ap} + u_-^{\varepsilon,ap}) + (\varepsilon \vartheta_2 + \varepsilon^2 \vartheta_3) (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon^2 \vartheta_4 (\partial_t u_+^{\varepsilon,ap} + \partial_t u_-^{\varepsilon,ap}) + \varepsilon \vartheta_6 (\partial_t^2 u_+^{\varepsilon,ap} - \partial_t^2 u_-^{\varepsilon,ap}) \\ &+ \varepsilon \vartheta_7 (u_+^{\varepsilon,ap} - u_-^{\varepsilon,ap}), \end{aligned} \quad (6.3.8c)$$

L'existence et l'unicité de la solution du problème (6.3.8) s'obtiennent en utilisant le lemme de Rellich et l'alternative de Fredholm (cf. [3]). De plus, nous avons une estimation de l'erreur entre la solution exacte  $u^\varepsilon$  et la solution approchée dont la démonstration est similaire à celle du théorème 13.

**Théorème 24.** *Il existe une constante  $c$  indépendante de  $\varepsilon$  telle que*

$$\|u_-^\varepsilon - u_-^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\Omega_-^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|u_{m,1}^\varepsilon - u_{m,1}^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\Omega_{m,1}^\varepsilon)} + \varepsilon^{1/2} \|u_{m,2}^\varepsilon - u_{m,2}^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\Omega_{m,2}^\varepsilon)} + \|u_+^\varepsilon - u_+^{\varepsilon,ap}\|_{H^1(\tilde{\Omega}_+^\varepsilon)} \leq c\varepsilon^3.$$

# CONCLUSION ET PERSPECTIVES

En conclusion, cette thèse a permis de réaliser des avancées significatives dans l'étude des problèmes liés aux couches minces. Dans la première partie, nous avons développé un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème (1.1.2) en fonction de l'épaisseur constante infinitésimale  $\varepsilon$  de la couche mince  $\Omega_m^\varepsilon$ , à tout ordre, en utilisant les paramètres  $d_1$  et  $d_2$ . Nous avons également dérivé des conditions de transmission de type Ventcel sur l'interface  $\Gamma$ , modélisant l'effet de la couche mince, avec une précision allant jusqu'à  $O(\varepsilon^3)$ .

Grâce à notre analyse, nous avons démontré l'existence et l'unicité de la solution approchée pour un ensemble infini de valeurs de  $d_1$  et  $d_2$ , ce qui correspond à différentes positions de l'interface  $\Gamma$ . De plus, nous avons fourni une estimation de l'erreur commise en utilisant la solution approchée  $u^{\varepsilon,ap}$  pour approcher la solution exacte  $u^\varepsilon$ .

Dans la deuxième partie de cette thèse, nous nous sommes intéressés au comportement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème de Helmholtz dans  $\mathbb{R}^2$  contenant une couche mince d'épaisseur non constante, avec  $\alpha_\pm < 1 < \alpha_\mp$ . En utilisant une approche similaire à celle de la première partie, mais en adoptant une technique différente qui consiste à positionner l'interface  $\Gamma$  à l'intérieur de  $\Omega_-^\varepsilon$ .

Nous avons dérivé un problème approché avec des conditions de transmission de type Ventcel sur l'interface  $\Gamma$ . Ensuite, nous avons énoncé et démontré des théorèmes garan-



tissants l'existence et l'unicité de la solution pour le problème approché. De plus, nous avons fourni une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée, permettant ainsi d'évaluer la précision de notre méthode.

Les résultats obtenus dans cette thèse revêtent une importance considérable pour la modélisation mathématique et la physique des couches minces. Ils permettent de mieux comprendre le comportement asymptotique des solutions des problèmes considérés, en tenant compte de l'influence des couches minces. Ces avancées ouvrent de nouvelles perspectives de recherche, notamment en ce qui concerne l'extension de notre méthode à des configurations plus complexes et à des problèmes plus généraux.

En résumé, cette thèse a permis d'obtenir des résultats significatifs dans l'étude des problèmes liés aux couches minces. Les développements asymptotiques, les conditions de transmission et les estimations d'erreur obtenus constituent une contribution précieuse à la discipline. Nous sommes convaincus que ces résultats auront un impact durable et serviront de fondement pour de nouvelles recherches et applications dans ce domaine prometteur.

Une question naturelle est de savoir si de tels résultats d'approximation peuvent être améliorés afin d'obtenir une estimation de l'erreur d'ordre supérieur à 3 et si l'étude ci-dessus peut être généralisée aux domaines tridimensionnels ou au cas où les constantes  $\alpha_+$  et  $\alpha_-$  dépendent de  $\varepsilon$ . D'autres travaux intéressants seraient de considérer des problèmes de Maxwell, d'élasticité ou de courants de Eddy.

Le travail établit des conditions de transmission analytiques pour la dispersion par une couche mince. Une perspective intéressante serait de développer des méthodes numériques efficaces pour résoudre ces conditions de transmission dans des situations plus complexes. Cela pourrait inclure des méthodes de différences finies, d'éléments finis ou des approches basées sur des méthodes intégrales, adaptées aux géométries et aux propriétés spécifiques des couches minces.

La thèse fournit une base théorique solide pour modéliser la dispersion par une couche mince. Une perspective intéressante serait d'explorer des applications pratiques de ces résultats dans des domaines tels que l'optique, les télécommunications, les capteurs ou l'imagerie médicale. Cela pourrait inclure la conception de dispositifs optiques innovants, l'amélioration des performances des antennes ou des guides d'ondes, ou l'optimisation de la détection et de la quantification des matériaux minces.

## ANNEXE

### A

# OPÉRATEURS DE FREDHOLM

Nous rappelons dans ce paragraphe la définition et quelques propriétés des opérateurs de Fredholm. Nous incitons le lecteur à consulter Abboud-Terrasse [1], Brezis [13], Treves [34], Chen-Zhou [14],...

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces de Banach. Nous notons par  $\mathcal{L}(E, F)$  l'espace des opérateurs linéaires continus de  $E$  dans  $F$ .

**Definition 25.** *On dit qu'un opérateur linéaire  $T : E \rightarrow F$  est compact, et on note  $T \in \mathcal{K}(E, F)$ , s'il transforme tout borné de  $E$  en un ensemble relativement compact. Si  $T \in \mathcal{K}(E, F)$  alors  $T \in \mathcal{L}(E, F)$ . Un opérateur compact transforme toute suite faiblement convergente en une suite fortement convergente.*

**Théorème 26** (Alternative de Fredholm). *Soit  $T \in \mathcal{K}(E)$ . Alors*

1.  $\text{Ker}(I - T)$  est de dimension finie ;
2.  $\text{Im}(I - T)$  est fermée, et plus précisément  $\text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$  ;
3.  $\text{Ker}(I - T) = \{0\} \Leftrightarrow \text{Im}(I - T) = H$  ;

$$4. \dim(I - T) = \dim(I - T^*).$$

L'Alternative de Fredholm est souvent utilisée pour la résolution des équations de type  $u - Tu = f$ . L'opérateur  $I - T$  étant une perturbation compacte de l'identité, tout se passe comme en dimension finie : l'injection implique la bijection ! Ce qui est faux en général en dimension infinie. L'Alternative de Fredholm exprime que :

**ou bien** pour tout  $f \in E$ , l'équation  $u - Tu = f$  admet une unique solution,

**ou bien** l'équation homogène  $u - Tu = 0$  admet  $n$  solutions linéairement indépendantes et, dans ce cas, l'équation non homogène  $u - Tu = f$  est résoluble si et seulement si  $f$  vérifie  $n$  conditions d'orthogonalité, i.e.  $f \in \text{Im}(I - T) = \text{Ker}(I - T^*)^\perp$  qui est de dimension finie.

L'alternative de Fredholm n'est qu'un premier pas vers la théorie des opérateurs de Fredholm.

**Definition 27** (Opérateurs de Fredholm). *On dit qu'un opérateur  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est de Fredholm (ou opérateur à indice), et note  $A \in \mathcal{F}(E, F)$ , si  $\text{Ker}(A)$  est de dimension finie et si  $\text{Im}(A)$  est fermée et de codimension finie. L'indice de  $A$ , noté  $\text{ind}(A)$ , est défini par  $\text{ind}(A) = \dim \text{Ker}(A) - \text{codim Im}(A)$ .*

**Remarque 28.** *La condition " $\text{Im}(A)$  est fermée" est superflue, nous pouvons démontrer (cf. [32, Lemme 8.1]) que si  $A \in \mathcal{L}(E, F)$  est tel que  $\text{Ker}(A)$  soit de dimension finie et  $\text{Im}(A)$  soit de codimension finie alors  $\text{Im}(A)$  est fermée.*

Il découle de l'Alternative de Fredholm que si  $T \in \mathcal{K}(E)$ , alors  $A = I - T$  est un opérateur de Fredholm d'indice 0.

**Proposition 29.** *Si  $E$  et  $F$  sont réflexifs et  $A \in \mathcal{F}(E, F)$ . Alors  $A^*$  est de Fredholm, de plus, nous avons  $\text{ind}(A) = -\text{ind}(A^*)$ .*

*Un opérateur  $T \in \mathcal{L}(E, F)$  est de Fredholm si et seulement si  $T$  est inversible modulo les opérateurs compacts.*

**Proposition 30.** *Soient  $E, F$  et  $K$  trois espaces de Banach.*

1. *Si  $A \in \mathcal{F}(E, F)$  et  $K$  un opérateur compact dans  $\mathcal{L}(E, F)$ , alors  $A + K \in \mathcal{F}(E, F)$  et  $\text{ind}(A + K) = \text{ind}(A)$ . Autrement dit, toute perturbation compacte d'un opérateur de Fredholm est de Fredholm.*

2. Si  $T_1 \in \mathcal{F}(E, F)$  et  $T_2 \in \mathcal{F}(F, K)$  alors  $T_2 T_1 \in \mathcal{F}(E, K)$  et  $\text{ind}(T_2 T_1) = \text{ind}(T_1) + \text{ind}(T_2)$ .

Dans la pratique, nous utilisons souvent ce résultat sous forme variationnelle.

**Corollaire 31.** Soient  $H$  un espace de Hilbert,  $a(\cdot, \cdot)$ ,  $a_0(\cdot, \cdot)$  et  $a_1(\cdot, \cdot)$  trois formes bilinéaires (ou sesquilinéaires) définies sur  $H \times H$  telles que

1.  $a(\cdot, \cdot) = a_0(\cdot, \cdot) + a_1(\cdot, \cdot)$ ;
2.  $a_0(\cdot, \cdot)$  et  $a_1(\cdot, \cdot)$  sont continues sur  $H \times H$ ;
3.  $a_0(\cdot, \cdot)$  est  $H$ -coercive;
4.  $a_1(\cdot, \cdot)$  est telle que si  $(u_n)_n$  et  $(v_n)_n$  sont deux suites faiblement convergentes dans  $H$  vers  $u$  et  $v$  respectivement. Alors  $a_1(u_n, v_n) \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} a_1(u, v)$ .

Si la proposition suivante

$$(a(x, y) = 0, \forall y \in H) \Rightarrow x = 0,$$

est vraie, alors pour tout  $f \in H'$ , il existe une unique solution  $u \in H$  de l'équation

$$a(u, v) = (f, v), \forall v \in H.$$

De plus, il existe une constante  $c > 0$  telle que

$$\|u\|_H \leq c \|f\|_{H'}.$$

## ANNEXE

### B

# OPÉRATEURS PSEUDO-DIFFÉRENTIELS

Cette annexe est consacrée aux opérateurs pseudo-différentiels. Nous en donnons quelques définitions. Pour plus de détails, le lecteur pourra consulter, par exemple, Boutet de Monvel [12], Shubin [32], Taylor [33], Treves [34],... Nous adopterons les notations standards concernant les opérateurs différentiels, notamment  $D^\alpha = (-i)^{|\alpha|} \partial^\alpha$ ,  $\hat{u}$  désigne la transformée de Fourier d'une distribution  $u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^n)$  et enfin, l'inclusion  $K \Subset \Omega$ , signifie que  $K$  est un compact inclus dans  $\Omega$ .

### B.1 Symboles

**Definition 32.** Soient  $\mu, n \in \mathbb{N}$ ,  $m \in \mathbb{R}$ ,  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^\mu$  et  $\rho, \delta \in [0, 1]$ . On désigne par  $S_{\rho, \delta}^m(\Omega, \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des fonctions  $a \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  telles que pour tout  $K \Subset \Omega$  et

pour tous multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{N}^n$ , il existe une constante  $c_{\alpha,\beta}(K) > 0$  telle que :

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha,\beta}(K) (1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}, \quad \forall (x, \xi) \in K \times \mathbb{R}^n.$$

On dit que  $a$  est un symbole d'ordre  $m$  et de type  $(\rho, \delta)$ .

Notant  $S^{-\infty} := \bigcap_{m \in \mathbb{R}} S_{\rho,\delta}^m$ , nous avons la proposition suivante

**Proposition 33.** Soit  $(a_j)_j$  une suite de symboles telle que  $a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_j}$  et  $(m_j)_j$  est une suite décroissante qui tend vers  $-\infty$  quand  $j$  tend vers  $+\infty$ . Alors il existe  $a \in S_{\rho,\delta}^{m_0}$  unique modulo  $S^{-\infty}$  tel que :

$$a - \sum_{j \geq k} a_j \in S_{\rho,\delta}^{m_k}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

On dit que  $a$  est la somme asymptotique des  $a_j$  ou bien  $\sum_j a_j$  est le développement asymptotique de  $a$  et on écrit  $a \sim \sum_j a_j$ .

## B.2 Opérateurs pseudo-différentiels

Dans tout ce qui suit, nous supposons que  $\Omega$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^n$ .

**Definition 34.** Soit  $a \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega \times \Omega, \mathbb{R}^n)$ , l'opérateur  $A$  défini de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  par :

$$Au(x) = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x-y) \cdot \xi} a(x, y, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (\text{B.2.1})$$

est appelé opérateur pseudo-différentiel, noté  $O\Psi D$ , d'ordre  $m$  et de symbole  $a$ . On désigne par  $L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$  l'espace des  $O\Psi D$  d'ordre  $m$  sur  $\Omega$ . Un tel opérateur est linéaire continu de  $\mathcal{D}(\Omega)$  dans  $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$  et s'étend de manière unique de  $\mathcal{E}'(\Omega)$  dans  $\mathcal{D}'(\Omega)$ .

**Example 35.** Tout opérateur différentiel est un  $O\Psi D$ .

En effet, soit  $P(x, D) := \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$  où  $a_\alpha$  est  $\mathcal{C}^\infty$ . Pour tout  $u$  dans  $\mathcal{D}(\Omega)$ , nous avons

$$u(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} \widehat{u}(\xi) d\xi,$$

par conséquent

$$(P(x, D)u)(x) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha (e^{ix \cdot \xi}) \widehat{u}(\xi) d\xi$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} e^{ix \cdot \xi} a(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi,$$

avec

$$a(x, \xi) = (2\pi)^{-n} \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) \cdot \xi^\alpha \in S_{1,0}^m(\Omega, \mathbb{R}^n).$$

**Definition 36.** Un opérateur pseudo-différentiel  $A$  est appelé propre (proprement supporté) si les deux conditions suivantes sont réalisées :

1.  $\forall K \Subset \Omega, \exists K' \Subset \Omega / u|_{K'} = 0 \Rightarrow Au|_K = 0$  ;
2.  $\forall K \Subset \Omega, \exists K' \Subset \Omega / \text{supp}(u) \subset K \implies \text{supp}(Au) \subset K'$ .

L'opérateur  $P(x, D) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha(x) D^\alpha$  est un OΨD propre puisqu'il diminue le support ( $\text{supp}(Af) \subset \text{supp}(f)$ ).

**Théorème 37** (Elimination de "y"). Soit  $A = op(a) \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$  propre,  $\delta < \rho$ , donné par (B.2.1), alors :

$$\sigma_A(x, \xi) = e^{-ix \cdot \xi} A(e^{i(\cdot) \cdot \xi})(x) \in S_{\rho,\delta}^m(\Omega, \mathbb{R}^n),$$

et admet le développement asymptotique :

$$\sigma_A(x, \xi) \sim \sum_{\alpha \in \mathbb{N}^n} \frac{(-i)^{|\alpha|}}{\alpha!} (\partial_y^\alpha \partial_\xi^\alpha a(x, y, \xi))|_{x=y}.$$

De plus

$$Au(x) = (2\pi)^{-n} \int e^{ix \cdot \xi} \sigma_A(x, \xi) \widehat{u}(\xi) d\xi, \quad \forall u \in D(\Omega).$$

On appelle  $\sigma_A(x, \xi)$  le symbole complet de  $A$ . Posant  $L^{-\infty}(\Omega)$  l'espace des OΨD dont le symbole est dans  $S^{-\infty}$ , nous avons la relation

$$A \text{ est propre dans } L^{-\infty}(\Omega) \Leftrightarrow \sigma_A(x, \xi) \in S^{-\infty}.$$

Si maintenant  $A \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$ , nous pouvons le décomposer sous la forme  $A = A' + A''$  où  $A'$  est propre dans  $L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$  et  $A'' \in L^{-\infty}(\Omega)$ . Ainsi, nous identifions  $\sigma_A$  à  $\sigma_{A'}$  dans  $S_{\rho,\delta}^m/S^{-\infty}$ . Nous obtenons, par conséquent, une application bijective :

$$L_{\rho,\delta}^m/L^{-\infty} \rightarrow S_{\rho,\delta}^m/S^{-\infty}.$$

On appelle symbole principal de l'opérateur  $A \in L_{\rho,\delta}^m(\Omega)$  et on note  $\sigma_m(A)$  la classe des symboles  $\sigma_A$  modulo  $S_{\rho,\delta}^{m-1}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ ,  $\sigma_m(A)$  est donc un élément de  $S_{\rho,\delta}^m/S_{\rho,\delta}^{m-1}$ . Si  $\sigma_m(A) = 0$  ceci veut dire que  $A$  est un OΨD d'ordre  $\leq m - 1$ .

### B.3 Hypoellipticité et ellipticité

**Definition 38.** Une fonction  $\sigma(x, \xi) \in C^\infty(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  est appelée *symbole hypoelliptique* si

1. Il existe deux réels  $m_0$  et  $m_1$  tels que pour tout compact  $K$  dans  $\Omega$ , il existe  $c_1, c_2$  et  $R$  tels que

$$c_1 |\xi|^{m_0} \leq \sigma(x, \xi) \leq c_2 |\xi|^{m_1}, \quad |\xi| \geq R, \quad x \in K; \quad (\text{B.3.1})$$

2. Il existe deux réels  $\rho$  et  $\delta$  vérifiant  $0 \leq \delta < \rho \leq 1$ , tels que pour tout compact  $K \subset \Omega$  et tous multi-indices  $\alpha$  et  $\beta$  dans  $\mathbb{N}^n$ , il existe un réel  $R$  tel que

$$\left| \partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta \sigma(x, \xi) \right| \leq c_{\alpha, \beta}(K) (1 + |\xi|)^{m - \rho|\beta| + \delta|\alpha|}, \quad |\xi| \geq R, \quad x \in K. \quad (\text{B.3.2})$$

On note par  $HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$  l'ensemble des (classes de) symboles satisfaisant (B.3.1) et (B.3.2) et par  $HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$  l'ensemble des (classes d') opérateurs pseudo-différentiels proprement supportés  $A$  pour lesquels  $\sigma_A \in HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .

**Definition 39.** Un opérateur pseudo-différentiel  $A$  est appelé *hypoelliptique* s'il existe un opérateur proprement supporté  $A_1$  dans  $HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$  et un opérateur régularisant  $R \in L^{-\infty}(\Omega)$  tel que  $A = A_1 + R$ .

Nous avons les propriétés suivantes.

**Proposition 40.** 1.  $HS_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega \times \mathbb{R}^n) \subset S_{\rho, \delta}^m(\Omega \times \mathbb{R}^n)$ .

2. Si  $A \in HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$  et  $R \in L_{\rho, \delta}^{m_1}(\Omega)$  avec  $m_1 < m_0$  où  $R$  est proprement supporté, alors  $A + R \in HL_{\rho, \delta}^{m, m_0}(\Omega)$ .

**Example 41.** Tout opérateur différentiel elliptique est dans  $HL_{1,0}^{m,m}$ .

**Definition 42.** Un opérateur  $A \in L_{\rho, \delta}^m(\Omega)$  est appelé *elliptique* si  $A = A_1 + R$  où  $A_1 \in HL_{\rho, \delta}^{m,m}(\Omega)$  et  $R \in L^{-\infty}(\Omega)$ .

### B.4 Opérateurs pseudo-différentiels sur les variétés

Dans toute cette partie, nous supposons que  $M$  est une variété compacte de classe  $C^\infty$ . Nous ne nous attarderons pas sur la définition des OΨD sur les variétés, nous renvoyons le lecteur à [32, 33, 34]. Le but de ce paragraphe est d'énoncer les résultats principaux sur OΨD sur les variétés qui nous ont été utiles pour les preuve des Théorèmes d'existence, le théorème 9 et le théorème 21.



**Definition 43.** Soient  $A \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}(M)$ ,  $1 - \rho \leq \delta < \rho$  et  $m > 0$ . On note par  $A_0$  (ou parfois par  $A$ ) l'opérateur  $A$  défini comme étant un opérateur non-borné dans  $L^2(M)$  à domaine  $D(A_0) = H^m(M)$ .

**Definition 44.** Un opérateur  $A \in L_{\rho,\delta}^m(M)$  est appelé formellement auto-adjoint si

$$\langle Au, v \rangle = \langle u, Av \rangle,$$

pour toutes fonctions  $u, v$  dans  $\mathcal{D}(M)$ , où le crochet  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  désigne le produit scalaire dans  $L^2(M)$ .

**Definition 45.** On dit que  $A_0$  (ou parfois par  $A$ ) est semi-borné s'il une constante  $c \in \mathbb{R}$  telle que

$$\Re \langle Au, u \rangle \geq c \|u\|_{L^2(M)}, \quad \forall u \in D(A_0).$$

**Théorème 46.** ([6]) Soit  $A \in HL_{\rho,\delta}^{m,m}(M)$ ,  $m > 0$ ,  $1 - \rho \leq \delta < \rho$ , formellement auto-adjoint et semi-borné. Alors pour tout  $s \in \mathbb{R}$ , nous avons

1.  $A \in \mathcal{L}(H^s(M), H^{s-m}(M))$ ;
2. le noyau  $\text{Ker}(A)$  de l'opérateur  $A$  est inclus dans  $\mathcal{C}^\infty(M)$ ;
3.  $A_0$  est fermé et auto-adjoint dans  $L^2(M)$ , à résolvante compacte dans  $L^2(M)$ . De plus, il existe dans cet espace une base hilbertienne  $\{\varphi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$  composée des vecteurs propres de  $A_0$  tels que  $\varphi_i \in \mathcal{C}^\infty(M)$ ,  $A\varphi_i = \lambda_i \varphi_i$  où les valeurs propres  $(\lambda_i)_{i \in \mathbb{N}}$  sont réelles vérifiant  $|\lambda_i| \rightarrow +\infty$  lorsque  $i \rightarrow +\infty$ ;
4. le spectre de  $A$  est indépendant de  $s$  et coïncide avec l'ensemble des valeurs propres de  $A$ .
5.  $A$  est de Fredholm d'indice 0.

## ANNEXE

### C

# THÉORÈME ET LEMMES DE RELlich

Cette annexe est dédiée aux théorèmes et lemmes de Rellich. Nous commencerons par le Lemme 47 tel qu'il a été établi par F. Rellich en 1943 dans [29] et nous énoncerons ensuite le lemme 48 qui plus pratique. Nous terminerons enfin par le Théorème 49, de compacité, toujours dû à F. Rellich.

**Lemme 47** (de Rellich). *Soit  $u$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^2$  pour  $|x| > R_0 > 0$ , et vérifiant l'équation de Helmholtz*

$$\Delta u + k^2 u = 0 \text{ pour } |x| > R_0 > 0 \text{ avec } k > 0.$$

*Alors, on a l'alternative :*

1.  $u \equiv 0$  pour  $|x| > R_0$ ;
2. Pour tout  $R_1 > R_0$ ,  $\exists M > 0$  et  $R_2 > R_1$  tels que

$$\int_{R_1 \leq |x| \leq R} |u(x)| dx \geq MR, \forall R, R \geq R_2.$$

**Lemme 48** (de Rellich). ([15, p. 32]). Soit  $D$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ . Si  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D})$  est solution de l'équation

$$\Delta u + k^2 u = 0, \quad k > 0,$$

vérifiant

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \int_{|x|=r} |u(x)|^2 ds = 0.$$

Alors  $u = 0$  dans  $\mathbb{R}^2 \setminus \overline{D}$ .

**Théorème 49** (de Rellich). ([2]) Si  $D$  est un ouvert borné de  $\mathbb{R}^N$  de classe  $\mathcal{C}^1$ , alors de toute suite bornée de  $H^1(D)$  on peut extraire une sous-suite convergente dans  $L^2(D)$ . On dit que l'injection canonique de  $H^1(D)$  dans  $L^2(D)$  est compacte.

# BIBLIOGRAPHIE

- [1] T. Abboud et I. Terrasse, Modélisation des phénomènes de propagation d’ondes, programme d’approfondissement sciences de l’ingénieur, simulation et modélisation, Ecole Polytechnique, Palaiseau, France, 2007.
- [2] G. Allaire, Analyse numérique et optimisation, une introduction à la modélisation mathématique et à la simulation numérique, Les Editions de l’Ecole Polytechnique, France, 2012.
- [3] S. Agmon, A. Douglis and L. Nirenberg, Estimates near the boundary for solutions of elliptic partial differential equations satisfying general boundary conditions II, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **17**(1) (1964), 35–92.
- [4] A. Bendali and K. Lemrabet, The effect of a thin coating on the scattering of the time-harmonic wave for the Helmholtz equation, *SIAM Journal on Applied Mathematics* **56**(6) (1996), 1664–1693.
- [5] Bensoussan, A., Lions, J. L., and Papanicolaou, G. (2011). Asymptotic analysis for periodic structures (Vol. 5). North-Holland.
- [6] V. Bonnaillie-Noël, M. Dambrine, F. Hérau and G. Vial, On generalized Ventcel’s type boundary conditions for Laplace operator in a bounded domain, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **42**(2) (2010), 931–945.

- [7] K.E. Boutarene, Approximate transmission conditions for a Poisson problem at mid-diffusion, *Mathematical Modelling and Analysis* **20**(1) (2015), 53–75.
- [8] K.E. Boutarene, Approximation de l'impédance d'une inclusion mince contrastée pour un problème de transmission en diffraction des ondes, PhD thesis, Université des sciences et de la technologie Houari Boumèdiene (USTHB), Alger, 2015.
- [9] K.E. Boutarene, Ventcel-Type Transmission Conditions for a Poisson Problem at High–Low Diffusion, *Mediterranean Journal of Mathematics* **14**, 143 (2017).
- [10] K.E. Boutarene and S. Galleze, Ventcel-type Transmission Conditions for the Scattering of a Time-harmonic Wave Problem with Accuracy up to Order 3, *Taiwanese Journal of Mathematics* DOI : 10.11650/tjm/230201 (2023).
- [11] K.E. Boutarene and P.-H. Cocquet, Scattering of a Scalar Time-Harmonic Wave by a Penetrable Obstacle with a Thin Layer, *European Journal of Applied Mathematics* **27**(2) (2016), 264–310.
- [12] L. Boutet de Monvel, Opérateurs pseudo-différentiels et formule de l'indice, Cours de DEA, université de Nice, 1970/1971.
- [13] H. Brezis, Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations, Universitext. Springer, New York, 2011.
- [14] G. Chen and J. Zhou, *Boundary Element Methods with Applications to Nonlinear Problems*, Atlantis Press, Amsterdam-Paris, 2010.
- [15] D. Colton et R. Kress, Inverse acoustic and electromagnetic scattering theory, Springer, 93, 2012.
- [16] J. Cousteix and J. Mauss, *Analyse asymptotique et couche limite*, Springer, 2006.
- [17] I. S. Ciuperca, M. Jai et C. Poignard, *Approximate transmission conditions through a rough thin layer*, J. Comput. Appl. Math., 234(6), 1876–1885, 2010.
- [18] I. S. Ciuperca, R. Perrussel et C. Poignard, *Two-scale analysis for very rough thin layers. An explicit characterization of the polarization tensor*, J. Math. Pures Appl., 95, 277–295, 2011.
- [19] B. Delourme et X. Claeys, *High order asymptotics for wave propagation across thin periodic interfaces*, Asymptotic Analysis, 83, 35–82, 2013.
- [20] B. Delourme, H. Haddar and P. Joly, Approximate models for wave propagation across thin periodic interfaces,

*Journal de Mathématiques Pures et Appliquées* **98**(1) (2012), 28–71.

- [21] MP. Do Carmo, *Differential geometry of curves and surfaces*, 2nd ed. Mineola, NY, Dover Publications, 2016.
- [22] Givoli, D. (2009). *Applied shape optimization for fluids* (Vol. 168). Oxford University Press.
- [23] Hou, T. Y., and Wu, X. H. (1997). A multiscale finite element method for elliptic problems in composite materials and porous media. *Journal of Computational Physics*, 134(1), 169-189.
- [24] J.-C. Nédélec, *Acoustic and electromagnetic equations, integral Representations for Harmonic Problems*, vol. 144, Springer, 2001.
- [25] P. Monk, *Finite Element Methods for Maxwell's Equations*. Oxford University Press, 2003.
- [26] Ockendon, J. R., and Tayler, A. B. (2003). *Waves, flows, and oscillations in the solar atmosphere*. Springer Science and Business Media.
- [27] V. Péron et C. Poignard, *Approximate transmission conditions for time-harmonic Maxwell equations in a domain with thin layer*, Research Report RR-6775. INRIA, 2008.
- [28] R. Perrussel et C. Poignard, *Asymptotic Expansion of Steady-State Potential in a High Contrast Medium. A Uniform Variational Formulation for Resistive Thin Layers*, Research Report RR-7163. INRIA, 2010.
- [29] F. Rellich, Über das asymptotische Verhalten der Lösungen von  $\Delta u + \lambda u = 0$  in unendlichen Gebieten, *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* **53** (1943), 57–65.
- [30] K. Schmidt and S. Tordeux, Asymptotic modelling of conductive thin sheets, *Zeitschrift für angewandte Mathematik und Physik* **61** (2010), 603–626.
- [31] K. Schmidt et S. Tordeux, *High order transmission conditions for thin conductive sheets in magneto-quasistatics*, ESAIM, Math. Model. Numer. Anal., 45, No. 6, 1115–1140, 2011.
- [32] M.A. Shubin, *Pseudodifferential Operators and Spectral Theory*, 2nd ed. Springer, Berlin, 2001.

- [33] M.E. Taylor, *Pseudodifferential Operators*, Princeton Math. Ser. 34, Princeton University Press, Princeton, NJ., 1981.
- [34] F. Trèves, *Introduction to Pseudodifferential and Fourier Integral Operators*, Plenum Press, New York, 1980.
- [35] A. D. Ventcel, *On boundary conditions for multidimensional diffusion processes*, Theor. Probab. Appl., 4, 164–177, 1959.

# RÉSUMÉ

Dans ce travail, nous nous sommes intéressés au comportement asymptotique de la solution de deux problèmes de Helmholtz définis dans des domaines bidimensionnels différents l'un contenant une couche mince d'épaisseur constante et l'autre contenant une couche mince d'épaisseur non constante.

Pour déterminer un développement asymptotique de la solution  $u^\varepsilon$  du problème en fonction de l'épaisseur de la couche mince  $\varepsilon$  (destinée à tendre vers 0) nous utilisons des outils d'analyse multi-échelle de l'analyse asymptotique. Ensuite, nous calculons les premiers termes du développements asymptotiques et nous dérivons des modèles approchés avec des conditions de transmission de type Ventcel définies sur une interface artificielle  $\Gamma$  modélisant l'effet de la couche mince. Enfin, nous démontrons une estimation de l'erreur entre la solution exacte et la solution approchée.

**Mots clés :**

Problème de Helmholtz, analyse asymptotique, conditions de transmission de type Ventcel, couche mince.



# ABSTRACT

In this work, we are interested in the asymptotic behaviour of two Helmholtz problems solution defined in different two-dimensional domains, one containing a thin layer of constant thickness and the other containing a thin layer of non-constant thickness.

To determine an asymptotic expansion of the problem's solution the  $u^\varepsilon$  as a function of the thickness of the thin layer  $\varepsilon$  (intended to tend to 0) we use multi-scale expansion of the asymptotic analysis. Then, we compute the first terms of the asymptotic expansion and we derive an approximate models with Ventcel-type transmission conditions defined on an artificial interface  $\Gamma$  modeling the thin layer effect. Finally, we demonstrate an error estimate between the exact solution and the approximated solution.

**Keywords :**

Helmholtz equation, asymptotic analysis, Ventcel-type transmission conditions, thin layer.