

Sur l'énumération des structures discrètes : une approche par la théorie des relations

Résumé :

Ce travail s'inscrit dans le cadre de la théorie des relations. Il porte sur l'énumération des structures finies. Etant donnée une classe $\mathcal{C}$ de structures combinatoires finies, le *profil* de $\mathcal{C}$ est la fonction $\varphi_{\mathcal{C}}$ qui, à chaque entier n , associe le nombre de structures à n éléments appartenant à $\mathcal{C}$, les structures isomorphes étant identifiées. La série génératrice de $\mathcal{C}$ est la fonction $\mathcal{H}_{\mathcal{C}}(X) := \sum_{n \geq 0} \varphi_{\mathcal{C}}(n)X^n$. De nombreux résultats sur le comportement de $\varphi_{\mathcal{C}}$ ont été obtenus. Albert et Atkinson ont montré que les séries génératrices de certaines classes de permutations sont algébriques. Nous montrons comment ce résultat se généralise aux classes de structures binaires ordonnées, en mettant l'accent sur les notions de la théorie des relations. Ceci fait l'objet de la première partie de notre travail.

Nous étudions ensuite la notion de minimalité. Une classe minimale étant une classe infinie de structures finies dont les sous-classes héréditaires propres sont finies. Nous considérons des classes héréditaires de structures finies, contenant une infinité de structures indécomposables dont les sous-classes propres n'en contiennent qu'un nombre fini. Nous montrons en particulier que ces classes sont des âges belordonnés et sont en nombre continûpotent, puis nous donnons des exemples d'âges ind-minimaux de graphes dont nous calculons les profils et les fonctions génératrices.

Enfin, nous nous intéressons au phénomène de *saut* observé dans le comportement des profils de classes héréditaires de structures finies. Nous partons de la notion de *décomposition monomorphe* d'une structure relationnelle. Nous montrons que le profil d'une classe héréditaire formée de structures ordonnées qui ont une décomposition monomorphe finie est un polynôme. Nous montrons également que la classe $\mathcal{D}$ des structures ordonnées qui n'ont pas de décomposition monomorphe finie contient un ensemble fini $\mathfrak{A}$ tel que tout élément de $\mathcal{D}$ abrite un élément de $\mathfrak{A}$. Dans le cas binaire, tout membre de $\mathfrak{A}$ a un profil au moins exponentiel. Il en résulte que, si le profil d'une classe héréditaire de structures binaires ordonnées n'est pas borné par un polynôme, il est au moins exponentiel. Un résultat généralisant une classification obtenue par Balogh, Bollobás et Morris en 2006 pour les graphes ordonnés.

Mots-clés : Ensemble ordonné, belordre, structure relationnelle, profil, indécomposabilité, graphe, tournoi, permutation, décomposition monomorphe, enchaînabilité.
