

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET
DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
« HOUARI BOUMEDIENE »
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



THÈSE

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES

EN : Mathématiques

Spécialité : R. O : Mathématiques Discrètes et Optimisation

Par : LAÏCHE Daouya

Sujet

Sur la coloration de packing de quelques classes
de graphes : Cas orienté et non orienté

Soutenue publiquement le 08/05/2017 à 8h30, devant le jury composé de :

M. KHELLADI Abdelkader,	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Président
Mme. BOUCHEMAKH Isma,	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Directrice de thèse
M. SOPENA Éric,	Professeur à l'Université de Bordeaux	Co-directeur de thèse
M. AÏDER Méziane,	Professeur à l'U.S.T.H.B.	Examineur
M. CHELLALI Mustapha,	Professeur à l'Université de Blida	Examineur
M. KHEDDOUCI Hamamache,	Professeur à l'Université de Lyon	Examineur

Remerciements

Je tiens à remercier en tout premier lieu, Dieu de m'avoir donnée la volonté, la force et le courage pour aller au bout de cette thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à ma directrice de thèse, Madame Isma BOUCHEMAKH, Professeur à l'U.S.T.H.B., pour avoir accepté de diriger d'abord mes travaux de recherche pour la préparation du Magister, période à laquelle j'ai pu m'initier aux problèmes présentés ici, et par la suite ceux du Doctorat. Je la remercie très sincèrement pour sa disponibilité et pour la pertinence de ses conseils avec lesquels elle a su me guider.

Mes plus vifs remerciements vont à mon co-directeur de thèse, Monsieur Éric SOPENA, Professeur à l'Université de Bordeaux, pour le temps qu'il m'a accordé à chaque séjour effectué au laboratoire LaBRI, pour la confiance qu'il a mise en moi, pour le savoir qu'il m'a prodigué et aussi pour sa correction minutieuse de la thèse. Ses qualités humaines, sa gentillesse et sa patience ont été d'un grand support moral pour mener à terme mes travaux de recherche.

Je remercie vivement Monsieur Abdelkader KHELLADI, Professeur à l'U.S.T.H.B., pour l'honneur qu'il m'a fait en acceptant de présider le jury.

Mon profond respect et mes remerciements vont à Monsieur Méziane AÏDER, Professeur à l'U.S.T.H.B., Monsieur Mustapha CHELLALI, Professeur à l'Université de Blida et Monsieur Hamamache Kheddouci, Professeur à l'Université de Lyon pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant de faire partie du jury et d'examiner

cette thèse.

Je tiens à remercier plus personnellement mon mari, qui a cru en moi et qui a été très compréhensif. Son écoute, ses conseils, son soutien et ses encouragements m'ont été d'une grande aide.

Je voudrais exprimer plus particulièrement mes remerciements à mes parents pour leur éducation, leur générosité, leurs sacrifices, leurs précieux conseils et surtout, pour l'aide qu'ils m'ont fournie, en gardant mon fils durant de longues périodes afin que je puisse poursuivre mes études dans de bonnes conditions. Ces quelques mots ne suffiront jamais pour décrire ce que j'éprouve pour vous papa et maman...

Un remerciement infini à mon ange Waël qui a supporté mes longues et fréquentes absences.

Mes remerciements s'adressent également à mes sœurs, mes frères, mes amis et à toute personne qui m'a aidée et soutenue pour faire aboutir ce projet de thèse de doctorat.

Table des matières

Introduction	9
1 Définitions et notations	13
1.1 Définitions générales	13
1.2 Quelques invariants de graphes	23
1.3 Graphes orientés	25
2 Colorations de packing et de S-packing	27
2.1 Colorations de packing	27
2.1.1 Origine et définition du problème de coloration de packing . .	27
2.1.2 Nombre chromatique de packing et autres invariants de graphes	29
2.1.3 Coloration de packing de quelques classes de graphes	30
2.2 Colorations de S -packing	40
2.2.1 Coloration de S -packing des chaînes	44
2.2.2 Coloration de S -packing des grilles carrées, hexagonales et tri- angulaires	45
2.2.3 Coloration de S -packing des graphes subcubiques	48
3 Couronnes et échelles	50
3.1 Couronnes et couronnes généralisées des chaînes	50
3.2 Couronnes et couronnes généralisées des cycles	59
3.3 Échelles	70
4 Thêta-graphes généralisés	102
4.1 Borne supérieure	102

4.2	Caractérisation complète	104
5	Coloration de packing des graphes orientés	122
5.1	Généralités	122
5.2	Graphes complets, graphes bipartis complets, chemins et circuits . . .	124
5.2.1	Coloration de packing des graphes complets orientés	124
5.2.2	Coloration de packing des chemins orientées	125
5.2.3	Coloration de packing des circuits orientés	125
5.3	Couronnes et couronnes généralisées des chemins et des circuits orientés	127
5.4	Arbres	138
5.5	Thêta-graphes généralisés	139
	Conclusion	144
	Bibliographie	146

Table des figures

1.1	Exemples de graphes	14
1.2	Graphe biparti complet $K_{4,2}$	16
1.3	Le graphe $K_{3,2}$ est planaire	16
1.4	Exemple d'une roue W_7	17
1.5	Présentation d'un graphe G et des excentricités de ses sommets . . .	18
1.6	Un arbre T avec $rad(T) = 3$ et $diam(T) = 6$	20
1.7	Exemples d'une étoile et d'une étoile double	20
1.8	La grille $P_5 \square P_4$	21
1.9	Le graphe joint de G_1 et G_2	22
1.10	Quelques invariants de quelques graphes	24
1.11	Digraphe et graphe orienté	26
2.1	L'arbre T_5 où les sommets non colorés sont de couleur 1	32
2.2	Les plus petits arbres avec $\chi_\rho(T) = 4$	33
2.3	Coloration de packing de l'arbre binaire complet B_4	35
2.4	Graphe de Petersen	44
3.1	Un graphe G avec sa couronne généralisée $G \odot \textcolor{red}{p}K_1$	51
3.2	Des colorations de packing optimales de $P_n \odot K_1$, $2 \leq n \leq 9$	52
3.3	Coloration de packing périodique de $P_n \odot K_1$, $n \geq 10$	52
3.4	Des colorations de packing optimales de $C_n \odot K_1$	61
3.5	Des motifs circulaires pour la preuve du Théorème 3.11	70
3.6	L'échelle circulaire CL_7	71
3.7	Configuration du Lemme 3.14	71

3.8	L'échelle ouverte CL'_∞	72
3.9	Le H -graphe $H(4)$	78
3.10	Une 5-coloration de packing circulaire du H -graphe $H(r)$ avec r pair	79
3.11	Une 7-coloration de packing circulaire du H -graphe $H(r)$ avec r impair	79
3.12	Un H -graphe ouvert $H'(r)$	80
3.13	La 5-coloration de packing de $H'(3)$	80
3.14	La 5-coloration de packing d'un $H'(r)$	80
3.15	Le H -graphe généralisé $H_3(4)$	81
3.16	Configuration du Lemme 3.21	84
3.17	Une coloration de packing circulaire d'un H -graphe généralisé $H_\ell(r)$ lorsque r est pair et $\ell \equiv 0, 1, 2[6]$	88
3.18	Une coloration de packing circulaire d'un H -graphe généralisé $H_\ell(r)$ lorsque r est pair et $\ell \equiv 3, 4, 5[6]$	89
3.19	Les 5-colorations de packing possibles d'une seule échelle	90
3.20	Des 6-colorations de packing de $H_\ell(r)$ avec $\ell \equiv 0, 1, 2[6]$	91
3.21	Des 6-colorations de packing de $H_\ell(r)$ avec $\ell \equiv 3, 4, 5[6]$	92
3.22	Une 7-coloration de packing du graphe $H_2(2)$	94
3.23	Des 7-colorations de packing de $H_2(r)$ avec $r \in \{4, 7, 8, 11\}$	95
3.24	Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 0[3]$	96
3.25	Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 1[3]$ et $r \geq 10$	96
3.26	Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 2[6]$ et $r \geq 14$	96
3.27	Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 5[6]$ et $r \geq 17$	96
3.28	Une 6-coloration de packing de $H_2(5)$	96
3.29	Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 0[4]$	97
3.30	Une 6-coloration de packing de $H_5(5)$	98
3.31	Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 1[4]$ et $r \geq 9$	99
3.32	Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 2[4]$	99
3.33	Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 3[4]$	100

5.1	Une orientation de $K_{5,3}$ qui atteint la borne supérieure de la Proposition 5.5	125
5.2	Colorations de packing de la preuve du Théorème 5.8	127
5.3	Configuration de la preuve du Théorème 5.9	129
5.4	Colorations d'un échantillon produites par la procédure SCP	130
5.5	Colorations de packing des chemins de longueur 3 (preuve du Théorème 5.12)	140

Introduction

La théorie des graphes est une branche des mathématiques discrètes. Elle représente un moyen très utile et très efficace pour résoudre des problèmes discrets de la Recherche Opérationnelle. Elle est ainsi souvent présente dans notre vie quotidienne, sans que l'on en soit toujours conscient. Le problème appelé "problème des ponts de Koenigsberg" posé par Euler en 1736 [20] est à l'origine de cette branche. Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "peut-on se promener dans la ville¹ en traversant chaque pont une et une seule fois?". Depuis, la théorie des graphes s'est développée, notamment grâce aux travaux de Berge [6] qui a grandement participé à sa diffusion.

La théorie des graphes peut modéliser beaucoup de problèmes pratiques et dans plusieurs domaines, notamment en technologie, par exemple, les problématiques de réseaux informatiques, de réseaux routiers, de transport de marchandises, d'emplois du temps, d'électronique, de mécanique du solide et aussi les réseaux de télécommunication (voir [41]).

Le problème des quatre couleurs est parmi les premières sources d'inspiration de la théorie des graphes, Ce problème consiste à répondre à la question suivante : "suffit-il de quatre couleurs pour colorer n'importe quelle carte géographique de façon telle que deux pays ayant une frontière commune aient des couleurs distinctes?". Mathématiquement et en théorie des graphes, ce problème consiste à répondre à la question suivante : " peut-on colorer les sommets d'un graphe planaire en utilisant quatre couleurs de telle sorte que toutes les arêtes aient des extrémités de cou-

1. La ville de Koeninsberg est traversée par la Pregel, qui coule de part et d'autre de l'île de Kneiphof, et possède sept ponts.

leurs différentes ?". Ce problème a été posé sous forme de conjecture par F. Guthrie en 1852. Depuis, il est considéré comme l'un des problèmes les plus célèbres en théorie des graphes. Plus d'un siècle plus tard, en 1977, il y a eu une réponse positive à ce problème proposée par Appel, Haken et Koch [1, 2], mais à l'aide de l'ordinateur (leur preuve a nécessité plus de 1200 heures de calcul sur trois ordinateurs). 20 ans plus tard, Robertson, Sanders, Seymour et Thomas [45] ont obtenu une preuve plus simple et plus courte, mais toujours à l'aide de l'ordinateur.

Bien que ce problème ait été résolu, il attire toujours de nombreux chercheurs, qui tentent de le résoudre sans l'aide d'ordinateurs.

Actuellement, on trouve dans la littérature plusieurs types de colorations : elles sont définies par la coloration des éléments du graphe (sommets, arêtes, faces...), avec une ou plusieurs contraintes supplémentaires. Il existe de nombreux résultats sur plusieurs types de colorations que nous ne détaillerons pas ici, mais nous pouvons citer l'ouvrage de Jensen et Toft [34], "*Graph Coloring Problems*", qui rassemble la plupart des résultats sur plusieurs types de colorations de graphes ainsi de nombreuses questions ouvertes.

La coloration simple ou standard ou encore la plus naturelle est la coloration propre de sommets. Une *k-coloration propre* des sommets ($k \in \mathbb{N}$, $k \geq 1$) d'un graphe G est une application π qui va de l'ensemble de sommets de G dans l'ensemble des couleurs $\{1, 2, \dots, k\}$ telle que si deux sommets u et v sont adjacents alors $\pi(u) \neq \pi(v)$. Un graphe qui admet une *k-coloration* est dit *k-colorable*. Le *nombre chromatique*, noté $\chi(G)$, est le plus petit entier k tel que G est *k-colorable*.

Parmi les divers types de coloration, on trouvera "la coloration de graphes orientés" qui a été introduite par Courcelle en 1994 [15]. Les graphes orientés considérés sont des graphes orientés antisymétriques. Cette notion de coloration orientée a été étudiée et développée par plusieurs auteurs tels que Borodin, Kostochka, Nešetřil, Raspaud, Sopena et Zhu (voir par exemple [8, 9, 10, 36, 43, 49]). Une coloration d'un graphe orienté est une coloration propre du graphe non orienté sous-jacent sur laquelle on impose une contrainte supplémentaire liée à l'orientation.

En 2003, Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [29] ont introduit la coloration de packing des graphes, il s'agit de trouver le plus petit nombre de couleurs, appelé *nombre chromatique de packing* et noté $\chi_\rho(G)$, à affecter aux sommets d'un graphe G de telle sorte que si deux sommets u et v ont la même couleur $\pi(u) = \pi(v)$, alors $d_G(u, v) > \pi(u)$. Ainsi la coloration de packing est une coloration propre des sommets qui respecte une contrainte supplémentaire (deux sommets qui ont la même couleur doivent être à distance strictement supérieure à cette couleur).

Dans cette thèse, nous nous intéressons principalement à l'étude de cet invariant, et l'étudions sur quelques classes de graphes. Par ailleurs, nous introduisons la coloration de packing des graphes orientés.

Après une introduction, la thèse s'articule autour de cinq chapitres :

Après avoir fourni dans le premier chapitre les définitions et notions de base de la théorie des graphes qui nous seront nécessaires dans la suite, nous commençons dans le chapitre deux par fournir des résultats connus sur la coloration de packing des graphes, puis nous présentons la notion de coloration de S -packing des graphes.

La première partie du chapitre trois traite de la coloration de packing d'une classe particulière de graphes, qui est la classe des couronnes. Nous présenterons la coloration de packing des couronnes et des couronnes généralisées des chaînes et des cycles. La seconde partie de ce chapitre étudie la classe des échelles. Nous tentons de trouver des valeurs exactes, sinon des bornes supérieures pour cet invariant.

Quant au quatrième chapitre, il se focalise autour de la coloration de packing des θ -graphes généralisés. Nous commençons par donner une borne supérieure du nombre chromatique de packing de n'importe quel θ -graphe généralisé, ensuite nous donnons une caractérisation complète des θ -graphes généralisés de nombre chromatique de packing donné.

Dans le dernier chapitre, nous étendons la notion de la coloration de packing aux graphes orientés. Après avoir introduit ce nouveau paramètre, nous étudions la coloration de packing de plusieurs types de graphes orientés, dont le graphe sous-jacent est un graphe complet, un graphe biparti complet, une chaîne, un cycle, une couronne généralisée de chaîne ou de cycle, un thêta-graphe généralisé ou un arbre.

La thèse s'achève par une conclusion générale sur l'ensemble des travaux réalisés et propose des perspectives de recherche.

Chapitre 1

Définitions et notations

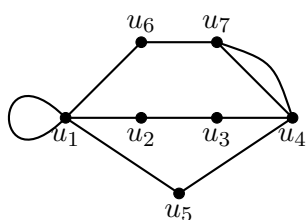
Dans ce chapitre, nous introduisons d’abord les définitions de base de la théorie des graphes qui nous seront utiles tout au long de cette thèse, ces notions sont standards et peuvent être retrouvées dans [6, 7, 16].

1.1 Définitions générales

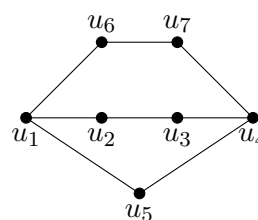
Un *graphe* non orienté G , est un couple composé d’un ensemble $V(G)$ de *sommets* de G , et d’un ensemble $E(G)$, d’*arêtes* qui sont des paires de sommets (non nécessairement distincts). Si $e = \{u, v\}$ (ou simplement $e = uv$) est une arête alors on dit que e *relie* u et v , et les sommets u et v sont appelés les *extrémités* de e . Une arête $e = \{u, v\}$ est une *boucle* si $u = v$. Dans le cas général, un graphe peut avoir des arêtes multiples, c’est-à-dire des arêtes différentes qui ont les mêmes extrémités. Les nombres de sommets et d’arêtes de G sont notés $v(G)$ et $e(G)$; ces deux paramètres fondamentaux sont appelés l’*ordre* et la *taille* de G , respectivement.

Un graphe *simple* est un graphe sans boucle, et dans lequel toute paire de sommets est reliée par au plus une arête.

Par exemple sur la Figure 1.1(a), le graphe H possède une boucle en u_1 et une arête multiple u_4u_7 (il s’agit en fait ici d’une arête double). Le graphe G donné en exemple sur la Figure 1.1(b) ne possède pas de boucle ni d’arête mul-



(a) Un graphe H avec
une arête multiple
et une boucle



(b) Un graphe G simple

FIGURE 1.1 – Exemples de graphes

simple, donc G est un graphe *simple*, il est d'ordre 7 et a pour ensemble de sommets $V(G) = \{u_1, u_2, \dots, u_7\}$. Ce graphe est de taille 8 et a pour ensemble d'arêtes $E(G) = \{u_1u_2, u_1u_5, u_1u_6, u_2u_3, u_3u_4, u_4u_5, u_4u_7, u_6u_7\}$.

Dans toute la suite de ce document, nous considérerons uniquement des graphes sans boucle ni arête multiple, c'est-à-dire des graphes *simples*.

Adjacence

Soit G un graphe. Pour une arête $e = \{u, v\}$, notée aussi uv , on dit que :

- u et v sont adjacents ;
- u et v sont les extrémités de e ;
- e est incidente aux sommets u et v ;
- u et v sont voisins.

Voisinage

Pour un graphe G , le *voisinage ouvert* d'un sommet u , noté $N_G(u)$, est l'ensemble des sommets adjacents à u . Le *voisinage fermé* de u , noté $N_G[u]$, est l'ensemble $N_G[u] = N_G(u) \cup \{u\}$. Le voisinage ouvert (respectivement fermé) d'un ensemble de sommets S est $N_G(S) = \cup_{u \in S} N_G(u)$ (respectivement $N_G[S] = \cup_{u \in S} N_G[u]$).

Degré d'un sommet

Le *degré* d'un sommet u dans un graphe G , noté $d_G(u)$, est le nombre d'arêtes incidentes à u , et donc $d_G(u) = |N_G(u)|$. Le degré maximum (respectivement minimum) d'un graphe G est noté $\Delta(G)$ (respectivement $\delta(G)$) et défini comme le maximum (respectivement minimum) des degrés des sommets de G .

Un sommet de degré égal à 1 est appelé sommet *pendant* (ou *feuille*).

Sous-graphe et sous-graphe induit

Un graphe H est un *sous-graphe* de G si $V(H) \subseteq V(G)$ et $E(H) \subseteq E(G)$. Pour un sous-ensemble de sommets $W \subseteq V(G)$, le *sous-graphe induit* par W est le graphe $G[W]$ défini par l'ensemble de sommets $V(G[W]) = W$ et l'ensemble d'arêtes $E(G[W]) = \{uv : uv \in E(G) \text{ et } \{u, v\} \subset W\}$.

Graphe complet

Un graphe G est dit *complet* si toute paire de sommets est reliée par une arête.

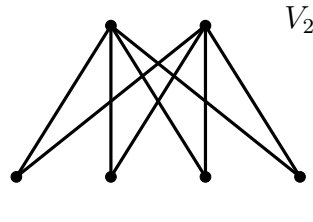
Graphe biparti

Un graphe G est dit *biparti* si $V(G)$ peut être partitionné en deux ensembles V_1 et V_2 de telle sorte que toute arête du graphe possède une extrémité dans V_1 et l'autre dans V_2 .

Dans le cas particulier où $|V_1| = m$, $|V_2| = n$, $d_G(u) = n \ \forall u \in V_1$ et $d_G(v) = m \ \forall v \in V_2$, alors G est dit graphe *biparti complet* et est noté $K_{m,n}$. Un exemple d'un graphe biparti complet et le graphe $K_{4,2}$ illustré dans la Figure 1.2.

Multiparti

Un graphe *multiparti complet* ou *t-parti complet* $K_{n_1, n_2, \dots, n_t}$, $t \geq 2$, est un graphe G où l'ensemble des sommets $V(G)$, $|V(G)| = n_1 + n_2 + \dots + n_t$, peut être partitionné

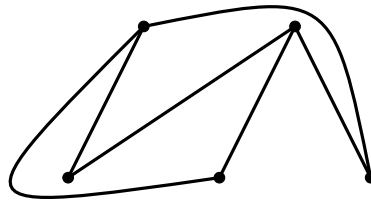
FIGURE 1.2 – Graphe biparti complet $K_{4,2}$

en t stables N_i (c'est-à-dire $G[N_i]$ est sans arête), $i = 1, \dots, t$ avec $|N_i| = n_i$ et pour toute paire de sommets $u \in N_i$ et $v \in N_j$, $1 \leq i < j \leq t$, $uv \in E(G)$.

Graphe planaire

Un graphe est dit *planaire* s'il existe une façon de le représenter dans un plan sans que deux arêtes ne se croisent.

Exemple : Le graphe de la Figure 1.3 est le graphe biparti complet $K_{3,2}$, qui est planaire.

FIGURE 1.3 – Le graphe $K_{3,2}$ est planaire

Chaîne, cycle et roue

Soit n un entier. Le graphe P_n est la chaîne d'ordre n . Ce graphe est défini par $V(P_n) = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ et $E(P_n) = \{u_i u_{i+1} / 1 \leq i < n\}$.

Soit G un graphe et soit $\{u, v\} \in V(G)$ une paire de sommets. Une chaîne d'ordre n entre u et v est une suite de sommets $u_1, \dots, u_n$ telle que pour tout i , avec $1 \leq i < n$, on a $u_i u_{i+1} \in E(G)$, avec $u_1 = u$ et $u_n = v$.

Soit G un graphe et soit $\{u, v\} \in V(G)$ une paire de sommets. Un cycle d'ordre n entre u et v est une suite de sommets $u_1, \dots, u_n$ telle que pour tout i , avec $1 \leq i < n$, on a $u_i u_{i+1} \in E(G)$ et $u_1 u_n \in E(G)$, avec $u_1 = u$ et $u_n = v$.

Une *roue*, notée W_n , est un graphe formé d'un cycle C_{n-1} avec un sommet supplémentaire connecté à tous les sommets de ce cycle (voir par exemple, la roue illustrée dans la Figure 1.4).

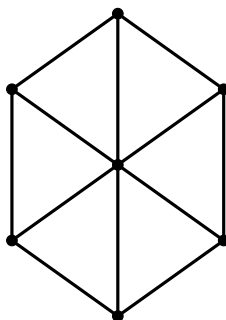


FIGURE 1.4 – Exemple d'une roue W_7

Distance

La *distance* entre deux sommets u et v d'un graphe G , notée $d_G(u, v)$, est la longueur d'une plus courte chaîne qui relie u à v . Si aucune chaîne ne relie u et v , on définit par convention $d_G(u, v) = \infty$.

Excentricité

L'*excentricité* d'un sommet u d'un graphe G , notée $e_G(u)$, est la plus grande des distances $d_G(u, v)$ où $v \in V(G)$, c'est-à-dire $e(u) = \max_{v \in V(G)} d_G(u, v)$.

Diamètre et rayon

L'excentricité maximum sur tous les sommets de G est appelée le *diamètre* de G , et est notée $diam(G)$. En d'autres termes, $diam(G)$ représente la plus grande

distance entre deux sommets quelconques de G .

L'excentricité minimum sur tous les sommets de G est appelée le *rayon* de G , et est noté $rad(G)$.

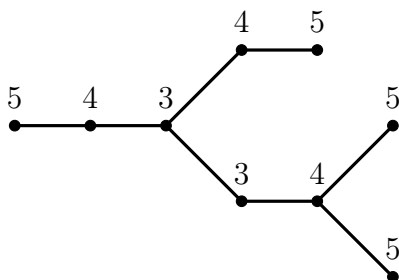


FIGURE 1.5 – Présentation d'un graphe G et des excentricités de ses sommets

Pour le graphe illustré dans la Figure 1.5, $diam(G) = 5$ et $rad(G) = 3$.

Si $e_G(u) = rad(G)$, u est appelé sommet *central* de G . L'ensemble des sommets centraux est appelé *centre* de G .

Sommets antipodaux

Deux sommets u et v d'un graphe G sont *antipodaux* si $d_G(u, v) = diam(G)$. Ainsi, par exemple, les sommets à distance $\frac{n}{2}$ d'un cycle pair de longueur n sont antipodaux.

Boule

Pour un sommet u d'un graphe G et un entier naturel r , la *boule* $B_G(u, r)$ de centre u et de rayon r est l'ensemble :

$$B_G(u, r) = \{v \in V(G) : d_G(u, v) \leq r\}.$$

Graphe connexe

Un graphe G est dit *connexe* si toute paire de sommets de G est reliée par une chaîne.

Composante connexe

Une *composante connexe* d'un graphe G est un sous-graphe connexe maximal de G .

Point d'articulation

Un sommet v d'un graphe G est un *point d'articulation* si la suppression de v augmente le nombre de composantes connexes de G .

Sommet-connexivité

Dans un graphe connexe G , deux chaînes P et Q qui relient les sommets u et v sont *disjointes* si elles n'ont pas de sommets internes en commun, c'est-à-dire, si $V(P) \cap V(Q) = \{u, v\}$. La *connexivité locale* entre deux sommets distincts u et v est le nombre maximum de chaînes qui relient u et v qui sont deux à deux disjointes, et est notée $p(u, v)$.

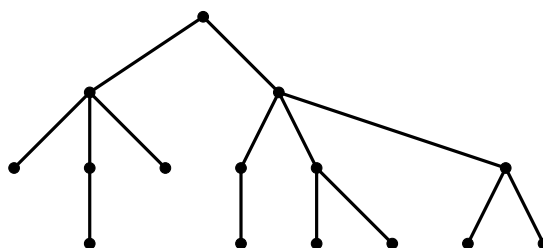
Un graphe G est κ -*connexe* si $p(u, v) \geq \kappa$ pour toute paire de sommets u et v . La *connexivité* $\kappa(G)$ de G est la valeur maximum de κ pour laquelle G est κ -connexe. Un graphe 1-connexe est ainsi simplement un graphe connexe.

Arbre

Un *arbre* T est un graphe connexe sans cycle. Les sommets de T de degré 1 sont appelés *sommets pendants* (ou *feuilles*), et les sommets adjacents à des feuilles sont des sommets *supports*. La Figure 1.6 représente un arbre de rayon 3 et de diamètre 6.

Notons que tout arbre T vérifie :

$$2 \operatorname{rad}(T) - 1 \leq \operatorname{diam}(T) \leq 2 \operatorname{rad}(T).$$

FIGURE 1.6 – Un arbre T avec $rad(T) = 3$ et $diam(T) = 6$

Étoile

Une *étoile* est un arbre où seul un sommet est de degré supérieur à 1 et est noté S_n .

Étoile double

L'*étoile double*, notée $S_{p,q}$, est le graphe obtenu en reliant par une arête le sommet central¹ de l'étoile S_p au sommet central de l'étoile S_q .

La Figure 1.7(a) est une étoile et la Figure 1.7(b) est une étoile double.

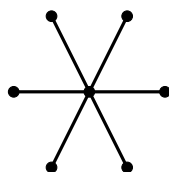
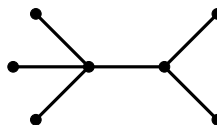
(a) L'étoile S_6 (b) L'étoile double $S_{3,2}$

FIGURE 1.7 – Exemples d'une étoile et d'une étoile double

Somme cartésienne de deux graphes

Soient G et H deux graphes. La *somme cartésienne* $G \square H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (u_1, v_1) et

1. Le *sommet central* d'une étoile S_k est le sommet u de degré maximum.

(u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ sont reliés par une arête si et seulement si, $u_1 u_2 \in E(G)$ et $v_1 = v_2$, ou $v_1 v_2 \in E(H)$ et $u_1 = u_2$.

Exemple 1.

1. Une grille carrée $P_m \square P_n$ est la somme cartésienne de deux chaînes P_m et P_n (par exemple, la Figure 1.8 représente la grille $P_5 \square P_4$).

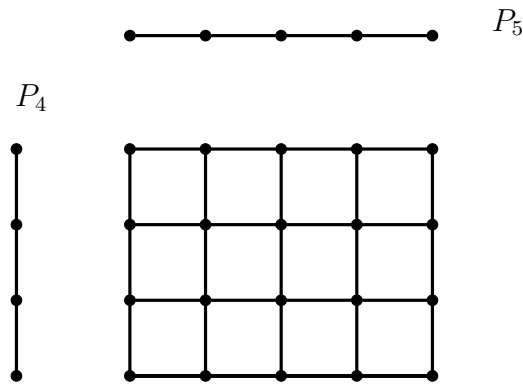


FIGURE 1.8 – La grille $P_5 \square P_4$

2. Un cylindre $P_m \square C_n$ est la somme cartésienne d'une chaîne P_m par un cycle C_n .
3. Un tore $C_m \square C_n$ est la somme cartésienne de deux cycles C_m et C_n .

Somme tensorielle de deux graphes

Soient G et H deux graphes. La *somme tensorielle*, *somme directe* ou encore *somme croisée*, $G \times H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) de $V(G) \times V(H)$ étant reliés par une arête si et seulement si, $u_1 u_2 \in E(G)$ et $v_1 v_2 \in E(H)$.

Somme forte de deux graphes

Soient G et H deux graphes. La *somme forte* $G \boxtimes H$ de G et H est le graphe ayant pour ensemble de sommets $V(G) \times V(H)$. Deux sommets (u_1, v_1) et (u_2, v_2) , avec $(u_1, v_1) \neq (u_2, v_2)$, sont reliés par une arête si et seulement si, *i*) $u_1 u_2 \in E(G)$ ou $u_1 = u_2$ et *ii*) $v_1 = v_2$ ou $v_1 v_2 \in E(H)$, c'est-à-dire si les sommets sont adjacents ou égaux dans chaque coordonnée. On remarquera que

$$E(G \boxtimes H) = E(G \square H) \cup E(G \times H)$$

Là encore, on utilise le symbole $\boxtimes$ pour désigner cette somme car il représente le graphe produit de deux arêtes.

Graphe joint

Soient G_1 et G_2 deux graphes. Le graphe $G_1 \vee G_2$ défini par l'ensemble de sommets $V(G_1) \cup V(G_2)$ et l'ensemble d'arêtes $E(G_1) \cup E(G_2) \cup E'$ où E' est l'ensemble de toutes les arêtes possibles joignant les sommets de $V(G_1)$ à $V(G_2)$, est appelé *le graphe joint* de G_1 et G_2 .

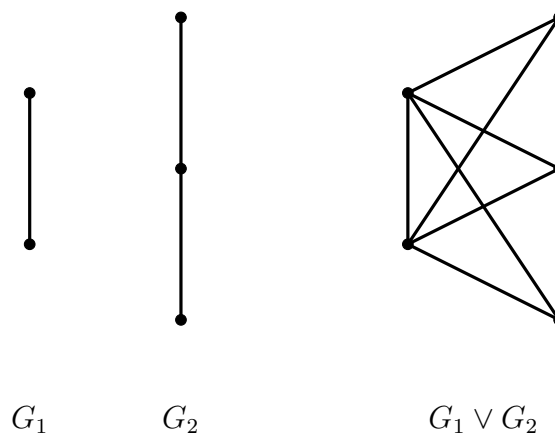


FIGURE 1.9 – Le graphe joint de G_1 et G_2

Un exemple d'un graphe joint de deux graphes est illustré dans la Figure 1.9.

Graphe subdivisé

Le *graphe subdivisé* de G , noté $S(G)$, est obtenu à partir de G en remplaçant chaque arête $e = v_i v_j$ de G par un nouveau sommet $v_{i,j}$ et deux arêtes $v_i v_{i,j}$ et $v_j v_{i,j}$.

1.2 Quelques invariants de graphes

Soit G un graphe.

Nombre de stabilité

Un *stable* S dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que $G[S]$ est un graphe sans arêtes.

Le *nombre de stabilité* $\alpha(G)$ de G est le cardinal maximal d'un stable dans G :
 $\alpha(G) = \max\{|S| : S \text{ est un stable de } G\}$.

Nombre de transversalité

Un *transversal* T dans un graphe G est un sous-ensemble de sommets de G tel que pour toute arête e de G , $\exists v \in T$, tel que v est une extrémité de e .

Le *nombre de transversalité* $\tau(G)$ de G est le cardinal minimal d'un transversal dans G : $\tau(G) = \min\{|T| : T \text{ est un transversal de } G\}$.

Nombre de clique

Une *clique* K dans un graphe G est un sous-graphe de G tel que K est un graphe complet.

Le *nombre de clique* $\omega(G)$ de G est le cardinal maximal d'une clique dans G :
 $\omega(G) = \max\{|K| : K \text{ est une clique de } G\}$.

Coloration propre de sommets et nombre chromatique

Une *coloration propre* des sommets d'un graphe G est une fonction, notée habituellement π , de $V(G)$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour toute paire de sommets adjacents $\{u, v\}$, on a $\pi(u) \neq \pi(v)$.

Le *nombre chromatique* d'un graphe G , noté $\chi(G)$, est le nombre minimum de couleurs à affecter aux sommets de G , de telle sorte que les sommets adjacents soient de couleurs différentes.

Nombre chromatique

Coloration propre d'arêtes et indice chromatique

Une *coloration propre* d'arêtes d'un graphe G est une fonction π de $E(G)$ dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour toute paire d'arêtes adjacentes (e, e') , on a $\pi(e) \neq \pi(e')$.

L'*indice chromatique* d'un graphe G , noté $\chi'(G)$, est le nombre minimum de couleurs à affecter aux arêtes de G , de telle sorte que les arêtes adjacentes soient de couleurs différentes.

Exemple 2.

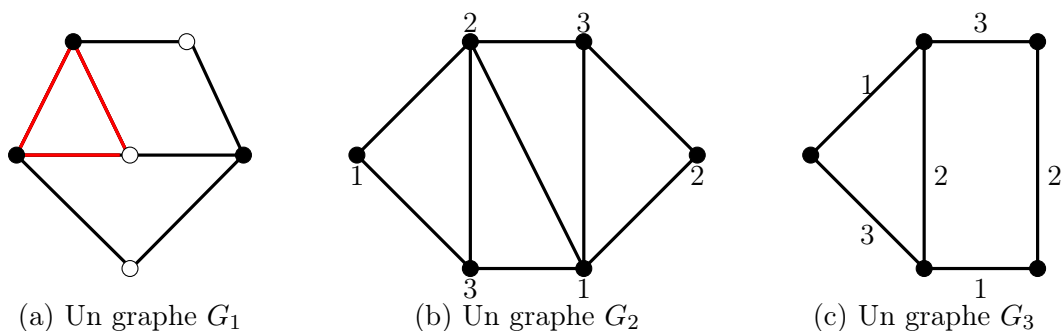


FIGURE 1.10 – Quelques invariants de quelques graphes

Pour le graphe G_1 illustré dans la Figure 1.10(a), l'ensemble des sommets blancs

représente un stable S de cardinalité maximum, l'ensemble des sommets noirs représente un transversal T de cardinalité minimum et l'ensemble des arêtes rouges représente une clique K de cardinalité maximum. La numérotation des sommets du graphe illustré dans la Figure 1.10(b) représente une coloration optimale des sommets de G et la numérotation des arêtes du graphe illustré dans la Figure 1.10(c) représente une coloration optimale des arêtes de G . D'où $\alpha(G_1) = \tau(G_1) = \omega(G_1) = 3$ et $\chi(G_2) = \chi'(G_3) = 3$.

1.3 Graphes orientés

Un *digraphe* $\vec{D}$ est un couple composé d'un ensemble de sommets $V(\vec{D})$, et d'un ensemble de couple de sommets $A(\vec{D})$ qu'on appelle *arcs*. Si $e = (u, v)$ (ou simplement $e = uv$) est un arc alors on dit que e relie u et v , le sommet u est appelé l'*extrémité de initiale de e* et le sommet v est appelé l'*extrémité finale de e* . On dit que l'arc e est un *arc sortant* du sommet u et un *arc entrant* du sommet v .

Soit $\vec{D}$ un digraphe. Un *chemin direct* d'ordre n dans $\vec{D}$ est une séquence $u_1 \dots u_n$ de sommets de $V(\vec{D})$ telle que pour tout i , $1 \leq i \leq n - 1$, $u_i u_{i+1}$ est un arc dans $E(\vec{D})$. La *distance* entre deux sommets u et v dans $\vec{D}$, notée $d_{\vec{D}}(u, v)$, est la longueur d'un plus court chemin direct (nombre d'arcs) dans $\vec{D}$ qui va de u vers v . Si aucun chemin ne relie u et v , on définit par convention $d_{\vec{D}}(u, v) = \infty$.

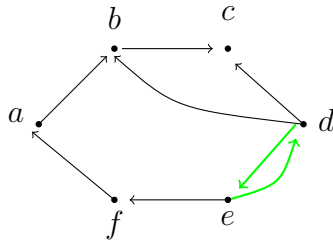
Un *graphe orienté* $\vec{O}$ est un digraphe, tel que pour tous sommets u et v , si $(u, v) \in V(\vec{O})$ alors $(v, u) \notin V(\vec{O})$. Si G est un graphe non orienté, une *orientation* de G est un graphe orienté $\vec{G}$ obtenu en donnant à chaque arête de G une orientation parmi les deux possibles.

Le *degré* d'un sommet u dans un graphe orienté $\vec{O}$, noté $d_{\vec{O}}(u)$, est le nombre de sommets reliés par un arc à u .

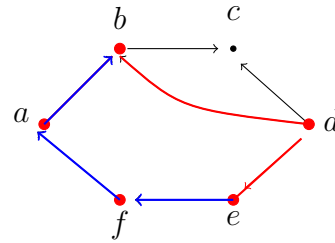
On dit qu'un sommet u est une *source* si u n'admet pas d'arc entrant et un

sommet u est un *puits* si u n'admet pas d'arc sortant.

Par définition, si $\vec{G}$ est une orientation quelconque d'un graphe G alors, pour tous sommets u et v dans G , $d_G(u, v) \leq d_{\vec{G}}(u, v)$.



(a) Un digraphe $\vec{D}$



(b) Un graphe orienté $\vec{G}$

FIGURE 1.11 – Digraphe et graphe orienté

La Figure 1.11(a) représente un digraphe $\vec{D}$. Par contre ce digraphe n'est pas un graphe orienté puisqu'il contient deux arcs opposés (e, d) et (d, e) . Le graphe $\vec{G}$ illustré dans la Figure 1.11(b) est un graphe orienté, car il ne contient pas d'arcs opposés.

Dans le même exemple (Figure 1.11(b)) le sommet c est un *puits*, car il n'a pas d'arc sortant, et le sommet d est une *source*, puisqu'il n'a pas d'arc entrant. La distance entre les deux sommets e et b dans le graphe orienté $\vec{G}$ vaut 3, par contre elle vaut 2 dans le graphe non orienté G ($d_{\vec{G}}(e, b) = 3$ et $d_G(e, b) = 2$) et la distance entre les deux sommets b et e dans le graphe orienté $\vec{G}$ est infinie, par contre elle vaut 2 dans le graphe non orienté G ($d_{\vec{G}}(b, e) = \infty$ et $d_G(b, e) = 2$).

Chapitre 2

Colorations de packing et de S -packing

Nous présentons dans la première partie de ce chapitre la coloration de packing des graphes. Nous commençons par définir cette coloration, puis présentons quelques résultats connus sur ce paramètre. L'état de l'art de Goddard , Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] s'est avéré très utile pour rédiger ce chapitre. Grâce au résultat de Soukal [50] sur la somme cartésienne de deux chaînes, nous déduisons une borne supérieure du nombre chromatique de packing de la somme tensorielle de deux chaînes.

Dans la seconde section de ce chapitre, nous présentons la coloration de S -packing des graphes, qui est une généralisation de la coloration de packing des graphes.

2.1 Colorations de packing

2.1.1 Origine et définition du problème de coloration de packing

Le terme *coloration de packing* a été introduit en 2007 par Brešar, Klavžar et Rall [11]. Ce problème a été posé en 2003 par Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28, 29], sous le nom "*broadcast coloring*", et cela suite à l'établissement

de nombreux règlements par la Commission des Communications des États-Unis concernant l'attribution des fréquences de radio-diffusion à des stations de radio. Les colorations de packing ont des applications dans plusieurs domaines, tels que dans les réseaux de télécommunication et la diversité biologique [11].

Soient G un graphe et $i \in \mathbb{N}^*$. Un sous-ensemble de sommets V_i de $V(G)$ est un *i-packing* si et seulement si la distance entre deux sommets quelconques de V_i dans G est supérieure à i . Le *nombre i-packing* est le cardinal maximal d'un *i-packing* dans G .

Soient G un graphe et $k \in \mathbb{N}^*$. L'application $\pi : V(G) \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ est appelée *k-coloration de packing de G* si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$, l'égalité $\pi(u) = \pi(v)$ implique $d_G(u, v) > \pi(u)$. Le plus petit entier k tel que G admet une *k-coloration de packing* est appelé le *nombre chromatique de packing*, et est noté $\chi_\rho(G)$. Une coloration de packing est donc une partition $P_\pi = \{V_1, V_2, \dots, V_k\}$ de $V(G)$ en *k i-packing*, pour $i = 1, \dots, k$.

Étant donné un graphe G et un entier $k \leq V(G)$, le problème qui consiste à déterminer s'il existe une coloration de packing utilisant au plus k couleurs est le problème de décision associé au problème de recherche d'une coloration de packing d'ordre minimum.

Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont montré que les problèmes de coloration de 2-packing et de coloration de 3-packing sont polynomiaux, mais le problème de coloration 4-packing est NP-complet.

Dans tout ce qui suit, nous supposons que les graphes sont simples.

2.1.2 Nombre chromatique de packing et autres invariants de graphes

Notons que toute coloration de packing est une coloration propre, et donc le nombre chromatique de packing est supérieur ou égal au nombre chromatique, ce qui est affirmé dans la proposition suivante.

Proposition 2.1. [28] *Pour tout graphe G , on a $\chi(G) \leq \chi_\rho(G)$.*

De plus, il est évident qu'à partir d'une coloration de packing d'un graphe G , on peut obtenir la coloration de packing d'un sous-graphe H de G par la restriction de la coloration de G à la coloration du sous-graphe H , puisque la restriction reste une coloration, et grâce à la propriété $d_H(u, v) \geq d_G(u, v)$, on obtient le résultat suivant.

Proposition 2.2. [28] *Si H est un sous-graphe de G , alors $\chi_\rho(H) \leq \chi_\rho(G)$.*

Dans la proposition suivante, Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont proposé une borne supérieure en fonction du nombre de transversalité.

Proposition 2.3. [28] *Tout graphe G vérifie, $\chi_\rho(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité si G est de diamètre 2.*

Pour les graphes bipartis G de diamètre 3, la valeur de $\chi_\rho(G)$ ne peut prendre que deux valeurs.

Proposition 2.4. [28] *Si G est un graphe biparti de diamètre 3, alors $\tau(G) \leq \chi_\rho(G) \leq \tau(G) + 1$.*

Comme tout graphe G vérifie $\omega(G) \leq \chi(G) \leq \chi_\rho(G)$, il est alors intéressant de caractériser ceux qui ont un nombre chromatique de packing égal à leur nombre de clique.

Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont montré que pour un graphe G , l'égalité $\omega(G) = \chi_\rho(G)$ implique forcément que les voisins d'une clique maximale K forment d'une part un ensemble stable et d'autre part qu'au moins un

sommet v de K vérifie $N[v] = K$. Si G est un graphe scindé¹ alors cette condition nécessaire devient aussi suffisante.

Si on a une égalité entre le nombre chromatique et le nombre chromatique de packing alors le nombre de clique est supérieur ou égal au nombre chromatique moins deux.

Proposition 2.5. [28] *Pour tout graphe G , si $\chi(G) = \chi_\rho(G)$ alors $\omega(G) \geq \chi(G) - 2$.*

2.1.3 Coloration de packing de quelques classes de graphes

Tout graphe G d'ordre n admet une coloration de packing d'ordre n , puisqu'il est possible d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n , aux sommets de $V(G)$. Ainsi, une borne supérieure naturelle est l'ordre du graphe qui n'est pas forcément la meilleure. Donc pour tout graphe G , le nombre chromatique de packing existe.

Plusieurs articles traitent de la coloration de packing de certaines classes de graphes, comme les arbres [3, 5, 11, 22, 28, 44, 48], les grilles [11, 17, 23, 24, 28, 33, 35, 50], les sommes cartésiennes [11, 23, 44], les graphes distances [18, 19, 51], les hypercubes [28, 52, 53] ou autres classes de graphes [4, 13, 14, 42, 46, 47, 56, 57].

Chaînes et cycles

Pour présenter les colorations de packing des chaînes et de cycles, nous allons utiliser les notations suivantes tout au long de cette thèse. Une séquence de couleurs, appelé *motif*, peut décrire une coloration de packing d'une chaîne ou d'un cycle donné. Pour les motifs qui sont périodiques, on mettra la période entre crochets pour dire que cette coloration peut se répéter. Un tel motif sera dit *circulaire*.

Concernant les chaînes P_n , de longueur $n - 1$, l'affectation des couleurs [1213] aux sommets $u_1, \dots, u_n$ de P_n représente une coloration de packing minimum.

1. Un graphe scindé est un graphe dont l'ensemble des sommets peut être partitionné en deux ensembles A et B , où A induit un sous-graphe complet et B est un stable.

Proposition 2.6. [28] Pour $2 \leq n \leq 3$, $\chi_\rho(P_n) = 2$ et pour $n \geq 4$, $\chi_\rho(P_n) = 3$.

Pour les cycles C_n , la valeur de $\chi_\rho(C_n)$ dépend du reste de la division euclidienne de n par le nombre 4. Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] montrent que la coloration de packing optimale est donnée par l'affectation aux sommets $u_1, \dots, u_n$ de C_n des motifs suivants :

- [1213] si $n \equiv 0[4]$,
- [1213]4 si $n \equiv 1[4]$,
- [1213]14 si $n \equiv 2[4]$,
- [1213]124 si $n \equiv 3[4]$.

Proposition 2.7. [28] Soit $n \geq 3$. Si n vaut 3 ou n est un multiple de 4, alors $\chi_\rho(C_n) = 3$ sinon $\chi_\rho(C_n) = 4$.

Arbres

Le nombre chromatique de packing d'un arbre de diamètre 2 (c'est-à-dire, une étoile) vaut 2. Un arbre de diamètre 3 a un nombre chromatique de packing égal à 3. Le cas des arbres de diamètre 4 est plus compliqué, mais la valeur exacte est connue. Afin d'exprimer cette valeur, définissons ce que sont un sommet fort et un sommet faible. On dit qu'un sommet est *fort* s'il est de degré 4 ou plus, et qu'il est *faible* sinon. La formule qui donne le nombre chromatique de packing pour les arbres T de diamètre 4 dépend de la nature des voisins du sommet central de T .

Proposition 2.8. [28] Soit T un arbre de diamètre 4 et de sommet central v . Pour $i = 1, 2, 3$, soit n_i le nombre de voisins de v de degré i , et soit f le nombre de voisins forts de v .

Si $f = 0$, alors

$$\chi_\rho(T) = \begin{cases} 4 & \text{si } n_3 \geq 2 \text{ et } n_1 + n_2 + n_3 \geq 3, \\ 3 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $f > 0$, alors

$$\chi_\rho(T) = \begin{cases} f + 3 & \text{si } n_3 \geq 1 \text{ et } n_1 + n_2 + n_3 \geq 2, \\ f + 1 & \text{si } n_1 = n_2 = n_3 = 0, \\ f + 2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Idée de la preuve de la Proposition 2.8 :

Pour un arbre T de diamètre 4, considérons la fonction coloration de packing définie comme suit :

On attribue la couleur 1 au centre et aux sommets pendants qui ne lui sont pas adjacents. Aux sommets restants, on attribue des couleurs différentes. Cette coloration nécessite $f + n_1 + n_2 + n_3 + 1$ couleurs, et est optimale quand $n_1 = n_2 = 0$ et quand soit $2 \leq n_3 \leq 3$ et $f = 0$, soit $0 \leq n_3 \leq 2$ et $f > 0$ (voir Figure 2.1).

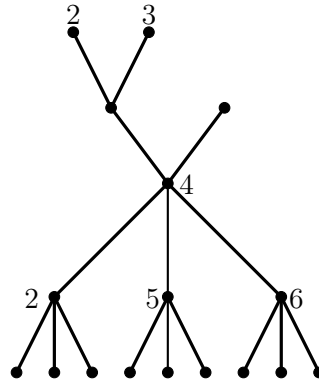


FIGURE 2.1 – L'arbre T_5 où les sommets non colorés sont de couleur 1

Si $f = 0$ et $n_3 = 1$, alors 3 couleurs suffisent : on affecte la couleur 3 au sommet central, la couleur 2 à son voisin de degré 3 et au sommet pendant adjacent à son voisin de degré 2. Aux sommets restants, on affecte la couleur 1. $\square$

Pour tout arbre T vérifiant $\chi_\rho(T) = 2, 3$, ou 4 son ordre ne peut être inférieur à 2, 4 ou 8 respectivement.

Proposition 2.9. [28] Soit T un arbre d'ordre n . Si $\chi_\rho(T) = 2$ alors $n \geq 2$, si $\chi_\rho(T) = 3$ alors $n \geq 4$ et si $\chi_\rho(T) = 4$ alors $n \geq 8$. De plus, P_4 est l'unique arbre

à 4 sommets qui nécessite 3 couleurs. Les deux arbres à 8 sommets qui nécessitent 4 couleurs sont (i) l'arbre de diamètre 4 avec $n_3 = 2$, $n_1 = 1$ et $L = n_2 = 0$, appelé A_8 ; et (ii) l'arbre de diamètre 5 où les deux sommets centraux sont de degré 3 et pour chaque sommet central, ses trois voisins sont de degrés respectivement 1, 2 et 3, appelé B_8 (Voir Figure 2.2).

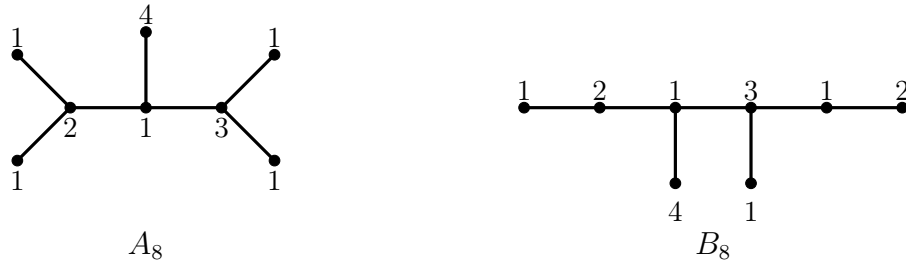


FIGURE 2.2 – Les plus petits arbres avec $\chi_\rho(T) = 4$

Le nombre chromatique de packing d'un arbre différent de P_4 ne change pas si l'on supprime certains sommets pendants.

Proposition 2.10. [28] Soit T un arbre différent de P_4 . Supposons que T contient une chaîne $tuvw$ où t est de degré 1, u et v sont de degré 2. Alors $\chi_\rho(T) = \chi_\rho(T - t)$.

Comme application de la Proposition 2.10, on peut affirmer directement que $\chi_\rho(P_n) = 3$ pour tout $n \geq 4$.

Théorème 2.11. [28] Pour tout arbre T d'ordre n , on a $\chi_\rho(T) \leq \frac{n+7}{4}$, excepté pour les cas $n = 4$ ou 8 , où $\chi_\rho(T) \leq \frac{n+8}{4}$, et ces bornes sont atteintes.

L'arbre extrémal T_d , $d \geq 2$, qui atteint la borne du Théorème 2.11 est construit comme suit : il est de diamètre 4, $n_1 = n_3 = 1$, $n_2 = 0$, $F = d - 2$ et tous les sommets forts sont de degré exactement 4. L'arbre T_d a $4d - 3$ sommets et on a bien la borne du Théorème 2.11 $d + 1 = \frac{(4d-3)+7}{4}$ donc $\chi_\rho(T_d) = d + 1$ (par exemple l'arbre T_5 illustré dans la Figure 2.1).

Quelques classes d'arbres

Sloper [48] a amélioré la borne supérieure définie dans le Théorème 2.11 pour la sous-classe des arbres binaires complets et pour les chenilles. De plus, elle est indépendante de l'ordre de l'arbre. Commençons par définir ce qu'est un arbre binaire complet, ensuite ce qu'est une chenille.

Définition 2.12. Un *arbre binaire* est un arbre où tous les sommets sont de degré maximum 3.

Définition 2.13. On définit par induction l'*arbre binaire complet*, B_h , de hauteur h comme suit :

1. B_1 est l'arbre réduit à un unique sommet.
2. B_h est construit à partir de B_{h-1} en ajoutant deux nouveaux sommets pendants à chaque sommet pendant de B_{h-1} (qui deviendra alors support dans B_h). Ces nouveaux sommets pendants sont de niveau h .

L'ordre et la taille d'un arbre binaire complet B_h de hauteur h sont respectivement $2^h - 1$ et 2^h , puisque chaque niveau i contient exactement 2^{i-1} sommets et entre deux niveaux successifs i et $i + 1$ on a 2^i arêtes.

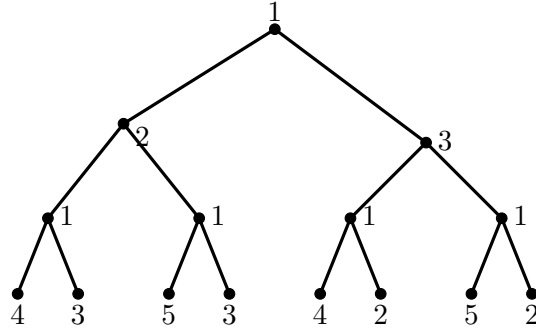
Tout arbre binaire complet de hauteur supérieure ou égale à 3 peut être packing coloré avec au maximum 7 couleurs.

Théorème 2.14. [48] *Tout arbre binaire complet B_h avec $h \geq 3$ vérifie $\chi_\rho(B_h) \leq 7$.*

Théorème 2.15. [48] *Tout arbre binaire T de diamètre ≤ 14 vérifie $\chi_\rho(T) \leq 7$.*

Définition 2.16. Une *chenille* de longueur ℓ est un arbre tel que, si on supprime tous ses sommets pendants, on obtient une chaîne P_ℓ de longueur $\ell - 1$, cette chaîne est appelé la chaîne centrale de la chenille.

Pour la classe des chenilles, Sloper [48] a montré que 7 est aussi une borne supérieure du nombre chromatique de packing.

FIGURE 2.3 – Coloration de packing de l'arbre binaire complet B_4

Théorème 2.17. [48] Soit CT_ℓ une chenille de longueur ℓ , on a $\chi_\rho(CT_\ell) \leq 6$ si $\ell \leq 34$ et $\chi_\rho(CT_\ell) \leq 7$ sinon.

Une classe particulière des chenilles, qui est la couronne généralisée d'une chaîne est étudiée au cours du chapitre 3 de cette thèse.

Concernant la classe des "homards" (qui est une sous-classe d'arbres), en 2014, Argiroffo, Nasini et Torres [5] ont donné une borne supérieure du nombre chromatique de packing. Pour présenter cette borne, nous avons besoin de définir les homards et quelques notations.

Définition 2.18. Un *homard* est un arbre T tel que, si on supprime tous ses sommets pendants, on obtient une chenille CT . La chaîne centrale de T est la chaîne centrale de CT .

Soit T un homard ayant pour chaîne centrale P . Pour chaque sommet $v \in V(P)$ ($V(P)$ représente l'ensemble des sommets de la chaîne centrale P), notons par $N_4(v)$ l'ensemble des sommets dans $N(v) - V(P)$ de degré au moins 4 et notons $c_T = \max\{|N_4(v)| : v \in V(P)\}$.

Théorème 2.19. [5] Soit T un homard ayant pour chaîne centrale P_m . Si $c_T \leq 1$ alors $\chi_\rho(T) \leq 15$, sinon $\chi_\rho(T) \leq 7 + 2^{2c_T+1}$.

De plus, lorsque $c_T \geq 2$, on a :

1. si $1 \leq m \leq 3$, $\chi_\rho(T) \leq c_T m + 3$;
2. si $4 \leq m \leq 6$, $\chi_\rho(T) \leq \lceil \frac{m(2c_T-1)}{2} \rceil + 4$;
3. si $m = 7$, $\chi_\rho(T) \leq 8c_T + 1$;
4. si $m \geq 8$ et $c_T \geq \lceil \log_4 \frac{m+1}{8} \rceil + 2$ alors $\chi_\rho(T) \leq (c_T - \lceil \log_4 \frac{m+1}{8} \rceil + 1)m + 2$.

Graphes subdivisés

Remarquons que subdiviser un graphe complet K_2 ne change pas son nombre chromatique de packing, puisque K_2 est la chaîne P_2 et $S(K_2)$ est la chaîne P_3 , et d'après la Proposition 2.6 $\chi_\rho(P_2) = \chi_\rho(P_3) = 2$.

Remarquons aussi que subdiviser un graphe complet K_n avec $n \geq 3$ augmente son nombre chromatique de packing d'une unité, puisque le nombre chromatique de packing d'un graphe complet d'ordre n vaut n , donc il suffit d'affecter n entiers distincts, entre 1 et n , aux sommets de K_n et pour $S(K_n)$ on affecte n entiers distincts, entre 2 et $n+1$, aux sommets de K_n et la couleur 1 aux sommets restants (les sommets restants sont à distance 2 entre eux).

Lemme 2.20. [11] Pour tout $n \geq 3$, $\chi_\rho(S(K_n)) = \chi_\rho(K_n) + 1 = n + 1$.

Brešar, Klavžar et Rall [11] ont borné des deux côtés le nombre chromatique de packing d'un graphe subdivisé, ces bornes sont fonction du nombre de clique et du nombre chromatique de packing du graphe non subdivisé. Les deux bornes sont atteintes lorsque le graphe est complet.

Théorème 2.21. [11] Pour tout graphe connexe G d'ordre au moins 3, $\omega(G) + 1 \leq \chi_\rho(S(G)) \leq \chi_\rho(G) + 1$.

Récemment, Brešar, Klavžar, Rall et Wash [12] ont considéré la subdivision $S_e(G)$ d'une seule arête e dans un graphe donné G , leur résultat est le suivant :

Théorème 2.22. [12] Pour tout graphe G ayant pour nombre chromatique de packing j ,

$$\left\lfloor \frac{j}{2} \right\rfloor + 1 \leq \chi_\rho(S_e(G)) \leq j + 1.$$

De plus, pour tout $k \geq 2$, il existe un graphe G avec une arête e tel que $k = \chi_\rho(G) = \chi_\rho(S_e(G)) - 1$.

Brešar, Klavžar, Rall et Wash [12] ont montré que 5 est une borne supérieure du nombre chromatique de packing de la subdivision d'un prisme généralisé².

Corollaire 2.23. [12] *Si G est un prisme généralisé, alors $\chi_\rho(S(G)) \leq 5$.*

Comme ils ont conjecturé que le nombre chromatique de packing de la subdivision d'un graphe subcubique³ est inférieure ou égale à 5.

Brešar, Klavžar, Rall et Wash [12] ont montré que le nombre chromatique de packing de la subdivision d'un graphe 3-parti complet est infini lorsque l'ordre du graphe est infini.

Sommes de graphes

La coloration de packing de la somme de graphes a intéressé plusieurs auteurs. On cite dans cette partie les résultats principaux sur cette classe de graphes, ensuite nous montrons que 17 est une borne supérieure du nombre chromatique de packing de la somme tensorielle de deux chaînes de longueurs quelconques, voire infinie.

On commence par présenter le résultat de Fiala, Klavžar et Lidický [23] sur la somme forte d'un graphe complet d'ordre n par une chaîne infinie, où ils montrent que la borne est d'ordre exponentiel en n .

Théorème 2.24. [23] *Pour tout $n \geq 1$, on a $\chi_\rho(K_n \boxtimes \mathbb{Z}) < 4^n$ et $\chi_\rho(K_n \boxtimes \mathbb{Z}) = \Omega(e^n)$.*

Pour deux graphes finis G et H , Brešar, Klavžar et Rall [11] ont donné une borne inférieure de $\chi_\rho(G \square H)$.

Théorème 2.25. [11] *Soient G et H deux graphes finis d'ordre au moins deux. Alors $\chi_\rho(G \square H) \geq (\chi_\rho(G) + 1)|V(H)| - \text{diam}(G \square H)(|V(H)| - 1) - 1$.*

Sachant qu'on a $\chi_\rho(K_n) = n$ et $\text{diam}(G \square K_n) = \text{diam}(G) + 1$, le Théorème 2.25 entraîne :

-
2. Pour un entier $n \geq 3$, un prisme généralisé P_n^2 est un graphe 3-régulier, composé de deux cycles $C_n = u_1 u_2 \dots u_n$ et $C'_n = v_1 v_2 \dots v_n$ de même longueur n , et de toutes les arêtes $u_i v_i$, $i = 1, \dots, n$.
 3. Un graphe *subcubique* est un graphe de degré maximum 3.

Corollaire 2.26. [11] Soit $n \geq 2$. Pour tout graphe G , on a

$$\chi_\rho(G \square K_n) \geq n\chi_\rho(G) - (n-1)\text{diam}(G).$$

En ce qui concerne la grille carrée (qui est la somme cartésienne de deux chaînes infinies), Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont montré en 2008, que le nombre chromatique de packing est compris entre 9 et 23. En 2009, Fiala, Klavžar et Lidický [23] ont amélioré la borne inférieure pour la ramener à valeur 10 et une année plus tard Ekstein, Fiala, Holub et Lidický [17] ont prouvé que 12 couleurs sont nécessaires. Nous nous sommes intéressés à la borne supérieure pour prouver en 2010 que 22 est une borne supérieure [37], et à la même année, Soukal et Holub [50] ont prouvé que 17 couleurs suffisent pour avoir une coloration de packing d'une grille carrée infinie.

Théorème 2.27. [17] Le nombre chromatique de packing d'une grille carrée est au moins 12.

Théorème 2.28. [50] Soit G une grille carrée infinie. On a $\chi_\rho(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 17$.

Concernant la somme tensorielle de deux chaînes infinies, nous déduisons que le nombre chromatique de packing ne dépasse pas 17.

Corollaire 2.29. Pour tout $n, m \geq 1$, on a $\chi_\rho(P_n \times P_m) \leq 17$.

Preuve. Soient P_m et P_n deux chaînes.

Comme la somme tensorielle de deux chaînes $P_m \times P_n$ est composé de deux composantes connexes qu'on note C_1 et C_2 respectivement, nous avons :

$$\chi_\rho(P_m \times P_n) = \max\{\chi_\rho(C_1), \chi_\rho(C_2)\}.$$

D'autre part, puisque chaque composante connexe est un sous-graphe d'une grille carrée, d'après la Proposition 2.2, $\chi_\rho(C_1 \text{ ou } 2) \leq \chi_\rho(P_{m'} \square P_{n'})$, et puisque $\chi_\rho(P_{m'} \square P_{n'}) \leq 17$ (d'après le Théorème 2.28), le résultat s'ensuit. $\square$

Si on prend un graphe G d'ordre n , alors G est sous-graphe de K_n . Donc $G \square \mathbb{Z}$ est un sous-graphe de $K_n \boxtimes \mathbb{Z}$ et par le Théorème 2.24 on obtient le résultat suivant :

Corollaire 2.30. [23] *Pour tout graphe fini G , $\chi_\rho(G \square \mathbb{Z}) < \infty$.*

Par contre, Fiala, Klavžar et Lidický [23] ont montré que le nombre chromatique de packing de la somme cartésienne d'une chaîne par une grille carrée est infini.

Théorème 2.31. [23] *Pour tout $m \geq 2$, on a $\chi_\rho(P_m \square \mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = \infty$.*

Enfin pour une grille hexagonale infinie⁴ qui est un sous-graphe d'une grille carrée, le nombre chromatique de packing d'une grille hexagonale infinie est fini. De plus, en 2007 Brešar, Klavžar et Rall [11] ont montré qu'il est compris entre 6 et 8. Sept ans plus tard, Korže et Vesel [35] ont montré que la valeur exacte du nombre chromatique de packing vaut 7.

Par contre Finbow et Rall [24] ont montré que le nombre chromatique de packing d'une grille triangulaire infinie⁵ est infini.

Théorème 2.32. [35] *Pour une grille hexagonale H , $\chi_\rho(H) = 7$.*

Théorème 2.33. [24] *Pour une grille triangulaire T , $\chi_\rho(T) = \infty$.*

Hypercubes

En 2008, Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont étudié la coloration de packing des hypercubes de dimension n . Pour les petites valeurs de n , ils ont donné des valeurs exactes.

Proposition 2.34. [28] $\chi_\rho(Q_1) = 2$, $\chi_\rho(Q_2) = 3$, $\chi_\rho(Q_3) = 5$, $\chi_\rho(Q_4) = 7$ et $\chi_\rho(Q_5) = 15$.

Pour la valeur asymptotique, ils ont montré qu'elle est d'ordre exponentiel.

Proposition 2.35. [28] $\chi_\rho(Q_n) \sim (\frac{1}{2} - O(\frac{1}{n}))2^n$.

4. Une grille hexagonale, notée H , est défini par l'ensemble de sommets $V(H) = \mathbb{Z}^2$ et l'ensemble d'arêtes $E(H) = \{(u, v)(u', v') \in (\mathbb{Z} \square \mathbb{Z})^2 / (|u - u'| = 1 \text{ et } v = v') \text{ ou } (|v - v'| = 1 \text{ et } u = u' \text{ et } v > v' \text{ et } v \equiv 0[2])\}$.

5. Une grille triangulaire, notée T , est défini par l'ensemble de sommets $V(T) = \mathbb{Z}^2$ et l'ensemble d'arêtes $E(T) = \{(u, v)(u', v') \in (\mathbb{Z} \square \mathbb{Z})^2 / (|u - u'| = 1 \text{ et } v = v') \text{ ou } (|v - v'| = 1 \text{ et } u = u') \text{ ou } (|u - u'| = 1 \text{ et } |v - v'| = 1 \text{ et } v - v' + u - u' = 0)\}$.

Comme ils ont montré que $2 + (\frac{1}{2} - \frac{1}{4n})2^n$ est une borne supérieure du nombre chromatique de packing d'un hypercube Q_n . Cette borne a été améliorée en 2015 par Torres et Valencia-Pabon [52].

Théorème 2.36. [52]

$$\chi_\rho(Q_n) \leq 3 + 2^n \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{\lceil \log_2 n \rceil}} \right) - 2 \left\lfloor \frac{n-4}{2} \right\rfloor, \text{ pour } n \geq 4.$$

Dans le tableau suivant, Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont donné des bornes supérieures et inférieures lorsque $6 \leq n \leq 11$.

n	6	7	8	9	10	11
$\chi_\rho(Q_n) \geq$	15	28	63	132	285	610
$\chi_\rho(Q_n) \leq$	25	49	95	219	441	881

Dans les deux résultats suivants, Torres et Valencia-Pabon [52] ont amélioré ces bornes inférieures et ils ont même trouvé des valeurs exactes pour $6 \leq n \leq 8$.

Théorème 2.37. [52]

- $\chi_\rho(Q_6) = 25$
- $\chi_\rho(Q_7) = 49$
- $\chi_\rho(Q_8) = 95$

Théorème 2.38. [52]

- $\chi_\rho(Q_9) \geq 198$
- $\chi_\rho(Q_{10}) \geq 395$
- $\chi_\rho(Q_{11}) \geq 794$

2.2 Colorations de S -packing

La coloration de S -packing des graphes est une généralisation de la coloration de packing standard présentée précédemment. Cette notion a été d'abord mentionnée brièvement en 2008 par Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28], puis

formellement par Goddard et Xu [30].

Soit $S = (a_1, a_2, \dots)$ une séquence croissante infinie d'entiers positifs, et soit G un graphe. L'application $\pi : V(G) \longrightarrow \{1, \dots, k\}$ est appelée *k-coloration de S-packing de G* (ou aussi *(a₁, a₂, ..., a_k)-coloration de packing de G*) si pour toute paire de sommets $\{u, v\}$, $\pi(u) = \pi(v) = i$ implique $d_G(u, v) > a_i$ (les sommets colorés avec i forment un a_i -packing). Le plus petit entier k tel que G admet une k -coloration de S -packing est appelé le *nombre chromatique de S-packing*, et est noté $\chi_S(G)$.

Notons que ce concept généralise le concept de la coloration propre lorsque $S = (1, 1, \dots)$ et la coloration de packing lorsque $S = (1, 2, 3, \dots)$.

Notons aussi que pour deux séquences $S_a = (a_1, a_2, \dots)$ et $S_b = (b_1, b_2, \dots)$, si pour tout i $b_i \leq a_i$ alors le nombre chromatique de S_b -packing est inférieur ou égal au nombre chromatique de S_a -packing.

Observation 2.39. [30] Soient $S_a = (a_1, a_2, \dots)$ et $S_b = (b_1, b_2, \dots)$ deux séquences et G un graphe. Si $\chi_{S_a}(G) = k$ et $b_i \leq a_i$, pour $i = 1, 2, 3, \dots, k$, alors $\chi_{S_b} \leq k$.

Dans la Proposition 2.2, Goddard, Hedetniemi, Hedetniemi, Harris et Rall [28] ont montré que le nombre chromatique de packing d'un sous-graphe H de G est inférieur ou égal au nombre chromatique de packing de G . Ce résultat est aussi valable sur le nombre chromatique de S -packing pour toute séquence S .

Observation 2.40. [30] Si H est un sous-graphe de G , alors pour toute séquence S , $\chi_S(H) \leq \chi_S(G)$.

Pour tout graphe G d'ordre n , et pour toute séquence S , toute coloration de S -packing nécessite un nombre de couleurs compris entre 1 et n . De plus, ces deux bornes sont atteintes.

Observation 2.41. [30] Soient $S_a = (a_1, a_2, \dots)$ une séquence et G un graphe fini d'ordre n .

1. $1 \leq \chi_S(G) \leq n$.
2. $\chi_S(G) = 1$ si et seulement si G ne contient pas d'arêtes.

3. $\chi_S(G) = n$ si et seulement si G est connexe et $a_1 \geq \text{diam}(G)$.

Dans la proposition suivante Goddard et Xu [30] ont caractérisé les graphes ayant pour nombre chromatique de S -packing 2.

Proposition 2.42. [30] *Soit $S = (a_1, a_2, \dots)$. Pour tout graphe G sans sommets isolés,*

1. *Si $a_1 = a_2 = 1$, alors $\chi_S(G) = 2$ si et seulement si G est biparti.*
2. *Si $a_1 = 1 < a_2$, alors $\chi_S(G) = 2$ si et seulement si G est une étoile.*
3. *Si $a_1 > 1$ alors $\chi_S(G) = 2$ si et seulement si G est le graphe complet à deux sommets K_2 .*

Pour $S = (1, a_2, a_3, \dots)$, similairement à la Proposition 2.3, Goddard et Xu ont montré dans [30] que le nombre de transversalité d'un graphe G plus un est une borne supérieure du nombre chromatique de S -packing du graphe G . De plus cette borne est atteinte lorsque $a_2 \geq \text{diam}(G)$.

Proposition 2.43. [30] *Soient $S = (1, a_2, a_3, \dots)$ et G un graphe G . On a $\chi_S(G) \leq \tau(G) + 1$, avec égalité lorsque $a_2 \geq \text{diam}(G)$.*

Toujours Goddard et Xu [30] ont donné le nombre chromatique de S -packing de quelques graphes de diamètre 2, comme les graphes bipartis complets et les roues.

Proposition 2.44. [30] *Soient $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$ et G un graphe de diamètre deux et d'ordre n . Si le nombre de 1 dans S vaut exactement k , alors $\chi_S(G) = n - \alpha(G, k) + \min(k, \chi(G))$, où $\alpha(G, k)$ est le nombre maximum de sommets de G qu'on peut colorer proprement avec k couleurs.*

De la proposition précédente, on obtient les deux corollaires suivants.

Corollaire 2.45. [30] *Soient $S = (a_1, a_2, \dots)$ et $K_{m,n}$ un graphe complet avec $m \leq n$. On a*

$$\chi_S(K_{m,n}) = \begin{cases} 2 & \text{si } a_1 = a_2 = 1, \\ m+1 & \text{si } a_1 = 1 < a_2, \\ m+n & \text{si } a_1 > 1. \end{cases}$$

Corollaire 2.46. [30] Soient $S = (a_1, a_2, \dots)$ et W_n une roue avec $n \geq 4$. On a

$$\chi_S(W_n) = \begin{cases} 3 & \text{si } a_1 = a_2 = 1 \text{ et } n \text{ est impair,} \\ 4 & \text{si } a_1 = a_2 = 1 \text{ et } n \text{ est pair,} \\ \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + 2 & \text{si } a_1 = 1 < a_2, \\ n & \text{si } a_1 > 1. \end{cases}$$

Comme généralisation des deux corollaires précédents, Goddard et Xu [30] ont donné la valeur exacte du nombre chromatique de S -packing de tout graphe G de diamètre 2, avec $\chi(G) = \frac{n}{\alpha(G)}$.

Proposition 2.47. [30] Soit $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. Si G un graphe de diamètre 2 et d'ordre n et $\chi(G) = \frac{n}{\alpha(G)} = s$, alors

$$\chi_S(G) = \begin{cases} s & \text{si } a_s = 1, \\ n - (\alpha(G) - 1)k & \text{si } a_1 = \dots = a_k = 1 \text{ et } a_{k+1} > 1 \text{ pour un } 1 \leq k < s, \\ n & \text{si } a_1 > 1. \end{cases}$$

A partir de cette proposition, on peut calculer le nombre chromatique de S -packing de la somme cartésienne de deux graphes complets $K_r \square K_s$ pour $r \leq s$.

Récemment Brešar, Klavžar, Rall et Wash [12] ont montré que si un graphe G est $(1, 1, 2, 2)$ -packing colorable, alors le nombre chromatique de packing de la subdivision de ce graphe est inférieur ou égal à 5.

Proposition 2.48. [12] Si G est $(1, 1, 2, 2)$ -packing colorable alors $\chi_\rho(S(G)) \leq 5$.

Ils ont aussi caractérisé les prismes généralisés G qui sont $(1, 1, 2, 2)$ -packing colorables.

Théorème 2.49. [12] Soit G un prisme généralisé d'un cycle. On a G est $(1, 1, 2, 2)$ -packing colorable si et seulement si G n'est pas le graphe de Petersen⁶.

6. Le graphe de Petersen est le graphe illustré dans la Figure 2.4 possédant 10 sommets et 15 arêtes.

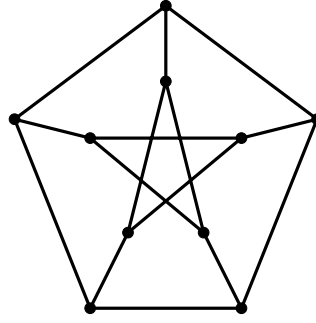


FIGURE 2.4 – Graphe de Petersen

2.2.1 Coloration de S -packing des chaînes

Concernant les chaînes de longueur infinie, on a les trois propositions suivantes :

Proposition 2.50. [30] Soit $S = (a_1, a_2, a_3, \dots)$. On a $\chi_S(P_\infty) = 2$ si et seulement si $a_1 = a_2 = 1$. $\chi_S(P_\infty) = 3$ si et seulement si (a_1, a_2, a_3) est soit $(1, 2, 3)$, soit $(1, 3, 3)$ ou $(2, 2, 2)$.

Goddard et Xu [30] ont montré que si S est une séquence arithmétique alors le nombre chromatique de S -packing est fini.

Proposition 2.51. [30] Soit S une séquence arithmétique. On a $\chi_S(P_\infty)$ est fini.

Pour une séquence arithmétique S , on a une borne inférieure du nombre chromatique de S -packing.

Proposition 2.52. [30] Soit $S = (a, a + d, a + 2d, a + 3d, \dots)$.

$$\chi_S(G) \geq \begin{cases} \frac{(e^d - 1)(a - d + 1)}{d} & \text{si } a \geq d, \\ \frac{d}{(d+1)e^{\frac{d}{1+\frac{1}{a}}} - (a - d + 1)} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Contrairement aux séquences arithmétiques, Goddard et Xu [30] ont montré que le nombre chromatique de S -packing, avec S est une séquence géométrique, de raison $r = 2$ et $a_1 = 1$, est infini.

Proposition 2.53. [30] Soit $S = (1, 2, 4, 8, \dots)$. On a $\chi_S(P_\infty)$ est infini.

Par contre, si $S = (a_1, a_2, \dots)$, avec $a_i = 2^i - 1$, pour $i = 1, \dots, k$ et $a_{k+1} = 2^k - 1$, alors le nombre chromatique de S -packing d'une chaîne infinie est fini.

Proposition 2.54. [30] Soit $S = (a_1, a_2, \dots)$, avec $a_i = 2^i - 1$, pour $i = 1, \dots, k$ et $a_{k+1} = 2^k - 1$. On a $\chi_S(P_\infty) = k + 1$.

Présentons maintenant quelques résultats sur la coloration de S -packing des grilles.

2.2.2 Coloration de S -packing des grilles carrées, hexagonales et triangulaires

Dans la proposition suivante Goddard et Xu [31] ont montré que le nombre chromatique de S -packing d'une grille carrée vaut 2 si et seulement si les deux premiers éléments de la séquence S valent 1. Par contre il n'existe aucune séquence pour laquelle le nombre chromatique de S -packing vaut 3 ou 4.

Proposition 2.55. [31] $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 2$ si et seulement si $a_1 = a_2 = 1$. Il n'existe aucune séquence S avec $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 3$ ou $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 4$.

Les deux propositions suivantes caractérisent les séquences S , pour lesquelles le nombre chromatique de S -packing d'une grille carrée vaut 5 ou 6.

Proposition 2.56. [31] $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 5$ si et seulement si soit

- (i) $a_1 = 1$, $a_2 \geq 2$ et $a_5 \leq 3$, soit
- (ii) $a_1 = a_5 = 2$.

Proposition 2.57. [31] $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 6$ si et seulement si

$$(a_1, \dots, a_6) \in \{(2, 2, 2, 2, 3, 3), (1, 2, 2, 2, 4, 4)\}.$$

Lorsque les a_i sont égaux, Fertin, Godard et Raspaud [21] ont donné le nombre chromatique de S -packing.

Proposition 2.58. [21] Pour un entier k strictement positif, soit $S = (k, k, k, \dots)$. On a

$$\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = \begin{cases} \frac{(k+1)^2}{2} & \text{si } k \text{ est impair,} \\ \frac{k^2+2k+2}{2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

S est une séquence arithmétique de raison supérieure à 1, est une condition suffisante pour que le nombre chromatique de S -packing d'une grille carrée infini soit infini.

Proposition 2.59. [31] *Si S est une séquence arithmétique non constante différente de $(1, 2, 3, \dots)$ alors $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = \infty$.*

Le nombre chromatique de S -packing d'une grille carrée infini est aussi infini si $S = (2, 2, 3, 4, 5, \dots)$. Par contre il est fini et il vaut 7 si $S = (2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, \dots)$.

Proposition 2.60. [31]

(a) *Si $S = (2, 2, 3, 4, 5, \dots)$ alors $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = \infty$.*

(b) *Si $S = (2, 2, 2, 2, 3, 4, 5, \dots)$ alors $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 7$.*

Si S est une séquence arithmétique non constante différente de $(1, 2, 3, \dots)$ alors $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = \infty$.

Pour deux entiers n et d , Gastineau, Kheddouci et Togni ont étudié dans [27], la coloration de S -packing des grilles carrées lorsque $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$.

Ils ont d'abord montré dans la proposition suivante que le nombre chromatique de S -packing est infini pour des valeurs données de n et d . Ensuite dans la proposition d'après ils ont montré qu'il est borné lorsque $d = 2$ et $n \geq 1$, $d = 3$ et $n \geq 3$ ou lorsque $d = 4$ et $n \geq 4$.

Proposition 2.61. [27] *Soit $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$. On a $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = \infty$ pour $(d, n) \in \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6)\}$.*

Proposition 2.62. [27] *Soit $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$. On a $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 20$ si $(d, n) = (2, 2)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 8$ si $(d, n) = (2, 3)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 6$ si $(d, n) = (2, 4)$ et $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 5$ si $d = 2$ et $\forall n \geq 5$.
 $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 33$ si $(d, n) = (3, 3)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 20$ si $(d, n) = (3, 4)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 17$ si $(d, n) = (3, 5)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 14$ si $(d, n) = (3, 6)$ et $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 8$ si $d = 3$ et $\forall n \geq 8$.
 $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 56$ si $(d, n) = (4, 4)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 34$ si $(d, n) = (4, 5)$, $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) \leq 28$ si $(d, n) = (4, 6)$ et $\chi_S(\mathbb{Z} \square \mathbb{Z}) = 13$ si $d = 4$ et $\forall n \geq 13$.*

Dans la section précédente, nous avons vu que Finbow et Rall [24] ont montré que le nombre chromatique de S -packing d'une grille triangulaire infinie est infini lorsque $S = (1, 2, 3, \dots)$.

Similairement aux Propositions 2.61 et 2.62, on a les deux propositions suivantes de Gastineau, Kheddouci et Togni [27] sur les grilles triangulaires.

Proposition 2.63. [27] Soit $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$. On a $\chi_S(T) = \infty$ pour $(d, n) \in \{(1, 1), (3, 2), (4, 3), (5, 4), (7, 5), (8, 6)\}$.

Proposition 2.64. [27] Soit $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$. On a $\chi_S(T) \leq 6$ si $(d, n) = (1, 2)$ et $\chi_S(T) = 3$ si $d = 1$ et $\forall n \geq 3$.
 $\chi_S(T) \leq 16$ si $(d, n) = (2, 4)$, $\chi_S(T) \leq 13$ si $(d, n) = (2, 5)$, $\chi_S(T) \leq 10$ si $(d, n) = (2, 6)$ et $\chi_S(T) = 7$ si $d = 2$ et $\forall n \geq 7$.
 $\chi_S(T) \leq 72$ si $(d, n) = (3, 4)$, $\chi_S(T) \leq 38$ si $(d, n) = (3, 5)$, $\chi_S(T) \leq 26$ si $(d, n) = (3, 6)$ et $\chi_S(T) = 12$ si $d = 3$ et $\forall n \geq 12$.

Dans la proposition suivante Goddard et Xu [31] ont déterminé des séquences minimales S , pour lesquelles le nombre chromatique de S -packing de T est au plus 6.

Proposition 2.65. [31] Soient $k \leq 6$, et T une grille triangulaire.

Les séquences minimales S , pour lesquelles le nombre chromatique de S -packing de T est au plus 6, sont $(1, 1, 1)$, $(1, 1, 2, 2, 2)$ et $(1, 1, 3, 3, 3, 3)$.

En ce qui concerne les grilles hexagonales, on a les résultats suivants de Gastineau, Kheddouci et Togni [27] :

Proposition 2.66. [27] Soit $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$. $\chi_S(H) = \infty$ pour $(d, n) \in \{(2, 1), (5, 2), (8, 3), (11, 4), (13, 5), (16, 6)\}$.

Proposition 2.67. [27] Soit $S = (s_i, i \in \mathbb{N}^*)$, avec $s_i = d + \lfloor \frac{i-1}{n} \rfloor$. $\chi_S(H) \leq 8$ si $(d, n) = (2, 2)$, $\chi_S(H) \leq 5$ si $(d, n) = (2, 3)$ et $\chi_S(H) = 4$ si $d = 2$ et $\forall n \geq 4$.
 $\chi_S(H) \leq 35$ si $(d, n) = (3, 2)$, $\chi_S(H) \leq 13$ si $(d, n) = (3, 3)$, $\chi_S(H) \leq 10$ si $(d, n) = (3, 4)$, $\chi_S(H) \leq 8$ si $(d, n) = (3, 5)$ et $\chi_S(H) = 6$ si $d = 3$ et $\forall n \geq 6$.

$\chi_S(H) \leq 58$ si $(d, n) = (4, 3)$, $\chi_S(H) \leq 27$ si $(d, n) = (4, 4)$, $\chi_S(H) \leq 21$ si $(d, n) = (4, 5)$, $\chi_S(H) \leq 18$ si $(d, n) = (4, 6)$ et [32] $\chi_S(T) = 11$ si $d = 4$ et $\forall n \geq 11$.

Un résultat similaire à la Proposition 2.65 sur les grilles hexagonales avec $k \leq 5$ est donné comme suit.

Proposition 2.68. [31] *Soient $k \leq 5$, et H une grille hexagonale.*

Les séquences minimales S , pour lesquelles le nombre chromatique de S -packing de H est au plus 6, sont $(1, 1)$, $(2, 2, 2, 2)$, $(1, 3, 3, 3)$ et $(2, 2, 2, 3, 3)$.

Jacko et Jendrol [32] ont étudié la coloration de S -packing tel que S contient des éléments égaux, on a le résultat suivant :

Proposition 2.69. [32] *Soient H une grille hexagonale et $S = (k, k, k, \dots)$, pour un entier strictement positif k . On a*

- (a) $\chi_S(H) = \lceil \frac{3}{8}(k+1)^2 \rceil$ si k est impair,
- (b) $\chi_S(H) = 4$ si $k = 2$, $\chi_S(H) = 11$ si $k = 4$ et $\chi_S(H) = 20$ si $k = 6$,
- (c) $\frac{3}{8}k^2 + \frac{3}{4}k + 2 \leq \chi_S(H) \leq \lceil \frac{3}{8}(k + \frac{4}{3})^2 \rceil$ si $k \geq 8$ et k est pair.

2.2.3 Coloration de S -packing des graphes subcubiques

En 2016, Gastineau et Togni dans [26] ont étudié la coloration de S -packing des graphes cubiques. D'abord ils ont donné le résultat suivant, sur la coloration de S -packing de la subdivision d'un graphe G .

Proposition 2.70. [26] *Soient G un graphe et $S = (a_1, \dots, a_k)$. Si G est S -packing colorable alors $S(G)$ est $(1, 2a_1 + 1, \dots, 2a_k + 1)$ -packing colorable.*

Pour une séquence $S = (1, k, \dots, k)$ avec $k \in \{2, 3\}$, on a les résultats suivants.

Corollaire 2.71. [26] *Soit G un graphe subcubique. On a $S(G)$ est $(1, 3, 3, 3)$ -packing colorable.*

Comme tout graphe subcubique G différent de K_4 est 3-colorable (c'est-à-dire, $(1, 1, 1)$ -packing colorable), on a, d'après la Proposition 2.70, $S(G)$ est $(1, 3, 3, 3)$ -packing colorable, et on peut vérifier que $S(K_4)$ est aussi $(1, 3, 3, 3)$ -packing colorable.

Proposition 2.72. [26] *Pour tout graphe G avec $\delta(G) \geq 3$, si $S(G)$ est $(1, 2, 2)$ -packing colorable, alors G est biparti.*

Puisque tout graphe biparti G est $(1, 1)$ -packing colorable, par la Proposition 2.70, $S(G)$ est $(1, 3, 3)$ -packing colorable (il est aussi $(1, 2, 2)$ -packing colorable et $(1, 2, 3)$ -packing colorable). Donc, on obtient le corollaire suivant.

Corollaire 2.73. [26] *Soit G un graphe avec $\delta(G) \geq 3$. On a*
 $S(G)$ est $(1, 2, 2)$ -packing colorable $\Leftrightarrow S(G)$ est $(1, 2, 3)$ -packing colorable $\Leftrightarrow S(G)$ est $(1, 3, 3)$ -packing colorable $\Leftrightarrow G$ est biparti.

Théorème 2.74. [26] *Tout graphe subcubique est $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -packing colorable.*

En utilisant l'ordinateur, Gastineau et Togni [26] ont montré que le graphe de Petersen est l'unique graphe cubique qui n'admet pas une coloration de $(1, 2, 2, 2, 2, 2)$ -packing. Par contre, ils ont montré qu'il admet une coloration de $(1, 1, k, k')$ -packing, pour tout $k, k' \geq 2$. Comme ils ont montré qu'il existe un graphe cubique biparti qui n'admet pas une coloration de $(1, 1, 3, 3, 3)$ -packing.

Toujours Gastineau et Togni [26] ont montré que tout graphe 3-irrégulier⁷ subcubique est $(1, 2, 2, 2)$ -packing colorable.

Théorème 2.75. [26] *Tout graphe subcubique 3-irrégulier est $(1, 2, 2, 2)$ -packing colorable.*

Gastineau a montré dans [25] que le problème de déterminer si un graphe cubique (ou subcubique) est $(1, 2, 2)$ -packing colorable ou $(1, 1, 2)$ -packing colorable, est NP -complet.

Par contre, similairement aux Théorèmes 2.74 et 2.76, Gastineau et Togni [26] ont montré que tout graphe subcubique est $(1, 1, 2, 2, 2)$ -packing colorable.

Théorème 2.76. [26] *Tout graphe subcubique 3-irrégulier est $(1, 1, 2, 2, 2)$ -packing colorable.*

7. Un graphe d -irrégulier est un graphe qui ne contient pas deux sommets voisins de degré d .

Chapitre 3

Couronnes et échelles

Dans ce chapitre, nous présentons dans un premier temps l'étude complète de la coloration de packing des couronnes et des couronnes généralisées des chaînes et des cycles, où nous donnons des valeurs exactes. Ces résultats ont été publiés dans la revue "*Discussiones Mathematicae Graph Theory*" [39].

Dans un second temps, nous traitons la coloration de packing de quelques familles d'échelles, il s'agit des échelles circulaires, des H -graphes et des H -graphes généralisés. Ces travaux ont fait l'objet d'une communication internationale au "*Bordeaux Graph Workshop*" [40].

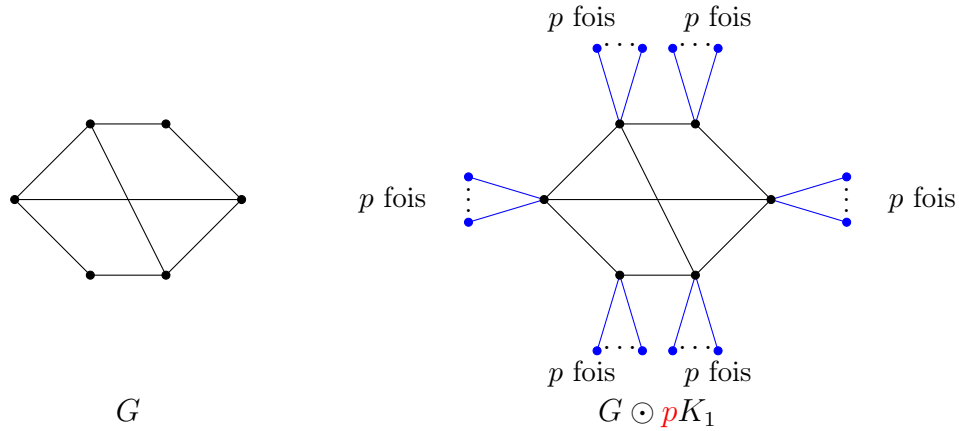
Dans les deux parties, nous améliorons et nous complétons des résultats de [54, 55] sur la coloration de packing de la couronne d'une chaîne et d'un cycle, des échelles circulaires et des H -graphes.

3.1 Couronnes et couronnes généralisées des chaînes

Définition 3.1. La *couronne* $G \odot K_1$ d'un graphe G est le graphe obtenu à partir d'une copie de G en attachant un sommet pendant à chaque sommet de G .

Plus généralement, pour un entier donné $p \geq 1$, la *couronne généralisée* $G \odot pK_1$ d'un graphe G est le graphe obtenu à partir d'une copie de G en attachant p voisins pendants à chaque sommet de G (Voir Figure 3.1).

Puisque toute couronne généralisée d'une chaîne est une chenille, on obtient

FIGURE 3.1 – Un graphe G avec sa couronne généralisée $G \odot pK_1$

du Théorème 2.17, pour tout entier $p \geq 1$, $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \leq 6$ si $n \leq 34$ et $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \leq 7$ sinon.

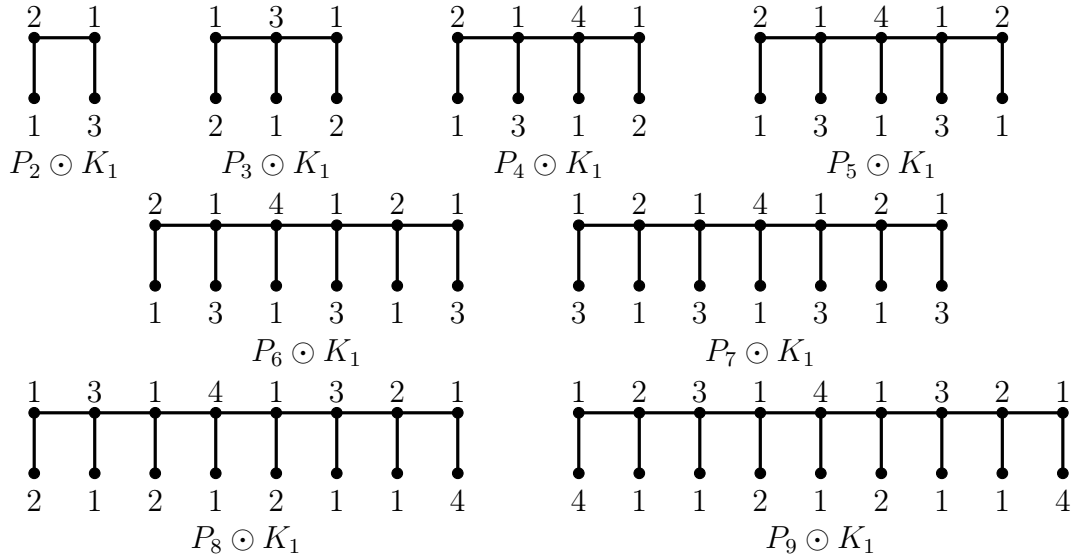
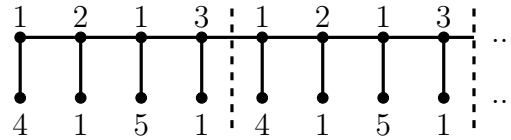
Commençons par étudier les couronnes des chaînes. Notons que la couronne $P_n \odot K_1$ est aussi une chenille de longueur n .

Théorème 3.2. *Soit $P_n \odot K_1$ la couronne de la chaîne P_n . On a*

$$\chi_\rho(P_n \odot K_1) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1, \\ 3 & \text{si } n \in \{2, 3\}, \\ 4 & \text{si } 4 \leq n \leq 9, \\ 5 & \text{si } n \geq 10. \end{cases}$$

Preuve.

Comme $P_1 \odot K_1$ est la chaîne P_2 , $\chi_\rho(P_1 \odot K_1) = \chi_\rho(P_2) = 2$. La Figure 3.2 représente des colorations de packing optimales de $P_n \odot K_1$ lorsque $2 \leq n \leq 9$. Puisque $P_2 \odot K_1 = P_4$, on a $\chi_\rho(P_2 \odot K_1) = 3$ par la Proposition 2.6. $P_2 \odot K_1$ est un sous-graphe de $P_3 \odot K_1$, donc $\chi_\rho(P_3 \odot K_1) \geq \chi_\rho(P_2 \odot K_1) = 3$, la 3-coloration de packing de $P_3 \odot K_1$ représentée dans la Figure 3.2 est optimale, de plus, elle est unique (évidemment on peut prendre aussi la même coloration, en échangeant les couleurs 2 et 3). Par conséquent, si $P_4 \odot K_1$ admet une 3-coloration de packing, alors

FIGURE 3.2 – Des colorations de packing optimales de $P_n \odot K_1$, $2 \leq n \leq 9$ FIGURE 3.3 – Coloration de packing périodique de $P_n \odot K_1$, $n \geq 10$

la 3-coloration de packing de $P_3 \odot K_1$ apparaîtrait sur la droite ou sur la gauche de $P_4 \odot K_1$. Mais dans ce cas, le quatrième sommet de la chaîne centrale de $P_4 \odot K_1$ ne peut pas être coloré. Par suite $\chi_\rho(P_4 \odot K_1) = 4$. Finalement, comme $P_2 \odot K_1$ est un sous-graphe de $P_3 \odot K_1$ et $P_4 \odot K_1$ est un sous-graphe de $P_n \odot K_1$, pour tout n , $5 \leq n \leq 9$, toutes les colorations de packing données par la Figure 3.2 sont optimales par la Proposition 2.2.

Considérons maintenant $P_n \odot K_1$ avec $n \geq 10$. Soient $u_1 u_2 \dots u_n$ la chaîne centrale de $P_n \odot K_1$ et v_i le sommet pendant adjacent au sommet u_i , pour tout i , $1 \leq i \leq n$.

Soit π la 5-coloration de packing qui est 4-périodique de $P_n \odot K_1$ définit comme suit (voir Figure 3.3) :

$$\pi(u_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 1[2]; \\ 2 & \text{si } i \equiv 2[4]; \\ 3 & \text{si } i \equiv 0[4]. \end{cases}$$

$$\pi(v_i) = \begin{cases} 1 & \text{si } i \equiv 0[2]; \\ 4 & \text{si } i \equiv 1[4]; \\ 5 & \text{si } i \equiv 3[4]. \end{cases}$$

On voit bien que π est une 5-coloration de packing de $P_n \odot K_1$, donc $\chi_\rho(P_n \odot K_1) \leq 5$ pour tout $n \geq 10$.

Pour finir la preuve, grâce à la Proposition 2.2, il suffit de prouver que $\chi_\rho(P_{10} \odot K_1) \geq 5$. Pour cela, raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'on peut colorer $P_{10} \odot K_1$ seulement avec 4 couleurs, on a quatre cas à considérer :

Cas 1) $\pi(u_4) = 1$: et donc le sommet u_5 peut prendre soit la couleur 2 soit 3 ou 4.

Cas 1.1) Si $\pi(u_5) = 2$ alors les deux autres voisins de u_4 doivent prendre les couleurs 3 et 4 ($\{\pi(u_3), \pi(v_4)\} = \{3, 4\}$), donc $\pi(u_6) = 1$ et $\pi(v_6) = 3$, mais le sommet u_7 ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 4\}$.

Cas 1.2) Si $\pi(u_5) = 3$ alors soit $\pi(u_6) = 1$, par conséquent l'un des deux voisins de u_6 prend la couleur 2 et l'autre ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_6) = 2$, par conséquent $\pi(u_7) = 1$ et par suite l'un des deux voisins de u_7 prend la couleur 4 et l'autre ne peut prendre aucune couleur.

Cas 1.3) Si $\pi(u_5) = 4$ alors $\pi(u_6) \in \{1, 2\}$. Si $\pi(u_6) = 1$ alors soit $\pi(u_7) = 3$ et $\pi(v_6) = 2$, par conséquent $\pi(u_8) = 2$ ($\pi(u_8) \neq 1$ car sinon les deux voisins de u_8 ne peuvent pas être colorés), par suite $\pi(u_9) = 1$ et $\pi(u_{10}) = \pi(v_9) = 4$ ce qui est impossible. Soit $\pi(u_7) = 2$ et $\pi(v_6) = 3$, par conséquent $\pi(u_8) = 1$ et par suite l'un des deux voisins de u_8 prend la couleur 4 et l'autre ne peut pas être coloré. Si $\pi(u_6) = 2$ alors soit $\pi(u_7) = 1$ et par conséquent $\pi(v_7) = 3$, mais $\pi(u_8)$ ne peut prendre aucune valeur dans $\{1, \dots, 4\}$. Soit $\pi(u_7) = 3$, par conséquent $\pi(u_8) = 1$ et par suite $\pi(v_8) = 1$, mais le sommet u_9 ne peut prendre aucune couleur.

Cas 2) $\pi(u_4) = 2$: et donc le sommet u_5 peut prendre soit la couleur 1 soit 3 ou 4.

Cas 2.1) Si $\pi(u_5) = 1$ alors $\{\pi(u_6), \pi(v_5)\} = \{3, 4\}$, donc $\pi(u_3) = 1$ et $\pi(v_3) = 3$, mais le sommet u_2 ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 4\}$.

Cas 2.2) Si $\pi(u_5) = 3$ alors soit $\pi(u_6) = 1$, par conséquent $\{\pi(u_7), \pi(v_6)\} = \{2, 4\}$ et par suite $\pi(u_3) = 1$ et $\pi(v_3) = 4$, mais $\pi(u_2)$ ne peut prendre aucune valeur. Soit $\pi(u_6) = 4$ et par conséquent $\pi(u_3) = 1$, mais le sommet v_3 ne peut prendre aucune couleur.

Cas 2.3) Si $\pi(u_5) = 4$ alors soit $\pi(u_6) = 1$, par conséquent $\{\pi(u_7), \pi(v_6)\} = \{2, 3\}$ et par suite $\pi(u_3) \in \{1, 3\}$, dans le cas où $\pi(u_3) = 1$ alors $\pi(v_3) = 3$, mais $\pi(u_2)$ ne peut prendre aucune valeur et dans le cas où $\pi(u_3) = 3$ alors $\pi(u_2) = 1$ et par conséquent l'un des deux voisins de u_2 prend la couleur 2 et l'autre ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_6) = 3$ et par conséquent $\pi(u_3) = 1$ et $\pi(v_3) = 2$, mais $\pi(u_2)$ ne peut prendre aucune valeur parmi $\{1, \dots, 4\}$.

Cas 3) $\pi(u_4) = 3$: et donc le sommet u_5 peut prendre soit la couleur 1 soit 2 ou 4.

Cas 3.1) Si $\pi(u_5) = 1$ alors les deux autres voisins de u_4 doivent prendre les couleurs 2 et 4 ($\{\pi(u_6), \pi(v_5)\} = \{2, 4\}$), donc $\pi(u_3) = 1$ ($\pi(u_3) \neq 2$ car sinon le sommet u_2 ne peut pas être coloré) et $\pi(v_3) = 3$, mais le sommet u_2 ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 4\}$.

Cas 3.2) Si $\pi(u_5) = 2$ alors soit $\pi(u_6) = 1$ et par conséquent l'un des deux voisins de u_6 prend la couleur 4 et l'autre ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_6) = 4$, par conséquent $\pi(u_3) = 1$ et par suite l'un des deux voisins de u_3 prend la couleur 2 et l'autre ne peut prendre aucune couleur.

Cas 3.3) Si $\pi(u_5) = 4$ alors soit $\pi(u_6) = 1$ et donc $\pi(v_6) = 2$, mais le sommet u_7 ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_6) = 2$ et par conséquent $\pi(u_7) = 1$ et $\pi(v_7) = 3$, mais $\pi(u_8)$ ne peut prendre aucune valeur.

Cas 4) $\pi(u_4) = 4$: et donc le sommet u_5 peut prendre soit la couleur 1 soit 2 ou 3.

Cas 4.1) Si $\pi(u_5) = 1$ alors $\{\pi(u_6), \pi(v_6)\} = \{2, 3\}$. Si $\pi(u_6) = 2$ et $\pi(v_5) = 3$ alors $\pi(u_7) = 1$, mais le sommet v_7 ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 4\}$. Si $\pi(u_6) = 3$ et $\pi(v_5) = 2$ alors soit $\pi(u_7) = 1$ et par suite l'un des deux voisins de u_7 prend la couleur 2 et l'autre ne peut prendre aucune couleur. Soit $\pi(u_7) = 2$ et par conséquent $\pi(u_8) = 1$, $\pi(v_8) = 4$, mais $\pi(u_9)$ ne peut prendre aucune valeur parmi $\{1, \dots, 4\}$.

Cas 4.2) Si $\pi(u_5) = 2$ alors soit $\pi(u_6) = 1$ et par conséquent l'un des deux voisins de u_6 prend la couleur 3 et l'autre ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_6) = 3$ et par conséquent $\pi(u_7) = 1$ et par suite l'un des deux voisins de u_7 prend la couleur 2 et l'autre ne peut prendre aucune couleur.

Cas 4.3) Si $\pi(u_5) = 3$ alors soit $\pi(u_6) = 1$ et donc $\pi(v_6) = 2$, mais le sommet u_7 ne peut pas être coloré, soit $\pi(u_6) = 2$ et par conséquent $\pi(u_7) = 1$, mais $\pi(v_7)$ ne peut prendre aucune valeur.

Ce qui complète la preuve. □

On sait par le Théorème 2.17, que pour tout entier $p \geq 1$, $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \leq 6$ si $n \leq 34$ et $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \leq 7$ sinon.

Considérons maintenant les couronnes généralisées des chaînes. La proposition suivante est très utile :

Proposition 3.3. *Soient $P_n = u_1 \dots u_n$, $n \geq 2$, une chaîne et $P_n \odot pK_1$, $p \geq 1$, une couronne généralisée de la chaîne P_n .*

Toute coloration de packing π de $P_n \odot pK_1$, avec $\pi(u_i) = 1$ pour un sommet u_i , doit utiliser au moins $p + 3$ couleurs si $2 \leq i \leq n - 1$, et au moins $p + 2$ couleurs si $i \in \{1, n\}$.

Preuve. Pour confirmer ce résultat, simplement il suffit de supposer que $\pi(u_i) = 1$ alors deux voisins quelconques de u_i doivent avoir deux couleurs différentes, puisqu'ils sont à distance deux l'un de l'autre. Par ailleurs, ils ne peuvent pas avoir la couleur 1 car ces deux voisins sont adjacents au sommet u_i qui a déjà la couleur 1).

Puisque le degré de u_i est $p + 2$ si $2 \leq i \leq n - 1$, ou $p + 1$ si $i \in \{1, n\}$, le résultat en découle. □

Comme pour les chaînes et les cycles, pour présenter les colorations de packing des couronnes généralisées des chaînes, nous allons utiliser les notations suivantes tout au long de cette thèse. Observons d'abord qu'à chaque fois qu'un sommet de la

chaîne centrale est coloré avec une couleur différente de 1, tous ses sommets pendants peuvent prendre la couleur 1. En effet, il est nécessaire de donner les couleurs des sommets pendants seulement lorsque leur voisin support est coloré avec la couleur 1. Dans ce cas, ces couleurs seront donnés entre parenthèses juste après la couleur 1.

Une telle séquence de couleurs est appelé *motif*, peut ainsi décrire une coloration de packing d'une couronne (généralisée) d'une chaîne donnée. Par exemple, les colorations de packing de $P_4 \odot K_1$ et $P_5 \odot K_1$ qui sont représentées dans la Figure 3.2, sont notées 21(3)41(2) et 21(3)41(3)2, respectivement. Pour les motifs qui sont périodiques, on mettra la période entre crochets pour dire que cette coloration peut se répéter infiniment, ou aussi ce sont des motifs circulaires. Par exemple, la coloration de packing qui est représentée dans la Figure 3.3 est notée $[1(4)21(5)3]$.

Soient u et v deux motifs, sachant que $[u]$ est circulaire. On dit que le motif v est *compatible avec* $[u]$ si $[uv]$ est un motif circulaire.

Le nombre chromatique de packing de la couronne généralisée d'une chaîne $P_n \odot pK_1$, avec $p \geq 4$, est donné par le théorème suivant :

Théorème 3.4. *Soient $P_n \odot pK_1$, $p \geq 4$, une couronne généralisée de la chaîne P_n . On a*

$$\chi_\rho(P_n \odot pK_1) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1, \\ 3 & \text{si } n = 2, \\ 4 & \text{si } n \in \{3, 4\}, \\ 5 & \text{si } 5 \leq n \leq 8, \\ 6 & \text{si } 9 \leq n \leq 34, \\ 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Si $n \leq 8$, les colorations de packing optimales de $P_n \odot pK_1$ sont données par les motifs 2, 23, 234, 2342, 23425, 234253, 2342532 et 23425324, respectivement.

Notons que 23425324 est le plus long motif avec 5 couleurs et qui n'utilise pas la couleur 1, de plus, aucun des motifs 123425324 ou 234253241 ne peut être utilisé pour colorer $P_9 \odot 4K_1$ (car il est impossible de colorer les voisins pendants des sommets

colorés avec la couleur 1). Donc, $\chi_\rho(P_9 \odot pK_1) \geq 6$. Dans [48], Sloper a donné le motif suivant de longueur 34, qui utilise les couleurs de 2 à 6 :

$$23425 \ 62342 \ 53264 \ 23524 \ 62352 \ 43265 \ 2342.$$

Donc $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) \leq 6$, pour $9 \leq n \leq 34$, et par conséquent $\chi_\rho(P_n \odot pK_1) = 6$, pour $9 \leq n \leq 34$.

Sloper [48] a prouvé que le motif précédent est le plus grand motif qu'il peut exister, et il ne peut pas être étendu en ajoutant la couleur 1 sur la droite ou sur la gauche. Donc $\chi_\rho(P_{35} \odot pK_1) \geq 7$, Sloper [48] a donné aussi ce motif circulaire

$$[23425 \ 62342 \ 57],$$

de longueur 12, qui utilise les couleurs de 2 à 7, et qu'on peut l'utiliser lorsque $n \geq 35$. Par la Proposition 2.2, toutes ces colorations sont optimales.

□

La valeur exacte du nombre chromatique de packing des couronnes généralisées des chaînes $P_n \odot pK_1$, lorsque $p \in \{2, 3\}$, est donnée par les deux théorèmes suivants. On verra que la valeur maximum du nombre chromatique de packing de ces graphes est 6, qui est meilleure que la borne donnée dans le Théorème 3.4. Cela est dû au fait que le nombre de sommets pendants est maintenant borné par 2 ou 3, ce qui nous permet d'utiliser la couleur 1 pour colorer les sommets de la chaîne centrale P_n .

Théorème 3.5. *Soit $P_n \odot 2K_1$ une couronne généralisée de la chaîne P_n . On a*

$$\chi_\rho(P_n \odot 2K_1) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1, \\ 3 & \text{si } n = 2, \\ 4 & \text{si } n \in \{3, 4\}, \\ 5 & \text{si } 5 \leq n \leq 11, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Pour montrer que $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1) \leq 6$ pour tout n , il suffit de considérer le motif circulaire de longueur 12 suivant :

$$[1(36)2432 \ 56234 \ 25].$$

Comme $P_m \odot pK_1$ est un sous-graphe de $P_n \odot pK_1$, pour tout $m \leq n$, toute ℓ -coloration de packing de $P_n \odot pK_1$ induit une ℓ -coloration de packing de $P_m \odot pK_1$. Par conséquent, il suffit de construire des colorations de packing optimales de $P_1 \odot 2K_1$, $P_2 \odot 2K_1$, $P_4 \odot 2K_1$ et $P_{11} \odot 2K_1$, pour montrer que les valeurs du théorème sont des bornes supérieures. On peut avoir ces colorations, en considérant les motifs 2, 23, 2342 et 1(35)243251(23)4231(25), respectivement.

Pour finir la preuve, nous avons besoin de montrer que toutes ces bornes sont serrées. De la Proposition 3.3, on obtient directement le résultat pour $n = 1$. Pour $2 \leq n \leq 4$, puisque la Proposition 3.3 implique qu'on ne peut pas utiliser la couleur 1 sur un sommet de la chaîne centrale, alors il n'existe aucune coloration de packing qui utilise moins de couleurs que celle indiquée dans le théorème.

Pour $n = 5$, la Proposition 3.3 implique aussi que la couleur 1 ne peut pas être utilisée pour colorer les sommets de la chaîne P_5 en utilisant seulement 4 couleurs. Puisque la plus longue chaîne qu'on peut la colorer avec 4 couleurs (sans utiliser la couleur 1) est P_4 (2342), il n'est pas possible de colorer P_5 avec 4 couleurs.

Finalement, il nous reste à montrer qu'il n'existe aucune 5-coloration de packing pour $P_{12} \odot 2K_1$, ce résultat peut être obtenu en utilisant une très longue analyse de cas (une analyse similaire que celle de la preuve du Théorème 3.2), comme on peut l'obtenir en utilisant l'ordinateur. Nous l'avons prouvé en programmant un algorithme qui utilise l'exploration en profondeur pour avoir une coloration de packing en fixant le nombre de couleurs k . L'algorithme s'arrête si une coloration de packing est trouvée avec k couleurs. Si ce n'est pas le cas, il continue à explorer toutes les colorations possibles pour montrer que le nombre de couleurs k est insuffisant. Donc pour montrer qu'il est impossible de colorer $P_{12} \odot 2K_1$ avec seulement 5 couleurs, il suffit de poser $k = 5$, ce qui signifie que $\chi_\rho(P_{12} \odot 2K_1) \geq 6$.

Puisque $P_{12} \odot 2K_1$ est un sous-graphe de $P_n \odot 2K_1$, pour $n \geq 13$, alors $\chi_\rho(P_n \odot 2K_1) \geq 6$, pour tout $n \geq 12$. Ce qui complète la preuve.

□

Théorème 3.6. *Soit $P_n \odot 3K_1$ une couronne généralisée de la chaîne P_n . On a*

$$\chi_\rho(P_n \odot 3K_1) = \begin{cases} 2 & \text{si } n = 1, \\ 3 & \text{si } n = 2, \\ 4 & \text{si } n \in \{3, 4\}, \\ 5 & \text{si } 5 \leq n \leq 8, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Pour montrer que $\chi_\rho(P_n \odot 3K_1) \leq 6$ pour tout n , nous considérons le motif circulaire de longueur 14 suivant :

$$[1(234)5234 \ 26325 \ 4326].$$

Donc, il suffit de construire des colorations de packing optimales de $P_1 \odot 3K_1$, $P_2 \odot 3K_1$, $P_4 \odot 3K_1$ et $P_8 \odot 2K_1$, pour montrer que les valeurs du théorème sont des bornes supérieures. On peut avoir ces colorations, en considérant les motifs 2, 23, 2342 et 23425324, respectivement.

Pour finir la preuve, on doit montrer que ces bornes sont serrées. De la Proposition 3.3, on obtient directement le résultat pour $n = 1$. Pour $n \in \{2, 3, 5, 9\}$, puisque la Proposition 3.3 implique qu'on ne peut pas utiliser la couleur 1 sur un sommet de la chaîne centrale, alors il suffit d'observer que les motifs ci-dessus sont les plus longs. D'où le résultat.

□

Nous étudions maintenant la coloration de packing des couronnes et des couronnes généralisées des cycles.

3.2 Couronnes et couronnes généralisées des cycles

Dans [54], William, Roy et Rajasingh ont prouvé que $\chi_\rho(C_n \odot K_1) \leq 5$, pour tout entier pair $n \geq 6$. Nous complétons ce résultat comme suit :

Théorème 3.7. *Soit $C_n \odot K_1$ une couronne du cycle C_n . On a*

$$\chi_\rho(C_n \odot K_1) = \begin{cases} 4 & \text{si } n \in \{3, 4\}, \\ 5 & \text{si } n \geq 5. \end{cases}$$

Preuve. Les 4-colorations de packing de $C_3 \odot K_1$ et $C_4 \odot K_1$ sont représentées dans la Figure 3.4. Nous prétendons en effet que ces deux couronnes n'admettent pas une 3-coloration de packing, car si de telles colorations existaient alors forcément la couleur 1 doit être utilisée sur le cycle et ses deux voisins sur le cycle doivent prendre les couleurs 2 et 3, mais il ne sera pas possible de colorer le voisin pendant du sommet coloré avec 1.

Considérons maintenant $C_n \odot K_1$ avec $n \geq 5$. Des 5-colorations de packing de $C_n \odot K_1$, avec $n \geq 5$, sont représentées dans la Figure 3.4. Pour $n \geq 8$, on a des colorations de packing périodiques (le motif de longueur 4 qui est sur la droite peut se répéter) et qui sont en fonction du reste de la division euclidienne de n par le nombre 4. Donc pour $n \geq 5$, on a $\chi_\rho(C_n \odot K_1) \leq 5$.

Il reste à prouver que $\chi_\rho(C_n \odot K_1) \geq 5$, pour tout $n \geq 5$.

Supposons qu'il existe une 4-coloration de packing de $C_n \odot K_1$, pour $n \geq 5$. Puisque le nombre de couleur est inférieur à la longueur du cycle ($4 < n$), alors en considérant que cette coloration est périodique, nous obtenons une 4-coloration de packing de $C_n \odot K_1$ pour $n \geq 10$ et donc une 4-coloration de packing de $P_n \odot K_1$. Contradiction avec le Théorème 3.6. D'où l'inégalité $\chi_\rho(C_n \odot K_1) \leq 5$, pour tout $n \geq 5$.

□

Passons maintenant à la couronne généralisée des cycles $C_n \odot pK_1$. Similairement à la Proposition 3.3, nous avons le résultat suivant :

Proposition 3.8. *Si $C_n \odot pK_1$, $p \geq 1$ et $n \geq 3$, est une couronne généralisée du cycle $C_n = u_1 \dots u_n$, alors toute coloration de packing π de $C_n \odot pK_1$, avec $\pi(u_i) = 1$ pour un sommet u_i , doit utiliser au moins $p + 3$ couleurs.*

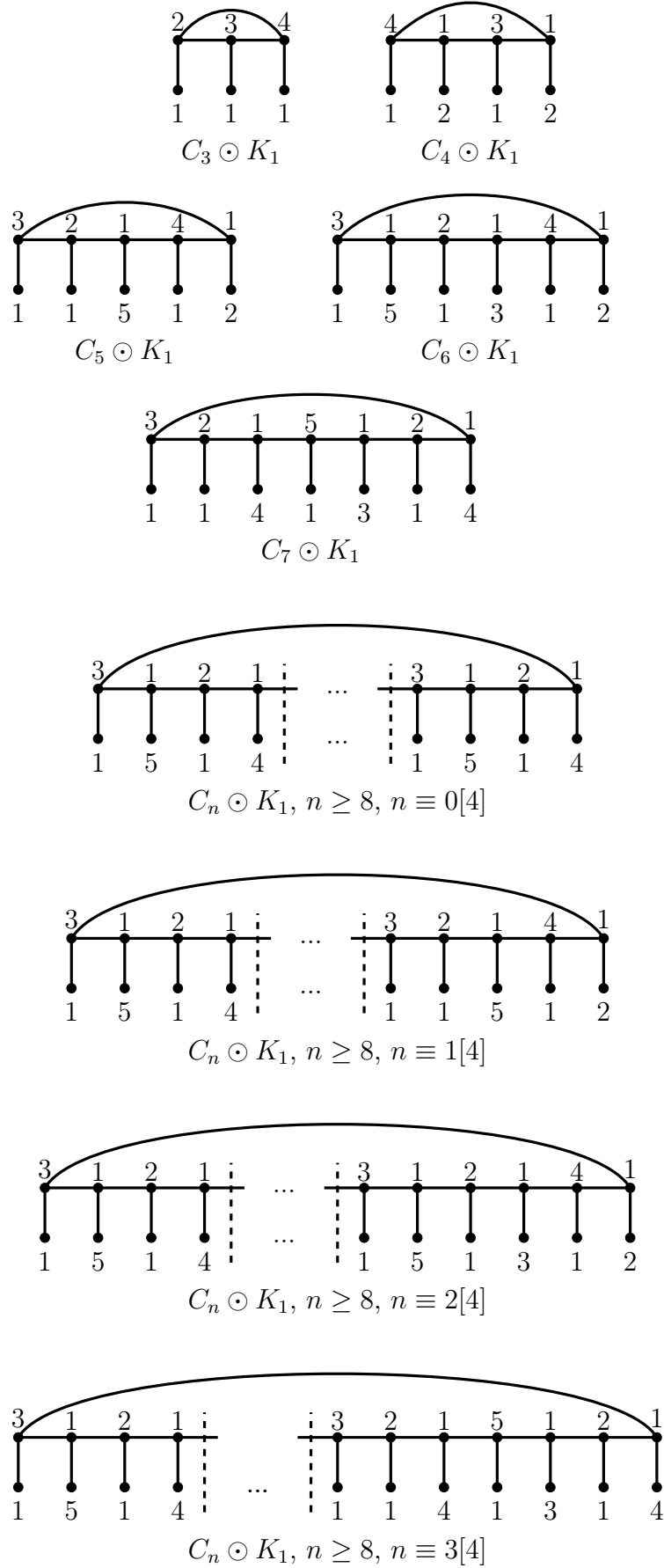


FIGURE 3.4 – Des colorations de packing optimales de $C_n \odot K_1$

Preuve. Si $\pi(u_i) = 1$, alors deux voisins quelconques de u_i doivent avoir deux couleurs différentes, puisqu'ils sont à distance deux l'un de l'autre. Par ailleurs, ils ne peuvent pas avoir la couleur 1 car ces deux voisins sont adjacents au sommet u_i qui a déjà la couleur 1. Puisque le degré de u_i est $p+2$ alors le résultat en découle. $\square$

Lorsque $p \geq 4$, nous avons le théorème suivant (on a un cas particulier lorsque $n = 11$) :

Théorème 3.9. *Soit $C_n \odot pK_1$, $p \geq 4$, une couronne généralisée du cycle C_n . On a*

$$\chi_\rho(C_n \odot pK_1) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 3, \\ 5 & \text{si } n = 4, \\ 6 & \text{si } n \in \{5, 6\}, \\ 8 & \text{si } n = 11, \\ 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Notons d'abord que par la Proposition 3.8, lorsque $p \geq 4$, la couleur 1 ne peut pas être utilisée pour colorer les sommets du cycle central C_n dans toute coloration de packing de $C_n \odot pK_1$ utilisant au plus 6 couleurs.

Les Colorations de packing de $C_n \odot pK_1$, pour $3 \leq n \leq 6$, sont données par les motifs circulaires suivants :

$$[234] \quad [2345] \quad [23456] \quad [234256].$$

Pour montrer que ces colorations sont optimales, nous raisonnons par l'absurde.

Commençons par montrer que $\chi_\rho(C_3 \odot pK_1) \geq 4$. Pour cela, supposons qu'on peut colorer $C_3 \odot pK_1$ seulement avec 3 couleurs. D'après la Proposition 3.8, il n'est pas possible d'utiliser la couleur 1 sur un sommet support, donc il ne reste que les couleurs 2 et 3 pour colorer les trois sommets supports de C_3 , ce qui est impossible.

De même, pour montrer que $\chi_\rho(C_4 \odot pK_1) \geq 5$, supposons qu'il est possible de colorer $C_4 \odot pK_1$ seulement avec 4 couleurs, d'après la Proposition 3.8, on doit colorer le cycle de longueur 4 avec les couleurs 2, 3 et 4, ce qui est impossible.

Enfin, si on suppose qu'on peut colorer le graphe $C_5 \odot pK_1$ (respectivement $C_6 \odot pK_1$) avec 5 couleurs alors, on peut utiliser au plus une fois chacune des couleurs 2, ..., 5 (respectivement au plus deux fois la couleur 2 et une fois chacune des couleurs 3, 4 et 5), au total, on peut colorer 4 sommets (respectivement 5 sommets), mais il nous reste un sommet non coloré. Contradiction.

D'un autre côté, la 8-coloration de packing de $C_{11} \odot pK_1$ est donnée par le motif circulaire suivant :

$$[23425324678].$$

Montrons qu'il n'est pas possible de colorer $C_{11} \odot pK_1$ avec seulement 7 couleurs. Si la couleur 1 n'est pas utilisée dans le cycle central alors, à cause de la longueur du cycle, la couleur 2 peut être utilisée au plus trois fois, les couleurs 3 et 4 au plus deux fois chacune, et les couleurs 5, 6 et 7 au plus une fois chacune. Par conséquent, au plus dix sommets du cycle peuvent être colorés. Donc sept couleurs ne sont pas suffisantes pour colorer $C_{11} \odot pK_1$.

Maintenant, si la couleur 1 est utilisée dans le cycle, alors les sommets pendants adjacents à ce sommet doivent être colorés avec 2, 3, 4 et 5 (car sinon, on ne peut pas colorer les autres sommets du graphe), et donc la coloration de packing ne peut pas être étendue, car l'utilisation de la couleur 1 nous force à obtenir le motif ...43271(2345)6234.... Il est clair que ce motif ne peut pas être étendu pour obtenir une 7-coloration de packing de $C_{11} \odot pK_1$ (la plus courte extension est de longueur 14 et est donnée par [43271(2345)623425362]).

Les 7-colorations de packing de $C_n \odot pK_1$, pour $7 \leq n \leq 15$, $n \neq 11$, sont données par les motifs circulaires suivants :

$$\begin{aligned}
n = 7 : & \quad [2342567]; \\
n = 8 : & \quad [23425367]; \\
n = 9 : & \quad [234253267]; \\
n = 10 : & \quad [2342532467]; \\
n = 12 : & \quad [234253246257]; \\
n = 13 : & \quad [2342532462357]; \\
n = 14 : & \quad [23425362432576]; \\
n = 15 : & \quad [234253264235276].
\end{aligned}$$

De plus, tous les motifs, pour $n \geq 9$, sont compatibles avec le motif circulaire $[23425367]$ de longueur 8. En effet, si $n \geq 16$, $n = 8q + r$ avec $0 \leq r \leq 7$ et $r \neq 3$, alors la 7-coloration de packing de $C_n \odot pK_1$ peut être obtenue par la combinaison de $q - 1$ motifs de longueur 8 suivis par un motif de longueur $q + r$ (si $r = 0$, on prend q séquences du motif qui est de longueur 8).

Finalement, pour $n = 8q + 3$, $q \geq 2$, la 7-coloration de packing de $C_n \odot pK_1$ peut être obtenue par une combinaison de $q - 2$ motifs de longueur 8 suivis par le motif circulaire $[2342532462352432657]$ de longueur 19, qui est aussi compatible avec $[23425367]$. Ceci complète la preuve. $\square$

Considérons maintenant les cas restants, lorsque $p \in \{2, 3\}$.

Pour $p = 2$, nous avons le théorème suivant (on a un cas particulier lorsque $n = 9$) :

Théorème 3.10. *Soit $C_n \odot 2K_1$ la couronne généralisée du cycle C_n . On a*

$$\chi_\rho(C_n \odot 2K_1) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 3, \\ 5 & \text{si } n = 4, \\ 7 & \text{si } n = 9, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Les colorations de packing de $C_n \odot 2K_1$, pour $n \leq 13$ et $n \neq 9$, sont données par les motifs circulaires suivants :

$$\begin{aligned}
n = 3 : & \quad [234]; \\
n = 4 : & \quad [2345]; \\
n = 5 : & \quad [23456]; \\
n = 6 : & \quad [234256]; \\
n = 7 : & \quad [1(23)423526]; \\
n = 8 : & \quad [1(24)3251(24)326]; \\
n = 10 : & \quad [1(23)41(23)523421(35)6]; \\
n = 11 : & \quad [1(23)4231(25)624325]; \\
n = 12 : & \quad [1(23)41(23)521(26)423526]; \\
n = 13 : & \quad [1(23)41(23)5231(26)423526].
\end{aligned}$$

Pour $n = 3$, $\chi_\rho(C_3 \odot 2K_1) = 4$ car d'après la Proposition 3.8, avec 3 couleur, il n'est pas possible de colorer un sommet du cycle avec la couleur 1, donc on doit colorer les trois sommets de C_3 avec les couleurs 2 et 3 seulement, ce qui est impossible.

De même, pour $n = 4$, si on suppose qu'on peut colorer $C_4 \odot 2K_1$ avec 4 couleurs, alors d'après la Proposition 3.8 la couleur 1 ne peut pas être utilisée sur les sommets du cycle C_4 , mais il n'est pas possible de colorer C_4 avec les couleurs 2, 3 et 4. Donc $\chi_\rho(C_4 \odot 2K_1) = 5$.

Soit $C_5 = u_{i-2}u_{i-1}u_iu_{i+1}u_{i+2}$ un cycle (les indices sont donnés modulo 5). Supposons que $\chi_\rho(C_5 \odot 2K_1) \leq 5$, si $\pi(u_i) = 1$ alors $\{\pi(u_{i-2}), \pi(u_{i+2})\} = \{1, 2\}$, supposons sans perte de généralité que $\pi(u_{i-2}) = 1$ et $\pi(u_{i+2}) = 2$, mais dans tous les cas, il est impossible de colorer les deux sommets pendants adjacents au sommet u_{i-2} . Donc $\chi_\rho(C_5 \odot 2K_1) = 6$.

Soit $C_6 = u_{i-2}u_{i-1}u_iu_{i+1}u_{i+2}u_{i+3}$ un cycle (les indices sont donnés modulo 5). Supposons que $\chi_\rho(C_6 \odot 2K_1) \leq 5$. Sur le cycle, on peut utiliser au plus trois fois la couleur 1. Si on utilise exactement trois fois la couleur 1 alors les sommets pendants adjacents à ces sommets sont colorés avec 2 et 3 (car la distance entre les sommets pendants et au plus 4), donc il reste à colorer trois sommets supports avec les couleurs 4 et 5, ce qui est impossible (car ils sont à distance 2 entre eux). Si on utilise exactement deux fois la couleur 1 sur le cycle alors, pour colorer les autres 4

sommets du cycles et les 4 sommets pendants adjacents aux sommets colorés avec la couleur 1, on peut utiliser au plus deux fois chacune des couleurs 2, 3 et 4 et au plus une fois la couleur 5, au total on peut colorer sept sommets et il reste un sommet non colorer. Si on utilise au plus une fois la couleur 1 sur le cycle alors, pour colorer les autres cinq sommets du cycles et les deux sommets pendants qui sont adjacents au sommet coloré avec la couleur 1, on peut utiliser au plus deux fois chacune des couleurs 2 et 3 et au plus une fois chacune des couleurs 4 et 5. Dans tous les cas on ne peut pas colorer tous les sommets de $C_6 \odot 2K_1$. Donc $\chi_\rho(C_6 \odot 2K_1) = 6$.

Pour $n \geq 7$, toute 5-coloration de packing de $C_n \odot 2K_1$ induirait une 5-coloration de packing de $P_{14} \odot 2K_1$. Contradiction avec le Théorème 3.5, donc les colorations précédentes sont optimales.

Considérons maintenant le cas $n \geq 14$. Similairement, aucune 5-packing coloration de $C_n \odot 2K_1$ ne peut exister.

En outre, tous les motifs précédents, pour $n \geq 8$, sont compatibles avec le motif circulaire de longueur 7 [1(23)423526]. De plus, le motif 423524326 de longueur 9 est aussi compatible avec le même motif [1(23)423526] qui est de longueur 7. Ceci nous permet de construire une 6-coloration de packing de toute couronne généralisée $C_n \odot 2K_1$ avec $n \geq 14$. Si $n = 7q + r$, avec $q \geq 2$ et $0 \leq r < 7$, la coloration est obtenue en répétant $q - 1$ fois le motif u de longueur 7 et en ajoutant le motif compatible de longueur $7 + r$ (notons que le motif u est un motif circulaire, et il est compatible avec lui-même).

Le dernier cas à considérer est le cas $n = 9$. Une 7-coloration de packing de $C_9 \odot 2K_1$ est donnée par le motif circulaire

$$[1(24)3251(24)3267].$$

Pour montrer que $C_9 \odot 2K_1$ n'admet pas une 6-coloration de packing, nous raisonnons par l'absurde, en supposant qu'il est possible de le colorer avec 6 couleurs. Par une simple analyse des cas, on peut obtenir le résultat (l'idée principale, est que

dans un tel cas, sur les sommets du cycle, on peut utiliser au plus quatre, deux, deux, une, une et une fois chacune des couleurs de 1 à 6 respectivement. De plus, lorsque la couleur 1 est utilisée dans C_9 , les couleurs affectées aux voisins pendants à ce sommet support qui est coloré avec 1, sont aussi utilisées dans le cycle, ce qui conduit forcément à une contradiction). $\square$

Finalement, pour $p = 3$, nous avons le résultat suivant :

Théorème 3.11. *Soit $C_n \odot 3K_1$ la couronne généralisée du cycle C_n . On a*

$$\chi_\rho(C_n \odot 3K_1) = \begin{cases} 4 & \text{si } n = 3, \\ 5 & \text{si } n = 4, \\ 7 & \text{si } n \in \{7, \dots, 13, 15, \dots, 22, 24, \dots, 27, 30, \dots, 36, 39, 40, 41\} \\ & \quad \cup \{45, 47, \dots, 50, 53, 54, 55, 59, 62, 63, 64, 68, 77, 78, 91\}, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve. Par le Théorème 3.9 et la Proposition 2.2, on sait que $\chi_\rho(C_n \odot 3K_1) \leq 7$ pour tout $n \geq 3$, $n \neq 11$. Les colorations de packing de $C_3 \odot 3K_1$, $C_4 \odot 3K_1$, $C_5 \odot 3K_1$ et $C_6 \odot 3K_1$ sont données par les motifs circulaires suivants :

$$[234], \quad [2345], \quad [23456], \quad [234256].$$

Ces colorations sont optimales, puisqu'on a déjà montré qu'elle sont optimales pour $C_n \odot 2K_1$ qui est un sous-graphe de $C_n \odot 3K_1$, pour $n = 3, \dots, 6$, et on sait aussi que $\chi_\rho(C_n \odot 2K_1) \leq \chi_\rho(C_n \odot 3K_1)$, d'où le résultat.

La Figure 3.5 donne, comme motifs circulaires, les 6-colorations de packing de $C_n \odot 3K_1$ pour tout $n \in \{14, 23, 29, 38, 44, 46, 61, 67, 69, 73, 76, 82, 92\}$ (les sommets pendants adjacents à un sommet coloré avec 1 prennent toujours les couleurs 2, 3 et 4).

Puisque tous ces motifs commencent par 152342... et finissent par ...524326, ils sont tous deux à deux compatibles. Donc, en répétant le motif de longueur 14 un certain nombre de fois, et en ajoutant l'un des motifs de la Figure 3.5, on peut

obtenir une 6-coloration de packing de $C_n \odot 3K_1$ dans tous les cas suivants, en fonction de n modulo 14 :

- $n = 14q$, $n \geq 14$, (en répétant q fois le motif de longueur 14),
- $n = 14q + 1$, $n \geq 29$ (en répétant $q - 2$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 29),
- $n = 14q + 2$, $n \geq 44$ (en répétant $q - 3$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 44),
- $n = 14q + 3$, $n \geq 73$ (en répétant $q - 5$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 73),
- $n = 14q + 4$, $n \geq 46$ (en répétant $q - 3$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 46),
- $n = 14q + 5$, $n \geq 61$ (en répétant $q - 4$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 61),
- $n = 14q + 6$, $n \geq 76$ (en répétant $q - 5$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 76),
- $n = 14q + 7$, $n \geq 105$ (en répétant $q - 7$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 44 et 61),
- $n = 14q + 8$, $n \geq 92$ (en répétant $q - 6$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 92),
- $n = 14q + 9$, $n \geq 23$ (en répétant $q - 1$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 23),
- $n = 14q + 10$, $n \geq 38$ (en répétant $q - 2$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 38),
- $n = 14q + 11$, $n \geq 67$ (en répétant $q - 4$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 67),
- $n = 14q + 12$, $n \geq 82$ (en répétant $q - 5$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 82),
- $n = 14q + 13$, $n \geq 69$ (en répétant $q - 4$ fois le motif de longueur 14 et en ajoutant le motif de longueur 69).

Maintenant, il reste à montrer que pour $n \in \{7, \dots, 13, 15, \dots, 22, 24, \dots, 27\} \cup \{30, \dots, 36, 39, 40, 41, 45, 47, \dots, 50, 53, 54, 55, 59, 62, 63, 64, 68, 77, 78, 91\}$, on ne peut

pas obtenir des 6-colorations de packing de $C_n \odot 3K_1$. Vu que le nombre de cas est très élevé, nous avons utilisé l'ordinateur.

Les preuves sont obtenues en exécutant l'algorithme¹ utilisé dans la preuve du Théorème 3.5. Donc pour prouver qu'il est impossible de colorer les $C_n \odot 3K_1$ avec seulement 6 couleurs il suffit de poser $k = 6$, ce qui signifie que $\chi_\rho(C_n \odot 3K_1) \geq 7$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de considérer les 7-colorations de packing de $C_n \odot pK_1$, avec $p \geq 4$ présentées précédemment dans la preuve du Théorème 3.9. □

1. Rappelons que cet algorithme utilise l'exploration en profondeur pour avoir une coloration de packing en fixant le nombre de couleurs k . L'algorithme s'arrête si une coloration de packing est trouvée avec k couleurs. Si ce n'est pas le cas, il continue à explorer toutes les colorations possibles pour montrer que le nombre de couleurs k est insuffisant.

n	motif circulaire
14	[1523426325 4326]
23	[1523426324 5236423524 326]
29	[1523426324 5236423524 623524326]
38	[1523426324 5236243251 6234253246 23524326]
44	[1523426324 5236243251 6234253264 2352462352 4326]
46	[1523426324 5236423524 3261523426 3245236423 524326]
61	[1523426324 5236243251 6234253246 2352432615 2342632452 3642352432 6]
67	[1523426324 5236243251 6234253246 2352432615 2342632452 3642352462 3524326]
69	[1523426324 5236423524 3261523426 3245236423 5243261523 4263245236 423524326]
73	[1523426324 5236243251 6234253264 2352462352 4326152342 6324523642 3524623524 326]
76	[1523426324 5236243251 6234253246 2352432615 2342632452 3624325162 3425324623 524326]
82	[1523426324 5236243251 6234253246 2352432615 2342632452 3624325162 3425326423 5246235243 26]
92	[1523426324 5236423524 3261523426 3245236423 5243261523 4263245236 4235243261 5234263245 2364235243 26]

FIGURE 3.5 – Des motifs circulaires pour la preuve du Théorème 3.11

Une autre classe de graphes considérée est la classe des échelles.

3.3 Échelles

Définition 3.12. Une *échelle circulaire*, notée CL_n , est le produit cartésien d'un cycle de longueur n par le graphe complet K_2 . On notera $u_1, \dots, u_n$ et $v_1, \dots, v_n$ les sommets de chacun des deux cycles (voir Figure 3.6).

Pour un cas particulier d'une échelle circulaire de longueur multiple de 6, William et Roy [53] ont montré en 2013 que le nombre chromatique de packing est inférieur

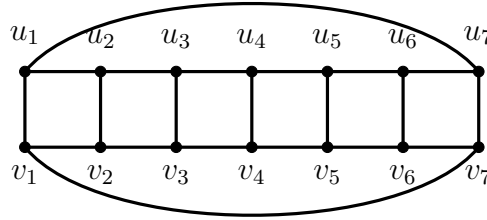
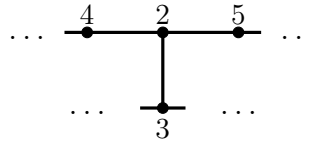
FIGURE 3.6 – L'échelle circulaire CL_7 

FIGURE 3.7 – Configuration du Lemme 3.14

ou égal à 5. Nous avons complété et amélioré ce résultat, en donnant une valeur exacte du nombre chromatique de packing d'une échelle circulaire quelconque.

Théorème 3.13. *Soit CL_n une échelle circulaire. On a*

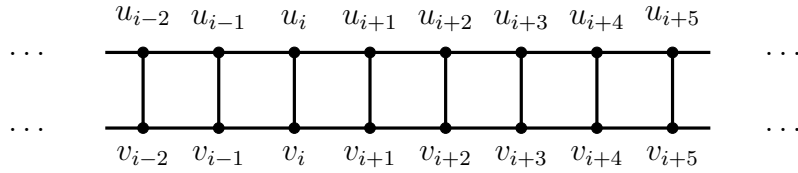
$$\chi_\rho(CL_n) = \begin{cases} 5 & \text{si } (n \equiv 0[2] \text{ et } n \notin \{8, 14\}) \text{ ou } n = 3, \\ 7 & \text{si } n \in \{7, 8, 9\}, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avant de montrer ce théorème, nous donnons le lemme suivant :

Lemme 3.14. *Pour tout entier $n \geq 5$, si $\chi_\rho(CL_n) \leq 5$ alors, pour toute coloration de packing optimale et pour toute arête $e = u_i v_i$ de CL_n , on a soit $\pi(u_i) = 1$ ou $\pi(v_i) = 1$ soit e est l'une des trois arêtes de la configuration illustrée dans la Figure 3.7 (ou bien ses symétries).*

Preuve. Considérons le graphe CL'_∞ de la Figure 3.8.

Si on suppose que $\pi(u_i) \neq 1$ et $\pi(v_i) \neq 1$, et que la configuration illustrée dans la Figure 3.7 ne se produit pas, alors on a quatre cas à considérer.

FIGURE 3.8 – L'échelle ouverte CL'_∞

Cas 1) $\pi(u_i) = 2$ et $\pi(v_i) = 3$: et donc le sommet u_{i+1} peut prendre soit la couleur 1 soit 4 ou 5.

Cas 1.1) Si $\pi(u_{i+1}) = 1$ alors les deux autres voisins de u_{i+1} doivent prendre les couleurs 4 et 5 ($\{\pi(u_{i+2}), \pi(v_{i+1})\} = \{4, 5\}$), donc $\pi(u_{i-1}) = 1$, mais le sommet v_{i-1} ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 5\}$.

Cas 1.2) Si $\pi(u_{i+1}) = 4$ (respectivement $\pi(u_{i+1}) = 5$) alors soit $\pi(u_{i-1}) = 1$ et par conséquent $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 5$ (respectivement $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 5$), ce qui est impossible. Soit $\pi(u_{i-1}) = 5$ (respectivement 4) ce qui est impossible, car on a supposé que la configuration de la Figure 3.7 ne se produit pas.

Cas 2) $\pi(u_i) = 2$ et $\pi(v_i) = 4$ (respectivement 5) : et donc le sommet u_{i+1} peut prendre soit la couleur 1 soit 3 ou 5 (respectivement 4).

Cas 2.1) Si $\pi(u_{i+1}) = 1$ alors $\{\pi(u_{i+2}), \pi(v_{i+1})\} = \{3, 5\}$ (respectivement $\{\pi(u_{i+2}), \pi(v_{i+1})\} = \{3, 4\}$). Si $\pi(u_{i+2}) = 3$ alors $\pi(u_{i-1}) = 1$ et par conséquent $\pi(u_{i-2}) = \pi(v_{i-1}) = 3$, ce qui est impossible. Si $\pi(v_{i+1}) = 3$ alors $\pi(v_{i-1}) = 1$, mais le sommet u_{i-1} ne peut prendre aucune couleur.

Cas 2.2) Si $\pi(u_{i+1}) = 3$ alors soit $\pi(u_{i-1}) = 1$ et donc $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 5$ (respectivement 4), ce qui est impossible. Soit $\pi(u_{i-1}) = 5$ (respectivement 4) et donc $\pi(v_{i+1}) = \pi(u_{i+2}) = 1$ et par suite $\pi(v_{i+2}) = 2$, mais $\pi(u_{i+3})$ ne peut prendre aucune valeur.

Cas 2.3) Si $\pi(u_{i+1}) = 5$ (respectivement $\pi(u_{i+1}) = 4$) alors soit $\pi(u_{i-1}) = 1$ et par conséquent $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 3$, ce qui est impossible. Soit $\pi(u_{i-1}) = 3$, donc $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 1$ et par conséquent $\pi(v_{i-2}) = \pi(u_{i-3}) = 2$, ce qui est impossible.

Cas 3) $\pi(u_i) = 3$ et $\pi(v_i) = 4$ (respectivement 5) : et donc le sommet u_{i+1} peut prendre soit la couleur 1 soit 2 ou 5 (respectivement 4).

Cas 3.1) si $\pi(u_{i+1}) = 1$ alors $\{\pi(u_{i+2}), \pi(v_{i+1})\} = \{2, 5\}$ (respectivement $\{\pi(u_{i+2}), \pi(v_{i+1})\} = \{2, 4\}$). Si $\pi(u_{i+2}) = 2$ alors $\pi(u_{i+3}) = 1$ et par suite l'un des deux voisins restants de u_{i+3} prend la couleur 3 et l'autre ne peut prendre aucune couleur. Si $\pi(v_{i+1}) = 2$ alors $\pi(v_{i-1}) = 1$, par suite $\pi(u_{i-1}) = 1$, mais le sommet v_{i-2} ne peut prendre aucune couleur.

Cas 3.2) Si $\pi(u_{i+1}) = 2$ alors soit $\pi(v_{i+1}) = 1$ et donc $\pi(v_{i+2}) = 5$ (respectivement 4) et par suite $\pi(u_{i+2}) = 1$, mais $\pi(u_{i+3})$ ne peut prendre aucune valeur. Soit $\pi(v_{i+1}) = 5$ (respectivement 4) et donc $\pi(u_{i+2}) = 1$, mais le sommet v_{i+1} ne peut prendre aucune couleur.

Cas 3.3) Si $\pi(u_{i+1}) = 5$ (respectivement $\pi(u_{i+1}) = 4$) alors soit $\pi(u_{i-1}) = 1$ et par conséquent $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 2$, ce qui est impossible. Soit $\pi(u_{i-1}) = 2$, donc $\pi(v_{i-1}) = \pi(u_{i-2}) = 1$ et par conséquent $\pi(v_{i-2})$ ne peut prendre aucune valeur.

Cas 4) $\pi(u_i) = 4$ et $\pi(v_i) = 5$: et donc le sommet u_{i+1} peut prendre soit la couleur 1 soit 2 ou 3.

Cas 4.1) Si $\pi(u_{i+1}) = 1$ alors $\{\pi(u_{i+2}), \pi(v_{i+1})\} = \{2, 3\}$ et par suite $\pi(v_{i+2}) = 1$, mais le sommet v_{i+2} ne peut prendre aucune couleur.

Cas 4.2) Si $\pi(u_{i+1}) = 2$ alors soit $\pi(v_{i+1}) = 1$ et donc $\pi(v_{i+2}) = 3$, $\pi(u_{i+2}) = 1$, mais $\pi(u_{i+3})$ ne peut prendre aucune valeur. Soit $\pi(v_{i+1}) = 3$ et donc $\pi(u_{i+2}) = 1$, mais le sommet v_{i+2} ne peut prendre aucune couleur.

Cas 4.3) Si $\pi(u_{i+1}) = 3$ alors soit $\pi(v_{i+1}) = 1$ et par conséquent $\pi(v_{i+2}) = 2$ et $\pi(u_{i+2}) = 1$, mais le sommet u_{i+3} ne peut prendre aucune couleur. Soit $\pi(v_{i+1}) = 2$, donc $\pi(v_{i+2}) = 1$ et par conséquent $\pi(u_{i+2})$ ne peut prendre aucune valeur.

Ceci complète la preuve. □

Du lemme précédent, nous déduisons directement le corollaire suivant :

Corollaire 3.15. *Si $\chi_\rho(CL_n) = 5$ alors il existe toujours une 5-coloration de packing optimale de CL_n , $n \geq 5$, où tout sommet d'une classe de bipartition est coloré avec 1. En effet, d'après le Lemme 3.14, il suffit de recolorer avec 1 les sommets de la configuration 3.7 colorés avec 2.*

Remarque 3.16. *Si dans une 5-coloration de packing d'une échelle circulaire, on a un sommet qui est coloré avec 2 et tous ses trois voisins par 3, 4 et 5 (comme dans la configuration de la Figure 3.7) alors on peut remplacer la couleur 2 par 1.*

Preuve du Théorème 3.13. Pour le graphe CL_3 , nous observons qu'il n'est pas possible de le colorer avec seulement 4 couleurs, car au maximum, on peut utiliser deux fois la couleur 1 et au plus une fois chacune des couleurs restantes 2, 3 et 4, ce qui signifie qu'avec 4 couleurs, on peut colorer au plus cinq sommets du graphe CL_3 . Or ce dernier contient six sommets. Une 5-coloration de packing de ce graphe consiste à colorer la première ligne avec 123 et la deuxième ligne avec 415.

Pour le graphe CL_4 , il est impossible de le colorer avec seulement 4 couleurs, car au maximum, on peut utiliser quatre fois la couleur 1, deux fois la couleur 2 et au plus une fois chacune des deux couleurs 3 et 4. Si on utilise exactement quatre fois la couleur 1, alors la couleur 2 peut être utilisée seulement une fois, dans ce cas on peut colorer au plus sept sommets du graphe CL_4 . Or ce dernier contient huit sommets. Si on utilise au plus trois fois la couleur 1, alors il est impossible de colorer le reste du graphe CL_4 avec les couleurs 2, 3 et 4. Dans les deux cas, 4 couleurs sont insuffisantes pour trouver une 4-coloration de packing de CL_4 , donc $\chi_\rho(CL_4) \geq 5$. Une 5-coloration de packing de ce graphe consiste à colorer la première ligne avec 1213 et la deuxième ligne avec 4151, donc $\chi_\rho(CL_4) \leq 5$, d'où l'égalité $\chi_\rho(CL_4) = 5$.

Pour le graphe CL_5 , si on suppose que $\chi_\rho(CL_5) \leq 5$ alors on peut utiliser au plus quatre fois la couleur 1, deux fois la couleur 2, et au plus une fois chacune des couleurs 3, 4 et 5, donc au total, on peut colorer seulement neuf sommets parmi les dix sommets du graphe CL_5 , d'où l'inégalité $\chi_\rho(CL_5) \geq 6$. Une 6-coloration de packing consiste à colorer la première ligne avec 13126 et la deuxième ligne avec 21415.

Considérons maintenant les deux cas suivants :

Cas I) n est pair et $n \notin \{4, 8, 14\}$

Comme $C_n \odot K_1$ (qui est la couronne du cycle de longueur n) est un sous-graphe de CL_n , $\chi_\rho(CL_n) \geq \chi_\rho(C_n \odot K_1)$ et d'après le Théorème 3.7 on a $\chi_\rho(C_n \odot K_1) = 5$, donc $\chi_\rho(CL_n) \geq 5$.

Nous montrons maintenant que $\chi_\rho(CL_n) \leq 5$. Les 5-colorations de packing des échelles circulaires sont données par les motifs circulaires suivants qui sont en fonction du reste de la division euclidienne de n par le nombre 6 :

$$\begin{aligned}
 n \equiv 0[6] : & \quad [131215] \\
 & \quad [214131], \\
 n \equiv 2[6] : & \quad [131215]13121314151312131415 \\
 & \quad [214131]21415121312141512131, \\
 n \equiv 4[6] : & \quad [131215]1312131415 \\
 & \quad [214131]2141512131.
 \end{aligned}$$

A partir de ces colorations, on obtient l'inégalité $\chi_\rho(CL_n) \leq 5$, d'où $\chi_\rho(CL_n) = 5$ lorsque $n \equiv 0[2]$ et $n \notin \{4, 8, 14\}$.

Cas II) n est impair et $n \notin \{3, 7, 9\}$

D'après le Lemme 3.14 et le Corollaire 3.15, si $\chi_\rho(CL_n) \leq 5$ alors CL_n est biparti, ce qui n'est pas le cas, puisque le graphe contient un cycle de longueur impaire. Donc il n'est pas possible de colorer le graphe CL_n lorsque n est impair et $n \geq 11$ seulement avec 5 couleurs.

Nous considérons les motifs circulaires des 6-colorations de packing des échelles circulaires des longueurs impaires qui sont en fonction du reste de la division eucli-

dienne de n par le nombre 6 :

$$\begin{aligned}
 n \equiv 1[6] : & \quad [131215]1314126 \\
 & \quad [214131]6121315, \\
 n \equiv 3[6] : & \quad [131215]141231416 \\
 & \quad [214131]216152131, \\
 n \equiv 5[6] : & \quad [131215]13126 \\
 & \quad [214131]21415.
 \end{aligned}$$

A partir de ces colorations, on obtient l'inégalité $\chi_\rho(CL_n) \leq 6$, d'où $\chi(CL_n) = 6$ lorsque $n \equiv 1[2]$ et $n \geq 11$.

Considérons maintenant les cas restants, lorsque $n \in \{7, 8, 9, 14\}$.

Si $n = 7$ (respectivement $n = 9$) alors pour colorer les quatorze (respectivement les dix-huit) sommets de CL_7 (respectivement CL_9), on peut utiliser au plus six, trois, deux, une, une et une fois (respectivement huit, quatre, deux, deux, une et une fois) chacune des couleurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 respectivement. Si on utilise exactement six fois (respectivement huit) fois la couleur 1, alors on peut utiliser au plus deux, deux, une, une et une fois (respectivement trois, deux, deux, une et une fois) chacune des couleurs 2, 3, 4, 5 et 6 respectivement. Au total, on peut colorer seulement treize (respectivement dix-sept) sommets du graphe et il nous reste un sommet non coloré. Si on utilise au plus cinq fois (respectivement sept fois) la couleur 1 alors il sera impossible de colorer le reste des sommets avec les couleurs 2,...,6. Dans les deux cas, il est impossible de colorer tous les sommets de CL_7 (respectivement CL_9) avec seulement 6 couleurs, et ainsi $\chi(CL_n) \geq 7$ avec $n \in \{7, 9\}$.

Pour montrer que $\chi_\rho(CL_n) \leq 7$ avec $n \in \{7, 9\}$, il suffit de considérer les 7-colorations de packing de ces deux graphes :

$$\begin{aligned}
 & [1312145] \\
 & [2161317], \\
 & [131215146] \\
 & [214131217].
 \end{aligned}$$

Nous utiliserons le même raisonnement pour montrer que $\chi_\rho(CL_8) = 7$ et que $\chi_\rho(CL_{14}) = 6$. Commençons par montrer que $\chi_\rho(CL_8) = 7$: pour colorer les seize sommets du graphe CL_8 , on peut utiliser au plus huit, quatre, deux, deux, une et une fois les couleurs 1, 2, 3, 4, 5 et 6 respectivement. Si on utilise exactement huit fois la couleur 1 alors on peut utiliser au plus deux fois chacune des couleurs 2 et 3 et au plus une fois chacune des couleurs restantes, donc il nous reste un sommet non coloré. Si on utilise exactement sept fois la couleur 1 alors au plus, on peut colorer huit sommets du graphe avec les autres couleurs, au total seulement quinze sommets seront colorés, contradiction. Enfin si on utilise au plus six fois la couleur 1 alors le nombre total de sommets qu'on peut colorer avec les couleurs 2,...,6 augmente d'une unité seulement. Dans tous les cas, il reste un sommet qu'on ne peut pas colorer, donc $\chi_\rho(CL_8) \geq 7$. Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, on propose la 7-coloration de packing suivante :

$$[13121517]$$

$$[21413161]$$

Enfin dans le graphe CL_{14} , on peut utiliser au plus quatorze fois la couleur 1. Si on utilise exactement quatorze fois cette couleur alors on peut utiliser au plus quatre, quatre, trois et deux fois chacune des couleurs 2, 3, 4 et 5 respectivement, au total, vingt-sept sommets sur vingt-huit seront colorés. Si on utilise au plus treize fois la couleur 1 alors on peut colorer au plus quatorze sommets avec les couleurs 2, ..., 5, donc impossible de colorer tous les sommets du graphe, et ainsi $\chi_\rho(CL_{14}) \geq 6$. Pour montrer que $\chi_\rho(CL_{14}) \leq 6$, on considère la 6-coloration de packing suivante :

$$[13121512141316]$$

$$[21413161312151]$$

D'où le résultat. □

Une autre classe d'échelles étudiées est la suivante :

Définition 3.17. Un H -graphe, noté $H(r)$, est un graphe 3-régulier avec pour ensemble de sommets $V(H(r)) = \{(i, j) : 1 \leq i \leq 3, 1 \leq j \leq n\}$ tel que $n = 2r$, et pour ensemble d'arêtes $E(H(r)) = \{((i, j), (i, j+1)), i = 1, 3, 1 \leq j \leq n-1\} \cup \{((2, 2j-1), (2, 2j)), 1 \leq j \leq r\}$

$1), (2, 2j)), 1 \leq j \leq r\} \cup \{((1, 1), (1, n)), ((3, 1), (3, n))\} \cup \{((i, j), (i + 1, j)), i = 1, 2, 1 \leq j \leq n\}$. Voir l'exemple de la Figure 3.9.

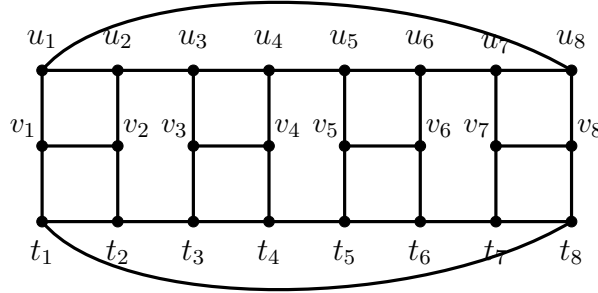


FIGURE 3.9 – Le H -graphe $H(4)$

Pour un H -graphe, $H(r)$, avec r pair et différent de 2, en 2013 William et Roy [55] ont donné une borne supérieure du nombre chromatique de packing. Nous allons montrer que cette borne est une valeur exacte pour tout r pair, même pour $r = 2$, et que pour les r impairs, le nombre chromatique de packing est soit 6 soit 7.

Théorème 3.18. *Soit, $H(r)$, un H -graphe. On a*

$$\begin{cases} \chi_\rho(H(r)) = 5 & \text{si } r \equiv 0[2], \\ 6 \leq \chi_\rho(H(r)) \leq 7 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

Cas 1) r est pair

Comme $C_{2r} \odot K_1$ (qui est la couronne du cycle de longueur $2r$) est un sous-graphe de $H(r)$, $\chi_\rho(H(r)) \geq \chi_\rho(C_{2r} \odot K_1)$ et d'après le Théorème 3.7 on a $\chi_\rho(C_{2r} \odot K_1) = 5$, donc $\chi_\rho(H(r)) \geq 5$.

Nous montrons maintenant que $\chi_\rho(H(r)) \leq 5$. La 5-coloration de packing des H -graphes circulaires est obtenue en répétant le motif donnée par la Figure 3.10.

A partir de cette coloration, on obtient l'inégalité $\chi_\rho(H(r)) \leq 5$, d'où $\chi_\rho(H(r)) = 5$ lorsque $n \equiv 0[2]$.

Cas 2) r est impair

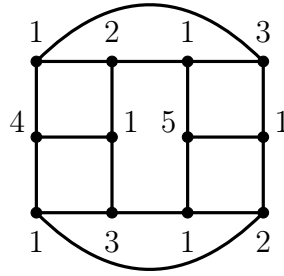


FIGURE 3.10 – Une 5-coloration de packing circulaire du H -graphe $H(r)$ avec r pair

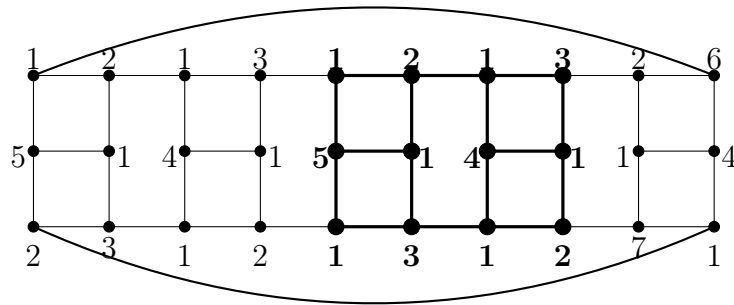


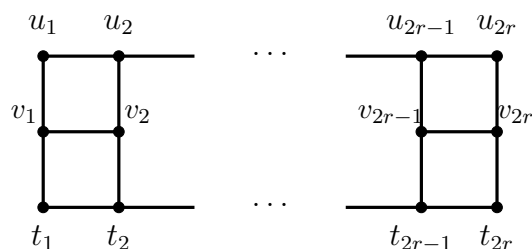
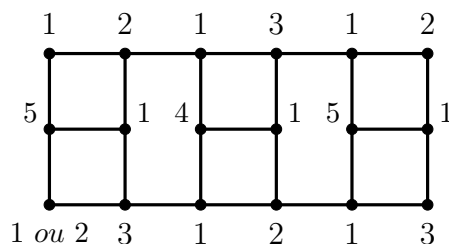
FIGURE 3.11 – Une 7-coloration de packing circulaire du H -graphe $H(r)$ avec r impair

La Figure 3.11 représente un motif circulaire, qui est une 7-coloration de packing des H -graphes lorsque r est impair (Le motif en gras est périodique, donc on peut le répéter plusieurs fois). A partir de cette coloration, on obtient l'inégalité $\chi_\rho(H(r)) \leq 7$ lorsque r est impair.

Montrons maintenant la borne inférieure. Pour cela, nous avons besoin de définir un H -graphe ouvert.

On appelle un H -graphe ouvert, $H'(r)$, le graphe obtenu à partir du H -graphe, $H(r)$, en supprimant les deux arêtes u_1u_{2r} et t_1t_{2r} (voir la Figure 3.12).

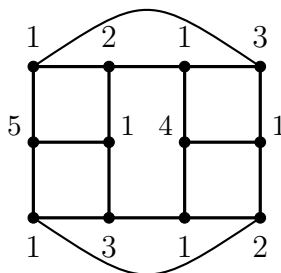
Après une simple analyse de cas, nous constatons que la seule 5-coloration de packing d'un $H'(3)$ est celle qui est représentée dans la Figure 3.13 (bien sûr on peut

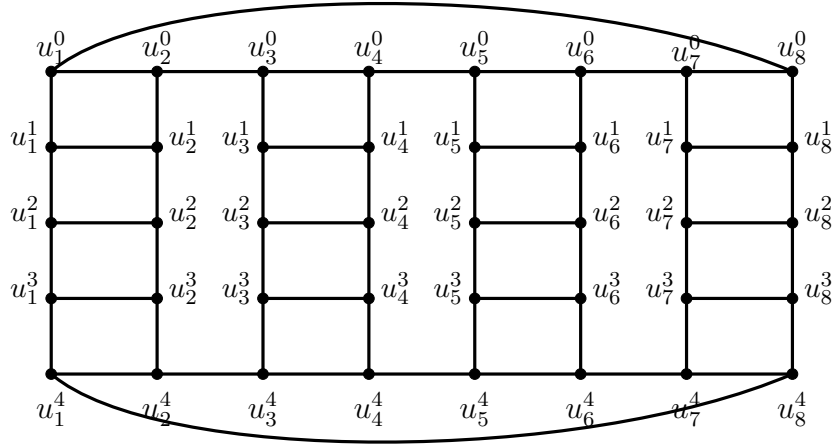
FIGURE 3.12 – Un H -graphe ouvert $H'(r)$ FIGURE 3.13 – La 5-coloration de packing de $H'(3)$

prendre aussi la même coloration en lisant les couleurs de la droite vers la gauche, en échangeant les couleurs 2 et 3 ou encore les couleurs 4 et 5).

A partir de ce résultat, on peut déduire que la seule coloration de packing possible d'un $H'(r)$ est la suivante (voir Figure 3.14) :

La coloration représentée dans la Figure 3.14 est périodique et elle est de période "2" (en nombre d'échelles). Si on doit rajouter au graphe $H'(r)$ les deux arêtes u_1u_{2r} et t_1t_{2r} alors on peut conserver la même coloration de $H'(r)$ si et seulement si r

FIGURE 3.14 – La 5-coloration de packing d'un $H'(r)$

FIGURE 3.15 – Le H -graphe généralisé $H_3(4)$

est pair. Par contre si r est impair alors la seule coloration possible des sommets $\{u_1, \dots, u_{2r-2}, v_1, \dots, v_{2r-2}, t_1, \dots, t_{2r-2}\}$ est celle de $H'(r-1)$, mais il sera impossible de colorer les sommets restants ($\{u_{2r-1}, v_{2r-1}, t_{2r-1}, u_{2r}, v_{2r}, t_{2r}\}$) avec 5 couleurs, car soit on utilise exactement trois fois la couleur 1, mais aucune couleur parmi $\{2, \dots, 5\}$, soit deux fois la couleur 1, une seule fois chacune des couleurs 2 et 4 et aucune fois les couleurs 3 et 5, et cela en utilisant la couleur 2 pour colorer le sommet t_1 . Dans les deux cas, il reste deux sommets à colorer, ce qui nous conduit à utiliser deux autres couleurs supplémentaires qui sont 6 et 7, et dans ce cas, on obtient la coloration représentée précédemment dans la Figure 3.11, d'où l'inégalité $\chi_\rho(H(r)) > 5$ et donc le résultat $6 \leq \chi_\rho(H(r)) \leq 7$ en découle. $\square$

Nous nous intéressons maintenant à la généralisation suivante des H -graphes :

Définition 3.19. Un H -graphe généralisé à ℓ niveaux, noté $H_\ell(r)$, est un graphe 3-régulier avec pour ensemble de sommets $V(H_\ell(r)) = \{(i, j) : 1 \leq i \leq \ell+2, 1 \leq j \leq n\}$ tel que $n = 2r$, et pour ensemble d'arêtes $E(H_\ell(r)) = \{((i, j), (i, j+1)), i = 1, \ell+2, 1 \leq j \leq n\} \cup \{((i, 2j-1), (i, 2j)), i = 2, \dots, \ell+1, 1 \leq j \leq r\} \cup \{((1, 1), (1, n)), ((\ell+2, 1), (\ell+2, n))\} \cup \{((i, j), (i+1, j)), i = 1, \dots, \ell+1, 1 \leq j \leq n\}$. Voir l'exemple de la Figure 3.15.

Les deux lemmes suivants seront très utiles pour obtenir des valeurs exactes du

nombre chromatique de packing des H -graphes généralisés.

Lemme 3.20. *Si $\chi_\rho(H_\ell(r)) \leq 5$, pour $\ell \geq 3$ et $r \geq 3$, alors pour toute 5-coloration de packing optimale et pour tout i , on a $(\pi(u_i^0) = 1$ ou $\pi(u_{i+1}^0) = 1)$ et $(\pi(u_i^{\ell+1}) = 1$ ou $\pi(u_{i+1}^{\ell+1}) = 1)$ (les indices sont comptés modulo $2r$).*

Preuve. Considérons seulement le cas où pour tout i $\pi(u_i^0) = 1$ ou $\pi(u_{i+1}^0) = 1$, car par symétrie, on peut obtenir l'autre cas (pour tout i $\pi(u_i^{\ell+1}) = 1$ ou $\pi(u_{i+1}^{\ell+1}) = 1$).

Supposons qu'il existe i , $i > 2$, et supposons sans perte de généralité que i est impair, tel que $u_i^0, u_{i+1}^0 \neq 1$. On a quatre cas à considérer :

Cas 1) $\pi(u_i^0) = 2$ et $\pi(u_{i+1}^0) = 3$: donc soit $\pi(u_i^1) = 1$, par conséquent $\{u_i^2, u_{i+1}^1\} = \{4, 5\}$ et par suite $\pi(u_{i-1}^0) = 1$, mais le sommet u_{i-1}^1 ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 5\}$. Soit $\pi(u_i^1) = 4$ (respectivement $\pi(u_i^1) = 5$) et donc $\pi(u_{i-1}^0) = \{1, 5\}$ (respectivement $\{1, 4\}$). Dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 5$ (respectivement 4), ce qui est impossible (car $d(u_{i-2}^0, u_{i-1}^1) = 2$), et dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 5$ (respectivement 4) alors $\pi(u_{i+2}^0) = 1$, mais $\pi(u_{i+3}^0) = \pi(u_{i+2}^1) = 2$, contradiction (car $d(u_{i+3}^0, u_{i+2}^1) = 2$).

Cas 2) $\pi(u_i^0) = 2$ et $\pi(u_{i+1}^0) = 4$ (respectivement 5) : donc soit $\pi(u_i^1) = 1$, par conséquent $\{u_i^2, u_{i+1}^1\} = \{3, 5\}$ (respectivement $\{3, 4\}$) et par suite $\pi(u_{i-1}^0) = 1$, mais $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 3$, ce qui est impossible. Soit $\pi(u_i^1) = 3$ et donc $\pi(u_{i-1}^0) = \{1, 5\}$ (respectivement $\{1, 4\}$). Dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 5$ (respectivement 4), contradiction, et dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 5$ (respectivement 4) alors $\pi(u_{i+1}^1) = \pi(u_i^2) = 1$ et par suite $\pi(u_i^3) = 2$, mais le sommet u_{i+1}^2 ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_i^1) = 5$ (respectivement 4) et donc $\pi(u_{i-1}^0) = \{1, 3\}$, dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 3$ ce qui est impossible, et dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 3$ alors $\pi(u_{i-1}^1) = 1$, mais $\pi(u_{i-2}^1) = \pi(u_{i-1}^2) = 2$. Contradiction.

Cas 3) $\pi(u_i^0) = 3$ et $\pi(u_{i+1}^0) = 4$ (respectivement 5) : donc soit $\pi(u_i^1) = 1$, par conséquent $\{\pi(u_i^2), \pi(u_{i+1}^1)\} = \{2, 5\}$ (respectivement $\{2, 4\}$) et par suite $\pi(u_{i-1}^0) \in \{1, 2\}$. Dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 2$, ce qui est impossible, et dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 2$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 1$, mais les sommets u_{i-3}^0 , u_{i-2}^1 et u_{i-1}^2 ne peuvent pas être colorés. Soit $\pi(u_i^1) = 2$

et donc $\pi(u_i^2) \in \{1, 5\}$ (respectivement $\{1, 4\}$). Dans le cas où $\pi(u_i^2) = 1$ alors $\pi(u_i^3) = \pi(u_{i+1}^2) = 5$ (respectivement 4), ce qui est impossible, et finalement dans le cas où $\pi(u_i^2) = 5$ (respectivement 4) alors $\pi(u_{i+1}^1) = 1$, mais le sommet u_{i+1}^2 ne peut prendre aucune couleur, ce qui nous conduit à une contradiction. Soit $\pi(u_i^1) = 5$ et donc $\pi(u_{i-1}^0) \in \{1, 2\}$. Si $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 2$, ce qui est impossible, et si $\pi(u_{i-1}^0) = 2$ alors $\pi(u_{i-1}^1) = 1$, mais le sommet u_{i-1}^2 ne peut prendre aucune couleur parmi $\{1, \dots, 5\}$.

Cas 4) $\pi(u_i^0) = 4$ et $\pi(u_{i+1}^0) = 5$: donc soit $\pi(u_i^1) = 1$, par conséquent $\{\pi(u_i^2), \pi(u_{i+1}^1)\} = \{2, 3\}$ et par suite $\pi(u_{i+1}^2) = 1$, mais le sommet u_{i+1}^3 ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_i^1) = 2$ et donc $\pi(u_{i-1}^0) \in \{1, 3\}$. Dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\{\pi(u_{i-2}^0), \pi(u_{i-1}^1)\} = \{2, 3\}$ et $\pi(u_{i-1}^2) = \pi(u_{i-2}^1) = \pi(u_{i-3}^0) = 1$, mais les sommets u_{i-4}^0 , u_{i-3}^1 et u_{i-2}^2 ne peuvent pas être colorés. Finalement dans le cas où $\pi(u_{i-1}^0) = 3$ alors $\pi(u_{i+1}^1) = \pi(u_i^2) = 1$ et $\pi(u_i^3) = \pi(u_{i+1}^2) = 3$ ce qui est impossible. Soit $\pi(u_i^1) = 3$ et donc $\pi(u_{i-1}^0) \in \{1, 2\}$, si $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 2$, ce qui est impossible, et si $\pi(u_{i-1}^0) = 2$ alors $\pi(u_{i-2}^0) = \pi(u_{i-1}^1) = 1$, mais $\pi(u_{i-2}^1) = \pi(u_{i-1}^2) = 3$, ce qui nous conduit à une contradiction.

Ce qui complète la preuve. □

Lemme 3.21. *Si $\chi_\rho(H_\ell(r)) \leq 5$, pour $\ell \geq 3$ et $r \geq 3$, alors pour toute coloration de packing optimale et pour toute arête e de $H_\ell(r)$ qui n'appartient pas aux arêtes des niveaux 0 et $\ell + 1$, on a soit l'une de ses deux extrémités est colorée avec 1, soit e est l'une des trois arêtes de la configuration illustrée dans la Figure 3.16 (ou bien ses symétries).*

Preuve. Soit $H_\ell(r)$ un H -graphe généralisé, supposons que $\chi_\rho(H_\ell(r)) \leq 5$.

Pour montrer que pour toute arête e de $H_\ell(r)$ (à l'exception des arêtes des niveaux 0 et $\ell + 1$), l'une de ses deux extrémités est colorée avec 1, il suffit de

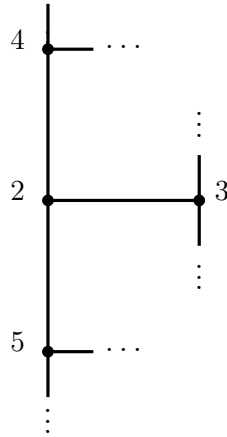


FIGURE 3.16 – Configuration du Lemme 3.21

montrer que pour tout i , et pour tout j , $0 < j \leq \ell$, $\pi(u_i^j) = 1$ ou $\pi(u_i^{j+1}) = 1$. Nous raisonnons par l'absurde.

Supposons qu'il existe i, j tel que $\pi(u_i^j) \neq 1$ et $\pi(u_i^{j+1}) \neq 1$. Par symétrie, on a seulement quatre cas à considérer. Toujours par symétrie, on peut considérer que i est impair. Dans le cas où l'indice $i - 1$ est utilisé, celui-ci est considéré modulo $2r$.

Cas 1) $\pi(u_i^j) = 2$ et $\pi(u_i^{j+1}) = 3$: donc $\pi(u_{i+1}^j) \in \{1, 4, 5\}$. Dans le cas où $\pi(u_{i+1}^j) = 1$ alors $\{\pi(u_{i+1}^{j-1}), \pi(u_{i+1}^{j+1})\} = \{4, 5\}$ et par suite $\pi(u_i^{j-1}) = 1$, mais le sommet u_i^{j-2} (ou u_{i-1}^0 lorsque $j = 1$) ne peut prendre aucune couleur. Dans le cas où $\pi(u_{i+1}^j) = 4$ (respectivement 5) alors soit $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et donc $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 5$ (respectivement 4), mais l'autre voisin de u_i^{j-1} ne peut prendre aucune couleur, soit $\pi(u_i^{j-1}) = 5$ (respectivement 4) et par suite l'autre voisin de u_i^{j+1} prend la couleur 1, mais les deux autres voisins de ce dernier ne peuvent pas être colorés.

Cas 2) $\pi(u_i^j) = 2$ et $\pi(u_i^{j+1}) = 4$ (respectivement 5) : donc $\pi(u_{i+1}^j) \in \{1, 3, 5\}$ (respectivement $\{1, 3, 4\}$).

cas 2.1) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 1$ et $\pi(u_i^{j+1}) = 4$ alors soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 3$ et $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 5$, par conséquent $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et par suite le sommet u_i^{j-2} (ou le sommet u_{i-1}^0 lorsque $j = 1$) ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_{i+1}^j) = 3$ et $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 5$, par conséquent $\pi(u_i^{j-2}) = 3$ (ou $\pi(u_{i-1}^0) = 3$ lorsque $j = 1$) et $\pi(u_i^{j+2}) = 1$ (ou $\pi(u_{i-1}^{\ell+1}) = 1$ lorsque $j = \ell$) et par suite l'un des deux voisins de ce

dernier prend la couleur 2, mais l'autre ne peut prendre aucune couleur.

cas 2.2) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 1$ et $\pi(u_i^{j+1}) = 5$ alors soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 3$ et $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 4$, par conséquent $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et par suite le sommet u_i^{j-2} (ou le sommet u_{i-1}^0 lorsque $j = 1$) ne peut pas être coloré. Soit $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 3$ et $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 4$, par conséquent $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et $\pi(u_i^{j-2}) = 3$ (ou $\pi(u_{i-1}^0) = 3$ lorsque $j = 1$) et $\pi(u_i^{j+2}) = 1$ (ou $\pi(u_{i-1}^{\ell+1}) = 1$ lorsque $j = \ell$), et donc $\pi(u_{i+1}^{j+2}) \in \{1, 2\}$. Dans le cas où $\pi(u_{i+1}^{j+2}) = 1$ (ou $\pi(u_{i+2}^{\ell+1}) = 1$ lorsque $j = \ell$) et par suite les deux voisins de u_{i+1}^{j+2} (ou $u_{i+2}^{\ell+1}$ lorsque $j = \ell$) ne peuvent prendre que la couleur 2, ce qui est impossible. Dans le cas où $\pi(u_{i+1}^{j+2}) = 2$ (ou $\pi(u_{i+2}^{\ell+1}) = 2$ lorsque $j = \ell$) et par suite les deux voisins de u_{i+1}^{j+2} (ou $u_{i+2}^{\ell+1}$ lorsque $j = \ell$) doivent prendre la couleur 1, mais leurs deux voisins ne peuvent pas prendre la même couleur 4, ce qui est impossible.

Cas 2.3) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 3$ alors forcément $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ (si $\pi(u_i^{j-1}) = 5$ alors on a la configuration de la Figure 3.7), et par suite les deux voisins de u_i^{j-1} ne peuvent prendre que la couleur 5, ce qui est impossible.

Cas 2.4) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 5$ (respectivement 4) alors on a soit $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et donc les deux voisins de u_i^{j-1} peuvent prendre que la couleur 3, ce qui est impossible. Soit $\pi(u_i^{j-1}) = 3$ et par conséquent $\pi(u_i^{j-2}) = 1$ (ou $\pi(u_{i-1}^0) = 1$ lorsque $j = 1$) et les deux autres voisins de ce dernier ne peuvent prendre que la couleur 2, ce qui est impossible.

Cas 3) $\pi(u_i^j) = 3$ et $\pi(u_i^{j+1}) = 4$ (respectivement 5) : donc $\pi(u_{i+1}^j) \in \{1, 2, 5\}$ (respectivement $\{1, 2, 4\}$).

Cas 3.1) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 1$ alors soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 2$ et $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 5$ (respectivement 4) et par suite $\pi(u_i^{j-1}) = 1$, mais le voisin de ce dernier ne peut pas être coloré, soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 5$ (respectivement 4) et $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 2$ et donc $\pi(u_{i+1}^{j+2}) = 1$ ($\pi(u_{i+2}^{\ell+1}) = 1$ lorsque $j = \ell$), mais les deux voisins de ce dernier ne peuvent prendre que la couleur 3, ce qui est impossible.

Cas 3.2) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 2$ alors soit $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et par conséquent les deux voisins de u_i^{j-1} ne peuvent prendre que la couleur 5 (respectivement 4),

ce qui est impossible, soit $\pi(u_i^{j-1}) = 5$ (respectivement 4), par conséquent $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 1$ et le voisin de u_{i+1}^{j-1} ne peut pas être coloré.

Cas 3.3) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 5$ (respectivement 4) alors soit $\pi(u_i^{j-1}) = 1$ et donc les deux voisins de ce dernier ne peuvent prendre que la couleur 2, ce qui est impossible, soit $\pi(u_i^{j-1}) = 2$ et par suite le sommet u_{i+1}^{j-1} prend la couleur 1, mais son voisin ne peut pas être coloré.

Cas 4) $\pi(u_i^j) = 4$ et $\pi(u_i^{j+1}) = 5$: donc $\pi(u_{i+1}^j) \in \{1, 2, 3\}$.

Cas 4.1) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 1$ alors soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 2$ et $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 3$ et par suite $\{\pi(u_i^{j+2}), \pi(u_{i+1}^{j+2})\} = \{1, 2\}$ (ou $\pi(u_{i+2}^{\ell+1}) = 1$ lorsque $j = \ell$ et par suite l'un de ses voisins prend la couleur 2 et l'autre ne peut prendre aucune couleur), supposons sans perte de généralité que $\pi(u_i^{j+2}) = 1$ et $\pi(u_{i+1}^{j+2}) = 2$, et par conséquent le sommet u_i^{j+3} (ou le sommet $u_{i-1}^{\ell+1}$ lorsque $j = \ell - 1$) ne peut prendre aucune couleur.

Soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 3$, $\pi(u_{i+1}^{j+1}) = 2$ et donc le voisin de u_{i+1}^{j+1} prend la couleur 1 et les deux voisins de ce dernier doivent prendre la même couleur 3, ce qui est impossible.

Cas 4.2) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 2$ alors soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 1$ et par conséquent ses deux voisins doivent prendre la couleur 3, ce qui est impossible. Soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 3$ et par suite le sommet u_{i+1}^{j+1} prend la couleur 1, mais son voisin ne peut prendre aucune couleur.

Cas 4.3) Si $\pi(u_{i+1}^j) = 3$ alors soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 1$ et par suite les deux voisins de ce dernier doivent prendre la même couleur 2, ce qui est impossible. Soit $\pi(u_{i+1}^{j-1}) = 2$ et par suite le sommet u_i^{j-1} prend la couleur 1, mais son voisin ne peut prendre aucune couleur.

D'où le résultat.

□

Des deux lemmes précédents, nous déduisons directement le corollaire suivant :

Corollaire 3.22. *Si $\chi_\rho(H_\ell(r)) = 5$ alors il existe toujours une 5-coloration de packing optimale de $H_\ell(r)$, $\ell \geq 3$ et $r \geq 3$, avec tout sommet d'une classe de bipartition soit coloré avec 1.*

En effet, d'après les Lemmes 3.21 et 3.20, il suffit de recolorer avec 1 les sommets de la configuration 3.16 colorés avec 2.

Pour un H -graphe généralisé, avec $\ell \geq 3$ et $\ell \neq 5$, nous montrons le résultat suivant :

Théorème 3.23. *Soit $H_\ell(r)$ un H -graphe généralisé, avec $\ell \geq 3$ et $\ell \neq 5$. On a*

$$\chi_\rho(H_\ell(r)) = \begin{cases} 5 & \text{si } \ell \text{ est pair,} \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Preuve.

Cas 1) r est pair

Comme $C_{2r} \odot K_1$ (qui est la couronne du cycle de longueur $2r$) est un sous-graphe de $H_\ell(r)$ alors $\chi_\rho(H_\ell(r)) \geq \chi_\rho(C_{2r} \odot K_1)$ et d'après le Théorème 3.7 on a $\chi_\rho(C_{2r} \odot K_1) = 5$, donc $\chi_\rho(H_\ell(r)) \geq 5$. Nous montrons maintenant que $\chi_\rho(H_\ell(r)) \leq 5$. Les 5-colorations de packing des H -graphes généralisés circulaires dépendent du reste de la division euclidienne de ℓ par le nombre 6 et sont données par les Figures 3.17 et 3.18².

A partir de ces colorations, on obtient l'inégalité $\chi_\rho(H_\ell(r)) \leq 5$, d'où $\chi_\rho(H_\ell(r)) = 5$ lorsque r est pair.

Cas 2) r est impair

Nous supposons qu'il est possible de colorer un H -graphe généralisé $H_\ell(r)$ lorsque r est impair avec seulement 5 couleurs.

D'après les Lemmes 3.20 et 3.21, on a pour chaque arête du graphe l'une de ses deux extrémités est colorée avec 1, et on ignore la configuration de la Figure 3.16, car dans ce cas, on peut toujours remplacer la couleur 2 par 1, et évidemment ce

2. Les motifs en bleu sont verticalement périodiques (les six premières lignes).

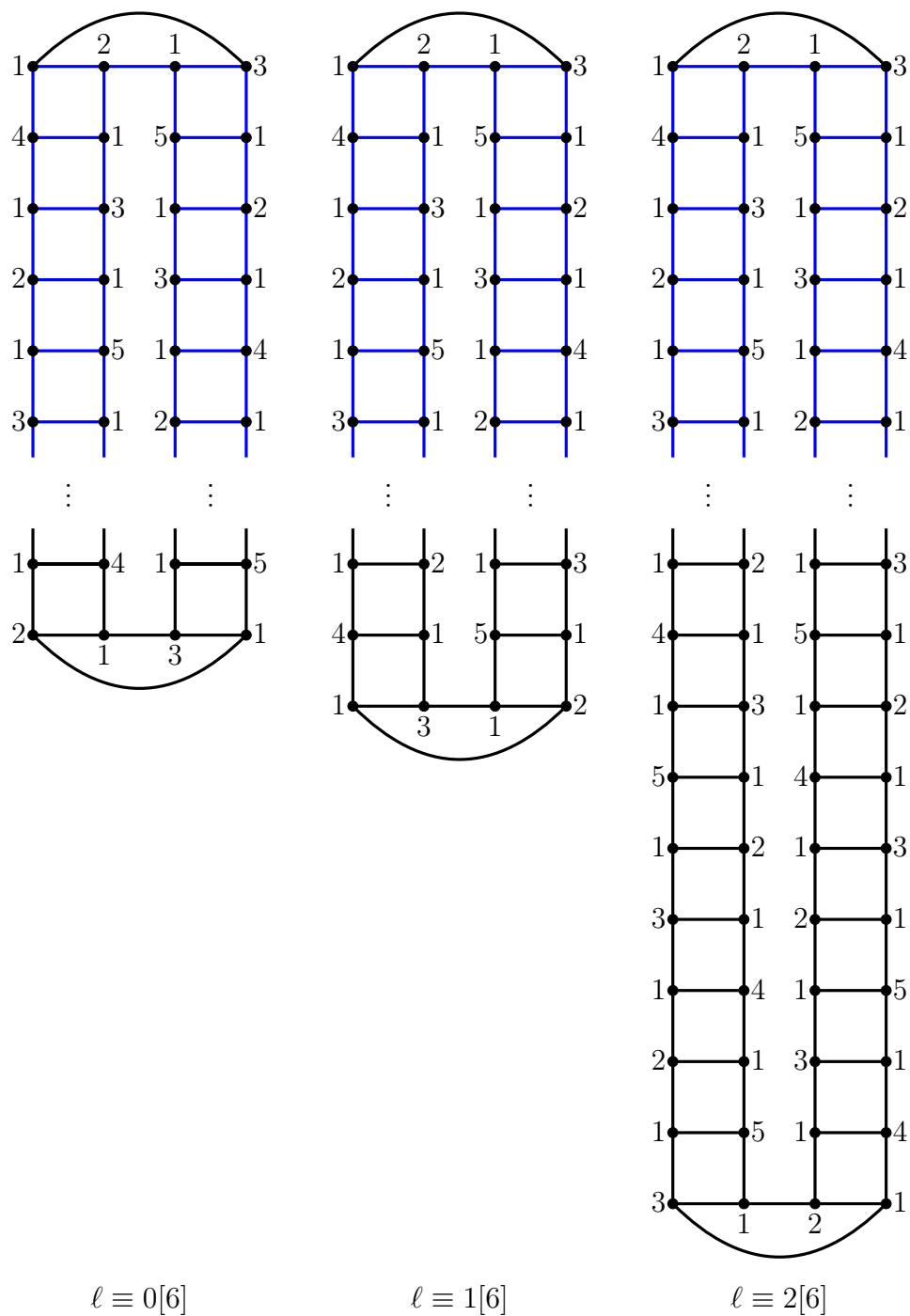


FIGURE 3.17 – Une coloration de packing circulaire d'un H -graphe généralisé $H_\ell(r)$ lorsque r est pair et $\ell \equiv 0, 1, 2[6]$

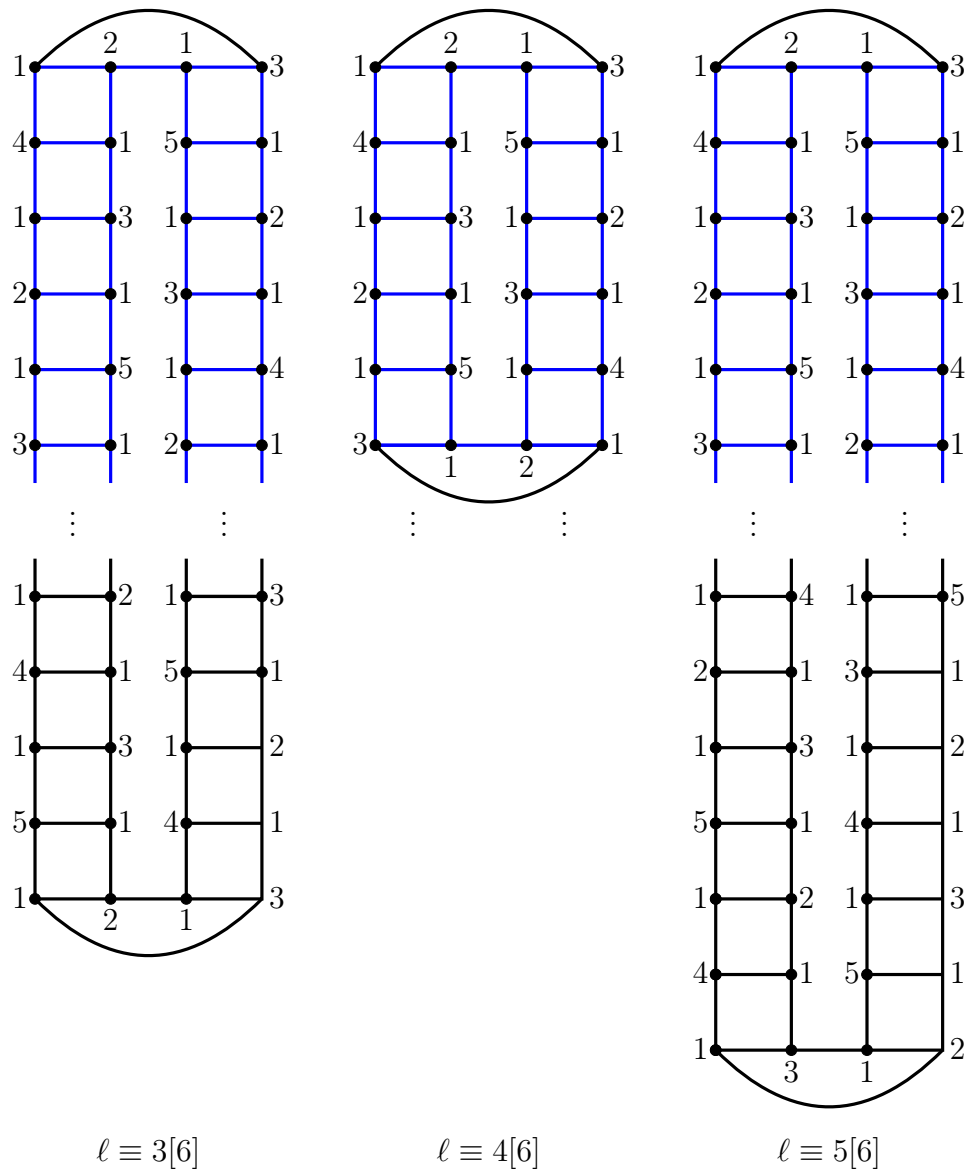


FIGURE 3.18 – Une coloration de packing circulaire d'un H -graphe généralisé $H_\ell(r)$ lorsque r est pair et $\ell \equiv 3, 4, 5[6]$

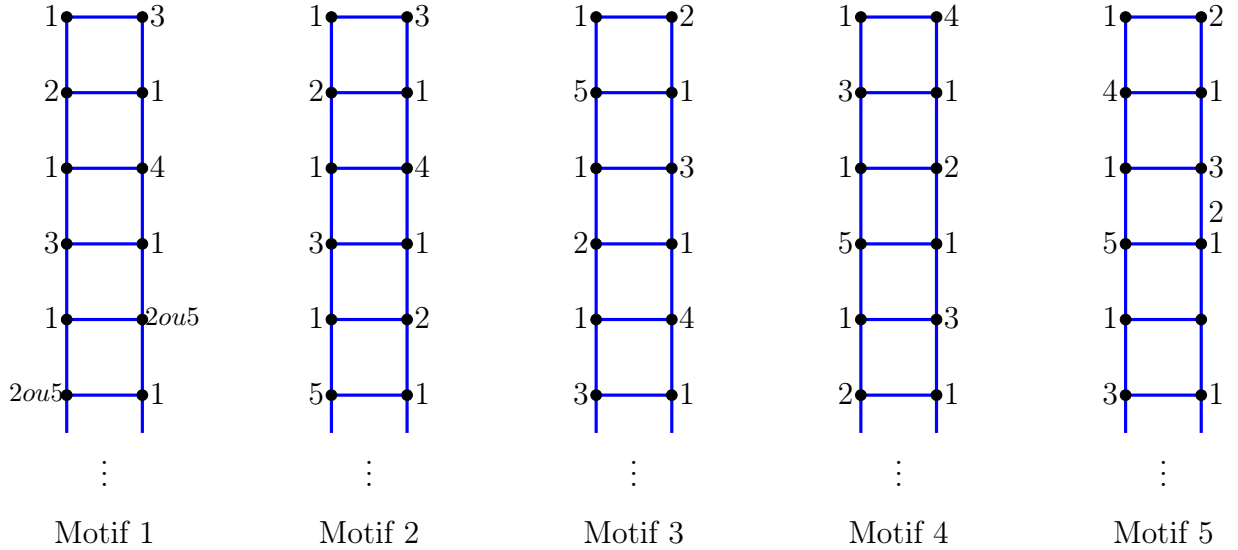


FIGURE 3.19 – Les 5-colorations de packing possibles d’une seule échelle

changement n’influence pas sur la coloration des sommets restants. On suppose sans perte de généralité que $\pi(u_i^j) = 1$ lorsque i est pair et j est impair et lorsque i est impair et j est pair.

Si on prend une seule échelle verticale, alors les seules colorations possibles sont données par la Figure 3.19, plus ces motifs en inversant entre les couleurs 2 et 3 ou bien entre 4 et 5 :

Parmi ces vingt colorations possibles, il est impossible de trouver une succession circulaire impaire compatible de ces motifs, ce qui signifie qu’il est impossible de colorer un H -graphe généralisé $H_\ell(r)$ lorsque r est impair avec seulement 5 couleurs, donc $\chi_\rho(H_\ell(r)) \geq 6$.

Des 6-colorations de packing qui dépendent du reste de la division euclidienne de ℓ par le nombre 6 sont illustrées dans les Figures 3.20 et 3.21³.

Il reste les trois cas particuliers suivants :

Pour $\ell = 3$ et $r = 3$, une 6-coloration de packing optimale est donnée par le motif

3. Pour simplifier, on donne directement les couleurs des sommets, les motifs qui sont en gras sont verticalement périodiques et ceux qui sont entre crochets sont horizontalement périodiques.

12-13-[12-13]-16	12-13-[12-13]-16	12-13-[12-13]-16
41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21
13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13
21-31-[21-31]-51	21-31-[21-31]-51	21-31-[21-31]-41
15-14-[15-14]-12	15-14-[15-14]-12	15-14-[15-14]-12
31-21-[31-21]-31	31-21-[31-21]-31	31-21-[31-21]-31
12-13-[12-13]-14	12-13-[12-13]-14	12-13-[12-13]-15
41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21
13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13
21-31-[21-31]-51	21-31-[21-31]-51	51-41-[51-41]-41
15-14-[15-14]-12	15-14-[15-14]-12	12-13-[12-13]-12
31-21-[31-21]-31	31-21-[31-21]-31	31-21-[31-21]-51
12-15-[14-15]-14	12-13-[12-13]-15	14-15-[14-15]-14
61-31-[21-31]-21	41-51-[41-51]-31	21-31-[21-31]-31
	13-12-[13-12]-16	15-14-[15-14]-12
		31-21-[31-21]-61
$\ell \equiv 0[6]$	$\ell \equiv 1[6]$	$\ell \equiv 2[6]$

FIGURE 3.20 – Des 6-colorations de packing de $H_\ell(r)$ avec $\ell \equiv 0, 1, 2[6]$

13-12-[13-12]-16	12-13-[12-13]-16	12-13-[12-13]-16
41-51-[41-51]-31	41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21
12-13-[12-13]-15	13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13
31-21-[31-21]-21	21-31-[21-31]-51	21-31-[21-31]-51
15-14-[15-14]-14	15-14-[15-14]-12	15-14-[15-14]-12
21-31-[21-31]-31	31-21-[31-21]-31	31-21-[31-21]-31
13-12-[13-12]-12	12-13-[12-13]-14	12-13-[12-13]-14
41-51-[41-51]-51	41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21
12-13-[12-13]-13	13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13
31-21-[31-21]-41	21-31-[21-31]-51	21-31-[21-31]-51
15-14-[15-14]-12	15-14-[15-14]-12	15-14-[15-14]-12
21-31-[21-31]-31	31-21-[31-21]-31	31-21-[31-21]-31
13-12-[13-12]-15	12-13-[12-13]-14	14-15-[14-15]-14
41-51-[41-51]-21	41-51-[41-51]-21	21-31-[21-31]-21
12-13-[12-13]-14	13-12-[13-12]-13	13-12-[13-12]-13
51-41-[51-41]-31	21-31-[21-31]-51	51-41-[51-41]-51
13-12-[13-12]-16	15-14-[15-14]-12	12-13-[12-13]-12
	31-21-[31-21]-61	41-51-[41-51]-31
		13-12-[13-12]-16
$\ell \equiv 3[6]$	$\ell \equiv 4[6]$	$\ell \equiv 5[6]$

FIGURE 3.21 – Des 6-colorations de packing de $H_\ell(r)$ avec $\ell \equiv 3, 4, 5[6]$

suivant :

[13 12 16]

[21 51 41]

[14 23 12]

[31 14 31]

[12 61 25]

Pour $\ell = 3$ et $r \geq 5$, une 6-coloration de packing optimale est donnée par le motif suivant :

[13 12] 12 15 12 61 23

[41 51] 41 31 31 14 51

[13 12] 13 14 14 23 12

[51 41] 21 21 21 51 41

[12 13] 15 16 13 12 13

Pour $\ell = 4$, il suffit de considérer les six premières lignes de la coloration de packing présentée dans la Figure 3.21, lorsque $\ell \equiv 4[6]$, et en remplaçant la couleur du sommet u_1^5 par 6.

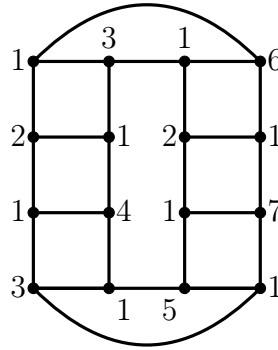
D'où le résultat.

□

Il reste les cas particuliers, lorsque $\ell = 2$ et $\ell = 5$. On a les deux résultats suivants :

Théorème 3.24. *Soit $H_2(r)$ un H -graphe généralisé. On a*

$$\chi_\rho(H_2(r)) = \begin{cases} 7 & \text{si } r = 2, 4, 7, 8, 11, \\ 6 & \text{sinon.} \end{cases}$$

FIGURE 3.22 – Une 7-coloration de packing du graphe $H_2(2)$

Preuve. Considérons d'abord le graphe $H_2(2)$ (ce graphe contient exactement seize sommets), et supposons qu'on peut le colorer avec seulement 6 couleurs. Dans ce graphe, le nombre maximum de sommets qu'on peut colorer avec la couleur 1, 2, 3, 4, 5 et 6 est huit, quatre, deux, deux, une et une respectivement. Si on colore exactement huit sommets avec la couleur 1 alors on peut utiliser au plus deux fois chacune des couleurs 2 et 3 et au plus une fois chacune des couleurs 4, 5 et 6, dans ce cas, au total on peut colorer seulement quinze sommets du graphe $H_2(2)$ et il reste un sommet non coloré. Si on utilise exactement sept fois la couleur 1, alors le nombre total de sommets qu'on peut colorer avec les couleurs restantes augmente d'une unité, c'est-à-dire, on peut colorer au plus huit sommets avec les couleurs 2,...,6, mais il reste toujours un sommet du graphe $H_2(2)$ non coloré. Si on utilise exactement six fois la couleur 1 alors le nombre total de sommets qu'on peut colorer avec les couleurs restantes est neuf, mais il reste un sommet non coloré. Enfin, si on utilise au plus cinq fois la couleur 1, alors on peut colorer au maximum dix sommets avec les couleurs restantes. Contradiction. Donc $\chi_\rho(H_2(2)) \geq 7$, et pour montrer que $\chi_\rho(H_2(2)) \leq 7$, on propose une 7-coloration de packing illustrée dans la Figure 3.22.

Pour les graphes $H_2(r)$ avec $r \in \{4, 7, 8, 11\}$, nous avons utilisé l'ordinateur, en programmant l'algorithme utilisé précédemment dans les preuves des Théorèmes 3.5 et 3.11. Donc pour montrer qu'il est impossible de colorer les $H_2(r)$ tels que $r \in \{4, 7, 8, 11\}$ avec seulement 6 couleurs, il suffit de poser $k = 6$.

13-16-12-15	13-16-14-12-17-14-15
21-21-31-31	21-21-21-51-31-21-31
14-13-14-12	14-13-13-13-12-13-12
31-51-21-71	31-51-71-21-41-51-61
$r = 4$	$r = 7$
13-16-13-12-17-13-12-15	13-16-13-12-14-13-16-14-12-17-15
21-21-21-54-31-21-41-31	21-21-21-51-31-21-21-21-31-31-31
14-13-14-21-14-15-13-12	14-13-14-13-12-15-13-13-15-12-12
31-51-71-36-21-31-21-61	31-51-71-21-61-31-41-71-21-41-61
$r = 8$	$r = 11$

FIGURE 3.23 – Des 7-colorations de packing de $H_2(r)$ avec $r \in \{4, 7, 8, 11\}$

Les 7-colorations de packing de ces graphes sont représentées comme suit : (voir La Figure 3.23) :

Pour montrer que $\chi_\rho(H_2(r)) = 6$ pour les cas restants, considérons le graphe $H'_2(3)$ obtenu à partir du graphe $H_2(3)$ en supprimant les deux arêtes $u_1^0 u_6^0$ et $u_1^3 u_6^3$. Nous avons utilisé l'algorithme précédent pour montrer que $H'_2(3)$ n'admet pas une 5-coloration de packing, ce qui signifie que $\chi_\rho(H'_2(3)) \geq 6$, et comme $H'_2(3)$ est un sous-graphe du graphe $H_2(r)$, avec $r \geq 3$, d'après la Proposition 2.2 $\chi_\rho(H_2(r)) \geq 6$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, il suffit de considérer les 6-colorations de packing illustrées dans les Figures 3.24, 3.25, 3.26 et 3.27 qui dépendent du reste de la division euclidienne de r par le nombre 6.

Enfin pour $r = 5$, on a une 6-coloration de packing de $H_2(5)$ représentée dans la Figure 3.28.

Ce qui complète la preuve.

□

[13-12-15]
 [21-41-31]
 [16-13-14]
 [31-51-21]

FIGURE 3.24 – Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 0[3]$

[13-12-15]-13-14-12-13-14-12-15
 [21-41-31]-61-21-31-51-21-61-31
 [16-13-14]-12-13-16-12-15-13-12
 [31-51-21]-31-51-21-41-31-21-41

FIGURE 3.25 – Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 1[3]$ et $r \geq 10$

[13-12-14-13-16-12]-13-12-13-16-12-13-12-16
 [21-51-31-21-21-31]-41-51-41-21-31-41-51-31
 [14-13-12-15-13-15]-12-13-15-14-15-12-23-15
 [31-21-61-31-41-21]-31-61-21-31-21-36-14-21

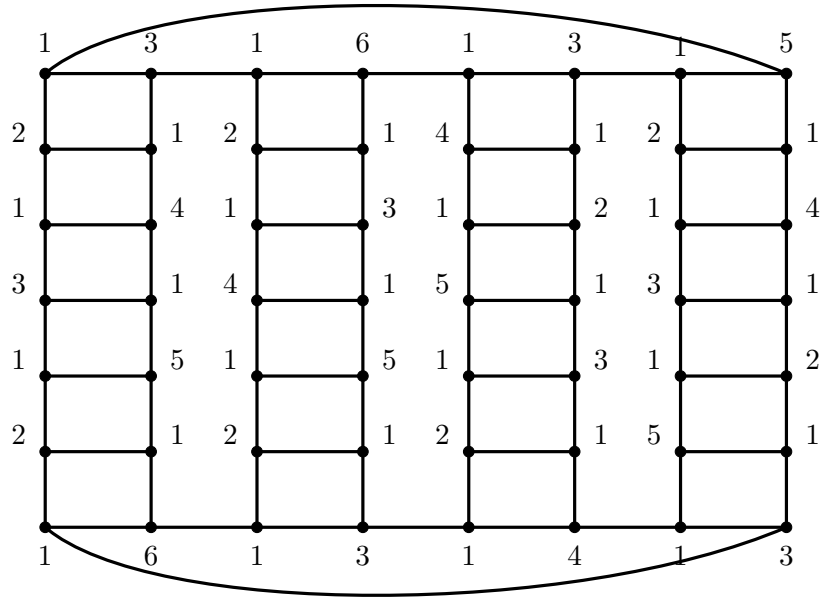
FIGURE 3.26 – Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 2[6]$ et $r \geq 14$

[13-12-14-13-16-12]-13-12-14-13-12-41-63-12-13-12-16
 [21-51-31-21-21-31]-41-51-31-21-51-32-21-51-41-51-31
 [14-13-12-15-13-15]-12-23-15-16-13-15-14-13-12-14-15
 [31-21-61-31-41-21]-36-14-21-31-41-21-31-21-61-31-21

FIGURE 3.27 – Une 6-coloration de packing de $H_2(r)$ avec $r \equiv 5[6]$ et $r \geq 17$

[13-12-13-12-16]
 [21-51-41-51-31]
 [14-13-12-14-15]
 [31-21-61-31-21]

FIGURE 3.28 – Une 6-coloration de packing de $H_2(5)$

FIGURE 3.29 – Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 0[4]$

Théorème 3.25. Soit $H_5(r)$ un H -graphe généralisé. On a

$$\chi_\rho(H_5(r)) = 6.$$

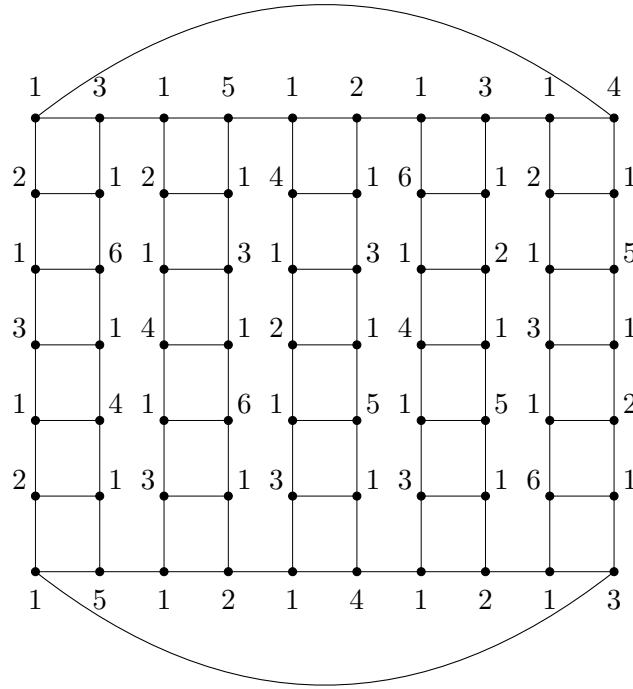
Preuve. Pour $r = 2$, on suppose qu'il est possible de colorer $H_5(2)$ seulement avec 5 couleurs, il suffit alors d'étudier toutes les possibilités pour voir que 5 couleurs ne sont pas suffisantes pour obtenir une 5-coloration de packing.

Pour $r \geq 3$, nous considérons le H -graphe généralisé ouvert $H'_5(3)$, obtenu à partir de la suppression des deux arêtes $u_0^0 u_6^0$ et $u_0^6 u_6^6$ du graphe $H_5(3)$.

Par une simple analyse de cas, nous montrons qu'il est impossible de trouver une 5-coloration de packing de $H'_5(3)$, donc $\chi_\rho(H'_5(3)) \geq 6$, et comme $H'_5(3)$ est un sous-graphe de $H_5(r)$ avec $r \geq 3$, d'après la Proposition 2.2 $\chi_\rho(H_5(r)) \geq 6$.

Pour montrer l'inégalité dans l'autre sens, c'est-à-dire, $\chi_\rho(H_5(r)) \leq 6$, nous proposons les 6-colorations de packing suivantes de $H_5(r)$, qui dépendent du reste de la division euclidienne de r par le nombre 4 et qui sont illustrées dans les Figures 3.29, 3.30, 3.31, 3.32 et 3.33⁴ :

4. Les blocs en gras sont horizontalement périodiques.

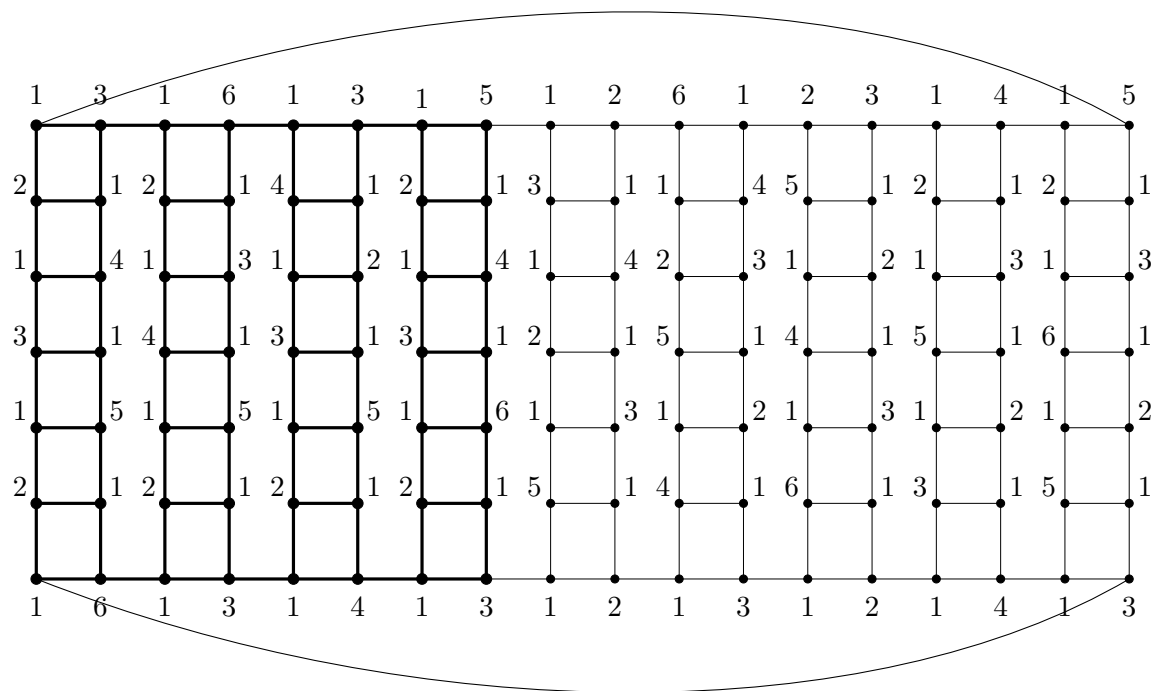
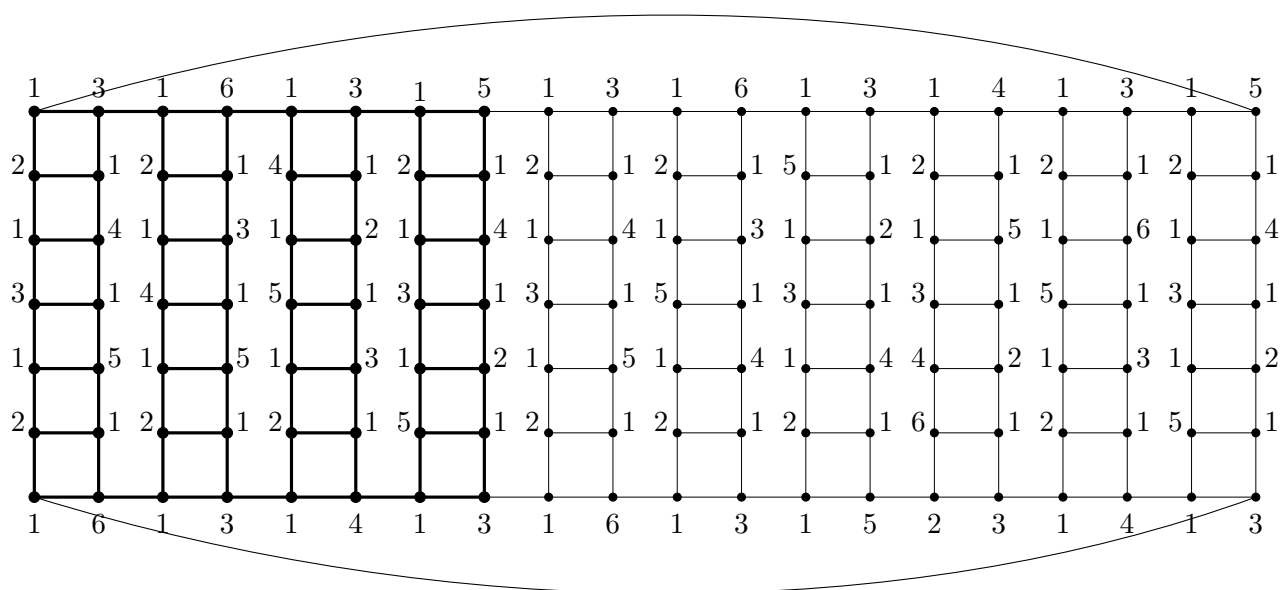
FIGURE 3.30 – Une 6-coloration de packing de $H_5(5)$

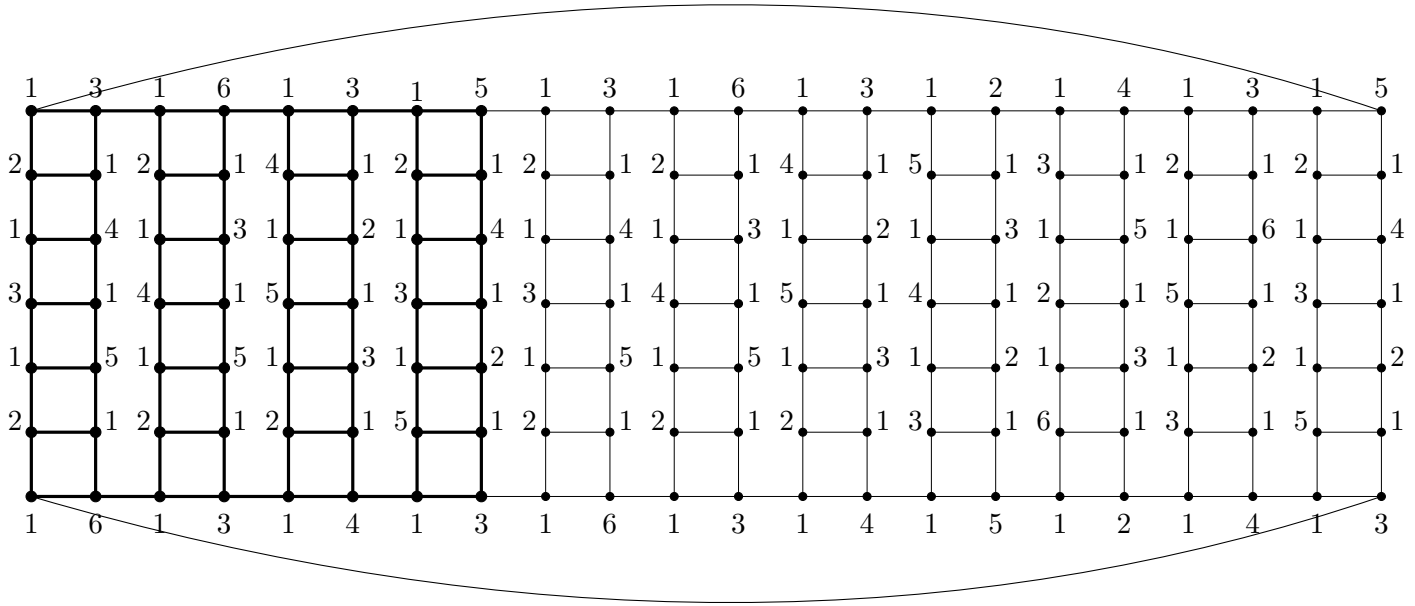
D'où l'égalité $\chi_\rho(H_5(r)) = 6$, et le résultat en découle. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans la première partie de ce chapitre, nous avons étudié la coloration de packing des couronnes et des couronnes généralisées des chaînes et des cycles, et nous avons donné des valeurs exactes du nombre chromatique de packing.

Comme les couronnes des chaînes sont aussi des chenilles, et comme une chenille peut être un sous-graphe induit d'une couronne généralisée d'un cycle, les résultats trouvés, nous donnèrent une borne supérieure du nombre chromatique de packing de quelques classes de chenilles. On a ainsi quelques conditions suffisantes pour qu'une chenille soit i -colorable, pour $3 \leq i \leq 7$, et il serait alors intéressant de répondre à

FIGURE 3.31 – Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 1[4]$ et $r \geq 9$ FIGURE 3.32 – Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 2[4]$

FIGURE 3.33 – Une 6-coloration de packing de $H_5(r)$ avec $r \equiv 3[4]$

la question suivante :

Question 3.26. *Quelles sont les conditions pour qu'une chenille Ch soit i -colorable, pour chaque i , $3 \leq i \leq 7$?*

Il est évident que pour tout entier p et pour tout graphe G , $\chi_\rho(G) \leq \chi_\rho(G \odot pP_1)$. La question suivante est alors naturelle :

Question 3.27. *Est-t-il possible de caractériser les graphes G pour lesquels $\chi_\rho(G) = \chi_\rho(G \odot pP_1)$?*

Dans la seconde partie de ce chapitre, nous avons donné des valeurs exactes du nombre chromatique de packing des échelles circulaires, des H -graphes généralisés de longueurs et de tailles quelconques et des H -graphes, $H(r)$, avec r pair. Pour r impair, nous avons juste montré que la valeur exacte est soit 6 soit 7, mais nous conjecturons que c'est 7. Nous avons montré à l'aide de l'ordinateur que $\chi_\rho(H(r)) = 7$, pour certaines valeurs de r impair (par exemple pour $r \leq 19$).

Conjecture 3.28. *Pour tout entier positif impair r , le H -graphe $H(r)$ vérifie :*

$$\chi_\rho(H(r)) = 7.$$

Chapitre 4

Thêta-graphes généralisés

Dans ce chapitre, nous présentons la coloration de packing des thêta-graphes généralisés. Dans un premier temps, nous proposons une borne supérieure du nombre chromatique de packing de tout thêta-graphe généralisé. Ensuite nous finissons ce chapitre par une caractérisation complète des thêta-graphes généralisés avec un nombre chromatique de packing quelconque.

Les travaux présentés dans ce chapitre, ont fait l'objet d'une publication internationale parue dans "*Australasian Journal of Combinatorics*" [38].

4.1 Borne supérieure

Nous commençons par définir un thêta-graphe généralisé.

Définition 4.1. Un *thêta-graphe généralisé*, noté $\Theta_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p}$, se compose de deux sommets extrêmes reliés par $p \geq 2$ chaînes disjointes de longueurs respectivement $1 \leq \ell_1 \leq \ell_2 \leq \dots \leq \ell_p$.

Dans ce chapitre, nous utilisons les notations suivantes :

- u et v représentent les deux sommets extrêmes du thêta-graphe généralisé $\Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$,
- $P_i = u x_i^1 \dots x_i^{\ell_i-1} v$ représente la chaîne de longueur ℓ_i pour chaque $1 \leq i \leq p$,

- n_ℓ représente le nombre de chaînes de longueur ℓ , c'est-à-dire $n_\ell = |\{i/1 \leq i \leq p, \ell_i = \ell\}|$.

Pour présenter une k -coloration de packing d'une chaîne, on utilise des motifs de coloration, donnés sous forme de mots sur l'alphabet $\{1, \dots, k\}$, on utilise les notations standard de la théorie de langage formel. Par exemple le motif de coloration $12(1312)^+4$ représente les colorations de la forme $12 \ 1312 \ 1312 \ 1312 \dots 4$. Le motif $12(1312)^*4$ représente les colorations de la forme précédente, mais on peut aussi avoir $12 \ 4$.

Comme dans ce document on considère seulement les graphes simples, on ne peut pas avoir plus qu'une arête entre u et v , d'où le résultat suivant.

Remarque 4.2. Pour tout thêta-graphe généralisé, on a forcément $n_1 \leq 1$ et $\ell_2 \geq 2$.

Dans le théorème suivant, nous donnons une borne supérieure du nombre chromatique de packing d'un thêta-graphe généralisé, en fonction du nombre de chaînes de longueur 3 qui relient u et v .

Théorème 4.3. *Pour tout thêta-graphe généralisé $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 2$,*

$$\chi_\rho(\Theta) \leq \max\{5, n_3 + 2\}.$$

De plus, cette borne est atteinte.

Preuve. Nous commençons par prouver que $\chi_\rho(\Theta) \leq 5$ lorsque $n_3 \leq 3$. Soit $\pi : V(\Theta) \longrightarrow \{1, \dots, 5\}$ l'application définie comme suit :

1. $\pi(u) = 4, \pi(v) = 5$,
2. les chaînes de longueur 2 sont colorées avec 415,
3. les chaînes de longueur 3 (on a au plus 3 chaînes) sont colorées avec les motifs suivants 4125, 4215 et 4315,
4. si $\ell_i \equiv 0[4]$, $\ell_i \geq 4$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $4121(3121)^*5$,
5. si $\ell_i \equiv 1[4]$, $\ell_i \geq 5$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $41231(2131)^*5$,
6. si $\ell_i \equiv 2[4]$, $\ell_i \geq 6$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $41(2131)^*5$,

7. si $\ell_i \equiv 3[4]$, $\ell_i \geq 7$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $412(3121)^*5$.

On affirme que π est une 5-coloration de packing de Θ . Pour confirmer ça, on va montrer que pour tous sommets distincts x et y avec $\pi(x) = \pi(y) = c$, $c \in \{1, 2, 3\}$, on a $d_\Theta(x, y) > c$ (on n'a pas à considérer le cas $c \in \{4, 5\}$ puisqu'il y a un seul sommet qui est coloré avec 4 et un seul qui est coloré avec 5).

Notons d'abord que la restriction de π à chaque chaîne P_i est une coloration de packing de P_i . Par conséquent, on a juste besoin de considérer le cas où x et y n'appartiennent pas à la même chaîne.

Si $c = 1$ alors la propriété est évidemment vérifiée, puisque la distance entre deux voisins de u (ou de v) est $2 > c$.

Si $c = 2$ alors la propriété est aussi vérifiée puisque il y a au plus un seul sommet voisin de u qui est coloré avec 2, et au plus un seul voisin de v qui est coloré avec 2.

Si $c = 3$ alors la propriété est aussi vérifiée, car il y a au plus un seul voisin de u qui est coloré avec la couleur 3, et aucun autre sommet à distance deux de u qui est coloré avec 3, et aucun sommet avec la même couleur 3 adjacent à v . Donc π est une 5-coloration de packing de Θ .

Finalement, lorsque $n_3 > 3$, on garde la coloration précédente et pour le reste des chaînes de longueur 3, on utilise les motifs de la forme 4165, 4175, 4185, ... Puisque chaque couleur $c > 5$ est utilisée une seule fois, on obtient une $(n_3 + 2)$ -coloration de packing de Θ .

Le fait que $\max\{5, n_3 + 2\}$ est une borne supérieure atteinte lorsque $n_3 \geq 3$ sera prouvé dans le Lemme 4.5, qu'on va présenter par la suite.

□

4.2 Caractérisation complète

En 2013, William et Roy [55] ont donné une condition suffisante pour qu'un thêta-graphe généralisé soit 4-packing colorable.

Théorème 4.4. [55] Soit $G = \Theta_{\ell_1, \ell_2, \dots, \ell_p}$ un thêta-graphe généralisé avec $\ell_i \geq 3$

pour tout $i \in \{1, 2, \dots, p\}$. Si $\ell_i \equiv 0[4]$ pour $i \in \{1, 2, \dots, p-1\}$ et $\ell_p \equiv 0, 1, 2[4]$ alors $\chi_\rho(G) = 4$.

Nous allons caractériser les thêta-graphes généralisés ayant pour nombre chromatique de packing k pour tout $k \geq 3$. Puisque tout thêta-graphe généralisé Θ contient au moins un cycle, alors d'après la Proposition 2.7 $\chi_\rho(\Theta) \geq 3$. De plus, la Proposition 2.7 caractérise les thêta-graphes généralisés ayant pour nombre chromatique de packing 3 ou 4 lorsque $p = 2$. Par conséquent, sauf indication contraire, dans le reste de ce chapitre, on va considérer que $p \geq 3$.

Le lemme suivant détermine le nombre chromatique de packing des thêta-graphes généralisés de type $\Theta_{3,\dots,3}$:

Lemme 4.5. Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1,\dots,\ell_p}$, $p \geq 3$ avec $n_3 = p$. On a

$$\chi_\rho(\Theta) = p + 2.$$

Preuve. Par le Théorème 4.3, on a $\chi_\rho(\Theta) \leq p + 2$, par suite, il suffit de prouver que pour toute k -coloration de packing π de Θ , $k \geq p + 2$.

Si $\pi(u) = \pi(v) = 1$ alors on peut affecter la couleur 2 au plus deux fois, et tous les sommets restants doivent avoir des couleurs différentes, et donc l'application π nécessite au moins $2(p-1) + 2 = 2p \geq p + 2$ couleurs.

Si $\pi(u) = 1$ et $\pi(v) \neq 1$, alors aucun des sommets x_i^1 , $1 \leq i \leq p$, ne peut prendre la couleur 1, et aucun ne peut prendre la couleur du sommet v . Comme les sommets $\{u, x_1^1, \dots, x_p^1\}$ sont deux à deux à distance au plus 2, ces $p+1$ sommets doivent avoir des couleurs différentes, ce qui nécessite au moins $p+2$ couleurs. Le cas $\pi(v) = 1$ et $\pi(u) \neq 1$ est similaire.

Finalement, si $\pi(u) \neq 1$ et $\pi(v) \neq 1$, alors dans chaque chaîne, on a au plus un sommet qui peut prendre la couleur 1, la couleur 2 peut être utilisée dans le graphe au plus 2 fois, et comme tous les sommets du graphe sont à distance au plus 3, on a besoin d'au moins $p+2$ couleurs. $\square$

Le lemme suivant caractérise les thêta-graphes généralisés ayant pour nombre chromatique de packing k , pour tout $k > 5$:

Lemme 4.6. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. On a, pour tout $k > 5$, $\chi_\rho(\Theta) = k$ si et seulement si $n_3 = k - 2$.*

Preuve. Si $n_3 = k - 2$, alors d'après le Théorème 4.3 $\chi_\rho(\Theta) \leq k$.

Soit Θ' le sous graphe de Θ induit par les n_3 chaînes de longueur 3, on a, d'après le Lemme 4.5, $\chi_\rho(\Theta') = n_3 + 2$ et, d'après la Proposition 2.2, on a $\chi_\rho(\Theta) \geq \chi_\rho(\Theta')$ donc $\chi_\rho(\Theta) \geq n_3 + 2 = k$.

D'où l'implication si $n_3 = k - 2$ alors $\chi_\rho(\Theta) = k$.

Si $\chi_\rho(\Theta) = k$, alors d'après le Théorème 4.3, on a $k \leq n_3 + 2$, donc $n_3 \geq k - 2$.

D'après le Lemme 4.5 $\chi_\rho(\Theta') = n_3 + 2$, et d'après la Proposition 2.2, $\chi_\rho(\Theta) \geq \chi_\rho(\Theta')$, c'est-à-dire $k \geq n_3 + 2$, par conséquent $n_3 \leq k - 2$, d'où l'égalité $n_3 = k - 2$. Donc si $\chi_\rho(\Theta) = k$ alors $n_3 = k - 2$, d'où le résultat.

□

Les thêta-graphes généralisés ayant pour nombre chromatique de packing 3 sont caractérisés comme suit :

Lemme 4.7. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 2$, un thêta-graphe généralisé. On a $\chi_\rho(\Theta) = 3$ si et seulement si l'une des conditions suivante est vérifiée :*

- (i) $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = \dots = \ell_p = 2$, ou
- (ii) Pour tout i et j , $1 \leq i \leq j \leq p$, $\ell_i + \ell_j \equiv 0[4]$.

Preuve. Par la Proposition 2.7, si $p = 2$ alors $\chi_\rho(\Theta) = 3$ si et seulement si $\ell_1 = 1$ et $\ell_2 = 2$, ou $\ell_1 + \ell_2 \equiv 0[4]$. Donc, on suppose que $p \geq 3$.

Nous commençons par prouver que si $\ell_1 = 1$, $\ell_2 = 2$ et $\ell_3 > 2$ alors $\chi_\rho(\Theta) > 3$. Supposons le contraire, c'est-à-dire, il existe une 3-coloration de packing π de Θ . Puisque P_1 et P_2 forment un cycle de longueur 3, alors on a forcément $\pi(x_2^1) = \pi(x_p^1) = 1$ et $\{\pi(u), \pi(v)\} = \{2, 3\}$. Supposons, sans perte de généralité, que $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 3$, ce qui implique qu'il ne reste aucune couleur pour x_p^2 puisque

$d_{\Theta}(x_p^2, x_p^1) = 1$, $d_{\Theta}(x_p^2, u) = 2$ et $d_{\Theta}(x_p^2, v) \leq 3$. Contradiction. D'où la Condition (i).

Par la Proposition 2.7, on sait que, pour $n \geq 3$, $3 \leq \chi_{\rho}(C_n) \leq 4$ et $\chi_{\rho}(C_n) = 3$ si et seulement si $n = 3$ ou $n \equiv 0[4]$. Par conséquent, si Θ contient un cycle de longueur $\ell \not\equiv 0[4]$, $\ell > 3$, alors $\chi_{\rho}(C_n) > 3$. Évidemment, cela se produit lorsqu'il existe i et j , $1 \leq i \leq j \leq p$, avec $\ell_i + \ell_j = \ell$ et $\ell \not\equiv 0[4]$. D'où la condition (ii).

Inversement, supposons que pour tout i et j , $1 \leq i \leq j \leq p$, $\ell_i + \ell_j \equiv 0[4]$. On a deux cas à considérer. Si $\ell_i \equiv 0[4]$ pour tout i , $1 \leq i \leq p$, une 3-coloration de packing π de Θ est obtenue en colorant chaque chaîne P_i avec le motif de coloration $(2131)^*2$. Si $\ell_i \equiv 2[4]$ pour tout i , $1 \leq i \leq p$, une 3-coloration de packing π de Θ est obtenue en colorant chaque chaîne P_i avec le motif de coloration $21(3121)^*3$.

Ce qui complète la preuve. $\square$

Il nous reste à caractériser les thêta-graphes généralisés ayant pour nombre chromatique de packing 4 et 5. Grâce à la Proposition 2.7, on ne considère pas les cycles. Les lemmes suivants, nous permettront de caractériser les thêta-graphes généralisés (supposons que $p \geq 3$) ayant pour nombre chromatique de packing 4, et cela en fonction des couleurs affectées aux sommets extrêmes u et v .

Les trois premiers lemmes caractérisent les thêta-graphes généralisés qui admettent une 4-coloration de packing π avec $\pi(u) = \pi(v) = 4$, 3 ou 2.

Lemme 4.8. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = \pi(v) = 4$ si et seulement si $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.*

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe une application π qui est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = \pi(v) = 4$. Alors, on a forcément $d_{\Theta}(u, v) > 4$, ce qui implique que $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$.

Inversement, supposons que $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$. On peut colorer chaque

chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \geq 5$, en utilisant les motifs suivants qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $4(1213)^+1214$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $413(1213)^*214$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $4(1213)^+14$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $4(1213)^+214$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

La coloration obtenue est une 4-coloration de packing de Θ , car on a bien sur chaque chaîne P_i une coloration de packing. La couleur 4 est utilisé sur les deux sommets u et v et $d_\Theta(u, v) > 4$. Les voisins de u et v sont colorés avec 1 et ils sont à distance supérieure ou égale à 2. Enfin pour tout i et j avec $i \neq j$, on a $d_\Theta(x_i^2, x_j^2) = 4$ (respectivement $d_\Theta(x_i^{\ell_i-2}, x_j^{\ell_j-2}) = 4$) et pour tout i $\pi(x_i^2) \in \{2, 3\}$ (respectivement $\pi(x_i^{\ell_i-2}) \in \{2, 3\}$). D'où le résultat. $\square$

Lemme 4.9. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = \pi(v) = 3$ si et seulement si $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n_5 \leq 2$ et $n_5 + n_6 \leq 4$.*

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe une application π qui est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = \pi(v) = 3$. Donc, on a forcément $d_\Theta(u, v) > 3$, ce qui implique que $n_1 = n_2 = n_3 = 0$. On remarque qu'on peut utiliser seulement les couleurs 1, 2 et 4 pour colorer les sommets internes de chaque chaîne P_i avec $\ell_i \leq 7$, $1 \leq i \leq p$. Par conséquent, toute coloration d'une chaîne de longueur 5 doit utiliser la couleur 4, ce qui implique $n_5 \leq 2$, car sinon, on aura deux sommets colorés avec 4 et qui sont à distance au plus 4 entre eux. Similairement, une chaîne de longueur 6 peut être colorée avec 3121413, 3141213, 3121423, 3241213, 3124123, 3214213 ou 3214123, ce qui implique $n_6 \leq 4$ (cela provient aussi des sommets colorés avec 4). De plus, on a nécessairement $n_6 \leq 2$ lorsque $n_5 = 2$ et $n_6 \leq 3$ lorsque $n_5 = 1$, ce qui implique $n_5 \leq 2$ et $n_5 + n_6 \leq 4$.

Inversement, supposons que $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n_5 \leq 2$ et $n_5 + n_6 \leq 4$. On peut colorer chaque chaîne de longueur 4 avec 31213. Si $n_5 = 2$, on colore les deux

chaîne de longueur 5 avec 312413 et 314213 et les chaînes (au plus deux chaînes) de longueur 6 avec 3124123 et 3214213. Si $n_5 = 1$, on colore la seule chaîne de longueur 5 avec 312413 et les chaînes (au plus trois) de longueur 6 avec 3141213, 3124123 et 3214213. Si $n_5 = 0$, on colore les chaînes (au plus 4) de longueur 6 avec 3121413, 3141213, 3124123 et 3214213.

Finalement, on colore chaque chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \geq 7$, en utilisant les motifs suivants qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $3(1213)^+1213$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $3(1213)^+41213$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $3(1213)^+141213$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $3(1213)^+1241213$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

On vérifie facilement que la coloration obtenue est une 4-coloration de packing de Θ .

□

Lemme 4.10. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = \pi(v) = 2$ si et seulement si $n_1 = n_2 = 0$ et l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) $n_3 \leq 1$ et $n_5 + n_6 + n_7 = 0$, ou
- (ii) $n_3 = 0$ et $n_5 + n_6 + n_7 \leq 2$.

Preuve. Supposons d'abord qu'il existe une application π qui est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = \pi(v) = 2$. Alors, on a forcément $d_\Theta(u, v) > 2$, ce qui implique que $n_1 = n_2 = 0$. On remarque qu'on peut utiliser seulement les couleurs 1, 3 et 4 pour colorer les sommets internes de chaque chaîne P_i avec $\ell_i \leq 5$, $1 \leq i \leq p$. Par conséquent, une chaîne de longueur 3 peut être colorée soit avec 2132 (ou 2312) soit avec 2142 (ou 2412), (l'utilisation des colorations 2342 ou 2432 ne peut pas être meilleure que 2132, 2312, 2142 ou 2412). Ce qui implique que $n_3 \leq 2$.

Si $n_3 = 2$ alors, sans perte de généralité, les deux chaînes de longueur 3 sont colorées soit avec 2132 et 2142, soit avec 2132 et 2412. Dans les deux cas, aucune chaîne

de longueur $\ell \geq 4$ ne peut être colorée, puisqu'on peut affecter que la couleur 1 aux sommets qui sont à distance 1 et 2 de v . Ce qui implique que $p = 2$. Contradiction avec la supposition $p \geq 3$.

Si $n_3 = 1$, comme on a observé précédemment, la seule chaîne de longueur 3 est colorée soit avec 2132 (ou 2312) soit avec 2142 (ou 2412). Dans le premier cas (supposons, sans perte de généralité, que la chaîne est colorée avec 2132), on doit affecter à tout autre sommet à distance au plus 2 de v soit la couleur 1 soit la couleur 4, ce qui implique $\sum_{\ell \geq 4} n_\ell \leq 1$, et donc $p = 2$. Contradiction avec la supposition $p \geq 3$. Dans le second cas, lorsque la chaîne de longueur 3 prend la coloration 2142 (ou 2412), on doit affecter à tout autre sommet à distance au plus 2 de u ou v soit la couleur 1 soit la couleur 3. Donc on ne peut pas colorer une chaîne de longueur 5. La seule façon de colorer une chaîne de longueur 6 est 2314132, et il existe deux façons de colorer une chaîne de longueur 7, 23124132 et 21324132, plus leurs symétries. Puisque chacune de ces colorations affecte la couleur 3 à l'un des voisins de u ou v , on a forcément $n_5 + n_6 + n_7 \leq 1$. Si $n_5 + n_6 + n_7 = 1$ alors, encore, aucune autre chaîne peut être colorée, puisque seulement la couleur 1 est autorisée pour colorer les sommets à distance 1 et 2 de v (ou u), ce qui implique $p = 2$. Contradiction avec la supposition $p \geq 3$. D'où le résultat $n_5 + n_6 + n_7 = 0$ et la condition (i) est satisfaite.

Si $n_3 = 0$ alors, comme on a observé précédemment, dans chaque chaîne de longueur 5, 6 ou 7, on a un sommet à distance au plus 2 de u ou v qui est coloré avec 4 puisque $p \geq 3$. De plus, on peut avoir au plus deux de ces chaînes, donc $n_5 + n_6 + n_7 \leq 2$, et la condition (ii) est satisfaite.

Inversement, supposons que $n_1 = n_2 = 0$.

Si $n_3 = 1$ et $n_5 + n_6 + n_7 = 0$, alors on colore la chaîne de longueur 3 avec 2142 et chaque chaîne de longueur 4 avec 21312. On peut aussi colorer chaque chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \geq 8$, en utilisant les motifs suivants qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $2(1312)^+1312$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $2(1312)^+41312$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $2(1312)^+121312$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $2(1312)^+4121312$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

Si $n_3 = 0$ et $n_5 + n_6 + n_7 \leq 2$, alors on colore chaque chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs ℓ_i , $4 \leq \ell_i \leq 7$, comme suit :

- 21312 si $\ell_i = 4$,
- 21342 ou 24312 si $\ell_i = 5$,
- 2131412 ou 2141321 si $\ell_i = 6$,
- 21321412 ou 21412312 si $\ell_i = 7$.

On remarque, que si $n_5 + n_6 + n_7 = 2$ alors ces deux chaînes doivent utiliser les motifs 214...2 et 2...412 pour que deux sommets colorés avec 4 soient à distance au moins 5. On colore aussi chaque chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \geq 8$, en utilisant les motifs précédents qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4.

On vérifie facilement que dans les deux cas, la coloration obtenue est une 4-coloration de packing de Θ . □

Les trois lemmes suivants, caractérisent les thêta-graphes généralisés qui admettent une 4-coloration de packing avec $\pi(u), \pi(v) \in \{2, 3, 4\}$ et $\pi(u) \neq \pi(v)$.

Lemme 4.11. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = 3$ et $\pi(v) = 4$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (i) $n_1 \leq 1$, $n_3 \leq 2$ et $n_5 = n_6 = 0$, ou
- (ii) $n_1 = 0$, $n_3 \leq 2$ et ($n_5 = 0$ ou $n_5 + n_6 \leq 1$).

Preuve. On suppose qu'il existe une application π qui est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = 3$ et $\pi(v) = 4$.

Il y a seulement deux possibilités pour colorer une chaîne de longueur 3, 3124 et 3214, donc on peut avoir au plus deux chaînes de ce type (sinon, on obtient deux sommets à distance 2 avec la couleur 2), d'où $n_3 \leq 2$.

Supposons d'abord que $n_1 = 1$. Dans ce cas, tout sommet interne d'une chaîne de longueur 5 ou 6 est à distance au plus 3 du sommet u ou v , et donc, les seules couleurs possibles sont 1 et 2, ce qui est impossible. D'où $n_5 = n_6 = 0$, et par suite la condition (i) est satisfaite.

Supposons maintenant que $n_1 = 0$, comme la seule possibilité de colorer une chaîne de longueur 5 est 312134, on a forcément $n_5 \leq 1$.

Si $n_5 = 1$ alors pour colorer une chaîne de longueur 6, on peut affecter la couleur 4 au plus à un sommet voisin de u et la couleur 3 au plus à un seul sommet qui est à distance au plus 2 de v , cela est impossible (car sinon, on obtient deux sommets de couleur 3 à distance inférieure ou égale à 3), ce qui implique $n_6 = 0$ lorsque $n_5 = 1$ et la condition (ii) est satisfaite.

Finalement, on montre que si un thêta-graphe généralisé satisfait l'une des deux conditions, alors il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = 3$ et $\pi(v) = 4$. Toute chaîne de longueur 2 peut être colorée avec 314 et toute chaîne de longueur 4 peut être colorée avec 31214. Si $n_3 = 1$ alors la chaîne de longueur 3 est colorée avec 3124, et si $n_3 = 2$ alors les deux chaînes prennent les colorations 3124 et 3214. Si $n_1 = 0$ et $n_5 = 1$, alors la chaîne de longueur 5 prend la coloration 312134. Si $n_1 = 0$ et $n_5 = 0$, on colore toute chaîne de longueur 6 avec 3121314.

Il reste à montrer que toute chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \geq 7$, peut être colorée. Pour cela on utilise les motifs suivants qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $3(1213)^+1214$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $3124(1312)^+14$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $31214(1312)^+14$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $3(1213)^+214$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

On vérifie facilement que la coloration obtenue est une 4-coloration de packing de Θ . □

Lemme 4.12. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une*

4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 4$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i) $n_1 \leq 1$ et $n_3 = n_7 = 0$, ou
- (ii) $n_1 \leq 1$, $n_3 = n_4 = 0$, $n_7 \leq 1$ et $n_8 = 0$, ou
- (iii) $n_1 \leq 1$, $n_3 \leq 1$ et $n_4 = n_7 = n_8 = 0$, ou
- (iv) $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ et $n_7 \leq 1$, ou
- (v) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$, $n_7 = 2$ et $n_8 = 0$, ou
- (vi) $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 \leq 1$, $n_4 = 0$ et $n_7 + n_8 \leq 1$, ou
- (vii) $n_1 = n_3 = n_7 = 0$, ou
- (viii) $n_1 = n_3 = n_4 = 0$, $n_7 \leq 1$ et $n_8 = 0$, ou
- (ix) $n_1 = 0$, $n_3 \leq 1$ et $n_4 = n_7 = n_8 = 0$.

Preuve. On suppose d'abord qu'il existe une application π qui est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 4$.

Comme toute chaîne de longueur 3 peut être colorée avec 2134 ou 2314, $n_3 \leq 1$ (sinon, on aura deux sommets colorés avec 3 et qui sont à distance 3 entre eux). Par conséquent, toute chaîne de longueur 4 peut être colorée soit avec 21314 soit avec 21324. Le fait que la couleur 3 est à distance 2 de u et v , implique que $n_4 = 0$ lorsque dans une chaîne on utilise la couleur 3 pour colorer un voisin de u ou v (c'est le cas, lorsque $n_3 = 1$).

Supposons que $n_1 = 1$ et considérons les colorations possibles d'une chaîne de longueur 7. Sur ses sommets internes, la couleur 4 ne peut pas être utilisée, la couleur 3 peut être utilisée au plus deux fois, la couleur 2 qu'une seule fois et la couleur 1 est utilisée au plus trois fois. Donc, les seules possibilités de colorer une chaîne de longueur 7 sont 23121314 et 21312134. Donc, on a forcément $n_7 \leq 1$ et $n_7 = 0$ lorsque $n_3 = 1$, car sinon on obtient deux sommets avec la couleur 3 qui sont à distance 2 ou 3 entre eux.

Similairement, pour les sommets internes d'une chaîne de longueur 8, la couleur 4 ne peut pas être utilisée, la couleur 3 (ou 2) peut être utilisée au plus deux fois et la couleur 1 au plus quatre fois. Donc, on a forcément $n_8 = 0$ lorsque $n_3 = 1$ ou

$n_7 = 1$, et pareil, cela est à cause des sommets voisins de u et v qui sont colorés avec la couleur 3. D'où les conditions (i), (ii) ou (iii).

Supposons maintenant que $n_1 = 0$. On sait déjà que $n_3 \leq 1$, et que $n_4 = 0$ lorsque $n_3 = 1$. Maintenant, les colorations possibles d'une chaîne de longueur 7 sont 2131234 et 21431214 (l'utilisation de la couleur 3 ou 4 sur les voisins de u ne peut pas donner une coloration meilleure que ces deux colorations). Ce qui implique $n_7 \leq 2$ (à cause des sommets avec la couleur 3 ou 4) et ces deux colorations doivent être utilisées lorsque $n_7 = 2$. De plus, si $n_3 = 1$ alors la coloration 21312134 ne peut pas être utilisée et donc $n_7 \leq 1$ lorsque $n_3 = 1$. D'un autre côté, la coloration 21431214 ne peut pas être utilisée lorsque $n_2 \geq 1$. Similairement, les colorations possibles d'une chaîne de longueur 8 sont 213121314 et 214131214 (aussi, l'utilisation de la couleur 3 ou 4 sur un voisin de u ne peut pas donner une meilleure coloration que ces deux précédentes). Si $n_2 \geq 1$, la coloration 214131214 ne peut pas être utilisée. D'un autre côté, la coloration 21321314 ne peut pas être utilisée lorsque $n_3 = 1$, ou $n_2 \geq 1$ et $n_7 = 1$, ou $n_2 = 0$ et $n_7 = 2$, à cause des sommets avec la couleur 3. D'où les conditions de (iv) à (ix).

Finalement, on montre que pour tout thêta-graphe généralisé qui satisfait l'une des conditions de (i) à (ix), il existe une 4-coloration de packing π avec $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 4$. On commence par colorer toutes les chaînes P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \notin \{3, 7, 8\}$, comme suit :

- $\ell_i = 2$: 214,
- $\ell_i = 4$: 21314,
- $\ell_i = 5$: 213214,
- $\ell_i = 6$: 2131214,
- $\ell_i \geq 9$: pour ces cas, on utilise les motifs suivants qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $2(1312)^+14131214$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $2(1312)^+13214$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $2(1312)^+14$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $2(1312)^+1431214$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

Il reste à colorer les chaînes de longueurs 3, 7 ou 8. On présente les colorations de ces chaînes selon les cas du lemme :

- (i) Toutes les chaînes de longueurs différentes de 8 sont déjà colorées. Les chaînes de longueur 8, si elles existent, peuvent prendre la coloration 213121314.
- (ii) La chaîne de longueur 7 est colorée avec 21312134 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur 3 ou 4).
- (iii) La chaîne de longueur 3 est colorée avec 2134 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur 4).
- (iv) Les deux chaînes de longueur 7, le cas échéant sont colorées avec 21312134 et 21431214 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur 1, 2 ou 3).
- (v) Les deux chaînes de longueurs 7 sont colorées avec 21312134 et 21431214 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur inférieure à 5).
- (vi) La chaîne de longueur 3 est colorée avec 2134, la chaîne de longueur 7, le cas échéant, avec 21431214 et la chaîne de longueur 8, le cas échéant, est colorée avec 214131214 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur 1, 2 ou 4 et il y a au plus une chaîne soit de longueur 7 soit de longueur 8).
- (vii) Toutes les chaînes de longueurs différentes de 8 sont déjà colorées. Les chaînes de longueur 8, le cas échéant, peuvent prendre la coloration 213121314.
- (viii) La chaîne de longueur 7 est colorée avec 21312134 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur 1, 3, 4 ou 8).
- (ix) La chaîne de longueur 3 est colorée avec 2134 (rappelons que dans ce cas, il n'y pas de chaîne de longueur 1, 4, 7 ou 8).

Dans chaque cas, la coloration obtenue est une 4-coloration de packing de Θ . $\square$

Lemme 4.13. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une*

4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 3$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :

- (i) $n_1 \leq 1$ et $\sum_{i \geq 3} n_i \leq 1$, ou
- (ii) $n_1 = 0$ et $n_3 + n_4 + n_5 \leq 1$.

Preuve. D'abord, on suppose qu'il existe une application π qui est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 3$.

Si $n_1 = 1$ alors les voisins de u et v doivent être colorés avec 1 ou 4. Dans chaque chaîne de longueur $\ell \geq 3$, le sommet qui est à distance 2 de u est forcément coloré avec 4 lorsque le voisin de u est coloré avec 1, ou avec 1 si le voisin de u est coloré avec 4. Par conséquent, on peut colorer au plus une chaîne de telle façon (sinon, on obtient deux sommets colorés avec 4 et qui sont à distance au plus 4 entre eux), ce qui donne la condition (i) $\sum_{i \geq 3} n_i \leq 1$ lorsque $n_1 = 1$.

Si $n_1 = 0$ alors, comme toute chaîne de longueur 3 ou 4 doit utiliser la couleur 4 pour colorer un sommet qui est à distance au plus 2 de u et v , et toute chaîne de longueur 5 doit utiliser la couleur 4 pour colorer un sommet qui est à distance au plus 2 de u , on a nécessairement $n_3 + n_4 + n_5 \leq 1$ d'où la condition (ii).

Finalement, on montre que si un thêta-graphe généralisé satisfait l'une des deux conditions, alors il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) = 2$ et $\pi(v) = 3$. Toute chaîne de longueur 2 peut être colorée avec 213. S'il existe une chaîne de longueur 3 (ce qui implique que soit $n_1 = 1$ et $\sum_{i \geq 4} n_i = 0$, soit $n_1 = n_4 = n_5 = 0$), alors on colore cette chaîne avec 2143. S'il existe une chaîne de longueur 4 (ce qui implique que soit $n_1 = 1$, $n_3 = 0$ et $\sum_{i \geq 5} n_i = 0$, soit $n_1 = n_3 = n_5 = 0$), alors on colore cette chaîne avec 21413. S'il existe une chaîne de longueur 5 (ce qui implique que soit $n_1 = 1$, $n_3 = n_4 = 0$ et $\sum_{i \geq 6} n_i = 0$, soit $n_1 = n_3 = n_4 = 0$), alors on colore cette chaîne avec 214213.

Il reste à montrer que toute chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueur $\ell_i \geq 6$, peut être colorée.

Si $n_1 = 1$ et $n_3 = n_4 = n_5 = 0$ alors on a seulement une chaîne à colorer. On colore alors cette chaîne en utilisant l'un des motifs suivants qui sont en fonction de

ℓ_i modulo 4 :

- $214(1312)^+13$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $2142(1312)^+13$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $21412(1312)^*13$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $214312(1312)^*13$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

Si $n_1 = 0$, alors on colore les chaînes en utilisant l'un des motifs suivants qui sont

en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $2(1312)^*14131213$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $2(1312)^+14213$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $2(1312)^+13$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $2(1312)^*1341213$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

On vérifie facilement que la coloration obtenue est une 4-coloration de packing de Θ . □

A partir des Lemmes 4.8 à 4.13, nous obtenons une caractérisation complète des thêta-graphes généralisés, admettant une 4-coloration de packing qui n'affecte pas la couleur 1 aux sommets u et v :

Théorème 4.14. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, un thêta-graphe généralisé. Il existe une 4-coloration de packing π de Θ avec $\pi(u) \neq 1$ et $\pi(v) \neq 1$ si et seulement si l'une des conditions suivantes est vérifiée :*

- (A) $n_1 = n_2 = n_3 = n_4 = 0$,
- (B) $n_1 = n_2 = n_3 = 0$, $n_5 \leq 2$ et $n_5 + n_6 \leq 4$,
- (C) $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ et $n_7 \leq 1$,
- (D) $n_1 = n_2 = n_3 = 0$ et $n_5 + n_6 + n_7 \leq 2$,
- (E) $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 \leq 1$ et $n_5 = n_6 = n_7 = 0$,
- (F) $n_1 = n_2 = 0$, $n_3 \leq 1$, $n_4 = 0$ et $n_7 + n_8 \leq 1$,
- (G) $n_1 = n_3 = n_4 = 0$, $n_7 \leq 1$ et $n_8 = 0$,
- (H) $n_1 = 0$, $n_3 \leq 2$ et ($n_5 = 0$ ou $n_5 + n_6 \leq 1$),
- (I) $n_1 = 0$ et $n_3 + n_4 + n_5 \leq 1$,
- (J) $n_1 \leq 1$, $n_3 \leq 2$ et $n_5 = n_6 = 0$,

- (K) $n_1 \leq 1$ et $n_3 = n_7 = 0$,
- (L) $n_1 \leq 1$, $n_3 = n_4 = 0$, $n_7 \leq 2$ et $n_8 = 0$,
- (M) $n_1 \leq 1$, $n_3 \leq 1$ et $n_4 = n_7 = n_8 = 0$,
- (N) $n_1 \leq 1$ et $\sum_{i \geq 3} n_i \leq 1$.

Preuve. Ce théorème est simplement le résumé des Lemmes de 4.8 à 4.13 :

- La condition (A) est obtenue à partir du Lemme 4.8 et du cas (v) du Lemme 4.12.
- La condition (B) est obtenue à partir du Lemme 4.9.
- La condition (C) est obtenue à partir du cas (iv) du Lemme 4.12.
- La condition (D) est obtenue à partir du cas (ii) du Lemme 4.10.
- La condition (E) est obtenue à partir du cas (i) du Lemme 4.10.
- La condition (F) est obtenue à partir du cas (vi) du Lemme 4.12.
- La condition (G) est obtenue à partir du cas (viii) du Lemme 4.12.
- La condition (H) est obtenue à partir du cas (ii) du Lemme 4.11.
- La condition (I) est obtenue à partir du cas (ii) du Lemme 4.13.
- La condition (J) est obtenue à partir du cas (i) du Lemme 4.11.
- La condition (K) est obtenue à partir du cas (i) et (vii) du Lemme 4.12.
- La condition (L) est obtenue à partir du cas (ii) du Lemme 4.12.
- La condition (M) est obtenue à partir du cas (iii) et (ix) du Lemme 4.12.
- La condition (N) est obtenue à partir du cas (i) du Lemme 4.13.

Par conséquent, tous les cas sont considérés, ce qui complète la preuve. $\square$

Si un thêta-graphe généralisé Θ ne satisfait aucune des conditions de (A) à (N) du Théorème 4.14, alors toute 4-coloration de packing de Θ doit utiliser la couleur 1 sur u ou v . L'observation suivante va être utile :

Observation 4.15. Si un thêta-graphe généralisé $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 3$, admet une 4-coloration de packing π avec $\pi(u) = 1$ ou $\pi(v) = 1$ alors on a forcément $p = 3$.

Pour voir ça, il suffit de remarquer qu'en aucun cas, lorsque $\pi(u) = 1$ (respectivement $\pi(v) = 1$), on peut affecter à deux sommets voisins de u (respectivement v) la même couleur, et aucun ne peut prendre la couleur 1.

Dans le lemme suivant, nous allons montrer qu'il n'y a aucun thêta-graphe généralisé admet une 4-coloration de packing avec $\pi(u) = 1$ ou $\pi(v) = 1$ et qui ne satisfait aucune des conditions de (A) à (N). Par l'Observation 4.15, il suffit de considérer que les thêta-graphes généralisés de la forme $\Theta_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$. De plus, par symétrie, il suffit de considérer les 4-colorations de packing qui affecte la couleur 1 à u .

Lemme 4.16. *Si $\Theta = \Theta_{\ell_1, \ell_2, \ell_3}$ est un thêta-graphe généralisé et que π est une 4-coloration de packing de Θ avec $\pi(u) = 1$, alors Θ satisfait au moins l'une des conditions de (A) à (N).*

Preuve. On considère deux cas, en fonction de la valeur de n_1 .

1. $n_1 = 0$.

Si $n_2 = n_3 = n_4 = 0$ alors Θ satisfait la condition (A). Remarquons aussi qu'on ne peut pas avoir $n_3 = 3$ puisque, par le Lemme 4.5, on a $\chi_\rho(\Theta) = 5$. Contradiction.

Si $n_3 = 2$ alors on a nécessairement $n_5 + n_6 \leq 1$ et donc Θ satisfait la condition (H).

Si $n_3 = 1$ et $n_5 = 0$ alors Θ satisfait la condition (H). Si $n_3 = 1$, $n_5 = 1$ et $n_6 = 0$ alors aussi, Θ satisfait la condition (H). Si $n_3 = n_5 = n_6 = 1$ alors, on a forcément $n_2 = n_4 = n_7 = n_8 = 0$, Θ satisfait la condition (F). Si $n_3 = 1$ et $n_5 = 2$ alors Θ satisfait aussi la condition (F).

Si $n_3 = 0$. Si $n_4 \geq 1$ et $n_2 = 0$ alors on a nécessairement $n_5 \leq 2$ et $n_5 + n_6 \leq 4$ et Θ satisfait la condition (B). Si $n_4 \geq 1$ et $n_2 \leq 1$ alors on a nécessairement $n_5 + n_6 \leq 1$ et la condition (H) est vérifiée. Si $n_4 = 0$ et $n_5 \leq 1$ alors Θ satisfait la condition (I). Si $n_4 = 0$ et $n_5 \geq 2$ alors Θ satisfait la condition (F) si $n_7 = 1$ (puisque, on a $n_7 + n_8 \leq 1$).

2. $n_1 = 1$.

Dans ce cas, on a forcément $n_3 \leq 2$. Si $n_3 = 2$ alors par conséquent on a $n_5 = n_6 = 0$ et Θ satisfait la condition (J).

Si $n_3 = 1$ et $n_5 = n_6 = 0$ alors Θ satisfait la condition (J). Si $n_3 = 1$ et $n_5 + n_6 = 1$ alors on a forcément $n_4 = n_7 = n_8 = 0$ et Θ satisfait la condition (M).

Supposons que $n_3 = 0$. Si $n_7 = 0$ alors la condition (K) est satisfaite. Si $n_7 = 1$ et $n_4 = n_8 = 0$ alors Θ satisfait la condition (L) et si $n_7 = n_4 + n_8 = 1$ ou $n_7 = 2$ alors on a forcément $n_5 = n_6 = 0$ et la condition (J) est satisfaite.

Ce qui complète la preuve. □

La caractérisation des thêta-graphes généralisés ayant pour nombre chromatique de packing 4 est donnée par le théorème suivant :

Théorème 4.17. *Soit $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 2$, un thêta-graphe généralisé. On a $\chi_p(\Theta) = 4$ si et seulement si soit*

- (1) $p = 2$, $\ell_1 + \ell_2 \neq 3$ et $\ell_1 + \ell_2 \not\equiv 0[4]$, soit
- (2) $p \geq 3$, $n_2 \neq p$, il existe i_1, i_2 , $1 \leq i_1 \leq i_2 \leq p$, tel que $\ell_{i_1} + \ell_{i_2} \not\equiv 0[4]$, et Θ satisfait l'une des conditions de (A) à (N).

Preuve. Si $p = 2$ alors le résultat est obtenu à partir de la Proposition 2.7. Si $p \geq 3$ alors les résultats sont obtenus à partir des Lemmes de 4.7 à 4.16. □

En utilisant le Lemme 4.6, le Lemme 4.7 et le Théorème 4.17, on peut obtenir le nombre chromatique de packing de tout thêta-graphe généralisé $\Theta = \Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$ en un temps polynomial $O(p)$.

Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons étudié la coloration de packing des thêta-graphes généralisés, nous avons d'abord donné une borne supérieure du nombre chromatique

de packing de tout thêta-graphe généralisé, ensuite nous avons fait une caractérisation complète. Dans le chapitre suivant, nous tentons d'étudier la coloration de packing des thêta-graphes généralisés orientés.

Comme pour la classe des thêta-graphes généralisés l'étude est complète, nous proposons d'étudier d'autres classes de graphes qui ont des caractéristiques similaires que les thêta-graphes généralisés.

Chapitre 5

Coloration de packing des graphes orientés

Dans ce chapitre, nous étendons la notion de coloration de packing aux digraphes et nous étudions le cas des graphes orientés dont le graphe sous-jacent est un graphe complet, un graphe biparti complet, une chaîne, un cycle, la couronne généralisée d'une chaîne ou d'un cycle, un thêta-graphe généralisé ou un arbre.

La plupart des résultats présentés dans ce chapitre, ont été publiés dans les deux articles [38] et [39].

5.1 Généralités

Rappelons que la *distance* (ou aussi *distance forte*) entre deux sommets u et v dans $\vec{D}$, notée $d_{\vec{D}}(u, v)$, est la longueur d'un plus court chemin direct (nombre d'arcs) dans $\vec{D}$ qui va de u vers v . Si aucun chemin ne relie u et v , on définit par convention $d_{\vec{D}}(u, v) = \infty$.

Nous définissons aussi la *distance faible* entre deux sommets u et v dans $\vec{D}$, est la longueur d'un plus court chemin direct (nombre d'arcs) dans $\vec{D}$ qui va de u vers v ou de v vers u .

Tout au long de ce chapitre, le terme *distance* sera utilisé pour désigner la *distance faible*.

Une k -coloration de packing d'un digraphe^{1 2} $\vec{D}$ est une application $\pi : V(\vec{D}) \rightarrow \{1, \dots, k\}$, tel que, pour toute paire de sommets distincts u et v , $\pi(u) = \pi(v) = i$ implique $d_{\vec{D}}(u, v) > i$. Le nombre chromatique de packing $\chi_\rho(\vec{D})$ de $\vec{D}$ est le plus petit entier k tel que $\vec{D}$ admet une k -coloration de packing.

Par définition, si $\vec{G}$ est une orientation quelconque d'un graphe G alors, pour tous deux sommets u et v dans G , $d_G(u, v) \leq d_{\vec{G}}(u, v)$. Donc, toute coloration de packing de G est une coloration de packing de $\vec{G}$. Par conséquent, on a le résultat suivant :

Proposition 5.1. *Pour toute orientation $\vec{G}$ d'un graphe G , $\chi_\rho(\vec{G}) \leq \chi_\rho(G)$.*

La Proposition 2.2 s'étend aussi aux graphes orientés :

Proposition 5.2. *Si $\vec{H}$ est un sous-graphe de $\vec{G}$, alors $\chi_\rho(\vec{H}) \leq \chi_\rho(\vec{G})$.*

La caractérisation des graphes orientés ayant pour nombre chromatique de packing 2 est donnée par le résultat suivant :

Proposition 5.3. *Pour toute orientation $\vec{G}$ d'un graphe G , $\chi_\rho(\vec{G}) = 2$ si et seulement si (i) G est un graphe biparti et (ii) l'une des deux partitions de G contient seulement des sources ou des puits dans $\vec{G}$.*

Preuve. Évidemment, $\chi_\rho(\vec{G}) > 2$ lorsque G n'est pas un graphe biparti. Supposons que le graphe G est biparti. En utilisant deux couleurs seulement, la couleur 1 ne peut pas être utilisée sur un sommet central d'un chemin direct de longueur 2, donc on a $\chi_\rho(\vec{G}) = 2$ si et seulement si tous les sommets de l'une des deux partitions sont des sources ou des puits dans $\vec{G}$.

□

1. Rappelons qu'un digraphe $\vec{D}$ est défini par un ensemble de sommets $V(\vec{D})$ et un ensemble de couple de sommets $A(\vec{D})$ qu'on appelle arcs.

2. Un graphe orienté est un digraphe $\vec{O}$ avec aucune paire d'arcs opposées, tel que $uv \in E(\vec{O})$ implique que $vu \notin E(\vec{O})$.

5.2 Graphes complets, graphes bipartis complets, chemins et circuits

5.2.1 Coloration de packing des graphes complets orientés

Tout graphe orienté $\vec{G}$ d'ordre n admet une n -coloration de packing, et cela en affectant n entiers distincts à chaque sommet de $V(\vec{G})$. Donc, n est une borne supérieure naturelle, qui n'est pas forcément la meilleure, mais elle est atteinte, puisque la distance entre chaque paire de sommets, dans toute orientation d'un graphe complet, est 1, alors on ne peut pas avoir deux sommets colorés avec la même couleur.

Proposition 5.4. *Pour toute orientation d'un graphe complet $\vec{K}_n$, on a $\chi_\rho(\vec{K}_n) = n$.*

Proposition 5.5. *Pour toute orientation d'un graphe biparti complet $\vec{K}_{m,n}$, on a $2 \leq \chi_\rho(\vec{K}_{m,n}) \leq \min\{m, n\} + 1$.*

De plus, les deux bornes sont atteintes.

Preuve. D'après la Proposition 5.3, on obtient la borne inférieure. Pour obtenir la borne supérieure, il suffit d'affecter la couleur 1 aux sommets qui sont dans la partition $\mathbb{P}_i$ avec $i = \max\{m, n\}$ et aux sommets restants des couleurs distinctes entre 2 et $\min\{m, n\} + 1$.

De plus, la borne supérieure est atteinte.

Notons $u_1, \dots, u_m$ les sommets de la première partition $\mathbb{P}_m$ de $K_{m,n}$, et notons $v_1, \dots, v_n$ les sommets de la seconde partition $\mathbb{P}_n$ de $K_{m,n}$. Supposons, sans perte de généralité, que $m \geq n$.

Considérons l'orientation du graphe biparti complet $K_{m,n}$ composée des arcs suivants (voir Figure 5.1) :

1. $v_i u_{i+1}$, avec $1 \leq i \leq n$,
2. $v_1 u_m$ et $v_n u_m$,
3. on oriente toutes les autres arêtes de l'ensemble $\mathbb{P}_m$ vers $\mathbb{P}_n$, c'est-à-dire, les autres arcs sont de type $u_i v_j$.

Avec ces orientations, on a, pour chaque paire de sommets (u_i, u_j) avec $1 \leq i, j \leq n$, $d_{\vec{K}_{m,n}}(u_i, u_j) = 1$ ou 2 .

□

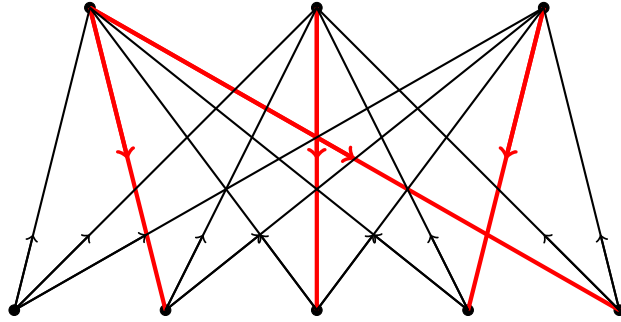


FIGURE 5.1 – Une orientation de $K_{5,3}$ qui atteint la borne supérieure de la Proposition 5.5

5.2.2 Coloration de packing des chemins orientées

Dans le théorème suivant, nous montrons que le nombre chromatique de packing d'un chemin orienté est compris entre 2 et 3, puis nous caractérisons ceux qui atteignent la borne 2, et donc la caractérisation complète est obtenue.

Théorème 5.6. *Soit le chemin $\vec{P}_n$ qui est une orientation de la chaîne $P_n = u_1 \dots u_n$. Pour tout $n \geq 2$, on a $2 \leq \chi_\rho(\vec{P}_n) \leq 3$. De plus, $\chi_\rho(\vec{P}_n) = 2$ si et seulement si l'une des deux partitions de P_n contient seulement des sources ou des puits dans $\vec{P}_n$.*

Preuve. Comme les sommets adjacents ne peuvent pas recevoir la même couleur, on a clairement $\chi_\rho(\vec{P}_n) \geq 2$, pour tout $n \geq 2$. Par la Proposition 2.6, on sait que $\chi_\rho(P_n) \leq 3$ pour tout $n \geq 2$ et ainsi, par la Proposition 5.1, on sait que $\chi_\rho(\vec{P}_n) \leq 3$ pour tout $n \geq 2$.

Le dernier résultat est obtenu à partir de la Proposition 5.3.

□

5.2.3 Coloration de packing des circuits orientés

Pour les circuits orientés, nous avons un résultat similaire.

Théorème 5.7. *Soit le circuit $\vec{C}_n$ qui est une orientation du cycle $C_n = u_0 u_1 \dots u_{n-1} u_0$. Pour tout $n \geq 3$, on a $2 \leq \chi_\rho(\vec{C}_n) \leq 4$. De plus,*

- (1) $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 2$ si et seulement si C_n est biparti (c'est-à-dire, n est pair) et l'une des deux partitions contient seulement des sources ou des puits dans $\vec{C}_n$.
- (2) $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 4$ si et seulement si C_n est un circuit direct (tous les arcs ayant la même orientation), $n \geq 5$ et $n \not\equiv 0[4]$.

Preuve. Comme les sommets adjacents ne peuvent pas recevoir la même couleur, on a $\chi_\rho(\vec{C}_n) \geq 2$, pour tout $n \geq 3$. Par la Proposition 2.7, on sait que $\chi_\rho(C_n) \leq 4$ pour tout $n \geq 3$ et ainsi, par la Proposition 5.1, on sait que $\chi_\rho(\vec{C}_n) \leq 4$ pour tout $n \geq 3$.

Le résultat (1) est obtenu à partir de la Proposition 5.3.

Considérons maintenant le résultat (2). Par la Proposition 2.7, on sait que $\chi_\rho(C_n) = 4$ si et seulement si $n \geq 5$ et $n \not\equiv 0[4]$. Par la Proposition 5.3, on a alors $\chi_\rho(\vec{C}_n) \leq 3$ sinon. Maintenant supposons que $n \geq 5$ et $n \not\equiv 0[4]$. Si $\vec{C}_n$ est un circuit direct, avec tous les arcs ayant la même orientation, alors $d_{\vec{C}_n}(u_i, u_j) = d_{C_n}(u_i, u_j)$ pour $0 \leq i, j \leq n-1$ et donc $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 4$. Si $\vec{C}_n$ n'est pas un circuit direct, il contient un sommet source, qu'on appelle u_0 sans perte de généralité. On va prouver que, dans ce cas, $\vec{C}_n$ admet une 3-coloration de packing.

On considère trois cas :

- Si $n \equiv 1[4]$, une 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est donnée par le motif suivant :

$$1231 \ (2131)^+ \ 2$$

- Si $n \equiv 2[4]$, une 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est donnée par le motif suivant :

$$1 \ (2131)^+ \ 2$$

- Si $n \equiv 3[4]$, une 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est donnée par le motif suivant :

$$13 \ (1213)^+ \ 2$$

Ce qui complète la preuve. □

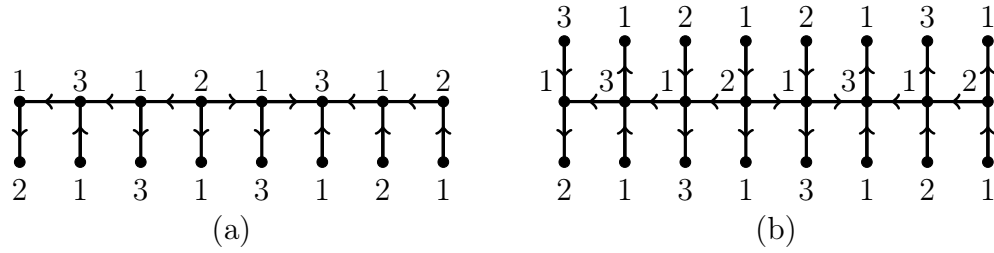


FIGURE 5.2 – Colorations de packing de la preuve du Théorème 5.8

5.3 Couronnes et couronnes généralisées des chemins et des circuits orientés

Pour les orientations des couronnes généralisées des chemins, on a le résultat suivant :

Théorème 5.8. *Soit $\vec{G}$ une orientation d'une couronne généralisée $P_n \odot pK_1$, avec $p \geq 1$ et $P_n = u_1 \dots u_n$. Alors, pour tout $n \geq 1$, $2 \leq \chi_\rho(\vec{G}) \leq 3$. De plus, $\chi_\rho(\vec{G}) = 2$ si et seulement si l'une des deux partitions de $P_n \odot pK_1$ contient seulement des sources ou des puits dans $\vec{G}$.*

Preuve. Comme une coloration de packing est une coloration propre, on a directement $\chi_\rho(\vec{G}) \geq 2$ pour chaque orientation $\vec{G}$ de $P_n \odot pK_1$, $n, p \geq 1$.

On commence par considérer le cas $p = 1$. Pour toute orientation $\vec{G}$ de $P_1 \odot K_1$, la coloration donnée par le motif 1(2), est une 2-coloration de packing de $\vec{G}$. Supposons maintenant que $n \geq 2$ et soit $\vec{G}$ une orientation de $P_n \odot K_1$. Soit $t_1, \dots, t_n$ les sommets pendants adjacents aux sommets $u_1, \dots, u_n$, respectivement. On va construire par récurrence une 3-coloration de packing π de $\vec{G}$. On pose d'abord $\pi(u_1) = 1$ et $\pi(t_1) = 2$. Supposons maintenant que tous les sommets $u_1, t_1, \dots, u_i, t_i$, $1 \leq i \leq n - 1$ ont été colorés de telle sorte que $\pi(u_i) = 1$ si et seulement si i est impair et $\pi(t_i) = 1$ si et seulement si i est pair. Alors, on utilise les règles suivantes :

- Si $\pi(u_i) = 1$ alors $\pi(u_{i+1}) = 5 - \pi(t_i)$ si $t_i u_i u_{i+1}$ est un chemin direct (dans l'une des deux directions) et $\pi(u_{i+1}) = \pi(t_i)$ sinon. Dans les deux cas, $\pi(t_{i+1}) = 1$.

- Si $\pi(u_i) \neq 1$ alors $\pi(t_{i+1}) = 5 - \pi(u_i)$ si $u_i u_{i+1} t_{i+1}$ est un chemin direct (dans l'une des deux directions) et $\pi(t_{i+1}) = \pi(u_i)$ sinon. Dans les deux cas, $\pi(u_{i+1}) = 1$.

Les colorations π obtenues (voir Figure 5.2(a) par exemple) vérifient la propriété suivante :

- (P) Pour tout sommet avec la couleur 1, tous ses voisins entrants ont la même couleur $\alpha \in \{2, 3\}$ et tous ses voisins sortants ont la même couleur $5 - \alpha$.

La coloration π est une 3-coloration de packing de $\vec{G}$.

Considérons maintenant le cas $p \geq 2$. On colore d'abord les sommets $u_1, \dots, u_n$ et l'un des voisins pendants en utilisant la procédure définie ci-dessus. Donc on peut colorer les autres sommets pendants en utilisant la priorité (P). En effet, tous les sommets pendants adjacent à un sommet coloré avec 2 ou 3 peuvent prendre la couleur 1, et la coloration de tout sommet pendant adjacent à un sommet coloré avec 1, dépend de l'orientation de l'arc correspondant (voir Figure 5.2(b) à titre d'exemple).

Donc pour toute orientation $\vec{G}$ d'une couronne généralisée $P_n \odot pK_1$, avec $p \geq 1$, on a $2 \leq \chi_\rho(\vec{G}) \leq 3$.

$\chi_\rho(\vec{G}) = 2$ si et seulement si l'une des deux partitions de $P_n \odot pK_1$ contient seulement des sources ou des puits dans $\vec{G}$ est obtenue directement de la Proposition 5.3.

□

Finalement, pour les orientations des couronnes généralisées des circuits, on a le résultat suivant :

Théorème 5.9. *Soit $\vec{G}$ une orientation d'une couronne généralisée $C_n \odot pK_1$, avec $p \geq 1$ et $C_n = u_0 \dots u_{n-1}$. Pour chaque $n \geq 3$, on a $2 \leq \chi_\rho(\vec{G}) \leq 4$. De plus,*

- (1) $\chi_\rho(\vec{G}) = 2$ si et seulement si $C_n \odot pK_1$ est biparti (c'est-à-dire, n est pair)

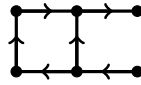


FIGURE 5.3 – Configuration de la preuve du Théorème 5.9

et l'une des deux partitions contient seulement des sources ou des puits dans $\vec{G}$.

(2) $\chi_\rho(\vec{G}) = 4$ si et seulement si :

(2.1) $\vec{C}_n$ est un circuit direct, $n \geq 5$ et $n \not\equiv 0[4]$, ou

(2.2) $\vec{G}$ contient un graphe orienté décrit dans la Figure 5.3 comme sous-graphe, ou

(2.3) $n \equiv 0[4]$ et il existe un sommet u_i , $0 \leq i \leq n-1$, tel que les chemins $u_i u_{i+1} u_{i+2} u_{i+3}$ et $u_{i+4} \dots u_{i-1}$ (les indices sont donnés modulo n) sont des chemins directs, mais de directions opposées.

Avant de prouver ce théorème, nous introduisons une procédure de coloration très utile, appelée procédure de coloration standard (SCP pour abréger), cette procédure donne une coloration π d'une orientation d'une chaîne $P_n = u_1 \dots u_n$:

1. Supposons que $(c, c') \in \{1, 2, 3\}^2$, avec $|\{c, c'\} \cap \{1\}| = 1$, et $S \subseteq V(P_n)$ sont donnés.
2. $\pi(u_1) = c$ et $\pi(u_2) = c'$.
3. Pour $j = 3, \dots, n$, $\pi(u_j) = 1$ si $\pi(u_{j-1}) \neq 1$. $\pi(u_j) = \pi(u_{j-2})$ si $(\pi(u_{j-1}) = 1$ et $u_{j-1} \in S)$ et $\pi(u_j) = 5 - \pi(u_{j-2})$ sinon.

La Figure 5.4 montre les colorations de deux orientations de $P_8 = u_1 \dots u_8$ en utilisant SCP, avec $(c, c') = (1, 2)$ et $S = \{u_3\}$, et avec $(c, c') = (3, 1)$ et $S = \{u_4, u_8\}$, respectivement. On remarque que la procédure SCP produit toujours une 3-coloration d'un chemin $u_1 \dots u_n$, mais qui n'est pas forcément une 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$. Le seul conflit possible est obtenu dans la chaîne $u_{n-2} u_{n-1} u_n u_1 u_2 u_3$ (de tels conflits peuvent apparaître lorsque un chemin direct de longueur 2 ou 3 contient u_1 comme un sommet interne). Pour l'instant, le deuxième exemple de la Figure 5.4 représente une 3-coloration de packing de $\vec{C}_8$, tandis que le premier ne l'est pas, car $\pi(u_2) = \pi(u_8) = 2$ et $d_{\vec{C}_8}(u_8, u_2) = 2$.

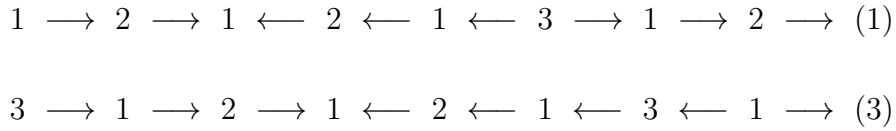


FIGURE 5.4 – Colorations d'un échantillon produites par la procédure SCP

Remarquons que si $c = 1$ (respectivement $c' = 1$) la procédure SCP affecte la couleur 1 à tout sommet u_j tel que j est impair (respectivement pair), et les couleurs 2 et 3 sont alternées sur les autres sommets lorsque S est vide. Si S est non vide et si $u_1 \in S$ et $c = 1$ (respectivement $u_2 \in S$ et $c' = 1$), alors on a au plus $|S|$, ou $|S| - 1$ endroits où la couleur 2 ou 3 est dupliquée. Par conséquent, on a le résultat suivant :

Proposition 5.10. *Soient $\vec{P}_n$ une orientation d'une chaîne $P_n = u_1 \dots u_n$ de longueur impair $n - 1$ et S est un ensemble de sources ou de puits dans $\vec{P}_n$ avec des indices impairs qui ne contient pas u_1 . Considérons la coloration π de $\vec{P}_n$ obtenue par la procédure SCP avec $(c, c') = (1, \alpha)$ pour un $\alpha \in \{2, 3\}$ et S donnés. On a :*

- (i) $\pi(u_n) = \alpha$ si ($|S|$ est pair et $n \equiv 2[4]$) ou ($|S|$ est impair et $n \equiv 0[4]$),
- (ii) $\pi(u_n) = 5 - \alpha$ sinon.

Preuve. Ce résultat est obtenu directement de la discussion précédente. □

Preuve. [du Théorème 5.9] Comme la coloration de packing est une coloration propre, alors $\chi_\rho(\vec{G}) \geq 2$ pour toute orientation $\vec{G}$ de $C_n \odot pK_1$, $n \geq 3$, $p \geq 1$.

Soit $\vec{G}$ une orientation de $C_n \odot pK_1$ et $\vec{C}_n$ l'orientation du cycle C_n induite par $\vec{G}$. On note par t_i^j , $1 \leq j \leq p$, les voisins pendants de u_i , $0 \leq i \leq n - 1$. On considère deux cas :

Cas I) Si $\vec{C}_n$ contient un sommet source, sans perte de généralité on le note u_0 , alors par le Théorème 5.8, il existe une 3-coloration de packing de $\vec{G} \setminus \{u_0, t_0^1, \dots, t_0^p\}$. Comme u_0 est une source, alors cette coloration peut être étendue à une 4-coloration de packing de $\vec{G}$ en colorant u_0 avec la couleur 4 et tous les sommets t_0^j , $1 \leq j \leq p$, avec la couleur 1.

Cas II) Si $\vec{C}_n$ ne contient aucun sommet source alors $\vec{C}_n$ est un circuit direct. Par le Théorème 5.7, on sait qu'il existe une 4-coloration de packing π de $\vec{C}_n$. Cette coloration de packing peut être étendue à une 4-coloration de packing de $\vec{G}$ en colorant chaque sommet pendant t_i^j , $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq p$, avec $\pi(u_{i-1})$ si $t_i^j u_i$ est un arc dans $\vec{G}$ et avec $\pi(u_{i+1})$ sinon (les indices sont donnés modulo n). Par suite, $\chi_\rho(\vec{G}) \leq 4$ pour toute orientation $\vec{G}$ de $C_n \odot pK_1$, $n \geq 3$, $p \geq 1$.

Le résultat (1) est obtenu directement de la Proposition 5.3.

Considérons maintenant le cas (2).

Si $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 4$ (en utilisant le Théorème 5.7, on a $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 4$ si et seulement si $\vec{C}_n$ est un circuit direct, $n \not\equiv 0[4]$ et $n \geq 5$), alors par la Proposition 5.2, $\chi_\rho(\vec{G}) = 4$ on obtient la condition (2.1) du théorème, et cela en colorant chaque sommet pendant t_i^j , $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq p$, avec $\pi(u_{i-1})$ si $t_i^j u_i$ est un arc dans $\vec{G}$ et avec $\pi(u_{i+1})$ sinon (les indices sont donnés modulo n).

Si $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 2$ (par le Théorème 5.7, on a $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 2$ si et seulement si n est pair et l'orientation $\vec{C}_n$ de C_n est alternée) alors on a $\chi_\rho(\vec{G}) \leq 3$, car les deux couleurs 2 et 3 sont valables pour colorer les voisins pendants des sommets colorés avec 1, et cela toujours en colorant chaque sommet pendant t_i^j , $0 \leq i \leq n-1$, $1 \leq j \leq p$, par $\pi(u_{i-1})$ si $t_i^j u_i$ est un arc dans $\vec{G}$ et par $\pi(u_{i+1})$ sinon (les indices sont donnés modulo n).

Supposons maintenant que $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 3$.

Si $\vec{C}_n$ est un circuit direct, ce qui implique que $n \equiv 0[4]$, alors la 3-coloration de packing donnée par le motif circulaire [1213] peut être étendue de la même façon à une 3-coloration de packing de $\vec{G}$.

Par le Théorème 5.7, on déduit qu'un circuit C_n est 3-colorable si et seulement si on a la négation des deux conditions du Théorème 5.7.

Supposons maintenant que $\vec{C}_n$ n'est pas un circuit direct et soit π une 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$. Cette coloration peut être étendue à une 3-coloration de packing de $\vec{G}$ excepté s'il existe trois sommets successifs $u_{i-1}u_iu_{i+1}$ (les indices sont donnés

modulo n) tel que (A) u_i est une source (respectivement un puits) dans $\vec{C}_n$ mais pas dans $\vec{G}$, et (B) $\pi(u_i) = 1$ et $\{\pi(u_{i-1}), \pi(u_{i+1})\} = \{2, 3\}$.

Effectivement, si un tel cas se produit, aucune couleur dans $\{1, 2, 3\}$ ne peut être affectée à un voisin pendant sortant (respectivement voisin pendant entrant) de u_i .

Si une telle configuration n'existe pas, alors la 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ peut être étendue à une 3-coloration de packing de $\vec{G}$ de la manière suivante :

- (i) en colorant avec la couleur 1 tous les sommets pendants adjacents à des sommets colorés avec 2 ou 3,
- (ii) en colorant avec la couleur $\pi(u_{i-1})$ tout voisin pendant sortant (respectivement voisin pendant entrant) d'une source (respectivement un puits) d'un sommet u_i de $\vec{G}$ et avec la couleur $5 - \pi(u_{i-1})$ les voisins entrants (respectivement les voisins sortants),
- (iii) lorsque $u_{i-1}u_iu_{i+1}$ (respectivement $u_{i+1}u_iu_{i-1}$) est un chemin direct, en colorant avec la couleur $\pi(u_{i-1})$ tout sommet pendant qui est un voisin entrant (respectivement voisin sortant) au sommet u_i qui est ni source ni puits dans $\vec{G}$, et la couleur $\pi(u_{i+1})$ à ses voisins sortants (respectivement voisins entrants).

Nous avons besoin de déterminer dans quel cas l'orientation $\vec{C}_n$ de C_n peut être colorée de telle sorte qu'une telle situation ne se produit pas. Nous allons appeler ces colorations *bonnes* colorations de packing.

Pour tout sous-ensemble X de $V(C_n)$, on note par $S(X)$ le sous-ensemble de X qui contient tous les sommets qui sont soit des sources soit des puits dans $\vec{C}_n$, et par $S^*(X)$ le sous-ensemble de $S(X)$ qui contient tous les sommets qui sont ni des sources ni des puits dans $\vec{G}$. Nous nous intéressons à l'ensemble $S^*(V(C_n))$. Évidemment, si $S^*(V(C_n))$ est un ensemble vide, alors toute 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est bonne. On suppose dans le reste de cette preuve que $S^*(V(C_n))$ est non vide. Notons aussi que $|S(V(C_n))|$ est pair pour toute orientation $\vec{C}_n$ de C_n .

On va construire de bonnes 3-colorations de packing, lorsque c'est possible, en utilisant la procédure SCP avec un ensemble adéquat S soit sur tout le circuit $\vec{C}_n$ soit sur une partie de ce circuit.

On considère quatre cas, en fonction du reste de la division euclidienne de n par

le nombre 4 :

– **Cas 1** : $n \equiv 0[4]$.

On considère d'abord le cas $n = 4$. La seule 3-coloration de packing d'une orientation $\vec{C}_4$ de C_n avec $\chi_\rho(\vec{C}_4) = 3$ est 1213. Il est alors facile de vérifier que la seule orientation $\vec{C}_4$ de C_4 pour laquelle on ne peut pas avoir une bonne 3-coloration de packing est donnée dans la Figure 5.3, et dans ce cas $\chi_\rho(\vec{G}) = 4$. D'où la condition (2.2).

Dans la suite, on peut supposer que $n \geq 8$.

Comme n est pair, alors C_n est biparti. Soit (A, B) la bipartition de $V(C_n)$.

Cas 1.1) $|S^*(A)|$ est pair ou $|S^*(B)|$ est pair :

Une bonne coloration de packing peut être obtenue par l'application de la procédure SCP. Supposons, sans perte de généralité, que $A = \{u_0, u_2, \dots, u_{n-2}\}$ et $|S^*(A)|$ est pair. Considérons la coloration π obtenue par la procédure SCP, commençant par u_0 , avec $(c, c') = (1, 2)$ et $S = S^*(A)$. Comme $n \equiv 0[4]$ et $|S^*(A)|$ est pair, par la Proposition 5.10, π est une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$.

Cas 1.2) $|S^*(A)|$ et $|S^*(B)|$ sont impairs, mais $S(A) \setminus S^*(A) \neq \emptyset$ ou $S(B) \setminus S^*(B) \neq \emptyset$:

On peut procéder dans un tel cas, en utilisant sans perte de généralité, l'ensemble $S'(A) = S^*(A) \cup \{u_{2j}\}$, pour un sommet $u_{2j} \in S(A) \setminus S^*(A)$, au lieu de l'ensemble $S^*(A)$ dans la procédure SCP. Puisque $|S'(A)|$ est pair, alors on obtient une bonne coloration de packing.

Cas 1.3) $|S^*(A)|$ et $|S^*(B)|$ sont impairs, $S(A) = S^*(A)$ et $S(B) = S^*(B)$, c'est-à-dire, chaque source ou puits dans $\vec{C}_n$ est ni source ni puits dans $\vec{G}$.

On considère deux cas :

– $|S^*(A)| = |S^*(B)| = 1$.

Sans perte de généralité, on suppose que u_0 est une source et u_i est un puits, avec i impair et $1 \leq i \leq n-1$. Notons que, $u_0 \dots u_i$ et $u_{n-1} \dots u_i$ sont deux chemins directs de longueurs impaires dans $\vec{C}_n$.

On a trois cas à considérer :

Cas I) $i = 1$: Supposons d'abord que $i = 1$, et que, u_0 est une source et u_1 est un puits. Une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est alors donnée par le motif suivant (sur les couleurs de u_0 et $u_i = u_1$ on met un point) :

$$[\dot{1} \dot{2} \ 3121 \ \dots \ 3121 \ 32].$$

Cas II) $i \equiv 1[4]$: Une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est alors donné par :

$$[\dot{1} \ 2131 \ \dots \ 2131 \ \dot{2} \ 3121 \ \dots \ 3121 \ 32].$$

Cas III) $i \equiv 3[4]$: On a deux sous-cas :

Cas III.1) $i \equiv 3[4]$ et $i \geq 7$: Une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ est donnée par :

$$[\dot{1} \dot{2} 3 \ 1213 \ \dots \ 1213 \ \dot{2} \ 1312 \ \dots \ 1312].$$

Cas III.2) $i = 3$: Ce cas correspond à la condition (2.3) du théorème.

On va prouver dans ce cas que $\vec{C}_n$ n'admet aucune bonne 3-coloration de packing, ce qui implique $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 4$. Notons d'abord que le chemin direct $\vec{P} = u_0 u_{n-1} \dots u_3$ est de longueur $n - 3 \equiv 1[4]$. On considère les 3-colorations de packing possibles de $\vec{P}$. Clairement, le motif 123 peut être utilisé seulement au début du chemin $\vec{P}$, et le motif 321 peut être utilisé à la fin de $\vec{P}$. De plus, le seul motif périodique est [1213]. Donc, les seules six 3-colorations de packing possibles de $\vec{P}$, sont données par les motifs suivants (plus leurs symétries) :

$$1213 \ \dots \ 1213 \ 12,$$

$$1213 \ \dots \ 1213 \ 21,$$

$$123 \ 1213 \ \dots \ 1213 \ 121,$$

$$2131 \ \dots \ 2131 \ 21,$$

$$3121 \ \dots \ 3121 \ 31,$$

3121 ... 3121 32.

Mais aucune de ces colorations ne peut être étendue à une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$, comme le montrent les diagrammes suivants (sur les couleurs de u_0 et u_3 on met un point) :

$$2 \leftarrow \dot{1} \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow \dot{2} \leftarrow 1$$

$$2 \leftarrow \dot{1} \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow \dot{1} \leftarrow 2$$

$$2 \leftarrow \dot{1} \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow \dot{1} \leftarrow 2$$

$$1 \leftarrow \dot{2} \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow \dot{1} \leftarrow 2$$

$$1 \leftarrow \dot{3} \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow \dot{1} \leftarrow 3$$

$$1 \leftarrow \dot{3} \rightarrow ? \rightarrow ? \rightarrow \dot{2} \leftarrow 3$$

– $|S^*(A)| \geq 3$ ou $|S^*(B)| \geq 3$.

Supposons, sans perte de généralité, que $|S^*(A)| \geq 3$. Comme $n \equiv 0[4]$ et $|S^*(A)|$ et $|S^*(B)|$ sont impairs, par la Proposition 5.10, en appliquant la procédure SCP et en commençant par u_0 on obtient dans tous les cas une "mauvaise" coloration, car si $u_0 \in S^*(A)$ alors $u_{n-1}u_0u_1$ est coloré soit avec le motif 213 soit avec le motif 312, et avec le motif 212 ou 313 sinon (dans ce cas, c'est $u_1u_0u_{n-1}$ qui est un chemin direct). On a besoin de "corriger" cette mauvaise coloration, en remplaçant la séquence $1\alpha \dots \beta 1$ de la coloration produite par la procédure SCP par $1\alpha \dots \beta' 1$ avec $\beta' = 5 - \beta$.

On considère trois sous-cas.

1. Il existe $a \in S^*(A)$ et $b \in S^*(B)$ avec $d_{\vec{C}_n}(a, b) = 1$.

On suppose, sans perte de généralité, que $a = u_i$ est une source et $b = u_{i+1}$ est un puits. Donc, on a la configuration suivante (— signifie que l'arc peut prendre n'importe quelle direction) :

$$\text{---} \leftarrow a \rightarrow b \leftarrow \text{---}$$

• Si le sommet qui est sur la droite de b est une source dans $\vec{C}_n$:

Nous considérons la coloration suivante de la configuration précédente (sur les couleurs de a et b , on met un point) :

$$1 - 3 \leftarrow \dot{2} \rightarrow \dot{1} \leftarrow 2 - 3 - 1$$

- Si le sommet qui est sur la droite de b n'est pas une source dans $\vec{C}_n$:

La partie restante du circuit est non vide (puisque $n \equiv 0[4]$) et cette coloration peut être étendue à une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ par l'application de la procédure SCP. Pour voir ça, observons que la procédure SCP va produire cette mauvaise coloration sur une telle configuration (la mauvaise couleur qui implique ce cas, puisque notre coloration a modifié cette couleur, apparaît en gras) :

$$1 - 3 \leftarrow \dot{1} \rightarrow \dot{3} \leftarrow 1 \leftarrow \mathbf{2} - 1$$

On affirme finalement qu'on peut toujours trouver un i tel que $u_i \in S^*(A)$ (respectivement $u_i \in S^*(B)$), $u_{i+1} \in S^*(B)$ (respectivement $u_{i+1} \in S^*(A)$) et $u_{i+2} \notin S^*(A)$ (respectivement $u_{i+2} \notin S^*(B)$). (Si on suppose qu'il n'existe pas un i , alors l'orientation $\vec{C}_n$ de C_n est alternée, ce qui implique que $\chi_\rho(\vec{C}_n) = 2$, contradiction avec la supposition).

2. *il existe $a \in S^*(A)$ et $b \in S^*(B)$ avec $d_{\vec{C}_n}(a, b) \equiv 1[4]$, $d_{\vec{C}_n}(a, b) \geq 5$, et le sous-cas 1 ne se produit pas.*

Encore, on suppose sans perte de généralité que $a = u_i$ est une source et $b = u_j$ est un puits. Comme le sous-cas 1 ne se produit pas, on a forcément la configuration suivante :

$$\leftarrow \leftarrow a \rightarrow \rightarrow \dots \rightarrow \rightarrow \rightarrow b \leftarrow \leftarrow$$

On colore cette configuration comme suit (le motif 2131 peut être répété plusieurs fois) :

$$1 - 3 \leftarrow 2 \leftarrow \dot{1} \rightarrow (2131)^* \rightarrow \dot{2} \leftarrow 3 \leftarrow 1$$

Comme dans le sous-cas précédent, la partie restante du circuit est non vide. Puisque, cette coloration peut être étendue à une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ par application de la procédure SCP, et la

procédure SCP a produit une mauvaise coloration dans une telle configuration :

$$1 \text{ --- } 3 \text{ } \longleftarrow \text{ } 1 \text{ } \longleftarrow \text{ } \dot{2} \text{ } \longrightarrow \text{ } (1312)^* \text{ } \longrightarrow \text{ } \dot{1} \text{ } \longleftarrow \text{ } \mathbf{2} \text{ } \longleftarrow \text{ } 1$$

3. *Il existe $a \in S^*(A)$ et $b \in S^*(B)$ avec $d_{\vec{C}_n}(a, b) \equiv 3[4]$, $d_{\vec{C}_n}(a, b) \geq 7$, et les sous-cas 1 et 2 ne se produisent pas.*

Ce sous-cas peut être résolu comme le sous-cas précédent. Nous avons la configuration suivante :

$$\longleftarrow a \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \dots \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow \longrightarrow b \longleftarrow$$

pour laquelle on utilise la coloration suivante :

$$1 \text{ } \longleftarrow \text{ } \dot{2} \text{ } \longrightarrow \text{ } 3 \text{ } \longrightarrow \text{ } (1213)^* \text{ } \longrightarrow \text{ } 2 \text{ } \longrightarrow \text{ } \dot{1} \text{ } \longleftarrow \text{ } 2$$

Encore, la partie restante du circuit est non vide et cette coloration peut être étendue à une 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ par application de la procédure SCP, et la procédure SCP va produire la mauvaise coloration suivante dans une telle configuration :

$$1 \text{ } \longleftarrow \text{ } \dot{2} \text{ } \longrightarrow \text{ } 1 \text{ } \longrightarrow \text{ } (3121)^* \text{ } \longrightarrow \text{ } 3 \text{ } \longrightarrow \text{ } \dot{1} \text{ } \longleftarrow \text{ } \mathbf{3}$$

4. *Aucun des cas précédent ne se produit.*

Si aucun des cas précédents ne se produit, alors forcément les sommets de $S^*(A)$ et $S^*(B)$ alternent dans $\vec{C}_n$ et la distance directe entre deux sommets successifs vaut 3. Puisque $\vec{C}_n$ est une séquence de chemins directs de longueur 3 avec des directions opposées. Comme $|S^*(A)| = |S(A)|$ est impair, la longueur de C_n vaut $n \equiv 0[6]$, contradiction avec la supposition $n \equiv 0[4]$. Ainsi, ce dernier sous-cas ne se produit pas.

– **Cas 2 : $n \equiv 2[4]$.**

Dans ce cas C_n est encore biparti et, en utilisant la même procédure comme dans le Cas 1, une bonne 3-coloration de packing de $\vec{C}_n$ peut se produire lorsque (i) $|S^*(A)|$ ou $|S^*(B)|$ est impair, ou (ii) $|S^*(A)|$ et $|S^*(B)|$ sont pairs, mais

$S(A) \setminus S^*(A) \neq \emptyset$ ou $S(B) \setminus S^*(B) \neq \emptyset$, avec (A, B) représente une bipartition de $V(C_n)$.

Supposons maintenant que $|S^*(A)|$ et $|S^*(B)|$ sont pairs (les deux ne peuvent pas être nuls), $S(A) = S^*(A)$ et $S(B) = S^*(B)$. Dans ce cas, la procédure SCP donne une mauvaise coloration de $\vec{C}_n$ et cette coloration peut être "corrigée" exactement de la même façon que le cas 1 puisque, pour faire une telle correction, on a besoin seulement que n soit pair.

– **Cas 3 : n est impair.**

Considérons $S = S(V(C_n))$ l'ensemble des sommets qui sont des sources ou des puits dans $\vec{C}_n$. Supposons, sans perte de généralité, que u_0 est une source et considérons que la coloration π produite par la procédure SCP sur le chemin $u_0 u_1 \dots u_{n-1}$, en commençant par u_0 , avec $(c, c') = (2, 1)$ et S . Si $\pi(u_{n-1}) = 3$, π est une 3-coloration de packing de $\vec{G}$, de la forme $21 \dots 13$, alors on est à la fin.

Si $\pi(u_{n-1}) = 2$ (π n'est pas une coloration de packing de $\vec{G}$), considérons la coloration π' produite par la procédure SCP sur le chemin $u_1 u_2 \dots u_{n-1} u_0$, commençant par u_1 , avec $(c, c') = (3, 1)$ et S . Maintenant, soit X l'ensemble des sources et des puits qui sont colorés avec 1 par π , et X' l'ensemble de sources ou de puits qui sont colorés avec 1 par π' . On a évidemment $X \cap X' = \emptyset$ et $X \cup X' = S \setminus \{u_0\}$ (comme u_0 est une source, $\pi(u_0) \neq 1$ et $\pi'(u_0) \neq 1$). De plus, comme $|S|$ est pair, alors $|X|$ et $|X'|$ ne sont pas de la même parité. Donc, comme $\pi(u_0) = 2$ et $\pi(u_{n-1}) = 2$, commençant avec $\pi'(u_1) = 3$ qui donne forcément $\pi'(u_0) = 2$. Cela prouve que π' est une 3-coloration de packing de $\vec{G}$, de la forme $231 \dots 1$.

Cela termine la preuve. □

5.4 Arbres

Dans la section précédente, nous avons montré que le nombre chromatique de packing d'une couronne généralisée d'un chemin vaut 3. En utilisant une preuve similaire, on peut étendre ce résultat pour montrer que les arbres orientés sont

aussi 3-packing colorables (On peut construire par récurrence une 3-coloration de packing qui satisfait la propriété (P) ³ et telle que les sommets qui sont colorés avec 1 correspondent à une des deux partitions de l'arbre). Donc, on a aussi :

Théorème 5.11. *Soit T un arbre. Pour toute orientation $\vec{T}$ de T , $\chi_\rho(\vec{T}) \leq 3$.*

Comme, toute chenille est un arbre, donc toute orientation d'une chenille admet une 3-coloration de packing.

5.5 Thêta-graphes généralisés

Dans cette section, nous étudions la coloration de packing des thêta-graphes généralisés orientés $\vec{\Theta}_{\ell_1, \dots, \ell_p}$. Rappelons que n_ℓ , $\ell \geq 1$, représente le nombre de chaînes de longueur ℓ , c'est-à-dire $n_\ell = |\{i/1 \leq i \leq p, \ell_i = \ell\}|$, u et v représentent les deux sommets extrêmes du thêta-graphe généralisé $\Theta_{\ell_1, \dots, \ell_p}$ et $P_i = u x_i^1 \dots x_i^{\ell_i-1} v$ représente la chaîne de longueur ℓ_i pour chaque $1 \leq i \leq p$.

Dans le théorème suivant, nous montrons que le nombre chromatique de packing de toute orientation d'un thêta-graphe généralisé est compris entre 2 et 5.

Théorème 5.12. *Pour toute orientation d'un thêta-graphe généralisé $\vec{\Theta} = \vec{\Theta}_{\ell_1, \dots, \ell_p}$, $p \geq 2$, on a*

$$2 \leq \chi_\rho(\vec{\Theta}) \leq 5.$$

De plus, ces deux bornes sont atteintes.

Preuve. Suite à la Proposition 5.3, on sait que 2 est une borne atteinte de $\chi_\rho(\vec{\Theta})$. Par la Proposition 5.1 et le Théorème 4.3, on sait que $\chi_\rho(\vec{\Theta}) \leq 5$ lorsque $n_3 \leq 3$.

Supposons que $n_3 > 3$. Soit $\vec{P}_i$ l'orientation de la chaîne P_i pour tout i , $1 \leq i \leq p$, et soit $\pi : V(\vec{\Theta}) \rightarrow \{1, \dots, 5\}$ l'application définie comme suit :

1. $\pi(u) = 4$, $\pi(v) = 5$,
2. les chaînes de longueur 2 sont colorées avec 415,

3. Rappelons (P) : Pour tout sommet avec la couleur 1, tous ses voisins entrants ont la même couleur $\alpha \in \{2, 3\}$ et tous ses voisins sortants ont la même couleur $5 - \alpha$.

3. les chaînes de longueur 3 (on a 8 types) sont colorées comme la montre la Figure 5.5, en fonction de leurs orientations,
4. si $\ell_i \equiv 0[4]$, $\ell_i \geq 4$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $4121(3121)^*5$,
5. si $\ell_i \equiv 1[4]$, $\ell_i \geq 5$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $41231(2131)^*5$,
6. si $\ell_i \equiv 2[4]$, $\ell_i \geq 6$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $41(3121)^*5$,
7. si $\ell_i \equiv 3[4]$, $\ell_i \geq 7$, $\pi(P_i)$ est définie par le motif $412(3121)^*5$.

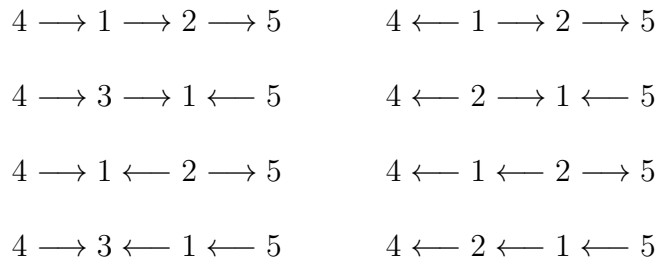


FIGURE 5.5 – Colorations de packing des chemins de longueur 3 (preuve du Théorème 5.12)

Il est clair que π est une 5-coloration de packing de $\vec{\Theta}$. Aussi, la restriction de π sur tout chemin $\vec{P}_i$ est une coloration de packing de $\vec{P}_i$. De plus, de la preuve du Théorème 4.3, on sait que la restriction de π sur $\cup\{\vec{P}_i : \ell_i \neq 3\}$ est une 5-coloration de packing. Donc, on a besoin juste de prouver que pour tous deux sommets distincts x et y avec $x, y \in \vec{P}_i$, $\ell_i = 3$, $\pi(x) = \pi(y) = c$, $c \in \{2, 3\}$ et $\{x, y\} \cap \{u, v\} = \emptyset$, on a $d_{\vec{\Theta}}(x, y) > c$.

Supposons d'abord que $c = 2$. Comme tout sommet y dans $\vec{P}_j$, $\ell_j \neq 3$, avec $\pi(y) = 2$ est à distance de moins 2 de u et v , alors aucun conflit ne peut se produire entre x et y . Si y appartient à un chemin $\vec{P}_j$ avec $\ell_j = 2$ alors les seuls arcs possibles sont $\vec{xu}$, $\vec{yu}$, $\vec{xv}$ et $\vec{yv}$ (voir Figure 5.5), et aucun conflit ne se produit entre x et y .

Supposons maintenant que $c = 3$. Dans ce cas, $x = x_i^1$ et $\vec{ux}$ est un arc (voir Figure 5.5). Comme tout sommet y dans $\vec{P}_j$, $\ell_j \neq 3$, avec $\pi(y) = 3$ est à distance au moins 3 de u et au moins 2 de v , aucun conflit ne se produit entre x et y . Si y appartient à un chemin $\vec{P}_j$ avec $\ell_j = 3$ alors $y = y_i^1$ et $\vec{uy}$ est un arc, et donc pas de conflit entre x et y .

Et donc $\chi_\rho(\vec{\Theta}) \leq 5$.

On montre que cette borne est atteinte. Pour ça, considérons le thêta-graphe généralisé orienté $\vec{\Theta}_0$ composé de six chemins directs :

$$ux_1x_2x_3x_4v, \quad uy_1y_2v, \quad uz_1v, \quad vx'_1x'_2x'_3x'_4u, \quad vy'_1y'_2u, \quad vz'_1u.$$

Pour montrer que $\chi_\rho(\vec{\Theta}_0) = 5$, nous raisonnons par l'absurde. Supposons qu'il existe une 4-coloration de packing de $\vec{\Theta}_0$. On considère cinq cas, en fonction des valeurs de $\pi(u)$ et $\pi(v)$. Comme $d_{\vec{\Theta}_0}(u, v) = 2$, on a nécessairement $\pi(u) = \pi(v) = 1$ lorsque $\pi(u) = \pi(v)$.

1. $\pi(u) = \pi(v) = 1$.

Dans ce cas, aucun sommet parmi $\{x_1, x_4, x'_1, x'_4, y_1, y_2, y'_1, y'_2, z_1, z'_1\}$ ne peut être coloré pas avec 1. De plus, comme tous deux sommets dans $\{y_1, y'_1, y_2, y'_2\}$ sont reliés par un chemin direct de longueur au plus 3, alors on a forcément $\pi(y_1) = \pi(y'_1) = 2$ et $\{\pi(y_2), \pi(y'_2)\} = \{3, 4\}$ ou bien $\pi(y_2) = \pi(y'_2) = 2$ et $\{\pi(y_1), \pi(y'_1)\} = \{3, 4\}$. Dans les deux cas, un sommet parmi $\{z_1, z'_1\}$ ne peut pas être coloré.

2. $\pi(u) = 1, \pi(v) \in \{2, 3\}$.

Si $\pi(v) = 2$ (respectivement $\pi(v) = 3$) alors on a forcément $\{\pi(z_1), \pi(z'_1)\} = \{3, 4\}$ (respectivement $\{\pi(z_1), \pi(z'_1)\} = \{2, 4\}$). Si $\pi(z_1) = 4$ (respectivement $\pi(z'_1) = 4$), alors $\pi(y_1) = \pi(y'_2) = 3$ (respectivement $\pi(y'_1) = \pi(y_2) = 3$). Contradiction.

3. $\pi(u) = 1, \pi(v) = 4$.

Dans ce cas, on a forcément $\{\pi(z_1), \pi(z'_1)\} = \{2, 3\}$, ce qui implique $\{\pi(y_1), \pi(y'_2)\} = \{2, 3\}$ et $\pi(y_2) = \pi(y'_1) = 1$. Si $\pi(z_1) = 2$ alors $\pi(x_1) = 2$ et $\pi(x_2) = 1$ mais le sommet x_3 ne peut prendre aucune couleur. Si $\pi(z'_1) = 2$ alors $\pi(x'_1) = 2$ et $\pi(x'_2) = 1$ mais le sommet x'_3 ne peut prendre aucune couleur.

4. $\pi(u) = 2, \pi(v) \in \{3, 4\}$.

Si $\pi(v) = 3$ (respectivement $\pi(v) = 4$) alors on a forcément $\{\pi(y_1), \pi(y_2), \pi(y'_1), \pi(y'_2)\} = \{1, 4\}$ (respectivement $\{\pi(y_1), \pi(y_2), \pi(y'_1), \pi(y'_2)\} = \{1, 3\}$). Contradiction, car tous deux sommets dans $\{y_1, y_2, y'_1, y'_2\}$ sont à distance au plus 3.

5. $\pi(u) = 3, \pi(v) = 4$.

Comme chaque sommet x_i , $1 \leq i \leq 4$, est relié avec un chemin direct de longueur au plus 3 avec u , et par un chemin direct de longueur au plus 4 avec v , alors on a forcément $\{\pi(x_1), \pi(x_2), \pi(x_3), \pi(x_4)\} = \{1, 2\}$. Contradiction.

Donc, toute coloration de packing d'un thêta-graphe généralisé orienté qui contient $\vec{\Theta}_0$ comme sous-graphe doit utiliser 5 couleurs. $\square$

Par la Proposition 5.3, on sait que pour tout thêta-graphe généralisé orienté $\vec{\Theta}$, $\chi_\rho(\vec{\Theta}) = 2$ si et seulement si $\vec{\Theta}$ est un graphe biparti et l'une des deux partitions ne contient que des sources ou des puits. Comme la caractérisation des thêta-graphes généralisés orientés ayant pour nombre chromatique de packing 3, 4 ou 5 semble vraiment difficile, nous la laissons comme question ouverte.

Du Lemme 4.8, on a $\chi_\rho(\vec{\Theta}) \leq 4$ lorsque Θ ne contient pas des chaînes de longueurs strictement inférieures à 5. De plus, cette valeur de 5 ne peut pas être réduite à 4.

Théorème 5.13. *Soit $\vec{\Theta} = \vec{\Theta}_{\ell_1, \dots, \ell_n}$ un thêta-graphe généralisé orienté.*

Si $\ell_i \geq 5$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors $\chi_\rho(\vec{\Theta}_{\ell_1, \dots, \ell_n}) \leq 4$.

Preuve. Pour obtenir ce résultat, il suffit de considérer la 4-coloration de packing de la preuve du Lemme 4.8.

On peut colorer chaque chaîne P_i , $1 \leq i \leq p$, de longueurs $\ell_i \geq 5$, en utilisant les motifs suivants qui sont en fonction de ℓ_i modulo 4 :

- $4(1213)^+1214$ si $\ell_i \equiv 0[4]$,
- $413(1213)^*214$ si $\ell_i \equiv 1[4]$,
- $4(1213)^+14$ si $\ell_i \equiv 2[4]$,
- $4(1213)^+214$ si $\ell_i \equiv 3[4]$.

Il est clair que la coloration obtenue est une 4-coloration de packing de $\vec{\Theta}$ quelles que soit les orientations des arcs. $\square$

Conclusion et perspectives

Dans ce chapitre, nous avons introduit la coloration de packing des graphes orientés. D'abord nous avons étudié le cas de quelques familles de graphes très connues, comme les graphes complets, les graphes bipartis, les graphes bipartis complets, les chaînes, les cycles et les arbres. Ensuite nous avons étudié d'autres familles dont le graphe sous-jacent est déjà traité dans les deux chapitres précédents, comme les couronnes et les couronnes généralisés des chaînes et des cycles, les θ -graphes généralisés... Nous n'avons pas pu compléter la caractérisation des θ -graphes généralisés orientés et nous n'avons pas pu obtenir de résultats sur la coloration de packing de quelques familles d'échelles. La difficulté réside aux nombres importants d'orientations possibles de ces graphes. Il sera donc intéressant d'essayer d'autres moyens pour pouvoir aboutir à des résultats sur ces graphes orientés, en répondant aux questions suivantes :

Question 5.14. *Quelles sont les conditions pour qu'un θ -graphe généralisé orienté soit 4-colorable ou 5-colorable ?*

Question 5.15. *Quelles sont les conditions pour que $\chi_\rho(\vec{G}) = i$, pour $2 \leq i \leq 7$, avec G une échelle circulaire, un H -graphe ou un H -graphe généralisé ?*

Comme pour tout graphe G , on a $\chi_\rho(G) \geq \chi_\rho(\vec{G})$, il sera aussi intéressant de trouver des conditions, pour des classes de graphes particulières, avec une égalité entre le nombre chromatique de packing de graphe G et de $\vec{G}$.

Comme nous avons une étude complète de la coloration de packing des arbres orientés et des cycles orientés, il sera intéressant de répondre à la question suivante sur les graphes de Halin⁴ orientés :

Question 5.16. *quel est le nombre chromatique de packing d'un graphe de Halin orienté ?*

4. Un graphe de *Halin* est un graphe obtenu à partir d'un arbre, en reliant tous les sommets pendants de cet arbre par un cycle, de telle façon que le graphe obtenu reste planaire.

Conclusion

Dans le cadre de cette thèse, nous nous sommes intéressés principalement à l'étude du problème de la coloration de packing des graphes. Cette thèse consiste aussi en l'introduction de la notion de la coloration de packing des graphes orientés.

Dans chaque chapitre, nous avons fait un bilan des résultats obtenus et avons suggéré un certain nombre de problèmes ou de questions en relation directe avec nos travaux.

Dans cette conclusion générale, nous rappelons certains de ces résultats ou questions, puis présentons des axes de recherches plus larges.

De nombreuses classes de graphes ont été considérées dans la littérature durant ces dernières années. Pour la plupart, seuls des encadrements de leurs nombres chromatiques de packing ont été obtenus. Pour d'autres, des résultats optimaux ont été prouvés. Étant donné que le problème de la coloration de packing est souvent difficile à résoudre dans toute sa généralité, nous nous sommes restreints, dans cette thèse, à l'étude de la coloration de packing de quelques classes de graphes.

Après avoir fourni, au premier chapitre, quelques notions de base de la théorie des graphes, nous avons présenté au deuxième chapitre, les principaux résultats connus dans la littérature sur la coloration de packing des graphes. Nous avons alors déduit une borne supérieure du nombre packing chromatique du produit tensoriel de deux chaînes de longueurs infinies.

Dans le chapitre 3, nous avons étudié deux familles de graphes. Dans la première partie nous avons entièrement étudié la classe des couronnes et des couronnes gé-

nérialisées des chaînes et des cycles. La seconde partie a considéré plusieurs classes d'échelles. Nous avons tout d'abord montré que la valeur exacte du nombre chromatique de packing d'une échelle circulaire est soit 5, 6 ou 7, ces valeurs exactes complètent et améliorent le résultat de William et Roy [55]. Nous avons également amélioré et complété un autre résultat de ces auteurs sur la coloration de packing des H -graphes $H(r)$. Nous avons montré que 5 est une valeur exacte lorsque r est pair même pour $r = 2$. Pour r est impair nous avons juste montré que la valeur exacte est soit 6 soit 7, mais nous conjecturons que la valeur exacte est 7. Nous arrivons à le vérifier, en utilisant l'ordinateur, sur plusieurs exemples de tailles importantes, mais nous n'avons pas pu généraliser ce résultat pour n'importe quelle valeur impaire de r .

A la fin du troisième chapitre, nous avons pu obtenir un résultat général sur la coloration de packing des H -graphes généralisés $H_\ell(r)$, quelle que soit la longueur $(2r)$ et le nombre de niveaux ℓ .

Dans le chapitre suivant, nous avons entièrement résolu le cas des thêta-graphes généralisés.

Enfin, au dernier chapitre, nous avons étendu la notion de la coloration de packing aux graphes orientés. Tout d'abord, nous avons caractérisé les graphes orientés ayant pour nombre packing chromatique 2. Ensuite nous avons étudié la coloration de packing des graphes orientés dont le graphe sous-jacent est une chaîne, un cycle, la couronne ou la couronne généralisé d'une chaîne ou d'un cycle, un graphe complet, un graphe biparti complet, un thêta-graphe généralisé ou un arbre. Dans la plupart des cas, nous avons trouvé des valeurs exactes du nombre chromatique de packing, ainsi qu'une caractérisation complète, sauf pour les thêta-graphes généralisés et les graphes biparti-complets, où nous avons donné des bornes inférieures et des bornes supérieures.

En conclusion, il serait intéressant de poursuivre et compléter nos travaux de recherche sur le problème de la coloration de packing. Dans un premier temps nous

pourrions nous restreindre aux classes de graphes pour lesquelles une borne supérieure est déjà connue pour le nombre chromatique de packing. Sachant que toute coloration de packing optimale d'un graphe G est une coloration de packing de toute orientation $\vec{G}$ de G , mais pas forcément optimale, nous pourrions alors avoir un point de départ et ainsi une première borne à essayer d'améliorer.

Comme autres perspectives à notre travail, nous proposons notamment :

- Trouver des bornes de $\chi_\rho(G)$ en fonction du diamètre de G ,
- Trouver d'autres caractérisations des graphes vérifiant $\chi_\rho(G) = 3$,
- Trouver d'autres caractérisations des graphes vérifiant $\chi_\rho(G) = \chi_\rho(\vec{G})$,
- Déterminer des valeurs exactes et des bornes de $\chi_\rho(G)$ pour d'autres classes de graphes (cactus, graphes triangulés, graphes planaires...),
- Étudier la complexité de la recherche du nombre chromatique de packing de quelques classes de graphes...

Bibliographie

- [1] K. Appel and W. Haken. The solution of the four-color-map problem. *Scientific American*, 237(4) :108-121, 152, 1977.
- [2] K. Appel, W. Haken and J. Koch. Every planar map is four colorable : Part 2, reducibility. *Illinois Journal of Mathematics*, 21 :491-567, 1977.
- [3] G. Argiroffo. Polynomial instances of the packing coloring problem. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 37, 363-368, 2011.
- [4] G. Argiroffo, G. Nasini and P. Torres. The packing coloring problem for $(q, q-4)$ -graphs. *Lecture Notes in Computer Science* 7422, 309-319, 2012.
- [5] G. Argiroffo, G. Nasini and P. Torres. The packing coloring problem for lobsters and partner limited graphs. *Discrete Applied Mathematics* 164, 373-382, 2014.
- [6] C. Berge. *Graphes*. Gauthier-Villars, 3^{ème} édition, 1983.
- [7] J. A. Bondy and U. S. R. Murty. *Graph theory with Applications*. New York : Macmillan, 1976.
- [8] O.V. Borodin, D. Fon-der-Flaass, A.V. Kostochka, A. Raspaud and É. Sopena. On deeply critical oriented graphs. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 81 : 150-155, 2001.
- [9] O.V. Borodin, D. Fon-der-Flaass, J. Nešetřil, A. Raspaud and É. Sopena. On universal graphs for planar oriented graphs of a given girth. *Discrete Mathematics*, 188 : 73-85, 1998.
- [10] O.V. Borodin, D. Fon-der-Flaass, J. Nešetřil, A. Raspaud and É. Sopena. On the maximum average degree and the oriented chromatic number of a graph. *Discrete Mathematics*, 206 : 77-89, 1999.

-
- [11] B. Brešar, S. Klavžar and D.F. Rall, On the packing Chromatic number of Cartesian products, Hexagonal Lattice and Trees. *Discrete Applied Mathematics*, 155 : 2303-2311, 2007.
 - [12] B. Brešar, S. Klavžar, D.F. Rall and K.Wash, Packing Chromatic number, $(1, 1, 2, 2)$ -colorings, and characterizing the Petersen graph. *arXiv :1608.05573v1 [math.co]*, 2016.
 - [13] B. Brešar, S. Klavžar, D.F. Rall and K.Wash, Packing Chromatic number under local changes in a graph. *Discrete Mathematics*, article in press, 2016.
 - [14] B. Brešar, S. Klavžar and D.F. Rall, Packing Chromatic number of Base-3 Sierpinski Graphs. *Graphs and Combinatorics*, 32 (4) : 1313-1327, 2016.
 - [15] B. Courcelle. The monadic second-order logic of graphs vi : on several representations of graphs by relationnal structures. *Discrete Applied Mathematics*, 54 :117-149, 1994
 - [16] R.Diestel. *Graph Theory*. 3rd edition, Springer-Verlag, Berlin and Heidelberg, 2005.
 - [17] J. Ekstein, J. Fiala, P. Holub and B. Lidický. The packing chromatic number of the square lattice is at least 12, *arXiv :1003.2291v1 [cs.DM]*, 2010.
 - [18] J. Ekstein, P. Holub and B. Lidický. Packing chromatic number of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics* 160 : 518-524, 2012.
 - [19] J. Ekstein, P. Holub and O. Togni. The packing coloring of distance graphs $D(k, t)$. *Discrete Applied Mathematics* 167 : 100-106, 2014.
 - [20] L. Euler. Solutio Problematis ad geometriam Situs Pertinentis, [Solution d'un problème lié à la géométrie de la position]. *Commentarii academiae scientiarum imperialis Petropolitanae*, [Mémoires de l'académie impériale des sciences de Saint-Petersbourg], 8 : 128-140, 1736 (publication en 1741). Voir aussi *Opera Omnia, Series 1*, 7 : 1-10.
 - [21] G. Fertin, E. Godard and A. Raspaud. Acyclic and k-distance coloring of the grid. *inform processing letters*, 87 : 51-58, 2003.
 - [22] J. Fiala and P. A. Golovach. Complexity of the packing coloring problem for trees. *Discrete Applied Mathematics*, 158 : 771-778, 2010.

-
- [23] J. Fiala, S. Klavžar and B. Lidický. The packing chromatic number of infinite product graphs. *European Journal of Combinatorics*, 30 : 1101-1113, 2009.
 - [24] A.S. Finbow and D. F. Rall. On the packing chromatic number of some lattices. *Discrete Applied Mathematics*, 158 : 1224-1228, 2010.
 - [25] N. Gastineau. Dichotomies properties on computational complexity of S -packing coloring problems. *Discrete Mathematics* 338, no. 6, 1029-1041, 2015.
 - [26] N. Gastineau and O. Togni. S -packing colorings of cubic graphs. *arXiv : 1403.7495v2 [cs.DM]*, 2016.
 - [27] N. Gastineau, H. Kheddouci and O. Togni. Subdivision into i -packings and S -packing chromatic number of some lattices. *arXiv : 1505.07781v1 [cs.DM]*, 2015.
 - [28] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J. M. Harris and D. F. Rall. Broadcast chromatic numbers of graphs. *Ars Combinatoria* 86 : 33-49, 2008.
 - [29] W. Goddard, S.M. Hedetniemi, S.T. Hedetniemi, J. M. Harris and D. F. Rall. Broadcast chromatic numbers of graphs. *The 16th Cumberland Conference on Combinatorics, Graph Theory and Computing*, 2003.
 - [30] W. Goddard and H. Xu. The S -packing chromatic number of a graph. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 32 : 795-806, 2012.
 - [31] W. Goddard and H. Xu. A note of S -packing colorings of lattices. *Discrete Applied Mathematics*, 166 : 255-262, 2012.
 - [32] P. Jacko and S. Jendrol. Distance coloring of the hexagonal lattice. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, 25 : 151-166, 2005.
 - [33] Y. Jacobs, E. Jonck and E. J. Joubert. A lower bound for the packing chromatic number of the Cartesian product of cycles. *Central European Journal of Mathematics*, 11(7) : 1344-1357, 2013.
 - [34] T. R. Jensen and B. Toft. *Graph Coloring Problems*. Wiley Interscience, 1995.
 - [35] D. Korže and A. Vesel. On the packing chromatic number of square and hexagonal lattice. *Ars Mathematica Contemporanea* 7 : 13-22, 2014.
 - [36] A.V. Kostochka, É. Sopena and X. Zhu. Acyclic and oriented chromatic numbers of graphs. *Graph Theory*, 24 : 331-340, 1997.

- [37] D. Laïche. *Sur les nombres broadcast chromatiques*. Thèse de Magister, Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene, Algerie, 2010.
- [38] D. Laïche, I. Bouchemakh and É. Sopena. On the Packing Coloring of Undirected and Oriented Generalized Theta Graphs. *Australasian Journal of Combinatorics*, 66 (2) : 310-329, 2016.
- [39] D. Laïche, I. Bouchemakh and É. Sopena. Packing coloring of some undirected and oriented corone graphs. *Discussiones Mathematicae Graph Theory*, accepté, 2016.
- [40] D. Laïche, É. Sopena and I. Bouchemakh. Packing coloring of circular ladders and generalized H -graphs. *BGW'16, Bordeaux*, 7-10 novembre 2016.
- [41] R. Leese and S. Hurley. Methods and Algorithms for Radio Channel Assignment. *Oxford Lecture Series in Mathematics and Its Applications* 23, december 2002.
- [42] G. Nasini, D. Severin and P. Torres. On the packing chromatic number on hamming graphs and general graphs. *arXiv : 1510.05524 V1 [sc.DM]*, 2015.
- [43] J. Nešetřil, A. Raspaud and É. Sopena. Coloring and girth of oriented planar graphs. *Discrete Mathematics*, 165/166 : 519-530, 1997.
- [44] D.F. Rall, B. Brešar, A.S. Finbow and S. Klavžar. On the packing chromatic number of trees, Cartesian products and some infinite graphs. *Electronic Notes in Discrete Mathematics* 30 : 57-61, 2008.
- [45] N. Robertson, D. P. Sanders, P. Seymour and R. Thomas. The four-color theorem. *Journal of Combinatorial Theory, Series B*, 70(1) :2-44, 1997.
- [46] Z. Shao and A. Vesel. Modeling the packing coloring problem of graphs. *Applied Mathematical Modelling*, 39 : 3588-3595, 2015.
- [47] Z. Shao and A. Vesel. Corrigendum to "Modeling the packing coloring problem of graphs" [*Applied Mathematical Modelling*, 39 : 3588-3595,2015]. *Applied Mathematical Modelling*, 40 : 1683, 2016.
- [48] C. Sloper. An eccentric coloring of trees. *Australasian Journal of Combinatorics*, 29 : 309-321, 2004.

- [49] É. Sopena. Oriented graph coloring. *Discrete Mathematics*, 229 (1-3) : 359-369, 2001.
- [50] R. Soukal and P. Holub. A note on the packing chromatic number of the square lattice. *Electronic Journal of Combinatorics*, 17, 2010.
- [51] O. Togni. On packing colorings of distance graphs. *Discrete Applied Mathematics*, 167 : 280-289, 2014.
- [52] P. Torres and M. Valencia-Pabon. The packing chromatic number of hypercubes. *Discrete Applied Mathematics* 190-191, 127-140, 2015.
- [53] A. William, I. Rajasingh and S. Roy. Packing chromatic number of enhanced hypercubes. *International Journal of Mathematics and its Applications*, 2 (3) : 1-6, 2014.
- [54] A. William, S. Roy and I. Rajasingh. Packing chromatic number of cycle related graphs. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 4 (1) : 27-33, 2014.
- [55] A. William and S. Roy. Packing chromatic number of certain graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, 87 (6) : 731-739, 2013.
- [56] A. William and S. Roy. Packing chromatic number of certain graphs. *Journal of Computer and Mathematical Sciences*, 5 (3) : 282-287, 2014.
- [57] A. William, S. Roy and I. Rajasingh. Packing chromatic number of circular fans and mesh of trees. *International Journal of Mathematics and Soft Computing*, 4 (2) : 145-152, 2014.