

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
MINISTÈRE DE L'ENSEIGNEMENT SUPÉRIEUR ET DE LA
RECHERCHE SCIENTIFIQUE
UNIVERSITÉ DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE
HOUARI BOUMEDIENE
FACULTÉ DE MATHÉMATIQUES



MEMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER

En MATHEMATIQUES

Spécialité : Algèbre et Théorie des Nombres

Par

Nassima BENAICHE

Sur

CONGRUENCES SUR LES NOMBRES
DE BERNOULLI -HURWITZ GÉNÉRALISÉS

Soutenu publiquement, le 13/05/2008, devant le jury composé de :

Mr. K.BETINA	Professeur	U.S.T.H.B.	Président.
Mr. B.BENZAGHOU	Professeur	U.S.T.H.B.	Directeur de thèse.
Mr. M.ZITOUNI	Professeur	U.S.T.H.B.	Examineur.
Mr. S.MOKHFI	Chargé de Cours	Univ.BLIDA.	Examinatrice.

Remerciements

Ce travail de thèse a été effectué sous la direction de monsieur Benali Benzaghou à qui je tiens à exprimer ici ma profonde reconnaissance pour m'avoir fait confiance, et pour m'avoir dirigé pendant ces années. Je tiens tout particulièrement à le remercier pour la richesse de ces idées et de ses conseils et pour m'avoir fait profiter de ses vastes connaissances.

J'adresse mes sincères remerciements à M. Betina Kamel de m'avoir fait l'honneur de présider mon jury. Je remercie M. Zitouni Mohamed et M. Mokfi Siham d'avoir fait partie de mon jury et l'intérêt qu'ils ont bien voulu porté à mon travail.

Je voudrais remercier chaleureusement tous mes collègues dans notre équipe d'Algèbre, pour l'ambiance de travail chaleureuse et motivante qu'ils ont su créer et maintenir.

Dédicaces

Je tiens à dédier ce travail à :

Mes parents

Mes frères et mes sœurs

Ouarda et Aichouche

Congruences sur les nombres de Bernoulli- Hurwitz généralisés

Résumé

Les nombres de Bernoulli-Hurwitz généralisés sont donnés par les nombres de Bernoulli universels.

Les congruences vérifiées par les nombres de Bernoulli sont étendues aux nombres de Bernoulli-Hurwitz généralisés.

Notations:

Dans tout ce qui suit ,on va utiliser les notations suivantes:

(1) Soit α un nombre rationnel , on note par $\lfloor \alpha \rfloor$ le plus grand entier qui est inferieur à α et $\lceil \alpha \rceil$ le plus petit entir qui est superieur à α

.

(2) $(Z)_n = Z(Z-1) \dots (Z-n+1)$

(3) $\binom{Z}{n} = \frac{(Z)_n}{n!}$

(4) $n!! = n(n-2)(n-4) \dots$

$n!!!! = n!^{(5)}$

(5) $a|_p = \frac{a}{p^{v_p(a)}}$

(6) Si $F(Z)$ est une série formelle , on note par $[Z^n] F(Z)$ le coefficient de Z^n et aussi $\left[\frac{Z^n}{n!} \right] F(Z) = n! [Z^n] F(Z)$, $\left[\frac{Z}{n} \right] F(Z) = n [Z^n] F(Z)$

(7) Pour la série formelle $\varphi(Z)$, on appelle $\left[\frac{Z}{n} \right] \varphi(Z)$ ($n \geq 0$) le coefficient de Carlitz pour $\varphi(Z)$ de Z^n et $\left[\frac{Z}{n!} \right] \varphi(Z)$ ($n \geq 0$) sont coefficient de Hurwitz

(8) Dans l'expression d'une série formelle par rapport à z ,le symbole $(d^\circ(z) \geq m)$ signifie la partie des termes qui sont égaux au moins a m

(9) Soit $\mathcal{R}$ un anneau commutatif,on note par $\mathcal{R} \langle\langle z \rangle\rangle$ l'anneau des séries formelles avec seulement des termes qui ont des valuations non-négatives telle que tout ses coefficient de Hurwitz appartiennent à $\mathcal{R}$

Table des matières

Introduction	1
1 préliminaire arithmétiques	2
2 Les nombres de Bernoulli universels et leurs propriétés:	4
2.1 Le théorème de Clarke :	5
2.2 La congruence de Kummer pour les nombres de Bernoulli universels:	8
3 Les nombres de Bernoulli -Hurwitz généralisés	20
3.1 Les séries de Hurwitz :	21
4 Théorème de Clarke :	24
4.0.1 Le cas de $y^2(u) = x(u)^{2g+1} - 1$:	24
4.1 Appendice:	39
Bibliographie	39

Introduction

Les nombres de Bernoulli-Hurwitz généralisés sont donnés par les nombres de Bernoulli universels. Pour les définir on a besoin d'introduire des notions sur les courbes et fonctions algébriques.

Parmi les résultats les plus importants pour les nombres de Bernoulli, nous avons le théorème de Von Staudt Clausen, le 2^{ème} théorème de Von Staudt et la congruence de Kummer.

Clarke a donné un théorème pour les nombres de Bernoulli universels qui est analogue au théorème de Von Staudt Clausen et au 2^{ème} théorème de Von Staudt pour les nombres de Bernoulli classiques. Adelberg a conjecturé la congruence de Kummer pour les nombres de Bernoulli universels et il l'a démontré pour un cas particulier.

En février 2004 Seidai Yasuda a prouvé la conjecture d'Adelberg et il a donné la preuve complète du théorème de Clarke pour les nombres de Bernoulli-Hurwitz généralisés qui est analogue au théorème de Clarke pour les nombres de Bernoulli universels et qui réunit aussi le théorème de Von Staudt Clausen et le 2^{ème} théorème de Von Staudt.

Chapitre 1

preliminaire arithmetiques

Dans ce chapitre on donne quelques propositions dont on aura besoin dans ce qui va suivre.

Lemme 1.0.1 *soient n et q deux entiers positifs et r un entier tel que $r < q$ alors*

$$\frac{(qn - r)!^{(q)}}{(qn)!^{(q)}} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{q} \right]$$

Preuve. on a

$$\binom{\frac{r}{q} - 1}{n} = \binom{\frac{r-q}{q}}{\frac{r-q}{q}} \binom{\frac{r-2q}{q}}{\frac{r-2q}{q}} \dots \binom{\frac{r-nq}{q}}{\frac{r-nq}{q}} / n! = (-1)^n \frac{(qn - r)!^{(q)}}{(qn)!^{(q)}} \quad (1.0.1)$$

il est clair que $(1.0.1) \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{q} \right]$ ■

Proposition 1.0.1 *Si p est un nombre premier impair et a est divisible par p^n avec $n \geq 0$ alors*

$$(pa)! / p^a a! \equiv (-1)^a \pmod{p^{n+1}}$$

Si a est impair alors $(2a)! / 2^a a!$ est impair

Si $a \equiv 2 \pmod{4}$ alors $\frac{(2a)!}{2^a a!} \equiv -1 \pmod{4}$

Si a est divisible par 2^n avec $n \geq 2$ alors $\frac{(2a)!}{2^a a!} \equiv 1 \pmod{2^{n+1}}$

Preuve. Il y a exactement a nombres entre 1 et pa qui sont divisible par p c'est à dire $p, 2p, \dots, ap$. et leur produit est $p^a a!$

si $a = p^a A$

$$\frac{(pa)!}{p^a a!} = \prod_{\substack{i=1 \\ p \nmid i}}^{pa} i \equiv \begin{cases} (-1)^A \bmod p^{n+1} & \text{si } p \text{ impair ou } p^n = 2 \\ 1 \bmod 2^{n+1} & \text{si } p = 2, n \neq 1 \end{cases}$$

où la congruence est partagée en A blok modulo p^{n+1} . on note que si p est impair, a, A auront la même parité et que si $p^n = 2$ alors A est impair. ■

Proposition 1.0.2 *Si r et d sont deux nombres naturels alors $\frac{(rd)!}{(r+1)^d d!}$ et $\frac{(r-1)!}{r+1}$ sont entiers à moins que $r = 3$ ou $r + 1$ est premier.*

Preuve. Voir [5] ■

Chapitre 2

Les nombres de Bernoulli universels et leurs propriétés:

On va définir les nombres de Bernoulli universels et donner quelques propriétés de ces nombres pour montrer les congruences les plus importantes en théorie des nombres telles que la congruence de Clarke et la congruence de Kummer .

Définition 2.0.1 Soit $f_1, f_2, \dots$ une infinité d'indéterminés , on considère la série formelle :

$$u = u(t) = t + \sum_{n=1}^{\infty} f_n \frac{t^{n+1}}{n+1}$$

et sa série formelle réciproque :

$$t = t(u) = u - f_1 \frac{u^2}{2!} + (3f_1^2 - 2f_2) \frac{u^3}{3!} + \dots$$

On définit $\hat{B}_n \in \mathbb{Q}[f_1, f_2, \dots]$ par

$$\frac{u}{t(u)} = \sum_{n=0}^{\infty} \hat{B}_n \frac{u^n}{n!}$$

on les appelle les nombres de Bernoulli universels d'ordre 1.

Si on pose $f_n = (-1)^n$ on aura $u(t) = \log(1+t)$ et $t(u) = e^t - 1$ alors les $\hat{B}_n$ sont les nombres de Bernoulli classiques B_n .

Définition 2.0.2 Soit $U = (U_1, U_2, \dots)$ une suite finie d'entiers non -négatifs , on note $w(U) = \sum_j jU_j$ on l'appelle le poids de U

Le nombre $d(U) = \sum_j U_j$ est appelé le degré de U

Définition 2.0.3 pour simplifier on écrit :

$$U! = U_1!U_2!\dots$$

$$\binom{d}{U} = \frac{d!}{U!}$$

$$\text{on note } \Lambda^U = 2^{U_1}3^{U_2}4^{U_3}\dots, f^U = f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots$$

$$\text{et } \mathcal{Y}_U = \Lambda^U U!$$

$$d'où \text{ on écrit : } \tau_U = (-1)^{\frac{d(U)-1(w(U)+d(U)-2)!}{\mathcal{Y}_U}}$$

Proposition 2.0.3 On a

$$\frac{\hat{B}_n}{n} = \sum_{\omega(U)=n} \tau_U f^U$$

Preuve. Voir [9] ■

2.1 Le théorème de Clarke :

On définit la fonction numerique $Z(p, n)$ où p est premier et n est un nombre naturel divisible par $p-1$. On suppose que $n = p^l (p-1) M$ où p ne divise par M alors $Z(p, n)$ est déterminée modulo M comme suit

Si $p = 2$ et $l = 1$ alors $Z(2, n) \equiv -M \pmod{4}$, si non $Z(p, n)$ est l'inverse de M modulo p^{l+1}

Théorème 2.1.1 On a

$$\hat{B}_1 = \frac{1}{2}f_1$$

$$\frac{\hat{B}_2}{2} = -\frac{1}{4}f_1^2 + \frac{1}{2}f_2$$

$$\text{-Si } n \equiv 0 \pmod{4}$$

$$\frac{\hat{B}_n}{n} \equiv \sum_{\substack{n=a(p-1) \\ p \nmid a}} \frac{Z(p, n)}{p^{1+v_p(a)}} f_{p-1}^a \pmod{\mathbb{Z}[f_1, f_2, \dots]}$$

$$\text{-Si } n \not\equiv 2 \pmod{4} \text{ et } n \equiv 2 \pmod{4}$$

$$\frac{\hat{B}_n}{n} \equiv \frac{f_1^{n-6}f_3}{2} + \sum_{n=a(p-1)} \frac{Z(p, n)}{p^{1+v_p(a)}} f_{p-1}^a \pmod{\mathbb{Z}[f_1, f_2, \dots]}$$

$$\text{-Si } n \not\equiv 1 \pmod{4} \text{ et } n \equiv 1, 3 \pmod{4}$$

$$\frac{\hat{B}_n}{n} \equiv \frac{f_1^n + f_1^{n-3} f_3}{2} \bmod \mathbb{Z}[f_1, f_2, \dots]$$

Remarque 2.1.1 *Le théorème est analogue au théorème de Von Staudt Clausen et au 2^{ème} théorème de Von Staudt pour les nombres de Bernoulli classiques .*

Le théorème de Clarke a réuni ces deux théorèmes et plus tard , on va voir cette réunion pour les nombres de Bernoulli - Hurwitz généralisés.

Preuve. Pour le monome $f_1^{U_1} f_2^{U_2} f_3^{U_3} \dots f_k^{U_k}$
on pose $b \left(f_1^{U_1} f_2^{U_2} \dots f_k^{U_k} \right) = (-1)^{d(U)-1} \frac{(w(U) + d(U) - 2)!}{2^{U_1} \dots (k+1)^{U_k} U_1! \dots U_k!}$

pour le coefficient de $f_1^{U_1} f_2^{U_2} f_3^{U_3} \dots f_k^{U_k}$ dans $\frac{\hat{B}_n}{n}$ comme a été donné par la proposition 2.0.3

on va montrer que :

- (i) Si p est premier et $n = a(p-1)$ alors $b \left(f_{p-1}^a \right) \equiv Z(p, n)/p^{1+v_p(n)} \bmod \mathbb{Z}$
- (ii) Si $n \equiv 2 \bmod 4$ et $n > 2$ alors $b \left(f_1^{n-6} f_3^2 \right) \equiv \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$
- (iii) Si n est impair et $n > 1$ alors $b \left(f_1^{n-3} f_3 \right) \equiv \frac{1}{2} \bmod \mathbb{Z}$
- (IV) Pour chaque autre monome $b \left(f_1^{U_1} f_2^{U_2} f_3^{U_3} \dots f_k^{U_k} \right)$ est entier.

Si p est impair et $v_p(n) = l$ alors (i) est équivalente à $npb \left(f_{p-1}^a \right) \equiv p-1 \bmod p^{l+1}$

$$\text{mais } npb \left(f_{p-1}^a \right) \equiv (-1)^{a-1} \frac{(p-1)(ap)!}{(ap-1)p^a a!}$$

alors la proposition 1.0.2 donne le resultat .

dés que $n + d(U) = 2U_1 + 3U_2 + \dots + (k+1)U_k$ on a l'identité suivante:

$$b \left(f_1^{U_1} f_2^{U_2} f_3^{U_3} \dots f_k^{U_k} \right) = \frac{(-1)^{d(U)-1}}{(n+d(U))(n+d(U)-1)} (n+d(U), 2U_1, 3U_2, \dots, (k+1)U_k) \prod_{t=1}^k \frac{(t+1)U_t!}{(t+1)^{U_t} U_t!}$$

où $(n+d(U), 2U_1, 3U_2, \dots, (k+1)U_k)$ est le coefficient multinomial $\frac{(n+d(U))!}{2U_1! 3U_2! \dots (k+1)U_k!}$

avec $2U_1 + 3U_2 + \dots + (k+1)U_k = n + d(U)$

on sait que les coefficients multinomiaux sont entiers et que chaque facteur $\frac{(t+1)U_t!}{(t+1)^{U_t}U_t!}$ est entier .

Si $U_r \geq 2$ on a :

$$b\left(f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}\right) = (n+d(U)-2, 2U_1, \dots, (n+d(U)-U_r+1), n+d(U)-U_r, 2U_1, \dots, rU_r, \dots, (k+1)U_k) \frac{rU_r!}{(r+1)^{U_r}U_r!} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq r}}^k \frac{(t+1)U_t!}{(t+1)^{U_t}U_t!} \quad (2.1.1)$$

Si $U_r = 2$ on aura :

$$b\left(f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}\right) = \frac{1}{n+d(U)-1} (n+d(U)-1, \dots, r, \dots, (k+1)U_k) \frac{r!}{(r+1)} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq r}}^k \frac{(t+1)U_t!}{(t+1)^{U_t}U_t!}$$

on met r en facteur , on obtient :

$$b\left(f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}\right) = (n+d(U)-2, 2U_1, \dots, r-1, \dots, (k+1)U_k) \frac{(r-1)!}{(r+1)} \prod_{\substack{t=1 \\ t \neq r}}^k \frac{(t+1)U_t!}{(t+1)^{U_t}U_t!} \quad (2.1.2)$$

on va considérer plusieurs cas :

Si $U_r > 0$ pour chaque $r \neq 3$ tel que $r+1$ n'est pas premier alors (2.1.1) ou (2.1.2) avec la proposition 1.0.2 montrent que $b\left(f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}\right)$ est entier .

Si $f_{p-1}f_{q-1}$ divise $f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}$ avec p et q premiers distincts , alors (2.1.1) ou (2.1.2) montre que $b\left(f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}\right)$ appartient à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{p}\right]$ et à $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{q}\right]$

d'où il est entier .

De même si f_3f_{p-1} divise $f_1^{U_1}f_2^{U_2}f_3^{U_3}\dots f_k^{U_k}$ où p premiers impair

il reste a considerer le cas du monome de la forme $f_1^a f_3^b$

on a

$$b\left(f_1^a f_3^b\right) = \frac{(2a+4b-2)!}{2^{a+2b}a!b!}$$

ainsi $b\left(f_1^a f_3^b\right) \in \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$ et on a $v_2\left(b\left(f_1^a f_3^b\right)\right) = v_2(a+2b-1) - v_2(a!) - v_2(b!) - 1$

ainsi $b = 1$ on a $b\left(f_1^a f_3\right) \equiv \frac{a+1}{2} \pmod{\mathbb{Z}}$ d'où (iii) est prouvé .

Si $b > 1$ on a :

$$v_2(b(f_1^a f_3^b)) = v_2\left(\binom{a+b}{b} + v_2(a+2b-1)(a+2b-1)\dots(a+b+1)\right) - 1$$

Pour $b > 2$ c'est non négatif , dans le cas de $b = 2$ alors

$$v_2(b(f_1^a f_3^b)) = v_2\left(\binom{a+2}{2} + v_2(a+3) - 1\right)$$

d'où être égal à -1 si a est divisible par 4 se qui prouve (ii) ■

2.2 La congruence de Kummer pour les nombres de Bernoulli universels:

Théorème 2.2.1 Soit p un nombres premier , a et n deux entiers positifs ,on assure que $n > a$ et $n \equiv 0 \pmod{p-1}$ alors :

$$\sum_{r=0}^a \binom{a}{r} (-f_{p-1})^{a-r} \frac{\hat{B}_{n+r(p-1)}}{n+r(p-1)} \equiv 0 \pmod{p^{\lfloor a/2 \rfloor} \mathbb{Z}_{(p)}[f_1, f_2 \dots]}$$

Remarque 2.2.1 Si $a = 1$ et $n > a = 1$ avec $n \not\equiv 0, 1 \pmod{p-1}$ Adelberg a prouvé dans son article[[1] thérorème 3.2] que la congruence est vérifiée modulo p , et plus tard dans [[2] thérorème 1] ,il fait la preuve pour un cas plus large si $n \equiv 1 \pmod{p-1}$

Pour démontrer ce théorème on a besoin de deux propositions

Proposition 2.2.1 Soit p un nombre premier , a et n deux entiers non-négatifs

Soit $M = \begin{cases} v_p(n!) & \text{si } n \geq ap \\ a - \lfloor n/p \rfloor + v_p(n!) - \lfloor (a - \lfloor n/p \rfloor)/p \rfloor & \text{si } n < ap \end{cases}$
alors on a les congruences suivantes :

(1) Si q est un entier non-négatif alors:

$$\sum_{r=0}^a \frac{((r+q)+n)!}{(r+q)!p^{r+q}} \binom{a}{r} \equiv 0 \pmod{p^M}$$

(2) Si r_0 est un entier tel que $0 < r_0 \leq a$ et $n \geq r_0 p$ est un entier alors

$$\sum_{r=0}^a \frac{((r-r_0)+n)!}{(r-r_0)!p^{r-r_0}} \binom{a}{r} \equiv 0 \pmod{p^M}$$

Le (2) de cette proposition était toujours une conjecture jusqu'à février 2004 où Seidai Yasuda a donné la preuve complète de cette proposition.

Pour prouver cette proposition Yasuda a défini l'ensemble suivant :

Soit α et β deux nombre réels tels que $\alpha > 0$

$$\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta} = \left\{ \varphi \in \mathbb{Q}_p[[v]] \mid \left(\frac{d}{dv} \right)^{pa} \varphi \in p^{[\alpha(\alpha+\beta)]} \mathbb{Z}_p \ll v \gg, \forall a \geq 0 \right\} \quad (2.2.1)$$

Lemme 2.2.1

- (1) $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ est un $\mathbb{Z}_p$ - sous module de $\mathbb{Q}_p[[v]]$
- (2) $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta} \subset p^{[\alpha\beta]} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$ et si en particulier $\beta \geq 0$ alors

$$\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta} \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg$$

- (3) Soit $f(v) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v^n \in \mathbb{Q}_p[[v]]$, $f(v) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ si et seulement si $\sum_{n=0}^m a_n v^n \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta} \forall m \geq 0$

- (4) Si $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$ alors $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha_1),\beta} \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha_2),\beta}$

- (5) Si $\beta_1 \geq \beta_2$ alors $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta_1} \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta_2}$

- (6) Si $n \in \mathbb{Z}$ alors $p^n \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta} \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta + \frac{n}{\alpha}}$

- (7) Si $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ alors $\frac{d}{dv} \varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$

- (8) Si $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ alors $\left(\frac{d}{dv} \right)^p \varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta+1}$

- (9) Soit $m \geq 0$ et $b \in \mathbb{Q}_p$. $\frac{bv^m}{m!} \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ si et seulement si $v_p(p) \geq \alpha \left(\left\lfloor \frac{m}{p} \right\rfloor + \beta \right)$

Preuve.

- (1) pour $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ il est clair que $\varphi_1 + \varphi_2 \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$. soient $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ et $a \in \mathbb{Z}_p$ alors $a\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$

(2) Par définition si $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ alors $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil \alpha(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg, \forall a \geq 0$

Si on pose $a = 0$ on aura $\varphi \in p^{\lceil a\beta \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$ ce qui prouve (2)

(3) Soit $f(v) \in \mathbb{Q}_p[[v]]$, par definition de l'ensemble $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ on a $f(v) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ si et seulement si $a_n v^n \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta} \forall n \geq 0$

(4) Soit $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha_1),\beta}$ alors $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil \alpha_1(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p[[v]]$

On a $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$ implique $\lceil \alpha_1(a+\beta) \rceil \geq \lceil \alpha_2(a+\beta) \rceil$

d'où $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil \alpha_2(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$

donc $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha_2),\beta}$

(5) D'après (3) par definition de l'ensemble $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ il est evident que $a_n v^n \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta_1}$ implique que $a_n v^n \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta_2}$

(6) Soit $\varphi \in p^n \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ alors $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^n p^{\lceil \alpha(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$ implique $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil n+\alpha(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$

implique $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil \alpha(a+\beta+\frac{n}{\alpha}) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$

d'où $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta+\frac{n}{\alpha}}$

(7) Si $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} a_n v^n \in p^{\lceil \alpha(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$ alors $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} n a_n v^{n-1} \in p^{\lceil \alpha(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$ et d'après (3) on a le resultat

(8) Si $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),\beta}$ alors $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{\lceil \alpha(a+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$

$$\begin{aligned} \text{on a } \left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \left(\frac{d}{dv}\right)^p \varphi &= \left(\frac{d}{dv}\right)^{pa+p} \varphi = \left(\frac{d}{dv}\right)^{p(a+1)} \varphi \\ &= \left(\frac{d}{dv}\right)^{p(a+1)} \varphi \in p^{\lceil \alpha((a+1)+\beta) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg \\ &\in p^{\lceil \alpha(a+(\beta+1)) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg \end{aligned}$$

donc $\left(\frac{d}{dv}\right)^p \varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta+1}$

(9) pour $\varphi = \frac{bv^m}{m!}$, on a $\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in p^{[\alpha(a+\beta)]} \mathbb{Z}_p \ll v \gg \forall a \geq 0$ est équivalente

■

Corollaire 2.2.1 Si $0 < \alpha \leq 1$, $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta}$ alors

$$\left(\left(\frac{d}{dv} - 1\right)^p + 1\right) \varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta+1}$$

Preuve. On a besoin de la prouver juste pour $p \neq 2$

En appliquant la règle de Leibnitz on aura :

$$\left(\left(\frac{d}{dv} - 1\right)^p + 1\right) \varphi = \left(\frac{d}{dv}\right)^p \varphi + \sum_{j=1}^{p-1} (-1)^j \binom{p}{j} \left(\frac{d}{dv}\right)^j \varphi$$

ceci appartient à $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta+1} + p\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta}$

d'après (6) du lemme 2.2.1 avec $n = 1$, on aura:

$$p\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta} \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta + \frac{1}{\alpha}}$$

comme $0 < \alpha \leq 1$ d'après (5) même lemme il suffit de prendre $\beta_1 = \beta + \frac{1}{\alpha}$ et $\beta_2 = \beta + 1$ et on aura le résultat . ■

Lemme 2.2.2 Soit $0 < \alpha \leq 1$

(1) $\mathbb{Z}_p[[v]] \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), 0}$

(2) $\varphi_1 \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta_1}$ et $\varphi_2 \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta_2}$ alors $\varphi_1 \varphi_2 \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta_1 + \beta_2}$

En particulier $0 < \alpha \leq 1$ alors $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), 0}$ est une $\mathbb{Z}_p$ - sous algèbre de $\mathbb{Z}_p \ll v \gg$
et $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta}$ est un $\mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), 0}$ - module

Preuve.

(1) On suppose que $\varphi \in \mathbb{Z}_p[[v]]$, dès que $\frac{1}{(pa)!} \left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in \mathbb{Z}_p[[v]] \subset \mathbb{Z}_p \ll v \gg$

pour un $a \geq 0$ arbitraire , on a :

$$\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} \varphi \in (pa)! \mathbb{Z}_p \ll v \gg = p^a a! \mathbb{Z}_p \ll v \gg \subset p^a \mathbb{Z}_p \ll v \gg$$

comme $\alpha \leq 1$ il est contenu dans $p^{\lceil \alpha a \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$ d'où $\varphi \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha),0}$

(2) En appliquant la règle de Leibnitz on aura :

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} (\varphi_1 \varphi_2) &= \sum_{j=0}^{pa} \binom{pa}{j} \left(\left(\frac{d}{dv}\right)^j \varphi_1\right) \left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa-j} \varphi_2\right) \\ &= \sum_{j=0}^{pa} \binom{pa}{pj} \left(\left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{pj} \varphi_1\right) \left(\frac{d}{dv}\right)^{pa-pj} \varphi_2\right) + \\ &\quad \sum_{\substack{0 \leq j \leq pa \\ p \nmid j}} \binom{pa}{j} \left(\left(\frac{d}{dv}\right)^j \varphi_1\right) \left(\left(\frac{d}{dv}\right)^{pa-j} \varphi_2\right) \end{aligned}$$

Si $p \nmid j$ alors $p \nmid \binom{pa}{j}$, la définition (2.2.1) et (7) du lemme 2.2.1 impliquent

$$\begin{aligned} \left(\frac{d}{dv}\right)^{pa} (\varphi_1 \varphi_2) &\in \sum_{j=0}^p p^{\lceil \alpha(j+\beta_1) \rceil} p^{\lceil \alpha(a-j+\beta_2) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg + \\ \sum_{0 \leq j \leq pa} p p^{\lceil \alpha(\frac{j}{p}+\beta_1) \rceil} p^{\lceil \alpha(\lfloor \frac{pa-j}{p} \rfloor + \beta_2) \rceil} \mathbb{Z}_p &< \ll v \gg \\ &\subset p^{\lceil \alpha(a+j+\beta_1+\beta_2) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg + p p^{\lceil \alpha(a-1+\beta_1+\beta_2) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg \end{aligned}$$

comme $\alpha \leq 1$, ça c'est contenu dans $p^{\lceil \alpha(a+j+\beta_1+\beta_2) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg$

d'où

$$\varphi_1 \varphi_2 \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(\alpha), \beta_1 + \beta_2}$$

■

Lemme 2.2.3 On a :

$$\exp\left(v + \frac{v^p}{p}\right) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(1-\frac{1}{p}),0}$$

Preuve. Grâce au lemme 2.2.2 , il suffit de montrer

$$(1) \exp\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{v^{p^n}}{p^n}\right) \in \mathbb{Z}_p [[v]]$$

$$(2) \exp\left(-\frac{v^{p^n}}{p^n}\right) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(1-\frac{1}{p}),0}, \forall n \geq 2.$$

■

Preuve. Pour la preuve de (1) voir [[7]p238, 5.4]

D'après le lemme 2.2.1 (3) pour montrer (2) il suffit de montrer

$$(2)' \frac{1}{m!} \left(\frac{v^{p^n}}{p^n}\right)^m \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(1-\frac{1}{p}),0}, \forall n \geq 2 \text{ et } m \geq 0$$

(2)' est équivalent à

$$(2)'' v_p \left(\frac{(p^n m)!}{m! p^{nm}}\right) \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right) m p^{n-1}, \forall n \geq 2 \text{ et } m \geq 0 \text{ (par le lemme 2.2.1 (9))}$$

comme $v_p \left(\frac{(p^n m)!}{m!}\right) = \sum_{j=0}^{n-1} p^j m \geq p^{n-1} m + m$, pour montrer (2)'' il suffit de vérifier

$$p^{n-1} m + m - nm \geq \left(1 - \frac{1}{p}\right) p^{n-1} m$$

c'est vérifier car $m(p^{n-2} - n + 1) \geq 0$

■

Preuve. de la proposition 2.2.1 :

Soit $n \geq 0$ et $m = -\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ par (9) de lemme 2.2.1 on a :

$$\left(\frac{v^n}{n!}\right) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(1-\frac{1}{p}),m} \cap \mathbb{Z}_p \ll v \gg$$

par le lemme 2.2.3 et (2) du lemme 2.2.2 on a :

$$\frac{v^n}{n!} \exp\left(v + \frac{v^p}{p}\right) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(1-\frac{1}{p}),m} \cap \mathbb{Z}_p \ll v \gg$$

et par le corollaire 2.2.1 on aura :

$$\left(\left(\frac{d}{dv} - 1\right)^p + 1\right)^a \left(\frac{v^n}{n!} \exp\left(v + \frac{v^p}{p}\right)\right) \in \mathbb{Z}_p \ll v \gg^{(1-\frac{1}{p}),m+a} \cap \mathbb{Z}_p \ll v \gg, \forall a \geq 0$$

ça c'est contenu dans $p^{\lceil (1-\frac{1}{p})(m+a) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg \cap \mathbb{Z}_p \ll v \gg$, par le lemme 2.2.1

(2) on a :

$$\left(\left(\frac{d}{dv} + 1\right)^p + 1\right)^a \left(\frac{v^n}{n!} \exp\left(v + \frac{v^p}{p}\right)\right) \in p^{\lceil (1-\frac{1}{p})(m+a) \rceil} \mathbb{Z}_p \ll v \gg \cap \mathbb{Z}_p \ll v \gg$$

on remplace par $m = -\left\lfloor \frac{n}{p} \right\rfloor$ on aura :

$$\left(\left(\frac{d}{dv} \right)^p + 1 \right)^a \left(\frac{v^n}{n!} \exp \left(\frac{v^p}{p} \right) \right) \in \begin{cases} \mathbb{Z}_p << v >> & \text{si } pa < n \\ p^{a - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor - \lfloor (a - \lfloor \frac{n}{p} \rfloor)/p \rfloor} & \text{si } pa \geq n \end{cases}$$

On remarque qu'après avoir multiplié les coefficients de $\frac{v^{n+qp}}{(n+qp)!}$.

ou de $\frac{v^{n-r_0p}}{(n-r_0p)!}$ par $n!$ on obtient les congruences demandées .

on va démontrer la 2^{eme} proposition utilisée dans la preuve du théorème 2.2.1 ■

Proposition 2.2.2 Soit p un nombre premier impair et U une suite avec $U_{p-1} = 0$ et $d(U) \neq 0$ alors :

$$v_p(\tau_U) \geq \left\lfloor \frac{w(U) + d(U) - 2}{2} \right\rfloor$$

où τ_U est celle définie dans 2.0.2

Preuve. Pour simplifier , on note $w(U) = n$ et $d(U) = d$ comme $d \neq 0, n + d - 2 > 0$

On va faire la démonstration pour $U_{2p-1} \neq 0$

On a

$$v_p(\tau_U) = v_p((n+d-2)!) - v_p(\mathcal{Y}_U) = v_p \left(\left(-2 + \sum_{j \neq p-1} (j+1)U_j \right)! \right) - \sum_{(\varepsilon, k) \neq (1,1)} kU_{\varepsilon p^k - 1} - \sum_{j \neq p-1} v_p(U_j!)$$

où ε représente tout les entiers positifs premiers à p .

$$\begin{aligned} &\geq v_p \left(\left(-2 + \sum_{\substack{j \neq p-1 \\ 2p-1}} jU_j + 2pU_{2p-1} \right)! \right) - \sum_{(\varepsilon, k) \neq (1,1)} kU_{\varepsilon p^k - 1} - v_p(U_{2p-1}!) \\ &= v_p \left(\left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} jU_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - 1) U_{\varepsilon p^k - 1} + 2pU_{2p-1} \right) \right) \\ &\geq \sum_{v=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{1}{p^v} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} jU_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - 1) U_{\varepsilon p^k - 1} + 2pU_{2p-1} \right) \right\rfloor - \sum_{(\varepsilon, k) \neq (1,1)} kU_{\varepsilon p^k - 1} - v_p(U_{2p-1}!) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_p(N!) &= \sum_{v=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{N}{p^v} \right\rfloor \\
 &= \left\lfloor \frac{1}{p} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} jU_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - 1) U_{\varepsilon p^k - 1} + 2pU_{2p-1} \right) \right\rfloor + \\
 &\quad \sum_{v=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{1}{p^v} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} jU_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ \neq (2,1)}} (\varepsilon p^k - 1) U_{\varepsilon p^k - 1} + 2pU_{2p-1} \right) \right\rfloor - \\
 &\quad - \sum_{(\varepsilon, k) \neq (1,1)} kU_{\varepsilon p^k - 1} - v_p(U_{2p-1}!) \\
 &\geq \left\lfloor \frac{1}{p} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} jU_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - 1) U_{\varepsilon p^k - 1} + 2pU_{2p-1} \right) \right\rfloor + \\
 &\quad \sum_{v=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{-2 + 2pU_{2p-1}}{p^v} \right\rfloor - \sum_{(\varepsilon, k) \neq (1,1)} kU_{\varepsilon p^k - 1} - v_p(U_{2p-1}!) \\
 &= \left\lfloor \frac{1}{p} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} jU_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - 1) U_{\varepsilon p^k - 1} + 2pU_{2p-1} \right) \right\rfloor - \\
 &\quad - \sum_{(\varepsilon, k) \neq (1,1)} kU_{\varepsilon p^k - 1} - \sum_{v=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{-2 + 2pU_{2p-1}}{p^v} \right\rfloor - v_p(u_{2p-1}!) \\
 &= \left\lfloor \frac{1}{p} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} ju_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - kp - 1)_{\varepsilon p^k - 1} + 2pu_{2p-1} \right) \right\rfloor - \\
 &\quad u_{2p-1} + \sum_{v=2}^{\infty} \left\lfloor \frac{-2 + 2pu_{2p-1}}{p^v} \right\rfloor - v_p(u_{2p-1}!) \\
 &= \left\lfloor \frac{1}{p} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} ju_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1,1) \\ (2,1)}} (\varepsilon p^k - kp - 1) u_{\varepsilon p^k - 1} + 2pu_{2p-1} \right) \right\rfloor - \\
 &\quad u_{2p-1} + v_p((-2 + 2pu_{2p-1})!) - \left\lfloor \frac{-2 + 2pu_{2p-1}}{p} \right\rfloor - v_p(u_{2p-1}!)
 \end{aligned}$$

on peut remplacer le premier terme de la somme $\frac{-2}{p}$ par $\frac{-1}{p}$ car si dans le premier crochet $\lfloor \cdot \rfloor$ la somme des autres termes est un entier alors, sa partie fractionnaire est plus grande ou égal à $\frac{-1}{p}$. De plus, dès que $j \leq \frac{j+1}{2}$ pour le terme jU_j et $\varepsilon p^k - kp - 1 > \frac{\varepsilon p^k}{2}$

si $(\varepsilon, k) \neq (1, 1), (2, 1)$ on aura :

$$\begin{aligned}
 &\geq \left\lfloor \frac{1}{2p} \left(-2 + \sum_{p \nmid j+1} (j+1) U_j + \sum_{\substack{(\varepsilon, k) \neq (1, 1) \\ (2, 1)}} \varepsilon p^k U_{\varepsilon p^k - 1} + 2p U_{2p-1} \right) + U_{2p-1} \right\rfloor - \\
 &\quad U_{2p-1} + v_p((-2 + 2p U_{2p-1})!) - \left\lfloor \frac{-2 + 2p U_{2p-1}}{p} \right\rfloor - v_p(U_{2p-1}!) \\
 &= \left\lfloor \frac{-2 + w(U) + d(U)}{2p} \right\rfloor + v_p(U_{2p-1}!) + U_{2p-1} - v_p(2p U_{2p-1}!) - \\
 &\quad \left\lfloor \frac{-2 + 2p U_{2p-1}}{2p} \right\rfloor - v_p(U_{2p-1}!) \\
 &= \left\lfloor \frac{-2 + \omega(U) + d(U)}{2p} \right\rfloor + v_p(U_{2p-1}!) + U_{2p-1} - v_p(2p U_{2p-1}!) - 1 - \\
 &\quad (-1 + 2p U_{2p-1}) - v_p(U_{2p-1}!) \\
 &\geq \left\lfloor \frac{-2 + w(U) + d(U)}{2p} \right\rfloor + v_p\left(\frac{(2p U_{2p-1} - 1)!}{U_{2p-1}!}\right)
 \end{aligned}$$

d'où

$$v_p(\tau_U) \geq \left\lfloor \frac{w(U) + d(U) - 2}{2p} \right\rfloor$$

on fait le même travail pour $U_{2p-1} = 0$ ■

Preuve. du théorème 2.2.1 : (la congruence de Kummer)

Par la proposition 2.2.1 on aura

$$\sum_{r=0}^{\infty} \binom{a}{r} (-1)^r f_{p-1}^{a-r} \frac{\hat{B}_n + r(p-1)}{n + r(p-1)} = \sum_{r=0}^a \binom{a}{r} (-1)^r f_{p-1}^{a-r} \sum_{\omega(U)=n+r(p-1)} \tau_U f^U$$

où $\tau_U = (-1)^{d(U)-1} \frac{(\omega(U) + d(U) - 2)!}{\mathcal{Y}_U}$

En prenant f_{p-1}^r et $f_{p-1}^{r-r_0}$ de f^U on aura

$$\begin{aligned}
 &\sum_{r=0}^{\infty} \binom{a}{r} (-1)^r f_{p-1}^{a-r} \sum_{\omega(U)=n+r(p-1)} \tau_U f^U \tag{2.2.2} \\
 &= \sum_{r=0}^a \binom{a}{r} (-1)^r f_{p-1}^{a-r} + \left(\sum_{\omega(U)=n} \tau_{u[r]} f^U f_{p-1}^r + \sum_{r_0=1}^r \sum_{\substack{\omega(U)=n+r_0(p-1) \\ U_{p-1}=0}} \tau_{U[r-r_0]} f^U f_{p-1}^{r-r_0} \right)
 \end{aligned}$$

Où $U[r]$ signifie qu'on ajoute r à U_{p-1} dans l'écriture de U

$$\begin{aligned}
 &= \sum_{\omega(U)=n} \frac{f^U f_{p-1}^r}{\mathcal{Y}_U / p - 1} \sum_{r=0}^a \binom{a}{r} (-1)^{d(U[r])+r-1} \frac{(\omega(U[r]) + d(U[r]) - 2)!}{p^{r+U_{P-1}} (r + U_{P-1})!} + \\
 &\quad \sum_{r_0=1}^r \sum_{\substack{\omega(U)=n+r_0(p-1) \\ U_{P-1}=0}} \frac{f^U f_{p-1}^{a-r_0}}{\mathcal{Y}_U} \sum_{r=r_0}^a \binom{a}{r} (-1)^{d(U[r-r_0])+r-1} \\
 &\quad \frac{(\omega(U[r-r_0]) + d(U[r-r_0]) - 2)!}{p^{r-r_0} (r - r_0)!}
 \end{aligned} \tag{2.2.3}$$

où $U|_{p-1}$ signifie que $U_{p-1} = 0$

Pour chaque r on note :

$$\mathcal{Y}_{U[r]/p-1} = \mathcal{Y}_{U/p-1}$$

$$\mathcal{Y}_{U[r]/p-1} p^{r+U_{P-1}} (r + u_{P-1})! = \mathcal{Y}_{u[r]} \tag{2.2.4}$$

et on aura :

$$\mathcal{Y}_u = \left(2^{u_1} \dots (p-1)^{r+U_{P-2}} (p+1)^{r+U_P} \right) \cdot (U_1! \dots U_{P-2}! U_P! \dots) \tag{2.2.5}$$

on note $\sum_1$ (resp $\sum_2$) la première et la deuxième somme dans (2.2.3) et on aura :

$$(2.2.3) = \sum_1 + \sum_2 = \sum_{\omega(U)=n} S_1(U) + \sum_{r_0=1}^n \sum_{\substack{\omega(U)=n+r_0(p-1) \\ U_{P-1}=0}} S_2(U) \tag{2.2.6}$$

Pour $S_1(U)$ on a $n = w(U)$ ce qui implique :

$$\begin{aligned}
 w(U[r]) + d(U[r]) - 2 &= n + (p-1)r + d(U) + r - 2 \\
 &= n + pr + d(U) - 2 \\
 &= (r + U_{P-1})p + n - pU_{P-1} + d(U) - 2
 \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

on a

$$\begin{aligned}
 n - pU_{P-1} + d(U) - 2 &= (n - (p-1)U_{P-1}) + (d(U) - U_{P-1}) - 2 \\
 &= w(U/p-1) + d(U/p-1) - 2
 \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

pour $S_2(U)$ on a $w(U) = n + r_0(p-1)$ on aura

$$\begin{aligned}
 w(U[r-r_0]) + d(U[r-r_0]) - 2 &= n + (p-1)r_0 + (p-1)(r-r_0) - 2 \\
 &= (r-r_0)p + n + r_0p + d(U) - r_0 - 2
 \end{aligned} \tag{2.2.9}$$

on divise $\sum_1$ (resp $\sum_2$) en deux parties selon $n - pU_{P-1} + d(U) - 2$ dans (2.2.8) (resp $n + r_0p + d(U) - r_0 - 2$ dans (2.2.8)) $\geq ap$ ou $< ap$ et on les note $\sum_1' + \sum_1''$ (resp $\sum_2' + \sum_2''$).

on remarque que dans (2.2.8) .

$$n - pU_{P-1} + d(U) - 2 > 0 \text{ car } n$$

$$n \not\equiv 0 \pmod{p-1}$$

(a) Pour la somme $\sum_1'$ dés que $n - pU_{P-1} + d(U) - 2 \geq ap$ on a

$$\begin{aligned} v_p(S_1(U)) &\geq -v_p(\mathcal{Y}_{U/p-1}) + v_p((n - pU_{P-1} + d(U) - 2)!) \\ &\geq \left\lfloor \frac{n - pU_{P-1} + d(U) - 2}{2p} \right\rfloor \geq \left\lfloor \frac{ap}{2p} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

d'après la proposition 2.2.1 et la proposition 2.2.2

(b) Pour la somme $\sum_1'' t$, on note $N = n - pU_{P-1} + d(U) - 2$ et $N = pb + e$

($0 \leq e < p$) on aura $b < a$ car $0 < n - pU_{P-1} + d(U) - 2 < ap$

alors d'après la proposition 2.2.2 on aura

$$\begin{aligned} v_p(N!) - v_p(\mathcal{Y}_{U/p-1}) &= v_p(w(U/p-1) + d(U/p-1)!) - v_p(\mathcal{Y}_{U/p-1}) \\ &= c(\tau_{U/p-1}) \\ &\geq \left\lfloor \frac{N}{2p} \right\rfloor \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

ça et la proposition 2.2.1 donnent

$$\begin{aligned} v_p(S_1(U)) &\geq a - \left\lfloor \frac{N}{p} \right\rfloor + v_p(N!) - \left\lfloor \frac{a - \lfloor N/p \rfloor}{p} \right\rfloor - v_p(\mathcal{Y}_{U/p-1}) \\ &= \left\lfloor \frac{N}{2p} \right\rfloor + a - b - \left\lfloor \frac{a - \lfloor N/p \rfloor}{p} \right\rfloor \\ &\geq \left\lfloor \frac{b}{2} \right\rfloor + a - b - \left\lfloor \frac{a - b}{p} \right\rfloor \\ &> \left(\frac{b}{2} - 1 \right) - b + a - \frac{a - b}{p} \\ &= -1 + \frac{a}{2} - \frac{(a - b)(p - 2)}{2p} \\ &= -1 + \frac{a}{2} \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

comme $v_p(S_1(U))$ est entier alors forcément elle doit être $\geq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$

d'où

$$v_p\left(\sum_1\right) \geq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

(c) Pour la somme $\sum_2'$ dès que $n + r_0p + d(U) - r_0 - 2 \geq ap$

d'après la proposition 2.2.1 (2) on a

$$v_p\left(\sum_2\right) \geq \left\lfloor \frac{a}{2} \right\rfloor$$

(d) Pour la somme $\sum_2'$ dès que , le cas ou $n + r_0p + d(U) - r_0 - 2 < ap$

pour pouvoir utiliser la proposition 2.2.1 (2) on doit avoir $n + r_0p + d(U) - r_0 - 2 \geq r_0p$.

Dés que $d(U) \geq 1$.

la condition est vérifiée si $n + r_0p + d(U) - r_0 - 2 \geq r_0p$ c'est à dire $n - r_0 - 1 \geq 0$

c'est vraie car $n > a$ pour tout $r_0 = 1, \dots, a$

■

Chapitre 3

Les nombres de Bernoulli -Hurwitz généralisés

Dans ce chapitre on va rappeler quelques notions sur les courbes et fonctions algebriques pour pouvoir définir les nombres de Bernoulli et de Hurwitz et pouvoir montrer quelques proprietes des séries de Hurwitz definies sur un sous anneau de $\mathbb{Q}_p$.

On considère la courbe hyperelliptique C de genre g .

C est définie par $y^2 = f(x)$, où $f(x) = \lambda_0 x^{2g+1} + \lambda_1 x^{2g} + \dots + \lambda_{2g+1} \in C[x]$ est un polynôme qui n'a pas de racines multiples .

On pose $\lambda_0 = 1$. La courbe C est une courbe algebrique non singulière avec l'unique point ∞ à l'infini.

On sait que l'ensemble des $\frac{x^{j-1}dx}{2y} i j = 1, \dots, g j$ forme une base de forme differentielles sur C (*)

On note $(x(u), y(u))$ les coordonnées (x, y) de C .

Les termes qui ont les plus petit degrés dans le developpement en série de Laurent de $x(u)$ et $y(u)$ au voisinage de $u = (0, \dots, 0)$ sont donnés par :

$$x(u) = \frac{1}{u^2} + (d^\circ(u) \geq 0) \quad , \quad y(u) = \frac{1}{u^{2g+1}} + (d^\circ(u) \geq -2g+1) \quad (3.0.1)$$

Pour la courbe hyperelliptique $y(u)^2 = f(x(u))$ avec f un polynome separable de degré $2g+1$, on a :

$$\frac{d(u)}{dx}(u) = \frac{x^{g-1}}{2y}(u) \quad (3.0.2)$$

On élève au carré on aura :

$$\left(\frac{d(u)}{dx} \right)^2 = \frac{x^{2g-2}}{4f}$$

c'est à dire :

$$x(u)^{2g-2} x'(u)^2 = 4f(x(u)) \quad (3.0.3)$$

' signifie $\frac{d}{du}$.

(3.0.3) est analogue à $\varphi'(u)^2 = 4\varphi(u)^3 - g_2\varphi(u) - g_3$. Pour plus de détail voir [4]

Définition 3.0.1 On définit les nombres C_n par le developpement en série de Laurent de $x(u)$ par rapport à u :

$$x(u) = \frac{1}{u^2} + \frac{C_{-1}}{u} + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{C_n}{n} \frac{u^{n-2}}{(n-2)!} \quad (3.0.4)$$

Les nombres C_n sont analogue aux nombres de Bernoulli et de Hurwitz .

Définition 3.0.2 On définit aussi les nombres D_n par le developpement en série de Laurent de $y(u)$:

$$y(u) = \frac{1}{u^{2g+1}} + \frac{d_{-2g}}{u^{2g}} + \dots + \frac{d_{-1}}{u} + \sum_{n=2g+1}^{\infty} \frac{D_n}{n} \frac{u^{n-2g-1}}{(n-2g-1)!} \quad (3.0.5)$$

Remarque 3.0.2 Le cas de $y(u)^2 = x(u)^{2g+1} - 1$:

Dans ce cas (3.0.3) est :

$$x(u)^{2g-2} x'(u)^2 = 4x(u)^{2g+1} - 4 \quad (3.0.6)$$

' signifie $\frac{d}{du}$.

3.1 Les séries de Hurwitz :

Dans ce qui suit , $\mathcal{R}$ signifie un sous anneau de $\mathbb{Q}_p$.

Définition 3.1.1 Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{z^n}{n!}$ avec $h_n \in \mathbb{Q}_p$ une série formelle .

Si tous les coefficients h_n appartiennent à $\mathcal{R}$ alors on dit que $h(z)$ est une série de Hurwitz .

L'anneau des séries de Hurwitz sur $\mathcal{R}$ est noté $\mathcal{R} \langle\langle z \rangle\rangle$

Proposition 3.1.1 Soit $h(z) = \sum_{n=0}^{\infty} h_n \frac{z^n}{n!}$ avec $h_n \in \mathbb{Q}_p$

- (1) Si les n premiers coefficients $h_0, h_1, \dots, h_{n-1}$ appartiennent à $\mathcal{R}$ et il existe un polynôme $F(T_0, T_1, \dots, T_{n-1})$ à n variables sur $\mathcal{R}$ tel que $h^{(n)}(z) = F(h(z), h'(z), \dots, h^{(n-1)}(z))$ avec $h^{(n)}(z)$ la $n^{ième}$ dérivée de $h(z)$ alors :

$$h(z) \in \mathcal{R} \ll z \gg$$

- (2) Si $h(z) \in \mathcal{R} \ll z \gg$, $h_0 = 0$ et $h_1 = 1$ alors la série formelle réciproque $h^{-1}(w) = z$ de $h(z) = w$ appartient aussi à $\mathcal{R} \ll z \gg$

- (3) Si $h(z) \in \mathcal{R} \ll z \gg$, $h_0 = 0$ et $h_1 = 1$ alors pour n'importe quel entier positif m :

$$\frac{h^m(z)}{m!} \text{ appartient aussi à } \mathcal{R} \ll z \gg$$

Preuve. [3] ■

Proposition 3.1.2 Pour la courbe $y^2 = x^{2g+1} - 1$ ou $y^2 = x^{2g+1} - x$, on a :

$$t = \frac{-1}{x(u)^{1/2}} \in \mathbb{Z} \ll u \gg$$

Preuve. Pour simplifier on fait la preuve juste pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$

On note $t' = \frac{dt}{du}$, $t'' = \frac{dt^2}{du^2}$, ...

D'après (3.0.6), on aura

$$(t')^2 = 1 - t^{10} \quad (3.1.1)$$

On dérive par rapport à u et on divise par $2t'$, on aura

$$t'' = -5t^9 \quad (3.1.2)$$

Dès que $t(0) = t'(0) = 0$, la proposition 3.1.1 (1) donne

$$\frac{1}{x(u)^{1/2}} = -u + 5.9! \frac{u^{11}}{11!} + \dots \in \mathbb{Z} \ll u \gg \quad (3.1.3)$$

pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$. ■

Proposition 3.1.3 Pour la courbe $y^2 = x^{2g+1} - 1$ ou $y^2 = x^{2g+1} - x$, on a :

$$S := \frac{-1}{y(u)^{1/2g+1}} \in \mathbb{Z} \ll u \gg$$

Preuve. On fait la preuve juste pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$

D'après (3.0.2) on :

$$\begin{aligned} du &= \frac{xdx}{2y} = \frac{x \frac{dx}{dy} dy}{2y} = \frac{xdy}{2y \frac{dy}{dx}} \\ &= \frac{xdy}{5x^4} = \frac{dy}{5(y^2 + 1)^{3/5}} \end{aligned} \quad (3.1.4)$$

et

$$\frac{dy}{du} = 5(y^2 + 1)^{3/5} \quad (3.1.5)$$

on écrit simplement $S' = \frac{dS}{du}, S'' = \frac{d^2S}{du^2}, \dots$, on a $\frac{dy}{du} = -5S^{-6} \frac{dS^{-1}}{du}$

$$S' = -(1 + S^{10})^{3/5} \quad (3.1.6)$$

Cette formule induit que pour chaque $n \geq 1$, la n^{ieme} dérivée de S est donnée sous la forme d'une somme finie comme suit

$$S^{(n)} = \sum_j (1 + S^{10})^{\ln j/5} p_{nj}(S, S', S'', \dots, S^{(n-1)}) \quad (3.1.7)$$

où chaque p_{nj} est un polyôme à n variables dans $\mathbb{Z}$ et $\ln j$ est un entier. ça avec $S(0) = 0$, on aura que $S'(0), S''(0), S^{(3)}(0), \dots$ sont tous entiers alors on conclut que

$$\frac{-1}{y(u)^{1/5}} = -u - 48.9! \frac{u^{11}}{11!} + \dots \in \mathbb{Z} \ll u \gg \quad (3.1.8)$$

pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$. ■

Chapitre 4

Théorème de Clarke :

Ce chapitre est le plus important de ce travail . Yasuada a prouvé le théorème de Clarke qui reunit le théorème Von Staudt Clausen et le 2^{eme} théorème de Von Staudt et qui est analogue au théorème de Clarke pour les nombres de Bernoulli universels prouvé dans le chapitre 2 .

4.0.1 Le cas de $y^2(u) = x(u)^{2g+1} - 1$:

Dans ce cas le théorème de Clarke pour $C_{(4g+2)n}$ et $D_{(4g+2)n}$ est donné par :

Théorème 4.0.1 *Pour chaque nombres $C_{(4g+2)n}$ et $D_{(4g+2)n}$ définis respectivement dans (3.0.4) et (3.0.5) et pour la courbe $y^2 = x^{2g+1} - 1$ on a :*

$$\frac{C_{(4g+2)n}}{(4g+2)n} \equiv - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{2g+1} \\ (4g+2)n = a(p-1)}} \frac{a \mid_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$\frac{D_{(4g+2)n}}{(4g+2)n} \equiv - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{2g+1} \\ (4g+2)n = a(p-1)}} \frac{((2g)!a) \mid_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a \pmod{\mathbb{Z}}$$

$$\text{où } A_p = (-1)^{(p-1)/(4g+2)n} \binom{(p-1)/2}{(p-1)/(4g+2)}$$

Remarque 4.0.1 *Ce théorème rassemble le théorème de Von Staudt Clausen et le 2^{eme} théorème de Von Staudt pour les nombres $C_{(4g+2)n}$ et $D_{(4g+2)n}$.*

La preuve de ce théorème est partagée en trois étapes :

La 1^{ere} étape : On prouve le théorème de Clarke pour les coefficients $\frac{C_n}{n}$ de $x(u)$ et $\frac{C_n^{(4)}}{(n)_4}$ de $x^2(u) = \left(\frac{1}{t}\right)^4$ dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right]$

La 2^{eme} étape : On prouve le théorème de Clarke pour les coefficients $\frac{D_n}{n}$ de $y(u)$ dans $\mathbb{Z}\left[\frac{1}{5}\right]$

La 3^{eme} étape: On trouve une relation entre les coefficients de $x^2(u)$ et $y(u)$ et on montre que les résultats trouvés dans la 1^{ere} et 2^{eme} étape sont toujours vrais dans $\mathbb{Z} = \mathbb{Z}\left[\frac{1}{2}\right] \cap \mathbb{Z}\left[\frac{1}{5}\right]$

Preuve.

1^{ere} étape: Le théorème de Clarke pour $x^{1/2}(u)$

On considère la série formelle réciproque $\sqrt{x(u)}$ de la série u avec : $t = \frac{-1}{x^{1/2}(u)}$ c'est à dire

$$u = \int_{\infty}^x \frac{x dx}{2y}$$

$$u = \int_0^{-t} \frac{\frac{1}{t^2}(-\frac{2}{t^3} dt)}{2\sqrt{\frac{1}{t^{10}} - 1}}$$

$$u = - \int_0^{-t} \frac{1}{\sqrt{1 - t^{10}}} dt$$

$$u = - \int_0^{-t} \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} t^{10m}\right) dt$$

$$u = t + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m+1}}{10m+1} \quad (4.0.1)$$

on note les coefficients de Carlitz par

$$f_{10m} = (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \quad (4.0.2)$$

cette notation correspond à celle dans la définition des nombres de Bernoulli universels

D'après le lemme 1.0.1 , et la relation (1.0.1) on a que :

$$f_{10m} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.3)$$

les autres coefficients f_n sont nuls alors $\frac{\hat{B}_{10m}}{10m}$ qui est le nombre de Bernoulli universels $\hat{B}_{10m}$ divisé par $10m$ est spécialisé à $\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m}$ et l'expression donnée dans la proposition 2.0.3 donne que

$$\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} \in 3! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.4)$$

pour prouver ça on applique la proposition 2.2.2 pour $p = 2$ et $p = 3$, dès que $f_{2-1} = 0$ et $f_{3-1} = 0$ on considère la suite U tel que $U_{2-1} = U_{3-1} = 0$, on aura $w(U) = 10m \geq 10$ et $d(U) \geq 1$

on aura $v_2(\tau_u) \geq \lfloor \frac{10+1-2}{4} \rfloor = 2$, $v_3(\tau_u) \geq \lfloor \frac{10+1-2}{6} \rfloor = 1$

donc dans l'expression donnée dans la proposition 2.0.3 pour $\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m}$, tous leurs coefficients sont divisible par $3!$, ça et (4.0.3) donnent 4.0.4

Si $p = 10m + 1$ est un nombre premier alors le coefficient f_{p-1} de $\frac{t^{10m+1}}{10m+1} \bmod p$, donné par :

$$f_{p-1} = (-1)^{p-1/10} \binom{\frac{1}{2}}{\frac{p-1}{10}} \equiv A_p \bmod p \quad (4.0.5)$$

pour ça , voir appendice

Avec ces considérations , on applique le théorème de Clarke (proposition 2.1.1) pour la série $x(u)^{1/2}$

Soit

$$\frac{1}{t} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} \quad (4.0.6)$$

la proposition 2.1.1 et (4.0.4) montrent que :

$$\frac{1}{3!} \frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} \in \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m=a(p-1)}}^{\infty} \frac{(3!a) \mid_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.7)$$

Relation entre les coefficients de $x(u)^{1/2}$ et $x(u)$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$. et $t = \frac{-1}{x(u)^{1/2}}$

on a

$$\frac{1}{t^2} = x(u) = \frac{1}{u^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} \quad (4.0.8)$$

alors

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{u^2} \right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} \right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} \end{aligned} \quad (4.0.9)$$

on derive (4.0.1) par rapport à u et on divise par t^2 on aura

$$\frac{1}{t^2} = \frac{1}{t^2} \frac{dt}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} t^{10m-2} \frac{dt}{du} \quad (4.0.10)$$

c'est a dire

$$\int_0^u \left(\frac{1}{t^2} - \frac{1}{u^2} \right) du = \left(-\frac{1}{t} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-1}}{(10m-1)!} \right) + \frac{1}{u}$$

ça est égale à (4.0.9) et d'après (4.0.6) on aura :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} = \left(-\sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-1}}{(10m-1)!} \right) + \frac{1}{u}$$

Dés que $C_0^{(1)} = 1$, on peut enlever les termes qui ont des degré négatifs, on aura

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-1}}{(10m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-1}}{(10m-1)!}$$

le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \ll u \gg$ d'après le lemme 1.0.1 et la proposition 3.1.1 et (3.1.3)

ça avec (4.0.3) donnent

$$\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \in (10.1 - 2)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 3! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.11)$$

Comme $\frac{C_{10m}}{10m} = \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2}$ par définition on aura :

$$\frac{C_{10m}}{10m} \in -\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + 3! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right]$$

Relation entre les coefficients de $x(u)$ et $x(u)^{3/2}$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ et $t = \frac{-1}{x(u)^{1/2}}$

On considère

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^3} &= -x^{3/2}(u) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} \end{aligned} \quad (4.0.12)$$

$$C_0^{(3)} = 1$$

on a

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{u^3} \right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} du \right) \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} \end{aligned} \quad (4.0.13)$$

on derive (4.0.1) par rapport à u et on divise par t^3 on aura

$$\frac{1}{t^3} = \frac{1}{t^3} \frac{dt}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{-1}{m} \right) t^{10m-3} \frac{dt}{du}$$

c'est à dire

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{t^3} - \frac{1}{u^3} \right) du &= \left(\frac{-1}{2} \frac{1}{t^2} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \left(\frac{-1}{m} \right) \frac{t^{10m-3}}{10m-3} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{u^2} \end{aligned}$$

ça est égale à (4.0.13) et d'après (4.0.8) on aura

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} = \left(-\frac{1}{2} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-2}}{(10m-2)!} \right) + \frac{1}{2} \frac{1}{u^2}$$

Dés que $C_0^{(2)} = 1$, on peut enlever les termes qui ont des degrés négatifs et on aura :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{u^{10m-2}}{(10m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2C_{10m}^{(3)}}{(10m-2)!} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-2}}{(10m-2)!}$$

le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \ll u \gg$ d'après le lemme 1.0.1 ,la proposition 3.1.1 (3) et (3.1.3)

ça avec (4.0.3) donnent

$$\frac{C_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} + \frac{2C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \in (10.1-3)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 3! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.14)$$

Relation entre les coefficients de $x(u)^{3/2}$ et $x(u)^2$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ et $t = \frac{-1}{x(u)^{1/2}}$

on considere

$$\begin{aligned} \frac{1}{t^4} &= x^2(u) \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} \end{aligned} \quad (4.0.15)$$

$C_0^{(4)} = 1$ alors

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{u^4} \right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} \right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} \end{aligned} \quad (4.0.16)$$

on derive (4.0.1) par rapport à u et on divise par t^4 on aura

$$\frac{1}{t^4} = \frac{1}{t^4} \frac{dt}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} t^{10m-4} \frac{dt}{du} \quad (4.0.17)$$

c'est à dire

$$\int_0^u \left(\frac{1}{t^4} - \frac{1}{u^4} \right) du = \left(-\frac{1}{3} \frac{1}{t^3} + \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-3}}{(10m-3)!} \right) + \frac{1}{3} \frac{1}{u^3}$$

ça est égale à (4.0.16) et d'après (*) on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} &= \left(-\frac{1}{3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-3}}{(10m-3)!} \right) \\ &\quad + \frac{1}{3} \frac{1}{u^3} \end{aligned}$$

Dés que $C_0^{(3)} = 1$, on peut enlevé les termes qui ont des degrés négatifs et on aura

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-3}}{(10m-3)!} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^m \binom{\frac{-1}{2}}{m} \frac{t^{10m-3}}{10m-3}$$

le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \ll u \gg$ d'après le lemme 1.0.1 ,la proposition 3.1.1 (3) et (3.1.3)

ça avec (4.0.3) donnent

$$\frac{C_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} + \frac{3C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in (10.1-4)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 3! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.18)$$

Le théorème de Clarke pour $x(u)^2$:

les resultats (4.0.11) ,(4.0.14) et (4.0.18) montre que

$$\frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{3!C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in 3! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.19)$$

d'où

$$\frac{1}{3!} \frac{C_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.20)$$

ça et (4.0.7) donnent

$$\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m = a(p-1)}}^{\infty} \frac{(3!a) \mid_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \quad (4.0.21)$$

Ce resultat est très important pour la 3^{eme} étape en particulier on a

$$\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in \mathbb{Z}_{(5)}$$

2^{eme} étape : Le théorème de Clarke pour $y(u)^{1/5}$:

cette étapes est parallèle à la 1^{ere} étape

on considère la série formelle réciproque $y(u)^{1/5}$ de la série u .

Soit $y(u) = \frac{-1}{S^5}$ alors :

$$\begin{aligned}
 u &= \int_{\infty}^x \frac{xdx}{2y} = \int_{\infty}^y \frac{xdx}{2ydy} dy = \int_{\infty}^y \frac{x}{5x^4} dy \\
 &= \int_{\infty}^y \frac{1}{5x^3} dy = \int_{\infty}^y \frac{x}{5(y^2 + 1)^{3/5}} dy = \int_0^S \frac{\frac{5dS}{S^6}}{5\left(\frac{1}{S^{10}} + 1\right)^{3/5}} \\
 &= \int_0^S \frac{1}{5(S^{10} + 1)^{3/5}} dS = \int_0^S \left(1 - \frac{1}{1!} \frac{3}{5} S^{10} + \frac{1}{2!} \frac{3}{5} \frac{8}{5} S^{20} - \frac{1}{3!} \frac{3}{5} \frac{8}{5} \frac{13}{5} S^{30} + \dots\right) dS \\
 &= \int_0^S \left(1 + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\frac{-3}{5}}{m} S^{10m}\right) dS \\
 u &= S + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{\frac{-3}{5}}{m} \frac{S^{10m+1}}{10m+1}
 \end{aligned} \tag{4.0.22}$$

On note le coefficient de Carlitz par

$$f_{10m} = \binom{\frac{-3}{5}}{m} \tag{4.0.23}$$

par le lemme (1.0.1) et (1.0.1) on aura

$$f_{10m} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \tag{4.0.24}$$

Les autre coefficients f_n sont nuls alors $\frac{\hat{B}_{10m}}{10m}$ qui le nombre de Bernoulli universel

$\hat{B}_{10m}$ divisé par $10m$ est spcialisé à $\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m}$ on a :

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \in 4!\mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \tag{4.0.25}$$

Pour prouver ça on applique la proposition 2.2.2 pour $p = 2$ et $p = 3$ dans ce cas comme

$f_{2-1} = 0, f_{3-1} = 0$, on considère la suite U telle que $U_{2-1} = U_{3-1} = 0$

si $m = 1$ alors $\frac{D_{10}^{(1)}}{10} = \frac{3}{5} \left(\frac{9!}{11} \right) = \frac{2^7 3^5 7}{11}$ est divisible par $4!$

si $m \geq 2$ alors $w(u) = 10m \geq 20$, $d(U) \geq 1$ et on aura

$$v_2(\tau_u) \geq \left\lfloor \frac{20+1-2}{4} \right\rfloor = 4k \quad , \quad v_3(\tau_u) \geq \left\lfloor \frac{20+1-2}{6} \right\rfloor = 3$$

donc d'après l'expression qu'est dans la proposition 2.0.3 on a que tout les coefficients $\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m}$ sont divisible par $4!$. ça et (4.0.24) impliquent (4.0.25)

si $p = 10m + 1$ est un nombres premier alors le coefficients f_{p-1} est donné par

$$f_{p-1} = -\left(\frac{-3}{\frac{p-1}{10}}\right) \equiv A_p \pmod{p} \quad (4.0.26)$$

voir appendice

Avec cec considération , on applique le théorème de Clarke (proposition 2.1.1) pour $y(u)^{1/5}$, on aura

$$\frac{1}{S} = \sum_{m=0}^{\infty} D_{10m}^{(1)} \frac{U^{10m-2}}{(10m)!} \quad (4.0.27)$$

la proposition 2.1.1 et la relation (4.0.25) montrent que

$$\frac{1}{4!} \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \in - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m = a(p-1)}} \frac{(4!a) \left| \frac{-1}{p} \right| \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.28)$$

Relation entre les coefficients de $y(u)^{1/5}$ et $y(u)^{2/5}$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ et $S = \frac{-1}{y(u)^{1/5}}$

on a

$$\frac{1}{S^2} = y(u)^{2/5} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{U^{10m-2}}{(10m-2)!} \quad (4.0.29)$$

$D_0^{(2)} = 1$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{u^2} \right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{U^{10m-2}}{(10m-2)!} \right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{U^{10m-1}}{(10m-1)!} \end{aligned} \quad (4.0.30)$$

on dérive (4.0.22) par rapport à u et on divise par S^2 , on aura

$$\frac{1}{S^2} = \frac{1}{S^2} \frac{dS}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{5} \right) S^{10m-2} \frac{dS}{du} \quad (4.0.31)$$

c'est à dire

$$\int_0^u \left(\frac{1}{S^2} - \frac{1}{u^2} \right) du = \left(-\frac{1}{S} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-1}}{10m-1} \right) + \frac{1}{u}$$

ça est égale à (4.0.30) et d'après (4.0.27) on a :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{U^{10m-1}}{(10m-1)!} = \left(- \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{U^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-1}}{10m-1} \right) + \frac{1}{u}$$

Dés que $D_0^{(1)} = 1$, on peut enlever les termes qui ont des degrés négatifs, on aura :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \frac{U^{10m-1}}{(10m-1)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{U^{10m-1}}{(10m-1)!} = \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-1}}{10m-1}$$

le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \ll u \gg$ d'après la proposition 3.1.1 (3) et (3.1.8), ça et (4.0.24) donnent

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \in (10.1-2)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.32)$$

Relation entre les coefficients de $y(u)^{2/5}$ et $y(u)^{3/5}$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ et $S = \frac{-1}{y(u)^{1/5}}$

on a

$$\frac{1}{S^3} = -y(u)^{3/5} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} \quad (4.0.33)$$

$D_0^{(3)} = 1$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{S^3} - \frac{1}{u^3} \right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} \right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{U^{10m-2}}{(10m-2)!} \end{aligned} \quad (4.0.34)$$

On derive (4.0.22) et on divise par S^3 on aura

$$\frac{1}{S^3} = \frac{1}{S^3} \frac{dS}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} S^{10m-3} \frac{dS}{du}$$

c'est à dire

$$\int_0^u \left(\frac{1}{S^3} - \frac{1}{u^3} \right) du = -\frac{1}{2} \frac{1}{S^2} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-2}}{10m-2} + \frac{1}{2} \frac{1}{u^2}$$

Dés que $D_0^{(2)} = 1$, on peut enlever les termes qui ont des degrés négatifs, on aura :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} \frac{U^{10m-2}}{(10m-2)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{U^{10m-2}}{(10m-2)!} = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-2}}{10m-2}$$

le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right]$ << u >> d'après la proposition 3.1.1 (3) et (3.1.8) , ça et (4.0.24) donnent

$$\frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} + \frac{2D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \in (10.1-3)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.35)$$

Relation entre les coefficients de $y(u)^{3/5}$ et $y(u)^{4/5}$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ et $S = \frac{-1}{y(u)^{1/5}}$

on a

$$\frac{1}{S^4} = -y(u)^{4/5} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} \quad (4.0.36)$$

$D_0^{(4)} = 1$, alors

$$\begin{aligned} \int_0^u \left(\frac{1}{S^4} - \frac{1}{u^4} \right) du &= \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} \right) du \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} \end{aligned} \quad (4.0.37)$$

On derive (4.0.22) par rapport à u et divise par S^4 on obtient

$$\frac{1}{S^4} = \frac{1}{S^4} \frac{dS}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} S^{10m-4} \frac{dS}{du}$$

c'est à dire

$$\int_0^u \left(\frac{1}{S^4} - \frac{1}{u^4} \right) du = -\frac{1}{3} \frac{1}{S^2} + \frac{1}{3} \frac{1}{u^3} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-3}}{10m-3}$$

ça est égale à (4.0.37) et d'après (4.0.33) on aura

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} = -\frac{1}{3} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-3}}{10m-3} + \frac{1}{3} \frac{1}{u^3}$$

Dés que $D_0^{(3)} = 1$ on peut enlever les termes qui ont des degrés négatifs , on aura :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{3D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{U^{10m-3}}{(10m-3)!} = 3 \sum_{m=1}^{\infty} \binom{-\frac{3}{5}}{m} \frac{S^{10m-3}}{10m-3}$$

le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \ll u \gg$ d'après la proposition 3.1.1 (3) et (3.1.8) , ça et (4.0.24) donnent

$$\frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} + \frac{3D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in (10.1 - 4)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.38)$$

Relation entre les coefficients de $y(u)^{4/5}$ et $y(u)$:

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ et $S = \frac{-1}{y(u)^{1/5}}$

on a

$$\frac{1}{S^5} = -y(u) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \frac{U^{10m-5}}{(10m-5)!} \quad (4.0.39)$$

$D_0^{(5)} = 1$, alors

$$\int_0^u \left(\frac{1}{S^5} - \frac{1}{u^5} \right) du = \int_0^u \left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \frac{U^{10m-5}}{(10m-5)!} \right) du \quad (4.0.40)$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} \quad (4.0.41)$$

on dérive (4.0.22) par rapport à u et on divise par S^5 , on aura

$$\frac{1}{S^5} = \frac{1}{S^5} \frac{dS}{du} + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{5} \right) S^{10m-5} \frac{dS}{du} \quad (4.0.42)$$

c'est à dire

$$\int_0^u \left(\frac{1}{S^5} - \frac{1}{u^5} \right) du = -\frac{1}{4} \frac{1}{S^4} + \frac{1}{4} \frac{1}{u^4} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{5} \right) \frac{S^{10m-4}}{10m-4}$$

ça est égale à (4.0.30) et d'après (4.0.27) on aura :

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} &= \left(-\frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} + \right. \\ &\quad \left. \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{5} \right) \frac{S^{10m-4}}{10m-4} \right) + \frac{1}{4} \frac{1}{u} \end{aligned}$$

Dés que $D_0^{(4)} = 1$, on peut enlever les termes qui ont des degrés négatifs , on aura :

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{4D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \frac{U^{10m-4}}{(10m-4)!} = 4 \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{-3}{5} \right) \frac{S^{10m-4}}{10m-4}$$

Le côté droit appartient à $\mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \ll u \gg$ d'après la proposition 3.1.1 (3) et (3.1.8) , ça et (4.0.24) donnent

$$\frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} + \frac{4D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \in (10.1 - 5)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.43)$$

Le théorème de Clarke pour $y(u)$:

On a obtenu les résultats suivant : (4.0.35) , (4.0.32) , (4.0.38) , (4.0.43)

$$\begin{aligned}\frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} + \frac{4D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} &\in (10.1 - 5)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \\ \frac{D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} + \frac{3D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} &\in (10.1 - 4)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \\ \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} + \frac{2D_{10m}^{(3)}}{(10m)_3} &\in (10.1 - 3)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \\ \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} + \frac{D_{10m}^{(2)}}{(10m)_2} &\in (10.1 - 2)! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{2} \right] \subset 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right]\end{aligned}$$

ces 4 resultats impliquent :

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} - 4! \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \in 4! \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.44)$$

donc

$$\frac{1}{4!} \frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} - \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right]$$

on a $y(u) = \frac{-1}{S^5}$, on aura :

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} = \frac{D_{10m}^{(5)}}{(10m)_5} \quad (4.0.45)$$

et ça et (4.0.28) donnent :

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \in - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m = a(p-1)}} \frac{(4!a) \mid_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a + \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5} \right] \quad (4.0.46)$$

3^{eme} étapes : Le théorème de Clarke pour $x(u)$ et $y(u)$:

Relation entre les coefficients de $y(u)$ et $x^2(u)$:

Soit

$$x^2(u) = \frac{1}{t^4} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \frac{u^{10m-4}}{(10m-4)!} \quad (4.0.47)$$

Si $D = \frac{d}{du} = \left(\frac{2y}{x} \right) \frac{d}{dx}$ alors :

$$D(x^2) = 2xDx = 2x \frac{2y}{x} = 4y \quad (4.0.48)$$

donc

$$\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} = 4 \frac{D_{10m}}{10m} \quad (4.0.49)$$

Les relation (4.0.21) et (4.0.46) montrent que le dénominateur de $\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4}$ ne contient aucune puissance de 2 et que :

$$\frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} \in - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m = a(p-1)}} \frac{(3!a) \big|_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a + \mathbb{Z}$$

Dés que $\frac{1}{4!} \frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} = \frac{D_{10m}}{10m}$ d'après (3.0.4) on aura

$$\frac{D_{10m}}{10m} \in \mathbb{Z} \left[\frac{1}{5}, \frac{1}{p}, p \equiv 1 \pmod{5}, p-1/10m \right] \subset \mathbb{Z}_{(2)}$$

et que le dénominateur de $\frac{D_{10m}}{10m}$ ne doit contenir aucune puissance de 2 ainsi le numérateur de $\frac{D_{10m}^{(4)}}{(10m)_4}$ est divisible par 4 .

Ces conditions et la relation (4.0.46) donnent

$$\frac{D_{10m}^{(1)}}{10m} \in - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m = a(p-1)}} \frac{(4!a) \big|_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a + \mathbb{Z}$$

ça c'est la 2^{eme} formule de 4.0.1 .

Relation entre les coefficients de $x(u)$ et $x^2(u)$:

finalement , on utilise

$$Dx^2 = D \frac{2y}{x} = 6x^2 + \frac{4}{x^3} \left(D = \frac{d}{du} = \left(\frac{2y}{x} \right) \frac{d}{dx} \right) \quad (4.0.50)$$

on applique D à (3.0.6) on aura

$$D^2 \left(\frac{1}{x} \right) = 3 \frac{1}{x} \left(D \frac{1}{x} \right)^2 - 10 \quad (4.0.51)$$

Par conséquent $\frac{1}{x(u)} \in \mathbb{Z} \ll u \gg$ par la proposition 3.1.1 (2) et aussi $\frac{1}{x^3} \in \mathbb{Z} \ll u \gg$, ainsi on a :

$$\frac{C_{10m}}{10m} = 6 \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} + \text{un entier}$$

D'après (4.0.47) on conclut que :

$$\begin{aligned} \frac{C_{10m}}{10m} &= 3! \frac{C_{10m}^{(4)}}{(10m)_4} + \text{un entier} \\ \frac{C_{10m}}{10m} &= G_{10m} - \sum_{\substack{p \equiv 1 \pmod{5} \\ 10m = a(p-1)}} \frac{a \mid_p^{-1} \pmod{p^{1+v_p(a)}}}{p^{1+v_p(a)}} A_p^a \end{aligned} \quad (4.0.52)$$

avec $G_{10m} \in \mathbb{Z}$.ça c'est la première formule de 4.0.1 .

■

4.1 Appendice:

Soit p un nombre premier tel que $p \equiv 1 \pmod{2g+1}$ ou $p \equiv 1 \pmod{4g}$. On définit C par $y^2 = x^{2g+1} - 1$, ou $y^2 = x^{2g+1} - x$

D'après (*) on a dit que l'ensemble $\left(\frac{1}{2y}, \frac{x}{2y}, \dots, \frac{x^{g-1}}{2y}\right)$ forme une base de formes différentielles sur $C \pmod{p}$, alors matrice Hasse-Witt qui est une matrice carrée d'ordre g est diagonale par rapport à cette base [10] [P381] et son (g, g) élément est le nombre A_p .

Dans le cas des nombres de Hurwitz, Katz a prouvé que A_p est égal à l'invariant de Hasse [[8]P2]

On prouve la relation 4.0.26

Pour la courbe $y^2 = x^5 - 1$ est la base donnée dans (*) la matrice H Hasse-Witt est diagonale et son $(2, 2)$ élément est

$$A_p = (-1)^{(p-1)/10} \binom{(p-1)/2}{(p-1)/10} \pmod{p}$$

pour $p \equiv 1 \pmod{5}$ et $p = 10m + 1$ on a

$$\frac{(2m-1)!!}{m!2^m} \equiv (-1)^m \binom{5m}{m} \pmod{p}$$

implique que

$$\frac{(2m-1)!!}{m!} \equiv (-2)^m \binom{5m}{m} \pmod{p}$$

Cette congruence est vérifiée car

$$2(5m), 2(5m-1), \dots, 2(5m-(m-1)) \pmod{p}$$

coincide avec

$$-1, -3, \dots, -(2m-1) \pmod{p}$$

Bibliographie

- [1] A.Adelberg," Universal higher order Bernoulli numbers and Kummer and related congruences", J.Number theory .**84** (2000) 119-135.
- [2] A.Adelberg, "Kummer congruences for universal Bernoulli numbers and related congruences for poly-Bernoulli numbers" .Int Math.J. **1** (2002) 53-63.
- [3] Benali Benzaghou " Algébres de Hurwitz " institut de Math U.S.T.H.B. (2001)
- [4] L.Carlitz "congruences for the coefficients of hyperelliptique and related functions" ,Duke Math.J. **19** (1952) 329-337.
- [5] Clarke" the universsal von staudt theorem "Trans .Amer Math.Soc. **315** (1989) 591-603.
- [6] l.Comtet,"Advanced Combinatorics ,The art of finite and infinite expansions (revised and enlarged edition)D.Reidel Pub.Company.1974
- [7] T.Honda ",On the theory of commutative formule group" J. Math..Soc.Japan **22** (1970) 213-246.
- [8] N.M.Katz" the congruences of clausen-von staudt and Kummer for Bernoulli-Hurwitz numbers"Math.,Ann . **216** (1975) 1-4.
- [9] N Ray Stirling and Bernoulli numbers for complexoriented homology theories,Proc.Internat.Conf.Algebraic Topology ,1986 ,Arcata (G.Carloss,R.L.Cohen,H.R.Miller and D.C Ravenel,edss.),Lecteur notes in math .vol .1370, Springer-Verlag,Berlin and New York .

- [10] N.Yui "On the jacobian varieties of hyperelliptique curves over fields of characteristic $p \succ 2$ " Journal of algebra **52** (1978) 378-410.