

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE
 MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE
 UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE " HOUARI BOUMEDIENE "



Faculté de Mathématiques

MÉMOIRE

Présenté pour l'obtention du diplôme de MAGISTER
 En : Mathématiques

Spécialité : Analyse
 Equations aux Dérivées Partielles

Par : DELLAL - Abdel kader

Thème

SOLITON EN PLUSIEURS DIMENSIONS D'ESPACE :
 GENERALISATION DU PROBLEME DE DERRICK

Soutenu publiquement le 29 / 09 / 2011, devant le jury composé de:

M. T.	ALIZIANE,	Maître de Conférences A	à L'USTHB	Président
M. D.	TENIOU,	Professeur	à L'USTHB	Directeur de Mémoire
M. A.	OUAHAB,	Maître de Conférences A	à L'Univ D.Liabes Sidi-Bel-Abbès	Examineur
M. M.	MENAD,	Maître de Conférences A	à L'Univ H.Benbouali Chlef	Examineur

A la mémoire de mon cher père défunt...

A ma très chère mer

*A ma bien chère femme et mes biens
chers enfants, amine, ayoub, ansar, raouf*

*A toute la famille : frères, sœurs, tantes, oncles,
cousins et parents ...*

A mes chers amis

Remerciements

J'adresse mes remerciements aux personnes qui m'ont aidé dans la réalisation de ce mémoire. En premier lieu, je remercie M. D.TENIOU, professeur à l'université USTHB-Alger. En tant que Directeur du mémoire, il m'a guidé dans mon travail et m'a aidé à trouver des solutions pour avancer. Je remercie aussi M. A.Bouadi qui m'a fourni certains documents, mes remerciements les plus sincères à toutes les personnes qui auront contribué de près ou de loin à l'élaboration de ce mémoire.

SOMMAIRE

1. Introduction	1
2. Position du problème	
2-1 Equations d'ondes non linéaires et solitons.	5
2-2 Hypothèses	8
2-3 Invariance par rapport à la Transformée de Lorentz	9
2-4 La Solution Dynamique.	11
3. Cadre fonctionnel	
3-1 Définition de l'espace	13
3-2 Propriétés de l'espace fonctionnel.	13
3-3 Charge topologique et composantes connexes.	15
4. Propriétés de la fonctionnelle.	22
5. Minimiser la fonctionnelle f_a sur l'ensemble Λ_a	31
6. Minimiser la fonctionnelle f_a sur l'ensemble Λ_a^*	
6-1 L'ensemble Λ_a^* est non vide.	34
6-2 L'ensemble Λ_a^* est un ouvert.	34
6-3 Le minimum est atteint sur l'ensemble Λ_a^*	
Proposition 6.1. (<i>Splitting lemma</i>).	35
Théorème 6.1.	36
6-4 Résoudre L'équation statique.	37
I - Rappels.	46
7. Propriétés de compacité liées à la symétrie.	48
8. Minimiser la fonctionnelle f sur l'ensemble Λ_F^n	
8-1 L'ensemble Λ_F^n est non vide.	55
8-2 L'ensemble Λ_F^n est une composante connexe.	59
8-3 Le minimum est atteint sur l'ensemble Λ_F^n	
Théorème 8.1.	59
9. Conclusion	63
Annexe A. Injection compacte.	64
Annexe B. Inversibilité de l'opérateur Δ_p .	66
Références et bibliographies	70

Résumé

Dans ce mémoire, nous étudions une classe d'équations de champ non linéaires invariantes par la transformée de Lorentz dans un espace multidimensionnel. Le but principal est d'obtenir des solutions solitons. Ces équations ont été essentiellement proposées en 1964, par C.H. DERRICK dans son célèbre article [6] "*Comments on Nonlinear Wave Equations as Model Elementary Particles*". À ce moment là, aucune théorie d'existence n'était encore développée. Les champs sont caractérisés par une invariance topologique, que nous appelons la charge. Nous prouvons l'existence d'une solution statique minimisant l'énergie sur un ensemble construit avec une charge non triviale, et de plus, sous certaines hypothèses de symétrie, nous prouvons qu'il existe un nombre infini de solutions qui atteignent le minimum de l'énergie. Plus précisément, pour tout entier naturel N , il existe une solution de charge N .

1. Introduction

Le soliton est une onde solitaire localisée spatialement, dont les propriétés de stabilité sont spectaculaires. Les premières observations de ce phénomène ont été faites en 1834 par un ingénieur hydrodynamicien, John Scott Russell. Le soliton est une onde, mais il correspond aussi à un maximum localisé dans la densité d'énergie du système, qui se propage en conservant sa forme et sa vitesse, comme le ferait une particule. On dispose ainsi d'une solution d'une équation de champ classique qui possède à la fois les propriétés d'une quasi-particule et celles d'une onde. Les équations à solitons, au sens mathématique du terme, fournissent des exemples remarquables de systèmes totalement intégrables possédant un nombre infini de degrés de liberté. C'est la raison pour laquelle elles ont tant intéressé les mathématiciens. Les solitons concernent aussi les physiciens et ils sont même devenus indispensables pour décrire des phénomènes tels que la propagation de certaines ondes en hydrodynamique, la propagation de signaux dans les fibres optiques, ou des aspects beaucoup plus microscopiques comme les phénomènes de transport de charge dans les polymères conducteurs, les modes localisés dans des cristaux magnétiques, la dynamique de macromolécules biologiques comme l'ADN, physique des plasmas (voir [07]). Les solitons fournissent souvent une approche fructueuse pour décrire la physique d'un système non linéaire. Au lieu de faire une approximation linéaire, puis de traiter les non linéarités par perturbation, il peut être beaucoup plus efficace de décrire approximativement la physique du système par une équation à solitons puis, si nécessaire, de tenir compte des contributions qui perturbent les solitons.

L'exemple le plus simple d'équation à solution soliton est celle de Sine-Gordon,

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sin \psi = 0 \quad (1.1)$$

$\psi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

Où $\psi = \psi(x, t)$ est un champ scalaire x, t sont des nombres réels représentant l'espace et le temps la solution statique est la fonction indépendante du temps $u = u(x)$ solution l'équation suivante,

$$-\frac{d^2 u}{dx^2} + \sin u = 0. \quad (1.2)$$

L'équation (1.2) c'est celle d'Euler Lagrange de la fonctionnelle suivante,

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{du}{dx}(x) \right)^2 + (1 - \cos u(x)) \right) dx. \quad (1.3)$$

Posons $V(u) = 1 - \cos(u)$, le potentiel V . Là où il s'annule il y a un ensemble infini discret de minimums dégénérés ($2\pi\mathbb{Z}$), évidemment $u(x) \equiv k\pi$ est une solution triviale de (1.2) pour chaque $k \in \mathbb{Z}$, mais naturellement nous sommes intéressés par les solutions non triviales. En particulier, nous nous intéressons aux solutions non singulières d'énergie finie (dont les ondes solitaires sont des cas particuliers).

Ainsi, soit u une solution classique avec $E(u) < \infty$. Par ceci nous voulons dire naturellement que l'intégrale dans (1.3) est finie, et ceci implique

$$(1 - \cos u)^2 \leq 2[1 - \cos u] \in L^1 \text{ et } \left| \frac{d}{dx} \cos u \right| \leq \left| \frac{d}{dx} u \right| \in L^2$$

alors $(1 - \cos u) \in H^1(R)$ ainsi $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} (1 - \cos u(x)) = 0$ on en déduit que $u(\pm\infty) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} u(x) \in 2\pi\mathbb{Z}$.

La solution $u = u(x)$ d'énergie finie $E(u)$ satisfait les conditions asymptotiques suivantes

$$u(-\infty) = 2k_1\pi, \quad u(+\infty) = 2k_2\pi, \quad (k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2 \quad (1.4)$$

Observons que les valeurs asymptotiques de u sont des minimums du potentiel $V(\xi) = 1 - \cos(\xi)$

Alors l'espace H dans lequel on cherche les solutions d'énergie finie se fragmente en une infinité de composantes connexes liées aux conditions asymptotiques (1.4).

Considérons les ensembles suivants:

$$H_{(k_1, k_2)} = \left\{ u \in C^2(\mathfrak{R}; \mathfrak{R}) \mid \lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 2k_1\pi, \lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 2k_2\pi \right\},$$

$$H = \bigcup_{(k_1, k_2) \in \mathbb{Z}^2} H_{(k_1, k_2)} \subset L^\infty(\mathfrak{R}).$$

Nous pouvons facilement vérifier que $(h_1, h_2) \neq (k_1, k_2) \Rightarrow H_{(k_1, k_2)} \cap H_{(h_1, h_2)} = \emptyset$

et que $H_{(k_1, k_2)}$ est un sous-ensemble ouvert de l'espace H .

Equation de DERRICK

DERRICK dans son article [6] considère le modèle plus réaliste en trois dimensions d'espace

$$-\Delta \psi + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + V'(\psi) = 0, \quad (1.5)$$

avec $\psi : \mathfrak{R}^3 \times \mathfrak{R} \rightarrow \mathfrak{R}$ et V' est la dérivée d'une fonction réelle $V \in C^1$ non négative définie sur $\mathfrak{R}$.

Dans ce cas $u = u(x)$, $x \in \mathfrak{R}^3$ la solution statique, résout l'équation

$$-\Delta u + V'(u) = 0,$$

laquelle est l'équation d'Euler-Lagrange de la fonctionnelle d'énergie suivante

$$E(u) = \int_{\mathfrak{R}^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla u(x)|^2 + V(u(x)) \right) dx.$$

Dans son article DERRICK montre que, si le potentiel V est non négatif, l'équation (1.5) n'a pas de solutions statiques d'énergie finie. En effet:

soit u tel que $E(u) = \inf_{v \in H} E(v)$,

posons $u_\alpha(x) = u(\alpha x)$ alors $E(u_\alpha) \geq E(u)$,

$$E(u_\alpha) = \frac{1}{2\alpha} \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{\alpha^3} \int_{\mathbb{R}^3} V(u) dx = \frac{1}{2\alpha} I_1 + \frac{1}{\alpha^3} I_2,$$

$$\left. \frac{d}{d\alpha} E(u_\alpha) \right|_{\alpha=1} = -\frac{1}{2} I_1 - 3I_2 = 0,$$

$$\left. \frac{d^2}{d\alpha^2} E(u_\alpha) \right|_{\alpha=1} = I_1 + 12 I_2 = -I_1 \geq 0,$$

$$\text{mais } I_1 = \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \geq 0 \text{ alors } I_1 = I_2 = 0.$$

Donc il n'existe pas de solution non triviale.

D'autre part, si nous considérons le potentiel non positif, nous sommes amenés à de chercher des points selle, au lieu de minimum, et pour ces solutions statiques nous avons le problème de stabilité, aucune solution statique d'énergie finie stable n'est possible pour l'équation (1.5), comme on le voit dans l'exemple suivant.

$$\text{Si } V(\xi) = \frac{1}{2} \xi^2 - \frac{1}{4} \xi^4, \quad \xi \in \mathbb{R}$$

les points critiques de la fonctionnelle d'énergie

$$E(u) = \int_{\mathbb{R}^3} \left(\frac{1}{2} |\nabla u|^2 + \left(\frac{1}{2} u^2 - \frac{1}{4} u^4 \right) \right) dx$$

sont des solutions statiques non stables (voir [8]). Ces faits ont mené Derrick à dire dans son article [6]: "We are thus faced with the disconcerting fact that no equation of type '(1.5)' has any time-independent solutions which could reasonably be interpreted as elementary particles."

Pour surmonter cette difficulté (solution triviale et stabilité de la solution) DERRICK propose dans son article [6] un autre modèle dans $\mathbb{R}^3$ dont la densité lagrangienne est la suivante:

$$L(\psi) = - \left(|\nabla \psi|^2 - |\psi_t|^2 \right)^{p/2} - V(\psi); \quad p > 3. \quad (1.6)$$

Mais il n'a pas abouti à des résultats satisfaisants parce que à ce moment là, aucune théorie d'existence n'était encore développée, en déclarant dans son article: "We could take a Lagrangian in which the derivatives occur in higher powers than the second. For example, with the form $\left(|\nabla \psi|^2 - |\psi_t|^2 \right)^{p/2}$ the nonexistence proof [...] fails for $p > 3$. Such a Lagrangian, however, leads to a very complicated differential equation." Dans cet esprit, une quantité considérable de travaux a été effectuée par V. Benci et son équipe, une équation modèle proposée dans son article [1] "Solitons in several space dimensions" sera la matière de notre mémoire. Dans ce mémoire on cherche à prouver l'existence de la solution statique d'énergie finie dans un espace de dimension supérieure à un pour une classe de densité lagrangienne, L incluant (1.6).

Chapitre 2

Position du problème

La classe de densité Lagrangienne que nous étudions, généralise le problème étudié dans [3], de façon à inclure le problème de DERRICK.

2-1 Equations d'ondes non linéaires et solitons

Pour commencer nous allons introduire quelques notations

n, k sont des nombres entiers positifs, $\mathfrak{R}^{n+1}$ et $\mathfrak{R}^k$ dénoteront respectivement l'espace-temps physique (typiquement $n = 3$) et l'espace des paramètres internes.

C'est le cas multidimensionnel qui nous intéresse, ainsi nous supposons que $n \geq 2$.

Un point dans $\mathfrak{R}^{n+1}$ est noté $X = (x, t) \in \mathfrak{R}^{n+1}$ où $x \in \mathfrak{R}^n$ dénote la variable d'espace et $t \in \mathfrak{R}$ dénote la variable temps

$$\psi : \mathfrak{R}^{n+1} \rightarrow \mathfrak{R}^k \quad \psi = (\psi^1, \dots, \psi^k)$$

On pose,

$$\rho = |\nabla \psi|^2 - |\psi_t|^2 ;$$

On considère la densité lagrangienne suivante

$$L(\psi, \rho) = -\frac{1}{2} \alpha(\rho) - V(\psi), \quad (2.1)$$

V est une fonction réelle définie sur un ensemble $\Omega \subset \mathfrak{R}^k$ et α est une fonction réelle

$$\alpha(\rho) = a\rho + b|\rho|^{p/2}, \quad p > n \quad (2.2)$$

La fonctionnelle d'action reliée à (2.1) est

$$S(\psi) = \int_{\mathfrak{R}^{n+1}} L(\psi, \rho) dX.$$

On a

$$S(\psi) = \int_{\mathfrak{R}^{n+1}} L(\psi, \rho) dx dt = \int_{\mathfrak{R}^{n+1}} \left(-\frac{1}{2} \alpha(\rho) - V(\psi) \right) dx dt \quad (2.3)$$

Alors

$$S'(\psi)\varphi = \int_{\mathfrak{R}^{n+1}} \left[\frac{\partial L}{\partial \psi}(\psi, \rho)\varphi + \frac{\partial L}{\partial \nabla_{x,t}\psi}(\psi, \rho) \cdot \nabla_{x,t}\varphi \right] dx dt, \\ \varphi \in C_0^\infty(\mathfrak{R}^{n+1}, \mathfrak{R}^k).$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que $S(\psi)$ admette un minimum en ψ_0

$$S'(\psi_0) \cdot \varphi = 0 \quad \text{pour toute} \quad \varphi \in C_0^\infty(\mathfrak{R}^{n+1}, \mathfrak{R}^k).$$

D'où l'équation d'Euler Lagrange équivaut ici à un système de k équation scalaires en dimension $n+1$ (voir [11]):

$$\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t^j} \right) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_i^j} \right) - \frac{\partial L}{\partial \psi^j} = 0, \text{ où } \psi_i^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial x_i}; \quad (2.4)$$

$$x_n = t, \quad 0 \leq i \leq n-1, \quad 0 \leq j \leq k-1$$

$$\text{on a} \quad \frac{\partial L}{\partial \psi^j} = -\frac{1}{2} \alpha'(\rho) \underbrace{\frac{\partial \rho}{\partial \psi^j}}_{=0} - \frac{\partial V}{\partial \xi_j}(\psi), \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i^j} = -\frac{1}{2} \alpha'(\rho) \frac{\partial \rho}{\partial \psi_i^j}, \quad (2.6)$$

comme

$$\rho = |\nabla \psi|^2 - |\psi_t|^2 \text{ avec,}$$

$$|\nabla \psi|^2 = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k-1 \\ 0 \leq i \leq n-1}} |\psi_i^j|^2 = \sum_{\substack{0 \leq j \leq k-1 \\ 0 \leq i \leq n-1}} \left| \frac{\partial \psi^j}{\partial x_i} \right|^2,$$

$$|\psi_t|^2 = \sum_{0 \leq j \leq k-1} |\psi_t^j|^2, \quad \psi_t^j = \frac{\partial \psi^j}{\partial t};$$

alors

$$\frac{\partial \rho}{\partial \psi_i^j} = 2\psi_i^j \quad \begin{matrix} 0 \leq j \leq k-1 \\ 0 \leq i \leq n-1 \end{matrix} \quad (2.7)$$

de (2.6) et (2.7) on a

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_i^j} = -\alpha'(\rho) \psi_i^j$$

donc

$$\sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_i^j} \right) = - \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\alpha'(\rho) \psi_i^j \right) = -\text{div}(\alpha'(\rho) \nabla \psi^j) \quad (2.8)$$

et on a

$$\frac{\partial \rho}{\partial \psi_t^j} = -2\psi_t^j$$

donc

$$\frac{\partial L}{\partial \psi_t^j} = \alpha'(\rho) \psi_t^j \Rightarrow \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial L}{\partial \psi_t^j} \right) = \frac{\partial}{\partial t} (\alpha'(\rho) \psi_t^j) \quad (2.9)$$

en introduisant (2.8) et (2.9) dans (2.4) nous avons

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha'(\rho) \psi_t^j) - \text{div}(\alpha'(\rho) \nabla \psi^j) + \frac{\partial V}{\partial \xi_j}(\psi) = 0$$

$$(0 \leq j \leq k-1)$$

donc

$$\frac{\partial}{\partial t} (\alpha'(\rho) \psi_t) - \nabla \cdot (\alpha'(\rho) \nabla \psi) + V'(\psi) = 0 \quad \text{dans } \mathfrak{R}^k \quad (2.10)$$

$\nabla \psi$ et ψ_t représentent respectivement le jacobien par rapport à x et la dérivée par rapport à t .

$\nabla \cdot (\alpha'(\rho) \nabla \psi)$ est le vecteur dont la j^{eme} composante est $\text{div}(\alpha'(\rho) \nabla \psi^j)$.

V' représente le gradient de V .

Remarque: L'équation (2.10) est invariante par la transformée de Lorentz voir sous chapitre 2-3,

$$\begin{cases} x_1 \mapsto \beta(x_1 + vt) \\ x_2 \mapsto x_2 \\ x_3 \mapsto x_3 \\ t \mapsto \beta\left(t + \frac{v}{c^2} x\right) \end{cases} ; \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}}$$

Physiquement c et v représentent respectivement la vitesse de la lumière et la vitesse de l'onde. Pour normaliser le problème, on pose $c = 1$ et $|v| < 1$.

La solution statique

Soit la solution statique de (2.10)

$$\psi(x, t) = u(x)$$

C'est à dire de l'équation,

$$-\nabla(\alpha'(\rho) \nabla u) + V'(u) = 0 \quad (2.11)$$

À partir des équations (2.11), (2.2), nous obtenons :

$$-a\Delta u - b \frac{p}{2} \Delta_p u + V'(u) = 0, \quad (2.12)$$

$$\text{où } \Delta_p u = \nabla(|\nabla u|^{p-2} \nabla u).$$

On peut vérifier, que si $u = u(x)$ est une solution de l'équation statique (2.11) et $v = (v, 0, 0, \dots, 0)$ avec $|v| < 1$ alors le champ

$$\psi_v(x, t) = u\left(\frac{x_1 - vt}{\sqrt{1-v^2}}, x_2, \dots, x_n\right) \quad (2.13)$$

est solution de l'équation dynamique (2.10), voir sous chapitre 2-4

Soit la fonctionnelle d'énergie f_a ,

$$f_a(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{a}{2} |\nabla u|^2 + \frac{b}{2} |\nabla u|^p + V(u) \right) dx \quad (2.14)$$

Il est clair que (2.12) est l'équation d'Euler Lagrange qui correspond à la fonctionnelle d'énergie f_a

On prend $k=n+1$, le champ u est représenté par la fonction suivante :

$$u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$$

Le minimum de la fonctionnelle sur un ouvert est solution de l'équation statique

Définition 2.1 On appelle une solution soliton de l'équation (2.10) une solution ayant la forme (2.13), où u est un minimum local de la fonctionnelle d'énergie (2.14).

Observons que la densité (1.6) peut être obtenue à partir de (2.1) en choisissant dans le cas tridimensionnel ($n=3$); $a=0$, $b=2$

2-2 Hypothèses

Nous sommes devant un problème dont le domaine est non borné donc on perd des propriétés de compacité (les injections compactes dans les espaces de Sobolev) les outils classiques ne sont plus utilisables. Pour résoudre le problème nous avons besoin d'hypothèses sur le potentiel V , car la première partie de la fonctionnelle d'énergie est en fait une norme composée avec une fonction continue convexe.

On introduit les notations suivantes pour toute $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ on écrit

$$\xi = (\xi_0, \tilde{\xi}), \quad (2.15)$$

telle que $\xi_0 \in \mathbb{R}$, $\tilde{\xi} \in \mathbb{R}^n$.

On suppose que la fonction V est définie sur Ω

$$\Omega = \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\eta\}, \quad \eta = (1, 0)$$

Hypothèses :

La fonction V est positive et a une singularité au point η et on suppose

$$(H_1) \quad V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$$

$$(H_2) \quad V(\xi) \geq V(0) = 0$$

$$(H_3) \quad V \text{ est deux fois différentiable en } 0 \text{ et la matrice hessienne } V''(0) \text{ est non dégénérée}$$

$$(H_4) \quad \text{Il existe } c, \rho > 0 \text{ tel que si } |\xi| < \rho \text{ alors}$$

$$V(\eta + \xi) \geq c|\xi|^{-q} \quad (2.16)$$

avec

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{n} - \frac{1}{p} \quad (2.17)$$

$$(H_5) \quad \text{pour toute } \xi \in \Omega \setminus \{0\}$$

$$V(\xi) > 0,$$

$$\text{et} \quad \liminf_{|\xi| \rightarrow \infty} V(\xi) = \nu > 0.$$

2-2 Invariance par rapport à la transformée de Lorentz

On montre dans ce sous chapitre que l'équation (2.10) est invariante par la transformée de Lorentz dans $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{cases} x = \beta(x' + vt') \\ t = \beta(t' + vx') \end{cases}; \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - v^2}}.$$

Commençons par montrer l'invariance par rapport à la transformée de Lorentz pour l'exemple le plus simple; l'équation de Sine-Gordon:

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sin \psi = 0$$

$$\text{telle que } \psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) \mapsto \psi(x, t)$$

$$\text{On note: } \frac{\partial \psi}{\partial x} = \psi_x, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \psi_{xx}.$$

$$\text{Où, } \psi(x, t) = \psi(\beta(x' + vt'), \beta(t' + vx'))$$

Pour cela nous allons développer en utilisant le théorème de la dérivée composée

$$d\psi = \frac{\partial \psi}{\partial x} dx + \frac{\partial \psi}{\partial t} dt \Rightarrow \frac{d\psi}{dx'} = \frac{\partial \psi}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial \psi}{\partial t} \cdot \frac{\partial t}{\partial x'}$$

$$\text{alors } \psi_{x'} = \psi_x \cdot \beta + \psi_t \cdot \beta v$$

de façon similaire on aura :

$$\psi_{t'} = \psi_x \cdot \beta v + \psi_t \cdot \beta$$

donc pour une dérivée seconde

$$\psi_{x'x'} = (\psi_x \cdot \beta + \psi_t \cdot \beta v)_{x'} = \psi_{xx'} \cdot \beta + \psi_{tx'} \cdot \beta v,$$

$$\text{où } \psi_{xx'} = \psi_{xx} \cdot \beta + \psi_{xt} \cdot \beta v, \text{ et } \psi_{tx'} = \psi_{tx} \cdot \beta + \psi_{tt} \cdot \beta v,$$

puisque les dérivées croisées sont égales ($\psi_{tx} = \psi_{xt}$) :

$$\psi_{x'x'} = \psi_{xx} \cdot \beta^2 + \psi_{tt} \cdot (\beta v)^2 + 2\psi_{xt} \cdot \beta^2 v.$$

De façon similaire on aura :

$$\psi_{t't'} = \psi_{xx} \cdot (\beta v)^2 + \psi_{tt} \cdot \beta^2 + 2\psi_{xt} \cdot \beta^2 v.$$

Alors

$$-\psi_{x'x'} + \psi_{t't'} = -\psi_{xx} + \psi_{tt};$$

Donc l'équation de Sine-Gordon est invariante par la transformée de Lorentz.

Revenons à notre problème. Pour des raisons de simplicité de calcul on va prendre le cas le plus simple ($k = 1, n = 1$) pour montrer l'invariance de l'équation (2.10) par rapport à la transformée de Lorentz.

On a,

$$\begin{aligned} \psi &: \mathfrak{R}^2 \rightarrow \mathfrak{R} \\ (x, t) &\mapsto \psi(x, t), \\ \rho &= \psi_x^2 - \psi_t^2 \end{aligned}$$

$$\text{on pose, } \frac{\partial \rho}{\partial x} = \rho_x, \frac{\partial \rho}{\partial t} = \rho_t$$

L'équation (2.10) dans $\mathfrak{R}^2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) + V'(\psi) &= 0, \\ \text{où } \frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) &= \alpha''(\rho)\rho_t\psi_t + \alpha'(\rho)\psi_{tt}, \\ \text{et } \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) &= \alpha''(\rho)\rho_x\psi_x + \alpha'(\rho)\psi_{xx}. \end{aligned}$$

Donc

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) = \alpha''(\rho) \underbrace{(\rho_t\psi_t - \rho_x\psi_x)}_{(p1)} + \alpha'(\rho) \underbrace{(\psi_{tt} - \psi_{xx})}_{(p2)}$$

On a déjà vu que la deuxième partie (p2) est invariante par la transformée de Lorentz.

Montrons que (p1) est invariante par la transformée de Lorentz;

On a

$$\rho_{t'} = \rho_x \cdot \beta v + \rho_t \cdot \beta, \quad \rho_{x'} = \rho_x \cdot \beta + \rho_t \cdot \beta v,$$

en introduisant ces deux équations et les expressions de $\psi_{t'}$ et $\psi_{x'}$ dans $(\rho_{t'}\psi_{t'} - \rho_{x'}\psi_{x'})$, on vérifie facilement que:

$$\rho_{t'}\psi_{t'} - \rho_{x'}\psi_{x'} = \rho_t\psi_t - \rho_x\psi_x.$$

Donc l'équation (2.10) est invariante par la transformée de Lorentz dans $\mathfrak{R}^2$

2-3 La solution dynamique

Montrons que si u est une solution statique, alors $\psi(x, t) = u(\beta(x - vt))$ est solution dynamique. Commençons cette fois aussi par l'équation de Sine-Gordon,

soit u une solution de l'équation statique Sine-Gordon :

$$-\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0.$$

Avec un changement de variable approprié

$$\psi(x, t) = u(\beta(x - vt))$$

Montrons que ψ est une solution de l'équation dynamique :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sin \psi = 0.$$

On a

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \beta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial x} \cdot \beta v,$$

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \beta^2, \quad \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \beta^2 v^2, \quad \text{sachant que } \beta = \frac{1}{\sqrt{1-v^2}}.$$

En introduisant les deux dernières relations dans $(-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2})$, on aura :

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}.$$

Alors

$$-\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} + \sin \psi = -\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin u = 0,$$

donc ψ est une solution de l'équation dynamique.

Revenons à notre équation (2.10) comme précédemment on prend le cas le plus simple ($k = 1, n = 1$).

L'équation (2.10) en $\mathfrak{R}^2$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) + V'(\psi) = 0$$

Soit u une solution de l'équation statique,

$$-\frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(u_x^2)u_x) + V'(u) = 0$$

On pose, $\psi(x, t) = u(\beta(x - vt))$.

Montons que ψ est une solution de l'équation (2.10) dans $\mathfrak{R}^2$

$\rho = \psi_x^2 - \psi_t^2$; par un calcul explicite on vérifie facilement que,

$$\rho = u_x^2, \quad \frac{\partial \rho}{\partial x} = \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} \cdot \beta, \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} = \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} \cdot \beta v.$$

On a,

$$\frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) = \alpha''(\rho)(\rho_t\psi_t - \rho_x\psi_x) + \alpha'(\rho)(\psi_{tt} - \psi_{xx}),$$

on a déjà vu dans l'équation Sine-Gordon que $(\psi_{tt} - \psi_{xx} = -u_{xx})$

en introduisant les expressions de $\rho, \rho_t, \rho_x, \psi_t$ et ψ_x

dans $\alpha''(\rho)(\rho_t\psi_t - \rho_x\psi_x) + \alpha'(\rho)(\psi_{tt} - \psi_{xx})$,

on aura

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) &= -\alpha''(u_x^2) \frac{\partial(u_x^2)}{\partial x} \cdot u_x - \alpha'(u_x^2) \cdot u_{xx} \\ &= -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(u_x^2)u_x). \end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t}(\alpha'(\rho)\psi_t) - \frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(\rho)\psi_x) + V'(\psi) &= -\frac{\partial}{\partial x}(\alpha'(u_x^2)u_x) + V'(u), \\ &= 0 \end{aligned}$$

alors

$\psi(x, t) = u(\beta(x - vt))$ est une solution de l'équation (2.10) dans $\mathfrak{R}^2$.

Chapitre 3

Le cadre fonctionnel

Dans ce chapitre on va définir l'espace sur lequel on minimise la fonctionnelle d'énergie et les propriétés de cette espace.

3-1 Définition

On note E_a l'espace complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ avec la norme suivante,

$$\|u\|_a = a\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^2}, \quad p > n \geq 2, \quad a \geq 0;$$

C'est à dire : $E_a = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})}^{\|\cdot\|_a};$

$$\|u\|_{L^2} = \left(\sum_1^{n+1} \|u^j\|_{L^2}^2 \right)^{1/2};$$

$$\|\nabla u\|_{L^2} = \left(\sum_1^{n+1} \|\nabla u^j\|_{L^2}^2 \right)^{1/2};$$

$$\|\nabla u\|_{L^p} = \left(\sum_1^{n+1} \|\nabla u^j\|_{L^p}^p \right)^{1/p}.$$

Nous avons déterminé notre espace tel que toutes les intégrales dans (2.14) soient finies.

3-2 Propriétés de l'espace E_a

Proposition 3.1 *L'espace de Banach E_0 s'injecte continûment dans $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ pour tout $s \in [2, +\infty]$*

Preuve: Nous utilisons le théorème d'interpolation (voir [10]). Il nous suffit de montrer que E_0 s'injecte continûment dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ et $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$.

En fait E_0 s'injecte continûment dans $L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ par définition.

il nous reste à montrer que E_0 s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$.

Puisque $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ est dense dans E_0 par définition,

$E_0 = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})}^{\|\cdot\|_0}$, il nous suffit de prouver qu'il existe $c > 0$ tel que $\forall u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$,

$$\|u\|_{L^\infty} \leq c\|u\|_0. \quad (3.1)$$

Nous fixons $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ et soit $Q_k \subset \mathbb{R}^n$ une famille de cubes telle que

$$\begin{aligned} \text{mes}(Q_k) &= 1 \\ \bigcup_{k \in N} Q_k &= \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Alors nous avons l'inégalité (voir [10]) pour tout $k \in N$ et $Q_k \subset \mathbb{R}^n$

$$|u(x)| \leq \left| \int_{Q_k} u \, dy \right| + M \|\nabla u\|_{L^p(Q_k)}, \quad \forall x \in Q_k \quad (3.2)$$

M indépendante de u .

De (3.2) nous avons

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \text{mes}(Q_k) \|u\|_{L^2(Q_k)} + M \|\nabla u\|_{L^p(Q_k)} \\ &\leq \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} + M \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq M \|u\|_0. \end{aligned}$$

Ce qui nous donne directement l'inégalité (3.1)

Corollaire 3.1 *L'espace de Banach E_0 s'injecte continûment dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$*

Preuve : Le corollaire est une conséquence directe de la proposition 3.1

Par définition on a

$$\|u\|_0 > \|\nabla u\|_{L^p}$$

et par la proposition 3.1

$$c_1 \|u\|_0 > \|u\|_{L^p}$$

donc

$$\|u\|_0 > c \|u\|_{W^{1,p}}$$

Corollaire 3.2 *Pour tout $a > 0$, l'espace E_a s'identifie à l'espace de Banach*

$$\begin{aligned} W &= W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}) \\ \|\cdot\|_W &= \|\cdot\|_{W^{1,2}} + \|\cdot\|_{W^{1,p}} \end{aligned}$$

Preuve : Par définition pour tout $u \in E_a$,

$$\|u\|_a < \sup(1, a) \cdot \|u\|_W$$

et par le corollaire 3.1 il existe $c > 0$, tel que pour tout $u \in W$,

$$\|u\|_a > c(\|u\|_{W^{1,2}} + \|u\|_{W^{1,p}})$$

Remarque 3.1: Puisque $p > n$, par le corollaire précédent, pour toute valeur $a \geq 0$, toute fonction u de E_a est bornée et décroît vers zéro à l'infini, de plus elle est Hölder continue

d'ordre $(p-n/p)$ et nous avons l'inégalité suivante voir [10]

$$|u(x) - u(y)| \leq c |x - y|^{(p-n)/p} \|\nabla u\|_{L^p} \quad (3.3)$$

avec $\|\nabla u\|_{L^p}$ borné.

Ainsi on a,

$$E_a \subset C^{0, (p-n)/p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}), \text{ l'injection étant localement compacte.}$$

Rappelons que η est un point singulier du potentiel V , il est raisonnable de considérer, dans l'espace E_a , le sous-ensemble ouvert, (voir chapitre 5)

$$\Lambda_a = \{ u \in E_a / u(x) \neq \eta \ \forall x \in \mathbb{R}^n \},$$

le bord de Λ_a est noté,

$$\partial \Lambda_a = \{ u \in E_a / \exists x \in \mathbb{R}^n / u(x) = \eta \}.$$

Nous pouvons montrer que l'ensemble Λ_a a une structure topologique riche, plus précisément il se compose d'une infinité de composantes connexes. Ces composantes sont définies à partir de la charge topologique que nous allons présenter.

3-3 Charge topologique et composante connexe

Avant de commencèr, nous ferons un bref rappel sur le degré topologique de Brouwer; pour plus de détails voir [9].

Soit Ω un ouvert borné dans $\mathbb{R}^n$ et $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ une application dans $C^1(\Omega) \cap C^0(\overline{\Omega})$, $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ est une valeur régulière de f ($J_f(x) \neq 0$ pour tout $x \in f^{-1}(b)$)

$$\deg(f, \Omega, b) = \begin{cases} \sum_{x \in f^{-1}(b)} \text{sgn } J_f(x) \\ 0 \quad \text{si } f^{-1}(b) = \emptyset \end{cases};$$

$$\partial\Omega \text{ étant le bord de } \Omega, \quad \text{sgn } J_f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } J_f(x) > 0 \\ -1 & \text{si } J_f(x) < 0 \end{cases},$$

J étant le déterminant de la matrice Jacobienne de f .

Nous avons les propriétés suivantes:

- (i) Propriété de normalisation :
Si Id désigne l'application identité, on a:

$$\deg(Id, \Omega, b) = \begin{cases} 1 & \text{si } b \in \Omega \\ 0 & \text{si } b \notin \Omega \end{cases}$$

- (ii) Propriété d'existence :
Si $\deg(f, \Omega, b) \neq 0$, alors l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans Ω .
- (iii) Propriété d'additivité : Si l'une des assertions suivantes,
 $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2, \Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ et $b \notin f(\partial\Omega_1) \cup f(\partial\Omega_2)$
 ou
 $\Omega \subset \Omega_1 \cup \Omega_2$ et $b \notin f(\overline{\Omega} \setminus \Omega_1 \cup \Omega_2)$,
 alors,
 $\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega_1, b) + \deg(f, \Omega_2, b)$.
- (iv) Propriété d'invariance sur le bord :
 Si $f = g$ sur $\partial\Omega$ alors, $\deg(f, \Omega, b) = \deg(g, \Omega, b)$.

La définition du degré peut être étendue aux fonctions qui sont seulement continues et aux valeurs non régulières;

- (A) Soit $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$; il existe une suite $f_k \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ telle que
 $\|f_k - f\|_\infty \rightarrow 0$ sur $\overline{\Omega}$;
 On peut définir, $\deg(f, \Omega, b) := \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f_k, \Omega, b)$.
 et montrer que la limite est indépendante de la suite (f_k)

- (B) Soit $f \in C^1(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$ et $b \in \mathbb{R}^n \setminus f(\partial\Omega)$ (pas nécessairement une valeur régulière) il existe une suite (b_k) , valeurs régulières de f telle que $b_k \rightarrow b$;
 On peut définir, $\deg(f, \Omega, b) := \lim_{k \rightarrow \infty} \deg(f, \Omega, b_k)$
 et montrer que la limite est indépendante de la suite (b_k)

- (v) Propriété de stabilité :
 Si $f_1, f_2; \overline{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}^n$ sont deux fonctions continues telles que
 $b \notin f_2(\partial\Omega) \cup f_1(\partial\Omega)$. alors si $\|f_2 - f_1\|_\infty \leq \frac{1}{4} \text{dist}(b, f_2(\partial\Omega) \cup f_1(\partial\Omega))$,
 On a $\deg(f_1, \Omega, b) = \deg(f_2, \Omega, b)$.

- (vi) Propriété d'excision :
 Si $f \in C(\overline{\Omega}; \mathbb{R}^n)$, $U \subset \overline{\Omega}$ un compact et $b \notin f(U) \cup f(\partial\Omega)$ alors,

$$\deg(f, \Omega, b) = \deg(f, \Omega \setminus U, b).$$

- (vii) Propriété d'invariance par homotopie :
 Si $H \in C([0, 1] \times \overline{\Omega} ; \mathbb{R}^n)$ et $b \notin H([0, 1] \times \partial\Omega)$, alors

$$\deg(H(t, \cdot), \Omega, b) = \text{constant} \quad \forall t \in [0, 1].$$

Charge topologique :

Soit C l'espace fonctionnel

$$C = \left\{ u : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \setminus \eta \text{ continue et } \lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0 \right\}$$

Rappelons que $\eta = (1, 0)$.

Pour toute fonction $u \in C$, $u(x) = (u_0(x), \tilde{u}(x)) \in \mathbb{R}^{n+1}$ avec

$$\begin{aligned} u_0 : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ \tilde{u} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

Définition 3.1 Pour toute fonction $u \in C$ on définit le support de u :

$$K_u = \{x \in \mathbb{R}^n : u_0(x) > 1\},$$

et on définit la charge topologique de u

$$ch(u) = \begin{cases} \deg(\tilde{u}, K_u, 0) & \text{si } K_u \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } K_u = \emptyset. \end{cases}$$

Remarque 3.2: Cette définition est bien posée puisque u continue et $\lim_{|x| \rightarrow \infty} u(x) = 0$

par conséquent K_u est un ensemble ouvert et borné; de plus $x \in \partial K_u$, vérifie que $u_0(x) = 1$, avec $u(x) \neq \eta$, implique que $\tilde{u}(x) \neq 0$ ($0 \notin \tilde{u}(\partial K_u)$) donc notre degré topologique est bien défini.

Proposition 3.2 Pour toute $u \in \Lambda_a$ il existe un entier l , et il existe $x^1, \dots, x^l \in \mathbb{R}^n, R_1, \dots, R_l > 0$ tel que

$$\begin{aligned} B(x^i, R_i) \cap B(x^j, R_j) &= \emptyset, \quad i \neq j \\ \forall x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^l B^i, \quad u_0(x) &< 1; \\ K_u &\subset \bigcup_{i=1}^l B^i, \end{aligned} \tag{3.4}$$

$$ch(u) = \deg(\tilde{u}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) = \sum_{i=1}^l \deg(\tilde{u}, B^i, 0). \tag{3.5}$$

Preuve soit $u \in \Lambda_a$

$$ch(u) = \begin{cases} deg(\tilde{u}, K_u, 0) & \text{si } K_u \neq \emptyset \\ 0 & \text{si } K_u = \emptyset \end{cases}$$

Dans le cas $K_u \neq \emptyset$

Rappelons que E_a est un espace de Banach réflexif et s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$.

Soit $x^1 \in \mathfrak{R}^n$ le point maximum de u_0 , de la remarque 3.1 (u_0 continue et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_0(x) = 0$)

On a

$$u_0(x^1) > 1 \text{ puisque } K_u \neq \emptyset$$

soit $\gamma \in]0, 1[$, arbitraire,

on prend R_1 tel que

$$u_0(x) > \gamma ; \quad \forall x \in B(x^1, R_1);$$

cette boule existe toujours puisque, u_0 continue et $u_0(x^1) > 1$.

On pose $B^1 = B_{R_1}(x^1)$

On distingue deux cas

$$1/ \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus B^1; \quad u_0 \leq \gamma < 1$$

ou

$$2/ \quad \exists x \in \mathfrak{R}^n \setminus B^1; \quad u_0 > 1.$$

Dans le premier cas c'est la preuve de la proposition pour $l = 1$. En effet d'après la propriété d'excision (vi) et la propriété (iii),

$$deg(\tilde{u}, B^1, 0) = deg(\tilde{u}, K_u, 0) + deg(\tilde{u}, B^1 \setminus \bar{K}_u, 0) \quad (3.6)$$

soit $x \in B^1 \setminus K_u$, $\gamma < u_0(x) \leq 1$

puisque γ est arbitraire, alors on a, $u_0(x) = 1$, mais $u(x) \neq \eta$, $\eta = (1, 0)$; donc, $\tilde{u}(x) \neq 0$ d'après la propriété (ii) du degré topologique

$$deg(\tilde{u}_i, B_{R_1}(0) \setminus \bar{K}_{\tilde{u}_i}, 0) = 0, \quad (3.7)$$

alors de l'égalité (3.6), (3.7) on a,

$$ch(u) = deg(\tilde{u}, K_u, 0) = deg(\tilde{u}, B^1, 0).$$

On a pas étudié le cas, $[\exists x \in \mathfrak{R}^n \setminus B^1; \quad \gamma < u_0 \leq 1]$, par ce que avec le même raisonnement que précédemment dans (3.7) on se retrouve dans le premier cas

Dans le deuxième cas

Soit x^2 le point maximum de u_0 sur $\mathfrak{R}^n \setminus B^1$

$$u_0(x^2) > 1,$$

on refait la même chose on prend R_2 tel que ;

$$\forall x \in B(x^2, R_2), \quad u_0(x) > \gamma$$

avec le même type de raisonnement on aura deux sous cas ;

$$1/ \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus B^1 \cup B^2, \quad u_0 < 1,$$

$$2/ \quad \exists x \in \mathfrak{R}^n \setminus B^1 \cup B^2, \quad u_0 > 1.$$

Dans le premier cas la proposition est prouvée pour $l=2$.

Dans le deuxième cas on prend x^3 le point max de u_0 sur $\mathfrak{R}^n \setminus B^1 \cup B^2$;

et avec les mêmes arguments que la fois précédente on démontre la proposition pour $l=3$, ainsi de suite.

Par construction on a : $K_u \subset \bigcup_{i=1}^l B^i$, $i \neq j, B^i \cap B^j = \emptyset$,

de plus puisque u_0 est continue et γ est arbitraire, $\bar{K}_u \subset \bigcup_{i=1}^l B^i$, ($\bar{K}_u$ est un compacte), donc, l est fini.

D'après la propriété (vi) on a,

$$\deg(\tilde{u}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) = \deg(\tilde{u}, K_u, 0) + \deg(\tilde{u}, \bigcup_{i=1}^l B^i \setminus \bar{K}_u, 0)$$

avec le même raisonnement que dans (3.6) - (3.7) et d'après la propriété (iii) du degré topologique,

$$ch(u) = \deg(\tilde{u}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) = \sum_{i=1}^l \deg(\tilde{u}, B^i, 0).$$

Dans le cas $K_u = \emptyset$

Par définition du degré topologique

$$ch(u) = \deg(\tilde{u}, K_u, 0) = 0.$$

Théorème 3.1 Pour toute $u \in \Lambda_a$ il existe $r = r(u) > 0$ tel que, pour toute $v \in \Lambda_a$

$$\|u - v\|_\infty \leq r \Rightarrow ch(u) = ch(v). \quad (3.8)$$

Preuve Soit $v = (v_0, \tilde{v}) \in \Lambda_a$ et choisit la norme suivante

$$\|v\|_\infty = \|v_0\|_\infty + \|\tilde{v}\|_\infty,$$

On a

$$\|u - v\|_\infty = \|u_0 - v_0\|_\infty + \|\tilde{u} - \tilde{v}\|_\infty \leq r \quad (3.9)$$

Par ce choix nous pouvons toujours prendre $v_0 > 0$ puisque si $v = (v_0, \tilde{v}) \in \Lambda_a$

alors

$$v = (|v_0|, \tilde{v}) \in \Lambda_a. \quad (3.10)$$

Pour exploiter les propriétés du degré topologique il faudra redéfinir la charge topologique sur des boules.

D'après la proposition précédente (3.2), nous avons

$$\begin{aligned} \bigcup_{i=1}^l B^i &\supset K_u, \text{ tel que} \\ ch(u) &= deg(\tilde{u}, K_u, 0) = deg(\tilde{u}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) \\ B_i \cap B_j &= \emptyset, i \neq j. \end{aligned} \quad (3.11)$$

Montrons que $K_v \subset \bigcup_{i=1}^l B^i$.

$$\text{Soit } x \in \mathfrak{R}^n \setminus \bigcup_{i=1}^l B^i, \quad u_0(x) < 1 \quad (3.12)$$

on a,

$$|v_0(x)| \leq |u_0(x)| + |u_0(x) - v_0(x)|,$$

d'après (3.9), $|v_0(x)| \leq |u_0(x)| + r$

avec (3.12), $|v_0(x)| < 1$, pour r assez petit,

donc

$$x \in \mathfrak{R}^n \setminus K_v.$$

D'après la propriété (vi) du degré topologique

$$deg(\tilde{v}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) = deg(\tilde{v}, K_v, 0) + deg(\tilde{v}, \bigcup_{i=1}^l B^i \setminus \bar{K}_v, 0) \quad (3.13)$$

il facile de montrer que $\bigcup_{i=1}^l B^i \setminus \bar{K}_v \subset \bigcup_{i=1}^l B^i \setminus \bar{K}_u$ pour r assez petit,

avec le même raisonnement que dans (3.6) - (3.7), le deuxième terme à droite dans (3.13) est nul.

Donc,

$$ch(u) = deg(\tilde{v}, K_v, 0) = deg(\tilde{v}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) \quad (3.14)$$

d'après (3.9), on a $\|\tilde{u} - \tilde{v}\|_\infty \leq r$ et avec la propriété (v) du degré topologique

$$deg(\tilde{v}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0) = deg(\tilde{u}, \bigcup_{i=1}^l B^i, 0), \text{ pour } r \text{ assez petit,}$$

alors de (3.11) et (3.14)

$$ch(u) = ch(v).$$

Composante connexe :

Soit $q \in \mathbb{Z}$ on pose

$$\Lambda_q = \left\{ u \in \Lambda_a / ch(u) = q \right\}$$

Grâce au théorème 3.1 nous pouvons choisir une boule ouverte $B(u, r)$ telle que pour r assez petit on a

$$\forall \phi \in B(u, r); \quad ch(\phi) = ch(u)$$

d'où on a

$$B(u, r) \subset \Lambda_q$$

Alors Λ_q est un ensemble ouvert dans E_a et également dans Λ_a ; nous avons également

- $\Lambda_a = \bigcup_{q \in \mathbb{Z}} \Lambda_q$;
- $\Lambda_q \cap \Lambda_p = \emptyset$ si $p \neq q$.

L'ensemble Λ_{q_0} ($q_0 \in \mathbb{Z}$) est aussi un fermé par la topologie induite sur Λ_a puisque

$$\Lambda_a \setminus \Lambda_{q_0} = \bigcup_{q \neq q_0} \Lambda_q \text{ un ensemble ouvert dans } E_a$$

Par conséquence Λ_q est une composante connexe de Λ_a .

Observons que si la dimension n de l'espace $(\tilde{u} : \mathfrak{R}^n \rightarrow \mathfrak{R}^n)$ est impaire alors pour chaque $q \in \mathbb{Z}$, la composante Λ_q est isomorphe à la composante Λ_{-q} , ce qui est le cas pour l'espace ambiant. En effet, si nous posons

$$u \circ P(x) = u(-x);$$

il est facile de montrer que

$$u \in \Lambda_q \Rightarrow u \circ P \in \Lambda_{-q}.$$

Maintenant nous définissons l'ensemble sur lequel nous allons prouver l'existence d'un minimum non trivial pour la fonctionnelle d'énergie f_a ;

Soit l'ensemble Λ_a^* tel que,

$$\begin{aligned} \Lambda_a^* &= \left\{ u \in \Lambda_a / ch(u) \neq 0 \right\} \\ &= \bigcup_{q \neq 0} \Lambda_q. \end{aligned}$$

Remarque 3.3 : Nous pouvons facilement vérifier que $\forall u \in \Lambda_a^* : \|u\|_{L^\infty} > 1$.

Chapitre 4

Propriétés de la fonctionnelle

Dans ce chapitre nous déterminons les propriétés de notre fonctionnelle qui seront utiliser dans notre démarche.

Propriété 1 : La fonctionnelle f_a est continue:

$$\begin{aligned}
 f_a : E_a &\longrightarrow \mathbb{R} \\
 u &\longrightarrow f_a(u) \\
 f_a(u) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{a}{2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b}{2} |\nabla u|^p dx}_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx}_2 \\
 &= \underbrace{\frac{a}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2} \|\nabla u\|_{L^p}^p}_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx}_2
 \end{aligned}$$

La première partie de la fonctionnelle est continue car c'est une norme composée avec une fonction continue.

Alors il nous suffit de prouver la continuité de la deuxième partie

$V \in C^1(\Omega, \mathbb{R})$ et $V''(0)$ existe, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$\begin{aligned}
 V(\xi) &= V(0) + (V'(0) \xi) + (V''(0) \xi \xi) + o(\xi^2) \\
 \text{tel que } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{o(\xi^2)}{\xi^2} &= 0
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

de (4.1) et d'après les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃)

$$\text{on a } V(\xi) = (V''(0) \xi \xi) + o(\xi^2)$$

$$\text{alors } \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{V(\xi)}{\xi^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(V''(0) \xi \xi)}{\xi^2} + \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{o(\xi^2)}{\xi^2}}_{=0}$$

donc

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{V(\xi)}{\xi^2} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{(V''(0) \xi \xi)}{\xi^2} \leq M \tag{4.2}$$

donc il existe un voisinage de $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ et $M > 0$ tels que,

$$V(\xi) \leq M' |\xi|^2 \quad (4.3)$$

d'après la **remarque 3.1**, il existe une boule $B_u \subset \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_u$

$$|u(x)| < \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0 \text{ assez petit}) \quad (4.4)$$

donc de (4.3) et (4.4), pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_u$,

$$V(u(x)) \leq M |u(x)|^2. \quad (4.5)$$

On a

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u) \, dx = \int_{B_u} V(u) \, dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u) \, dx.$$

Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans E_a

on a $u_n \longrightarrow u$ dans L^∞

Alors

$$V(u_n(x)) \longrightarrow V(u(x)) \text{ uniformement dans } \mathbb{R}$$

donc

$$\int_{B_u} V(u_n(x)) \, dx \longrightarrow \int_{B_u} V(u(x)) \, dx \quad (4.6)$$

d'autre part De (4.5) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u_n(x)) \, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} |u_n(x)|^2 \, dx \quad (4.7)$$

et de la proposition 3.1 on a

$$u_n \longrightarrow u \text{ dans } L^2 \quad (4.8)$$

de (4.7) et (4.8), d'après le théorème de la convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u_n(x)) \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u(x)) \, dx. \quad (4.9)$$

de (4.6) et (4.9) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u_n(x)) \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} V(u(x)) \, dx. \quad (4.10)$$

Propriété 2 : L'opérateur f'_a est continu

$$f'_a : E_a \longrightarrow E'_a = L(E_a, \mathbb{R})$$

$$u \longrightarrow \underbrace{-a\Delta u - b\frac{p}{2}\Delta_p u}_{\text{}} + \underbrace{V'(u)}_{\text{}}$$

Soit $\{u_n\}$ une suite telle que $u_n \longrightarrow u$ dans E_a .

Montrons que $V'(u_n) \longrightarrow V'(u)$ dans E'_a

Rappelons que E_a s'injecte continûment dans L^∞

On a

$$\|V'(u_n) - V'(u)\|_{E'_a} = \sup_{\|h\|_{E_a} \leq 1} \langle V'(u_n) - V'(u), h \rangle_{E' \times E}$$

$$\begin{aligned} \langle V'(u_n) - V'(u), h \rangle_{E' \times E} &= \int_{\mathbb{R}^n} (V'(u_n) - V'(u))h \, dx \\ &= \underbrace{\int_{B_u} (V'(u_n) - V'(u))h \, dx}_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} (V'(u_n) - V'(u))h \, dx}_2 \end{aligned}$$

Pour la partie 1, puisque $\|h\|_{L^\infty} < \|h\|_{E_a} \leq 1$ on a

$$\int_{B_u} (V'(u_n) - V'(u))h \, dx \leq \int_{B_u} |V'(u_n) - V'(u)| \, dx$$

et avec le même raisonnement que dans (4.6),

$$\int_{B_u} |V'(u_n) - V'(u)| \, dx < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (4.11)$$

Pour la partie 2, d'après les hypothèses (H₁), (H₂), (H₃) On a

$$V'(\xi) = V''(0)\xi + o(\xi)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|V'(\xi)|}{|\xi|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|V''(0)\xi|}{|\xi|} + \underbrace{\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|o(\xi)|}{|\xi|}}_{=0}$$

et

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|V'(\xi)|}{|\xi|} = \lim_{\xi \rightarrow 0} \frac{|V''(0)\xi|}{|\xi|} \leq M$$

avec le même raisonnement que dans (4.5)

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} (V'(u_n))h \, dx \leq M \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} |u_n| |h| \, dx$$

et d'après l'inégalité Hölder

$$\leq M \|u_n\|_{L^2} \cdot \|h\|_{L^2} \leq \|u_n\|_{L^2} \cdot \varepsilon. \quad (4.12)$$

Avec le même raisonnement que dans (4.9) on a,

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V'(u_n(x)) h \, dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V'(u(x)) h \, dx. \quad (4.13)$$

de (4.11), (4.13) on a,

$$f'_a \text{ est continue sur } E_a.$$

On montre de la même manière la continuité de la partie $(-a\Delta u - b\frac{p}{2}\Delta_p u)$ mais c'est plus simple, voir annexe B.

Propriété 3: La coercivité

Lemme 4.1 la fonctionnelle f_a est coercive dans Λ_a ; pour toute suite $u_k \subset \Lambda_a$

$$\text{tel que } \|u_k\|_a \longrightarrow +\infty, \quad f_a(u_k) \longrightarrow +\infty$$

Preuve : $a > 0, n > 2$

Soit $u_k \subset \Lambda_a$ une suite telle que $\|u_k\|_a \longrightarrow +\infty$

$$\text{On a } \|u\|_a = a\|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^p} + \|u\|_{L^2}$$

on distingue deux cas

$$\begin{aligned} 1/ \quad & a\|\nabla u_k\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^p} \longrightarrow +\infty \\ & \text{alors} \end{aligned} \quad (4.14)$$

$$f_a(u_k) \longrightarrow +\infty \quad (4.15)$$

$$2/ \quad \left\{ \begin{array}{l} a\|\nabla u_k\|_{L^2} + \|\nabla u_k\|_{L^p} < c \\ \text{et} \end{array} \right. \quad (4.16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \|u_k\|_{L^2} \longrightarrow +\infty \end{array} \right. \quad (4.17)$$

Montrons que

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) \, dx \longrightarrow +\infty .$$

d'après les hypothèses H_1, H_2, H_3 on a,

$$\forall r \exists \omega_r \text{ tel que } |\xi| \leq r \Rightarrow V(\xi) \geq \omega_r |\xi|^2 \quad (4.18)$$

puisque pour $0 < |\xi| < r_0 < r$, r_0 assez petit (voisinage de 0) on a,

$$\frac{V(\xi)}{\xi^2} = \frac{(V''(0)\xi \quad \xi)}{\xi^2} + \frac{o(\xi)^2}{\xi^2}$$

$$\text{Comme, } \frac{(V''(0)\xi \quad \xi)}{\xi^2} \geq \omega > 0 \quad \text{et} \quad \left| \frac{o(\xi)^2}{\xi^2} \right| \leq \omega_{r_0}; \omega_{r_0} \rightarrow 0$$

alors

$$\frac{V(\xi)}{\xi^2} \geq \omega - \omega_{r_0} > 0$$

pour $r_0 \leq |\xi| \leq r$

$$\frac{V(\xi)}{\xi^2} \geq \frac{\inf V(\xi)}{r^2} = \omega_r .$$

Soit l'ensemble A_k tel que pour $k \in N$ on pose,

$$A_k = \{x \in \mathfrak{R}^n / |u_k(x)| \leq r\}.$$

$u_k \in W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$ et de (4.16) (voir [10]) on a

$$\|u_k\|_{L^{p^*}} < c \|\nabla u_k\|_{L^2}, \quad (4.19)$$

$$p^* = \frac{2n}{n-2}, n > 2$$

de (4.16) et (4.18)

$$\|u_k\|_{L^{p^*}} < c' \quad (4.20)$$

de (3.2) on a

$$\begin{aligned} |u_k(x)| &\leq \left| \int_{Q_k} u_k dx \right| + M \|\nabla u_k\|_{L^p(Q_k)}; \quad \text{mes}(Q_k) = 1 \\ &\leq \|u_k\|_{L^{p^*}(Q_k)} + M \|\nabla u_k\|_{L^p(Q_k)} \end{aligned}$$

et de (4.20) et (4.16) pour tout $x \in \mathfrak{R}^n$, on a

$$|u_k(x)| < c'' \quad (4.21)$$

de (4.21) on a

$$\text{mes}(\mathfrak{R}^n \setminus A_k) < c \quad (4.22)$$

de (4.21) et (4.22) on a

$$\int_{\mathfrak{R}^n \setminus A_k} |u_k|^2 dx \leq c_1 \quad (4.23)$$

de (4.18) on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathfrak{R}^n} V(u_k) dx &\geq \int_{A_k} V(u_k) dx \geq \omega_r \int_{A_k} |u_k|^2 dx \\ &\geq \omega_r (\|u_k\|_{L^2}^2 - \int_{\mathfrak{R}^n \setminus A_k} |u_k|^2 dx) \\ &\geq \omega_r (\|u_k\|_{L^2}^2 - \int_{\mathfrak{R}^n \setminus A_k} |u_k|^2 dx) \end{aligned}$$

de (4.23) on a

$$\int_{\mathfrak{R}^n} V(u_k) dx \geq \omega_r (\|u_k\|_{L^2}^2 - C_1)$$

et d'après (4.17)

$$\int_{\mathfrak{R}^n} V(u_k) dx \longrightarrow +\infty.$$

Dans le cas : $a = 0$ ou $n = 2$

de (H₅) on a :

$$\exists \bar{r} \text{ tel que } |\xi| \geq \bar{r} \Rightarrow V(\xi) \geq \nu/2 \quad (4.24)$$

de (4.18) on a $\forall r \exists \omega_r$ tel que

$$|\xi| \leq r \Rightarrow V(\xi) \geq \omega_r |\xi|^2 \quad (4.25)$$

Soit $u_k \in \Lambda_a$ une suite telle que $\|u_k\|_0 \longrightarrow +\infty$.

Par translation on pose

$$\|u_k\|_{L^\infty} = |u_k(0)| \quad (4.26)$$

avec le même raisonnement que dans le cas précédent ($a > 0$, $n > 2$) on a

$$\|\nabla u_k\|_{L^p} = M' \text{ et } \|u_k\|_{L^2} \longrightarrow +\infty$$

On a deux cas qui se présentent

$$(a) \quad \|u_k\|_{L^\infty} \longrightarrow +\infty \quad (4.27)$$

$$(b) \quad \|u_k\|_{L^\infty} \text{ est borné}$$

Dans le cas (a) nous pouvons choisir une suite $\{r_k\}$ telle que

$$\begin{aligned} r_k &> 0 \\ \bar{r} &\leq \|u_k\|_{L^\infty} - c' r_k^{(p-n)/p} \end{aligned} \quad (4.28)$$

$$r_k \longrightarrow +\infty \quad (4.29)$$

de (3.3) on a

$$\begin{aligned} |u_k(0) - u_k(y)| &\leq |u_k(0) - u_k(y)| \leq c |y|^{(p-n)/p} \|\nabla u_k\|_{L^p} \\ &\leq c' |y|^{(p-n)/p} \end{aligned}$$

et de (4.25)

$$|u_k(y)| \geq \|u_k\|_{L^\infty} - c' |y|^{(p-n)/p}$$

et pour $|y| < r_k$ on a

$$|u_k(y)| \geq \|u_k\|_{L^\infty} - c' r_k^{(p-n)/p} \geq \bar{r} \quad (4.30)$$

de (4.24) et (4.30)

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) dx \geq \int_{B(0, r_k)} V(u_k) dx \geq \frac{\nu}{2} \text{mes}(B(0, r_k))$$

et de (4.29)

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) dx \longrightarrow +\infty.$$

Dans le cas (b)

$$\|u_k\|_{L^\infty} \leq M''$$

et de (4.25) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) dx \geq \omega_{M''} \|u_k\|_{L^2} \longrightarrow +\infty.$$

d'où notre preuve est achevée.

Propriété 4 :

Lemme 4.2 Soit une suite $\{u_k\} \subset \Lambda_a$ convergeant faiblement, alors si sa limite appartient à $\partial\Lambda_a$, on a $f_a(u_k) \longrightarrow +\infty$.

Preuve : Soit $\{u_k\} \subset \Lambda_a$ une suite telle que $u_k \rightharpoonup u \in \partial\Lambda_a$

$$\exists \bar{x} \in \mathfrak{R}^n \text{ tq } u(\bar{x}) = \eta$$

Puisque $\{u_k\}$ est bornée dans E_a et par injection continue de E_a dans L^∞ (voir proposition 3.1),

$$\{u_k(\bar{x})\} \text{ borné dans } \mathfrak{R},$$

alors

$$\lim_k u_k(\bar{x}) = u(\bar{x}). \quad (4.31)$$

$\{u_k\}$ est bornée dans E_a en particulier $\{\nabla u_k\}$ est bornée dans L^p et de (3.3) on a

$$|u_k(x) - u_k(\bar{x})| \leq c |x - \bar{x}|^{(p-n)/p} \quad (4.32)$$

on a

$$|u_k(x) - \eta| \leq |u_k(x) - u_k(\bar{x})| + |u_k(\bar{x}) - \eta|$$

et de (4.31) et (4.32) on a

$$|u_k(x) - \eta| \leq c |x - \bar{x}|^{(p-n)/p} + \varepsilon_0 \quad (4.33)$$

soit $x \in B(\bar{x}, r)$, pour r assez petit, on a

$$|u_k(x) - \eta| \leq cr^{(p-n)/p} + \varepsilon_0 < \rho \quad (4.34)$$

de (4.34) et (H₄) on a

$$V(u_k(x)) \geq c |u_k(x) - \eta|^{-q} \text{ tel que } q = \frac{np}{p-n} \quad (4.35)$$

de (4.34) et (4.35) on a

$$V(u_k(x)) \geq \frac{c'}{|x - \bar{x}|^n + \varepsilon_0}$$

et en intégrant sur la boule $B(\bar{x}, r)$ on a

$$\int_{B_r(\bar{x})} V(u_k(x)) \longrightarrow +\infty,$$

quand: $r \longrightarrow 0, \varepsilon_0 \longrightarrow 0$

Propriété 5:

Corollaire 4.1 pour tout $b > 0$, il existe $d = d(b) > 0$ tel que

$$\forall u \in \Lambda_a, f_a(u) \leq b \Rightarrow \min_x |u(x) - \eta| \geq d$$

Preuve : Raisonnons par l'absurde;

Supposons qu'il existe $b > 0$, et $\{u_k\} \subset \Lambda_a$ telle que

$$f_a(u_k) \leq b \quad (4.36)$$

$$\text{et } \min_x |u_k(x) - \eta| < \frac{1}{k} \quad (4.37)$$

de (4.36), on a, $|u_k(x)|$ bornée et de la remarque 3.1, $u_k(x)$ est continue, donc il existe $x_k \in \mathfrak{R}^n$ tel que

$$|u_k(x_k) - \eta| = \min_x |u_k(x) - \eta| \quad (4.38)$$

de (4.37) et (4.38) on a

$$|u_k(x_k) - \eta| \longrightarrow 0 \quad (4.39)$$

on pose

$$\psi_k = u_k(\cdot + x_k)$$

$$\text{ainsi } f_a(\psi_k) = f_a(u_k) \leq b \quad (4.40)$$

f_a est coercive, $\{\psi_k\}$ bornée dans E_a (réflexif) donc, il existe une sous suite faiblement convergente notée encore $\{\psi_k\}$,

$$\psi_k \longrightarrow \psi \in E_a \text{ (faiblement),}$$

par injection compacte, voir remarque 3.1 on a,

$$u_k \xrightarrow{\text{fort}} u \text{ dans } C^{0,p-n/p}(B(0,r), \mathfrak{R}^{n+1})$$

alors

$$\lim_k \psi_k(0) = \psi(0) = \lim_k u_k(x_k). \quad (4.41)$$

de (4.39) et (4.41) on a

$$\psi(0) = \eta$$

donc

$$\psi \in \partial \Lambda_a \quad (4.42)$$

de (4.41), (4.42) et d'après le lemme 4.2,

$$f_a(\psi_k) \rightarrow +\infty,$$

Ceci est une contradiction avec (4.40).

Propriété 6: La fonctionnelle f_a est semi-continue inférieurement

Définition:

Soit f une fonction réelle, f est semi-continue inférieurement en x_0 si

$$\forall \varepsilon > 0, \exists \mu > 0 \text{ tel que } \|x - x_0\| < \mu \implies f(x) \geq f(x_0) - \varepsilon$$

$$\text{et on écrit : } \liminf_{x \rightarrow x_0} f(x) \geq f(x_0).$$

Lemme 4.3 La fonctionnelle f_a est faiblement semi-continue inférieurement.

Preuve:

On a deux cas :

$$1/ \liminf_k f_a(u_k) = +\infty \text{ c'est évident.}$$

$$2/ \liminf_k f_a(u_k) < c ,$$

Montrons que

$$\liminf_k f_a(u_k) > f_a(u) \\ u_k \xrightarrow{\text{faiblement}} u .$$

On a,

$$f_a(u) = \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{a}{2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b}{2} |\nabla u|^p dx}_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx}_2$$

La première partie est convexe et continue pour la topologie forte donc semi continue inférieurement pour la topologie faible voir [10].

Il nous reste à prouver que

$$\liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) dx > \int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx .$$

On a

$$u_k \xrightarrow{\text{faiblement}} u \text{ dans } E_a,$$

par injection compacte voir [10] on a

$$u_k \xrightarrow{\text{fort}} u \text{ dans } L^\infty(B(0,r), \mathbb{R}^{n+1})$$

donc

$$V(u_k(x)) \longrightarrow V(u(x)) \text{ uniformément sur } B(0,r)$$

alors

$$\lim_k \int_{B_R(0)} V(u_k) dx = \int_{B_R(0)} V(u) dx , V \geq 0 , \\ \liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) dx > \liminf_k \int_{B_R(0)} V(u_k) dx \geq \int_{B_R(0)} V(u) dx$$

et en faisant tendre $R \longrightarrow +\infty$, on aura

$$\liminf_k \int_{\mathbb{R}^n} V(u_k) dx > \int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx .$$

Propriété 7:

Proposition 4.1 *il existe $\Delta_a^* > 0$ tel que, pour tout $u \in \Lambda_a$,*

$$\|u\|_{L^\infty} \geq 1 \Rightarrow f_a(u) \geq \Delta_a^*$$

Preuve:

Par injection continue de la proposition 3.1 on a,

$$\|u\|_a \geq \|u\|_{L^\infty} \geq 1;$$

et par définition de la coercivité,

$$\|u\|_a \geq 1 \Rightarrow \exists \Delta_a^* > 0 \text{ tel que } f_a(u) \geq \Delta_a^* .$$

Chapitre 5

Minimisation sur l'ensemble Λ_a

Soit l'ensemble Λ_a ,

$$\Lambda_a = \{u \in E_a / u(x) \neq \eta \quad \forall x \in \mathbb{R}^n\}.$$

On pose

$$I = \inf_{\Lambda_a} f(u)$$

L'ensemble Λ_a est non vide, puisque E_a s'identifie à l'espace,

$$W^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}) \cap W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}).$$

Comme exemple d'élément Λ_a , on peut voir le paragraphe 6-1-1.

5-1 L'ensemble Λ_a est un ouvert dans E_a

Soit $u \in \Lambda_a$ et $B(u,r)$ une boule ouverte dans E_a .

Montrons que $B(u,r) \subset \Lambda_a$ pour r assez petit

soit $\Phi \in B(u,r)$,

$$\|\Phi - u\|_{E_a} < r \Rightarrow \|\Phi - u\|_{L^\infty} < r \quad (5.1)$$

on a

$$|\Phi(x) - \eta| \geq |u(x) - \eta| - |u(x) - \Phi(x)| \quad (5.2)$$

avec

$$|u(x) - \eta| \geq d > 0$$

de (5.1) et (5.2) et pour r assez petit on a

$$|\Phi(x) - \eta| > |u(x) - \eta| - r \geq d - r > 0$$

donc

$$|\Phi(x) - \eta| > 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

alors $\Phi \in \Lambda_a$.

Rappelons que le bord de Λ_a est noté,

$$\partial\Lambda_a = \{u \in E_a / \exists x \in \mathbb{R}^n / u(x) = \eta\}$$

5-2 L'infimum de la fonctionnelle est fini sur Λ_a

$$\begin{aligned} f_a(u) &= \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} \frac{a}{2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^n} \frac{b}{2} |\nabla u|^p dx}_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx}_2, \\ &= \underbrace{\frac{a}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2} \|\nabla u\|_{L^p}^p}_1 + \underbrace{\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx}_2 \end{aligned}$$

Montrons que $f_a(u) < \infty$.

Par définition de la norme $\|\cdot\|_{E_a}$ on a,

$$\frac{a}{2} \|\nabla u\|_{L^2}^2 + \frac{b}{2} \|\nabla u\|_{L^p}^p < \infty$$

Alors il nous suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx < \infty.$$

On a,

$$\int_{\mathbb{R}^n} V(u) dx = \int_{B_u} V(u) dx + \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u) dx.$$

Soit $B_u \subset \mathbb{R}^n$ tel que pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_u$

$$|u(x)| < \varepsilon,$$

de (4.5) on a

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u) dx < M \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} |u|^2 dx$$

et d'après la proposition 3.1, $u \in L^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$,
donc

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B_u} V(u) dx < +\infty.$$

D'autre part puisque u, V , sont continues,
alors

$$\int_{B_u} V(u) dx < +\infty.$$

5-3 Le minimum est atteint sur Λ_a

On a,

$$I = \inf_{\Lambda_a} f_a(u)$$

puisque $\forall u \in \Lambda_a, V(u) \geq 0$ voir hypothèse (H₂)

alors

$$f_a(u) = \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{a}{2} |\nabla u|^2 + \frac{b}{2} |\nabla u|^p + V(u) \right) dx \geq 0.$$

L'infimum est atteint sur l'ensemble Λ_a , il est facile de voir que $u \equiv 0$ est une solution triviale du problème. Mais naturellement nous sommes intéressés par les solutions non triviales, c'est pour cela qu'il nous faut une construction de telle sorte à avoir des solutions non triviales. Et c'est précisément ce qu'on va faire dans le chapitre suivant.

Chapitre 6

Minimisation sur l'ensemble Λ_a^*

On va minimiser la fonctionnelle d'énergie f_a sur l'ensemble Λ_a^* pour prouver l'existence de la solution non triviale.

Soit l'ensemble Λ_a^* ,

$$\Lambda_a^* = \{u \in \Lambda_a / ch(u) \neq 0\}.$$

On pose,

$$I = \inf_{\Lambda_a^*} f_a(u)$$

On a déjà vu dans le chapitre précédent que notre fonctionnelle est finie et bornée inférieurement, nous montrons que l'ensemble Λ_a^* est non vide pour que notre problème soit bien posé.

6-1 L'ensemble Λ_a^* est non vide

Soit $u(x) = (\frac{2}{1+|x|^m}, \frac{1}{1+|x|^m} x)$;

$$u_0(x) = \frac{2}{1+|x|^m} ; \quad \tilde{u}(x) = \frac{1}{1+|x|^m} x.$$

Nous pouvons vérifier par un calcul explicite (coordonnées polaires) que pour $m > 1$, $u \in E_a$.

On a, $(\frac{2}{1+|x|^m}, \frac{1}{1+|x|^m} x) \neq \eta; \quad \eta = (1, 0)$

Montrons que;

$$ch(u) \neq 0.$$

On a

$$\begin{aligned} K_u &= \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \frac{2}{1+|x|^m} > 1 \right\} \\ &= B(0, 1), \end{aligned}$$

D'après la proposition 3.2

$$deg(\tilde{u}, K_u, 0) = deg(\tilde{u}, B_1(0), 0).$$

Posons, $s(x) = \frac{1}{2} x$

s et $\tilde{u}$ ont les mêmes valeurs sur le bord de la boule $B(0, 1)$, d'après la propriété (iv) du degré topologique.

On a

$$deg(\tilde{u}, B_1(0), 0) = deg(s, B_1(0), 0) = \sum_{x \in S^{-1}(0)} \text{sgn } J_{s(x)} = 1$$

d'où nous avons,

$$\Lambda_a^* \neq \emptyset.$$

6-2 L'ensemble Λ_a^* est un ouvert dans E_a

On a déjà vu dans le sous chapitre 5-1 que l'ensemble Λ_a est ouvert dans E_a

Soit $u \in \Lambda_a^*$ et $B(u, r)$ une boule ouverte dans Λ_a^* .

Montrons que $B(u, r) \subset \Lambda_a^*$ pour r assez petit
par injection continue de E_a dans L^∞ (voir proposition 3.1) ;

soit $\phi \in B(u, r)$, on a

$$\|\phi - u\|_{E_a} < r \text{ alors } \|\phi - u\|_{L^\infty} < r$$

d'après le théorème 3.1

$$ch(\phi) = ch(u) \text{ pour } r \text{ assez petit.}$$

donc $\phi \in \Lambda_a^*$.

6-3 Le minimum est atteint sur Λ_a^*

Notre démarche se base essentiellement sur la proposition suivante.

6-3-1 Proposition 6.1 (splitting lemme)

Soit $\{u_k\} \subset \Lambda_a^*$ telle que

$$f_a(u_k) \leq M \quad (6.1)$$

alors il existe $l \in \mathbb{N}$

$$1 \leq l \leq M / \Delta_a^*, \quad (6.2)$$

(Δ_a^* est introduit dans la proposition 4.1)

et il existe $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l \in \Lambda_a^*$, $\{x_k^1\}, \dots, \{x_k^l\} \subset \mathbb{R}^n$ tel que les sous suites

$$u_k(\cdot + x_k^i) \rightarrow \bar{u}_i; \quad (6.3)$$

$$|x_k^i - x_k^j| \longrightarrow +\infty \text{ pour } i \neq j; \quad (6.4)$$

$$\sum_{i=1}^l f_a(\bar{u}_i) \leq \liminf_k f_a(u_k); \quad (6.5)$$

$$ch(u_k) = \sum_{i=1}^l ch(\bar{u}_i). \quad (6.6)$$

Preuve :

De la suite $\{u_k\}$ on construit des sous suites $\{u_k^1\}, \dots, \{u_k^l\}$ faiblement convergentes

dans Λ_a^* $u_k^l \rightarrow \bar{u}_l$, avec $u_k(x) = (u_{k,0}(x), \tilde{u}_k(x))$, $\bar{u}_l(x) = (\bar{u}_{l,0}(x), \tilde{\bar{u}}_l(x))$

telles que : $\limsup \left\| u_{k,0} - \sum_{i=1}^l \bar{u}_{i,0}(\cdot - x_k^i) \right\|_{\infty} \leq 1$; $\text{supp } u_k^i \cap \text{supp } u_k^j = \emptyset$, $i \neq j$.

D'où on aura (6.3), (6.4), (6.5).

(6.2) est donné par la proposition 4.1 et les inégalités (6.1), (6.5).

Pour (6.6) on utilise les propriétés du degré topologique.

Pour les détails de la preuve voir page 38.

Théorème 6.1 Soit $a \geq 0$, $b > 0$, $p > n \geq 2$. Si V satisfait les hypothèses (H_1) – (H_5) il existe une solution faible de (2.12) (i.e. solution statique de (2.10)), qui minimise la fonctionnelle (2.14) dans la classe des fonctions de charge topologique non nulle.

Le théorème nous donne l'existence de la solution non triviale.

Preuve: La preuve du théorème 6.1 se base essentiellement sur la proposition 6.1

On a déjà vu précédemment que

$$f_a(u) < \infty ; u \in \Lambda_a^*$$

on a,

$$I = \inf_{\Lambda_a^*} f_a(u)$$

de la remarque 3.3 et de la proposition 4.1

$$I \geq \Delta_a^* > 0$$

soit $\{u_n\} \subset \Lambda_a^*$, une suite minimisante,

$$I = \lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(u_n),$$

évidemment elle est d'énergie bornée.

On applique la proposition 6.1, alors ils existent $l \in \mathbb{N}$ et $\bar{u}_1, \dots, \bar{u}_l \in \Lambda_a^*$

telles que, les sous suites $u_k(\cdot + x_k^i)$, vérifient (6.5), (6.6).

puisque $ch(u_k) \neq 0$ et d'après (6.6) on en déduit qu'il existe $\bar{i} \in \{1, \dots, l\}$ tel que

$$ch(\bar{u}_{\bar{i}}) \neq 0$$

et en utilisant (6.5) on obtient

$$I \leq f_a(\bar{u}_{\bar{i}}) \leq \sum_{i=1}^l f_a(\bar{u}_i) \leq \lim_{n \rightarrow +\infty} f_a(u_n) = I;$$

On conclut que

$$f_a(\bar{u}_i) = I^*.$$

L'infimum de la fonctionnelle (2.14) est atteint sur l'ensemble Λ_a^* , alors il existe une solution de l'équation (2.12) [solution statique de (2.10)], ce que nous allons voir dans le sous chapitre suivant.

6-4 Résolution de l'équation statique

Le fait que Λ_a^* est un ouvert est très important c'est grâce à cette propriété topologique qu'on a la solution de l'équation statique (2.12).

Rappelons que $E_a = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})}^{\|\cdot\|_a}$

Soit $\bar{u} \in \Lambda_a^*$, telle que

$$f_a(\bar{u}) = \inf_{u \in \Lambda_a^*} f_a(u).$$

Soit $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$; on note e_j le j^{eme} vecteur de la base canonique $\mathbb{R}^{n+1}$

et puisque Λ_a^* est un ouvert on a

$$(\bar{u} + \varepsilon h e_j) \in \Lambda_a^* \text{ pour } \varepsilon \text{ assez petit}$$

Alors, on a

$$f_a(\bar{u} + \varepsilon h e_j) \geq f_a(\bar{u})$$

En dérivant $f_a(\bar{u} + \varepsilon h e_j)$ par rapport à ε on aura

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{d\varepsilon} f_a(\bar{u} + \varepsilon h e_j) \right|_{\varepsilon=0} \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} -a \nabla \bar{u}^j \nabla h - b \frac{p}{2} \left(|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}^j \nabla h \right) + \frac{\partial V}{\partial \xi_j}(\bar{u}) h \, dx, \\ &\quad 0 \leq j \leq n \end{aligned}$$

On applique la formule de Green,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} -a \nabla \bar{u}^j \nabla h \, dx &= \left\langle a \Delta \bar{u}^j \mid h \right\rangle_{D' \times D}; \\ \int_{\mathbb{R}^n} -b \frac{p}{2} \left(|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}^j \nabla h \right) dx &= \left\langle b \frac{p}{2} \operatorname{div} \left(|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}^j \right) \mid h \right\rangle_{D' \times D}. \end{aligned}$$

Alors on a, pour toute $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$

$$\left\langle a\Delta \bar{u}^j + b \frac{p}{2} \operatorname{div} \left(|\nabla \bar{u}|^{p-2} \nabla \bar{u}^j \right) + \frac{\partial V}{\partial \xi_j}(\bar{u}) \quad h \right\rangle_{D' \times D} = 0, \\ 0 \leq j \leq n$$

Donc

$$\left\langle -a\Delta \bar{u} - b \frac{p}{2} \Delta_p \bar{u} + V'(\bar{u}) \quad h \right\rangle_{D' \times D} = 0, \text{ pour toute } h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1}).$$

Et par densité, $E_a = \overline{C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})}^{\|\cdot\|_a}$ on a,

$$-a\Delta \bar{u} - b \frac{p}{2} \Delta_p \bar{u} + V'(\bar{u}) = 0 \text{ dans } E_a' \text{ (l'espace dual).}$$

Le minimum de f_a^* sur Λ_a^* est un point critique de f_a , on a une solution $\bar{u}$ faible pour l'équation (2.12) et avec un changement de variable approprié (2.13) on déduit une solution de l'équation (2.10) [la solution dynamique], voir sous chapitre 2-4.

Détails de la preuve de la proposition 6.1

Soit $\{u_n\} \subset \Lambda_a^*$ telle que $f_a(u_n) \leq M$;

$$u_n(x) = (u_{n,0}(x), u_n(x))$$

Rappelons que E_a est un espace de Banach réflexif et s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$.

Soit $x_n^1 \in \mathbb{R}^n$ le point maximum de $|u_n|$, (u_n continue et $\lim_{|x| \rightarrow +\infty} u_n(x) = 0$)

par la remarque 3.3 On a

$$|u_n| > 1 \text{ puisque } \{u_n\} \subset \Lambda_a^*$$

on pose $u_n^1 = u_n(\cdot + x_n^1)$

$$\text{on obtient } \|u_n^1\|_{L^\infty} = |u_n(x_n^1)| = |u_n(0)| > 1 \quad (6.7)$$

$$\text{on a } f_a(u_n^1) = f_a(u_n) \leq M \quad (6.8)$$

et f_a coercive (lemme 4.1)

alors la suite $\{u_n^1\}$ est bornée dans E_a

donc

$$u_n^1 \rightarrow \overline{u_1} \text{ (faiblement) dans } E_a \quad (6.9)$$

de (6.7) et avec le même raisonnement que dans (4.41) on a

$$\|\overline{u_1}\|_{L^\infty} \geq 1 \quad (6.10)$$

D'après (6.8) et le lemme 4.3 (SCI)

$$f_a(\overline{u_1}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n^1) < M \quad (6.11)$$

de (6.9) et (6.10) et du lemme 4.2, on déduit que

$$\overline{u_1} \notin \partial \Lambda_a \text{ c'est-à-dire, } \overline{u_1} \in \Lambda_a. \quad (6.12)$$

De (6.11) et (6.10) on a

$$\overline{u_1} \in \Lambda_a \text{ et } f_a(\overline{u_1}) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n) \quad (6.13)$$

On pose $\overline{u_1}(x) = (\overline{u_{1,0}}(x), \tilde{\overline{u_1}}(x)) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$

On a $\{u_n\} \subset \Lambda_a^*$ alors $ch(u_n) \neq 0$ donc $K_{u_n} \neq \emptyset$

C'est-à-dire $\exists x \in \mathfrak{R}^n, u_{n,0}(x) > 1$ et avec le même raisonnement que dans (6.7)- (6.10)

$$|\overline{u_{1,0}}(0)| \geq 1.$$

Soit $\gamma \in]0,1[$, arbitraire

on prend R_l tel que;

$$\forall x \in B_{R_l}(0), \quad |\overline{u_{1,0}}(x)| > \gamma. \quad (6.14)$$

Cette boule existe toujours puisque $\overline{u_{1,0}}$ est continue.

On pose, $B_n^1 = B_{R_l}(x_n^1)$

on distingue deux cas:

1/ pour n assez grand
 $\forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus B_n^1, |u_{n,0}| \leq 1$

ou

2/ en prenant une sous suite
 $\exists x \in \mathfrak{R}^n \setminus B_n^1, |u_{n,0}| > 1.$

Dans le premier cas la première partie de la proposition est prouvée pour $l=1$.

Voyons le deuxième cas,

soit x_n^2 le point qui maximise $|u_n|$ sur $\mathfrak{R}^n \setminus B_n^1$;

$$|u_n(x_n^2)| > 1 \quad (6.15)$$

on pose $u_n^2 = u_n(\cdot + x_n^2)$

on obtient

$$\|u_n^2\|_{L^\infty} = |u_n(x_n^2)| = |u_n^2(0)| > 1 \quad (6.16)$$

avec le même raisonnement qu'on a fait pour la suite $\{u_n^1\}$, nous avons

$$\|\overline{u_2}\|_{L^\infty} \geq 1 \quad (6.17)$$

et

$$u_n^2 \rightarrow \overline{u_2} \text{ (faiblement) dans } E_a \quad \overline{u_2} \in \Lambda_a \quad (6.18)$$

Démontrons que $|x_n^2 - x_n^1| \longrightarrow +\infty$

$$\text{Posons: } y_n = x_n^2 - x_n^1 \quad (6.19)$$

et par l'absurde on suppose que la suite $\{y_n\}$ est bornée dans $\mathfrak{R}^n$

donc on a la sous suite notée encore $\{y_n\}$; $y_n \longrightarrow \tilde{y}$

$$|y_n| = |x_n^2 - x_n^1| \geq R_1, (x_n^2 \in \mathfrak{R}^n \setminus B_n^1) \text{ donc } |\tilde{y}| \geq R_1$$

$$\text{de (6.14) on a } |\overline{u_1}(\tilde{y})| \leq \gamma < 1 \quad (6.20)$$

d'autre part de (6.15) et (6.19)

$$1 < |u_n(x_n^2)| = |u_n(y_n + x_n^1)| = |u_n^1(y_n)| \quad (6.21)$$

Remarque 6.1: L'espace E_a s'injecte continûment dans $L^\infty(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$ mais puisque on est sur un borné (la boule $B(\tilde{y}, 1)$) l'injection devient compacte,

$$\|u_n^1 - \overline{u_1}\|_{L^\infty(B, \mathfrak{R}^{n+1})} \xrightarrow{\text{fortement}} 0$$

de (6.20), (6.21) on a

$$\begin{aligned} 0 < 1 - |\overline{u_1}(\tilde{y})| &\leq |u_n^1(y_n)| - |\overline{u_1}(\tilde{y})| \leq |u_n^1(y_n) - \overline{u_1}(\tilde{y})| \\ &\leq |u_n^1(y_n) - \overline{u_1}(y_n)| + |\overline{u_1}(y_n) - \overline{u_1}(\tilde{y})| \\ &\leq \sup_{|y - \tilde{y}| \leq 1} |u_n^1(y) - \overline{u_1}(y)| + |\overline{u_1}(y_n) - \overline{u_1}(\tilde{y})| \end{aligned} \quad (6.22)$$

puisque $\overline{u_1}$ est continue on a,

$$|\overline{u_1}(y_n) - \overline{u_1}(\tilde{y})| \longrightarrow 0 .$$

De la remarque 6.1, par injection compacte de E_a dans $L^\infty(B(\tilde{y}, 1), \mathbb{R}^{n+1})$,

$$\sup_{|y-\tilde{y}| \leq 1} |u_n^1(y) - \bar{u}_1(y)| \longrightarrow 0.$$

par passage à la limite dans (6.22) on a une contradiction,

$$0 < 1 - |\bar{u}_1(\tilde{y})| < 0$$

donc

$$|x_n^2 - x_n^1| \longrightarrow +\infty \quad (6.23)$$

Montrons que :

$$f_a(\bar{u}_1) + f_a(\bar{u}_2) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n)$$

on pose : $f_a(u) \Big/_{\mathbb{A}} = \int_{\mathbb{A}} \frac{a}{2} |\nabla u|^2 dx + \int_{\mathbb{A}} \frac{b}{2} |\nabla u|^p dx + \int_{\mathbb{A}} V(u) dx$

pour η fixe, $\eta > 0$ il existe $\rho > 0$ tel que

$$f_a(\bar{u}_1) \Big/_{\mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0)} < \frac{\eta}{2} \quad \text{et} \quad f_a(\bar{u}_2) \Big/_{\mathbb{R}^n \setminus B_\rho(0)} < \frac{\eta}{2}$$

de (6.23), pour n assez grand on a

$$B_\rho(x_n^1) \cap B_\rho(x_n^2) = \emptyset$$

Alors on a

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n) &\geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left(f_a(u_n) \Big/_{B_\rho(x_n^1)} + f_a(u_n) \Big/_{B_\rho(x_n^2)} \right) \\ \liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n) &\geq \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n) \Big/_{B_\rho(x_n^1)} \right) + \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n) \Big/_{B_\rho(x_n^2)} \right) \\ &\geq \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n^1) \Big/_{B_\rho(0)} \right) + \left(\liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n^2) \Big/_{B_\rho(0)} \right) \\ &\geq \left(f_a(\bar{u}_1) \Big/_{B_\rho(0)} \right) + \left(f_a(\bar{u}_2) \Big/_{B_\rho(0)} \right) \\ &> f_a(\bar{u}_1) + f_a(\bar{u}_2) - \eta \end{aligned}$$

Puisque η est positive et arbitraire, alors on a l'inégalité (6.5) pour $l=2$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} f_a(u_n) \geq f_a(\overline{u_1}) + f_a(\overline{u_2}).$$

Comme pour $\overline{u_1}$ on refait la même chose, on prend R_2 tel que

$$\forall x \in B_{R_2}(0) \quad , \quad |\overline{u_{2,0}}(x)| > \gamma.$$

$$\overline{u_2}(x) = (\overline{u_{2,0}}(x), \widetilde{u_2}(x))$$

on pose, $B_n^2 = B_{R_1}(x_n^2)$ avec le même raisonnement que la fois précédente on aura deux cas,

$$1/ \quad \forall x \in \mathfrak{R}^n \setminus B_n^1 \cup B_n^2, \quad |u_{n,0}| \leq 1,$$

Ou

$$2/ \quad \exists x \in \mathfrak{R}^n \setminus B_n^1 \cup B_n^2, \quad |u_{n,0}| > 1.$$

Dans le premier cas la première partie de la proposition est prouvée pour $l=2$.

Dans le deuxième cas on prend x_n^3 le point max de $|u_n|$ sur $\mathfrak{R}^n \setminus B_n^1 \cup B_n^2$;
et avec les mêmes arguments que la fois précédente on démontre
la première partie de la proposition $\{(6.3), (6.4), (6.5)\}$ pour $l=3$, ainsi de suite

Démontrons (6.2)

$$1 \leq l \leq M / \Delta_a^*.$$

De (6.10) et (6.17) et par construction on a $\|\overline{u_i}\|_{L^\infty} \geq 1$,

en appliquant la proposition 4.1 on a

$$f_a(\overline{u_i}) \geq \Delta_a^* > 0 ;$$

Et de (6.1), (6.5) on a

$$l \cdot \Delta_a^* \leq \sum_{i=1}^l f_a(\overline{u_i}) \leq \liminf_n f_a(u_n) \leq M$$

Démontrons (6.6)

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^l ch(\overline{u_i}).$$

On pose: $u_n(x) = (u_{n,0}(x), \widetilde{u_n}(x)) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n$,

$$\overline{u_i}(x) = (\overline{u_{i,0}}(x), \widetilde{u_i}(x)) \in \mathfrak{R} \times \mathfrak{R}^n.$$

On a,

$$ch(u) = \begin{cases} \deg(\tilde{u}_n, K_{u_n}, 0) & \text{si } K_{u_n} \neq \emptyset, \\ 0 & \text{si } K_{u_n} = \emptyset. \end{cases}$$

Avec $K_{u_n} = \{x \in \mathbb{R}^n : u_{n,0}(x) > 1\}$.

Dans le cas $K_{u_n} = \emptyset$

C'est-à-dire $\forall x \in \mathbb{R}^n, u_{n,0}(x) \leq 1$

donc

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \bar{u}_{i,0}(x) \leq 1; K_{u_i}^- = \emptyset$$

alors

$$ch(\bar{u}_i) = 0$$

d'où on a, (6.6)

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^l ch(\bar{u}_i) = 0.$$

Dans le cas $K_{u_n} \neq \emptyset$

On a,

$$ch(u_n) = \deg(\tilde{u}_n, K_{u_n}, 0).$$

Par construction on a

$$K_{u_n} \subset \bigcup_{i=1}^l B_n^i$$

d'après la propriété d'excision (vi)

$$\deg(\tilde{u}_n, \bigcup_{i=1}^l B_n^i, 0) = \deg(\tilde{u}_n, K_{u_n}, 0) + \deg(\tilde{u}_n, \bigcup_{i=1}^l B_n^i \setminus \bar{K}_u, 0).$$

Avec le même raisonnement que dans (3.6) - (3.7) et d'après la propriété (iii) du degré topologique on a,

$$ch(u_n) = \deg(\tilde{u}_n, \bigcup_{i=1}^l B_n^i, 0) = \sum_{i=1}^l \deg(\tilde{u}_n, B_n^i, 0)$$

par translation, $u_n^i = u_n(\cdot + x_n^i)$ on a,

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^l \deg(\tilde{u}_n^i, B_{R_i}(0), 0) \quad (6.24)$$

puisque la suite $\{u_n^i(x)\}$ converge uniformément vers $\bar{u}_i(x)$ sur la boule $B_{R_i}(0)$ (voir remarque 6.1), alors d'après la propriété (v) du degré topologique on a,

$$\deg(\tilde{u}_n^i, B_{R_i}(0), 0) = \deg(\tilde{\tilde{u}}_i, B_{R_i}(0), 0) \quad (6.25)$$

de (6.24), (6.25) on a

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^l \deg(\tilde{\tilde{u}}_i, B_{R_i}(0), 0). \quad (6.26)$$

D'après la propriété (vi) on a,

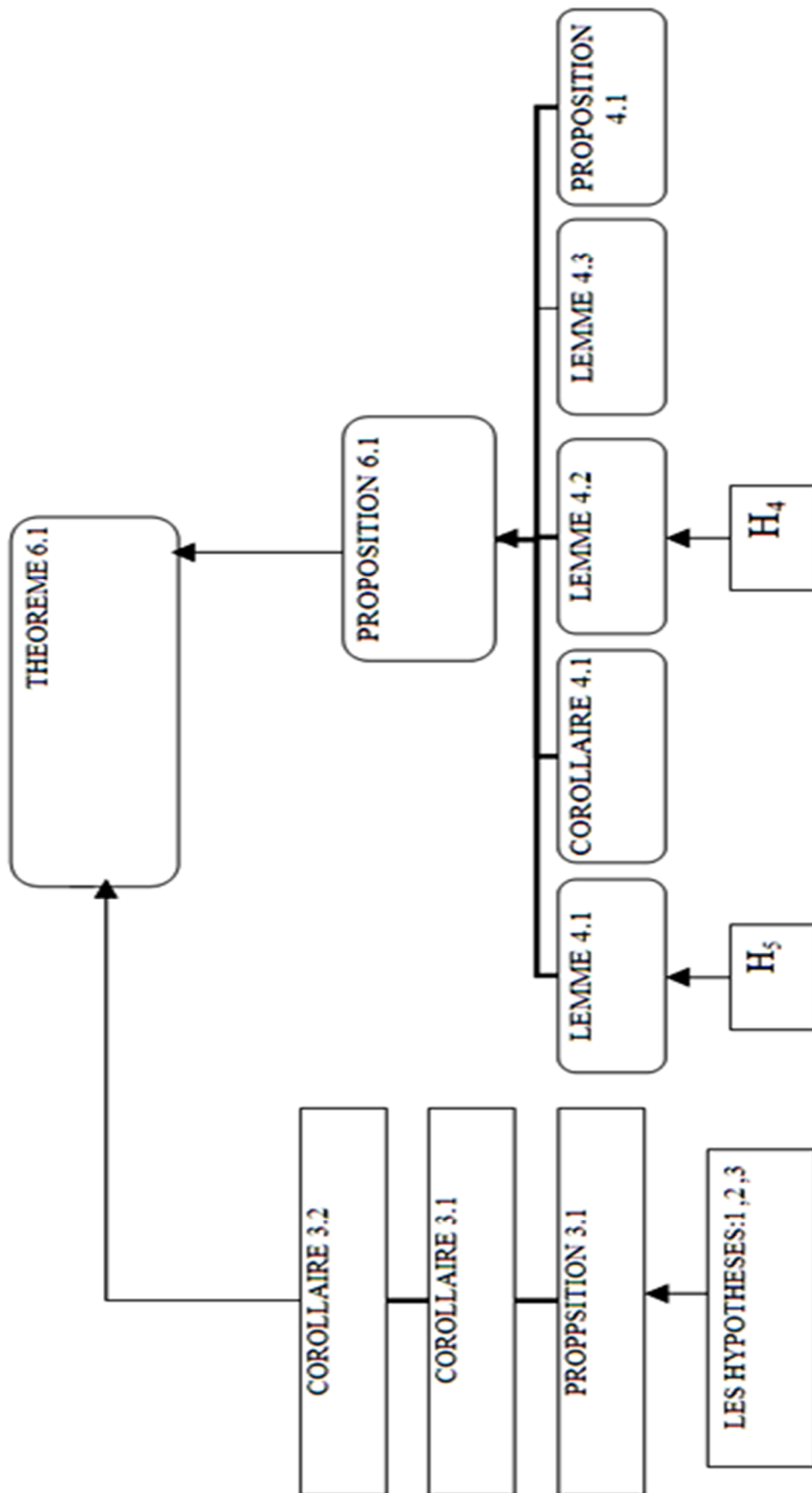
$$\deg(\tilde{\tilde{u}}_i, B_{R_i}(0), 0) = \deg(\tilde{\tilde{u}}_i, K_{\tilde{\tilde{u}}_i}, 0) + \deg(\tilde{u}_n, B_{R_i}(0) \setminus \overline{K_{\tilde{\tilde{u}}_i}}, 0)$$

et avec le même raisonnement que dans (3.6) - (3.7)

$$\deg(\tilde{\tilde{u}}_i, B_{R_i}(0), 0) = \deg(\tilde{\tilde{u}}_i, K_{\tilde{\tilde{u}}_i}, 0) = ch(\overline{u}_i) \quad (6.27)$$

de (6.26) et (6.27) on a,

$$ch(u_n) = \sum_{i=1}^l ch(\overline{u}_i).$$



I -RAPPELS

Rappelons quelques notions essentielles dans la démarche à suivre.

Lemme I.1 (Eckland) voir [9]. Soit (X, d) un espace métrique complet et f une fonction semi continue inférieurement de X dans $\mathbf{R}$. on suppose que f est bornée inférieurement et on pose $c := \inf_{x \in X} f(x)$. Alors pour tout $\varepsilon > 0$; il existe u_ε tel que

$$\begin{cases} c \leq f(u_\varepsilon) \leq c + \varepsilon, \\ \forall x \in X, x \neq u_\varepsilon, f(x) - f(u_\varepsilon) + \varepsilon d(x, u_\varepsilon) > 0. \end{cases}$$

Nous pouvons faire une légère étendue pour ce lemme,

Remarque : Soit Y un sous ensemble de X tel que

$$c := \inf_{x \in Y} f(x), Y \subset X.$$

Pour avoir les mêmes résultats que dans le lemme précédent sous les mêmes hypothèses il faut et il suffit que; pour toute $a \in \mathbf{R}$, le demi-espace de f , $f^a = \{x \in Y / f(x) \leq a\}$ soit fermé dans X .

Mesure de Haar

Soit G un groupe localement compact.

Théorème I.1 (Weil1) – Définitions :

- *Existence :* Il existe sur G une mesure de Radon (positive, non nulle) invariante par translation à gauche. Une telle mesure est appelée mesure de Haar invariante à gauche sur G .
- *Unicité :* Toutes les mesures de Haar invariantes à gauche sur G sont proportionnelles.
- *Convention :* Si G est compact, il y a un choix canonique de mesure de Haar sur G , à savoir la mesure de Haar invariante à gauche qui est une mesure de probabilité sur G (i.e. pour laquelle la mesure de G est égale à 1). En général, on choisit une mesure de Haar invariante à gauche sur G , qu'on appelle (abusivement) la mesure de Haar de G et qu'on note λ_G ou plus simplement λ . Autres notations : $d\lambda(x) = dx$.

Remarque λ invariante par translation à gauche. C'est à dire, pour toute partie borélienne B de G , et pour tout g dans G , on a :
 $\lambda(gB) = \lambda(B)$.

Groupe des applications orthogonales.

Définition I.1

$g \in L(\mathbf{R}^n)$ est dit orthogonal lorsqu'il conserve le produit scalaire :

$$\forall x, y \in \mathbf{R}^n, \langle g(x) | g(y) \rangle = \langle x | y \rangle.$$

On note $O(n)$, ensemble des applications orthogonales

Propriétés :

- 1 g est orthogonal si et seulement si g conserve la norme.
- 2 Si g est orthogonal, alors il est bijectif.

- 3 Si $g \in O(n)$, , alors sa bijection réciproque est aussi dans $O(n)$. De plus, si $f \in O(n)$, alors $g \circ f \in O(n)$.

Remarque I.1 $O(n)$ est un groupe. On parlera donc de “groupe orthogonal” alors $O(n)$ est le groupe des applications orthogonales. $O(n)$ est un groupe compact.

Proposition I.1 Les trois propositions suivantes sont équivalentes :

- (i) g est orthogonal ;
- (ii) il existe une base orthonormée dans laquelle la matrice de g est orthogonale ;
- (iii) dans toute base orthonormée, la matrice de g est orthogonale.

Définition I.2

Les matrices orthogonales sont les matrices $M \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant

$${}^t M M = I_n. \quad (\text{I.1})$$

L'ensemble des matrices orthogonales est noté $O_n(\mathbb{R})$.

Remarque I.2 Pour tout $g \in O(n)$, il existe une matrice orthogonale M telle que,

$$\begin{aligned} g(x) &= M.x, \\ |g(x)| &= |M.x| = |x| \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

avec

$$\det M = J_g = 1.$$

J étant le déterminant de la matrice Jacobienne.

Proposition I.2 pour tout $A \in \mathbf{M}_n(\mathbb{R})$, $M \in O_n(\mathbb{R})$

$$|A.M| = |M.A| = |A| \quad (\text{I.3})$$

de (I.1), ${}^t M$ est la matrice associée à g^{-1} .

Chapitre 7

Symétrie et propriétés de compacité

On fixe $a > 0$; pour simplifier on suppose $a=1$; dans les notations à venir on va effacer l'index a .

On considère l'espace de Banach E , complété de $C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$

avec la norme;

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^2} + \|\nabla u\|_{L^p}$$

L'espace E coïncide avec $W^{1,p}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1}) \cap W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$.

Sur l'espace E , on considère le groupe opérant suivant $O(n)$; pour tout $g \in O(n)$, $u \in E$, on pose

$$T_g u(x) = (u_0(gx), g^{-1} \tilde{u}(gx)) \quad (7.1)$$

$O(n)$: est le groupe des applications orthogonales.

On impose deux hypothèses supplémentaires sur le potentiel V ; (H_6) , (H_7) .

(H_6) il existe $\rho_1 > 0$ et $r > 0$ tels que

$$|V'(\xi) - V''(0)\xi| > |\xi|^r \text{ pour } |\xi| \leq \rho_1 ;$$

(H_7) pour tout $\xi = (\xi_0, \tilde{\xi})$ et pour tout g dans le groupe orthogonal $O(n)$,

$$V(\xi_0, g \tilde{\xi}) = V(\xi_0, \tilde{\xi}).$$

Lemme 7.1 *L'ensemble ouvert Λ et la fonctionnelle f sont invariants par l'action (7.1)*

Soit: $g \in O(n)$ et $u \in \Lambda$ on a

$$T_g u \in \Lambda, \quad f(T_g u) = f(u).$$

Preuve : On va d'abord montrer que $f(T_g u) = f(u)$

soit $g \in O(n)$, alors $|gx| = |x|$ et $J_g = 1$

$$f(u) = \int_{\mathfrak{R}^n} \left(\frac{a}{2} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\nabla u|^p + V(u) \right) dx$$

d'après l'hypothèse (H_7)

$$V(T_g u(x)) = V(u_0(gx), g^{-1} \tilde{u}(gx)) = V(u_0(gx), \tilde{u}(gx)).$$

Puisque $J_g = 1$, alors on a,

$$\int_{\mathfrak{R}^n} V(T_g u(x)) dx = \int_{\mathfrak{R}^n} V(u(y)) dy ; y = gx.$$

On a,

$$\begin{aligned} |\nabla T_g u|^2 &= |\nabla(u_0 \circ g)|^2 + |\nabla(g^{-1} \circ \tilde{u} \circ g)|^2 \\ &= |{}^t \nabla u_0 \cdot M|^2 + |{}^t M \cdot \nabla \tilde{u} \cdot M|^2 \end{aligned}$$

d'après (I.2) et (I.3)

$$= |\nabla u_0|^2 + |\nabla \tilde{u}|^2$$

D'où on a

$$\int_{\mathfrak{R}^n} |\nabla T_g u(x)|^2 dx = \int_{\mathfrak{R}^n} |\nabla u(y)|^2 dy ;$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla T_g u(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u(y)|^p dy .$$

Alors

$$f(T_g u) = f(u).$$

Pour $T_g u \in \Lambda$ c'est simple, puisque $\|u\|_E = \|T_g u\|_E$ et $T_g u \neq \eta$.

Maintenant, notons F le sous-espace des points fixes,

$$F = \{u \in E \mid T_g u = u, \forall g \in o(n)\}$$

Montrons que

$$\Lambda_F = \Lambda \cap F,$$

est une contrainte naturelle pour trouver les points critiques de f .

C'est à dire ;

pour tout $u \in \Lambda_F$ tq $\forall v \in F; \langle f'(u), v \rangle = 0$ alors $f'(u) = 0$ (voir lemme 7,2).

Ceci est usuel dans un espace hilbertien mais notre espace est de Banach seulement.

Pour tout $u \in E$, on pose :

$$Pu = \int_{o(n)} T_g u dg \quad (7.2)$$

dg est la mesure de Haar sur le groupe $O(n)$,

on a

$$Pu = \left(\int_{o(n)} u_0(gx) dg, \int_{o(n)} g^{-1} \tilde{u}(gx) dg \right).$$

On vérifie facilement que pour tout $g \in o(n)$, $T_g(Pu) = Pu$, donc $Pu \in F$.

On a,

$$P(Pu) = \int_{o(n)} T_g(Pu) dg = \int_{o(n)} Pu dg = Pu \left(\int_{o(n)} dg \right) = Pu,$$

donc P est une projection sur F , la fonction P est continue sur E et prend ses valeurs dans F .

$$P : E \longrightarrow F$$

F est un sous espace fermé de E .

Lemme 7.2 pour tout $u \in \Lambda_F$ et $v \in E$, nous avons

$$\langle f'(u), v \rangle = \langle f'(u), Pv \rangle,$$

P étant la projection de E dans F .

Preuve

La fonctionnelle f est invariante, en utilisant les égalités (I.2) - (I.3) et l'hypothèse (H₇), on montre que la fonction $f' : E \longrightarrow E'$ est équivariante c'est-à-dire:

$$\langle f'(u), T_g v \rangle = \langle f'(T_{g^{-1}} u), v \rangle, \quad (7.3)$$

avec $f'(u) = -a\Delta u - b\frac{p}{2}\Delta_p u + V'(u)$; (voir sous chapitre 6-4)

Rappelons que l'intégrale commute avec les formes linéaires continues, d'où on a

$$\langle f'(u), P v \rangle = \left\langle f'(u), \int_{o(n)} T_g v \, dg \right\rangle = \int_{o(n)} \langle f'(u), T_g v \rangle \, dg,$$

de (7.3) on a,

$$= \int_{o(n)} \langle f'(T_{g^{-1}} u), v \rangle \, dg$$

puisque $u \in F$,

$$\begin{aligned} &= \int_{o(n)} \langle f'(u), v \rangle \, dg \\ &= \langle f'(u), v \rangle \int_{o(n)} dg = \langle f'(u), v \rangle, \text{ sachant que } \int_{o(n)} dg = 1. \end{aligned}$$

De ce lemme on déduit que tout minimum local de f restreinte à Λ_F est aussi un point critique de f .

Proposition 7.1 *L'espace F , muni de la norme $\|\cdot\|_E$ s'injecte compactement*

dans $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$ pour tout $s \in \left]2, 2^\right[$, tel que*

$$2^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } n = 2, \\ 2n/(n-2) & \text{si } n > 2. \end{cases} \quad (7.4)$$

Cette proposition est une conséquence du théorème suivant;

Théorème 7.1 *Si W est un sous ensemble borné de $W^{1,2}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$, alors*

$$W_R = \{u \in W \mid |u| \text{ fonction radiale}\}$$

est relativement compacte dans $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$, pour tout $s \in \left]2, 2^\right[$.*

Preuve de la proposition 7.1:

Nous allons prouver que tout ensemble borné dans F est relativement compact dans $L^s(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$.

Pour cette preuve on utilise le théorème 7.1.

Soit $u \in F$, $u = (u_0, \tilde{u})$, la fonction u_0 est $O(n)$ - invariante, le champ $\tilde{u}$ est $O(n)$ - équivariant

$$\begin{cases} u_0(gx) = u_0(x) \\ \tilde{u}(gx) = g\tilde{u}(x) \end{cases} \quad (7.5)$$

on a

$$|u(gx)|^2 = |u_0(gx)|^2 + |\tilde{u}(gx)|^2$$

et de (7.5)

$$\begin{aligned} |u(gx)|^2 &= |u_0(x)|^2 + |g\tilde{u}(x)|^2 = |u_0(x)|^2 + |\tilde{u}(x)|^2 \\ &= |u(x)|^2. \end{aligned}$$

D'où on conclut que $|u(x)|^2$ dépend seulement de $|x|$; donc $|u|$ est une fonction radiale.

8-2-1 Proposition 7.2 La fonctionnelle f/Λ_F vérifie les conditions de Palais-Smale (voir [9]) :

pour toute suite $\{u_k\} \subset \Lambda_F$ telle que

a) $f(u_k)$ est bornée

b) $f'(u_k)_{/\Lambda_F}$ converge vers 0 dans F' ,

alors il existe une sous suite convergente.

Rappelons que la condition b) veut dire pour tout $v \in F$

$$\langle f'(u_k), v \rangle \leq \varepsilon_k \|v\|_E,$$

avec $\varepsilon_k \longrightarrow 0$.

Preuve:

Etape 1 : On construit un opérateur A inversible et d'inverse continu

$$A : E \longrightarrow E'$$

$$u \longrightarrow A(u)$$

$$A u = f'(u) - U'(u) \text{ tel que}$$

$$U(\xi) = V(\xi) - \frac{1}{2} V''(0) \xi \cdot \xi$$

Etape 2 : On prend une suite $\{u_k\}$ dans Λ_F et on montre que la suite $\{A(u_k)\}$ converge vers χ dans E' d'où nous avons $u_k \longrightarrow A^{-1}\chi = u$ dans E

Etape 3 : Nous montrons que $u \in \Lambda_F$ puisque F est fermé, $u \in F$ et par le lemme 4.2, $u \in \Lambda$. Pour les détails de la preuve voir page (52).

Pour la preuve de notre proposition 7.2 on a besoin des lemmes suivants,

Lemme 7.3 L'opérateur

$$A : E \longrightarrow E',$$

défini par

$$\langle A u, v \rangle = \langle -\Delta u - \Delta_p u + V''(0)u, v \rangle$$

$$= \int_{\mathbb{R}^n} \left((\nabla u \mid \nabla v) + |\nabla u|^{p-2} (\nabla u \mid \nabla v) + V''(0) u.v \right) dx$$

est inversible et d'inverse continu.

Voir preuve dans annexe B.

Lemme 7.4 Pour tout $u \in F$, $v \in E$.

$$\langle Au, v \rangle = \langle Au, Pv \rangle \quad (7.6)$$

P étant la projection de E sur F .

Preuve: Notons d'abord que si $u \in F$ alors pour tout $g \in O(n)$

$$\langle Au, T_g v \rangle = \langle Au, v \rangle \quad .$$

on a

$$\langle Au, Pv \rangle = \left\langle Au, \int_{O(n)} T_g v \, dg \right\rangle$$

puisque l'intégrale commute avec les formes linéaires continues, alors on a

$$\begin{aligned} \left\langle Au, \int_{O(n)} T_g v \, dg \right\rangle &= \int_{O(n)} \langle Au, T_g v \rangle \, dg \\ &= \int_{O(n)} \langle Au, v \rangle \, dg = \langle Au, v \rangle. \end{aligned}$$

Détails de la preuve de la proposition 7.2

Soit $\{u_k\}$ une suite dans Λ_F telle que

$$f(u_k) \text{ est bornée} \quad (7.7)$$

$$f'(u_k) = -\Delta u_k - \Delta_p u_k + V'(u_k) \longrightarrow 0 \text{ dans } F' \quad (7.8)$$

de (7.7) et puisque f est coercive la suite $\{u_k\}$ est bornée dans E .

Montrons que la suite est fortement convergente vers u dans E .

On a

$$Au_k = -\Delta u_k - \Delta_p u_k + V''(0)u_k$$

A , étant l'opérateur défini dans le lemme 7.3

$V''(0)$ est symétrique

$$(V''(0)\xi, \xi)' = 2V''(0)\xi$$

Introduisons

$$U(\xi) = V(\xi) - \frac{1}{2}V''(0)\xi, \xi$$

et on écrit

$$A u_k = f'(u_k) - U'(u_k) \quad (7.9)$$

Montrons que $U'(u_k)$ est bornée.

De (7.7) et du corollaire 4.1 (page 29), il existe $d > 0$ tel que, pour tout $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}^n$

$$|u_k(x) - \eta_0| \geq d \quad (7.10).$$

On a

$$U'(\xi) = V'(\xi) - V''(0)\xi,$$

$$\text{avec } V'(\xi) = V''(0)\xi + \alpha(\xi)\xi \quad \text{tel que } \alpha(\xi) \xrightarrow{\xi \rightarrow 0} 0; \quad (7.11)$$

Soit la boule $B_{u_k} \subset \mathbb{R}^n$ tel que, pour tout $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_{u_k}$

$$|u_k(x)| < \varepsilon, \quad (\varepsilon > 0 \text{ assez petit})$$

Sur la boule B_{u_k}

Grâce à (7.10), $U'(u_k)$ est bien définie par ailleurs $\{u_k\}$ étant continue et bornée dans L^∞ , elle s'injection de manière compacte dans $L^\infty(B_{u_k})$ alors $U'(u_k)$ (sous-suite) qui converge uniformément sur B_{u_k} , il existe M tel que

$$|U'(u_k)| < M$$

Sur l'ensemble $\mathbb{R}^n \setminus B_{u_k}$

en utilisant (7.11) on a,

$$U'(u_k) = \alpha(u_k)u_k$$

et puisque $\{u_k\}$ est bornée dans L^∞ il existe M tel que,

$$|U'(u_k)| < M. \quad (7.12)$$

On pose

$$A_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |u_k| \geq \rho_1\},$$

on prend ρ_1 introduit dans (H₆), page 48

puisque $\{u_k\}$ est bornée dans L^2 , on a la mesure de A_k est uniformément bornée

et puisque $r > 1$ (voir H₆), on peut trouver s' , tel que

$$(2^*)' < s' < 2 \leq rs',$$

$$(2^*)' = \begin{cases} 1 & \text{si } 2^* = \infty, \\ 2^*/(2^* - 1) & \text{si } 2^* < \infty. \end{cases}$$

de (H₆) nous avons, $\forall x \in \mathbb{R}^n \setminus A_k$,

$$|U'(u_k(x))| \leq c_0 |u_k(x)|^r.$$

et en utilisant (7.12) on a

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |U'(u_k)|^{s'} dx &= \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_k} |U'(u_k)|^{s'} dx + \int_{A_k} |U'(u_k)|^{s'} dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_k} c_0^{s'} |u_k|^{rs'} dx + M^{s'} \text{mes}(A_k) \\ &\leq M_1 \|u_k\|_{L^{rs'}}^{rs'} + M_2 \end{aligned} \quad (7.13)$$

puisque $\{u_k\}$ est bornée dans E , alors d'après le corollaire 3.2 ($rs' \geq 2$) la suite $\{u_k\}$ est bornée dans $L^{rs'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$.

On déduit que $U'(u_k)$ est bornée dans $L^{s'}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$, et puisque $(2^*)' < s' < 2$

alors, $s = \frac{s'}{s'-1}$ vérifie, $2 < s < 2^*$.

De la proposition 7.1, F s'injecte compactement dans L^s . Puisque $U'(u_k)$ est bornée dans $L^{s'}$ et grâce à un théorème de Schauder voir [13], alors $\{U'(u_k)\}$ (sous suite) converge fortement dans F' .

alors de (7.8) et (7.9) on a

$$A u_k \longrightarrow \chi \text{ dans } F' \quad (7.14)$$

on définit $p\chi \in E'$ telle que, pour tout $\omega \in E$,

$$\langle p\chi, \omega \rangle = \langle \chi, P\omega \rangle. \quad (7.15)$$

P étant défini dans (7.2)

Montrons que

$$A u_k \longrightarrow p\chi \text{ dans } E'$$

de (7.6) et (7.15), pour tout $\omega \in E$ on a

$$\begin{aligned} \langle A u_k - p\chi, \omega \rangle &= \langle A u_k - \chi, P\omega \rangle, \text{ car d'après le lemme 7.4 on a} \\ \langle A u_k, \omega \rangle &= \langle A u_k, P\omega \rangle \end{aligned}$$

et de (7.9), (7.14)

$$\langle A u_k - \chi, P\omega \rangle = \langle f'(u_k) - U'(u_k) - \chi, P\omega \rangle \rightarrow 0,$$

donc

$$A u_k \longrightarrow p\chi \in E'$$

du lemme 7.3, on déduit que,

$$u_k = A^{-1} A u_k \longrightarrow A^{-1} p\chi = u \in E;$$

On a

$u \in F$, puisque F est fermé et avec (7.7) et le lemme 4.2 on a, $u \in \Lambda$, donc, $u \in \Lambda_F$.

Chapitre 8

Minimisation sur l'ensemble Λ_F^n

Dans le chapitre 6 nous avons prouvé l'existence d'une solution non triviale, c'est à dire une solution à charge non nulle. Dans ce chapitre nous allons prouver qu'il existe un nombre infini de solutions qui atteignent le minimum de l'énergie.

Plus précisément, pour tout entier naturel N , il existe une solution de charge N .

Soit l'ensemble Λ_F^N ,

$$\Lambda_F^N = \left\{ u \in \Lambda_F / \text{ch}(u) = N \right\}.$$

On considère le problème suivant:

$$c_N = \inf_{\Lambda_F^N} f.$$

On a vu dans les chapitres précédents que notre fonctionnelle est finie et bornée inférieurement, nous montrons que l'ensemble Λ_F^N est non vide.

8-1 L'ensemble Λ_F^N est non vide

On prend un champ u dans F tel que.

$$u(x) = (A(|x|), B(|x|)x) \quad (8.1)$$

A et B étant deux champs scalaires tels que $u \in \Lambda$ (voir ci dessous)

Remarque 8.1 : Il est facile de vérifier que le champ (8.1) est un point fixe pour l'action (7.1) Introduisons,

$$A(|x|) = \frac{a}{1 + (|x|/2\pi)^m} \cos |x| \quad (8.2)$$

$$B(|x|) = \frac{1}{1 + (|x|/2\pi)^m} \sin |x| \quad (8.3)$$

Montrons que $u \in \Lambda_F$.

Lemme 8.1 *Il existe $m \geq 1$ choisi tel que pour tout $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, le champ défini par (8.1)-(8.3) appartient à Λ (de la remarque précédente le champ appartient à Λ_F)*

Preuve

Pour m assez grand et avec un calcul explicite en passant aux coordonnées polaires il est facile de prouver que le champ u défini par (8.1)-(8.3) est de norme finie,

$$\|u\|_E = \|u\|_{L^2} + \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p} < +\infty$$

donc $u \in E$.

Montrons que pour toute $x \in \mathfrak{R}^n$,

$$u(x) \neq \eta ; \quad \eta = (1, 0)$$

par l'absurde, supposons qu'il existe $\bar{x} \in \mathfrak{R}^n$ tel que

$$u(\bar{x}) = (1, 0)$$

par définition de u , on a

$$\frac{a}{1 + (|\bar{x}|/2\pi)^m} \cos |\bar{x}| = 1 \quad (8.4)$$

$$\frac{1}{1 + (|\bar{x}|/2\pi)^m} \sin |\bar{x}| = 0 \quad (8.5)$$

de (8.5) on a $|\bar{x}| = k\pi$, $k \in \mathbb{N}$ et de (8.4) on trouve que

$$\pm \frac{a}{1 + (k/2)^m} = 1.$$

Ceci est contradictoire avec le fait que $a \in \mathfrak{R} \setminus Q$, alors $\Lambda_F \neq \emptyset$.

Proposition 8.1 Soit $N = 2L + 1$ un nombre entier impair, alors tout champ u du type (8.1)- (8.3) avec le même m donné dans le lemme 8.1 et $a \in \mathfrak{R} \setminus Q$ tel que,

$$1 + L^m < a < 1 + (L + 1)^m \quad (8.6)$$

possède une charge égale à N .

Preuve: Montrons que

$$\deg(\tilde{u}, K_u, 0) = 2L + 1.$$

$$\text{On a, } \tilde{u}(x) = \frac{\sin |x|}{1 + (|x|/2\pi)^m} x,$$

$$\text{et } K_u = \left\{ x \in \mathfrak{R}^n / \frac{a \cos |x|}{1 + (|x|/2\pi)^m} > 1 \right\}.$$

On fixe $\varepsilon \in \left] 0, \frac{\pi}{2} \right[$; soit l'ensemble $K^0 = \{ |x| < \varepsilon \}$,

et pour tout, $j=1, \dots, L$, on pose $K^j = \{ 2j\pi - \varepsilon < |x| < 2j\pi + \varepsilon \}$,

les sous ensembles $\{K^j\}_{0 \leq j \leq L}$ sont disjoints.

Montrons que:

$$K^0 \cup K^1 \dots \cup K^L \subset K_u.$$

Soit $x \in K^j$ alors $2j\pi - \varepsilon < |x| < 2j\pi + \varepsilon$,

développons $\cos |x|$ sur la boule $B(0, \varepsilon)$, pour ε assez petit

$$\cos t = 1 - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{9} R(t),$$

tel que, $R(t) = \sin \theta t$ (formule de Taylor)

$$0 < \theta < 1$$

D'où on a

$$\frac{a \cos|x|}{1+(|x|/2\pi)^m} > \frac{a(1-\frac{t^2}{2})}{1+(j+t/2\pi)^m}.$$

Montrons que :

$$\frac{a(1-\frac{t^2}{2})}{1+(j+t/2\pi)^m} > 1.$$

On introduit la fonction suivante,

$$s(t) = \frac{(1+j^m)(1-\frac{t^2}{2})}{1+(j+t/2\pi)^m}, \quad (8.7)$$

$$0 \leq J \leq L.$$

Dans un certain voisinage $B(0,r)$ la fonction s est continue et strictement décroissante, donc localement bijectif.

s est continue en 0, $s(0)=1$

$$\forall \varepsilon' > 0, \exists r \text{ tel que } |t| < r \Rightarrow 1-s(t) < \varepsilon'$$

de (8.6) on a, $\frac{1+L^m}{a} < 1$

on prend, $\varepsilon' = 1 - \frac{1+L^m}{a} > 0,$

d'où on a,

$$\frac{a.s(t)}{1+L^m} > 1, \text{ pour } |t| < r. \quad (8.8)$$

de (8.8) et (8.7) on a

$$\frac{a(1-\frac{t^2}{2})}{1+(j+t/\pi)^m} > 1,$$

Donc $K^0 \cup K^1 \dots \cup K^L \subset K_u.$

En utilisant (8.6); on prouve que, $\{x \in K_u / \tilde{u}(x) = 0\} \subset K^0 \cup K^1 \dots \cup K^L.$

Alors d'après la propriété d'excision (vi) et la propriété d'additivité

$$\deg(\tilde{u}, K_u, 0) = \deg(\tilde{u}, \bigcup_{j=0}^L K^j, 0) + \underbrace{\deg(\tilde{u}, K_u \setminus \bigcup_{j=0}^L \bar{K}^j, 0)}_{=0}.$$

On a, $x \in K_u \setminus \bigcup_{j=0}^L K^j \Rightarrow \tilde{u}(x) \neq 0$; d'après la propriété (ii) du degré topologique la

deuxième partie à droite est nulle.

Alors

$$\deg(\tilde{u}, K_u, \rho) = \deg(\tilde{u}, \bigcup_{j=0}^L K^j, \rho) = \sum_{j=0}^L \deg(\tilde{u}, K^j, \rho).$$

Montrons que

$$\deg(\tilde{u}, K^0, \rho) = 1, \quad (8.9)$$

et

$$\deg(\tilde{u}, K^j, \rho) = 2. \quad \text{Pour } j=1, \dots, L \quad (8.10)$$

Tout d'abord on va montrer le résultat (8.9),

On introduit la fonction suivante,

$$S_0(x) = \frac{\sin \varepsilon}{1 + (\varepsilon / 2\pi)^m} x.$$

Pour tout $x \in \partial K^0$ ($|x| = \varepsilon$) nous avons

$$\tilde{u}(x) = S_0(x) \neq 0 \text{ sur } \partial K^0,$$

puisque le degré topologique dépend uniquement des valeurs sur le bord (propriété (iv)),

$$\deg(S_0, K^0, 0) = \sum_{x \in S_0(0)^{-1}} \text{sgn } J_{S_0(x)} = 1; J_{S_0(0)} > 0.$$

Donc

$$\deg(\tilde{u}, K^0, 0) = \deg(S_0, K^0, 0) = 1.$$

Montrons (8.10)

Soit $j \in \{1, \dots, L\}$ et posons

$$B_+^j = \{|x| < j\pi + \varepsilon\}, \quad B_-^j = \{|x| < j\pi - \varepsilon\}.$$

On a

$$\overline{K^j} = \overline{B_+^j \setminus B_-^j};$$

par la propriété d'addition du degré topologique

$$\deg(\tilde{u}, K^j, 0) = \deg(\tilde{u}, B_+^j, 0) - \deg(\tilde{u}, B_-^j, 0). \quad (8.11)$$

Introduisons la fonction suivante

$$v_j^+(x) = \frac{\sin \varepsilon}{1 + (|j\pi + \varepsilon| / 2\pi)^m} x,$$

pour tout $x \in \partial B_+^j$ nous avons

$$\tilde{u}(x) = v_j^+(x) \neq 0.$$

Alors, $\deg(\tilde{u}, B_+^j, 0) = \deg(v_j^+, B_+^j, 0) = 1.$

Et avec le même raisonnement

$$\deg(\tilde{u}, B_-^j, 0) = \deg(v_j^-, B_-^j, 0) = -1,$$

$$v_j^-(x) = -\frac{\sin \varepsilon}{1 + (|j\pi - \varepsilon| / 2\pi)^m} x.$$

De (8.11) nous avons

$$\deg(\tilde{u}, K^j, 0) = 2.$$

Remarque: Dans le cas N pair nous raisonnons de la même façon que le cas précédent N impair, avec $A(x) = \frac{a}{1 + (|x|/2\pi)^m} \sin |x|$,

$$\text{et } B(x) = -\frac{1}{1 + (|x|/2\pi)^m} \cos |x|.$$

8-2 L'ensemble Λ_F^n est une composante connexe

Rappelons que, $\Lambda = \{u \in E / u(x) \neq \eta \ \forall x \in \mathbb{R}^n\}$

pour tout $u \in \Lambda$, on pose $u \circ P(x) = u(-x)$

on a, $ch(u \circ P) = -ch(u)$ et $f(u \circ P) = f(u)$.

Donc nous pouvons restreindre notre étude seulement aux composantes à charge positive.

Pour tout entier N , Λ^N est une composante connexe de Λ (voir sous chapitre 3-3)

$$\Lambda^N = \{u \in \Lambda / ch(u) = N\}$$

$$\Lambda_F^N = F \cap \Lambda^N.$$

Avec le même raisonnement que dans le sous chapitre 3-3 il est facile de montrer que

Λ_F^N est une composante connexe de Λ_F .

8-3 Le minimum est atteint sur la composante connexe Λ_F^N

Théorème 8.1 Soit $p > n \geq 2$ et $a > 0$. V satisfait les hypothèses (H_1) -(H_5) et supposons que

(H_6) il existe $\rho_1 > 0$ et $r > 1$ tel que

$$|V'(\xi) - V''(0)\xi| > |\xi|^r$$

lorsque $|\xi| \leq \rho_1$;

(H_7) pour tout $\xi = (\xi_0, \tilde{\xi})$ et pour tout g dans le groupe orthogonal $O(n)$,

$$V(\xi_0, g\tilde{\xi}) = V(\xi_0, \tilde{\xi}).$$

Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$ il existe une solution de (2.12) tel que $ch(u_N) = N$.

Et de plus on a

$$\lim_N f(u_N) = +\infty.$$

Remarque 8.1 La solution du théorème 8.1 a la propriété de symétrie suivante

$$\forall g \in O(n), \quad (u_0(gx), g^{-1}\tilde{u}(gx)) = (u_0(x), \tilde{u}(x))$$

Preuve:

La preuve du théorème se base essentiellement sur le lemme I1 (I.Eckland), la proposition 7.2, lemme 7.2 et la proposition 6.1.

On fixe $N \geq 1$ et on a le problème suivant:

$$c_N = \inf f.$$

$$\Lambda_F^N$$

Sachant que, $\Lambda_F^N = \{u \in \Lambda_F / ch(u) = N\}$

rappelons que pour tout $u \in \Lambda$ et $ch(u) \neq 0$, alors $\|u\|_{L^\infty} \geq 1$, voir (remarque 3.3).

De la proposition 4.1 on a

$$f(u) \geq \Delta^* > 0, \quad (8.12)$$

alors on a

$$c_N \geq \Delta^* > 0.$$

Montrons que la valeur c_N est atteinte dans Λ_F^N .

Soit le demi-espace de f

$$f^c = \{u \in \Lambda_F / f(u) \leq c\}, \quad c \in \mathbb{R}.$$

Montrons que f^c est fermé.

Soit $\{u_k\}$ une suite dans f^c convergente, $u_k \longrightarrow u \in E$;

d'après le lemme 4.2, $u \in \Lambda$ et puisque F est un sous espace fermé, $u \in F$. Ainsi $u \in f^c$,

alors f^c est fermé dans E et aussi dans F .

De (8.12) f est bornée inférieurement dans Λ_F^N .

Fixons N , d'après le lemme I1 (I.Eckland), il existe une suite $\{u_n^N\} \subset \Lambda_F^N$ telle que,

$$c_N \leq f(u_n^N) \leq c_N + \frac{1}{n}, \quad (8.13)$$

et

$$\forall v \in \Lambda_F^N, \quad f(v) + \frac{1}{n} \|v - u_n^N\|_E \geq f(u_n^N). \quad (8.14)$$

Et puisque $f \in C^1$, nous pouvons écrire,

$$f(v) = f(u_n^N) + \langle f'(u_n^N), v - u_n^N \rangle + o(v - u_n^N).$$

De (8.14) on a, pour tout $v \in \Lambda_F^N$

$$\langle f'(u_n^N), u_n^N - v \rangle \leq \frac{1}{n} \|u_n^N - v\|_E + o(v - u_n^N); \quad (8.15)$$

rappelons que $\Lambda_F^N = F \cap \Lambda^N$.

On prend : $v = u_n^N - \varepsilon h$ tel que $h \in F$,

pour $\varepsilon > 0$ assez petit ($\varepsilon = \frac{1}{n}$), $v \in \Lambda_F^N$ puisque Λ^N est un ouvert et F est un sous espace. de (8.15) on a,

$$\frac{\langle f'(u_n^N), h \rangle}{\|h\|_E} \leq \frac{1}{n} + \frac{o(\varepsilon h)}{\|\varepsilon h\|_E} ; \text{ pour tout } h \in F$$

tel que $\frac{o(\varepsilon h)}{\|\varepsilon h\|_E} \rightarrow 0$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$,

alors

$$f'(u_n^N) \longrightarrow 0 \text{ dans } F', \quad (8.16)$$

de (8.13) on a

$$f(u_n^N) \longrightarrow c_N. \quad (8.17)$$

La fonctionnelle f restreinte à Λ_F vérifie les conditions de Palais-Smale (voir proposition 7.2) de (8.16) et (8.17) Il existe une sous suite convergente notée encore $\{u_n^N\} \subset \Lambda_F^N$, telle que,

$$u_n^N \longrightarrow u^N \text{ dans } \Lambda_F^N$$

et comme f est de classe C^1 on a donc

$$f(u^N) = c_N$$

$$\text{et } f'(u^N) = 0 \text{ dans } F'$$

de (8.16) et lemme 7.2, pour tout $v \in E$ on a

$$\langle f'(u^N), v \rangle = \langle f'(u^N), Pv \rangle = 0$$

P étant la projection de E dans F

Donc

$$f'(u^N) = 0 \text{ dans } E' \quad (8.18)$$

u^N est un point critique de la fonctionnelle f .

D'où nous avons une solution faible de l'équation (2.12) et en on déduit la solution de l'équation (2.10)

Soit $u^N \in \Lambda_F^N$ le minimum de l'énergie sur Λ_F^N ,

$$f(u^N) = c_N$$

Montrons que lorsque $N \longrightarrow +\infty$ alors $f(u^N) \longrightarrow +\infty$
par l'absurde on suppose que

$$f(u^N) \leq M ;$$

alors d'après la proposition 6.1, il existe $Q \in \mathbb{N}$ tel que

$$ch(u^N) = Q ;$$

Il y a une contradiction, puisque $ch(u^N) = N \longrightarrow +\infty$.



Conclusion

Notre travail se base essentiellement sur deux théorèmes. Pour le théorème 6.1, nous prouvons l'existence d'une solution non triviale minimisant la fonctionnelle d'énergie sur l'ensemble Λ^* , et puisque ce dernier est un ouvert, nous montrons que cette solution est aussi une solution de l'équation (2.12) et avec le changement de variable approprié (2.13) nous déduisons la solution de l'équation (2.10). Pour le théorème 8.1 nous prouvons l'existence d'une solution soliton u_N minimisant la fonctionnelle d'énergie sur chaque composante connexe Λ^N , ce qui veut dire, pour chaque $N \in \mathbb{N}$ (charge topologique) nous avons une solution u^N . Et grâce au lemme 7.2 nous prouvons que u^N , est un point critique de la fonctionnelle dans l'espace E . D'où nous déduisons la solution de l'équation (2.12) et la solution de l'équation (2.10). Nous remarquons que la nature de la convergence d'énergie est la même que celle de la charge topologique ce qui veut dire que quand la charge explose l'énergie explose aussi. Ce qui nous donne une information importante caractérisant la solution de l'équation (2.10).

Annexe A

.Injection Compacte

Dans cette annexe nous démontrons un résultat qui étend légèrement un théorème de compacité de [4]. Nous posons

$$W_R^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}) = \left\{ u \in W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}) \mid u \text{ radiale} \right\}$$

Proposition A.1. *Considérons $n \geq 2$. L'espace $W_R^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R})$ s'injecte compactement dans $L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R})$, pour chaque $s \in]2, 2^*[$, où*

$$2^* = \begin{cases} +\infty & \text{si } n > 2 \\ 2n/(n-2) & \text{si } n = 2 \end{cases}$$

Preuve. Pour $n > 2$, la preuve est donnée dans [4] (voir le théorème A.I'). Nous fournissons la preuve pour $n = 2$.

D'abord nous rappelons que, pour chaque $m \in [2, +\infty[$,

$$W^{1,2}(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) \underset{\text{injection continue}}{\subset} L^m(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}). \quad (\text{A.1})$$

Fixons $s \in]2, +\infty[$ et considérons la suite bornée $\{u_k\} \subset W_R^{1,2}(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R})$,

et de (A.1) $\{u_k\}$ est bornée dans $L^s(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R})$

ainsi, nous avons une sous suite notée encore $\{u_k\}$ telle que

$$u_k \underset{\text{faiblement}}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^s(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) \quad (\text{A.2})$$

Montrons que cette convergence est forte.

Soit $m \in]s, +\infty[$; il est clair que $\{u_k\}$ est bornée dans $L^2(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}) \cap L^m(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R})$. Maintenant nous appliquons le lemme de compacité A.I dans [4] avec

$$P(t) = t^s, \quad Q(t) = t^2 + t^m.$$

nous concluons que

$$\|u_k\|_{L^s} \rightarrow \|u\|_{L^s}. \quad (\text{A.3})$$

de (A.2) et (A.3) nous avons

$$u_k \underset{\text{fortement}}{\longrightarrow} u \text{ dans } L^s(\mathfrak{R}^2, \mathfrak{R}).$$

Théorème A.1. *Si $\mathbf{W}$ est un sous-ensemble borné de $W_R^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$, Alors*

$$\mathbf{W}_R = \left\{ u \in \mathbf{W} \mid |u| \text{ est une fonction radiale} \right\}$$

est relativement compact dans $L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$, pour chaque $s \in]2, 2^[$.*

Preuve. Fixons $s \in]2, 2^*[$ et considérons la suite $\{u_k\} \subset \mathbf{W}_R$. Nous allons montrer qu'il existe une sous-suite fortement convergente dans $L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$.

Puisque $\{u_k\}$ est bornée dans $W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$, il existe une sous-suite notée encore $\{u_k\}$ qui converge faiblement vers un élément u de $W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$

$$u_k \xrightarrow[\text{faiblement}]{} u \text{ dans } W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1}), \quad (\text{A.4})$$

et par injection continue, $W^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1}) \xrightarrow[\text{injection continue}]{} L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$

nous déduisons que,

$$u_k \xrightarrow[\text{faiblement}]{} u \text{ dans } L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1}) \quad (\text{A.5})$$

d'autre part, $\{u_k\}$ est bornée dans $W_R^{1,2}(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$, puisque

$$\int |\nabla u_k|^2 dx \leq \int |\nabla u|^2 dx.$$

Alors, par la proposition A.1, nous obtenons

$$|u_k| \xrightarrow[\text{fortement}]{} \chi \text{ dans } L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}) \quad (\text{A.6})$$

et, nous avons une sous-suite

$$|u_k| \xrightarrow{} \chi \text{ p.p. dans } \mathfrak{R}^n.$$

de (A.4) nous déduisons que

$$u_k \xrightarrow[\text{fortement}]{} u \text{ dans } L_{loc}^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1}),$$

et avec un processus de diagonalisation, nous pouvons choisir une sous-suite.

$$u_k \xrightarrow{} u \text{ p.p. dans } \mathfrak{R}^n.$$

Ainsi nous concluons que,

$$\chi = |u|. \quad (\text{A.7})$$

De (A.6) et (A.7) on a ,

$$\|u_k\|_{L^s} \longrightarrow \|u\|_{L^s}; \quad (\text{A.8})$$

alors de (A.5) et (A.8) nous concluons que,

$$u_k \xrightarrow[\text{fortement}]{} u \text{ dans } L^s(\mathfrak{R}^n, \mathfrak{R}^{n+1})$$

Annexe B

.Inversibilité de l'opérateur Δ_p

Dans cette annexe on montre que l'opérateur Δ_p est continu et d'inverse continu

Continuité de l'opérateur p -Laplacien

$$\begin{aligned} \Delta_p : E_a &\longrightarrow E_a' \\ u &\longrightarrow \Delta_p u \end{aligned}$$

pour toute $h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$,

$$\begin{aligned} \langle \Delta_p u - \Delta_p v, h \rangle &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[-|\nabla u|^{p-2} (\nabla u | \nabla h) + |\nabla v|^{p-2} (\nabla v | \nabla h) \right] dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2} \right) |\nabla v - \nabla u| |\nabla h| dx. \end{aligned}$$

par l'inégalité de Hölder nous concluons

$$\langle \Delta_p u - \Delta_p v, h \rangle \leq c_p \left(\|\nabla u\|_{L^p}^{p-2} + \|\nabla v\|_{L^p}^{p-2} \right) \|\nabla v - \nabla u\|_{L^p} \|\nabla h\|_{L^p}.$$

Le lemme 7.3 est le résultat de ce qui suit.

Théorème B.1. Si H est une matrice définie positive d'ordre $N+1$, alors l'opérateur

$$A : E \rightarrow E'$$

défini par

$$\begin{aligned} \langle Au, v \rangle &= \left\langle -\Delta u - \Delta_p u + Hu, v \right\rangle \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left((\nabla u | \nabla v) + |\nabla u|^{p-2} (\nabla u | \nabla v) + Hu.v \right) dx. \end{aligned}$$

est inversible avec inverse continu.

Pour la preuve nous avons besoin de quelques résultats préliminaires. La première est liée à la monotonie de $-\Delta_p$.

Lemme B.1. Il existe un constant $C > 0$ tel que, pour chaque $u, v \in E$,

$$\langle \Delta_p u - \Delta_p v, u - v \rangle \geq c \|\nabla u - \nabla v\|_{L^p}^p, \quad p > 2. \quad (\text{B.1})$$

Preuve. Nous prouvons (B.1) pour $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$; d'où le résultat par densité.

pour chaque $u, v \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^{n+1})$, nous avons

$$\langle \Delta_p u - \Delta_p v, u - v \rangle \geq \int_{\mathfrak{R}^n} \left[|\nabla u|^p + |\nabla v|^p - (\nabla u | \nabla v) (|\nabla u|^{p-2} + |\nabla v|^{p-2}) \right] dx.$$

On a

$$\|\nabla u - \nabla v\|_{L^p}^p = \int_{\mathfrak{R}^n} |\nabla u - \nabla v|^p dx, \quad |\nabla u| = \sqrt{\sum_{i,j} \left(\frac{\partial u^j}{\partial x_i} \right)^2},$$

$$(\nabla u | \nabla v) = \sum_{i,j} \frac{\partial u^j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial v^j}{\partial x_i}.$$

Ainsi il nous suffit de montrer qu'il existe $C > 0$ tel que, pour chaque $X, Y \in \mathfrak{R}^{n(n+1)}$

$$|X|^p + |Y|^p - (X|Y) (|X|^{p-2} + |Y|^{p-2}) \geq c |X - Y|^p \quad (\text{B.2})$$

substitutions

$$-(X|Y) = \frac{1}{2} (|X - Y|^2 - |X|^2 - |Y|^2)$$

dans (B.2), nous avons

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|X|^p + |Y|^p) + \frac{1}{2} |X - Y|^2 (|X|^{p-2} + |Y|^{p-2}) \\ & \geq c |X - Y|^p + \frac{1}{2} (|X|^2 |Y|^{p-2} + |X|^{p-2} |Y|^2). \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Notons que (B.3) peut être obtenue par les inégalités

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (|X|^p + |Y|^p) \geq \frac{1}{2} (|X|^2 |Y|^{p-2} + |X|^{p-2} |Y|^2) \\ & \frac{1}{2} |X - Y|^2 (|X|^{p-2} + |Y|^{p-2}) \geq c |X - Y|^p. \end{aligned}$$

La première est vraie pour chaque paire de vecteurs X, Y ; la seconde est équivalente à

$$(|X|^{p-2} + |Y|^{p-2}) \geq 2c |X - Y|^{p-2},$$

laquelle vient de

$$|X - Y|^{p-2} \leq 2^{p-2} (|X|^{p-2} + |Y|^{p-2}).$$

Pour des raisons de simplicité, nous isolons les calculs élémentaires de la preuve du lemme.

Lemme B.2. soit a_k et b_k deux suites non négatives telles que

$$\lim_k \frac{a_k^p + b_k^2}{a_k + b_k} = 0 \quad (\text{B.4})$$

alors

$$\lim_k a_k = \lim_k b_k = 0$$

Preuve. Puisque $a_k \geq 0$, $b_k \geq 0$, de (B.4), nous déduisons que,

$$\lim_k \frac{a_k^p}{a_k + b_k} = 0 \quad (\text{B.5})$$

$$\lim_k \frac{b_k^2}{a_k + b_k} = 0 \quad (\text{B.6})$$

Par contradiction, supposons qu'il existe une sous suite, notée toujours a_k tel que

$$a_k \geq \delta > 0. \quad (\text{B.7})$$

de (B.5) et (B.7) on a

$$\lim_k (a_k + b_k) = +\infty$$

alors on a deux cas,

$$\lim_k a_k = +\infty \quad (\text{B.8})$$

ou

$$\lim_k b_k = +\infty.$$

Admettons que (B.8) est vraie. Et écrivons (B.5) de la façon suivante,

$$\lim_k \frac{a_k^{p-1}}{1 + (b_k / a_k)} = 0$$

d'où nous avons

$$\lim_k \frac{b_k}{a_k} = +\infty$$

ainsi, pour k assez grand,

$$a_k \leq b_k. \quad (\text{B.9})$$

Alors il est facile de déduire que

$$\frac{1}{2} b_k \leq \frac{b_k^2}{a_k + b_k}. \quad (\text{B.10})$$

Alors, de (B.10) et (B.6) nous avons, $\lim_k b_k = 0$

d'autre part de (B.8) et (B.9) on a, $\lim_k b_k = +\infty$.

Ainsi nous obtenons une contradiction, la preuve pour les autres cas est analogue.

Maintenant revenons au Théorème B.1.

Preuve du Théorème B.1. D'abord montrons que A est inversible.

pour chaque $h \in E'$, la solution de

$$A(u) = h$$

peut être obtenue comme point critique de la fonctionnelle

$$J(u) = \frac{1}{p} \int |\nabla u|^p dx + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int Hu \cdot u dx - \langle h, u \rangle.$$

puisque la matrice H est définie positive nous avons,

$$\frac{1}{p} \int |\nabla u|^p dx + \frac{1}{2} \int |\nabla u|^2 dx + \frac{1}{2} \int H u \cdot u dx \geq \frac{1}{p} \|\nabla u\|_{L^p}^p + m \|u\|_{W^{1,2}}^2. \quad (B.11)$$

pour chaque $\lambda > 0$, on a

$$\langle h, u \rangle \leq \|h\|_{E'} \|u\|_E \leq \frac{1}{2\lambda} \|h\|_{E'}^2 + \frac{\lambda}{2} \|u\|_E^2, \quad (B.12)$$

sachant que, $\|u\|_E \leq \|u\|_{L^p} + \|u\|_{W^{1,2}}$,

en prenant compte de (B.11) et (B.12), nous on concluons que la fonctionnelle J est inférieurement bornée. En plus elle est strictement convexe, ainsi elle a un point critique unique.

Soit $\{h_k\}$ une suite de E' et $h \in E'$ telle que $h_k \rightarrow h$ dans E' .

Alors, posons $\{u_k\}$ et u dans E telles que

$$\begin{aligned} A(u_k) &= h_k, & \forall k \in \mathbb{N} \\ A(u) &= h. \end{aligned}$$

Montrons que $u_k \rightarrow u$ dans E .

de (B.1), en utilisant que H est définie positive, prenons $c_1 > 0$ tel que

$$\langle A(u) - A(v), u - v \rangle \geq c_1 (\|\nabla u - \nabla v\|_{L^p}^p + \|u - v\|_{W^{1,2}}^2).$$

Alors nous avons

$$\begin{aligned} c_1 (\|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^p}^p + \|u_k - u\|_{W^{1,2}}^2) &\leq \langle A(u_k) - A(u), u_k - u \rangle \\ &= \langle h_k - h, u_k - u \rangle \\ &\leq \|h_k - h\|_{E'} \|u_k - u\|_E, \end{aligned}$$

C'est-à-dire,

$$\frac{1}{c_1} \|h_k - h\|_{E'} \geq \frac{\|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^p}^p + \|u_k - u\|_{W^{1,2}}^2}{\|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^p}^p + \|u_k - u\|_{W^{1,2}}^2}.$$

En appliquant le Lemme B.2 à

$$a_k = \|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^p}$$

et en utilisant

$$b_k = \|u_k - u\|_{W^{1,2}},$$

nous déduisons que

$$\begin{aligned} \lim_k \|\nabla u_k - \nabla u\|_{L^p} &= 0, \\ \lim_k \|u_k - u\|_{W^{1,2}} &= 0; \end{aligned}$$

alors $u_k \rightarrow u$ dans E .

Références et Bibliographies

- [1] V.BENCI; D'AVENIA P; FORTUNATO D. AND PISANI L; Solitons in several space dimensions: Derrick's problem and infinitely many solutions, *Arch. Ration. Mech. Anal.* 154 (2000), 297–324.
- [2] V.BENCI. D.FORTUNATO, A.MASTELLO ET L. PISANI, Solitons and the electromagnetic field, *Math. Z.* 232 (1999) 73-102
- [3] V.BENCI.D.FORTUNATO et L.PISANI, Solitons like solutions of Lorentz invariant equation in diension3, *Reviews in Mathematical Physics*, 3 (1998) 315 – 344.
- [4] H.BERESTYCKI et P.L.LIONS, Nonlinear Scalr Field Equations, I –Exstence of a groud state, *Arch. Rational Mech. Anal.* 82(1983) 313 – 345.
- [5] M.BADIALE-V.BENCI-S.ROLANDO, Solitary Waves:Physical Aspects and Mathematical Results *Rend. Sem. Mat. Univ .Pol.Torino – Vol.* 62, 2 (2004)
- [6] C.H DERRICK, Comments on Nonlinear Wave Equations as Model Elementary Particles, *Jour. Math. Phys.* 5 (1964), 1252 –1254.
- [7] R.K DODD.J.C EILBECK .J.D GIBBON et H.C MORRIS. *Solitons and Nonlinear Wave Equations*, Academic Press, London, New York, 1982.
- [8] M. S. BERGER, "On the existence and structure of stationary states for a Nonlinear Klein Gordon equation", *J. Funct. Analysis* 9 (1972) 249-261.
- [9] O.KAVIAN, *Introduction a la théorie des points critiques*, Springer Editeur, Paris, 1991
- [10] H.BREZIS. *Analyse fonctionnelle– Théorie et applications*, Masson Editeur, Paris, 1983
- [11] H. CARTAN, *Calcul différentiel*, Hermann Editeur, paris, 1971
- [12] I.PERAL, Multiplicity of solutions for the p-Laplacian, *Lecture Notes of Second School Nonlinear Functional Analysis and Applic. to Differ. Eq. ICTP, Trieste, Italy* (1997).
- [13] P. ROBERTSON et WENDY ROBERTSON, *Topological vector spaces*, Camberidge University Press Cambridge London New York New Rochelle Melbourne Sydney 1973.