

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene
Faculté de Mathématiques



THÈSE DE DOCTORAT

En Mathématiques

Spécialité : Recherche Opérationnelle
(Méthodes Stochastiques)

THÈME

Sur la stabilité des équations aux récurrences Markoviennes périodiquement homogènes

PRÉSENTÉ PAR :

DEMMOUCHE Nacer

DEVANT LE JURY COMPOSÉ DE :

M. MIHOUBI	Miloud	Professeur	USTHB	Président
M. AKNOUCHE	Abdelhakim	Professeur	USTHB	Dir. Thèse
M. BERKOUN	Youcef	Professeur	UMMTO	Examineur
M. BOUALEM	Mohamed	Professeur	UAMB	Examineur
M. FELLAG	Hocine	Professeur	UMMTO	Examineur
M. KERNANE	Tewfik	M. C. A	USTHB	Examineur

Soutenue le 07 Octobre 2019

Remerciements

Je tiens tout d'abord à exprimer ma plus profonde gratitude envers Monsieur Abdelhakim Aknouche, mon directeur de thèse, pour avoir dirigé mes travaux. Je lui suis très reconnaissant pour m'avoir accordé sa confiance, et aussi pour ses précieux conseils, sa disponibilité et ses qualités humaines. Je tiens à préciser que sa maîtrise et ses qualités scientifiques m'ont permis de faire progresser mes connaissances et d'apprécier la recherche dans le domaine des probabilités.

Je remercie Monsieur Miloud Mihoubi qui m'a fait l'honneur de présider le jury de soutenance. Je tiens également à remercier Messieurs Hocine Fellag, Tewfik Kernane, Mohamed Boualem et Youcef Berkoun qui ont accepté d'être examinateurs de ma thèse.

Un grand merci à Monsieur Mohamed Morsi, c'est lui qui m'a parlé du grand savoir et des qualités de Monsieur Abdelhakim Aknouche quand j'étais son étudiant à l'université Moloud Mammeri de Tizi Ouzou. Il m'a conseillé de rejoindre l'université Houari Boumediene afin de poursuivre mes études sous la direction de Monsieur Abdelhakim Aknouche.

Je remercie chaleureusement mon cher et honorable enseignant Monsieur Youcef Berkoun pour les connaissances appréciables qu'il m'a données, ses encouragements et ses aides lorsque j'étais son étudiant à l'université Mouloud Mammeri de Tizi Ouzou. Je n'oublierai jamais les efforts et le temps qu'il a consacré pour m'aider.

Je désire aussi remercier Monsieur Abdelmadjid Ait Yala qui m'a aidé plus qu'il ne le pense. Il me parle souvent de l'avancement de mes travaux. Merci pour ta patience et ton soutien moral durant toutes ces années.

Je remercie tous les enseignants qui m'ont enseigné au long de mon cursus universitaire. Je pense notamment à Mohamed Ouanes, Hocine Fellag, Mohamed Aiden, Sadi Bachir et je saisis cette occasion favorable pour remercier et me rappeler de mon ancien enseignant le professeur Hamou Ibazizen.

J'ai une pensée toute particulière pour Siham Moumou qui m'a soutenu et encouragé pendant la préparation de cette thèse.

Je remercie tous mes amis, en particuliers Mohamed Amechetouh Sedki, Karim Hamid et sa femme Daya, Said Beddek, Samir Belkacemi, EL hadi Boughani, Khelifa Youcefi, Hamid Tikoubaini, Abderrahmane Akkouche, Naim Aoudjit, Abdenour chehboub, Sedik Kheffache, Youcef Guerrab.

Un merci du fond de coeur à ma mère, à mes frères et soeurs Kamel, Noura, Karim, Hakim, Souad, H'mati pour leur grand soutien.

Je dédie cet événement marquant de ma vie à la mémoire de mon père disparu trop tôt et qu'Allah l'accueille en son vaste paradis.

Résumé

Dans cette thèse, nous nous intéressons à l'étude de l'équation aux récurrences stochastique du type $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$, $t \in T$, dont les coefficients $\{(A_t, B_t)\}_{t \in T}$ sont indépendants périodiquement distribués (i.p.d) de période $S \in \mathbb{N}^*$. Nous étudions cette équation dans le cas unilatéral, i.e., $T = \mathbb{N}$ et dans le cas bilatéral, i.e., $T = \mathbb{Z}$. Dans le cas unilatéral, nous montrons que sous la condition que l'exposant de Lyapounov associé à la suite i.p.d. $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est strictement négatif, le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge en distribution vers S variables aléatoires indépendamment de la variable initiale. Dans le cas bilatéral, nous montrons que sous l'hypothèse d'irréductibilité périodique de l'équation, la condition nécessaire et suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique est que l'exposant de Lyapounov associé à la suite i.p.d. $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est strictement négatif. Nous montrons un théorème de renouvellement implicite périodique et nous montrons que les S distributions marginales de la solution strictement périodiquement stationnaire sont à variations régulières de même indice de variation. Nous proposons un modèle ARCH (∞) périodique et nous montrons que sous une certaine condition, ce modèle admet une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire. Nous montrons que sous une certaine condition cette solution est aussi périodiquement stationnaire au second-ordre. Nous proposons un modèle général INGARCH (p, q) de Poisson double mélangé. Nous montrons que sous certaines conditions de contraction, le modèle général INARCH (∞) de Poisson double mélangé et le modèle général INGARCH $(1, 1)$ de Poisson double mélangé admettent des solutions strictement stationnaires, faiblement dépendantes et ergodiques ayant des moments d'ordre un fini. Nous proposons un modèle général INGARCH $(1, 1)$ de Poisson mélangé périodique et nous montrons que sous une certaine condition de contraction périodique, ce modèle admet une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement faiblement dépendante et périodiquement ergodique ayant un moment d'ordre un fini.

Mots clés : Stationnarité périodique stricte, stationnarité périodique au second-ordre, ergodicité périodique, exposant de Lyapounov, variation régulière, théorème de renouvellement implicite périodique, dépendance périodique faible, modèles ARCH (∞) périodiques, modèles RCA périodiques, modèles Bilinéaires périodiques, modèles GARCH périodiques, modèles INGARCH de Poisson double mélangés, modèles INGARCH de Poisson mélangés périodiques.

Abstract

In this thesis, we are interested in the study of the stochastic difference equation of the type $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$, $t \in T$, whose coefficients $\{(A_t, B_t)\}_{t \in T}$ are independent and periodically distributed (i.p.d) of period $S \in \mathbb{N}^*$. We study this equation in the unilateral case, i.e., $T = \mathbb{N}$ and in the bilateral case, i.e., $T = \mathbb{Z}$. In the unilateral case, we show that under the condition that the top Lyapounov exponent associated with the i.p.d sequence $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ is strictly negative, the process $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converges in distribution towards S random variables independently of the initial variable. In the bilateral case, we show that under the hypothesis periodic irreducibility of the equation the necessary and sufficient condition for the existence and uniqueness of a nonanticipative strictly periodically stationary and periodically ergodic solution is that the top Lyapounov exponent associated with the i.p.d sequence $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ is strictly negative. We prove a periodic implicit renewal theorem and we show that the marginal distributions of the strictly periodically stationary solution are regularly varying with the same index of variation. We propose a periodic ARCH (∞) model and we show that under a certain condition, this model admits a nonanticipative strictly periodically stationary solution. We show that under a certain condition this solution is also second-order periodically stationary. We propose a general double mixed Poisson INGARCH (p, q) model. We show that under certain contraction conditions, the general double mixed Poisson INARCH (∞) model and the general double mixed Poisson INGARCH $(1, 1)$ admit strictly stationary, weakly dependent and ergodic solutions with finite means. We propose a general periodic mixed Poisson INGARCH $(1, 1)$ model and we show that under a certain condition of periodic contraction, this model admits a nonanticipative strictly periodically stationary solution which is periodically weakly dependent and periodically ergodic with a finite mean.

Key words : strict periodic stationarity, second-order periodic stationarity, periodic ergodicity, top Lyapounov exponent, regular variation, periodic implicit renewal theorem, weak periodic dependence, periodic ARCH (∞) models, periodic RCA models, periodic Bilinear models, periodic GARCH models, double mixed Poisson INGARCH models, Periodic mixed Poisson INGARCH Models.

Table des matières

Introduction générale	2
1 Équations aux récurrences stochastiques	6
1.1 Introduction	6
1.2 Processus périodiquement stationnaires	6
1.3 Équations aux récurrences stochastiques univariées	8
1.4 Équations aux récurrences stochastiques multidimensionnelles	27
1.5 Conclusion	38
2 Théorie du Renouvellement et Comportement des queues	39
2.1 Introduction	39
2.2 Théorie de renouvellement	39
2.2.1 Théorème de renouvellement à support positif	40
2.2.2 Théorème de renouvellement à support dans \mathbb{R}	42
2.3 Théorie du renouvellement implicite périodique	43
2.3.1 Théorème de renouvellement implicite périodique	44
2.3.2 Queues de la solution de l'équation aux récurrences stochastique	58
2.4 Exemples	65
2.4.1 Processus ARCH (1) périodique	65
2.4.2 Processus GARCH (1,1) périodique	68
2.4.3 Processus RCA(1) périodique	69
2.4.4 Processus Bilinéaire périodique	71
2.5 Conclusion	72
3 Modèles GARCH(p,q) et ARCH(∞) Périodiques	73
3.1 Introduction	73
3.2 Modèles GARCH(p, q) périodiques	73
3.2.1 Stationnarité périodique stricte	74
3.2.2 Existence des moments d'ordres supérieurs	80
3.3 Modèles ARCH(∞) Périodiques	82
3.3.1 Stationnarité périodique stricte	82
3.3.2 Stationnarité périodique au second-ordre	84
3.3.3 Propriété de la fonction covariance	90
3.4 Conclusion	94
4 Modèle INGARCH de Poisson double mélangé	95
4.1 Introduction	95
4.2 Modèle général INGARCH de Poisson double mélangé	96
4.2.1 Mélange INGARCH (p, q) de Poisson	98
4.2.2 Mélange INGARCH binomial négatif	98

4.2.3	Modèle INARCH(∞) de Poisson double mélangé	98
4.2.4	Modèle INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé	101
4.3	Conditions d'ergodicité	101
4.3.1	Modèle général INARCH(∞) de Poisson double mélangé	102
4.3.2	Modèle général INGARCH de Poisson	104
4.3.3	Modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé	106
4.3.4	Modèle INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé	107
4.4	Ergodicité périodique du modèle INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique	109
4.4.1	Modèle INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique	110
4.4.2	Exemples	111
4.4.3	Conditions d'ergodicité périodique	115
4.5	Conclusion	122
	Conclusion générale	122
	Bibliographie	125

Introduction générale

Au cours de ces dernières années, des études approfondies sont accordées à l'équation aux récurrences stochastique du type $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$, avec $t \in \mathbb{N}$ ou $t \in \mathbb{Z}$ et dont la suite des coefficients (A_t, B_t) est indépendante et identiquement distribuée (iid). L'étude de cette équation consiste en la recherche des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution strictement stationnaire (voir par exemple Kesten [105], Vervaat [138], Bougerol et Picard [41], Babillot et al [26], Goldie [93], Goldie et Maller [94]). Plusieurs propriétés de cette solution ont été étudiées, à savoir l'existence des moments d'ordres supérieurs (voir par exemple Vervaat [138], Embrechts et al [72]), la variation régulière de la distribution marginale (voir par exemple Kesten [105], Grey [96]), la variation régulière des distributions fini-dimensionnelles, la variation régulière des sommes finies de ses variables, le théorème central limite, l'ergodicité géométrique et la propriété du mélange, la convergence faible des processus ponctuels générés par la solution stationnaire, la théorie limite pour la fonction d'autocovariance empirique, les larges déviations et les probabilités de ruines (voir par exemple Davis et Mikosch [56], Hult et al [101], Konstantinides et Mikosch [110], Basrak et al [29], [30]). L'intérêt de cette équation réside en sa capacité de représenter de nombreux modèles de séries chronologiques tels que le modèle ARCH, le modèle GARCH (voir par exemple Basrak et al [30], Bougerol et Picard [42], Davis et Mikosch [57], Francq et Zakoian [82]), le modèle bilinéaire (voir par exemple Basrak et al [28], Quinn [124]), le modèle RCA (voir par exemple Aue [24], Aue et al [25], Quinn et Nicholls [125]). Dans [46], Brandt a étudié cette équation dont la suite des coefficient est strictement stationnaire et ergodique. Une autre étude de cette équation a été faite par de Saporta [63] en supposant que (A_t) est une chaîne de Markov à espace d'états fini et (B_t) est une suite de variables aléatoires iid et indépendante de la suite (A_t) . Néanmoins, de nombreuses séries chronologiques observées en pratiques révèlent une certaine périodicité dans le temps, ainsi leurs modèles représentatifs sont à paramètres périodiques dans le temps et par conséquent l'équation aux récurrences stochastique à coefficients iid ne peut représenter ces modèles. Plusieurs modèles de séries chronologiques périodiques ont été proposés et étudiés par A. Aknouche en utilisant l'équation aux récurrences stochastique à coefficients indépendants et périodiquement distribués, à titre d'exemple nous citons le modèle ARMA périodique, le modèle VAR périodique, le modèle GARCH(p, q) périodique, le modèle bilinéaire périodique, le modèle RCA périodique. Les propriétés probabilistes et statistiques telles que la stationnarité périodiques stricte, la stationnarité périodique au second-ordre, l'ergodicité périodique, l'ergodicité géométrique périodique, l'existence des moments d'ordres supérieurs, la structure d'autocovariance, les propriétés β -mélange et le mélange fort, le théorème central limite, l'estimation des paramètres par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance, la normalité asymptotique de l'estimateur de quasi-maximum de vraisemblance ont été étudiées (voir par exemple Aknouche, [6], [3], [5], [7], [9], [4], [8], Aknouche et Al-Eid [13], Aknouche et Bibi [15], Aknouche et Bentarzi [16], Aknouche et Guerbyenne [18], [19], Aknouche et Bentarzi [20], Bibi et

Aknouche [34], [35]).

De même, ces dernières années les séries chronologiques à valeurs entières ont suscité un grand intérêt, avec des applications dans plusieurs domaines scientifiques, par exemple, l'économie et les finances (voir par exemple Weiss [140]), les sciences biologiques et médicales (voir par exemple Marque [115]), et bien d'autres domaines (voir par exemple Davis et al [54]). Les séries chronologiques à valeurs entières surviennent dans ces domaines lorsqu'on s'intéresse par exemple au nombre d'occurrences d'un certain événement aléatoire durant une durée du temps bien déterminée. De nombreux modèles ont été proposés et étudiés afin de représenter et d'étudier ces séries chronologiques à valeurs entières, par exemple, le modèle INAR de poisson (voir par exemple Fokianos [75], Fokianos et al [76]), le modèle INGARCH de Poisson (voir par exemple Ferland et al [73], Doukhan et al [71]), le modèle INGARCH binomial négatif (voir par exemple Christou et Fokianos [49], Zhu [144]), le modèle INGARCH de Poisson-généralisé (voir par exemple Zhu [143]), le modèle INGARCH de Poisson mélangé (voir Fokianos et al [76], Gonçalves et al [95]), le modèle mélange INARCH de Poisson (voir par exemple Zhu et al [145]), le modèle mélange INGARCH de Poisson (voir par exemple Diop et al [66]), le modèle mélange INGARCH binomial négatif (voir par exemple Diop et al [65]). Certains de ces modèles modélisent les séries chronologiques à valeurs entières sur-dispersées comme le modèle INGARCH de Poisson et le modèle INGARCH binomial négatif, certains modèles peuvent modéliser les séries sur-dispersées et les séries sous-dispersées comme le modèle INGARCH de Poisson-généralisé et le modèle INGARCH double-Poisson. Diop et al [65], [66], Zhu et al [145] ont établi la stationnarité en moyenne et la stationnarité en moment d'ordre deux de leurs modèles. Doukhan et al [71] ont établi la stationnarité stricte, la dépendance faible, l'ergodicité et l'existence des moments d'ordre supérieurs de leurs modèles.

Ahmad et Francq [2] ont proposé un estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de Poisson pour une classe de modèles de séries chronologiques à valeurs entières et ils ont établi la consistance et la normalité asymptotique de leur estimateur. Aknouche et al [21] ont proposé les estimateurs du quasi-maximum de vraisemblance géométrique et quasi-maximum de vraisemblance binomial négatif pour une grande classe de modèles de séries chronologiques à valeurs entières, ils ont établi la convergence presque sûre et la normalité asymptotique de leurs estimateurs, ainsi ils ont comparé leurs estimateurs à l'estimateur du quasi-maximum de vraisemblance de Poisson en termes d'efficacité asymptotique.

Cette thèse est une continuité et une généralisation de certains travaux de recherche cités précédemment. Les contributions de cette thèse sont réparties sur quatre chapitre.

Dans le premier chapitre, nous présentons l'équation aux récurrences stochastique à coefficients indépendants et périodiquement distribués (ipd) dans le cas unilatéral et dans le cas bilatéral. Dans le cas unilatéral, nous proposons des conditions suffisantes assurant la convergence du processus généré par l'équation, indépendamment de la variable aléatoire initiale, vers des variables aléatoires qui vérifient une certaine identité en distribution et ayant des moments d'ordres supérieurs finis. Dans le cas bilatéral, nous proposons des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique ayant des moments d'ordres supérieurs finis. Dans ce cas bilatéral, nous proposons une hypothèse supplémentaire d'irréductibilité périodique de l'équation aux récurrences stochastique qui rend la condition suffisante est aussi nécessaire pour l'existence de la solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire.

Dans le deuxième chapitre, nous proposons un théorème de renouvellement implicite périodique qui généralise le théorème de renouvellement implicite de Goldie [93] afin de

l'appliquer pour étudier le comportement asymptotique des queues de la solution de l'équation aux récurrences stochastique. Nous proposons des conditions suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution strictement périodiquement stationnaire ayant la propriété que les distributions marginales sont à variations régulières de même indice de variation qui vérifie une certaine équation. Nous terminons ce chapitre par des applications des théorèmes de renouvellement implicite périodique et de comportement asymptotique des queues sur quelques modèles de séries chronologiques périodiques.

Dans le troisième chapitre, nous étudions deux modèles périodiques, le modèle GARCH(p, q) périodique et modèle ARCH(∞) périodique. D'abord nous rappelons les conditions suffisantes de stationnarité périodique stricte, de stationnarité périodique au second-ordre et d'existence des moments d'ordres supérieurs pour le modèle GARCH(p, q) périodique. Nous proposons des conditions suffisantes pour la stationnarité périodique stricte, la stationnarité périodique au second-ordre du modèle ARCH(∞) périodique. Puis, nous présentons les propriétés de la fonction covariance de ce dernier modèle.

Dans le quatrième chapitre, nous proposons un modèle général INGARCH(p, q) de Poisson double mélangé et les modèles particuliers associés. Nous proposons des conditions suffisantes pour la stationnarité stricte, la dépendance faible et l'ergodicité de deux modèles : le modèle général INARCH(∞) de Poisson double mélangé et le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé. Nous présentons également le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique et les modèles particuliers associés. Nous proposons des conditions suffisantes pour la stationnarité périodique stricte, la dépendance périodique faible et l'ergodicité périodique de ce modèle. Puis nous déduisons que sous ces conditions proposées, le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson périodique a des moments d'ordres supérieurs.

Le dernier chapitre présente la conclusion et les perspectives des travaux de recherche futurs.

Chapitre 1

Équations aux récurrences stochastiques

1.1 Introduction

L'équation aux récurrences stochastique de type $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$, $t \in \mathbb{Z}$, où $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus aléatoire et $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires iid définis sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) , joue un rôle crucial dans des domaines tels que l'économie, les finances et les assurances (voir Embrechts et al [72]; Cox et al [52]; Mikosch [117], etc). L'intérêt pour cette équation découle du fait bien connu que de nombreux processus non linéaires y compris, les processus *GARCH* (voir Strumann et Mikosch [133]; Mikosch et Starica [116]; Francq et Zakoian [82] , etc), les processus bilinéaires (voir Basrak et al [28]; Quinn [124], etc), les processus RCA (voir Quinn [125], etc), peuvent être représentés par cette équation aux récurrences stochastique. Cela implique que le comportement extrême de ces processus peut être étudié via l'étude de cette équation et son comportement extrême (voir Basrak et al [30]; Davis et Mikosch [57], etc). Il existe plusieurs travaux concernant l'étude des conditions suffisantes d'existence de la solution stationnaire de cette équation (voir Kesten [105]; Vervaat [138]; Bougerol et Picard [41]; Babillot et al [26], etc). Dans [46], Brandt a montré que les mêmes conditions restent valides dans le cas d'une suite $(A_t, B_t)_{n \in \mathbb{Z}}$ stationnaire et ergodique. Dans [63], de Saporta a étudié cette équation dans le cas où $(A_t)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une chaîne de Markov à espace d'états fini et $(B_t)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite *iid*. Dans beaucoup de travaux, Aknouche a étudié cette équation dans le cas où $(A_t, B_t)_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes périodiquement distribuées (voir Aknouche [6], [7]; Aknouche et Bibi [15], etc).

1.2 Processus périodiquement stationnaires

Les processus stochastiques périodiquement stationnaires et leurs propriétés ont été bien étudiés par Aknouche (voir [3], [13],... etc). On donne ici quelques définitions qui vont servir comme des éléments de base pour l'étude des équations aux récurrences stochastiques à coefficients périodiquement stationnaires. Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dit strictement périodiquement stationnaire de période $S \in \mathbb{N}^*$, si sa distribution infini-dimensionnelle est invariante par translation, multiple de S , dans le domaine d'évolution \mathbb{Z} pour toute saison v ($1 \leq v \leq S$), i.e., la distribution de probabilité de $(\dots, X_v, X_{v+1}, X_{v+2}, \dots)$ est la même que celle de $(\dots, X_{v+hS}, X_{v+1+hS}, X_{v+2+hS}, \dots)$ pour tout $1 \leq v \leq S$ et $h \in \mathbb{Z}$.

Ici, S est le plus petit entier positif vérifiant cette dernière propriété. Ainsi, un processus strictement périodiquement stationnaire avec $S = 1$ est strictement stationnaire et le plus simple processus strictement périodiquement stationnaire est la suite de variables aléatoires indépendantes périodiquement distribuées.

La stationnarité périodique stricte est intimement liée à la stationnarité stricte. En effet, un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement périodiquement stationnaire de période $S \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si tous les S sous processus $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ ($1 \leq v \leq S$) sont strictement stationnaires.

Un résultat très important lié aux processus strictement périodiquement stationnaires est le théorème ergodique périodique (voir Boyles et Gardner [45]) qui peut être énoncé comme suit. Si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus strictement périodiquement stationnaire de période $S \in \mathbb{N}^*$, avec $E(X_v) < \infty$ pour tout $1 \leq v \leq S$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{S} \sum_{v=1}^S X_v^*, \text{ quand } n \rightarrow \infty, \quad (1.1)$$

pour certaines variables aléatoires X_v^* ($1 \leq v \leq S$) définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) et satisfont

$$X_v^* = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} X_{kS+v}, \text{ p.s.}, v \in \{1, \dots, S\}.$$

Le résultat (1.1) peut s'étendre également au cas où $E(X_v) \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ pour tout $v \in \{1, \dots, S\}$.

Lorsque pour une saison donnée $v_0 \in \{1, \dots, S\}$, le sous processus strictement stationnaire correspondant $(X_{nS+v_0})_{n \in \mathbb{Z}}$ est ergodique, alors la variable limite $X_{v_0}^*$ est presque sûrement constante et donc

$$X_{v_0}^* = E(X_{v_0}), \text{ p.s.}$$

Si tous les sous processus $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ ($1 \leq v \leq S$) sont ergodiques, alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit périodiquement ergodique. Dans ce cas, la variable limite dans (1.1) se simplifie à la moyenne des moyennes saisonnières, i.e.,

$$\frac{1}{n} \sum_{t=1}^n X_t \xrightarrow{p.s.} \frac{1}{S} \sum_{v=1}^S E(X_v), \text{ quand } n \rightarrow \infty.$$

L'ergodicité périodique peut être aussi définie explicitement. Soit $T : \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} \rightarrow \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ une transformation de décalage définie pour tout $\mathbf{x}_v = (\dots, x_v, x_{v+1}, x_{v+2}, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ par $T\mathbf{x}_v = (\dots, x_{v+1}, x_{v+2}, x_{v+3}, \dots)$ ($1 \leq v \leq S$) et on écrit $T^S = T \circ T \circ \dots \circ T$. Un ensemble de Borel $D_v \subset \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ de la forme $D_v = \{\mathbf{x}_v \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : \mathbf{x}_v = (\dots, x_v, x_{v+S}, x_{v+2S}, \dots)\}$ est dit S -invariant le long de la saison v ($1 \leq v \leq S$) si $T^{-S}(D_v) = D_v$, où $T^{-S}(D_v) = \{\mathbf{x}_v \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}} : T^S \mathbf{x}_v \in D_v\}$. Un processus strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit périodiquement ergodique si pour tout $v \in \{1, \dots, S\}$,

$$P((\dots, X_v, X_{v+S}, X_{v+2S}, \dots) \in D_v) = 0 \text{ ou } 1,$$

pour tout ensemble de Borel D_v , S -invariant le long de la saison v .

D'une manière similaire à la stationnarité périodique stricte, le plus simple processus périodiquement ergodique est la suite de variables aléatoires indépendantes périodiquement distribuées. Comme pour la stationnarité stricte et l'ergodicité (voir Billingsley [36], Théorème 36.4), la stationnarité périodique stricte et l'ergodicité périodique sont préservées

sous certaines transformations périodiques. En effet, si $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique et si $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus définie par

$$Y_t = f_t(\dots, X_{t-1}, X_t, X_{t+1}, \dots),$$

où f_t est une fonction définie de $\mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ dans \mathbb{R} , qui est mesurable, S -périodique en t ($f_t = f_{t+nS}$ pour tout $n, t \in \mathbb{Z}$) et peut dépendre d'une suite de paramètres S -périodiquement variés en t , alors $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est également périodiquement ergodique.

Un autre type de stationnarité périodique qui est plus faible que la stationnarité périodique stricte est la stationnarité périodique au second-ordre définie comme suit. Un processus stochastique $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dit périodiquement stationnaire au second-ordre de période $S \in \mathbb{N}^*$, si $E(X_t^2) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $E(X_t) = E(X_{t+kS})$ pour tout $t, k \in \mathbb{Z}$ et $\text{Cov}(X_t, X_{t+h}) = \gamma_t(h)$ est périodique en t de période S pour tout $h \in \mathbb{Z}$.

1.3 Équations aux récurrences stochastiques univariées

Considérons l'équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (1.2)$$

où $((A_t, B_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ est une suite de variables aléatoires *ipd* de période $S \in \mathbb{N}^*$. L'équation (1.2) est équivalente aux système d'équations

$$\begin{cases} X_{nS} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS-i} X_{(n-1)S} + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{nS-i} B_{nS-j}, \\ X_{nS+1} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+1-i} X_{(n-1)S+1} + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{nS+1-i} B_{nS+1-j}, \\ \vdots \\ X_{(n+1)S-1} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{(n+1)S-1-i} X_{nS-1} + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{(n+1)S-1-i} B_{(n+1)S-1-j}. \end{cases}$$

Ce système peut être mis sous la forme suivante

$$X_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+v-i} X_{(n-1)S+v} + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{nS+v-i} B_{nS+v-j}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1. \quad (1.3)$$

En posant

$$\mathbb{A}_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+v-i} \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{nS+v} = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{nS+v-i} B_{nS+v-j}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

alors l'équation (1.3) peut être écrite sous la forme suivante

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1, \quad (1.4)$$

où pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $((\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite *iid*. Si la période $S = 1$, alors l'équation (1.2) est à coefficients $((A_t, B_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ *iid*.

Après itérations sur l'équation (1.4), on trouve

$$X_{nS+v} = \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v + \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1, \quad (1.5)$$

où X_0 est une variable aléatoire initiale indépendante de la suite *ipd* $((A_t, B_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ et les variables X_v , $v \in \{1, \dots, S-1\}$, sont telles que

$$X_v = A_v X_{v-1} + B_v.$$

Remarquons que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $n \in \mathbb{N}^*$,

$$(X_v, (\mathbb{A}_{iS+v}, \mathbb{B}_{iS+v})_{1 \leq i \leq n}) \stackrel{d}{=} (X_v, (\mathbb{A}_{(n+1-i)S+v}, \mathbb{B}_{(n+1-i)S+v})_{1 \leq i \leq n}),$$

ceci implique que

$$X_{nS+v} \stackrel{d}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v + \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1. \quad (1.6)$$

Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la suite $((\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v}))_{n \in \mathbb{N}^*}$ est *iid*, par le théorème 5.1 de Vervaat [138], on déduit que si,

$$E(\log^+ |\mathbb{B}_{S+v}|) < \infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq E(\log |\mathbb{A}_{S+v}|) < 0, \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} \xrightarrow{p.s.} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.7)$$

où les S séries convergent absolument presque sûrement.

Remarquons que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$E(\log |\mathbb{A}_{S+v}|) = \sum_{i=0}^{S-1} E(\log |A_{S+v-i}|) = \sum_{i=0}^{S-1} E(\log |A_i|)$$

et on peut vérifier que si $\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |B_v|) < \infty$, alors $E(\log^+ |\mathbb{B}_{S+v}|) < \infty$ pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$. Donc, les S séries dans (1.7) convergent absolument presque sûrement sous les mêmes conditions suivantes :

$$\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |B_v|) < \infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq \gamma^S(A) = \sum_{v=0}^{S-1} E(\log |A_v|) < 0.$$

Le théorème suivant qui généralise le théorème 5.1 de Vervaat [138] au cas où la suite $((A_t, B_t))_{t \in \mathbb{N}^*}$ est *ipd* donne les conditions qui garantissent la convergence de $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ en distribution et donne les propriétés des S distributions limites.

Théorème 1.1. *Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ un processus stochastique défini par (1.5) et supposons que*

$$\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |B_v|) < \infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq \gamma^S(A) < 0, \quad (1.8)$$

alors

1. $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, avec $\{X^{(v)}, 0 \leq v \leq S-1\}$ satisfait l'identité en distribution suivante

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (1.9)$$

où $X^{(v)}$ et $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v)$ sont indépendantes, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$.

2. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (1.9) admet une unique solution en distribution qui est donnée par

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, \quad (1.10)$$

où chaque série de l'identité (1.10) converge absolument presque sûrement.

3. Si on choisit $X_0 \stackrel{d}{=} X^{(0)}$, les variables $\{X_v, 1 \leq v \leq S-1\}$ sont données par l'identité suivante

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} A_v X^{(v-1)} + B_v \stackrel{d}{=} X_v,$$

alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est strictement périodiquement stationnaire.

Maintenant supposons que pour un certain $r \geq 1$,

$$\prod_{v=0}^{S-1} E(|A_v|^r) < 1 \quad \text{et} \quad \prod_{v=0}^{S-1} E(|B_v|^r) < \infty,$$

alors

4. $E(|X^{(v)}|^r) < \infty, \forall v \in \{0, \dots, S-1\}$, et les séries dans (1.10) convergent en moyenne d'ordre r .
5. Si $E(|X_v|^r) < \infty, v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par (1.5) converge en moyenne d'ordre r vers $\{X^{(v)}, 0 \leq v \leq S-1\}$, en particulier

$$E(|X_{nS+v}|^r) \rightarrow E(|X^{(v)}|^r) \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty, v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

6. Les moments $E(X^{(v)m})$ sont déterminés par les équations

$$E(X^{(v)m}) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} E(\mathbb{A}_v^k \mathbb{B}_v^{m-k}) E(X^{(v)k}) < \infty, m = 1, \dots, [r], \quad (1.11)$$

où $[r]$ désigne la partie entière de r .

Preuve.

1) L'existence des limites en distribution de $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}, v \in \{0, \dots, S-1\}$ sera vérifiée dans la partie (2) de cette démonstration. Donc, si on suppose que $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors on a immédiatement

$$(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v}, X_{(n-1)S+v}) \xrightarrow{d} (\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v, X^{(v)}) \quad \text{lorsque} \quad n \rightarrow \infty,$$

où $X^{(v)}$ est indépendante de $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v), \forall v \in \{0, \dots, S-1\}$. Ceci et le fait que la fonction $f(x) = ax + b$ est continue implique que

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v, v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

2) Par itération sur l'équation (1.4), on trouve

$$X_{nS+v} = \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v + \sum_{j=1}^n \prod_{i=j+1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (1.12)$$

où X_0 est une variable aléatoire initiale indépendante de $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{N}^*}$ et les variables $X_v, v \in \{1, \dots, S-1\}$, sont telles que

$$X_v = A_v X_{v-1} + B_v. \quad (1.13)$$

Puisque X_{nS+v} dépend de $X_v, v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors on écrit $X_{nS+v} = X_{nS+v}(X_v)$. On prend la différence entre $X_{nS+v}(X'_v)$ et $X_{nS+v}(X''_v)$, où X'_0 est une variable initiale,

avec $X'_v = A_v X'_{v-1} + B_v$, $v \in \{1, \dots, S-1\}$ et X''_0 est une autre variable initiale, avec $X''_v = A_v X''_{v-1} + B_v$, $v \in \{1, \dots, S-1\}$. Donc,

$$X_{nS+v}(X'_v) - X_{nS+v}(X''_v) = (X'_v - X''_v) \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}, \quad n \geq 1, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (1.14)$$

En utilisant la loi forte des grands nombres et le fait que $\gamma^S(A) < 0$, alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \xrightarrow{p.s.} E(\log |\mathbb{A}_{S+v}|) = \gamma^S(A) < 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty$$

et par conséquent,

$$\left| \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \right| = \exp \left\{ n \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \right) \right\} \xrightarrow{p.s.} 0 \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty.$$

En utilisant ceci et la relation (1.14), on peut déduire que si $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$ pour une certaine variable initiale X_0 et donc pour X_v , $v \in \{1, \dots, S-1\}$, alors $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$ pour toute variable initiale X_0 et donc pour toutes les variables X_v , $v \in \{1, \dots, S-1\}$. En particulier, s'ils existent $X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ telles que $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $X_v \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, X_v indépendante de $(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}^*}$, alors $X_{nS+v}(X_v) \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et par conséquent les variables $X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ sont uniques pour les équations (1.9). Il reste alors à montrer que $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ convergent vers $X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ données par la relation (1.10). Soit $X_0^* = 0$, $X_v^* = 0$, $v \in \{1, \dots, S-1\}$ et soit

$$X_{nS+v}^* = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1, \quad (1.15)$$

alors,

$$X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (1.16)$$

Comme $(X_{nS+v}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ sont des suites des sommes partielles des séries définies dans (1.10), une condition suffisante pour que $(X_{nS+v}^*)_{n \in \mathbb{N}^*}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ convergent en distribution est la convergence presque sûre des séries définies dans (1.10).

On a :

$$\begin{aligned} \left| \mathbb{B}_{jS+v} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \right| &= \exp \left\{ j \left(\frac{1}{j} \log |\mathbb{B}_{jS+v}| + \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \right) \right\}. \\ &\leq \exp \left\{ j \left(\frac{1}{j} \log^+ |\mathbb{B}_{jS+v}| + \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \right) \right\}. \end{aligned}$$

Puisque pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $E(\log^+ |\mathbb{B}_{jS+v}|) < \infty$, alors $\frac{1}{j} \log^+ |\mathbb{B}_{jS+v}| \xrightarrow{p.s.} 0$ lorsque $j \rightarrow \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$. De plus, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \xrightarrow{p.s.} E(\log |\mathbb{A}_{S+v}|) = \gamma^S(A) < 0 \quad \text{lorsque } j \rightarrow \infty.$$

Par conséquent, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\left| \mathbb{B}_{jS+v} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \right|^{1/j} \leq \exp \left\{ \frac{1}{j} \log^+ |\mathbb{B}_{jS+v}| + \frac{1}{j} \sum_{i=1}^{j-1} \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \right\}$$

$$\xrightarrow{p.s.} \exp(\gamma^S(A)) < 1 \quad \text{lorsque } j \rightarrow \infty,$$

d'où la convergence absolue presque sûrement des séries de (1.10) par le test de Cauchy pour les séries à termes positifs.

3) Si on choisit $X_v \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on peut vérifier que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $(X_v, X_{v+1}, \dots, X_{v+k}) \stackrel{d}{=} (X_{v+nS}, X_{v+1+nS}, \dots, X_{v+k+nS})$, $k, n \in \mathbb{N}$ qui généralise $(X_v, X_{v+1}) \stackrel{d}{=} (X_{v+nS}, X_{v+1+nS})$. En utilisant la relation (1.9), le fait que $X^{(v)} \stackrel{d}{=} A_v X^{(v-1)} + B_v$, $v \in \{1, \dots, S-1\}$ et $X^{(0)} \stackrel{d}{=} A_0 X^{(S-1)} + B_0$, on déduit que pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} (X_{v+nS}, X_{v+1+nS}) &= (\mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \mathbb{A}_{nS+v+1} X_{(n-1)S+v+1} + \mathbb{B}_{nS+v+1}) \\ &\vdots \\ &\stackrel{d}{=} (X^{(v)}, \mathbb{A}_{v+1}(A_{v+1} X^{(v)} + B_{v+1}) + \mathbb{B}_{v+1}) \\ &\stackrel{d}{=} (X^{(v)}, \mathbb{A}_{v+1} X^{(v+1)} + \mathbb{B}_{v+1}) \\ &\stackrel{d}{=} (X^{(v)}, X^{(v+1)}) \stackrel{d}{=} (X_v, X_{v+1}). \end{aligned}$$

4) La condition $\prod_{v=0}^{S-1} E|A_v|^r < 1$ implique que $\gamma^S(A) < 0$. En effet, par l'inégalité de

Jensen pour la fonction convexe $-\log x$, on a :

$$\begin{aligned} E\left(\log \left| \prod_{v=0}^{S-1} A_v \right|^r\right) &= r \sum_{v=0}^{S-1} E(\log |A_v|) = r\gamma^S(A) \\ &\leq \log \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(|A_v|^r) \right) < 0, \end{aligned}$$

De même $\prod_{v=0}^{S-1} E(|B_v|^r) < \infty$ implique que $\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |B_v|) < \infty$. En effet, par l'inégalité de Jensen,

$$\begin{aligned} E\left(\log \left| \prod_{v=0}^{S-1} B_v \right|^r\right) &= r \sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |B_v|) - r \sum_{v=0}^{S-1} E(\log^- |B_v|) \\ &\leq \log \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(|B_v|^r) \right) < \infty, \end{aligned}$$

ce qui implique que $\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |B_v|) < \infty$. Par conséquent, les résultats (1), (2) et

(3) du théorème 1.1 sont vérifiés. De plus, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned}
 (E(|X^{(v)}|^r))^{1/r} &= \left(E \left(\left| \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} \right|^r \right) \right)^{1/r} \\
 &\leq \sum_{j=1}^{\infty} \left(E \left(\left| \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} \right|^r \right) \right)^{1/r} \\
 &= \sum_{j=1}^{\infty} \left(E \left(\left| \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \right|^r \right) \right)^{1/r} (E(|\mathbb{B}_{jS+v}|^r))^{1/r} \\
 &= (E(|\mathbb{B}_{S+v}|^r))^{1/r} \sum_{j=1}^{\infty} (E(|\mathbb{A}_{iS+v}|^r))^{(j-1)/r} < \infty.
 \end{aligned}$$

Donc, $E(|X^{(v)}|^r) < \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ et les séries définies dans (1.10) sont convergentes en moyenne d'ordre r .

5) Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, X_{nS+v}^* définie dans (1.15) converge presque sûrement vers la série définie dans (1.10), alors par (1) – (3) du théorème 1.1 et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, on déduit que

$$E(|X_{nS+v}^*|^r) \rightarrow E(|X^{(v)}|^r), \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Ainsi, pour $X_v = 0$ p.s, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a $E(|X_{nS+v}(0)|^r) \rightarrow E(|X^{(v)}|^r)$, ceci vient de fait que $X_{nS+v}(0) \stackrel{d}{=} X_{nS+v}^*$. Pour une variable initiale quelconque X_0 et X_v données par (1.13), avec $v \in \{1, \dots, S-1\}$, on déduit de l'équation (1.14) que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned}
 E \left(|X_{nS+v}(X_v) - X_{nS+v}(0)|^r \right) &\leq E \left(\left| \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \right|^r \right) \cdot E(|X_v|^r) \\
 &= \left(E(|\mathbb{A}_{S+v}|^r) \right)^n \cdot E(|X_v|^r) \\
 &= \left(E \left(\left| \prod_{i=0}^{S-1} \mathbb{A}_i \right|^r \right) \right)^n \cdot E(|X_v|^r) \\
 &= \left(\prod_{i=0}^{S-1} E(|\mathbb{A}_i|^r) \right)^n \cdot E(|X_v|^r) \rightarrow 0,
 \end{aligned}$$

chaque fois que $E(|X_v|^r) < \infty$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

6) De la relation (1.9), on déduit que (1.11) est vérifiée à chaque fois que $E(X^{(v)m})$ existe. Les équations (1.11) déterminent $E(X^{(v)m})$ successivement pour $m = 1, \dots, [r]$. Le coefficient $E(\mathbb{A}_v^k)$ de $E(X^{(v)k})$ satisfait $|E(\mathbb{A}_v^k)| \leq E(|\mathbb{A}_v|^k) < 1$ parce que $f(x) = x^{-1} \log E(|\mathbb{A}_v|^x)$ est une fonction convexe en x dans $]0, r]$.

(En effet, $f(x) \rightarrow 0$, si $x \rightarrow 0$ et $f(r) = 0$, $f'(0) < 0$ et $f'(r) > 0$. Autrement dit, $h(x) = E|\mathbb{A}_v|^x$ convexe sur $[0, r]$ parce que $h''(x) > 0$ sur $[0, r]$).

Dans la démonstration du théorème suivant, on aura besoin des notations suivantes : Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on pose

$$\begin{aligned}
 Y_k^{(v)} &= -\log |\mathbb{A}_{kS+v}| = -\sum_{i=0}^{S-1} \log |A_{i+v+kS}| \stackrel{d}{=} -\sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|, \quad T_k^{(v)} = \log |\mathbb{B}_{kS+v}|, \\
 S_k^{(v)} &= \sum_{i=1}^k Y_i^{(v)} \stackrel{d}{=} -\sum_{i=1}^{kS} \log |A_i|, \quad k \in \mathbb{N}^*
 \end{aligned} \tag{1.17}$$

On définit la moyenne tronquée de $Y^{(v)} = -\log |\mathbb{A}_v| \stackrel{d}{=} -\sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|$ comme suit :

$$M_{\mathbb{A}_v}(y) = E(Y^{(v)+} \wedge y) = \int_0^y P(Y^{(v)} > x) dx \quad y > 0.$$

Théorème 1.2.

1. Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$ et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $P(\mathbb{B}_v = C_v(1 - \mathbb{A}_v)) = 1$ pour un certain $C_v \in \mathbb{R}$, alors

$$X_{nS+v} = \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} (X_v - C_v) + C_v \text{ p.s.}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1.$$

- (a) Si $\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 1$ p.s, alors toute variable aléatoire $X^{(v)}$ est une solution de l'équation (1.9) et dans ce cas

$$X_{nS+v} = X_v \text{ p.s.}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

- (b) Si $|\prod_{v=0}^{S-1} A_v| = 1$ p.s et $0 < P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 1) < 1$, alors les solutions de l'équation (1.9) sont celles qui vérifient

$$X^{(v)} - C_v \stackrel{d}{=} -(X^{(v)} - C_v), \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

et $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, pour toute v.a initiale X_0 , avec

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} C_v + (X_v - C_v)Z,$$

où $Z = \pm 1$ avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$ et indépendante de X_0 .

- (c) Si $\prod_{v=0}^{S-1} A_v = -1$ p.s, alors

$$X_{nS+v} = (-1)^n (X_v - C_v) + C_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1.$$

Les solutions de l'équation (1.9) sont celles qui vérifient

$$X^{(v)} - C_v \stackrel{d}{=} -(X^{(v)} - C_v), \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

et $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$ si et seulement si $X_v \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$. Dans ce cas,

$$X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad n \geq 1.$$

- (d) Si $\prod_{i=1}^n A_i \xrightarrow{P} 0$, alors $X^{(v)} = C_v$ p.s est l'unique solution de l'équation (1.9) et $X_{nS+v} \xrightarrow{P} C_v$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, pour toute variable initiale X_0 .

2. Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$ et $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$, alors

- (a) Si

$$\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0 \text{ p.s} \quad \text{et} \quad \int_1^\infty \frac{\log q}{M_{\mathbb{A}_v}(\log q)} dP(|\mathbb{B}_v| \leq q) < \infty, \quad (1.18)$$

alors l'équation (1.9) admet une unique solution en distribution $X^{(v)}$ qui est donnée par (1.10) telle que la série dans (1.10) converge absolument presque sûrement. De plus,

$$X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\} \quad \text{pour toute variable initiale } X_0.$$

(b) Si l'une des deux conditions de (a) n'est pas vérifiée, alors l'équation (1.9) n'admet pas de solutions et

$$|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty \quad \text{pour toute variable initiale } X_0.$$

Preuve.

1. Supposons que $|\prod_{v=0}^{S-1} A_v| = 1$ p.s. On pose

$$P(\mathbb{A}_v = 1) = p, \quad \psi_v(t) = E(e^{itX^{(v)}}), \quad \phi_{\pm}^{(v)}(t) = E(e^{it\mathbb{B}_v} / \mathbb{A}_v = \pm 1), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

L'équation (1.9) devient comme suit :

$$\begin{aligned} \psi_v(t) &= E(e^{itX^{(v)}}) \\ &= P(\mathbb{A}_v = 1)E(e^{itX^{(v)}} / \mathbb{A}_v = 1) + P(\mathbb{A}_v = -1)E(e^{itX^{(v)}} / \mathbb{A}_v = -1) \\ &= P(\mathbb{A}_v = 1)E(e^{it(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)} / \mathbb{A}_v = 1) + P(\mathbb{A}_v = -1)E(e^{it(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)} / \mathbb{A}_v = -1) \\ &= P(\mathbb{A}_v = 1)E(e^{itX^{(v)}})E(e^{it\mathbb{B}_v} / \mathbb{A}_v = 1) + P(\mathbb{A}_v = -1)E(e^{-itX^{(v)}})E(e^{it\mathbb{B}_v} / \mathbb{A}_v = -1) \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\psi_v(t) = p\psi_v(t)\phi_+^{(v)}(t) + (1-p)\psi_v(-t)\phi_-^{(v)}(t). \quad (1.19)$$

(a) Si $p = 1$, alors de l'équation (1.19), $\phi_+^{(v)}(t) = 1$ et $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v) = (1, 0)$ p.s. Dans ce cas, toute fonction $\psi_v(t)$ est une solution de l'équation (1.19), c'est-à-dire toute variable aléatoire $X^{(v)}$ est une solution de l'équation (1.9). Par l'équation (1.4), on déduit que

$$X_{nS+v} = X_{(n-1)S+v} = \dots = X_v \quad \text{p.s., } v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

(b) Si $p < 1$, alors de l'équation (1.19),

$$\frac{\psi_v(t)}{\psi_v(-t)} = p\phi_+^{(v)}(t) \frac{\psi_v(t)}{\psi_v(-t)} + (1-p)\phi_-^{(v)}(t),$$

ce qui implique que

$$\frac{\psi_v(t)}{\psi_v(-t)} = \frac{(1-p)\phi_-^{(v)}(t)}{1-p\phi_+^{(v)}(t)}, \quad \text{dans un voisinage de zéro où } \psi_v(t) \neq 0.$$

Si pour un certain t dans ce voisinage, $\phi_+^{(v)}(t) \neq 1$, alors

$$|1-p\phi_+^{(v)}(t)| > |1-p| \geq |(1-p)\phi_-^{(v)}(t)|.$$

Ceci contredit le fait que $|\psi_v(t)|/|\psi_v(-t)| = 1$. Par conséquent,

$\phi_+^{(v)}(t) = 1$ et $|\phi_-^{(v)}(t)| = 1$ qui implique qu'il existe $C_v \in \mathbb{R}$ tel que $\phi_-^{(v)}(t) = e^{i2tC_v}$.

Maintenant, l'équation (1.19) devient

$$\psi_v(t) = p\psi_v(t) + (1-p)\psi_v(-t)\phi_-^{(v)}(t)$$

qui implique que $\psi_v(t) = \psi_v(-t)\phi_-^{(v)}(t) = e^{i2tC_v}\psi_v(-t)$. Ceci implique que

$$e^{-itC_v}\psi_v(t) = e^{itC_v}\psi_v(-t).$$

Cette dernière équation est équivalente à

$$e^{-itC_v}E(e^{itX^{(v)}}) = e^{itC_v}E(e^{-itX^{(v)}}),$$

c'est-à-dire

$$E(e^{it(X^{(v)}-C_v)}) = E(e^{-it(X^{(v)}-C_v)}).$$

Donc,

$$X^{(v)} - C_v \stackrel{d}{=} -(X^{(v)} - C_v), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (1.20)$$

C'est clair que $X^{(v)} = C_v$ satisfait l'équation (1.20) et donc de l'équation (1.9), on a

$$\mathbb{A}_v C_v + \mathbb{B}_v = C_v \text{ p.s.} \quad \text{qui implique} \quad \mathbb{B}_v = C_v(1 - \mathbb{A}_v) \text{ p.s.} \quad (1.21)$$

Les solutions de l'équation (1.9) sont celles qui vérifient l'équation (1.20) et par éteration sur l'équation (1.4), on déduit que

$$\begin{aligned} X_{nS+v} &= \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v} \\ &= \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + C_v(1 - \mathbb{A}_{nS+v}) \\ &= \mathbb{A}_{nS+v} (X_{(n-1)S+v} - C_v) + C_v \\ &\vdots \\ &= \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} (X_v - C_v) + C_v \text{ p.s.}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}. \end{aligned}$$

ce qui implique que

$$X_{nS+v} - C_v = \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} (X_v - C_v) \stackrel{d}{=} Z(X_v - C_v), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

où $Z = \pm 1$ avec une probabilité égale à $\frac{1}{2}$, indépendante de X_0 et donc indépendante de X_v , $v \in \{1, \dots, S-1\}$.

C'est clair que dans le cas où $p = 1$, chaque C_v satisfait l'équation (1.21). Toute variable $X^{(v)}$ vérifie l'équation (1.9) et de l'équation (1.4), on déduit que

$$X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}$$

(c) Si $p = 0$, c'est-à-dire $\mathbb{A}_v = -1$ p.s, alors de l'équation (1.4)

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v} = -X_{(n-1)S+v} + 2C_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

qui implique que $X_{nS+v} - C_v = -(X_{(n-1)S+v} - C_v)$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, et après n itération, on trouve

$$X_{nS+v} = (-1)^n (X_v - C_v) + C_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Les solutions de l'équation (1.9) sont celles qui vérifient

$$X^{(v)} - C_v \stackrel{d}{=} -(X^{(v)} - C_v), \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

et $X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ si et seulement si $X_v \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Dans ce cas,

$$X_{S+v} - C_v = -(X_v - C_v) \stackrel{d}{=} -(X^{(v)} - C_v), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

c'est-à-dire $X_{S+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}$.

$$X_{2S+v} - C_v = -(X_{S+v} - C_v) \stackrel{d}{=} -(X^{(v)} - C_v), v \in \{0, \dots, S-1\},$$

c'est-à-dire $X_{2S+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}$.

(d) Par hypothèse $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \xrightarrow{P} 0$, alors

$$\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v \xrightarrow{P} 0, \text{ pour toute v.a initiale } X_0.$$

Maintenant, si $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$ pour une certaine variable initiale X_0 , alors par l'équation (1.14), on déduit que

$$X_{nS+v}(X_v) - X_{nS+v}(X'_v) \xrightarrow{d} 0, v \in \{0, \dots, S-1\}$$

donc $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$ pour la variable initiale X'_0 . Par conséquent, $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$ pour toute variable initiale. En particulier, $X^{(v)}$ satisfait,

$$X_{nS+v}(X^{(v)}) \stackrel{d}{=} X^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

En effet,

$$X_{S+v}(X^{(v)}) = \mathbb{A}_{S+v} X^{(v)} + \mathbb{B}_{S+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)},$$

$$X_{2S+v}(X^{(v)}) = \mathbb{A}_{2S+v} X_{S+v} + \mathbb{B}_{2S+v} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_{2S+v} X^{(v)} + \mathbb{B}_{2S+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}.$$

Donc, pour chaque $n \in \mathbb{N}$,

$$X_{nS+v}(X^{(v)}) \stackrel{d}{=} X^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Par conséquent $X^{(v)}$ est l'unique solution de (1.9). Maintenant puisqu'on a supposé qu'il existe $C_v \in \mathbb{R}$ qui est une solution de (1.9), alors $X^{(v)} = C_v$ p.s., $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

2. (a) Puisque $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s, alors $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v \rightarrow 0$ p.s pour toute variable initiale X_0 . Rappelons que de la relation (1.16), on a

$$X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v, v \in \{0, \dots, S-1\},$$

où X_{nS+v}^* donnée par (1.15) est la somme partielle de la série définie par (1.10). Donc, la condition suffisante de convergence en distribution de X_{nS+v}^* est la convergence presque sûrement de la série dans (1.10). La convergence absolue presque sûrement de la série dans (1.10) est assurée par la deuxième condition dans (1.18). En effet, les variables $Y_k^{(v)}$ et $T_k^{(v)}$ définies par la relation (1.17) vérifient la relation suivante :

$$P(|Y_k^{(v)}| < \infty) = 1 = P(T_k^{(v)+} < \infty), k \geq 1,$$

et l'intégrale dans (1.18) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\int_{[0, \infty]} \frac{y}{E(Y^{(v)+} \wedge y)} dP(T_1^{(v)+} \leq y) < \infty. \quad (1.22)$$

Sous la condition $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$, il est clair que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s implique $\sum_{i=1}^n \log |\mathbb{A}_{iS+v}| \rightarrow -\infty$ p.s, ceci implique $P(-\log |\mathbb{A}_v| > 0) = P(Y^{(v)} > 0) > 0$ et pour

$y = 0$, on suppose que $y/E(Y^{(v)+} \wedge y)$ prend la valeur $1/P(Y^{(v)} > 0) < \infty$.

Maintenant, on va montrer que $S_n^{(v)}$ vérifie pour une certaine constante $c_v > 0$,

$$S_{n-1}^{(v)} - T_n^{(v)} - c_v n \rightarrow \infty \text{ p.s} \quad (1.23)$$

$$\text{qui implique que } \left| \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \right| \cdot |\mathbb{B}_{nS+v}| \cdot e^{nc_v} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$$

Pour montrer (1.23), notons d'abord que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0 \text{ p.s}$ implique que $S_n^{(v)} \rightarrow \infty$.
Maintenant, on considère deux cas.

Cas 1 : Supposons que $E(Y^{(v)+}) = \infty$, alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)+} \rightarrow \infty \text{ p.s.}$$

Par la convergence de l'intégrale dans (1.22), on va montrer que

$$\frac{T_n^{(v)+}}{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)+}} \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (1.24)$$

Pour montrer ceci, on utilise le lemme suivant de Goldie and Maller [94].

Lemme 1.1. *Soient Y_1, Y_2, \dots des variables aléatoires i.i.d non dégénérées en zéro et supposons que $Y_1 + \dots + Y_n \rightarrow \infty \text{ p.s}$, alors il existe une constante c_+ qui dépend de la distribution de Y_1 telle que pour chaque $y \geq 0$,*

$$\frac{y}{E(Y_1^+ \wedge y)} \leq \sum_{n=0}^{\infty} P\left(\max_{1 \leq j \leq n} (Y_1 + Y_2 + \dots + Y_j) \leq y\right) \leq \frac{c_+ y}{E(Y_1^+ \wedge y)}$$

où $y/E(Y_1^+ \wedge y)$ est interprétée comme étant $1/P(Y_1 > 0) < \infty$ au point $y = 0$.

Maintenant les variables $Y_1^{(v)+}, Y_2^{(v)+}, \dots$ vérifient les conditions du lemme 1.1, alors pour $\varepsilon \in]0, 1[$ et en utilisant le fait que $T_n^{(v)}$ est indépendante de $\{Y_k^{(v)}\}_{1 \leq k \leq n-1}$,

$$\begin{aligned} & \sum_{n \geq 1} P(\varepsilon(Y_1^{(v)+} + Y_2^{(v)+} + \dots + Y_{n-1}^{(v)+}) \leq T_n^{(v)+}) \\ &= \int_{[0, \infty[} \sum_{n \geq 1} P(Y_1^{(v)+} + Y_2^{(v)+} + \dots + Y_{n-1}^{(v)+} \leq y/\varepsilon) dP(T_n^{(v)+} \leq y) \\ &\leq \int_{[0, \infty[} \frac{c_+ y/\varepsilon}{E(Y^{(v)+} \wedge (y/\varepsilon))} dP(T_n^{(v)+} \leq y) \\ &\leq \frac{c_+}{\varepsilon} \int_{[0, \infty[} \frac{y}{E(Y^{(v)+} \wedge y)} dP(T_n^{(v)+} \leq y) < \infty \end{aligned}$$

Par le lemme de Borel-Cantelli, on déduit (1.24).

Maintenant, puisque $S_n^{(v)} \rightarrow \infty \text{ p.s}$ et $E(Y^{(v)+}) = \infty$, alors par la proposition 2.6 de Goldie et Maller [94], on déduit que

$$J_-^{(v)} = \int_{[0, \infty[} \left(\frac{y}{M_{\mathbb{A}_v}(y)} \right) |dP(Y^{(v)} \leq -y)| < \infty \quad (1.25)$$

et l'application du lemme 8.1 de Pruitt [123] implique que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)-}}{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)+}} \rightarrow 0 \text{ p.s.} \quad (1.26)$$

Par les relations (1.24), (1.26) et le fait que $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)+} \rightarrow \infty \text{ p.s.}$, on déduit que

$$\frac{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)+} - n - T_n^{(v)+} - \sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)-}}{\sum_{i=1}^{n-1} Y_i^{(v)+}} \rightarrow 1 \text{ p.s.}, \quad (1.27)$$

qui implique la relation (1.23), avec $c_v = 1$.

Cas 2 : Supposons que $E(Y^{(v)+}) < \infty$, alors par la relation (1.22), on déduit que $E(T^{(v)+}) < \infty$. Puisque $S_n^{(v)} \rightarrow \infty \text{ p.s.}$, alors $E(Y^{(v)-}) < \infty$ et $\mu = E(Y^{(v)}) > 0$.

Maintenant, puisque $T_n^{(v)+}/n \rightarrow 0 \text{ p.s.}$ et $(S_{n-1}^{(v)} - n\mu/2)/n \rightarrow \mu/2 > 0 \text{ p.s.}$,

$$\frac{T_n^{(v)+}}{S_{n-1}^{(v)} - n\mu/2} \rightarrow 0 \text{ p.s.},$$

ceci implique que

$$\frac{S_{n-1}^{(v)} - n\mu/2 - T_n^{(v)+}}{S_{n-1}^{(v)} - n\mu/2} \rightarrow 1 \text{ p.s.},$$

ce qui implique (1.23) puisque $S_{n-1}^{(v)} - n\mu/2 \rightarrow \infty \text{ p.s.}$, avec $c_v = \mu/2$.

Finalement, dans les deux cas, (1.23) est vérifiée.

La série (1.10) converge absolument presque sûrement par le test de comparaison avec la série de terme positif $e^{-c_v n}$.

Maintenant, en utilisant le fait que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$, on déduit que

$$X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v \rightarrow X^{(v)} \text{ p.s.}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Avec le même raisonnement que dans 1 (d), on peut vérifier que $X^{(v)}$ donnée par (1.10) est l'unique solution de l'équation (1.9). La condition $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ est imposée pour éviter la dégénérescence de la solution $X^{(v)}$.

2.(b) Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$ et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$ et montrons que si l'une des conditions de (1.18) n'est pas vérifiée, alors $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$. On considère deux cas :

Cas1 : $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0 \text{ p.s.}$ et l'intégrale dans (1.18) diverge.

Pour montrer ce premier cas, on utilise le lemme suivant qui généralise le lemme 5.5 de Goldie et Maller [94].

Lemme 1.2. *Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$ et $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$. Si $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0 \text{ p.s.}$ et $|X_t(X_0)|$ ne tend pas en probabilité vers ∞ , alors X_{nS+v} converge en distribution vers une variable aléatoire $X^{(v)}$ et l'intégrale dans (1.18) est finie.*

Preuve. Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $X_{nS+v} \stackrel{d}{=} X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v$ et $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0 \text{ p.s.}$, alors il suffit de montrer que X_{nS+v}^* converge en distribution. Comme $|X_t|$ ne tend pas vers ∞ en probabilité, alors $|X_{nS+v}^*|$ ne tend pas

vers ∞ en probabilité et par conséquent, il existe une sous-suite $\{n_k\}$ de \mathbb{N} telle que $X_{n_k S+v}^*$ converge en distribution vers $X^{*(v)}$ de fonction de répartition $F^{(v)}$ définie sur \mathbb{R} qui vérifie $F^{(v)}(\infty) - F^{(v)}(-\infty) > 0$, où $F^{(v)}(\infty) = \lim_{x \rightarrow \infty} F^{(v)}(x)$ et $F^{(v)}(-\infty) = \lim_{x \rightarrow -\infty} F^{(v)}(x)$. Maintenant, on peut vérifier facilement que

$$X_{(n_k+1)S+v}^* = X_{n_k S+v}^* + \prod_{i=1}^{n_k} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{(n_k+1)S+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

C'est clair que : $\prod_{i=1}^{n_k} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{(n_k+1)S+v} \rightarrow 0$ p.s et $X_{(n_k+1)S+v}^* \xrightarrow{d} X^{*(v)}$.
Notons que pour $n > m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} X_{nS+v}^* &= \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} = \sum_{j=1}^m \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} + \sum_{j=m+1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} \\ &= X_{mS+v}^* + \prod_{i=1}^m \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{(m+1)S+v} + \dots + \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{nS+v} \\ &= X_{mS+v}^* + \prod_{i=1}^m \mathbb{A}_{iS+v} \left(\mathbb{B}_{(m+1)S+v} + \dots + \prod_{i=m+1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{nS+v} \right) \\ &= X_{mS+v}^* + \prod_{i=1}^m \mathbb{A}_{iS+v} \sum_{j=1}^{n-m} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{(i+m)S+v} \mathbb{B}_{(j+m)S+v} \end{aligned}$$

On pose :

$$X_{nS+v}^* = X_{mS+v}^* + \prod_{i=1}^m \mathbb{A}_{iS+v} \left(X_{(n-m)S+v}^* \circ \theta^{Sm} \right), \quad (1.28)$$

où θ est le shift qui ajoute 1 à l'indice de \mathbb{A}_{iS+v} et l'indice de \mathbb{B}_{iS+v} .

On prend $n = n_k + 1$ et $m = 1$, alors on déduit de l'équation (1.28) que

$$X_{(n_k+1)S+v}^* = X_{S+v}^* + \mathbb{A}_{S+v} \left(X_{n_k S+v}^* \circ \theta^S \right), \quad (1.29)$$

et on écrit

$$X_{(n_k+1)S+v}^* = \mathbb{B}_{S+v} + \mathbb{A}_{S+v} \tilde{X}_{n_k S+v}, \quad (1.30)$$

avec $\tilde{X}_{n_k S+v}$ indépendante de $(\mathbb{A}_{S+v}, \mathbb{B}_{S+v})$ et $\tilde{X}_{n_k S+v} \stackrel{d}{=} X_{n_k S+v}^*$.

L'équation (1.30) implique que sur $\{|X^{*(v)}| < \infty\}$,

$$X^{*(v)} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_{S+v} X^{*(v)} + \mathbb{B}_{S+v}, \quad X^{*(v)} \text{ indépendante de } (\mathbb{A}_{S+v}, \mathbb{B}_{S+v}). \quad (1.31)$$

Maintenant, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit $X^{(v)}$ une variable aléatoire qui a la distribution de $X^{*(v)}$ conditionnellement sur $\{|X^{*(v)}| < \infty\}$ c'est-à-dire $X^{(v)}$ est de distribution

$$G^{(v)}(x) = (F^{(v)}(x) - F^{(v)}(-\infty)) / (F^{(v)}(\infty) - F^{(v)}(-\infty)), \quad x \in \mathbb{R}.$$

Maintenant, puisque $\{|X^{*(v)}| < \infty\} = \{|\mathbb{A}_{S+v} X^{*(v)} + \mathbb{B}_{S+v}| < \infty\}$, alors on a

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v, \quad X^{(v)} \text{ indépendante de } (\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v), \quad (1.32)$$

ceci montre que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $X^{(v)}$ est une solution de l'équation (1.9). Par itération sur l'équation (1.32), on déduit que

$$\begin{aligned}
 X^{(v)} &\stackrel{d}{=} \mathbb{A}_{S+v}X^{(v)} + \mathbb{B}_{S+v} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_{S+v}(\mathbb{A}_{2S+v}X^{(v)} + \mathbb{B}_{2S+v}) + \mathbb{B}_{S+v} \\
 &\stackrel{d}{=} \mathbb{A}_{S+v}\mathbb{A}_{2S+v}X^{(v)} + \mathbb{A}_{S+v}\mathbb{B}_{2S+v} + \mathbb{B}_{S+v} \\
 &\quad \vdots \\
 &\stackrel{d}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}X^{(v)} + \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v}\mathbb{B}_{jS+v} \\
 &\stackrel{d}{=} \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}X^{(v)} + X_{nS+v}^*, \quad X^{(v)} \text{ indépendante de } ((\mathbb{A}_{kS+v}, \mathbb{B}_{kS+v}))_{k=0, \dots, n}.
 \end{aligned}$$

Comme $X^{(v)}$ est finie *p.s* et $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ *p.s*, alors $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}X^{(v)} \rightarrow 0$ *p.s* et par conséquent $X_{nS+v}^* \xrightarrow{d} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Il reste maintenant à montrer que l'intégrale dans (1.18) est finie. Pour montrer ceci, on va utiliser l'inégalité maximale de Grincevičius [97]. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on définit la variable $X_{j,nS+v}^*$ comme suit

$$X_{j,nS+v}^* = \sum_{k=j+1}^n \prod_{i=j+1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v}\mathbb{B}_{kS+v}, \quad (1.33)$$

et on note par "med" la médiane. L'inégalité de Grincevičius généralisée est

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{j=1, \dots, n} \left(X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med} \left(X_{j,nS+v}^* + \prod_{i=j+1}^n \mathbb{A}_{iS+v}y\right)\right) > x\right) \\
 \leq 2P\left(X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}y > x\right), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*.
 \end{aligned}$$

On utilise seulement le cas où $y = 0$. Notons que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $X_{j,nS+v}^* \stackrel{d}{=} X_{(n-j)S+v}^*$. En effet, de la relation (1.33)

$$\begin{aligned}
 X_{j,nS+v}^* &= \mathbb{B}_{(j+1)S+v} + \mathbb{A}_{(j+1)S+v}\mathbb{B}_{(j+2)S+v} + \dots + \mathbb{A}_{(j+1)S+v}\dots\mathbb{A}_{(n-1)S+v}\mathbb{B}_{nS+v} \\
 &\stackrel{d}{=} \mathbb{B}_{S+v} + \mathbb{A}_{S+v}\mathbb{B}_{2S+v} + \dots + \mathbb{A}_{S+v}\dots\mathbb{A}_{(n-j-1)S+v}\mathbb{B}_{(n-j)S+v} \\
 &= X_{(n-j)S+v}^*
 \end{aligned}$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{j=1, \dots, n} \left(X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med} X_{(n-j)S+v}^*\right) > x\right) \\
 \leq 2P\left(X_{nS+v}^* > x\right), \quad x \in \mathbb{R}.
 \end{aligned}$$

Cette inégalité est vérifiée pour les variables $(\mathbb{A}_{S+v}, -\mathbb{B}_{S+v}), \dots, (\mathbb{A}_{nS+v}, -\mathbb{B}_{nS+v}), -X_{nS+v}^*$ et par conséquent,

$$\begin{aligned}
 P\left(\max_{j=1, \dots, n} \left|X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med} X_{(n-j)S+v}^*\right| > x\right) \\
 \leq 2P\left(|X_{nS+v}^*| > x\right), \quad x \geq 0. \quad (1.34)
 \end{aligned}$$

On pose $m_n^{(v)} = \text{med} X_{nS+v}^*$. Pour $1 \leq k \leq n$, la relation (1.34) implique que

$$\begin{aligned} P\left(\max_{j=1,\dots,k} \left| X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} m_{n-j}^{(v)} \right| > x\right) \\ \leq 2P\left(|X_{nS+v}^*| > x\right), \quad x \geq 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Pour k fixé, il existe au moins $x \geq 0$ dans l'ensemble de points $C(X^{(v)})$ de continuité de $X^{(v)}$ tel que $P(|X_{nS+v}^*| > x) \rightarrow P(|X^{(v)}| > x)$. Puisque $X_{nS+v}^* \xrightarrow{d} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors $m_{n-j}^{(v)} \rightarrow m_0^{(v)} = \text{med} X^{(v)}$. Par conséquent, de la relation (1.35), on obtient

$$\begin{aligned} P\left(\max_{j=1,\dots,k} \left| X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} m_0^{(v)} \right| > x\right) \\ \leq 2P\left(|X^{(v)}| > x\right), \quad x \in [0, \infty[\cap C(X^{(v)}). \end{aligned} \quad (1.36)$$

On fait tendre maintenant k vers l'infini, on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\sup_{j \in \mathbb{N}^*} \left| X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} m_0^{(v)} \right| < \infty \text{ p.s.} \quad (1.37)$$

En utilisant la relation (1.37) et le fait que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s, on déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} |X_{nS+v}^*| < \infty \text{ p.s.} \quad (1.38)$$

Par conséquent, on a (parce que $|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v}| \cdot |\mathbb{B}_{nS+v}| = X_{nS+v}^* - X_{(n-1)S+v}^*$),

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left| \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \right| \cdot |\mathbb{B}_{nS+v}| < \infty \text{ p.s.} \quad (1.39)$$

On utilise ce résultat qui généralise le lemme 5.3 de Goldie et Maller [94].

Lemme 1.3. *Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$ et $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0$ p.s. On définit*

$$a_n^{(v)} = \sum_{i=1}^n Y_i^{(v)-} / \sum_{i=1}^n Y_i^{(v)+} \quad \text{et} \quad \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} = e^{-Y_i^{(v)+}}$$

alors

$$\left| \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \right| = \left(\prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \right)^{1-a_n^{(v)}} \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}.$$

De plus, il existe une constante $a_v < 1$ telle que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n^{(v)} < a_v < 1 \text{ p.s.} \quad (1.40)$$

de sorte que dès que $a_n^{(v)} < a_v$ p.s,

$$\prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \leq \left| \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \right| \leq \left(\prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \right)^{1-a_v}. \quad (1.41)$$

Preuve. Puisque $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s, alors $S_n^{(v)} \rightarrow \infty$ p.s et par le résultat de Goldie and Maller [94] (Proposition 2.6), ceci est équivalent à $J_-^{(v)} < E(Y^{(v)+}) = \infty$ ou bien $0 < E(Y^{(v)}) \leq E|Y^{(v)}| < \infty$. Si $J_-^{(v)} < E(Y^{(v)+}) = \infty$, alors la relation (1.26) est vérifiée, c'est-à-dire $a_n^{(v)} \rightarrow 0$ p.s. Si $0 < E(Y^{(v)}) \leq E|Y^{(v)}| < \infty$, alors $a_n^{(v)} \rightarrow E(Y^{(v)-})/E(Y^{(v)+}) < 1$ p.s. Dans les deux cas, il existe une constante a_v qui vérifie la relation (1.40). On a :

$$S_n^{(v)} = \sum_{j=1}^n (Y_j^{(v)+} - Y_j^{(v)-}) = (1 - a_n^{(v)}) \sum_{j=1}^n Y_j^{(v)+} \text{ et par conséquent,}$$

$$\left| \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \right| = e^{-S_n^{(v)}} = \left(\prod_{i=1}^n e^{-Y_i^{(v)+}} \right)^{1-a_n^{(v)}}.$$

Donc, l'inégalité (1.41) est vérifiée à chaque fois que $a_n^{(v)} < a_v < 1$. Maintenant, de la relation (1.39) et la relation (1.41), on déduit que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} |\mathbb{B}_{nS+v}| < \infty \text{ p.s.} \quad (1.42)$$

La convergence $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s implique que $\tilde{\mathbb{A}}_v = \min(|\mathbb{A}_v|, 1) \stackrel{d}{=} \min(|\prod_{i=0}^{S-1} A_i|, 1)$ satisfait $P(\tilde{\mathbb{A}}_v = 1) < 1$.

On utilise ce résultat qui généralise le lemme 5.4 de Goldie and Maller [94].

Lemme 1.4. Si $P\left(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0\right) = 0$, $P\left(0 \leq \prod_{v=0}^{S-1} A_v \leq 1\right) = 1$, $P\left(0 < \prod_{v=0}^{S-1} A_v < 1\right) > 0$,
 $P(\mathbb{B}_v = 0) < P(\mathbb{B}_v \geq 0) = 1$ et $\limsup_{n \rightarrow \infty} \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{nS+v} < \infty$ p.s pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors l'intégrale dans (1.18) est convergente.

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, les variables $(\tilde{\mathbb{A}}_{nS+v}, |\mathbb{B}_{nS+v}|)$ vérifient les conditions du lemme 1.4, alors

$$\int_1^\infty \left(\frac{\log q}{M_{\tilde{\mathbb{A}}_v}(\log q)} \right) dP(|\mathbb{B}_v| \leq q) < \infty, \quad (1.43)$$

où

$$M_{\tilde{\mathbb{A}}_v}(y) = \int_0^y P(-\log \tilde{\mathbb{A}}_v > x) dx = \int_0^y P(Y^{(v)+} > x) dx = \int_0^y P(Y^{(v)} > x) dx = M_{\mathbb{A}_v}(y),$$

qui implique que l'intégrale dans (1.18) est finie.

Maintenant, supposons que l'équation (1.9) admet une solution $X^{(v)}$, si $X_v \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors $X_{nS+v}(X_v) \stackrel{d}{=} X^{(v)}$. Dans le lemme 1.2, on a montré que si $\prod_{i=1}^n A_i \rightarrow 0$ p.s et l'intégrale dans (1.18) diverge, alors $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$ pour toute variable initiale X_0 . Ceci contredit l'existence de la solution $X^{(v)}$ de l'équation (1.9) et par conséquent l'équation (1.9) n'a pas de solutions.

Cas2 : $\prod_{i=1}^n A_i$ ne converge pas vers zéro p.s.

On définit la fonction de concentration de Lévy d'une variable aléatoire Y comme suit

$$Q(Y, \lambda) = \sup_{-\infty < y < +\infty} P(y \leq Y \leq y + \lambda) \quad (1.44)$$

pour chaque $\lambda \geq 0$. C'est clair que $Q(Y, \lambda)$ est non décroissante en fonction de λ qui satisfait $0 \leq Q(Y, \lambda) \leq 1$ pour tout $\lambda \geq 0$.

Le lemme suivant donne les propriétés de la fonction de concentration de Lèvy [121].

Lemme 1.5. *Si X et Y deux variables aléatoires indépendantes, alors*

$$Q(X + Y, \lambda) \leq \min \{Q(X, \lambda), Q(Y, \lambda)\} \quad \text{pour tout } \lambda \geq 0.$$

Pour une variable aléatoire X , on définit la variable aléatoire symétrisée $X^s = X - Y$ où Y est une variable aléatoire indépendante de X et de même distribution que X .

On utilise ce résultat de Petrov [120], (théorème 2.15, page 68).

Lemme 1.6. *Soient Y_1, \dots, Y_n des variables aléatoires i.i.d et $S_n = \sum_{i=1}^n Y_i$. Soient $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ des nombres positifs tels que $\lambda_i \leq \lambda$, $i = 1, \dots, n$, alors*

$$Q(S_n, \lambda) \leq \frac{\Lambda \lambda}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 P(|Y_i^s| \geq \frac{\lambda_i}{2})}}$$

où Λ est une constante positive.

De lemme 1.5, on déduit que

$$Q(S_n^s, \lambda) \leq \frac{\Lambda \lambda}{\sqrt{\sum_{i=1}^n \lambda_i^2 P(|Y_i^s| \geq \frac{\lambda_i}{2})}}$$

Pour $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = \lambda = 2x$, avec $x > 0$, on déduit que

$$P(|S_n^s| \leq x) \leq \frac{\Lambda}{\sqrt{\sum_{i=1}^n P(|Y_i^s| \geq x)}} \tag{1.45}$$

Ce résultat généralise le lemme 5.8 de Goldie and Maller [94].

Lemme 1.7. *Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v = 0) = 0$, $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$ et $\prod_{i=1}^n A_i$ ne converge pas vers zéro p.s, alors $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$.*

Preuve. La condition $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ pour chaque $C \in \mathbb{R}$ et chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ implique que $P(\mathbb{B}_v = 0) < 1$. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, il existe une distribution conditionnelle régulière pour \mathbb{B}_v sachant \mathbb{A}_v . On peut donc définir les fonctions

$$F_m^{(v)}(q) = P(\mathbb{B}_v \leq q | \mathbb{A}_v = m) = P(\mathbb{B}_v \leq q | \prod_{i=0}^{S-1} A_i = m), \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

telles que pour chaque $q \in \mathbb{R}$, $F_m^{(v)}(q)$ en fonction de m est une version de la probabilité conditionnelle $P(\mathbb{B}_v \leq q | \mathbb{A}_v = m)$, tandis que pour chaque $m \in \mathbb{R}$, $F_m^{(v)}(q)$ en fonction de q est une fonction de répartition. Pour chaque $m \in \mathbb{R}$, on note par $F_m^{(v)-}(\cdot)$, la fonction inverse continue à gauche de la fonction $F_m^{(v)}(\cdot)$.

Soit $(U_j)_{j \geq 1}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et indépendantes de la suite $(\mathbb{A}_{jS+v}, \mathbb{B}_{jS+v})_{j \in \mathbb{N}}$ pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, avec chaque variable U_j est uniformément distribuée sur $]0, 1[$. Pour chaque $j \geq 1$, on pose $\mathbb{B}'_{jS+v} = F_{\mathbb{A}_v}^{(v)-}(U_j)$, ainsi de cette manière, on construit la suite $(\mathbb{A}_{jS+v}, \mathbb{B}'_{jS+v})$ i.i.d de même distribution que $(\mathbb{A}_{jS+v}, \mathbb{B}_{jS+v})$ et que \mathbb{B}'_{jS+v} est conditionnellement indépendante de \mathbb{B}_{jS+v} sachant \mathbb{A}_{jS+v} .

Maintenant, on définit les variables aléatoires symétrisées

$$\mathbb{B}_{jS+v}^s = \mathbb{B}_{jS+v} - \mathbb{B}'_{jS+v}, \quad X_{nS+v}^{*s} = \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}^s, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Notons que \mathbb{B}_{jS+v}^s sont dégénérées en zéro seulement si \mathbb{B}_{jS+v} est une fonction de Borel de \mathbb{A}_{jS+v} , i.e., $\mathbb{B}_{jS+v} = f(\mathbb{A}_{jS+v})$. Supposons que ce n'est pas le cas et soit

$\mathcal{F}_n^{(v)} = \sigma\{\mathbb{A}_{S+v}, \dots, \mathbb{A}_{nS+v}\}$, la tribu engendrée par les variables $\mathbb{A}_{S+v}, \dots, \mathbb{A}_{nS+v}$.

On applique l'inégalité (1.45) à la distribution conditionnelle de X_{nS+v}^{*s} sachant $\mathcal{F}_{n-1}^{(v)}$, on obtient pour chaque $x > 0$.

$$P(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)}) \leq \frac{\Lambda}{\sqrt{\sum_{j=1}^n P\left(\left|\prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}^s\right| \geq x | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)}\right)}} \quad p.s. \quad (1.46)$$

Le dénominateur dans (1.46) est différent de zéro pour $x > 0$ suffisamment petit. En effet, sous le conditionnement sur $\mathcal{F}_{n-1}^{(v)}$, on peut considérer $\left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v}\right|$ comme une constante $m > 0$, alors puisque \mathbb{B}_{nS+v}^s est indépendante de $\mathcal{F}_{n-1}^{(v)}$ et $P(|\mathbb{B}_{nS+v}^s| \geq x_0) > 0$ pour un certain $x_0 > 0$, on a

$$P\left(\left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{nS+v}^s\right| \geq x | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)}\right) > 0 \quad \text{pour } 0 < x < x_0/m.$$

En utilisant l'inégalité (1.46) et l'inégalité de Jensen, (pr fonct convexe $1/x$), on obtient

$$\begin{aligned} P^2(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)}) &\leq \frac{\Lambda^2}{E\left(\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\left\{\left|\prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}^s\right| > x\right\}} | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)}\right)} \\ &\leq \Lambda^2 E\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\left\{\left|\prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}^s\right| > x\right\}}} | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)}\right) \quad p.s. \end{aligned}$$

et (pour la fonction convexe x^2)

$$\begin{aligned} P^2(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x) &= E^2(P(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)})) \leq E(P^2(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x | \mathcal{F}_{n-1}^{(v)})) \\ &\leq \Lambda^2 E\left(\frac{1}{\sum_{j=1}^n \mathbb{I}_{\left\{\left|\prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}^s\right| > x\right\}}}\right) \end{aligned} \quad (1.47)$$

Supposons que pour un certain $x > 0$, la série dans le dénominateur de (1.47) converge p.s, alors on a

$$P\left(\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{\left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{nS+v}^s\right| > x\right\}\right) = 0 \quad (1.48)$$

qui implique que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s. En effet, puisqu'on a supposé que les variables \mathbb{B}_{nS+v}^s ne sont dégénérées en zéro pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors on peut choisir $\delta > 0$ de telle sorte que $P(|\mathbb{B}_{nS+v}^s| > \delta) > 0$. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on définit les événements suivants,

$$M_n^{(v)} = \left\{\left|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v}\right| > x/\delta\right\}, \quad Q_n^{(v)} = \{|\mathbb{B}_{nS+v}^s| > \delta\}$$

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $Q_n^{(v)}$ est indépendant de $M_n^{(v)}, M_{n-1}^{(v)}, \dots, M_1^{(v)}$ et par le lemme de Loève pour les événements indépendants [[114], page 258], on déduit que

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} M_n^{(v)} \cap Q_n^{(v)}\right) &\geq P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} M_n^{(v)}\right) \inf_{n=m, m+1, \dots} P(Q_n^{(v)}) \\ &= P(|\mathbb{B}_v^s| > \delta) P\left(\bigcup_{n=m}^{\infty} M_n^{(v)}\right) \end{aligned}$$

et ceci montre que si $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{(v)}) > 0$, alors une infinité de $M_n^{(v)} \cap Q_n^{(v)}$ se réalise avec une probabilité positive, i.e., $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} M_n^{(v)} \cap Q_n^{(v)}) > 0$ et par conséquent, $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \cdot |\mathbb{B}_{nS+v}^s| > x\}) > 0$, ceci contredit la relation (1.48). Donc on a $P(\limsup_{n \rightarrow \infty} \{|\prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} > x/\delta\}) = 0$ et par conséquent $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s, mais ceci contredit le fait qu'on a supposé dans lemme 1.7 que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}$ ne converge pas vers zéro. Donc la convergence qu'on a supposé pour la série dans le dénominateur de (1.47) n'est vraie, i.e., la série diverge p.s pour chaque $x > 0$. Par le théorème de convergence monotone, on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $|X_{nS+v}^{*s}| \xrightarrow{P} \infty$. Maintenant, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a

$$\begin{aligned} &P(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x) \\ &= E\left(P(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v)\right) \\ &\geq E\left(P(|X_{nS+v}^{*s}| \leq x, \left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}'_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v)\right) \\ &= E\left(P\left(\left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v - \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}'_{kS+v} - \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x, \left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}'_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v\right)\right) \\ &\geq E\left(P\left(\left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| + \left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}'_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x, \left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}'_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v\right)\right) \\ &\geq E\left(P\left(\left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v\right) \times P\left(\left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}'_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v\right)\right) \\ &= E\left(P^2\left(\left|\sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} X_v\right| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v\right)\right) \\ &= E\left(P^2\left(|X_{nS+v}(X_v)| \leq x/2 | \mathcal{F}_n^{(v)}, X_v\right)\right) \geq P^2\left(|X_{nS+v}(X_v)| \leq x/2\right), \end{aligned}$$

qui montre que $|X_{nS+v}(X_v)| \xrightarrow{P} \infty$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et par conséquent $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$.

Maintenant, on considère le cas où $\mathbb{B}_{nS+v} = f(\mathbb{A}_{nS+v})$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors

$$\begin{aligned} X_{2nS+v} &\stackrel{d}{=} X_{2nS+v}^* + \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{A}_{iS+v} X_v \\ &= \sum_{j=1}^{2n} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v} + \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{A}_{iS+v} X_v \\ &= \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \tilde{\mathbb{B}}_{jS+v} + \prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} X_v \end{aligned}$$

où $(\tilde{\mathbb{A}}_{iS+v}, \tilde{\mathbb{B}}_{iS+v}) = (\mathbb{A}_{(2i-1)S+v} \mathbb{A}_{2iS+v}, \mathbb{B}_{(2i-1)S+v} + \mathbb{A}_{(2i-1)S+v} \mathbb{B}_{2iS+v})$ est i.i.d.

Notons que si $\prod_{i=1}^{2n} \mathbb{A}_{iS+v} = \prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s, alors

$\prod_{i=1}^{2n+1} \mathbb{A}_{iS+v} = \mathbb{A}_{S+v} \prod_{i=1}^{2n} \mathbb{A}_{(i+1)S+v} = \mathbb{A}_{S+v} \left(\prod_{i=1}^{2n} \mathbb{A}_{iS+v} \circ \theta^S \right) \rightarrow 0$ p.s, où θ est le shift qui ajoute 1 à l'indice $iS+v$ de \mathbb{A}_{iS+v} , par conséquent $\prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \rightarrow 0$ p.s. Puisqu'on a supposé que $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}$ ne converge pas vers zéro p.s, alors $\prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v}$ ne converge pas vers zéro p.s. Si $\tilde{\mathbb{B}}_{nS+v}$ est une fonction de Borel de $\tilde{\mathbb{A}}_{nS+v}$, $\tilde{\mathbb{B}}_{nS+v} = g(\tilde{\mathbb{A}}_{nS+v})$, qui inclut le cas $\tilde{\mathbb{B}}_{nS+v} = C_v(1 - \tilde{\mathbb{A}}_{nS+v})$ pour une certaine constante C_v , alors $\mathbb{B}_{S+v} + \mathbb{A}_{S+v} \mathbb{B}_{2S+v} = g(\mathbb{A}_{S+v} \mathbb{A}_{2S+v})$ et par la proposition 1 de Grincevicius [98] on montre que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit $\mathbb{B}_v = C_v(1 - \mathbb{A}_v)$ p.s pour une certaine constante C_v , soit $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v) = (1, C_v^*)$ pour une certaine constante C_v^* . Maintenant le premier cas n'est pas possible parce qu'il contredit l'hypothèse que $P(\mathbb{B}_v = C(1 - \mathbb{A}_v)) < 1$ pour toute constante C . Si $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v) = (1, C_v^*)$, alors $C_v^* \neq 0$ parce que $P(\mathbb{B}_v = 0) < 1$. Par la relation (1.16), on déduit que

$|X_{nS+v}(X_v)| \stackrel{d}{=} |nC_v^* + X_v| \xrightarrow{P} \infty$ pour toute variable initiale X_0 et par conséquent $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$ pour toute variable initiale X_0 .

Si $\tilde{\mathbb{B}}_{nS+v}$ n'est pas une fonction de Borel de $\tilde{\mathbb{A}}_{nS+v}$, alors avec le même raisonnement (page 25 à 26), on montre que

$$|X_{2nS+v}| \stackrel{d}{=} \left| \sum_{j=1}^n \prod_{i=1}^{j-1} \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} \tilde{\mathbb{B}}_{jS+v} + \prod_{i=1}^n \tilde{\mathbb{A}}_{iS+v} X_v \right| \xrightarrow{P} \infty \text{ pour toute variable initiale } X_0.$$

Par la relation (1.28), on déduit que

$$X_{(2n+1)S+v} = \mathbb{B}_{S+v} + \mathbb{A}_{S+v} \left(X_{2nS+v} \circ \theta^S \right),$$

et puisque $P(\mathbb{A}_{S+v} = 0) = P(\prod_{i=0}^{S-1} \mathbb{A}_i = 0) = 0$, alors $|X_{(2n+1)S+v}(X_v)| \xrightarrow{P} \infty$.

Par conséquent, $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$ pour toute variable initiale X_0 .

Maintenant, comme pour le premier cas, si l'équation (1.9) admet une solution $X^{(v)}$, alors si $X_v \stackrel{d}{=} X^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors $X_{nS+v}(X_v) \stackrel{d}{=} X^{(v)}$. Or dans le lemme 1.7, on a montré que si $\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}$ ne converge pas vers zéro p.s, alors $|X_t(X_0)| \xrightarrow{P} \infty$ pour toute variable initiale X_0 . Ceci contredit l'existence de la solution $X^{(v)}$ de l'équation (1.9) et par conséquent l'équation (1.9) n'a pas de solution.

1.4 Équations aux récurrences stochastiques multidimensionnelles

On a déjà mentionné dans l'introduction que cette équation à coefficients iid a été étudiée par Kesten [105], Bougerol et Picard [41] et dans le cas des coefficients

indépendants et périodiquement distribués, l'équation a été étudiée par Aknouche (voir ex Aknouche [19], [15]). Dans cette section, on généralise les résultats de Bougerol et Picard pour le cas des coefficients ipd. On note par $\mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices carrées de tailles $d \times d$. On note par $|\cdot|$ n'importe quelle norme dans \mathbb{R}^d et par $\|\cdot\|$ la norme matricielle associée, i.e., pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$,

$$\|A\| = \sup_{|x|=1} |Ax|. \quad (1.49)$$

Soit l'équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (1.50)$$

où $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires ipd de période $S \in \mathbb{N}^*$ définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$.

Comme dans le cas univarié, l'équation aux récurrences stochastique (1.50) peut s'écrire sous la forme suivante

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad n \in \mathbb{Z}, v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (1.51)$$

avec $\mathbb{A}_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+v-i}$, $\mathbb{B}_{nS+v} = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{nS+v-i} B_{nS+v-j}$ et pour chaque $v_0 \in \{0, \dots, S-1\}$, $\{(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite iid à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$.

L'exposant de Lyapounov associé à la suite de matrices aléatoires ipd, $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est défini, lorsque $\sum_{j=0}^{S-1} E \log^+ \|A_j\| < \infty$, par

$$\gamma^S(A) = \inf \left\{ \frac{1}{n} E \log \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\|, n \geq 1 \right\}. \quad (1.52)$$

Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la suite $(\mathbb{A}_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est i.i.d., on déduit par l'application du théorème ergodique sous-additif (voir Furstenberg et Kesten [83], Kingman[108]) que

$$\gamma^S(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\| \quad p.s \quad (1.53)$$

De plus l'égalité (1.53) peut être généralisée au cas où le produit matriciel n'est pas nécessairement multiple de S . En effet,

$$\frac{1}{S} \gamma^S(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_n A_{n-1} \cdots A_1\| \quad p.s$$

et plus généralement pour chaque $t \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{S} \gamma^S(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_t \cdots A_{t-n+1}\| \quad p.s \quad (1.54)$$

Les conditions suffisantes d'existence et d'unicité de la solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire sont données par le théorème suivant.

Théorème 1.3. *Supposons que $\sum_{j=0}^{S-1} E \log^+ \|A_j\| < \infty$, $\sum_{j=0}^{S-1} E \log^+ |B_j| < \infty$. Si $\gamma^S(A) < 0$, alors pour chaque $t \in \mathbb{Z}$ la serie*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j} \quad (1.55)$$

converge absolument presque sûrement et le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50).

Preuve. Après quelques itérations en arrière dans l'équation (1.50), il apparait que la série (1.55) est candidate à être une solution périodiquement stationnaire de l'équation (1.50). Par conséquent, la condition suffisante est la convergence presque sûrement de la série (1.55). Considérons la norme du terme général de la série (1.55),

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j} \right| &= \exp \left\{ j \left(\frac{1}{j} \log |A_t \cdots A_{t-j+1} B_{t-j}| \right) \right\} \\ &\leq \exp \left\{ j \left(\frac{1}{j} \log \|A_t \cdots A_{t-j+1}\| + \frac{1}{j} \log^+ |B_{t-j}| \right) \right\}. \end{aligned}$$

En utilisant la loi forte des grands nombres et le fait que $\sum_{j=0}^{S-1} E \log^+ |B_j| < \infty$, on déduit que $\frac{1}{j} \log^+ |B_{t-j}| \rightarrow 0$ p.s lorsque $j \rightarrow \infty$.

De plus, en utilisant la relation (1.54), on a

$$\begin{aligned} \left| \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{n-j} \right|^{\frac{1}{j}} &\leq \exp \left\{ \frac{1}{j} \log \|A_t \cdots A_{t-j+1}\| + \frac{1}{j} \log^+ |B_{t-j}| \right\} \\ &\xrightarrow{p.s} \exp \left\{ \frac{1}{S} \gamma^S(A) \right\} < 1 \quad \text{lorsque } j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

d'où la série (1.55) converge absolument presque sûrement par le test de Cauchy. Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement périodiquement stationnaire parce que pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, X_t est une fonction mesurable de la suite ipd $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$.

Notons que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la solution strictement stationnaire $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ de l'équation (1.51) est donnée par

$$X_{nS+v} = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \mathbb{A}_{(n-i)S+v} \mathbb{B}_{(n-j)S+v} \quad (1.56)$$

La solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est unique pour l'équation (1.50), i.e., pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est unique pour l'équation (1.51). En effet, soit $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une autre solution strictement périodiquement stationnaire de (1.50), i.e., $(Y_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une autre solution strictement stationnaire de (1.51), alors après n itérations de l'équation (1.51),

$$\begin{aligned} X_{nS+v} - Y_{nS+v} &= \mathbb{A}_{nS+v} \mathbb{A}_{(n-1)S+v} \cdots \mathbb{A}_{S+v} (X_v - Y_v) \\ &= A_{nS+v} A_{nS+v-1} \cdots A_{v+1} (X_v - Y_v) \xrightarrow{P} 0, \end{aligned}$$

ceci viens du fait que $\|A_{nS+v} A_{nS+v-1} \cdots A_{v+1}\| \rightarrow 0$ p.s lorsque $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, $Y_{nS+v} \xrightarrow{d} X_v, \forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque $(Y_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est strictement stationnaire, alors sa distribution marginale est égale à celle de $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$. Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, le processus $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution strictement stationnaire de l'équation (1.51), alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50).

Pour l'équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{N} \quad (1.57)$$

où $\{(A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires ipd de période $S \in \mathbb{N}^*$ définie sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans $\mathcal{M}_d(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^d$. L'équation (1.57) peut s'écrire toujours sous la forme

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad n \geq 1, v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (1.58)$$

L'unique solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.57) est donnée par le résultat suivant.

Théorème 1.4. *Supposons que $\sum_{j=0}^{S-1} E \log^+ \|A_j\| < \infty$, $\sum_{j=0}^{S-1} E \log^+ |B_j| < \infty$. Si $\gamma^S(A) < 0$, alors*

1. $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)}$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$, avec $\{X^{(v)}, 0 \leq v \leq S-1\}$ satisfait l'identité en distribution suivante

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v, \quad (1.59)$$

où $X^{(v)}$ et $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v)$ sont indépendantes, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$.

2. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (1.59) admet une unique solution en distribution qui est donnée par

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, \quad (1.60)$$

où la série dans (1.60) converge absolument presque sûrement.

Si on choisit $X_0 \stackrel{d}{=} X^{(0)}$, alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par l'équation (1.57) est strictement périodiquement stationnaire.

Sans hypothèse supplémentaire, la condition suffisante du théorème 1.3 pour l'existence et l'unicité de la solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50) n'est pas nécessaire. On a vu dans le cas d'une equation aux récurrences stochastique univariée que si $\mathbb{A}_{nS+v} = 1$ p.s, alors $X_{nS+v} = X_{(n-1)S+v}$, $\forall n \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, chaque processus strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution de l'équation (1.50), en particulier $X_{nS+v} = C_v$, $\forall n \in \mathbb{Z}, C_v \in \mathbb{R}$. Pour éviter cette situation de dégénérescence, on introduit la condition d'irréductibilité périodique de l'équation (1.50). Rappelons qu'un sous espace affine de \mathbb{R}^d est la translation $x + V$ d'un sous espace V . Autrement dit.

Définition 1.1. *Une partie H de \mathbb{R}^d est dite sous-espace affine s'il existe un point $x \in H$ et un sous espace $V \subset \mathbb{R}^d$ tels que $H = x + V = \{x + v; v \in V\}$.*

On définit les conditions pour l'irréductibilité périodique de l'équation (1.50).

Définition 1.2.

1. Pour $v \in \{0, \dots, S-1\}$, un sous-espace affine H_v de \mathbb{R}^d est dit invariant sous l'équation (1.51), si $\{\mathbb{A}_{S+v}x + \mathbb{B}_{S+v}; x \in H_v\}$ est contenu dans H_v p.s. Autrement dit, un sous-espace affine H de \mathbb{R}^d est dit invariant sous l'équation (1.50) le long d'un certain canal $v_0 \in \{0, \dots, S-1\}$, si $\{\mathbb{A}_{S+v_0}x + \mathbb{B}_{S+v_0}; x \in H\}$ est contenu dans H p.s.
2. Pour $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (1.51) est dite irréductible, si \mathbb{R}^d est l'unique sous-espace affine invariant sous l'équation (1.51). Autrement dit, l'équation (1.50) est dite irréductible le long d'un certain canal $v_0 \in \{0, \dots, S-1\}$, si \mathbb{R}^d est l'unique sous-espace affine invariant le long du canal v_0 .
3. L'équation (1.50) est périodiquement irréductible si pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (1.51) est irréductible. Autrement dit, l'équation (1.50) est périodiquement irréductible, si elle est irréductible le long de chaque canal $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Sous la condition d'irréductibilité périodique de l'équation (1.50), ce résultat qui généralise le théorème de Bougerol et Picard [41], n'exige aucune condition sur les espérances des parties positives des logarithmes de A_t et B_t .

Théorème 1.5. *Supposons que l'équation (1.50) est périodiquement irréductible et admet une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, alors*

1. $\prod_{i=0}^k A_{-i} \rightarrow 0$ p.s, lorsque $k \rightarrow \infty$.
2. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la série

$$X_{nS+v} = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{A}_{(n-i)S+v} \mathbb{B}_{(n-k)S+v} \quad (1.61)$$

converge presque sûrement et le processus ainsi défini $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (1.51). Autrement dit, la série

$$X_t = \sum_{k=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{k-1} A_{t-i} B_{t-k}$$

converge presque sûrement et le processus ainsi défini $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50).

Supposons que $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.57). Il est clair que le processus $\{(X_t, A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{N}}$ est strictement périodiquement stationnaire. Ce processus peut être étendu au processus strictement périodiquement stationnaire $\{(X_t, A_t, B_t)\}_{t \in \mathbb{Z}}$, ceci vient du fait que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, le processus strictement stationnaire $\{(X_{nS+v}, \mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})\}_{n \in \mathbb{N}}$ peut être étendu au processus strictement stationnaire $\{(X_{nS+v}, \mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})\}_{n \in \mathbb{Z}}$ qui vérifie l'équation (1.51) presque sûrement. Par conséquent, le processus étendu $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50).

Notons que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on peut associer à chaque équation (1.58) une chaîne de Markov sur \mathbb{R}^d . On pose $X_v = x$, alors à l'instant $nS+v$ la chaîne sera à l'état X_{nS+v} , où $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}$ est une solution de l'équation (1.51). Le noyau de transition $P_v^{(S)}$ de cette chaîne de Markov est défini pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$ et chaque $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ par

$$P_v^{(S)}(x, C) = P(X_{S+v} \in C / X_v = x) = P(\mathbb{A}_{S+v}x_v + \mathbb{B}_{S+v} \in C).$$

La distribution $P_v^{(S)}$ -invariante de la chaîne $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}$ est une mesure de probabilité m_v sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ telle que

$$m_v(C) = \int P_v^{(S)}(x, C) dm_v(x), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d). \quad (1.62)$$

La solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50) est équivalente aux S distributions $P_v^{(S)}$ -invariantes m_v , $0 \leq v \leq S-1$ qui sont liées par

$$\begin{aligned} m_v(C) &= \int P(X_v \in C / X_{v-1} = x) dm_{v-1}(x) \\ &= \int P(A_v x + B_v \in C) dm_{v-1}(x), \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d), \quad 1 \leq v \leq S-1. \end{aligned}$$

En effet, soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de (1.50) de S lois marginales m_v , $0 \leq v \leq S-1$. La solution $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est non-anticipative, alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, X_v est indépendante de $\{(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})\}_{n \geq 1}$ et pour chaque $C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$,

$$\begin{aligned} m_v(C) &= P(X_{S+v} \in C) = P(\mathbb{A}_{S+v}X_v + \mathbb{B}_{S+v} \in C) \\ &= \int P(\mathbb{A}_{S+v}x + \mathbb{B}_{S+v} \in C) dP_{X_v}(x) \\ &= \int P_v^{(S)}(x, C) dm_v(x), \end{aligned}$$

ceci montre que m_v est une distribution $P_v^{(S)}$ -invariante.

Inversement, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit m_v une distribution $P_v^{(S)}$ -invariante dans le sens de la définition (1.62). Considérons S variables X_v , $0 \leq v \leq S-1$, qui sont liées par l'équation $X_v = A_v X_{v-1} + B_v$ telles que X_v indépendante de la suite $\{(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})\}_{n \geq 1}$ et de loi m_v . Pour $n \geq 1$, on pose $X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v}X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}$, alors $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}$ est une chaîne de Markov de noyau de transition $P_v^{(S)}$. Puisque la loi m_v de X_v est $P_v^{(S)}$ -invariante, alors $(X_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}$ est un processus strictement stationnaire et c'est une solution non-anticipative strictement stationnaire de l'équation (1.58). Autrement dit $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.57). Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ peut être étendu au processus strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ qui est une solution de l'équation (1.50).

Lemme 1.8. *Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit m_v une distribution $P_v^{(S)}$ -invariante, alors le sous espace affine H_v de dimension minimale tel que $m_v(H_v) = 1$ est invariant sous l'équation (1.51).*

Preuve. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} 1 = m_v(H_v) &= P(X_{S+v} \in H_v) = P(\mathbb{A}_{S+v}X_v + \mathbb{B}_{S+v} \in H_v) \\ &= E \left(\int \mathbb{I}_{H_v}(\mathbb{A}_{S+v}x + \mathbb{B}_{S+v}) dm_v(x) \right) \end{aligned}$$

Si $L_v = \{x \in \mathbb{R}^d; \mathbb{A}_{S+v}x + \mathbb{B}_{S+v} \in H_v, p.s\}$, alors $m_v(L_v) = 1$ et le sous espace affine $L_v \cap H_v$ est tel que $m_v(L_v \cap H_v) = 1$. Comme H_v est de dimension minimale, alors on déduit que $H_v \subset L_v$ et ceci montre que $\{\mathbb{A}_{S+v}x + \mathbb{B}_{S+v}; x \in H_v\} \subset H_v$ p.s et par conséquent H_v est invariant sous l'équation (1.51).

Preuve du théorème 1.5. Soit $Aff(d)$ l'ensemble des applications affines de \mathbb{R}^d dans \mathbb{R}^d définies par

$$f(x) = Ax + b, \quad x \in \mathbb{R}^d \tag{1.63}$$

où $A \in \mathcal{M}_d(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^d$. L'ensemble $Aff(d)$ est un espace vectoriel de dimension $d(d+1)$. La composition des applications affines définit un produit sur $Aff(d)$. En effet, si $f(x) = Ax + b$ et $g(x) = Cx + d$, alors

$$(f \circ g)(x) = ACx + Ad + b.$$

Avec ce produit, $Aff(d)$ est un semi-groupe topologique.

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soient les applications affines aléatoires F_{nS+v} et Γ_{nS+v} , qu'on note aussi par la suite F_{nS+v}^ω et Γ_{nS+v}^ω , définies par :

$$\begin{aligned} F_{nS+v}(x) &= \mathbb{A}_{nS+v}x + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad n \in \mathbb{Z}, \\ \Gamma_{nS+v} &= F_v \circ F_{-S+v} \circ \dots \circ F_{-nS+v}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Soient μ_v la loi de F_v , $\mu_n^{(v)}$ la loi de Γ_{nS+v} et $\nu_v = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \mu_n^{(v)}$ qui sont des mesures de probabilités sur l'espace $\text{Aff}(d)$. On note par \mathbb{S}_v le support topologique de ν_v qui est un sous-semi-groupe fermé de $\text{Aff}(d)$.

Puisque pour $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (1.51) est irréductible et admet une solution non anticipative strictement stationnaire, alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, il existe une distribution $P_v^{(S)}$ -invariante m_v qui n'est pas portée par un hyperplan affine, c'est-à-dire n'est pas portée par un sous espace affine de dimension $(d-1)$.

Définition 1.3. Soit \mathcal{G} un semi-groupe topologique. On dit que \mathcal{G} agit sur l'espace topologique \mathcal{B} si on peut associer continuellement à chaque (g, x) dans $\mathcal{G} \times \mathcal{B}$ un élément $g \bullet x$ de \mathcal{B} de telle sorte que

$$(g_1 g_2) \bullet x = g_1 \bullet (g_2 \bullet x), \quad g_1, g_2 \in \mathcal{G}, \quad x \in \mathcal{B}.$$

Définition 1.4. Soit \mathcal{G} un semi-groupe topologique agissant sur \mathcal{B} . Si μ (resp ν) une mesure de probabilité sur \mathcal{G} (resp sur \mathcal{B}), alors on note par $\mu \star \nu$ la distribution sur \mathcal{B} qui satisfait

$$\int_{\mathcal{B}} f(x) d(\mu \star \nu)(x) = \int_{\mathcal{G}} \int_{\mathcal{B}} f(g \bullet x) d\mu(g) d\nu(x)$$

pour toute fonction mesurable bornée f sur \mathcal{B} . On dit que ν est μ -invariante si $\mu \star \nu = \nu$.

Pour chaque $(f, x) \in \text{Aff}(d) \times \mathbb{R}^d$, on associe le vecteur $f(x)$ dans \mathbb{R}^d , i.e., $\text{Aff}(d)$ agit sur \mathbb{R}^d dans le sens de la définition 1.3. Donc pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la distribution $P_v^{(S)}$ -invariante m_v est une distribution μ_v -invariante dans le sens de la définition 1.4. On utilise le lemme suivant de Bougerol et Lacroix [44].

Lemme 1.9. Soit \mathcal{G} un semi-groupe topologique agissant sur l'espace dénombrable de cardinal 2^{nd} localement compact \mathcal{B} . Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments aléatoires indépendantes de \mathcal{G} de même distribution μ définis sur le même espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . Si ν est μ -invariante sur \mathcal{B} , alors pour chaque $\omega \in \Omega_0$ tel que $P(\Omega_0) = 1$, il existe une mesure de probabilité ν_ω sur \mathcal{B} telle que la suite

$$\{X_1(\omega)X_2(\omega) \cdots X_n(\omega)g\nu, \quad n \geq 1\}$$

converge faiblement vers ν_ω lorsque $n \rightarrow \infty$ pour toute $g \in \mathcal{G}_0$ tel que $\lambda(\mathcal{G}_0) = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n-1} \mu^n(\mathcal{G}_0) = 1$.

Par le lemme 1.9, il existe $\Omega_0 \subset \Omega$ tel que $P(\Omega_0) = 1$ et pour chaque $\omega \in \Omega_0$, ils existent des mesures de probabilités $m_v^{(\omega)}$, $0 \leq v \leq S-1$, sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$ de propriétés suivantes : pour chaque fonction bornée et continue $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi(\Gamma_{nS+v}^\omega(x)) dm_v(x) = \int \phi(x) dm_v^{(\omega)}(x) \quad (1.64)$$

et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, il existe $\text{Aff}(d)_v \subset \text{Aff}(d)$ tel que $\nu_v(\text{Aff}(d)_v) = 1$ et pour chaque $f \in \text{Aff}(d)_v$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int \phi((\Gamma_{nS+v}^\omega \circ f)(x)) dm_v(x) = \int \phi(x) dm_v^{(\omega)}(x) \quad (1.65)$$

Soit H_v^ω le plus petit sous espace affine de \mathbb{R}^d tel que $m_v^{(\omega)}(H_v^\omega) = 1$. On utilise le lemme suivant.

Lemme 1.10. *Si pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, il existe une distribution $P_v^{(S)}$ -invariante m_v qui n'est pas portée par un hyperplan affine, alors pour chaque $\omega \in \Omega_0$, on a :*

1. la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \geq 1\}$ est bornée dans l'espace vectoriel $\text{Aff}(d)$.
2. pour n'importe quelle limite $\Gamma_{\infty(v)}^\omega$ de la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \geq 1\}$, on a :
 - (a) l'ensemble $\{\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f, f \in \mathbb{S}_v\}$ est bornée
 - (b) pour chaque $f \in \mathbb{S}_v$, $(\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) = \Gamma_{\infty(v)}^\omega(\mathbb{R}^d) = H_v^\omega$

Preuve. On fixe $\omega \in \Omega_0$. Supposons que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \geq 1\}$ n'est pas bornée, alors on peut trouver une sous suite $\{n_i S + v\}_{i \geq 1}$ et une application affine Γ_v^ω telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \|\Gamma_{n_i S + v}^\omega\| = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\Gamma_{n_i S + v}^\omega}{\|\Gamma_{n_i S + v}^\omega\|} = \Gamma_v^\omega.$$

avec $\|\cdot\|$ est une norme sur l'espace vectoriel $\text{Aff}(d)$.

Pour $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit $H_v = \{x \in \mathbb{R}^d; \Gamma_v^\omega(x) = 0\}$ et $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Si x n'appartient pas à H_v , alors $\|\Gamma_{n_i S + v}^\omega(x)\| \rightarrow +\infty$ et $\phi(\Gamma_{n_i S + v}^\omega(x)) \rightarrow 0$ lorsque $i \rightarrow \infty$. Ceci implique que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int \phi(\Gamma_{n_i S + v}^\omega(x)) dm_v(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} \int \mathbb{I}_{H_v}(x) \phi(\Gamma_{n_i S + v}^\omega(x)) dm_v(x) \quad (1.66)$$

En utilisant la relation (1.64), on déduit que

$$\left| \int \phi(x) dm_v^{(\omega)}(x) \right| \leq m_v(H_v) \sup_x |\phi(x)| \quad (1.67)$$

Puisque $m_v^{(\omega)}$ est une mesure de probabilité, alors $m_v(H_v) = 1$. De plus, puisque la distribution $P_v^{(S)}$ -invariante m_v n'est pas portée par un hyperplan affine, alors H_v est égale à \mathbb{R}^d . Donc $\Gamma_v^\omega(x) = 0, \forall x \in \mathbb{R}^d$, mais ceci contredit le fait que $\|\Gamma_v^\omega\| = 1$. Par conséquent, la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \geq 1\}$ est bornée sur $\text{Aff}(d)$.

Maintenant, pour $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit $\Gamma_{\infty(v)}^\omega$ la limite de la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \geq 1\}$, alors par la relation (1.65), on déduit que pour chaque $f \in \text{Aff}(d)_v$,

$$\int \phi((\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(x)) dm_v(x) = \int \phi(x) dm_v^{(\omega)}(x) \quad (1.68)$$

pour toute fonction continue et bornée $\phi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$. L'égalité (1.68) est vérifiée pour toute application affine $f \in \mathbb{S}_v$ parce que $\nu_v(\mathbb{S}_v) = 1$. Avec le même raisonnement qu'on a utilisé dans la partie (i), on déduit (2)(a) de lemme 1.10, c'est-à-dire que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'ensemble $\{\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f, f \in \mathbb{S}_v\}$ est borné.

De la relation (1.68), on déduit que pour chaque $f \in \mathbb{S}_v$,

$$m_v^{(\omega)}(C) = m_v\{x \in \mathbb{R}^d; (\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(x) \in C\}, \quad C \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d) \quad (1.69)$$

On pose $C = H_v^\omega$ dans (1.69), alors puisque $m_v^{(\omega)}(H_v^\omega) = 1$, on déduit que m_v est portée par $\{x \in \mathbb{R}^d; (\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(x) \in H_v^\omega\}$.

Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la distribution $P_v^{(S)}$ -invariante m_v n'est pas portée par un hyperplan affine, alors ceci implique que l'ensemble $(\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) \subset H_v^\omega$.

Maintenant, on pose $C = (\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d)$ dans (1.69), alors on déduit que

$$m_v^{(\omega)}((\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d)) = m_v(\mathbb{R}^d) = 1 = m_v^{(\omega)}(H_v^\omega).$$

Puisque H_v^ω est le plus petit sous espace affine qui vérifie $m_v^{(\omega)}(H_v^\omega) = 1$, alors on déduit que $(\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f)(\mathbb{R}^d) = H_v^\omega$. Puisque par (1.64), les relations (1.65) et (1.68) sont vérifiées pour l'application identité, $f = Id_{\mathbb{R}^d}$, alors $(\Gamma_{\infty(v)}^\omega)(\mathbb{R}^d) = H_v^\omega$, ce qui montre (2)(b) de lemme 1.10.

Pour la suite de la preuve du théorème 1.5, soit $\Omega_1 = \{\omega \in \Omega_0; \Gamma_{nS+v}^\omega \in \mathbb{S}_v, n \in \mathbb{N}\}$, alors $P(\Omega_1) = 1$. Soit $\omega \in \Omega_1$ et soit $\Gamma_{\infty(v)}^\omega$ la limite de la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \geq 1\}$, alors par le lemme 1.10, on déduit que l'ensemble $T_v = \{\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f, f \in \mathbb{S}_v\}$ est borné. Comme pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\Gamma_{\infty(v)}^\omega \in \mathbb{S}_v$ et \mathbb{S}_v est un sous semi groupe fermé de $Aff(d)$, alors l'ensemble T_v est aussi un semi groupe, sa fermeture K_v est un semi groupe compact. Ceci implique que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, il existe une application affine $h_v \in K_v$ telle que $h_v \circ h_v = h_v$ et $G_v = \{h_v \circ f \circ h_v, f \in K_v\}$ est un groupe compact. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soit λ_v une mesure de Haar sur G_v (voir Halmos [100]) telle que $\lambda_v(G_v) = 1$ et soit $z \in \mathbb{R}^d$ tel que

$$z = \int_{G_v} g(0) d\lambda_v(g).$$

Puisque la mesure de Haar est invariante sous la translation à gauche $g(z) = z$ pour toute application dans G_v . En particulier, pour $f \in \mathbb{S}_v$,

$$(h_v \circ \Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ f \circ h_v)(z) = z \tag{1.70}$$

Soit $g_v = h_v \circ \Gamma_{\infty(v)}^\omega$ et V_v un sous espace affine de \mathbb{R}^d définie par $V_v = \{f(h_v(z)); f \in \mathbb{S}_v\}$. Pour chaque $f \in \mathbb{S}_v$, $f(V_v)$ est inclus dans V_v . Puisque chaque équation (1.51) est irréductible, alors $V_v = \mathbb{R}^d$. Par conséquent, $g_v(\mathbb{R}^d) = \{z\}$. Puisque $g_v \in \mathbb{S}_v$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors par le lemme 1.10 (b), on déduit que

$$H_v^\omega = (\Gamma_{\infty(v)}^\omega \circ g_v)(\mathbb{R}^d) = \Gamma_{\infty(v)}^\omega(\{z\})$$

Soit $Z_v(\omega) = \Gamma_{\infty(v)}^\omega(z)$, alors par le lemme 1.10 (b), on déduit que $\Gamma_{\infty(v)}^\omega(\mathbb{R}^d) = \{Z_v(\omega)\}$. En d'autres termes, $\Gamma_{\infty(v)}^\omega$ est une application affine qui satisfait $\Gamma_{\infty(v)}^\omega(x) = Z_v(\omega)$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, ceci montre que la suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \in \mathbb{N}\}$ converge vers $\Gamma_{\infty(v)}^\omega$. La suite $\{\Gamma_{nS+v}^\omega, n \in \mathbb{N}\}$ converge vers $\Gamma_{\infty(v)}^\omega$ pour chaque $\omega \in \Omega_1$ et donc pour chaque $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^k \mathbb{A}_{-iS+v} x = \lim_{k \rightarrow \infty} (\Gamma_{kS+v}(x) - \Gamma_{kS+v}(0)) = 0 \text{ p.s.}, \tag{1.71}$$

ce qui prouve (1) du théorème 1.5. De plus, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{A}_{-iS+v} \mathbb{B}_{-kS+v} = \lim_{m \rightarrow \infty} \Gamma_{mS+v}(0) = Z_v \text{ p.s.}$$

Par stationnarité, pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, il existe Z_{nS+v} telle que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^m \prod_{i=0}^{k-1} \mathbb{A}_{(n-i)S+v} \mathbb{B}_{(n-k)S+v} = Z_{nS+v} \text{ p.s.} \quad (1.72)$$

Maintenant, soit $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50), alors pour chaque $n \in \mathbb{N}$ et chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$Y_v = F_v(Y_{-S+v}) = (F_v \circ F_{-S+v} \circ \dots \circ F_{-nS+v})(Y_{(-n-1)S+v}) = \Gamma_{nS+v}(Y_{(-n-1)S+v}),$$

qui implique

$$Y_v - Z_v = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\Gamma_{nS+v}(Y_{(-n-1)S+v}) - \Gamma_{nS+v}(0) \right) \quad (1.73)$$

On a pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} |\Gamma_{nS+v}(Y_{(-n-1)S+v}) - \Gamma_{nS+v}(0)| &= \left| \prod_{i=0}^n \mathbb{A}_{-iS+v} Y_{(-n-1)S+v} \right| \\ &\leq \left\| \prod_{i=0}^n \mathbb{A}_{-iS+v} \right\| |Y_{(-n-1)S+v}|. \end{aligned}$$

Par (1) du théorème 1.5, $\left\| \prod_{i=0}^n \mathbb{A}_{-iS+v} \right\| \rightarrow 0$ p.s lorsque $n \rightarrow \infty$. Puisque la loi de $Y_{(-n-1)S+v}$ ne dépend pas de n , alors $\left\| \prod_{i=0}^n \mathbb{A}_{-iS+v} \right\| |Y_{(-n-1)S+v}| \xrightarrow{P} 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ et par la relation (1.73), on déduit que $Y_v = Z_v$ pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$. De la même manière, on peut vérifier que pour chaque $n \in \mathbb{Z}$, $Y_{nS+v} = Z_{nS+v}$. Par conséquent, le processus $(Z_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ défini par (1.72) est l'unique solution strictement stationnaire de (1.51). Autrement dit, $(Z_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution strictement périodiquement stationnaire de (1.50).

Le résultat suivant qui généralise le théorème 2.5 de Bougerol et Picard [41] donne les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50).

Théorème 1.6. *Supposons que l'équation (1.50) est périodiquement irréductible et*
 $\sum_{i=0}^{S-1} E \log^+ \|A_i\| < \infty$, $\sum_{i=0}^{S-1} E \log^+ |B_i| < \infty$, *alors l'équation (1.50) admet une unique solution non anticipative strictement périodiquement stationnaire si et seulement si l'exposant de Lyapounov $\gamma^S(A)$ est strictement négatif.*

Preuve. Supposant qu'il existe une solution non anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50). Pour montrer que l'exposant de Lyapounov associé à la suite ipd, $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement négatif, on utilise ce résultat qui généralise le Lemme 2.1 de Bougerol et Picard [42].

Lemme 1.11. *Soit $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires ipd et supposons que $\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ \|M_v\|) < \infty$. Si*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|M_n M_{n-1} \dots M_1\| = 0 \text{ p.s,}$$

alors l'exposant de Lyapounov $\gamma^S(M)$ associé à $(M_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est strictement négatif.

Soit M_t la transposée de la matrice A_{-t} , $t \in \mathbb{Z}$, alors $\|M_t M_{t-1} \dots M_1\| \rightarrow 0$ *p.s* si et seulement si $\|A_{-1} A_{-2} \dots A_{-t}\| \rightarrow 0$ *p.s*. L'exposant de Lyapounov associé à la suite $(M_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est aussi égale à $\gamma^S(A)$. On a montré dans la preuve du théorème 1.5 que $A_{-1} A_{-2} \dots A_{-t} \rightarrow 0$ *p.s* lorsque $t \rightarrow \infty$. Par le lemme 1.11, on déduit que $\gamma^S(A) < 0$. Inversement, on a déjà démontré dans le théorème 1.3 que la condition $\gamma^S(A) < 0$ est suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (1.50).

1.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié l'équation aux récurrences stochastique unilatérale et bilatérale. Dans le cas unilatéral, nous avons montré que sous la condition que l'exposant de Lyapounov associé à la suite des coefficients est strictement négatif, le processus stochastique défini par l'équation aux récurrences stochastique converge en distribution vers des variables aléatoires indépendamment du choix de la variable initiale qui est indépendante de la suite des coefficients. Nous avons montré que lorsqu'on fixe les variables initiales égales en distribution aux variables limites, le processus stochastique défini par l'équation aux récurrences stochastique est strictement périodiquement stationnaire. Nous avons montré que sous des conditions supplémentaires sur les moments des coefficients de l'équation aux récurrences stochastique, les variables limites ont des moments d'ordres supérieurs finis. Dans le cas bilatéral, nous avons montré que la condition suffisante pour que l'équation aux récurrences stochastique bilatérale admette une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire est que l'exposant de Lyapounov associé à la suite des coefficients soit strictement négatif. Nous avons montré que sous la condition supplémentaire que l'équation aux récurrence stochastique est périodiquement irréductible, la condition suffisante pour l'existence de la solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire est aussi nécessaire.

Chapitre 2

Théorie du Renouvellement et Comportement des queues

2.1 Introduction

Le comportement asymptotique des queues de la distribution marginale de la solution stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique $X_t = A_t X_{t_1} + B_t$, $t \in \mathbb{Z}$, a été étudié par Kesten [105], Goldie [93], Grey [96] et Grincevičius [97] lorsque $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d. Dans le cas où les variables A_t sont des matrices et B_t sont des vecteurs, Kesten [105] a établi un théorème de renouvellement qu'il a utilisé pour démontrer que dans le cas où $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des matrices aléatoires positives, la distribution stationnaire est à variation régulière. Dans le cas où $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont des variables aléatoires à valeurs dans \mathbb{R} , Goldie [93] démontre un théorème de renouvellement implicite spécifique qu'il a utilisé pour montrer que la distribution stationnaire est à variation régulière. Dans cette partie, on généralise le théorème de renouvellement et le théorème de variation régulière de Goldie [93] pour le cas d'une suite $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ i.p.d.

2.2 Théorie de renouvellement

Considérons une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de variables aléatoires positives i.i.d de même distribution de probabilité F avec $F(0) = 0$. Les variables X_n représentent les durées de vie d'une pièce dans une machine. La durée de fonctionnement de la machine après n renouvellements de la pièce est représentée par le processus de renouvellement $(S_n)_{n \in \mathbb{N}}$ défini par :

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

Par convention $S_0 = 0$ et l'indice 0 est considéré comme le renouvellement numéro zéro.

Le processus de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ qui représente le nombre de renouvellements de la pièce dans l'intervalle de temps $[0, t]$ est défini en fonction du processus de renouvellement par :

$$N_t = \sum_{n=0}^{\infty} 1_{\{S_n \leq t\}}.$$

On associe au processus de comptage $(N_t)_{t \geq 0}$ une fonction de renouvellement qu'on note par $U(t)$, $t \geq 0$, définie par :

$$U(t) = E(N_t), \quad t \geq 0.$$

La fonction de renouvellement $U(t)$ peut être écrite sous la forme suivante :

$$U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F^{(n)}(t), \quad t \geq 0,$$

où $F^{(n)}$ est la distribution de probabilité de S_n , avec $F^{(0)} = \delta_0$ la mesure de Dirac en 0 et pour chaque $n \geq 1$, $F^{(n)} = F * F^{(n-1)}$ sont les itérées successives de F pour le produit de convolution $*$.

2.2.1 Théorème de renouvellement à support positif

L'objectif du théorème de renouvellement est d'étudier le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement $U(t)$ lorsque t tend vers l'infini. Ce problème est lié au comportement asymptotique de la solution Z de l'équation de renouvellement

$$Z(t) = z(t) + \int_0^t Z(t-x)F(dx), \quad t > 0, \quad (2.1)$$

où z est une fonction mesurable et bornée sur des intervalles finis, Z est une fonction positive inconnue et F est une mesure de probabilité à support dans \mathbb{R}^+ , avec $F(0) = 0$ et d'espérance

$$m = \int_0^{\infty} xF(dx) = \int_0^{\infty} (1 - F(x))dx \leq \infty$$

L'équation (2.1) peut s'écrire dans la forme d'équation de convolution suivante

$$Z = z + F * Z.$$

Le théorème suivant donne la solution de l'équation de renouvellement (2.1) qui s'écrit en fonction de la fonction de renouvellement U (voir W. Feller [74]).

Théorème 2.1.

1. $U(t) < \infty$ pour tout $t \geq 0$,
2. Si z est bornée, alors la fonction

$$Z(t) = \int_0^t z(t-x)U(dx), \quad t > 0 \quad (2.2)$$

est l'unique solution de l'équation de renouvellement (2.1) qui est bornée sur des intervalles finis.

Avec la convention que $Z(t) = z(t) = 0$ pour $t < 0$, on peut écrire la solution de l'équation de renouvellement (2.1) dans la forme $Z = U * z$.

Le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement U dépend de la nature de la mesure de probabilité F , c'est-à-dire selon que F soit arithmétique ou non-arithmétique.

Définition 2.1. Une mesure de probabilité F sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est dite arithmétique si elle est concentrée sur l'ensemble de points de la forme $0, \pm\lambda, \pm2\lambda, \dots$. Autrement dit, si son support est contenu dans $\lambda\mathbb{Z}$. Le plus grand λ avec cette propriété s'appelle le pas de F .

Le théorème suivant donne la première forme du théorème de renouvellement qui traite le comportement asymptotique de la fonction de renouvellement pour des mesures de probabilités F quelconques à support dans \mathbb{R}^+ (voir W. Feller [74]).

Théorème 2.2.

1. Si F n'est pas arithmétique, alors pour tout $h > 0$,

$$U(t) - U(t - h) \rightarrow \frac{h}{m}, \quad t \rightarrow \infty.$$

2. Si F est arithmétique, alors on a la même limite seulement lorsque h est un multiple du pas λ .

Avant de donner la deuxième forme générale du théorème de renouvellement qui traite le comportement asymptotique de la solution Z de l'équation de renouvellement (2.1), on donne quelques cas particuliers.

On suppose que la mesure de probabilité F n'est pas arithmétique et d'espérance $m < \infty$. Si $z(t) = 1$ pour $t \in [a, b[$, $0 \leq a < b < \infty$, et $z(t) = 0$ si $t \notin [a, b[$, alors le comportement asymptotique de la solution Z est donné par

$$Z(t) = U(t - a) - U(t - b) \rightarrow \frac{b - a}{m}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Si la fonction z est étagé sur $[0, \infty[$: Soit I_1, \dots, I_n des intervalles dans $[0, \infty[$ deux-à-deux disjoints de longueurs finies l_1, \dots, l_n avec z prend les valeurs a_1, \dots, a_n sur I_1, \dots, I_n et nulle en dehors de ces intervalles, alors

$$Z(t) \rightarrow \frac{1}{m} \sum_{k=1}^n a_k l_k = \frac{1}{m} \int_0^\infty z(x) dx. \quad (2.4)$$

L'intégrale de Riemann d'une fonction z est définie en termes d'approximation de fonctions étagées et par conséquent la relation (2.4) sera vérifiée à chaque fois que z est Riemann intégrable. La définition d'une fonction directement Riemann intégrable est la suivante.

Définition 2.2. Soit z une fonction définie de \mathbb{R} dans \mathbb{R} . Pour $h > 0$ et $k \in \mathbb{Z}$, soient \underline{m}_k et \overline{m}_k , le plus grand et le plus petit nombres qui vérifient $\underline{m}_k \leq z(t) \leq \overline{m}_k$, $(k - 1)h \leq t < kh$, alors la fonction z est dite directement Riemann intégrable (D.R.I) si les deux séries de Riemann suivantes

$$\underline{\sigma} = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{m}_k, \quad \overline{\sigma} = h \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{m}_k. \quad (2.5)$$

sont finies et tendent vers la même limite quand h tend vers zéro.

Pour $h > 0$, on pose $z_k(t) = 1$ si $(k - 1)h \leq t < kh$, $z_k(t) = 0$ sinon et on définit les deux séries,

$$\underline{z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{m}_k z_k, \quad \overline{z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{m}_k z_k,$$

alors l'intégrale de la fonction z est la limite commune quand h tend vers zéro des intégrales de \underline{z} et \overline{z} . Soit Z_k la solution de l'équation de renouvellement (2.1) correspondante à z_k , alors les solutions de (2.1) correspondantes aux fonctions \underline{z} et \overline{z} sont

$$\underline{Z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \underline{m}_k Z_k, \quad \overline{Z} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \overline{m}_k Z_k.$$

Par le théorème de renouvellement, on a $Z_k(t) \rightarrow h/m$, $t \rightarrow \infty$ pour chaque k et par conséquent,

$$\underline{Z}(t) \rightarrow \frac{\underline{\sigma}}{m} \quad \text{et} \quad \overline{Z}(t) \rightarrow \frac{\overline{\sigma}}{m}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Si z est directement Riemann intégrable, alors

$$Z(t) \rightarrow \frac{1}{m} \int_0^\infty z(x) dx, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.6)$$

Si F est arithmétique avec un pas λ , la solution de l'équation de renouvellement (2.1) est de la forme

$$Z(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} z(t - k\lambda) u_k,$$

où $u_k \rightarrow \frac{\lambda}{m}$. On peut vérifier que pour chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$Z(t + n\lambda) \rightarrow \frac{\lambda}{m} \sum_{i=1}^\infty z(t + i\lambda), \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.7)$$

pourvu que le serie converge qui est le cas lorsque la fonction z est directement Riemann intégrable. On a ainsi la deuxième forme du théorème de renouvellement qui traite le comportement asymptotique de la solution Z de l'équation de renouvellement (2.1) (voir W. Feller [74]).

Théorème 2.3. *Supposons que z est une fonction directement Riemann intégrable, alors la solution Z de l'équation de renouvellement (2.1) satisfait (2.6) si F n'est pas arithmétique et satisfait (2.7) si F est arithmétique.*

2.2.2 Théorème de renouvellement à support dans \mathbb{R}

Supposons maintenant que la mesure de probabilité F vérifie $F(]-\infty, 0]) > 0$, $F(]0, \infty[) > 0$ et F n'est pas arithmétique. La définition d'une mesure de probabilité transiente est la suivante (voir W. Feller [74]).

Définition 2.3. *La mesure de probabilité F est dite transiente si $U(I) = \sum_{n=0}^\infty F^{(n)}(I)$ est finie pour chaque intervalle fini.*

Dans ce cas, l'équation de renouvellement est définie par :

$$Z(t) = Z(t) = z(t) + F * Z(t) = z(t) + \int_{-\infty}^\infty Z(t - x) F(dx). \quad (2.8)$$

Le théorème de renouvellement dans ce cas est donné comme suit (voir Feller [74]).

Théorème 2.4.

1. *Si F est d'espérance $m > 0$, alors pour chaque intervalle fini I de longueur $h > 0$, on a*

$$U(I + t) \rightarrow \frac{h}{m}, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$U(I + t) \rightarrow 0, \quad t \rightarrow -\infty.$$

2. *Si F est transiente sans espérance, alors $U(I + t) \rightarrow 0$, $t \rightarrow \pm\infty$ pour tout intervalle fini.*

La convolution $U * z$ n'est pas toujours définie et même si elle définie, ce n'est pas la seule solution de l'équation de renouvellement (2.8).

Le théorème suivant donne une solution particulière de l'équation de renouvellement (2.8) (voir Feller [74]).

Théorème 2.5. *Soit z une fonction continue et $0 \leq z(t) \leq \alpha$ pour $t \in I_h =]-h, h[$ et $z(t) = 0$ en dehors de I_h . Si F est transiente, alors*

$$Z(t) = \int_{-\infty}^{\infty} z(t-x)U(dx)$$

est une solution absolument continue de l'équation de renouvellement (2.8) avec

$$0 \leq Z(t) \leq \alpha.U(I_{2h}).$$

La fonction Z atteint son maximum dans un point dans I_h .

Lorsqu'une solution particulière Z de l'équation de renouvellement (2.8) est bien définie, alors cette solution particulière vérifie le résultat du théorème 2.3, i.e

$$Z(t) \rightarrow \frac{1}{m} \int_{-\infty}^{\infty} z(x)dx, \quad t \rightarrow \infty.$$

2.3 Théorie du renouvellement implicite périodique

Dans cette partie, on étudie le comportement des queues de la solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastiques

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{N}^*, \quad (2.9)$$

avec $(A_t, B_t)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite i.p.d. Rappelons que l'équation (2.9) peut s'écrire sous la forme suivante

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad n \in \mathbb{N}^*, v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (2.10)$$

avec $\mathbb{A}_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+v-i}$, $\mathbb{B}_{nS+v} = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{nS+v-i} B_{nS+v-j}$ et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la suite $(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})_{n \in \mathbb{N}}$ est i.i.d. Les conditions et les propriétés de la suite i.p.d $(A_t)_{n \in \mathbb{N}}$ des coefficients de l'équation aux récurrences stochastique (2.9) sont données par la proposition suivante qui généralise le lemme 2.2 de Goldie [93].

Proposition 2.1. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite i.p.d telle qu'il existe un certain $\alpha > 0$ qui vérifie*

$$E(|\mathbb{A}_v|^\alpha) = E\left(\left|\prod_{i=0}^{S-1} A_i\right|^\alpha\right) = \prod_{i=0}^{S-1} E(|A_i|^\alpha) = 1, \quad (2.11)$$

$$E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log^+ |\mathbb{A}_v|) \leq E\left(\prod_{i=0}^{S-1} |A_i|^\alpha \sum_{i=0}^{S-1} \log^+ |A_i|\right) < \infty, \quad (2.12)$$

et la loi conditionnelle de $\log |\mathbb{A}_v|$ (i.e $\sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|$) sachant

$$\mathbb{A}_v \neq 0 \left(\text{i.e } \prod_{i=0}^{S-1} A_i \neq 0 \right) \text{ est non arithmétique,} \quad (2.13)$$

alors on a les résultats suivants

$$-\infty \leq E(\log |\mathbb{A}_v|) = \sum_{i=0}^{S-1} E(\log |A_i|) = \gamma^S(A) < 0, \quad (2.14)$$

$$\text{et } 0 < m = E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) = E\left(\prod_{i=0}^{S-1} |A_i|^\alpha \sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|\right) < \infty. \quad (2.15)$$

Preuve. Puisque les variables \mathbb{A}_v , $v \in \{0, \dots, S-1\}$, ont la même loi que la variable $\prod_{v=0}^{S-1} A_v$, alors par la suite dans cette démonstration, on utilise la variable \mathbb{A}_v au lieu d'écrire à chaque fois $\prod_{v=0}^{S-1} A_v$. On pose $Y^{(v)} = \log |\mathbb{A}_v| \in [-\infty, +\infty[$. En utilisant la convention que $0^a \log 0 = 0$ pour tout $a \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} E(|\mathbb{A}_v|^x \log^- |\mathbb{A}_v|) &= E(e^{xY^{(v)}} \log^- e^{Y^{(v)}}) \\ &= E(|Y^{(v)}| e^{xY^{(v)}} \mathbf{1}_{Y^{(v)} < 0}) < \infty, \quad \forall x > 0. \end{aligned} \quad (2.16)$$

$$\left(\log^- e^{Y^{(v)}} = \max(0, -\log e^{Y^{(v)}}) = -\log e^{Y^{(v)}} = -Y^{(v)}, \quad \text{si } Y^{(v)} < 0 \right).$$

La transformation de Laplace-Steiljis de $Y^{(v)}$ est donnée comme suit

$$f_v(x) = E(\mathbf{1}_{\mathbb{A}_v \neq 0} |\mathbb{A}_v|^x) = E(\mathbf{1}_{Y^{(v)} > -\infty} e^{xY^{(v)}})$$

Sous la condition (2.11), la fonction $f_v(x)$ est finie et continue sur $[0, \alpha]$. De la relation (2.12) et (2.16), on a

$$E(|\mathbb{A}_v|^x \log |\mathbb{A}_v|) = E(|\mathbb{A}_v|^x \log^+ |\mathbb{A}_v|) - E(|\mathbb{A}_v|^x \log^- |\mathbb{A}_v|) < \infty,$$

et on déduit que $f_v(x)$ a une dérivée finie sur $]0, \alpha[$, $f'_v(x) = E(|\mathbb{A}_v|^x \log |\mathbb{A}_v|)$. La fonction $f_v(x)$ a une deuxième dérivée finie sur $]0, \alpha[$ donnée par $f''_v(x) = E(|\mathbb{A}_v|^x \log^2 |\mathbb{A}_v|)$. La condition (2.11) implique que $P(\mathbb{A}_v \neq 0) > 0$, ainsi la condition (2.13) a un sens et implique que $P(|\mathbb{A}_v| \in \{0, 1\}) < 1$. Par conséquent, $f''_v(x) > 0$ dans l'intervalle $]0, \alpha[$ et donc f_v est convexe dans $[0, \alpha]$. Si $P(\mathbb{A}_v = 0) = 0$, alors $f_v(0) = f_v(\alpha)$ et comme $f_v(x)$ est convexe alors $f'_v(0) = E(\log |\mathbb{A}_v|) < 0$. D'autres parts, si $P(\mathbb{A}_v = 0) > 0$, alors $E(\log |\mathbb{A}_v|) = -\infty$ parce que $E(\log^+ |\mathbb{A}_v|) < \infty$, ceci vient de (2.12). Finalement, la relation ((2.14)) est vérifiée dans les deux cas.

Par les relations (2.12) et (2.16), on déduit (2.15). En effet,

$$E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) = E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log^+ |\mathbb{A}_v|) - E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log^- |\mathbb{A}_v|) < \infty$$

Notons que $E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) = f'_v(\alpha) > 0$, grâce à la convexité de f_v .

2.3.1 Théorème de renouvellement implicite périodique

Le théorème de renouvellement implicite périodique suivant qui généralise le théorème 2.3 de Goldie [93] montre que lorsque la suite $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ indépendantes périodiquement distribuées des coefficients de l'équation aux récurrences stochastique (2.9) vérifient les conditions de la proposition 2.1 et que l'équation (2.9) admet une solution strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ telle que les queues des S distributions marginales vérifient certaines conditions d'intégrabilité, alors ces S distributions marginales sont à variations régulières d'indice de variation égale à α avec $\prod_{v=0}^{S-1} E|A_v|^\alpha = 1$.

Théorème 2.6. *Supposons que la suite i.p.d $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ satisfait les conditions de la proposition 2.1 et l'équation (2.9) admet une solution strictement périodiquement stationnaire $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, alors les S distributions marginales vérifient.*

Cas 1 : *Supposons que $\prod_{v=0}^{S-1} A_v \geq 0$ p.s. Si pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,*

$$\int_0^\infty |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt < \infty, \quad (2.17)$$

respectivement,

$$\int_0^\infty |P(X^{(v)} < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)| t^{\alpha-1} dt < \infty, \quad (2.18)$$

alors,

$$P(X^{(v)} > t) \sim C_+^{(v)} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.19)$$

respectivement,

$$P(X^{(v)} < -t) \sim C_-^{(v)} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.20)$$

où

$$C_+^{(v)} = \frac{1}{m} \int_0^\infty [P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)] t^{\alpha-1} dt, \quad (2.21)$$

$$C_-^{(v)} = \frac{1}{m} \int_0^\infty [P(X^{(v)} < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)] t^{\alpha-1} dt. \quad (2.22)$$

Cas 2 : Supposons que $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v < 0) > 0$. Si les conditions (2.17) et (2.18) sont satisfaites, alors les relations (2.19) et (2.20) sont vérifiées, avec pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$C_+^{(v)} = C_-^{(v)} = \frac{1}{2m} \int_0^\infty [P(|X^{(v)}| > t) - P(|\mathbb{A}_v X^{(v)}| > t)] t^{\alpha-1} dt. \quad (2.23)$$

Dans les deux cas, lorsque les conditions (2.17) et (2.18) sont satisfaites, alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$C^{(v)} = C_+^{(v)} + C_-^{(v)} = \frac{1}{m} \int_0^\infty [P(|X^{(v)}| > t) - P(|\mathbb{A}_v X^{(v)}| > t)] t^{\alpha-1} dt. \quad (2.24)$$

Preuve. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on pose :

$$\begin{aligned} Y_k^{(v)} &= \log |\mathbb{A}_{v+kS}| = \sum_{i=0}^{S-1} \log |A_{i+v+kS}| \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|, \\ V_k^{(v)} &= \log \left| \prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{v+jS} \right| = \sum_{j=1}^k Y_j^{(v)} \stackrel{d}{=} \sum_{i=1}^{kS} \log |A_i|, \\ r^{(v)}(t) &= e^{\alpha t} P(X^{(v)} > e^t), \\ \delta_n^{(v)}(t) &= e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{v+jS} X^{(v)} > e^t\right). \end{aligned}$$

Cas 1 : Si $\prod_{v=0}^{S-1} A_v \geq 0$ p.s. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $t \in \mathbb{R}$ et $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on définit

$$\begin{aligned}
 P(X^{(v)} > e^t) &= \sum_{k=1}^n \left[P\left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{A}_{v+jS} X^{(v)} > e^t\right) - P\left(\prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{v+jS} X^{(v)} > e^t\right) \right] + \\
 &\quad P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{v+jS} X^{(v)} > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=1}^n \left[P(e^{V_{k-1}^{(v)}} X^{(v)} > e^t) - P(e^{V_{k-1}^{(v)}} \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t) \right] + \\
 &\quad P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^t) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left[P(X^{(v)} > e^{t-x}) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^t)
 \end{aligned}$$

L'intervalle d'intégration ne contient pas $-\infty$ même si $P(V_k^{(v)} = -\infty)$ peut être supérieure strictement à zéro.

Soient

$$g_1^{(v)}(t) = e^{\alpha t} \left(P(X^{(v)} > e^t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t) \right), \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

$$\nu_n(dt) = e^{\alpha t} \sum_{k=0}^n P(V_k^{(v)} \in dt), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

En termes de $g_1^{(v)}$ et ν_n , on peut écrire $r^{(v)}$ comme suit.

$$r^{(v)}(t) = g_1^{(v)} * \nu_{n-1}(t) + \delta_n^{(v)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

En effet, $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned}
 g_1^{(v)} * \nu_{n-1}(t) &= \int_{\mathbb{R}} g_1^{(v)}(t-x) \nu_{n-1}(dx) = \int_{\mathbb{R}} g_1^{(v)}(t-x) e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{n-1} P(V_k^{(v)} \in dx) \\
 &= \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(t-x)} \left[P(X^{(v)} > e^{t-x}) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-x}) \right] \times \\
 &\quad e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{n-1} P(V_k^{(v)} \in dx) \\
 &= e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left[P(X^{(v)} > e^{t-x}) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) \\
 &= e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} \left[P(X^{(v)} > e^{t-x}) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad e^{\alpha t} P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^t) - e^{\alpha t} P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^t) \\
 &= r^{(v)}(t) - \delta_n^{(v)}(t).
 \end{aligned}$$

Donc,

$$r^{(v)}(t) = g_1^{(v)} * \nu_{n-1}(t) + \delta_n^{(v)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}^*, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

On applique à la fonction $r^{(v)}$ l'opérateur $\check{\cdot}$ défini comme suit

$$\check{f}(t) = \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} f(x) dx.$$

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a

$$\begin{aligned} (g_1^{(v)} * \nu_{n-1})\check{(t)} &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} g_1^{(v)} * \nu_{n-1}(x) dx \\ &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} \left(\int_{\mathbb{R}} g_1^{(v)}(x-y) \nu_{n-1}(dy) \right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu_{n-1}(dy) \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} g_1^{(v)}(x-y) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}} \nu_{n-1}(dy) \int_{-\infty}^{t-y} e^{-(t-y-x)} g_1^{(v)}(x) dx = \check{g}_1^{(v)} * \nu_{n-1}(t). \end{aligned}$$

Donc, $(g_1^{(v)} * \nu_{n-1})\check{(t)} = \check{g}_1^{(v)} * \nu_{n-1}(t)$ et par conséquent,

$$\check{r}^{(v)}(t) = \check{g}_1^{(v)} * \nu_{n-1}(t) + \check{\delta}_n^{(v)}(t), t \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}^*, v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (2.25)$$

Soit

$$\eta(dx) = e^{\alpha x} P(Y_1^{(v)} \in dx), v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Par les conditions (2.11), (2.12) et (2.13) de la proposition 2.1, on déduit que $\eta(dx)$ est une loi de probabilité non-arithmétique sur \mathbb{R} d'espérance $m \in]0, \infty[$. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}} u \eta(du) &= \int_{\mathbb{R}} u e^{\alpha u} P(Y_1^{(v)} \in du) = \int_0^{\infty} x^\alpha \log x P(|\mathbb{A}_v| \in dx) \\ &= E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) = m < \infty. \end{aligned}$$

La fonction de renouvellement associée à $\eta(dx)$ est

$$\nu(dt) = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)}(dt) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{\alpha t} P(V_n^{(v)} \in dt).$$

En utilisant le fait que la mesure de renouvellement ν vérifie la propriété

$$\nu(t) < \infty, \forall t \in \mathbb{R}, \quad (\text{parce que } m \neq 0).$$

on déduit que pour chaque fonction f directement Riemann intégrable sur \mathbb{R} ,

$$\begin{aligned} |f| * \nu(t) &= \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha x} P(V_k^{(v)} \in dx) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_{\mathbb{R}} |f(t-x)| e^{\alpha x} P(V_k^{(v)} \in dx) < \infty \end{aligned}$$

pour chaque $t \in \mathbb{R}$.

Pour montrer que $\check{g}_1^{(v)}$ est directement Riemann intégrable, on utilise le lemme suivant (lemme 9.2 dans Goldie [93]).

Lemme 2.1. *Si $f \in L^1(\mathbb{R})$, alors \check{f} est directement Riemann intégrable.*

Maintenant par la condition (2.17) du théorème 2.6 et le lemme 2.1, on déduit que $\check{g}_1^{(v)}$ est directement Riemann intégrable, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$. En effet,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} |g_1^{(v)}(t)| dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} e^{\alpha t} |P(X^{(v)} > e^t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t)| dt \\ &= \int_0^{\infty} |P(X^{(v)} > y) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > y)| y^{\alpha-1} dy < \infty, \end{aligned}$$

c'est-à-dire $g_1^{(v)} \in L^1(\mathbb{R})$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$. Par le lemme 2.1, on déduit que $\check{g}_1^{(v)}$ est directement Riemann intégrable. De plus, puisque la mesure de renouvellement ν vérifie la propriété que $\nu(t) < \infty$, $t \in \mathbb{R}$ et que $\check{g}_1^{(v)}$ est directement Riemann intégrable, alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et chaque $t \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} |\check{g}_1^{(v)}| * \nu(t) &= \int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1^{(v)}(t-x)| \nu(dx) \\ &= \int_{\mathbb{R}} |\check{g}_1^{(v)}(t-x)| \sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha x} P(V_k^{(v)} \in dx) < \infty. \end{aligned}$$

Puisqu'on intègre par rapport à la mesure $P(V_k^{(v)} \in dx)$, alors

$$|\check{g}_1^{(v)}| * \nu(t) = E\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha V_k^{(v)}} |\check{g}_1^{(v)}(t - V_k^{(v)})|\right) < \infty, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Par le théorème de Fubini-Tonelli, les espérances

$$E\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha V_k^{(v)}} \check{g}_1^{(v)}(t - V_k^{(v)})\right), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}$$

existent et on peut inter changer l'espérance et la somme. Par conséquent,

$$\begin{aligned} E\left(\sum_{k=0}^{\infty} e^{\alpha V_k^{(v)}} \check{g}_1^{(v)}(t - V_k^{(v)})\right) &= \sum_{k=0}^{\infty} E(e^{\alpha V_k^{(v)}} \check{g}_1^{(v)}(t - V_k^{(v)})) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n E(e^{\alpha V_k^{(v)}} \check{g}_1^{(v)}(t - V_k^{(v)})), \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\check{g}_1^{(v)} * \nu(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} \check{g}_1^{(v)} * \nu_n(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Donc, en utilisant la relation (2.25), on déduit que

$$\check{r}^{(v)} = \check{g}_1^{(v)} * \nu, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (2.26)$$

pourvu que pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\check{\delta}_n^{(v)}(t) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ qui est vérifiée grâce au théorème de convergence dominée et le fait que $\delta_n^{(v)}(t) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$. En effet, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \delta_n^{(v)}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} e^{\alpha t} P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^t) \\ &= e^{\alpha t} P(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^t) \\ &= e^{\alpha t} P(\lim_{n \rightarrow \infty} e^{\sum_{i=1}^n Y_i^{(v)}} X^{(v)} > e^t) = 0, \quad (Y_i^{(v)}) \text{ sont iid et } E(Y^{(v)}) < 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \lim_{n \rightarrow \infty} \check{\delta}_n^{(v)}(t) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} \delta_n^{(v)}(x) dx \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} e^{\alpha x} P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^t \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(t-x)} e^{\alpha x} P(e^{V_n^{(v)}} X^{(v)} > e^x) dx = 0, \quad (V_n^{(v)} \rightarrow -\infty \text{ p.s.})
 \end{aligned}$$

On applique le théorème de renouvellement 2.3 à la relation (2.26), avec pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\check{r}^{(v)} = \check{g}_1^{(v)} * \nu$ est l'unique solution de l'équation de renouvellement

$$\check{r}^{(v)} = \eta * \check{r}^{(v)} + \check{g}_1^{(v)},$$

avec ν est la mesure de renouvellement (fonction de renouvellement) définie par

$$\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)},$$

on déduit que

$$\check{r}^{(v)}(t) \rightarrow \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1^{(v)}(x) dx \quad \text{lorsque } t \rightarrow \infty, v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Pour vérifier la relation (2.19), on utilise le lemme suivant (lemme 9.3 dans Goldie [93]).

Lemme 2.2. *Si pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,*

$$\int_0^t x^\alpha P(X^{(v)} > x) dx \sim C_+^{(v)} t, \quad t \rightarrow \infty,$$

alors

$$P(X^{(v)} > t) \sim C_+^{(v)} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Par le lemme 2.2, on déduit que la relation (2.19) du théorème 2.6 est vérifiée. En effet, on a

$$\begin{aligned}
 \check{r}^{(v)}(t) &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} r^{(v)}(x) dx \\
 &= \int_{-\infty}^t e^{-(t-x)} e^{\alpha x} P(X^{(v)} > e^x) dx \\
 &= \int_0^{e^t} y e^{-t} y^\alpha P(X^{(v)} > y) y^{-1} dy \\
 &= \int_0^{e^t} e^{-t} y^\alpha P(X^{(v)} > y) dy \\
 &= e^{-t} \int_0^{e^t} y^\alpha P(X^{(v)} > y) dy \\
 &\rightarrow C_+^{(v)}, \quad t \rightarrow \infty, \forall v \in \{0, \dots, S-1\}
 \end{aligned}$$

c'est-à-dire,

$$\int_0^{e^t} y^\alpha P(X^{(v)} > y) dy \sim C_+^{(v)} e^t, \quad t \rightarrow \infty, \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Par conséquent, $P(X^{(v)} > t) \sim C_+^{(v)} t^{-\alpha}$, $t \rightarrow \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$.

D'autres parts,

$$\check{r}^{(v)}(t) = e^{-t} \int_0^{e^t} y^\alpha P(X^{(v)} > y) dy \rightarrow \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1^{(v)}(x) dx, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{e^t} y^\alpha P(X^{(v)} > y) dy \sim e^t \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1^{(v)}(x) dx, \quad t \rightarrow \infty, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Par identification, on a pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} C_+^{(v)} &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1^{(v)}(x) dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} g_1^{(v)}(x) dx \\ &= \frac{1}{m} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} (P(X^{(v)} > e^x) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > e^x)) dx \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty y^\alpha (P(X^{(v)} > y) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > y)) y^{-1} dy \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty y^{\alpha-1} (P(X^{(v)} > y) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > y)) dy. \end{aligned}$$

Cas 2a : $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v > 0) > 0$ et $P(\prod_{v=0}^{S-1} A_v < 0) > 0$. Dans ce cas, pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} = e^{V_k^{(v)}}, \quad \text{si } \prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} > 0 \quad \text{et} \quad \prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} = -e^{V_k^{(v)}}, \quad \text{si } \prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} < 0.$$

Comme dans le cas 1 : On a pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} P(X^{(v)} > e^t) &= \sum_{k=1}^n \left[P\left(\prod_{j=1}^{k-1} \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) - P\left(\prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) \right] + \\ &\quad P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[P\left(\prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) - P\left(\prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t\right) \right] + \\ &\quad P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(X_k^{(v)} = 1, e^{V_k^{(v)}} X^{(v)} > e^t) - \right. \\ &\quad \left. P(X_k^{(v)} = 1, e^{V_k^{(v)}} \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t) \right] + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(X_k^{(v)} = -1, -e^{V_k^{(v)}} X^{(v)} > e^t) - \right. \\ &\quad \left. P(X_k^{(v)} = -1, -e^{V_k^{(v)}} \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t) \right] + \\ &\quad P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right). \end{aligned}$$

Donc, on a :

$$\begin{aligned}
 P(X^{(v)} > e^t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(X_k^{(v)} = 1, X^{(v)} > e^{t-V_k^{(v)}}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = 1, \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-V_k^{(v)}}) \right] + \\
 &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(X_k^{(v)} = -1, X^{(v)} < -e^{t-V_k^{(v)}}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = -1, \mathbb{A}_v X^{(v)} < -e^{t-V_k^{(v)}}) \right] + \\
 &\quad P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right),
 \end{aligned}$$

où $X_k^{(v)}$ désigne le signe de $\prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} = \prod_{j=1+v}^{kS+v} A_j$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

On remarque que $X_k^{(0)} = X_k^{(v)}$ pour chaque $v \in \{1, \dots, S-1\}$.

On définit $g_{-1}^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, par

$$g_{-1}^{(v)}(t) = e^{\alpha t} (P(X^{(v)} < -e^t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -e^t)). \quad (2.27)$$

En termes de $g_{-1}^{(v)}$ et $g_1^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on déduit que

$$\begin{aligned}
 r^{(v)}(t) &= e^{\alpha t} P(X^{(v)} > e^t) \\
 &= e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(X_k^{(v)} = 1, e^{V_k^{(v)}} X^{(v)} > e^t) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = 1, e^{V_k^{(v)}} \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^t) \right] + \\
 &\quad e^{\alpha t} \sum_{k=0}^{n-1} \left[P(X_k^{(v)} = -1, X^{(v)} < -e^{t-V_k^{(v)}}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = -1, \mathbb{A}_v X^{(v)} < -e^{t-V_k^{(v)}}) \right] + \\
 &\quad e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}} \left[P(X_k^{(v)} = 1, X^{(v)} > e^{t-x}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = 1, \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad \sum_{k=0}^{n-1} e^{\alpha t} \int_{\mathbb{R}} \left[P(X_k^{(v)} = -1, X^{(v)} < -e^{t-x}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = -1, \mathbb{A}_v X^{(v)} < -e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right).
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 r^{(v)}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(t-x)} e^{\alpha x} \left[P(X_k^{(v)} = 1, X^{(v)} > e^{t-x}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = 1, \mathbb{A}_v X^{(v)} > e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha(t-x)} e^{\alpha x} \left[P(X_k^{(v)} = -1, X^{(v)} < -e^{t-x}) - \right. \\
 &\quad \left. P(X_k^{(v)} = -1, \mathbb{A}_v X^{(v)} < -e^{t-x}) \right] P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} g_{X_k^{(v)}=1}^{(v)}(t-x) P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} g_{X_k^{(v)}=-1}^{(v)}(t-x) P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right) \\
 &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} e^{\alpha x} g_{X_k^{(v)}}^{(v)}(t-x) P(V_k^{(v)} \in dx) + \\
 &\quad e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right).
 \end{aligned}$$

Finalement, on a :

$$r^{(v)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} E\left(e^{\alpha V_k^{(v)}} g_{X_k^{(v)}}^{(v)}(t - V_k^{(v)})\right) + \delta_n^{(v)}(t), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (2.28)$$

avec $\delta_n^{(v)}(t) = e^{\alpha t} P\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v} X^{(v)} > e^t\right)$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

On a :

$$\delta_n^{(v)}(t) \leq e^{\alpha t} P\left(\left|\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v}\right| |X^{(v)}| > e^t\right) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\},$$

ceci vient du fait que

$$\left|\prod_{j=1}^n \mathbb{A}_{jS+v}\right| = e^{V_n^{(v)}} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

On définit une nouvelle distribution de probabilité pour les variables \mathbb{A}_{nS+v} , sous laquelle la probabilité et l'espérance sont notés par \tilde{P} et \tilde{E} . Sous la probabilité \tilde{P} , pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ les variables $\mathbb{A}_v, \mathbb{A}_{S+v}, \dots, \mathbb{A}_{nS+v}$ restent indépendantes identiquement distribuées, avec

$$\tilde{P}(\mathbb{A}_v \in dy) = \tilde{P}\left(\prod_{v=0}^{S-1} A_v \in dy\right) = |y|^\alpha P(\mathbb{A}_v \in dy), \quad y \in \mathbb{R}.$$

La relation (2.28) devient,

$$r^{(v)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}\left(g_{X_k^{(v)}}^{(v)}(t - V_k^{(v)})\right) + \delta_n^{(v)}(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

avec

$$\sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}\left(g_{X_k^{(v)}}^{(v)}(t - V_k^{(v)})\right) = g_1^{(v)} * \nu_{n-1,1}(t) + g_{-1}^{(v)}(t) * \nu_{n-1,-1}(t), \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

En effet, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} r^{(v)}(t) &= \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{X_k^{(v)}=1}^{(v)}(t-x) \tilde{P}(X_k^{(v)}=1, V_k^{(v)} \in dx) + \\ &\quad \sum_{k=0}^{n-1} \int_{\mathbb{R}} g_{X_k^{(v)}=-1}^{(v)}(t-x) \tilde{P}(X_k^{(v)}=-1, V_k^{(v)} \in dx) + \delta_n^{(v)}(t) \\ &= \int_{\mathbb{R}} g_1^{(v)}(t-x) \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}(X_k^{(v)}=1, V_k^{(v)} \in dx) + \\ &\quad \int_{\mathbb{R}} g_{-1}^{(v)}(t-x) \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}(X_k^{(v)}=-1, V_k^{(v)} \in dx) + \delta_n^{(v)}(t) \\ &= g_1^{(v)} * \nu_{n-1,1}(t) + g_{-1}^{(v)}(t) * \nu_{n-1,-1}(t) + \delta_n^{(v)}(t), \quad n \in \mathbb{N}, \quad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

avec

$$\nu_{n-1,j}(dx) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{P}(X_k^{(v)}=j, V_k^{(v)} \in dx), \quad j = 1, -1.$$

En utilisant le même raisonnement qu'on a appliqué pour trouver la relation (2.25), on déduit que

$$\tilde{r}^{(v)}(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \tilde{E}(\tilde{g}_{X_k^{(v)}}^{(v)}(t - V_k^{(v)})) + \check{\delta}_n^{(v)}(t), \quad t \in \mathbb{R}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Soient $\mathbf{X}^{(v)} = (X_k^{(v)})_{k \geq 0}$ des chaînes de Markov avec $X_0^{(v)} = 1, \forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ et les états de chaque chaîne $\mathbf{X}^{(v)}$ sont $\{-1, 1\}$ avec la matrice de transitions $\begin{pmatrix} p & q \\ q & p \end{pmatrix}$,

où

$$\begin{aligned} p &= \tilde{P}(\mathbb{A}_v > 0) = \tilde{P}\left(\prod_{v=0}^{S-1} A_v > 0\right) = E(1_{\mathbb{A}_v > 0} | \mathbb{A}_v |^\alpha), \\ q &= \tilde{P}(\mathbb{A}_v < 0) = \tilde{P}\left(\prod_{v=0}^{S-1} A_v < 0\right) = E(1_{\mathbb{A}_v < 0} | \mathbb{A}_v |^\alpha). \end{aligned}$$

C'est clair que $p > 0, q > 0$ et $p + q = 1$. Soient η_+, η_- les lois conditionnelles de $\log |\mathbb{A}_v|$ sachant $\mathbb{A}_v > 0$ et sachant $\mathbb{A}_v < 0$, i.e., les lois conditionnelles de $\sum_{v=0}^{S-1} \log |A_v|$ sachant $\prod_{v=0}^{S-1} A_v > 0$ et sachant $\prod_{v=0}^{S-1} A_v < 0$, sous la probabilité \tilde{P} , respectivement.

$$\begin{aligned} \eta_+(dy) &= \frac{\tilde{P}(\log |\mathbb{A}_v| \in dy / \mathbb{A}_v > 0)}{p} \\ &= \frac{\tilde{P}(\log |\mathbb{A}_v| \in dy, \mathbb{A}_v > 0)}{p}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\eta_-(dy) &= \tilde{P}(\log |\mathbb{A}_v| \in dy / \mathbb{A}_v < 0) \\ &= \frac{\tilde{P}(\log |\mathbb{A}_v| \in dy, \mathbb{A}_v < 0)}{q}.\end{aligned}$$

Rappelons que $Y_k^{(v)} = \log |\mathbb{A}_{kS+v}|$ et $X_k^{(v)} = \text{signe de } \prod_{j=1}^k \mathbb{A}_{jS+v} \in \{-1, 1\}$, $k \in \mathbb{N}$.

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, conditionnellement à $\mathbf{X}^{(v)}$ les variables aléatoires $Y_1^{(v)}, Y_2^{(v)}, \dots$ sont indépendantes avec des lois conditionnelles

$$\tilde{P}(Y_n^{(v)} \in \cdot / \mathbf{X}^{(v)}) = 1_{X_n^{(v)} = X_{n-1}^{(v)}} \eta_+^{(v)}(\cdot) + 1_{X_n^{(v)} \neq X_{n-1}^{(v)}} \eta_-^{(v)}(\cdot).$$

Soient $0 = N_0^{(v)(+)} < N_1^{(v)(+)} < \dots$ les valeurs de n pour lesquelles $X_n^{(v)} = 1$ et $N_0^{(v)(-)} < N_1^{(v)(-)} < \dots$ les valeurs de n pour lesquelles $X_n^{(v)} = -1$. Soit

$$I_n^{(v)(+)} = \max\{i : N_i^{(v)(+)} \leq n-1\}, \quad I_n^{(v)(-)} = \max\{i : N_i^{(v)(-)} \leq n-1\},$$

alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $t \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\tilde{r}^{(v)}(t) = \tilde{E} \sum_{k=0}^{I_n^{(v)(+)}} \tilde{g}_1^{(v)}(t - W_k^{(v)(+)}) + \tilde{E} \sum_{k=0}^{I_n^{(v)(-)}} \tilde{g}_{-1}^{(v)}(t - W_k^{(v)(-)}) + \check{\delta}_n^{(v)}(t), \quad (2.29)$$

où $W_k^{(v)(+)} = V_{N_k^{(v)(+)}}$ et $W_k^{(v)(-)} = V_{N_k^{(v)(-)}}$. Notons que $\check{\delta}_n^{(v)}(t) \rightarrow 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Soit η la loi de $Y_1^{(v)} + Y_2^{(v)} + \dots + Y_{N_1^{(v)(+)}}^{(v)}$, avec $N_1^{(v)(+)}$ la première valeur de n pour laquelle $X_n^{(v)} = 1$, alors $(W_k^{(v)(+)})_{k \geq 0}$ définie par

$$W_0^{(v)(+)} = 0, \quad W_1^{(v)(+)} = \sum_{j=1}^{N_1^{(v)(+)}} Y_j^{(v)}, \quad W_2^{(v)(+)} = \sum_{j=1}^{N_2^{(v)(+)}} Y_j^{(v)}, \dots, \quad W_k^{(v)(+)} = \sum_{j=1}^{N_k^{(v)(+)}} Y_j^{(v)}.$$

est une marche aléatoire, avec la loi du pas η , c'est-à-dire

$$W_k^{(v)(+)} = \sum_{j=1}^k Z_j^{(v)(+)} \quad \text{où } Z_j^{(v)(+)} \text{ sont indépendantes de même loi } \eta.$$

On montre que

$$\eta = p\eta_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} \eta_-^{(2)} * \eta_+^{(n-2)}, \quad (2.30)$$

à partir de laquelle on déduit les propriétés suivantes qui sont nécessaires pour appliquer le théorème de renouvellement,

$$\int_{\mathbb{R}} y \eta(dy) = 2m, \quad (2.31)$$

$$\eta \text{ est non arithmétique} \quad (2.32)$$

Pour vérifier ceci, notons que $\tilde{P}(N_1^{(v)(+)} = 1) = p$, $\tilde{P}(N_1^{(v)(+)} = n) = q^2 p^{n-2}$, $\forall n \geq 2$. Si $N_1^{(v)(+)} = 1$, alors $Y_1^{(v)}$ a la loi η_+ . Si $n \geq 2$, alors $Y_1^{(v)}$ et $Y_{N_1^{(v)(+)}}^{(v)}$ ont la même loi

η_- et $Y_k^{(v)}$ a la loi η_+ pour k dans l'intervalle $]2, N_1^{(v)(+)}[$. Par conséquent, on déduit la relation (2.30). Pour (2.31), on note par m_+ , m_- les espérances de η_+ et η_- , alors

$$\int_{\mathbb{R}} y\eta(dy) = pm_+ + \sum_{n=2}^{\infty} q^2 p^{n-2} (2m_- + (n-2)m_+) = 2(pm_+ + qm_-)$$

qui est égale à $2m$ parce que

$$m_+ = E(1_{\mathbb{A}_v > 0} |\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) / p \quad \text{et} \quad m_- = E(1_{\mathbb{A}_v < 0} |\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) / q.$$

Puisque, sous \tilde{P} , $\log |\mathbb{A}_v| \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|$ est non arithmétique, alors on peut trouver un sous ensemble B du support de cette loi non arithmétique tel que le groupe engendré par B est dense dans \mathbb{R} . Soient B_+ et B_- l'intersections de B avec les supports de $1_{\mathbb{A}_v > 0} |\log |\mathbb{A}_v||$ et $1_{\mathbb{A}_v < 0} |\log |\mathbb{A}_v||$, respectivement.

Soit B^* un ensemble qui contient tous les éléments de B_+ et le double de chaque élément de B_- , alors B^* engendre un groupe additif dense dans \mathbb{R} . Pour chaque $b \in B^*$ et chaque $\varepsilon > 0$, si $b \in B_+$, alors

$$\tilde{P}(|Z_1^{(v)(+)} - b| < \varepsilon) \geq p\eta_+(]b - \varepsilon, b + \varepsilon]) > 0,$$

et si $\frac{1}{2}b \in B_-$, alors $\tilde{P}(|Z_1^{(v)(+)} - b| < \varepsilon) \geq q^2(\eta_-(] \frac{1}{2}(b - \varepsilon), \frac{1}{2}(b + \varepsilon)]))^2 > 0$,

ainsi, b est contenu dans le support de $Z_1^{(v)(+)}$, c'est-à-dire dans le support de η . Par conséquent η est non arithmétique.

Soit $\nu = \sum_{n=0}^{\infty} \eta^{(n)}$ la mesure de renouvellement associée à η . Par les propriétés (2.30), (2.31) et (2.32) de η qu'on a déjà vérifié, chaque fonction directement Riemann intégrable est ν -intégrable. En appliquant le lemme 2.1 à la relation (2.17) du théorème 2.6, on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\check{g}_1^{(v)}$ est directement Riemann intégrable et $|\check{g}_1^{(v)}| * \nu(t) < \infty$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire

$$\tilde{E} \sum_{k=0}^{\infty} |\check{g}_1^{(v)}(t - W_k^{(v)(+)})| < \infty, \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

et ceci nous permet d'appliquer le théorème de convergence dominée pour montrer que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{E} \sum_{k=0}^{I_n^{(v)(+)}} \check{g}_1^{(v)}(t - W_k^{(v)(+)}) \rightarrow \tilde{E} \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1^{(v)}(t - W_k^{(v)(+)}) \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.33)$$

parce que $I_n^{(v)(+)} \rightarrow \infty$. Pour l'autre espérance dans (2.29), on définit pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $W_k^{(v)(-)} = \sum_{j=0}^k Z_j^{(v)(-)}$ où les variables $Z_j^{(v)(-)}$ sont indépendantes pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, avec $Z_j^{(v)(-)}$, $j \geq 1$ ont la même loi η et $Z_0^{(v)(-)}$ a une loi η_0 différente de η définie par $\eta_0 = \sum_{n=1}^{\infty} qp^{n-1}\eta_- * \eta_+^{(n-1)}$. Comme pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\check{g}_{-1}^{(v)}$ est directement Riemann intégrable, alors par le théorème de convergence dominée on trouve que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $t \in \mathbb{R}$,

$$\tilde{E} \sum_{k=0}^{I_n^{(v)(-)}} \check{g}_{-1}^{(v)}(t - W_k^{(v)(-)}) \rightarrow \tilde{E} \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_{-1}^{(v)}(t - W_k^{(v)(-)}) \quad n \rightarrow \infty, \quad (2.34)$$

parce que $I_n^{(v)(-)} \rightarrow \infty$. Par conséquent, la relation (2.29) devient

$$\begin{aligned} \check{r}^{(v)}(t) &= \tilde{E} \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_1^{(v)}(t - W_k^{(v)(+)}) + \tilde{E} \sum_{k=0}^{\infty} \check{g}_{-1}^{(v)}(t - W_k^{(v)(-)}) \\ &= \check{g}_1^{(v)} * \nu(t) + \check{g}_{-1}^{(v)} * \eta_0 * \nu(t), \quad t \in \mathbb{R}, v \in \{0, \dots, S-1\}. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En appliquant le théorème de renouvellement 2.3 à chaque terme du côté droit de (2.35), on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\check{r}^{(v)}(t) \rightarrow \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_1^{(v)}(x) dx + \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} \check{g}_{-1}^{(v)} * \eta_0(x) dx = \frac{1}{2m} \int_{\mathbb{R}} (g_1^{(v)} + g_{-1}^{(v)})(x) dx,$$

qui est égale au coté droit de la relation (2.23) du théorème 2.6. Comme dans le cas 1, la relation (2.19) du théorème 2.6 est une conséquence directe du lemme 2.2.

Cas 2b : $\prod_{v=0}^{S-1} A_v \leq 0$ p.s. Soit $(A'_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires ipd indépendante de la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$, avec A'_n et A_n ont la même distribution de probabilité. On montre d'abord que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\int_0^{\infty} |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt < \infty. \quad (2.36)$$

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a :

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt \\ &\leq \int_0^{\infty} |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt \\ &\quad + \int_0^{\infty} |P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt. \end{aligned}$$

Donc, la relation (2.36) est vérifiée si pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\int_0^{\infty} |P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt < \infty. \quad (2.37)$$

En effet,

$$\begin{aligned} &\int_0^{\infty} |P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_0^{\infty} \int_{-\infty}^0 |P(uX^{(v)} > t) - P(u\mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| P(\mathbb{A}_v \in du) t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |P(X^{(v)} < \frac{t}{u}) - P(\mathbb{A}'_v X^{(v)} < \frac{t}{u})| P(\mathbb{A}_v \in du) t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |P(X^{(v)} < -y) - P(\mathbb{A}'_v X^{(v)} < -y)| P(\mathbb{A}_v \in du) (-uy)^{\alpha-1} (-u) dy \\ &= \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} |P(X^{(v)} < -y) - P(\mathbb{A}'_v X^{(v)} < -y)| y^{\alpha-1} dy (-u)^{\alpha} P(\mathbb{A}_v \in du) \\ &= \int_0^{\infty} E|\mathbb{A}_v|^{\alpha} |P(X^{(v)} < -y) - P(\mathbb{A}'_v X^{(v)} < -y)| y^{\alpha-1} dy \\ &= E(|\mathbb{A}_v|^{\alpha}) \int_0^{\infty} |P(X^{(v)} < -y) - P(\mathbb{A}'_v X^{(v)} < -y)| y^{\alpha-1} dy, \end{aligned}$$

cette dernière quantité est finie grâce à (2.18) de théorème 2.6 et (2.11) de la proposition 2.1. Par (2.37) et (2.17) du théorème 2.6, on déduit que (2.36) est vérifiée.

Maintenant puisque, $\mathbb{A}'_v \mathbb{A}_v \geq 0$ p.s. et

$$\int_0^\infty |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)| t^{\alpha-1} dt < \infty,$$

alors comme dans le **cas 1**, la relation (2.19) est vérifiée, avec

$$\begin{aligned} C_+^{(v)} &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)) t^{\alpha-1} dt \\ &\quad + \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v X^{(v)} > t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)) t^{\alpha-1} dt \\ &\quad + \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(X^{(v)} < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m_2} \int_0^\infty (P(|X^{(v)}| > t) - P(|\mathbb{A}_v X^{(v)}| > t)) t^{\alpha-1} dt, \end{aligned}$$

avec m_2 est donné, en utilisant (2.11) et (2.15) de la proposition 2.1, l'indépendance entre \mathbb{A}_v et \mathbb{A}'_v , par

$$\begin{aligned} m_2 &= E(|\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v|) \\ &= E(|\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) + E(|\mathbb{A}_v \mathbb{A}'_v|^\alpha \log |\mathbb{A}'_v|) \\ &= E(|\mathbb{A}'_v|^\alpha) E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|) + E(|\mathbb{A}_v|^\alpha) E(|\mathbb{A}'_v|^\alpha \log |\mathbb{A}'_v|) \\ &= m + m = 2m. \end{aligned}$$

2.3.2 Queues de la solution de l'équation aux récurrences stochastique

Dans la section précédente, on a montré que lorsque la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ipd des coefficients de l'équation aux récurrences stochastique (2.9) vérifient les conditions de la proposition 2.1 et que l'équation (2.9) admet une solution strictement périodiquement stationnaire telles que les S distributions marginales vérifient certaines conditions d'intégrabilité, données dans le théorème 2.6, alors ces S distributions marginales sont à variations régulières d'indice de variation égale à α qui est solution de l'équation $\prod_{v=0}^{S-1} E|A_v|^\alpha = 1$. Le théorème suivant qui généralise le théorème 4.1 de Goldie [93] au cas où la suite $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est ipd montre que lorsque la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie les conditions de la proposition 2.1 et que la suite $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ vérifie une certaine condition d'intégrabilité, alors l'équation (2.9) admet une solution strictement périodiquement stationnaire et ses S distributions marginales sont à variations régulières.

Théorème 2.7. *Supposons que la suite ipd $(A_n, B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ des coefficients de l'équation (2.9) satisfait les conditions de la proposition 2.1 et la condition*

$$\sum_{v=0}^{S-1} E|B_v|^\alpha < \infty, \quad (2.38)$$

alors l'équation (2.9) admet une solution strictement périodiquement stationnaire et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$P(X^{(v)} > t) \sim C_+^{(v)} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.39)$$

$$P(X^{(v)} < -t) \sim C_-^{(v)} t^{-\alpha}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.40)$$

1) Si $\prod_{v=0}^{S-1} A_v \geq 0$ p.s, alors

$$C_+^{(v)} = \frac{E\left(\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^+\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^+\right)^\alpha\right)}{\alpha m}, \quad (2.41)$$

et

$$C_-^{(v)} = \frac{E\left(\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^-\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^-\right)^\alpha\right)}{\alpha m}. \quad (2.42)$$

2) Si $P\left(\prod_{v=0}^{S-1} A_v < 0\right) > 0$, alors

$$C_+^{(v)} = C_-^{(v)} = \frac{1}{2\alpha m} E\left(|\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v|^\alpha - |\mathbb{A}_v X^{(v)}|^\alpha\right) \quad (2.43)$$

Finalement, $C_+^{(v)} + C_-^{(v)} > 0$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ si et seulement si,

$$\text{pour chaque } c \in \mathbb{R}, \quad P(\mathbb{B}_v = (1 - \mathbb{A}_v)c) < 1, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (2.44)$$

Preuve. On a montré dans la preuve de la proposition 2.1 que

$$\gamma^S(A) = \sum_{v=0}^{S-1} E(\log |A_v|) < 0.$$

Maintenant, par l'inégalité de Jensen,

$$\sum_{v=0}^{S-1} E|B_v|^\alpha < \infty \quad \text{implique} \quad \sum_{v=0}^{S-1} E \log |B_v| < \infty.$$

Donc les conditions du théorème 1.1 sont vérifiées et par conséquent l'équation (2.9) admet une solution strictement périodiquement stationnaire.

Pour montrer le reste du théorème 2.7, on utilise le lemme suivant (lemme 9.4 de Goldie [93]).

Lemme 2.3. *Pour toutes variables aléatoires X et Y définies sur (Ω, \mathcal{F}, P) , on a*

$$\int_0^\infty |P(X > t) - P(Y > t)|t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha}E|(X^+)^{\alpha} - (Y^+)^{\alpha}|. \quad (2.45)$$

Lorsque l'intégrale dans (2.45) est finie, alors

$$\int_0^\infty (P(X > t) - P(Y > t))t^{\alpha-1}dt = \frac{1}{\alpha}E((X^+)^{\alpha} - (Y^+)^{\alpha}). \quad (2.46)$$

Preuve. On sait que $X^+ = \max\{X, 0\}$ et $X^- = \max\{-X, 0\}$.

Pour $t > 0$, $P(X > t) = P(X^+ > t)$, donc on peut supposer que X et Y sont positives.

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |P(X > t) - P(Y > t)|t^{\alpha-1}dt &= \int_0^\infty (P(X \leq t < Y)t^{\alpha-1}dt + \int_0^\infty (P(Y \leq t < X)t^{\alpha-1}dt \\ &= E\left(\mathbb{I}_{\{Y>X\}} \int_X^Y t^{\alpha-1}dt\right) + E\left(\mathbb{I}_{\{X>Y\}} \int_Y^X t^{\alpha-1}dt\right) \\ &= \frac{1}{\alpha}E(\mathbb{I}_{\{Y>X\}}(Y^{\alpha} - X^{\alpha})) + \frac{1}{\alpha}E(\mathbb{I}_{\{X>Y\}}(X^{\alpha} - Y^{\alpha})) \\ &= \frac{1}{\alpha}E|X^{\alpha} - Y^{\alpha}|. \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la preuve du théorème 2.7. On vérifie d'abord la relation (2.17) du théorème 2.6, c'est-à-dire, on montre que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\int_0^\infty |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)|t^{\alpha-1}dt < \infty.$$

Par le lemme 2.3, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} \int_0^\infty |P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)|t^{\alpha-1}dt \\ &= \int_0^\infty |P(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)|t^{\alpha-1}dt \\ &= \frac{1}{\alpha}E\left|\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^+\right)^{\alpha} - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^+\right)^{\alpha}\right|. \end{aligned}$$

Il reste à montrer que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$E\left|\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^+\right)^{\alpha} - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^+\right)^{\alpha}\right| < \infty \quad (2.47)$$

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a

$$\begin{aligned} E\left|\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^+\right)^{\alpha} - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^+\right)^{\alpha}\right| \\ &= E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > 0, \mathbb{A}_v X^{(v)} \leq 0\}}(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^{\alpha}\right) \\ &\quad + E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v \leq 0, \mathbb{A}_v X^{(v)} > 0\}}(\mathbb{A}_v X^{(v)})^{\alpha}\right) \\ &\quad + E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > \mathbb{A}_v X^{(v)} > 0\}}\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^{\alpha} - (\mathbb{A}_v X^{(v)})^{\alpha}\right)\right) \\ &\quad + E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{A}_v X^{(v)} > \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > 0\}}\left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^{\alpha} - (\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^{\alpha}\right)\right) \\ &= I_1 + I_2 + I_3 + I_4 \end{aligned}$$

Pour montrer que I_1, I_2, I_3 et I_4 sont finis, on utilise le résultat suivant

$$|x + y|^r \leq c_r(|x|^r + |y|^r), \quad x, y \in \mathbb{R}, \quad r > 0. \quad (2.48)$$

avec $c_r = \max\{2^{r-1}, 1\}$.

$$||x|^r - |y|^r| \leq \begin{cases} |x - y|^r & \text{si } 0 < r \leq 1 \\ r|x - y|(|x| \vee |y|)^{r-1} & \text{si } 1 < r < \infty \end{cases} \quad (2.49)$$

Notons que la condition (2.38) implique que $E|\mathbb{B}_v|^\alpha < \infty$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$. En effet, par la relation (2.48), on a pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} E(|\mathbb{B}_v|^\alpha) &= E\left(\left|\sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} A_{S+v-i} B_{S+v-j}\right|^\alpha\right) \\ &\leq c_\alpha^S \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} E(|A_{S+v-i}|^\alpha) E(|B_{S+v-j}|^\alpha). \end{aligned}$$

Puisque, $\prod_{i=0}^{S-1} E(|A_i|^\alpha) = 1$, alors il existe une constante K telle que

$$\prod_{i=0}^{j-1} E(|A_{S+v-i}|^\alpha) \leq K, \quad j = 1, \dots, S-1,$$

ceci implique que

$$E(|\mathbb{B}_v|^\alpha) \leq c_\alpha^S K \sum_{v=0}^{S-1} E|B_v|^\alpha < \infty.$$

Dans I_1 , on a : $0 < \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v \leq \mathbb{B}_v$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$, donc

$$I_1 \leq E(\mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_v > 0\}} \mathbb{B}_v^\alpha) = E((\mathbb{B}_v^+)^alpha) < \infty, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

De meme, dans I_2 , on a : $0 < \mathbb{A}_v X^{(v)} \leq -\mathbb{B}_v$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors

$$I_2 \leq E(\mathbb{I}_{\{-\mathbb{B}_v > 0\}} (-\mathbb{B}_v)^\alpha) = E((\mathbb{B}_v^-)^\alpha) < \infty.$$

Lorsque $\alpha \leq 1$, la relation (2.49) nous donne pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$I_3 \leq E(\mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_v > 0\}} \mathbb{B}_v^\alpha) = E((\mathbb{B}_v^+)^alpha) < \infty.$$

Si $\alpha > 1$, les relations (2.48) et (2.49) nous donne pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} I_3 &\leq \alpha E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > \mathbb{A}_v X^{(v)} > 0\}} \mathbb{B}_v (\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^{\alpha-1}\right) \\ &\leq \alpha c_{\alpha-1} \left(E(\mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_v > 0\}} \mathbb{B}_v^\alpha) + E(\mathbb{I}_{\{\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > \mathbb{A}_v X^{(v)} > 0\}} \mathbb{B}_v (\mathbb{A}_v X^{(v)})^{\alpha-1}) \right) \\ &\leq \alpha c_{\alpha-1} \left(E((\mathbb{B}_v^+)^alpha) + E(\mathbb{B}_v^+ |\mathbb{A}_v X^{(v)}|^{\alpha-1}) \right) \\ &= \alpha c_{\alpha-1} E((\mathbb{B}_v^+)^alpha) + \alpha c_{\alpha-1} E(\mathbb{B}_v^+ |\mathbb{A}_v|^{\alpha-1}) E(|X^{(v)}|^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Maintenant, $E(\mathbb{B}_v^+ |\mathbb{A}_v|^{\alpha-1}) < \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ grâce à la première condition (2.11) de la proposition 2.1, $E|\mathbb{B}_v|^\alpha < \infty$ et l'inégalité de Holder. Tandis que $E(|X^{(v)}|^{\alpha-1}) < \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ grâce au théorème 1.1.

Dans I_4 , on a : $0 < -\mathbb{B}_v < \mathbb{A}_v X^{(v)}$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ et lorsque $\alpha \leq 1$, la relation (2.49) nous donne pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$I_4 \leq E\left(\mathbb{I}_{\{0 < -\mathbb{B}_v < \mathbb{A}_v X^{(v)}\}} (-\mathbb{B}_v)^\alpha\right) \leq E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_v < 0\}} (-\mathbb{B}_v)^\alpha\right) = E((\mathbb{B}_v^-)^\alpha) < \infty.$$

Si $\alpha > 1$, la relation (2.49) nous donne pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} I_4 &\leq E\left(\mathbb{I}_{\{\mathbb{B}_v < 0\}} (-\mathbb{B}_v)(\mathbb{A}_v X^{(v)})^{\alpha-1}\right) \\ &\leq E\left(\mathbb{B}_v^- |\mathbb{A}_v X^{(v)}|^{\alpha-1}\right) \\ &= E\left(\mathbb{B}_v^- |\mathbb{A}_v|^{\alpha-1}\right) E(|X^{(v)}|^{\alpha-1}). \end{aligned}$$

Maintenant, $E\left(\mathbb{B}_v^- |\mathbb{A}_v|^{\alpha-1}\right) < \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ grâce à la première condition (2.11) de la proposition 2.1, $E|\mathbb{B}_v|^\alpha < \infty$ et l'inégalité de Holder. Tandis que $E(|X^{(v)}|^{\alpha-1}) < \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$ grâce au théorème 1.1.

Chaque I_i , $i = 1, 2, 3, 4$ est fini, alors (2.47) est vérifiée. Par conséquent la relation (2.17) du théorème 2.6 est satisfaite et donc on a (2.39).

De la même méthode que le premier cas, on peut montrer que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} &\int_0^\infty |P(X^{(v)} < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)| t^{\alpha-1} dt \\ &= \int_0^\infty |P(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)| t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{\alpha} E\left|\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^-\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^-\right)^\alpha\right| < \infty, \end{aligned}$$

c'est-à-dire la condition (2.18) du théorème 2.6 est vérifiée et par conséquent on déduit la relation (2.40). Maintenant, en utilisant le théorème 2.6 et le lemme 2.3, on déduit les relations (2.41) et (2.42). En effet, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} C_+^{(v)} &= \frac{1}{m} \int_0^\infty \left(P(X^{(v)} > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty \left(P(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v > t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} > t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m\alpha} E\left(\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^+\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^+\right)^\alpha\right) \\ C_-^{(v)} &= \frac{1}{m} \int_0^\infty \left(P(X^{(v)} < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m} \int_0^\infty \left(P(\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v < -t) - P(\mathbb{A}_v X^{(v)} < -t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{m\alpha} E\left(\left((\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v)^-\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X^{(v)})^-\right)^\alpha\right). \end{aligned}$$

Si $P(\prod_{v=0}^{S-1} \mathbb{A}_v < 0) > 0$, alors en utilisant la relation (2.46) on déduit que

$$\begin{aligned} C_+^{(v)} = C_-^{(v)} &= \frac{1}{2m} \int_0^\infty \left(P(|X^{(v)}| > t) - P(|\mathbb{A}_v X^{(v)}| > t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{2m} \int_0^\infty \left(P(|\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v| > t) - P(|\mathbb{A}_v X^{(v)}| > t)\right) t^{\alpha-1} dt \\ &= \frac{1}{2m\alpha} E\left(|\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v|^\alpha - |\mathbb{A}_v X^{(v)}|^\alpha\right). \end{aligned}$$

Pour montrer le dernier point du théorème 2.7, on utilise ce résultat suivant qui généralise le lemme 1 de A. K. Grincevičius [97].

Proposition 2.2. *Soit la suite ipd $(A_n, B_n)_{\geq 1}$ des coefficients de l'équation (2.9). Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, soient*

$$X_{nS+v}^* = \sum_{k=1}^n \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} \quad \text{et} \quad X_{j, nS+v}^* = \sum_{k=j+1}^n \prod_{i=j+1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v},$$

alors pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$

$$X_{nS+v}^* = X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} X_{j, nS+v}^*$$

et

$$\begin{aligned} P\left(\max_{j=1, \dots, n} \left(X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med}(X_{j, nS+v}^* + \prod_{i=j+1}^n \mathbb{A}_{iS+v} y)\right) > x\right) \\ \leq 2P\left(X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} y > x\right), \quad x, y \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Sous les conditions du théorème 2.7, on peut faire tendre n vers l'infini dans l'inégalité précédente. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et pour chaque j fixé, on a

$$\begin{aligned} X_{nS+v}^* &\xrightarrow{p.s} \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}, \quad n \rightarrow \infty, \\ X_{j, nS+v}^* &\xrightarrow{p.s} \sum_{k=j+1}^{\infty} \prod_{i=j+1}^{k-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{kS+v} \stackrel{d}{=} X^{(v)}, \quad n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $y = 0$, on a

$$P\left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \left(X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med} X^{(v)}\right) > x\right) \leq 2P(X^{(v)} > x), \quad x \geq 0,$$

et

$$P\left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \left(X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med} X^{(v)}\right) < -x\right) \leq 2P(X^{(v)} < -x), \quad x \geq 0.$$

Par conséquent,

$$P\left(\sup_{j \in \mathbb{N}} \left|X_{jS+v}^* + \prod_{i=1}^j \mathbb{A}_{iS+v} \operatorname{med} X^{(v)}\right| > x\right) \leq 2P(|X^{(v)}| > x), \quad x \geq 0. \quad (2.50)$$

Maintenant, on suppose que la condition (2.44) est vérifiée et on montre que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $|t|^\alpha P(|X^{(v)}| > t) > 0$ pour toute valeur de t très grande. On pose pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $m_0^{(v)} = \operatorname{med} X^{(v)}$ et

$$T_n^{(v)} = X_{nS+v}^* + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} m_0^{(v)}, \quad n = 1, \dots, \quad T_0^{(v)} = m_0^{(v)}.$$

On peut vérifier que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$T_n^{(v)} = T_{n-1}^{(v)} + U_n^{(v)}, \text{ où } U_n^{(v)} = \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} (\mathbb{B}_{nS+v} - m_0^{(v)} (1 - \mathbb{A}_{nS+v})), \quad n = 1, \dots$$

En effet,

$$\begin{aligned} T_n^{(v)} &= \mathbb{B}_{S+v} + \mathbb{A}_{S+v} \mathbb{B}_{2S+v} + \dots + \mathbb{A}_{S+v} \dots \mathbb{A}_{(n-1)S+v} \mathbb{B}_{nS+v} + \mathbb{A}_{S+v} \dots \mathbb{A}_{nS+v} m_0^{(v)} \\ &= T_{n-1}^{(v)} + \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{nS+v} + \prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v} m_0^{(v)} - \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} m_0^{(v)} \\ &= T_{n-1}^{(v)} + \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} (\mathbb{B}_{nS+v} + \mathbb{A}_{nS+v} m_0^{(v)} - m_0^{(v)}) \\ &= T_{n-1}^{(v)} + \prod_{i=1}^{n-1} \mathbb{A}_{iS+v} (\mathbb{B}_{nS+v} - m_0^{(v)} (1 - \mathbb{A}_{nS+v})). \end{aligned}$$

Maintenant pour $t > |m_0^{(v)}|$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$P(|T_n^{(v)}| > t \text{ pour un certain } n \geq 1) \geq P(|U_n^{(v)}| > 2t \text{ pour un certain } n \geq 1),$$

parce que si $|U_n^{(v)}| > 2t$, alors soit $|T_{n-1}^{(v)}| > t$, sinon $|T_n^{(v)}| \geq |U_n^{(v)}| - |T_{n-1}^{(v)}| > t$. Par la relation 2.50, on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} P(|X^{(v)}| > t) &\geq \frac{1}{2} P(|T_n^{(v)}| > t \text{ pour un certain } n \geq 1) \\ &\geq \frac{1}{2} P(|U_n^{(v)}| > 2t \text{ pour un certain } n \geq 1) \\ &\geq \frac{1}{2} P(|\mathbb{B}_v - m_0^{(v)} (1 - \mathbb{A}_v)| > \epsilon) \times \\ &\quad P\left(\left|\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}\right| > 2t/\epsilon \text{ pour un certain } n \geq 1\right). \end{aligned}$$

Par la condition (2.44), $\epsilon > 0$ peut être choisi de telle sorte que

$$P(|\mathbb{B}_v - m_0^{(v)} (1 - \mathbb{A}_v)| > \epsilon) > 0, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Donc, il suffit de montrer que pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$P\left(\left|\prod_{i=1}^n \mathbb{A}_{iS+v}\right| > e^t \text{ pour un certain } n \geq 1\right) = P\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} V_n^{(v)} > t\right) \quad (2.51)$$

est supérieure ou égale à δe^{-at} pour toute valeur très grande de t , où $\delta > 0$.

Rappelons que pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $(V_n^{(v)})_{n \geq 0}$ est une marche aléatoire du pas $Y^{(v)} = \log |\mathbb{A}_v| \stackrel{d}{=} \sum_{i=0}^{S-1} \log |A_i|$ qui peut prendre $-\infty$ avec une probabilité positive. On considère la suite $(n, V_n^{(v)})_{n \geq 1}$ et on définit $(\tau_1^{(v)}, \zeta_1^{(v)})_{n \geq 1}$ comme le premier terme dans la suite $(n, V_n^{(v)})_{n \geq 1}$ pour lequel $V_n^{(v)} > 0$. En d'autres termes,

$$\{\tau_1^{(v)} = n\} = \{V_1^{(v)} \leq 0, \dots, V_{n-1}^{(v)} \leq 0, V_n^{(v)} > 0\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

et $\zeta_1^{(v)} = V_{\tau_1^{(v)}}^{(v)}$. La distribution conjointe de $(\tau_1^{(v)}, \zeta_1^{(v)})$ est

$$H_n(dx) = P(\tau_1^{(v)} = n, \zeta_1^{(v)} \in dx), \quad 0 < x < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

et les distributions marginales sont données par

$$H_n(\infty) = P(\tau_1^{(v)} = n) = P(\tau_1^{(v)} = n, \zeta_1^{(v)} \in]0, \infty[), \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\begin{aligned} P(\zeta_1^{(v)} \in dx) &= \sum_{n=1}^{\infty} P(\tau_1^{(v)} = n, \zeta_1^{(v)} \in dx) = \sum_{n=1}^{\infty} H_n(dx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} P(V_1^{(v)} \leq 0, \dots, V_{n-1}^{(v)} \leq 0, V_n^{(v)} > 0, V_n^{(v)} \in dx) \\ &= H(dx). \end{aligned}$$

Par les résultats de Feller [74] sur les marches aléatoires (les relations (5.11), (5.12) et (5.13), page 411), on déduit que

$$P\left(\sup_{n \in \mathbb{N}} V_n^{(v)} > t\right) \sim \frac{1 - H(\infty)}{\beta\alpha} e^{-\alpha t}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.52)$$

Pourvu que

$$\beta = \int_0^{\infty} t e^{\alpha t} H(dt) < \infty, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Or $\beta = E(Y^{(v)} + e^{\alpha Y^{(v)}})$ et par la condition (2.12), on déduit que $\beta < \infty$. Maintenant, puisque $1 - H(\infty) > 0$ et $0 < \beta < \infty$, alors $1 - H(\infty)/\beta\alpha > 0$ et par conséquent $|t|^\alpha P(|X^{(v)}| > t) > 0, \forall v \in \{0, \dots, S-1\}$, pour toute valeur très grande de t . Ceci implique que $C_v^{(+)} + C_v^{(-)} > 0, v \in \{1, \dots, S-1\}$.

Maintenant, on donne des conséquences du théorème 2.7, en particulier sur $C_+^{(v)}$ et $C_-^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Corollaire 2.1. *Lorsque $0 < \alpha \leq 1$, on a :*

$$C_+^{(v)} + C_-^{(v)} \leq \frac{1}{m\alpha} E(|\mathbb{B}_v|^\alpha), \quad v \in \{0, \dots, S-1\},$$

tandis que lorsque $\alpha > 1$, on a :

$$C_+^{(v)} + C_-^{(v)} \leq \frac{2^{\alpha-1}}{m} \left(E|\mathbb{B}_v|^\alpha + E(|\mathbb{B}_v||\mathbb{A}_v|^{\alpha-1}) E(|X^{(v)}|^{\alpha-1}) \right), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Preuve. Si $0 < \alpha \leq 1$, alors par la relation (2.49) et (2.43) du théorème 2.7, on déduit que

$$\begin{aligned} C_+^{(v)} + C_-^{(v)} &= \frac{2}{2m\alpha} \left(|\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v|^\alpha - |\mathbb{A}_v X^{(v)}|^\alpha \right) \\ &\leq \frac{1}{m\alpha} E(|\mathbb{B}_v|^\alpha). \end{aligned}$$

Si $\alpha > 1$, alors par les relations (2.48) et (2.49), on déduit que

$$\begin{aligned} C_+^{(v)} + C_-^{(v)} &\leq \frac{1}{m} E\left(|\mathbb{B}_v| \left(|\mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v| \vee |\mathbb{A}_v X^{(v)}| \right)^{\alpha-1}\right) \\ &\leq \frac{c_{\alpha-1}}{m} E\left(|\mathbb{B}_v| \left(|\mathbb{A}_v X^{(v)}|^{\alpha-1} + |\mathbb{B}_v|^{\alpha-1} \right)\right) \\ &\leq \frac{2^{\alpha-1}}{m} \left(E|\mathbb{B}_v|^\alpha + E(|\mathbb{B}_v||\mathbb{A}_v|^{\alpha-1}) E(|X^{(v)}|^{\alpha-1}) \right). \end{aligned}$$

2.4 Exemples

Dans cette partie, on applique les résultats du théorème 2.6 de renouvellement implicite et le théorème 2.7 de comportement asymptotiques des queues de la solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique à certains modèles de séries chronologiques non linéaires à coefficients périodiques, à savoir le modèle ARCH(1) périodique, le modèle GARCH(1, 1) périodique, le modèle RCA(1) périodique et le modèle bilinéaire périodique.

2.4.1 Processus ARCH (1) périodique

Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus ARCH périodique d'ordre 1 et de période $S \geq 1$, c'est-à-dire satisfait le modèle suivant :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_t + \alpha_t \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.53)$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *i.i.d* telle que $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$ et η_t indépendante de σ_t pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Les paramètres ω_t et α_t sont périodiques en t , i.e, $\omega_t = \omega_{t+kS}$ et $\alpha_t = \alpha_{t+kS}$ pour tout $k, t \in \mathbb{Z}$ tels que $\omega_t > 0$ et $\alpha_t \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Le processus $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.54)$$

avec $X_t = \sigma_t^2$, $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}} = (\alpha_t \eta_{t-1}^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite ipd en raison de la périodicité en t de α_t et $B_t = \omega_t$. Le modèle ARCH(1) périodique défini par (2.53) peut être écrit encore sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{nS+v} = \sigma_{nS+v} \eta_{nS+v}, \\ \sigma_{nS+v}^2 = \omega_v + \alpha_v \varepsilon_{nS+v-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, v \in \{0, \dots, S-1\}, \end{cases} \quad (2.55)$$

Le processus $(\sigma_{nS+v}^2)_{n \in \mathbb{Z}} = (X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (2.56)$$

avec $(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v}) = \left(\prod_{i=0}^{S-1} \alpha_{nS+v-i} \eta_{nS+v-i-1}^2, \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_{nS+v-i} \eta_{nS+v-i-1}^2 \omega_{nS+v-j} \right)$ est

une suite iid pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Dans ce qui suit, on s'intéresse même au modèle

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_t + \alpha_t \varepsilon_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{N}, \end{cases} \quad (2.57)$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite iid telle que $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$ et η_t indépendante de σ_t pour tout $t \in \mathbb{N}$. Les paramètres ω_t et α_t ont périodiques en t , i.e, $\omega_t = \omega_{t+kS}$ et $\alpha_t = \alpha_{t+kS}$ pour tout $k, t \in \mathbb{N}$ tels que $\omega_t > 0$ et $\alpha_t \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{N}$.

Le processus $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{N}}$ satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{N}, \quad (2.58)$$

avec $X_t = \sigma_t^2$, $(A_t)_{t \in \mathbb{N}} = (\alpha_t \eta_{t-1}^2)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite ipd en raison de la périodicité en t de α_t et $B_t = \omega_t$.

L'application du théorème 1.1 assure la convergence de $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{N}}$ en distribution et donne les propriétés des S distributions limites.

Théorème 2.8. Pour l'équation (2.58), supposons que

$$-\infty \leq \sum_{v=0}^{S-1} E(\log(\alpha_v \eta_0^2)) < 0, \quad (2.59)$$

alors

1. $X_{nS+v} \xrightarrow{d} X^{(v)} = \sigma^{2(v)}$ lorsque $n \rightarrow \infty$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, avec $\{X^{(v)}, 0 \leq v \leq S-1\}$ satisfait l'identité en distribution suivante

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \mathbb{A}_v X^{(v)} + \mathbb{B}_v, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}. \quad (2.60)$$

où $X^{(v)}$ et $(\mathbb{A}_v, \mathbb{B}_v)$ sont indépendantes, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$.

2. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (2.60) admet une unique solution en distribution qui est donnée par

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} \sum_{j=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{j-1} \mathbb{A}_{iS+v} \mathbb{B}_{jS+v}, \quad (2.61)$$

où chaque série de l'identité (2.61) converge presque sûrement.

3. Si on choisit $X_0 \stackrel{d}{=} X^{(0)}$, les variables $\{X_v, 1 \leq v \leq S-1\}$ sont données par l'identité suivante

$$X^{(v)} \stackrel{d}{=} A_v X^{(v-1)} + B_v \stackrel{d}{=} X_v,$$

alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par (2.58) est strictement périodiquement stationnaire. Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_t} \eta_t$ est strictement périodiquement stationnaire. Maintenant supposons que pour un certain $r \geq 1$,

$$\left(\prod_{v=0}^{S-1} \alpha_v \right)^r (E(\eta_0^{2r}))^S < 1,$$

alors

4. $E(X^{(v)r}) < \infty$, $\forall v \in \{0, \dots, S-1\}$, et les séries dans (2.61) convergent en moyenne d'ordre r .
5. Si $E(X_v^r) < \infty$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par (2.58) converge en moyenne d'ordre r vers $\{X^{(v)}, 0 \leq v \leq S-1\}$, en particulier

$$E(X_{nS+v}^r) \rightarrow E(X^{(v)r}) \quad \text{lorsque } n \rightarrow \infty, v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

6. Les moments $E(X^{(v)m})$ sont déterminés par les équations

$$E(X^{(v)m}) = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} E(\mathbb{A}_v^k \mathbb{B}_v^{m-k}) E(X^{(v)k}) < \infty, \quad m = 1, \dots, [r],$$

où $[r]$ désigne la partie entière de r .

L'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.53) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.9. Pour l'équation (2.54), supposons que la condition (2.59) est vérifiée, alors pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la série

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \alpha_{t-i} \eta_{t-1-i}^2 \omega_{t-j}, \quad (2.62)$$

converge presque sûrement et le processus ainsi défini $(X)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (2.54). Le processus $(\varepsilon)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_t} \eta_t$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.53).

L'application du théorème de renouvellement implicite 2.6 et le théorème 2.7 de comportement asymptotiques des queues des S distributions marginales de la solution strictement périodiquement stationnaire nous donne le résultat suivant.

Théorème 2.10. On considère l'équation (2.54) et supposons que les conditions suivantes sont vérifiées :

1. Pour un certain $\alpha > 0$,
 - a) $\prod_{v=0}^{S-1} E((\alpha_v \eta_v^2)^\alpha) = 1$,
 - b) $E\left(\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v \eta_v^2)^\alpha \sum_{v=0}^{S-1} \log^+(\alpha_v \eta_v^2)\right) < \infty$.
2. La loi de $\sum_{v=0}^{S-1} \log(\alpha_v \eta_v^2)$ sachant $\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v \eta_v^2) \neq 0$ est non arithmétique,

alors

1. L'équation (2.54) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et par conséquent le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_t} \eta_t$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.53).
2. Ils existent des constantes $C^{(v)} > 0, v \in \{0, \dots, S-1\}$ définies par

$$C^{(v)} = \frac{E\left[\left(\prod_{i=0}^{S-1} \alpha_i \eta_i^2\right) \sigma_v^2 + \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} (\alpha_{S+v-i} \eta_i^2) \omega_{S+v-j}\right]^\alpha - \left[\left(\prod_{i=0}^{S-1} \alpha_i \eta_i^2\right) \sigma_v^2\right]^\alpha}{\alpha E\left(\prod_{i=0}^{S-1} (\alpha_i \eta_i^2)^\alpha \sum_{i=0}^{S-1} \log(\alpha_i \eta_i^2)\right)}$$

telles que

$$P(\sigma_v > t) \sim C^{(v)} t^{-2\alpha}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.63)$$

$$P(|\varepsilon_v| > t) \sim E(|\eta_0|^{2\alpha}) P(\sigma_v > t), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.64)$$

Remarque 2.1.

1. La condition (2.59) du théorème 2.8 est équivalente à la condition suivante :

$$0 \leq \prod_{v=0}^{S-1} \alpha_v < \exp(-SE(\log \eta_0^2)).$$

2. La condition $\sum_{v=0}^{S-1} E|B_v|^\alpha < \infty$ du théorème 2.7 se réduit à $\sum_{v=0}^{S-1} \omega_v^\alpha < \infty$ qui est vérifiée.
3. La relation (2.64) se déduit du résultat de Breiman [48] suivant : Soient X et Y deux variables aléatoires positives et indépendantes, Y est à variation régulière d'indice $\alpha > 0$ et l'une des conditions suivantes est vérifiée.

i) $E(X^{\alpha+\varepsilon}) < \infty$ pour un certain $\varepsilon > 0$.

ii) $P(Y > t) \sim Ct^{-\alpha}, t \rightarrow \infty$ pour un certain $C > 0$ et $E(X^\alpha) < \infty$

alors

$$P(XY > t) \sim E(X^\alpha)P(Y > t), \quad t \rightarrow \infty.$$

2.4.2 Processus GARCH (1,1) périodique

Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus GARCH périodique d'ordre (1,1) et de période $S \geq 1$, c'est-à-dire satisfait le modèle

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_t + \alpha_t \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_t \sigma_{t-1}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (2.65)$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *i.i.d* telle que $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$ et η_t indépendante de σ_t pour tout $t \in \mathbb{Z}$. Les paramètres ω_t , α_t et β_t ont périodiques en t , i.e, $\omega_t = \omega_{t+kS}$, $\alpha_t = \alpha_{t+kS}$ et $\beta_t = \beta_{t+kS}$ pour tout $k, t \in \mathbb{Z}$ tels que $\omega_t > 0$, $\alpha_t \geq 0$ et $\beta_t \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Le processus $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.66)$$

avec $X_t = \sigma_t^2$, $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}} = (\alpha_t \eta_{t-1}^2 + \beta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite ipd et $B_t = \omega_t$.

Le modèle GARCH(1,1) périodique défini par (2.65) peut être écrit encore sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{nS+v} = \sigma_{nS+v} \eta_{nS+v}, \\ \sigma_{nS+v}^2 = \omega_v + \alpha_v \varepsilon_{nS+v-1}^2 + \beta_v \sigma_{nS+v-1}^2, \quad n \in \mathbb{Z}, v \in \{0, \dots, S-1\}, \end{cases} \quad (2.67)$$

Le processus $(\sigma_{nS+v}^2)_{n \in \mathbb{Z}} = (X_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad (2.68)$$

avec

$$\begin{aligned} \mathbb{A}_{nS+v} &= \prod_{i=0}^{S-1} (\alpha_{nS+v-i} \eta_{nS+v-i-1}^2 + \beta_{nS+v-i}), \\ \mathbb{B}_{nS+v} &= \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} (\alpha_{nS+v-i} \eta_{nS+v-1-i}^2 + \beta_{nS+v-i}) \omega_{nS+v-j} \end{aligned}$$

et $(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite iid pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

L'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.65) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.11. *Pour l'équation (2.66), supposons que la condition suivante est vérifiée*

$$-\infty \leq \sum_{v=0}^{S-1} E(\log(\alpha_v \eta_0^2 + \beta_v)) < 0, \quad (2.69)$$

alors pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la série

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} (\alpha_{t-i} \eta_{t-1-i}^2 + \beta_{t-i}) \omega_{t-j}, \quad (2.70)$$

converge presque sûrement et le processus ainsi défini $(X)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (2.66). Le processus $(\varepsilon)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_t} \eta_t$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.65).

L'application du théorème de renouvellement implicite 2.6 et le théorème 2.7 de comportement asymptotiques des queues des S distributions marginales de la solution strictement périodiquement stationnaire nous donne le résultat suivant.

Théorème 2.12. *Pour le modèle (2.65), supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

1. Pour un certain $\alpha > 0$,
 - a) $\prod_{v=0}^{S-1} E((\alpha_v \eta_v^2 + \beta_v)^\alpha) = 1$,
 - b) $E\left(\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v \eta_v^2 + \beta_v)^\alpha \sum_{v=0}^{S-1} \log^+(\alpha_v \eta_v^2 + \beta_v)\right) < \infty$.
2. La loi de $\sum_{v=0}^{S-1} \log(\alpha_v \eta_v^2 + \beta_v)$ sachant $\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v \eta_v^2 + \beta_v) \neq 0$ est non arithmétique,

alors

1. L'équation (2.66) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$. Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_t} \eta_t$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.65).
2. Ils existent des constantes $C^{(v)} > 0, v \in \{0, \dots, S-1\}$ définies par

$$C^{(v)} = \frac{E\left[(\mathbb{A}_v \sigma_v^2 + \mathbb{B}_v)^\alpha - (\mathbb{A}_v \sigma_v^2)^\alpha\right]}{\alpha E(\mathbb{A}_v \log \mathbb{A}_v)}$$

telles que

$$P(\sigma_v > t) \sim C^{(v)} t^{-2\alpha}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty, \quad (2.71)$$

$$P(|\varepsilon_v| > t) \sim E(|\eta_0|^{2\alpha}) P(\sigma_v > t), \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty. \quad (2.72)$$

2.4.3 Processus RCA(1) périodique

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus autorégressif périodique à coefficients aléatoires définie par l'équation aux différences stochastique suivante

$$X_t = (\varphi_t + b_t) X_{t-1} + e_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.73)$$

avec $\varphi_t \in \mathbb{R}$ périodique en t , i.e., $\varphi_{tS+v} = \varphi_v, v \in \{0, \dots, S-1\}$, pour tout $t \in \mathbb{Z}$ et $(b_t, e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires ipd de période $S \geq 1$.

Le modèle RCA(1) périodique (2.73) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X_{nS+v} = (\varphi_v + b_{nS+v}) X_{nS+v-1} + e_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.74)$$

Dans ce cas, le modèle (2.73) satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.75)$$

avec

$$\mathbb{A}_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} (\varphi_{nS+v-i} + b_{nS+v-i}), \quad \mathbb{B}_{nS+v} = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{nS+v-i} + b_{nS+v-i}) e_{nS+v-j} \quad (2.76)$$

et $(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

L'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.73) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.13. *Pour l'équation (2.73), supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |e_v|) < \infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq \sum_{v=0}^{S-1} E(\log |\varphi_v + b_v|) < 0, \quad (2.77)$$

alors pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la série

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{t-i} + b_{t-i}) e_{t-j}, \quad (2.78)$$

converge absolument presque sûrement et le processus $(X)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (2.73).

L'application du théorème de renouvellement implicite 2.6 et le théorème 2.7 de comportement asymptotiques des queues des S distributions marginales de la solution strictement périodiquement stationnaire nous donne le résultat suivant.

Théorème 2.14. *Pour l'équation (2.73), supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

1. Pour un certain $\alpha > 0$

a) $\prod_{v=0}^{S-1} E(|\varphi_v + b_v|^\alpha) = 1,$

b) $E\left(\prod_{v=0}^{S-1} |\varphi_v + b_v|^\alpha \sum_{v=0}^{S-1} \log^+ |\varphi_v + b_v|\right) < \infty,$

c) $\sum_{v=0}^{S-1} E|e_v|^\alpha < \infty.$

2. la loi conditionnelle de $\sum_{v=0}^{S-1} \log |\varphi_v + b_v|$ sachant $\prod_{v=0}^{S-1} (\varphi_v + b_v) \neq 0$ est non arithmétique, alors

1. L'équation (2.73) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

2. Ils existent des constantes $C_+^{(v)}, C_-^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}$, pour les quelles

$$P(X_v > t) \sim C_+^{(v)} t^{-\alpha}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$P(X_v < -t) \sim C_-^{(v)} t^{-\alpha}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Les constantes $C_+^{(v)}, C_-^{(v)}, v \in \{0, \dots, S-1\}$, sont telles que

a) si $\prod_{v=0}^{S-1} (\varphi_v + b_v) \geq 0$ p.s, alors

$$C_+^{(v)} = \frac{E\left[\left((\mathbb{A}_v X_v + \mathbb{B}_v)^+\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X_v)^+\right)^\alpha\right]}{\alpha E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|)},$$

$$C_-^{(v)} = \frac{E\left[\left((\mathbb{A}_v X_v + \mathbb{B}_v)^-\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X_v)^-\right)^\alpha\right]}{\alpha E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|)}.$$

b) si $P\left(\prod_{v=0}^{S-1} (\varphi_v + b_v) < 0\right) > 0$, alors

$$C_+^{(v)} = C_-^{(v)} = \frac{E\left[|\mathbb{A}_v X_v + \mathbb{B}_v|^\alpha - |\mathbb{A}_v X_v|^\alpha\right]}{2\alpha E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|)}.$$

2.4.4 Processus Bilinéaire périodique

Soit $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus bilinéaire périodique définie par l'équation aux différences stochastique suivante :

$$X_t = (\varphi_t + \beta_t e_t) X_{t-1} + e_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (2.79)$$

où $\varphi_t, \beta_t \in \mathbb{R}$ périodiques en t et $(e_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires ipd de période $S \geq 1$.

Le modèle bilinéaire périodique (2.79) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$X_{nS+v} = (\varphi_v + \beta_v e_{nS+v}) X_{nS+v-1} + e_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, n \in \mathbb{Z}, \quad (2.80)$$

Dans ce cas, le modèle bilinéaire périodique (2.80) satisfait l'équation aux récurrences stochastique

$$X_{nS+v} = \mathbb{A}_{nS+v} X_{(n-1)S+v} + \mathbb{B}_{nS+v}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, n \in \mathbb{Z}. \quad (2.81)$$

avec

$$\mathbb{A}_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} (\varphi_{nS+v-i} + \beta_{nS+v-i} e_{nS+v-i}), \quad (2.82)$$

$$\mathbb{B}_{nS+v} = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{nS+v-i} + \beta_{nS+v-i} e_{nS+v-i}) e_{nS+v-j} \quad (2.83)$$

et $(\mathbb{A}_{nS+v}, \mathbb{B}_{nS+v})_{n \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

L'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (2.79) est donnée par le théorème suivant.

Théorème 2.15. *Pour l'équation (2.79), supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

$$\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ |e_v|) < \infty \quad \text{et} \quad -\infty \leq \sum_{v=0}^{S-1} E(\log |\varphi_v + \beta_v e_v|) < 0, \quad (2.84)$$

alors pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la série

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} (\varphi_{t-i} + \beta_{t-i} e_{t-i}) e_{t-j} \quad (2.85)$$

converge absolument presque surement et le processus $(X)_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire de l'équation (2.79).

L'application du théorème de renouvellement implicite 2.6 et le théorème 2.7 de comportement asymptotiques des queues des S distributions marginales de la solution strictement périodiquement stationnaire nous donne le résultat suivant.

Théorème 2.16. *Pour l'équation (2.79), supposons que les conditions suivantes sont vérifiées*

1. Pour un certain $\alpha > 0$
 - a) $\prod_{v=0}^{S-1} E(|\varphi_v + \beta_v e_v|^\alpha) = 1,$

- b) $E\left(\prod_{v=0}^{S-1} |\varphi_v + \beta_v e_v|^\alpha \sum_{v=0}^{S-1} \log^+ |\varphi_v + \beta_v e_v|\right) < \infty$,
- c) $\sum_{v=0}^{S-1} E|e_v|^\alpha < \infty$.
2. la loi conditionnelle de $\sum_{v=0}^{S-1} \log |\varphi_v + \beta_v e_v|$ sachant $\prod_{v=0}^{S-1} (\varphi_v + \beta_v e_v) \neq 0$ est non arithmétique, alors
1. L'équation (2.79) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.
2. Ils existent des constantes $C_+^{(v)}, C_-^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, pour les quelles

$$P(X_v > t) \sim C_+^{(v)} t^{-\alpha}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty,$$

$$P(X_v < -t) \sim C_-^{(v)} t^{-\alpha}, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}, \quad t \rightarrow \infty.$$

Les constantes $C_+^{(v)}, C_-^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, sont telles que

- a) si $\prod_{v=0}^{S-1} (\varphi_v + \beta_v e_v) \geq 0$ p.s, alors

$$C_+^{(v)} = \frac{E\left[\left((\mathbb{A}_v X_v + \mathbb{B}_v)^+\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X_v)^+\right)^\alpha\right]}{\alpha E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|)},$$

$$C_-^{(v)} = \frac{E\left[\left((\mathbb{A}_v X_v + \mathbb{B}_v)^-\right)^\alpha - \left((\mathbb{A}_v X_v)^-\right)^\alpha\right]}{\alpha E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|)}.$$

- b) si $P\left(\prod_{v=0}^{S-1} (\varphi_v + \beta_v e_v) < 0\right) > 0$, alors

$$C_+^{(v)} = C_-^{(v)} = \frac{E\left[|\mathbb{A}_v X_v + \mathbb{B}_v|^\alpha - |\mathbb{A}_v X_v|^\alpha\right]}{2\alpha E(|\mathbb{A}_v|^\alpha \log |\mathbb{A}_v|)}.$$

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le comportement asymptotique des queues de la solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique que nous avons étudié dans le premier chapitre. Nous avons démontré le théorème de renouvellement implicite périodique afin de l'utiliser pour démontrer que les distributions marginales de la solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique sont à variations régulières de même indice de variation. Nous avons appliqué nos résultats à certains modèle périodiques de séries chronologiques, à savoir le modèle ARCH(1) périodique, le modèle GARCH(1, 1) périodique, le modèle RCA(1) périodique et le modèle bilinéaire périodique. Notons qu'il est très intéressant d'étudier la variation régulière de la somme finie des variables de la solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation aux récurrences stochastique, comme il est aussi intéressant d'étudier la variation régulière des distributions fini-dimensionnelles de cette solution strictement périodiquement stationnaire.

Chapitre 3

Modèles GARCH(p,q) et ARCH(∞) Périodiques

3.1 Introduction

Les modèles autorégressifs conditionnellement hétéroscédastiques généralisés GARCH introduits par Bollerslev [40] sont de grande importance grâce à leur capacité à représenter adéquatement certaines séries financières. Ces modèles sont caractérisés par le fait que la variance conditionnelle sur le passé du processus est une fonction linéaire des carrés des valeurs passées du processus. Les propriétés probabilistes ont été étudiées via l'équation aux récurrences stochastique, à savoir la stationnarité stricte, la stationnarité au second ordre, l'ergodicité, l'existence des moments d'ordres supérieurs et la propriété du mélange (voir Bougerol et Picard [42], Davis et Mikosch [57], Francq et Zakoian [82], Berkes et al [32]). Les paramètres de ces modèles ont été estimés par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (voir Francq et Zakoian [81], Straumann et Mikosch [133]). Ces dernières années Aknouche a étudié les modèles GARCH périodiques et leurs propriétés probabilistes, à savoir la stationnarité périodique stricte, la stationnarité périodique au second ordre, l'existence des moments d'ordres supérieurs, l'ergodicité périodique, la propriété du mélange et la structure d'autocovariance (voir Aknouche et al [14], Aknouche et Bibi [15], Bibi et Aknouche [34], Aknouche et Bentarzi [16]). Les paramètres de ces modèles ont été estimés par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance (voir Aknouche et Bibi [15], Aknouche et al [14]).

3.2 Modèles GARCH(p, q) périodiques

Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus GARCH(p, q) périodique de période $S \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire satisfait l'équation aux différences stochastique suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = \omega_t + \sum_{i=1}^q \alpha_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{t,j} \sigma_{t-j}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.1)$$

où $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite iid telle que $E(\eta_t) = 0$, $E(\eta_t^2) = 1$ et η_t indépendante de ε_{t-i} pour tout $i > 0$. Les paramètres ω_t , $\alpha_{t,i}$ et $\beta_{t,j}$ sont périodiques en t de période $S \in \mathbb{N}^*$ tels que $\omega_t > 0$, $\alpha_{t,i} \geq 0$ et $\beta_{t,j} \geq 0$ pour tout $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ et $t \in \mathbb{Z}$.

En posant $t = nS + v$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, Le modèle GARCH(p, q) périodique (3.1)

peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} \varepsilon_{nS+v} = \sigma_{nS+v} \eta_{nS+v}, \\ \sigma_{nS+v}^2 = \omega_v + \sum_{i=1}^q \alpha_{v,i} \varepsilon_{nS+v-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_{v,j} \sigma_{nS+v-j}^2, \end{cases} \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.2)$$

La deuxième équation du modèle (3.2) peut s'écrire sous la forme symbolique suivante

$$\mathcal{B}_v(L) \sigma_{nS+v}^2 = \omega_v + \mathcal{A}_v(L) \varepsilon_{nS+v}^2, \quad n \in \mathbb{Z}, \quad (3.3)$$

avec L est défini par $L^i \sigma_{nS+v}^2 = \sigma_{nS+v-i}^2$, $L^i \varepsilon_{nS+v}^2 = \varepsilon_{nS+v-i}^2$ et $\mathcal{B}_v(L)$, $\mathcal{A}_v(L)$ deux polynômes définis par

$$\mathcal{A}_v(L) = \sum_{i=1}^q \alpha_{v,i} L^i, \quad \text{et} \quad \mathcal{B}_v(L) = 1 - \sum_{i=1}^p \beta_{v,i} L^i. \quad (3.4)$$

3.2.1 Stationnarité périodique stricte

Le modèle GARCH(p,q) périodique défini par (3.1) peut aussi s'écrire comme équation aux récurrences stochastique

$$X_t = A_t X_{t-1} + B_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.5)$$

où $X_t = (\varepsilon_t^2, \dots, \varepsilon_{t-q+1}^2, \sigma_t^2, \dots, \sigma_{t-p+1}^2)'$, $B_t = (\omega_t \eta_t^2, 0, \dots, \omega_t, 0, \dots, 0)'$ et

$$A_t = \begin{pmatrix} \alpha_{t,1} \eta_t^2 & \dots & \alpha_{t,q-1} \eta_t^2 & \alpha_{t,q} \eta_t^2 & \beta_{t,1} \eta_t^2 & \dots & \beta_{t,p-1} \eta_t^2 & \beta_{t,p} \eta_t^2 \\ 1 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \alpha_{t,1} & \dots & \alpha_{t,q-1} & \alpha_{t,q} & \beta_{t,1} & \dots & \beta_{t,p-1} & \beta_{t,p} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

tels que $(A_t, B_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *i.p.d* en raison de périodicité des paramètres ω_t , $\alpha_{t,i}$, $\beta_{t,j}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ et à valeurs dans $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}) \times \mathbb{R}^{p+q}$.

On note par $\|\cdot\|$ la norme euclidienne sur \mathbb{R}^{p+q} et la norme matricielle induite sur $\mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, l'espace des matrices carrées de taille $(q+p) \times (q+p)$.

L'exposant de Lyapounov associé à la suite ipd $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est défini par

$$\begin{aligned} \gamma^S(A) &= \inf \left\{ \frac{1}{n} E \log \|A_n S A_{nS-1} \dots A_1\|, n \in \mathbb{N}^* \right\} \\ &= \inf \left\{ \frac{1}{n} E \log \|\mathbb{A}_n S \mathbb{A}_{(n-1)S} \dots \mathbb{A}_S\|, n \in \mathbb{N}^* \right\}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

pourvu que $\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ \|A_v\|) < \infty$, où $\mathbb{A}_{nS+v} = \prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+v-i}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$.

Puisque $E(\eta_t^2) < \infty$, alors $\sum_{v=0}^{S-1} E(\|A_v\|) < \infty$ et $\sum_{v=0}^{S-1} E(\|B_v\|) < \infty$ et par l'inégalité de Jensen, on peut vérifier que

$$\sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ \|A_v\|) < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{v=0}^{S-1} E(\log^+ \|B_v\|) < \infty. \quad (3.7)$$

Maintenant, puisque la suite $(A_n S)_{n \in \mathbb{Z}}$ est iid et vérifie les contions (3.7), alors par le théorème 6 ergodique sous-additif de Kingman [108], on déduit que

$$\gamma^S(A) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_n S A_{nS-1} \dots A_1\| \quad \text{p.s.}, \quad (3.8)$$

et par le lemme 2.1 de Bougerol et Picard [42], on a

$$\text{si } \lim_{n \rightarrow \infty} \|A_n S A_{nS-1} \dots A_1\| = 0 \quad \text{p.s.}, \quad \text{alors } \gamma^S(A) < 0. \quad (3.9)$$

Le théorème suivant de Aknouche et Bibi [15] donne l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.1).

Théorème 3.1. *L'équation (3.5) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire définie par*

$$X_t = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (3.10)$$

si et seulement si l'exposant de Lyapounov $\gamma^S(A)$ associé à la suite ipd $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par (3.6) est strictement inférieur à zéro, où la série converge presque sûrement pour chaque $t \in \mathbb{Z}$.

Preuve. Supposons qu'il existe une solution strictement périodiquement stationnaire $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de (3.1). Considérons le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par (3.5). Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et tout $m > 0$, après m itérations sur l'équation (3.5), on trouve

$$X_v = \sum_{j=0}^m \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} B_{v-j} + \prod_{j=0}^{m+1} A_{v-j} X_{v-m-1}.$$

On utilise les notations suivantes : pour $x, y \in \mathbb{R}^{p+q}$ et $A, B \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, $x \leq y$ si $x - y \in \mathbb{R}_+^{p+q}$ et $A \leq B$ si $B - A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R}_+)$. Maintenant, puisque les coefficients de la matrice A_t et de vecteur X_v sont positifs, alors pour tout $m > 1$,

$$X_v \geq \sum_{j=0}^m \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} B_{v-j} \quad \text{p.s.},$$

et ceci implique que la série $\sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} B_{v-j}$ converge presque sûrement et par conséquent

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} B_{v-j} = 0 \quad \text{p.s.} \quad (3.11)$$

Soit $(e_k)_{1 \leq k \leq q+p}$, une base canonique de \mathbb{R}^{p+q} et on montre que pour chaque $k \in \{1, \dots, q+p\}$, on a

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} e_k = 0 \quad \text{p.s.} \quad (3.12)$$

Comme $B_{v-j} = \omega_{v-j} \eta_{v-j}^2 e_1 + \omega_{v-j} e_{q+1}$, avec $\omega_{v-j} > 0$, alors par (3.11),

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{v-j} \eta_{v-j}^2 \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} e_1 = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{et} \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \omega_{v-j} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} e_{q+1} = 0 \quad \text{p.s.}, \quad (3.13)$$

et par conséquent la relation (3.12) est vérifiée pour $k = q + 1$. Pour chaque $k = 1, \dots, p$, on a

$$A_{v-j}e_{q+k} = \beta_{v-j+1,k}\eta_{v-j+1}^2 A_{v-j+1}e_1 + \beta_{v-j+1,k}A_{v-j+1}e_{q+1} + e_{q+k+1},$$

et puisque $\beta_{v-j+1,k} \geq 0$, alors pour $k = 1$,

$$0 \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i}e_{q+2} \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i}e_{q+1} = 0 \text{ p.s.} \quad (3.14)$$

et par conséquent, la relation (3.12) est vérifiée pour $k = q + 2$. Avec le même raisonnement, on peut vérifier que la relation (3.12) est vérifiée pour $k = q + 1, \dots, q + p$. D'autres parts, puisque

$$A_{v-j+1}e_q = \alpha_{v-j+1,q}\eta_{v-j+1}^2 e_1 + \alpha_{v-j+1,q}e_{q+1},$$

alors par la relation (3.13), on déduit que la relation (3.12) est vérifiée pour $k = q$. Maintenant, pour $k = 1, \dots, q - 1$, on a

$$A_{v-j+1}e_k = \alpha_{v-j+1,k}\eta_{v-j+1}^2 e_1 + \alpha_{v-j+1,k}e_{q+1} + e_{k+1},$$

alors

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i}e_{q-1} &\leq \alpha_{v-j+1,q-1}\eta_{v-j+1}^2 \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i}e_1 + \alpha_{v-j+1,q-1} \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i}e_{q+1} \\ &+ \lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i}e_q = 0 \text{ p.s.} \end{aligned}$$

ceci vient de la relation (3.13) et le fait que $\alpha_{v-j+1,q-1} \geq 0$. De la même manière, on peut vérifier la relation (3.12) pour $k = 1, \dots, q - 2$. Finalement, la relation (3.12) est vérifiée pour chaque e_k , $k \in \{1, \dots, q + p\}$ et par conséquent

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i} = 0 \text{ p.s.} \quad (3.15)$$

La suite $(\prod_{i=0}^{j-1} A_{v-i})_{j \in \mathbb{Z}}$ converge presque sûrement vers zéro, alors toutes ses sous-suites convergent vers zéro, en particulier la sous-suite de terme général

$$\prod_{i=0}^{Sj-1} A_{v-i} = \prod_{i=0}^{j-1} \left(\prod_{k=0}^{S-1} A_{v-iS-k} \right) = \prod_{i=0}^{j-1} \mathbb{A}_{v-iS},$$

où la suite $(\mathbb{A}_{v-iS})_{i \in \mathbb{Z}}$ est iid pour chaque $v \in \{0, \dots, S - 1\}$. Par la relation (3.9), on déduit que $\gamma^S(A) < 0$.

Supposons que $\gamma^S(A) < 0$, alors la relation (3.8) implique que la série dans (3.10) converge presque sûrement pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En effet, on a

$$\begin{aligned} [X_t] &= \left\| \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} A_{t-i} B_{t-j} \right\| \\ &\leq \sum_{j=0}^{\infty} \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-j+1}\| \cdot \|B_{t-j}\|. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Maintenant, on a

$$\begin{aligned} \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-j+1}\|^{1/j} |B_{t-j}|^{1/j} &= \exp\left(\frac{1}{j} \log \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-j+1}\| + \frac{1}{j} \log \|B_{t-j}\|\right) \\ &\xrightarrow{p.s.} \exp\left\{\frac{\gamma^S(A)}{S}\right\} < 1, \quad j \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

d'où la série convergence presque sûrement par le critère de Cauchy pour les séries à termes positifs. La solution $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ du modèle (3.1) est définie par $\varepsilon_t = \sqrt{X_{t,q+1}} \eta_t$ où $X_{t,q+1}$ désigne la $(q+1)$ ^{ème} composante du vecteur X_t . Cette solution est non-anticipative parce qu'elle s'écrit comme une fonction mesurable de $\eta_{t-1}, \eta_{t-2}, \dots$. Elle est aussi strictement périodiquement stationnaire en raison de la stationnarité stricte de $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et la périodicité des paramètres.

Maintenant, supposons qu'il existe une autre solution strictement périodiquement stationnaire $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ de l'équation (3.5), alors pour tout $n > 0$,

$$\begin{aligned} \|X_t - Y_t\| &= \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n+1} (X_{t-n} - Y_{t-n})\| \\ &\leq \|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n+1}\| \cdot \|X_{t-n} - Y_{t-n}\|. \end{aligned}$$

On a, $\|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n+1}\| \rightarrow 0$ p.s lorsque $n \rightarrow \infty$ parce que la série dans (3.16) converge presque sûrement et comme la loi de $(X_{t-n} - Y_{t-n})$ ne dépend pas de n , alors $\|A_t A_{t-1} \dots A_{t-n+1}\| \cdot \|X_{t-n} - Y_{t-n}\| \xrightarrow{P} 0$ lorsque $n \rightarrow \infty$. Par conséquent, $\|X_t - Y_t\| \xrightarrow{P} 0$ lorsque $n \rightarrow 0$. Comme $X_t - Y_t$ ne dépend pas de n , alors on a nécessairement, $X_t = Y_t$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

Remarque 3.1. Lorsque le modèle GARCH(p,q) périodique (3.1) admet une solution strictement périodiquement stationnaire, alors chaque modèle GARCH périodique obtenu en remplaçant les coefficients $\alpha_{t,i}$ et $\beta_{t,j}$, $i = 1, \dots, q$, $j = 1, \dots, p$ par des coefficients plus petits admet une solution strictement périodiquement stationnaire parce que l'exposant de Lyapounov associé au nouveau modèle est inférieur à celui associé au modèle initial. En particulier, lorsqu'on annule les coefficients $\beta_{t,j}$, $j = 1, \dots, p$, le modèle obtenu est le modèle ARCH(q) périodique qui admet une solution strictement périodiquement stationnaire dès que le modèle initial GARCH(p,q) périodique admet une solution strictement périodiquement stationnaire.

Rappelons que pour une matrice $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, le rayon spectral de A , noté $\rho(A)$, est défini comme la plus grande valeur propre en valeur absolue de ses valeurs propres. Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_{p+q}(\mathbb{R})$, on a le résultat suivant :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A^n\| = \log \rho(A). \quad (3.17)$$

Par les relations (3.17) et (3.8), l'exposant de Lyapounov associé à une suite de matrices $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ non aléatoires et périodique en t de période $S \in \mathbb{N}^*$ est défini par :

$$\begin{aligned} \gamma^S(A) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \|A_{nS} A_{nS-1} \dots A_1\| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \left\| \left(\prod_{v=0}^{S-1} A_{S-v} \right)^n \right\| = \log \rho \left(\prod_{v=0}^{S-1} A_{S-v} \right). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Le résultat suivant de Aknouche et Bibi [15] donne une condition nécessaire de la stationnarité périodique stricte.

Corollaire. Si le modèle (3.1) admet une solution strictement périodiquement stationnaire, alors

$$\rho\left(\prod_{v=0}^{S-1} \beta_{S-v}\right) < 1, \quad (3.19)$$

où β_t est une sous-matrice de A_t définie par

$$\beta_t = \begin{pmatrix} \beta_{t,1} & \beta_{t,2} & \dots & \beta_{t,p-1} & \beta_{t,p} \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Preuve. Comme les termes des matrices A_t sont positifs, alors l'exposant de Lyapounov associé à la suite $(A_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est supérieur à celui associé à la suite obtenue en remplaçant les coefficients des q premières lignes et des q premières colonnes par zéro dans les matrices A_t . Par la relation (3.18), on a :

$$\log \rho\left(\prod_{v=0}^{S-1} \beta_{S-v}\right) = \gamma^S(\beta) \leq \gamma^S(A),$$

et ainsi, si le modèle (3.1) admet une solution strictement périodiquement stationnaire, c'est-à-dire $\gamma^S(A) < 0$, alors la relation (3.19) est vérifiée.

Le théorème suivant de Aknouche et Bibi [15] assure l'existence d'un moment d'un certain ordre de la solution strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.1).

Théorème 3.2. Supposons que $\gamma^S(A) < 0$. Soit $\varepsilon_t = \sigma_t \eta_t$ la solution strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.1), alors il existe $\kappa > 0$ tel que $E(\sigma_t^{2\kappa}) < \infty$ et $E(\varepsilon_t^{2\kappa}) < \infty$.

Preuve. On utilise le lemme suivant dans la preuve du théorème 3.2.

Lemme 3.1. Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ une suite de matrices aléatoires positives ipd avec un exposant de Lyapounov $\gamma^S(A)$, alors

$$\gamma^S(A) < 0 \text{ ssi } \exists \kappa > 0, \exists n_0 \geq 1 \text{ tels que } \delta = E\|A_{n_0 S} A_{n_0 S-1} \dots A_1\|^\kappa < 1. \quad (3.20)$$

Preuve. Supposons que $\gamma^S(A) < 0$. Par définition,

$$\gamma^S(A) = \inf\left\{\frac{1}{n} E(\log \|A_n S A_{n S-1} \dots A_1\|), n \in \mathbb{N}^*\right\},$$

alors il existe $\exists n_0 \geq 1$ tel que $E(\log \|A_{n_0 S} A_{n_0 S-1} \dots A_1\|) < 0$. De plus,

$$\begin{aligned} E\|A_{n_0 S} A_{n_0 S-1} \dots A_1\| &= \|E(A_{n_0 S} A_{n_0 S-1} \dots A_1)\| \\ &= \|(E(A_S A_{S-1} \dots A_1))^{n_0}\| \\ &\leq (E\|A_S A_{S-1} \dots A_1\|)^{n_0} < \infty \end{aligned}$$

et ceci vient du fait que la norme matricielle $\|\cdot\|$ est multiplicative, la positivité des éléments des matrices A_n et la suite $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est ipd. On utilise le lemme suivant.

Lemme 3.2. Soit X une variable aléatoire positive. Si $E(\log X) < 0$ et $E(X^r) < \infty$ pour un certain $r > 0$, alors il existe $\kappa > 0$ tel que $E(X^\kappa) < 1$.

Par le lemme 3.2, on déduit qu'il existe $\kappa > 0$ tel que

$$\delta = E\|A_{n_0 S} A_{n_0 S-1} \dots A_1\|^\kappa < 1. \quad (3.21)$$

Maintenant, supposons qu'il existe $\kappa > 0$ et $n_0 \geq 1$ tels que $\delta < 1$, alors par l'inégalité de Jensen, on déduit que

$$\gamma^S(A) \leq \frac{1}{n_0} E(\log \|A_{n_0 S} A_{n_0 S-1} \dots A_1\|) \leq \frac{1}{\kappa n_0} \log \delta < 0.$$

Ainsi, la preuve du lemme 3.1 est achevée. Revenons maintenant à preuve du théorème 3.2. Dans le lemme 3.1, on peut considérer $\kappa \in]0, 1[$. Pour $\kappa \in]0, 1[$, on a $(\sum_{i \in \mathbb{N}} x_i)^\kappa \leq \sum_{i \in \mathbb{N}} x_i^\kappa$ pour toute suite numérique à termes positifs $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$. En utilisant cette dernière inégalité, on déduit que la solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation (3.5) définie par (3.10) satisfait

$$\begin{aligned} E\|X_t\|^\kappa &\leq \sum_{i=1}^{\infty} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa + E\|B_t\|^\kappa \\ &= \sum_{i=1}^{n_0 S} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa + \sum_{i=n_0 S+1}^{2n_0 S} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa \\ &\quad + \sum_{i=2n_0 S+1}^{\infty} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa + E\|B_t\|^\kappa \\ &\leq \sum_{i=1}^{n_0 S} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa + \delta \sum_{i=1}^{n_0 S} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa \\ &\quad + \sum_{i=2n_0 S+1}^{\infty} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa E\|B_{t-i}\|^\kappa + E\|B_t\|^\kappa \\ &\quad \vdots \\ &\leq \phi \left(1 + \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \sum_{i=1}^{n_0 S} E\|A_t \dots A_{t-i+1}\|^\kappa \right) < \infty, \end{aligned}$$

où $\phi = \max_{1 \leq v \leq S} E\|B_v\|$ et δ défini par (3.20).

Comme $\sigma_t^{2\kappa} \leq \|X_t\|^\kappa$ et $\varepsilon_t^{2\kappa} \leq \|X_t\|^\kappa$, alors $E(\varepsilon_t^{2\kappa}) < \infty$ et $E(\sigma_t^{2\kappa}) < \infty$.

Le résultat suivant de Aknouche et Bibi [15] donne une condition suffisante pour l'existence et l'unicité de la solution strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.1).

Corollaire 3.1. *Pour l'équation (3.5), supposons que*

$$\rho \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{S-v}) \right) < 1, \quad (3.22)$$

alors l'équation (3.5) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire.

Preuve. On utilise le résultat suivant de Kesten et Spitzer [107].

Lemme 3.3. *Soit $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de matrices aléatoires positives iid de tailles $d \times d$, alors*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \|B_1 B_2 \dots B_n\| \leq \log \rho(E(B_1)).$$

Comme la suite $(\prod_{i=0}^{S-1} A_{nS+v-i})_{n \in \mathbb{Z}}$ est iid pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors par le lemme 3.3, on a

$$\gamma^S(A) \leq \log \rho \left(E \left(\prod_{v=0}^{S-1} A_{S-v} \right) \right) = \log \rho \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{S-v}) \right).$$

La condition (3.22) implique que $\gamma^S(A) < 0$. Par le théorème 3.1, l'équation (3.5) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire. Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_{t,q+1}} \eta_t$, où $X_{t,q+1}$ désigne la $(q+1)^{\text{ème}}$ composante de vecteur X_t , est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle 3.1.

3.2.2 Existence des moments d'ordres supérieurs

Dans le prochain résultat, on donne des conditions suffisantes d'existence des moments d'ordre $2m$ pour la solution strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.1). Supposons que la suite $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ admet des moments d'ordre $2m$, i.e., $E(\eta_t^{2m}) < \infty$. On note par \otimes le produit de Kronecker défini par : pour deux matrices quelconques $A = (a_{ij})$ et B , on a $A \otimes B = (a_{ij}B)$. Pour toute matrice A , on pose $A^{\otimes m} = A \otimes \dots \otimes A$. Dans cette partie, on utilise la norme matricielle, notée $\|\cdot\|$, définie pour toute matrice A par : $\|A\| = \sum_{ij} |a_{ij}|$.

Théorème 3.3. *Supposons que $E(\eta_t^{2m}) < \infty$ pour un certain $m \in \mathbb{N}^*$ et*

$$\rho \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m}) \right) < 1, \quad (3.23)$$

alors pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la série dans (3.10) converge en moyenne d'ordre m et le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par $\varepsilon_t = \sqrt{X_{t,1}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.1) et admet des moments jusqu'à l'ordre $2m$.

Inversement, si $\rho \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m}) \right) \geq 1$, alors il n'existe pas de solution strictement périodiquement stationnaire pour le modèle (3.1) telle que $E(\varepsilon_t^{2m}) < \infty$.

Preuve. Supposons que la condition (3.23) est satisfaite. Pour chaque $k > 0$, soit

$$A_{t,k} = A_t A_{t-1} \dots A_{t-k+1} \quad \text{et} \quad X_{t,k} = A_{t,k} B_{t-k}.$$

On sait que pour deux matrices quelconque A et B , on a

$$\|A\| \cdot \|B\| = \|A \otimes B\| = \|B \otimes A\|$$

et le produit de Kronecker \otimes est associatif. En utilisant ces propriétés, on a

$$\begin{aligned} \|X_{t,k}\|^m &= E \|A_{t,k} B_{t-k} \otimes \dots \otimes A_{t,k} B_{t-k}\| \\ &= \|E(A_{t,k} B_{t-k} \otimes \dots \otimes A_{t,k} B_{t-k})\|, \end{aligned}$$

cette dernière égalité vient du fait que les éléments des matrices $A_{t,k} B_{t-k}$ sont positifs. Pour toute vecteur de taille égale au nombre de colonne de la matrice A , on a

$$(AX)^{\otimes m} = A^{\otimes m} X^{\otimes m},$$

cette dernière égalité se déduit de la propriété de produit de Kronecker suivante : pour toutes matrice A, B, C et D telles que les produits AB et CD sont définis, on a $AB \otimes CD = (A \otimes C)(B \otimes D)$. Il s'en suit que pour chaque $k > 0$,

$$\begin{aligned} E\|X_{t,k}\|^m &= \|E(A_{t,k}^{\otimes m} B_{t-k}^{\otimes m})\| \\ &= \|E(A_t^{\otimes m} \dots A_{t-k+1}^{\otimes m} B_{t-k}^{\otimes m})\| \\ &= \left\| \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m}) \right)^{[k/S]} \prod_{i=0}^{l(k)-1} E(A_{t-i}^{\otimes m}) E(B_{t-k}^{\otimes m}) \right\|, \end{aligned}$$

où $l(k)$ est le reste de la division de k sur S et $[.]$ désigne la partie entière. La norme $\|\cdot\|$ est multiplicative, alors de l'expression de X_t définie dans (3.10), on a

$$\begin{aligned} \|X_t\|_m &= (E\|X_t\|^m)^{1/m} \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|X_{t,k}\|_m \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \left\| \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m}) \right)^{[k/S]} \right\|^{1/m} \cdot \left\| \prod_{i=0}^{l(k)-1} E(A_{t-i}^{\otimes m}) \right\|^{1/m} \|E(B_{t-k}^{\otimes m})\|^{1/m}. \end{aligned}$$

Si la condition (3.23) est vérifiée, alors

$$\left\| \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m}) \right)^{[k/S]} \right\|$$

converge vers zéro à vitesse exponentielle lorsque k tend vers l'infini et par conséquent pour tout $t \in \mathbb{Z}$, la série X_t converge en moyenne d'ordre m et converge presque sûrement. Le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une solution strictement périodiquement stationnaire de l'équation (3.5). De plus, si la condition (3.23) est vérifiée, alors pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $\|\varepsilon_t^2\|_m \leq \|X_t\|_m < \infty$ parce que la norme de vecteur X_t est supérieur à la valeur absolue de chacune de ses composantes. Donc, la condition (3.23) est suffisante pour l'existence de $E(\varepsilon_t^{2m})$.

Maintenant, supposons que $E(\varepsilon_t^{2m}) < \infty$. Puisque pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $X_{t,k} \geq 0$, alors

$$\begin{aligned} E(X_t^{\otimes m}) &= E\left(\left(\sum_{k=0}^{\infty} X_{t,k}\right)^{\otimes m}\right) \\ &\geq \sum_{k=0}^{\infty} E(X_{t,k}^{\otimes m}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} E(A_{t,k}^{\otimes m} B_{t-k}^{\otimes m}) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m}) \right)^{[k/S]} \prod_{i=0}^{l(k)-1} E(A_{t-i}^{\otimes m}) E(B_{t-k}^{\otimes m}) \end{aligned}$$

où $l(k)$ est le reste de la division de k sur S et $[.]$ désigne la partie entière. Comme toutes les composantes de $E(X_t^{\otimes m})$ sont finies, alors on déduit que

$$\rho\left(\prod_{v=0}^{S-1} E(A_{t-v}^{\otimes m})\right) < 1.$$

3.3 Modèles ARCH(∞) Périodiques

Le modèle ARCH(∞) a été introduit par Robinson [129], ensuite il a été étudié par Giraitis et Surgailis [86], Kazakevicius et Leipus [103], Giraitis et al [89], Giraitis et al [87]. La classe des processus ARCH(∞) contient les processus ARCH et GARCH d'ordres finis. En particulier, la solution non-anticipative strictement stationnaire du modèle GARCH(p, q) admet une représentation ARCH(∞) (voir Giraitis et al [90], Kazakevicius et Leipus [103], Francq et Zakoian [82]). Dans cette partie, on étudie le modèle ARCH(∞) à coefficients périodiques, en particulier, on donne les conditions suffisantes pour l'existence d'une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire et on donne la forme explicite de cette solution stationnaire qui s'écrit sous forme d'une série de Volterra.

3.3.1 Stationnarité périodique stricte

Soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus ARCH(∞) périodique de période $S \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire satisfait le modèle

$$\begin{cases} \varepsilon_t = \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 = \phi_{t,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{t,i} \varepsilon_{t-i}^2, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (3.24)$$

avec $(\phi_{t,i})_{i \in \mathbb{N}}$ est une suite périodique telle que $\phi_{t,0} > 0$, $\phi_{t,i} \geq 0$, $i \geq 1$ et $(\eta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite *iid* telle que $E(\eta_t) = 0$ et $E(\eta_t^2) = 1$. L'existence et l'unicité d'une solution strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.24) sont assurées par le résultat suivant.

Théorème 3.4. *S'il existe une constante $p \in]0, 1]$ telle que*

$$\prod_{v=1}^S E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v,i}^p < 1, \quad (3.25)$$

alors il existe une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.24), donnée par

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \sigma_t \eta_t, \\ \sigma_t^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \dots \phi_{t-i_1-\dots-i_{k-1}, i_k} \phi_{t-i_1-\dots-i_k, 0} \eta_{t-i_1}^2 \dots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^2 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par (3.26) est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.24) telle que $E(\varepsilon_t^{2p}) < \infty$.

Preuve. Après m itération sur la deuxième équation du modèle (3.24), on obtient

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \phi_{t,0} + \sum_{i_1=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \varepsilon_{t-i_1}^2 \\ &= \phi_{t,0} + \sum_{i_1=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \phi_{t-i_1,0} \eta_{t-i_1}^2 + \sum_{i_1=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \sum_{i_2=1}^{\infty} \phi_{t-i_1,i_2} \eta_{t-i_1}^2 \varepsilon_{t-i_1-i_2}^2 \\ &\quad \vdots \\ &= \phi_{t,0} + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \dots \phi_{t-i_1-\dots-i_{k-1}, i_k} \phi_{t-i_1-\dots-i_k, 0} \eta_{t-i_1}^2 \dots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^2 \\ &\quad + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \dots \phi_{t-i_1-\dots-i_{m-1}, i_m} \eta_{t-i_1}^2 \dots \eta_{t-i_1-\dots-i_{m-1}}^2 \varepsilon_{t-i_1-\dots-i_m}^2. \end{aligned}$$

Lorsque m tend vers l'infini, on obtient le développement en série de Volterra de σ_t^2 et le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ défini par (3.26) est candidat à être une solution strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.24). On pose

$$Y_t = \phi_{t,0} + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_1} \cdots \phi_{t-i_1-\dots-i_{k-1},i_k} \phi_{t-i_1-\dots-i_k,0} \eta_{t-i_1}^2 \cdots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^2.$$

Puisque $p \in]0, 1]$, alors en appliquant l'inégalité $(a + b)^p \leq a^p + b^p$, on obtient :

$$Y_t^p \leq \phi_{t,0}^p + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_1}^p \cdots \phi_{t-i_1-\dots-i_{k-1},i_k}^p \phi_{t-i_1-\dots-i_k,0}^p \eta_{t-i_1}^{2p} \cdots \eta_{t-i_1-\dots-i_k}^{2p}.$$

Le fait que les variables η_t sont indépendantes, on obtient en posant

$$\alpha = \max_{1 \leq v \leq S} \phi_{v,0} :$$

$$\begin{aligned} E(Y_t^p) &\leq \phi_{t,0}^p + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_1}^p \cdots \phi_{t-i_1-\dots-i_{k-1},i_k}^p \phi_{t-i_1-\dots-i_k,0}^p E(\eta_{t-i_1}^{2p}) \cdots E(\eta_{t-i_1-\dots-i_k}^{2p}). \\ &\leq \alpha^p + \alpha^p \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_1}^p \cdots \phi_{t-i_1-\dots-i_{k-1},i_k}^p (E(\eta_t^{2p}))^k. \\ &= \alpha^p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} (E(\eta_t^{2p}))^k \prod_{j=1}^k \sum_{i_j=1}^{\infty} \phi_{t-i_1-\dots-i_{j-1},i_j}^p \right) \\ &= \alpha^p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{l=1}^S E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i}^p \right]^{[k/S]} \prod_{l=1}^{m(k)} E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i}^p \right) \\ &= \alpha^p \left(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{l=1}^S E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{l,i}^p \right]^{[k/S]} \prod_{l=1}^{m(k)} E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i}^p \right), \end{aligned}$$

où $[.]$ désigne la partie entière et $m(k)$ est le reste de la division de k sur S .

Puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\prod_{l=1}^{m(k)} E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i}^p$ est majorée par une constante et la série $\sum_{k=1}^{\infty} \left[\prod_{l=1}^S E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{l,i}^p \right]^{[k/S]}$ est majorée par la série géométrique $\sum_{j=0}^{\infty} \left[\prod_{l=1}^S E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{l,i}^p \right]^j$ qui converge grâce à la condition (3.25), alors $E(Y_t^p) < \infty$ et par conséquent la variable Y_t est finie presque sûrement. Maintenant,

$$\begin{aligned} \sum_{i_0=1}^{\infty} \phi_{t,i_0} Y_{t-i_0} \eta_{t-i_0}^2 &= \sum_{i_0=1}^{\infty} \phi_{t,i_0} \phi_{t-i_0,0} \eta_{t-i_0}^2 \\ &+ \sum_{i_0=1}^{\infty} \phi_{t,i_0} \eta_{t-i_0}^2 \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t-i_0,i_1} \cdots \phi_{t-i_0-\dots-i_{k-1},i_k} \phi_{t-i_0-\dots-i_k,0} \eta_{t-i_0-i_1}^2 \cdots \eta_{t-i_0-\dots-i_k}^2. \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_0, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t,i_0} \cdots \phi_{t-i_0-\dots-i_{k-1},i_k} \phi_{t-i_0-\dots-i_k,0} \eta_{t-i_0}^2 \cdots \eta_{t-i_0-\dots-i_k}^2. \end{aligned}$$

Donc, la suite (Y_t) satisfait l'équation aux récurrences suivante :

$$Y_t = \phi_{t,0} + \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{t,i} Y_{t-i} \eta_{t-i}^2.$$

La solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.24) est obtenue en posant $\varepsilon_t = Y_t^{1/2} \eta_t$.

De plus, $E(\varepsilon_t^{2p}) = E(Y_t^p)E(\eta_t^{2p}) < \infty$, ceci vient du fait que $E(Y_t^p) < \infty$.

Maintenant, soit $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire quelconque du modèle (3.24) telle que $E(\varepsilon_t^{2p}) < \infty$. Pour chaque $m \geq 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sigma_t^2 &= \phi_{t,0} + \sum_{k=1}^{m-1} \sum_{i_1, i_2, \dots, i_k=1}^{\infty} \phi_{t, i_1} \cdots \phi_{t-i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} \phi_{t-i_1, \dots, i_k, 0} \eta_{t-i_1}^2 \cdots \eta_{t-i_1, \dots, i_k}^2 \\ &\quad + \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^{\infty} \phi_{t, i_1} \cdots \phi_{t-i_1, \dots, i_{m-1}, i_m} \eta_{t-i_1}^2 \cdots \eta_{t-i_1, \dots, i_{m-1}}^2 \varepsilon_{t-i_1, \dots, i_m}^2 \\ &= Y_{t,m} + R_{t,m}. \end{aligned}$$

C'est clair que $Y_{t,m} \rightarrow Y_t$ p.s lorsque $m \rightarrow \infty$. De plus, puisque (ε_t) est non anticipative, alors ε_t est indépendante de $\eta_{t'}^2$ pour $t > t'$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} E(R_{t,m}^p) &\leq \sum_{i_1, i_2, \dots, i_m=1}^{\infty} \phi_{t, i_1}^p \cdots \phi_{t-i_1, \dots, i_{m-1}, i_m}^p \phi_{t-i_1, \dots, i_{m-1}, i_m}^p (E(\eta_t^{2p}))^{m-1} E(\varepsilon_t^{2p}) \\ &= \frac{E(\varepsilon_t^{2p})}{E(\eta_t^{2p})} \prod_{j=1}^m E(\eta_t^{2p}) \sum_{i_j=1}^{\infty} \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j}^p \\ &= \frac{E(\varepsilon_t^{2p})}{E(\eta_t^{2p})} \left[\prod_{j=1}^S E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i}^p \right]^{[m/S]} \prod_{l=1}^{q(m)} E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1, i}^p, \end{aligned}$$

où $[\cdot]$ désigne la partie entière et $q(m)$ est le reste de la division de m sur S . Par la condition (3.25) et le fait que $\prod_{l=1}^{q(m)} E(\eta_t^{2p}) \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1, i}^p$ est majorée par une constante pour chaque $v \in \{1, \dots, S\}$, on déduit que la série $\sum_{m=1}^{\infty} E(R_{t,m}^p)$ est convergente, ce qui implique que $E(R_{t,m}^p) \rightarrow 0$ lorsque $m \rightarrow \infty$. Par conséquent, $R_{t,m} \rightarrow 0$ p.s lorsque $m \rightarrow \infty$. Finalement, $\sigma_t^2 = Y_t$ p.s et la solution est unique.

Remarque 3.2. Lorsque dans le théorème 3.4, $p = 1$, alors la condition (3.25) devient

$$\prod_{v=1}^S \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v,i} < 1, \quad (3.27)$$

et cette condition assure l'existence et l'unicité de la solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ telle que $E(\varepsilon_t^2) < \infty$.

3.3.2 Stationnarité périodique au second-ordre

Le résultat suivant qui généralise le théorème 2.1 de Kokoszka et Leipus [109] donne les conditions suffisantes pour que le modèle ARCH(∞) admette une unique solution non-anticipative faiblement périodiquement stationnaire.

Théorème 3.5. Si $E(\eta_t^4) < \infty$ et

$$\prod_{v=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v,i} < 1, \quad (3.28)$$

alors le processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ donnée par (3.26) est aussi périodiquement stationnaire au second ordre.

Preuve. Par le fait que $E(\eta_t^4) \geq (E(\eta_t^2))^2 = 1$, on déduit que la condition (3.28) implique la condition (3.27) et par théorème 3.4, le processus $(\varepsilon_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ donnée par (3.26) est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire du modèle (3.24) avec $E(\varepsilon_t^2) < \infty$. Il reste à montrer alors la stationnarité périodique de la covariance du processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ qui exige que $E(\varepsilon_t^4) < \infty$.

On pose :

$$M_t(k) = \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \phi_{t-i_1, \dots, i_k, 0} \eta_{t-i_1, \dots, i_j}^2. \quad (3.29)$$

On montre que la série dans (3.26) qui s'écrit

$$\sigma_t^2 = \sum_{k=0}^{\infty} M_t(k) \quad (3.30)$$

converge dans L^2 . On a

$$E \left| \sum_{n_1 < k \leq n_2} M_t(k) \right|^2 = \sum_{n_1 < k, k' \leq n_2} E(M_t(k)M_t(k')), \quad (3.31)$$

où, en utilisant l'inégalité de Schwarz,

$$\begin{aligned} & E(M_t(k)M_t(k')) \\ &= \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{\infty} \left[\left(\prod_{j=1}^k \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \phi_{t-i_1, \dots, i_k, 0} \right) \times \right. \\ & \quad \left. \left(\prod_{j'=1}^{k'} \phi_{t-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \phi_{t-i'_1, \dots, i'_{k'}, 0} \right) E \left(\prod_{j=1}^k \eta_{t-i_1, \dots, i_j}^2 \prod_{j'=1}^{k'} \eta_{t-i'_1, \dots, i'_{j'}}^2 \right) \right] \\ &\leq \alpha^2 \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{\infty} \left[\left(\prod_{j=1}^k \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \right) \left(\prod_{j'=1}^{k'} \phi_{t-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \right) \times \right. \\ & \quad \left. \left(E \left(\prod_{j=1}^k \eta_{t-i_1, \dots, i_j}^4 \right) \right)^{1/2} \left(E \left(\prod_{j'=1}^{k'} \eta_{t-i'_1, \dots, i'_{j'}}^4 \right) \right)^{1/2} \right] \\ &= \alpha^2 \left[\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} (E(\eta_t^4))^{k/2} \right] \left[\sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{\infty} \prod_{j'=1}^{k'} \phi_{t-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} (E(\eta_t^4))^{k'/2} \right] \\ &= \alpha^2 \left[\prod_{j=1}^k (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i_j=1}^{\infty} \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \right] \left[\prod_{j'=1}^{k'} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'_{j'}=1}^{\infty} \phi_{t-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \right] \\ &= \alpha^2 \left[\left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k/S]} \prod_{l=1}^m (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right] \times \\ & \quad \left[\left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{j,i'} \right)^{[k'/S]} \prod_{l'=1}^{m'} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-l'+1,i'} \right], \end{aligned}$$

avec $\alpha = \max_{1 \leq v \leq S} \phi_{v,0}$. $[\cdot]$ désigne la partie entière, m et m' désignent les restes de la division de k et k' sur S , respectivement.

Par la relation (3.31) et la condition (3.28), on déduit que

$$E \left| \sum_{n_1 < k \leq n_2} M_t(k) \right|^2 \rightarrow 0 \text{ p.s. lorsque } n_1, n_2 \rightarrow \infty$$

Rappelons que la covariance de (ε_t^2) est périodiquement stationnaire, si

$$\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) = \text{Cov}(\varepsilon_{t+nS}^2, \varepsilon_{t-h+nS}^2), \forall t, n, h \in \mathbb{Z}.$$

$$\begin{aligned} & E(\varepsilon_{t+nS}^2 \varepsilon_{t-h+nS}^2) \\ &= E \left[\left(\eta_{nS+t}^2 \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \phi_{nS+t-i_1-\dots-i_{j-1}, i_j} \phi_{nS+t-i_1-\dots-i_k, 0} \eta_{nS+t-i_1-\dots-i_j}^2 \right) \times \right. \\ & \left. \left(\eta_{nS+t-h}^2 \sum_{k'=0}^{\infty} \sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{\infty} \prod_{j'=1}^{k'} \phi_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{j'-1}, i'_{j'}} \phi_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{k'}, 0} \eta_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{j'}}^2 \right) \right] \\ &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \phi_{nS+t-i_1-\dots-i_{j-1}, i_j} \phi_{nS+t-i_1-\dots-i_k, 0} \right) \times \\ & \quad \left(\sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{\infty} \prod_{j'=1}^{k'} \phi_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{j'-1}, i'_{j'}} \phi_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{k'}, 0} \right) \times \\ & \quad E \left(\prod_{j=0}^k \eta_{nS+t-i_1-\dots-i_j}^2 \prod_{j'=0}^{k'} \eta_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{j'}}^2 \right) \\ &= E(\varepsilon_t^2 \varepsilon_{t-h}^2). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E(\varepsilon_{t+nS}^2) E(\varepsilon_{t-h+nS}^2) &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} \left(\sum_{i_1, \dots, i_k=1}^{\infty} \prod_{j=1}^k \phi_{nS+t-i_1-\dots-i_{j-1}, i_j} \phi_{nS+t-i_1-\dots-i_k, 0} \right) \times \\ & \quad \left(\sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{\infty} \prod_{j'=1}^{k'} \phi_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{j'-1}, i'_{j'}} \phi_{nS+t-h-i'_1-\dots-i'_{k'}, 0} \right) \\ &= E(\varepsilon_t^2) E(\varepsilon_{t-h}^2). \end{aligned}$$

Finalement, $\text{Cov}(\varepsilon_{t+nS}^2, \varepsilon_{t-h+nS}^2) = \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2)$, $\forall t, n, h \in \mathbb{Z}$.

Le résultat suivant qui généralise le lemme 2.1 de Giraitis et al [87] donne une représentation de la covariance $\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2)$ et montre que $\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) \geq 0$.

Proposition 3.1. *Supposons que la condition (3.28) est satisfaite, alors*

$$0 \leq \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) = \sum_{k, k'=0}^{\infty} R_t(k, k') \quad (3.32)$$

où

$$\begin{aligned}
 R_t(k, k') &= \text{Cov}(\eta_t^2 M_t(k), \eta_{t-h}^2 M_{t-h}(k')) \\
 &= \sum_{\substack{i_k < \dots < i_1 < t \\ i'_{k'} < \dots < i'_1 < t-h; \gamma(t, h, i, i') \geq 1}} [(\phi_{t, t-i_1} \phi_{i_1, i_1-i_2} \dots \phi_{i_{k-1}, i_{k-1}-i_k} \phi_{i_k, 0}) \\
 &\quad \times (\phi_{t-h, t-h-i'_1} \phi_{i'_1, i'_1-i'_2} \dots \phi_{i'_{k'-1}, i'_{k'-1}-i'_{k'}} \phi_{i'_{k'}, 0}) \\
 &\quad \times ((E(\eta_t^4))^{\gamma(t, h, i, i')} - (E(\eta_t^2))^{2\gamma(t, h, i, i')}) \\
 &\quad \times (E(\eta_t^2))^{k+k'+2-2\gamma(t, h, i, i')}] \tag{3.33}
 \end{aligned}$$

avec $\gamma(t, h, i, i') = |\{t, i_1, \dots, i_k\} \cap \{t-h, i'_1, \dots, i'_{k'}\}|$, le nombre d'éléments communs entre les deux ensembles $\{t, i_1, \dots, i_k\}$ et $\{t-h, i'_1, \dots, i'_{k'}\}$.

Preuve. On remarque que

$$\varepsilon_t^2 = \eta_t^2 \sum_{k=0}^{\infty} M_t(k),$$

avec $M_t(k)$ donnée par (3.29). Par conséquent,

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) &= \text{Cov}\left(\eta_t^2 \sum_{k=0}^{\infty} M_t(k), \eta_{t-h}^2 \sum_{k'=0}^{\infty} M_{t-h}(k')\right) \\
 &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} \text{Cov}(\eta_t^2 M_t(k), \eta_{t-h}^2 M_{t-h}(k')) \\
 &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} R_t(k, k').
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 R_t(k, k') &= \text{Cov}(\eta_t^2 M_t(k), \eta_{t-h}^2 M_{t-h}(k')) \\
 &= \sum_{\substack{i_1, \dots, i_k=1 \\ i'_1, \dots, i'_{k'}=1}}^{\infty} (\phi_{t, i_1} \phi_{i_1, i_2} \dots \phi_{t-i_1, \dots, i_{k-1}, i_k} \phi_{t-i_1, \dots, i_k, 0}) \\
 &\quad \times (\phi_{t-h, i'_1} \phi_{i'_1, i'_2} \dots \phi_{t-h-i'_1, \dots, i'_{k'-1}, i'_{k'}} \phi_{t-h-i'_1, \dots, i'_{k'}, 0}) \\
 &\quad \times \text{Cov}(\eta_t^2 \eta_{t-i_1}^2 \dots \eta_{t-i_1, \dots, i_k}^2, \eta_{t-h}^2 \eta_{t-h-i'_1}^2 \dots \eta_{t-h-i'_1, \dots, i'_{k'}}^2) \\
 &= \sum_{\substack{i_k < \dots < i_1 < t \\ i'_{k'} < \dots < i'_1 < t-h}} (\phi_{t, t-i_1} \phi_{i_1, i_1-i_2} \dots \phi_{i_{k-1}, i_{k-1}-i_k} \phi_{i_k, 0}) \\
 &\quad \times (\phi_{t-h, t-h-i'_1} \phi_{i'_1, i'_1-i'_2} \dots \phi_{i'_{k'-1}, i'_{k'-1}-i'_{k'}} \phi_{i'_{k'}, 0}) \\
 &\quad \times \text{Cov}(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \dots \eta_{i_k}^2, \eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \dots \eta_{i'_{k'}}^2) \tag{3.34}
 \end{aligned}$$

Puisque les variables η_t^2 sont indépendantes, alors

$$\begin{aligned}
 \text{cov}(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \dots \eta_{i_k}^2, \eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \dots \eta_{i'_{k'}}^2) &= E(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \dots \eta_{i_k}^2 \eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \dots \eta_{i'_{k'}}^2) \\
 &\quad - E(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \dots \eta_{i_k}^2) E(\eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \dots \eta_{i'_{k'}}^2)
 \end{aligned}$$

est nulle lorsque les deux ensembles $\{t, i_1, \dots, i_k\}$ et $\{t-h, i'_1, \dots, i'_{k'}\}$ n'ont pas d'éléments communs. Maintenant, si on pose $\gamma(t, h, i, i') \geq 1$ est le nombre d'éléments communs entre les deux ensembles, alors

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \cdots \eta_{i_k}^2, \eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \cdots \eta_{i'_{k'}}^2) &= \\ &= \left((E(\eta_t^4))^{\gamma(t, h, i, i')} - (E(\eta_t^2))^{2\gamma(t, h, i, i')} \right) \\ &\quad \times (E(\eta_t^2))^{k+k'+2-2\gamma(t, h, i, i')}. \end{aligned}$$

Ce qui implique directement les relations (3.32) et (3.33).

Le résultat suivant qui généralise la proposition 2.1 de Giraitis et al [87] montre que $\text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2)$ est finie pour tout $t, h \in \mathbb{Z}$.

Proposition 3.2. *Supposons que la condition (3.28) est satisfaite, alors*

$$0 \leq \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) \leq \alpha^2 E(\eta_t^4) \lambda_1^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{v=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v,i} \right)^{[k/S]} \right)^2 < \infty. \quad (3.35)$$

avec

$$\alpha = \max_{1 \leq v \leq S} \phi_{v,0} \quad \text{et} \quad \lambda_1 = \max_{1 \leq m \leq S} \max_{1 \leq v \leq S} \left(\prod_{l=1}^m (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right) \quad (3.36)$$

Pour montrer cette dernière proposition, on utilise le lemme suivant et rappelons que pour tout $t \in \mathbb{Z}$, $t = nS + v$, avec $n \in \mathbb{Z}$ et $v \in \{0, \dots, S-1\}$

Lemme 3.4. *Supposons que la condition (3.28) est satisfaite, alors*

$$\begin{aligned} 0 \leq R_t(k, k') &\leq \alpha^2 E(\eta_t^4) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k/S] + [k'/S]} \\ &\quad \times \left(\prod_{l=1}^{m(k)} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right) \left(\prod_{l'=1}^{m'(k')} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-l'+1,i'} \right) \end{aligned} \quad (3.37)$$

avec $\alpha = \max_{1 \leq v \leq S} \phi_{v,0}$. $[\cdot]$ désigne la partie entière, $m(k)$ et $m'(k')$ désignent les restes de la division de k et k' sur S , respectivement.

Preuve. On sait que

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \cdots \eta_{i_k}^2, \eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \cdots \eta_{i'_{k'}}^2) &= \\ &\leq E(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \cdots \eta_{i_k}^2 \eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \cdots \eta_{i'_{k'}}^2) \\ &\leq \left(E(\eta_t^2 \eta_{i_1}^2 \cdots \eta_{i_k}^2)^2 E(\eta_{t-h}^2 \eta_{i'_1}^2 \cdots \eta_{i'_{k'}}^2)^2 \right)^{1/2} \\ &= \left((E(\eta_t^4))^{k+1} (E(\eta_{t-h}^4))^{k'+1} \right)^{1/2} = E(\eta_t^4) (E(\eta_{t-h}^4))^{\frac{k'+k}{2}} \end{aligned} \quad (3.38)$$

De la la relation (3.34), on déduit que

$$\begin{aligned} R_t(k, k') &= \text{Cov}(\eta_t^2 M_t(k), \eta_{t-h}^2 M_{t-h}(k')) \\ &\leq \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \prod_{j=1}^k \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \phi_{t-i_1, \dots, i_k, 0} \\ &\quad \times \sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{k'} \prod_{j'=1}^{k'} \phi_{t-h-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \phi_{t-h-i'_1, \dots, i'_{k'}, 0} \\ &\quad \times E(\eta_t^4) (E(\eta_t^4))^{\frac{k'+k}{2}} \end{aligned}$$

Pour $\alpha = \max_{1 \leq v \leq S} \phi_{v,0}$, on a

$$\begin{aligned} R_t(k, k') &= \text{Cov}(\eta_t^2 M_t(k), \eta_{t-h}^2 M_{t-h}(k')) \\ &\leq \alpha^2 \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^k \prod_{j=1}^k \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \sum_{i'_1, \dots, i'_{k'}=1}^{k'} \prod_{j'=1}^{k'} \phi_{t-h-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \\ &\quad \times E(\eta_t^4) (E(\eta_t^4))^{\frac{k'+k}{2}} \\ &= \alpha^2 \left(\prod_{j=1}^k \sum_{i_j=1}^{\infty} \phi_{t-i_1, \dots, i_{j-1}, i_j} \right) \left(\prod_{j'=1}^{k'} \sum_{i'_{j'}=1}^{\infty} \phi_{t-h-i'_1, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \right) \\ &\quad \times E(\eta_t^4) (E(\eta_t^4))^{\frac{k'+k}{2}} \\ &= \alpha^2 E(\eta_t^4) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k/S]} \left(\prod_{l=1}^{m(k)} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right) \\ &\quad \times \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{j,i'} \right)^{[k'/S]} \left(\prod_{l'=1}^{m'(k')} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-l'+1,i'} \right) \\ &= \alpha^2 E(\eta_t^4) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k/S]+[k'/S]} \\ &\quad \times \left(\prod_{l=1}^{m(k)} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right) \left(\prod_{l'=1}^{m'(k')} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-l'+1,i'} \right). \end{aligned}$$

Ainsi la relation (3.37) du lemme 3.4 est vérifiée.

Preuve de la proposition 3.2. Par le lemme 3.4, on déduit que pour $t \geq 0$

$$\begin{aligned} 0 \leq R_t(k, k') &\leq \alpha^2 E(\eta_t^4) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k/S]+[k'/S]} \\ &\quad \times \max_{1 \leq v \leq S} \left(\prod_{l=1}^{m(k)} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right) \\ &\quad \times \max_{1 \leq v \leq S} \left(\prod_{l'=1}^{m'(k')} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-l'+1,i'} \right) \end{aligned}$$

En utilisant la relation (3.32) de proposition 3.1, on déduit

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} R_t(k, k') \\
 &\leq \alpha^2 E(\eta_t^4) \sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lfloor \frac{k}{S} \rfloor} \max_{1 \leq v \leq S} \left(\prod_{l=1}^{m(k)} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-l+1,i} \right) \\
 &\quad \times \sum_{k'=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{j,i'} \right)^{\lfloor \frac{k'}{S} \rfloor} \max_{1 \leq v \leq S} \left(\prod_{l'=1}^{m'(k')} (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-l'+1,i'} \right) \\
 &\leq \alpha^2 E(\eta_t^4) \lambda_1^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lfloor \frac{k}{S} \rfloor} \right) \\
 &\quad \times \left(\sum_{k'=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{j,i'} \right)^{\lfloor \frac{k'}{S} \rfloor} \right) \\
 &= \alpha^2 E(\eta_t^4) \lambda_1^2 \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_t^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lfloor \frac{k}{S} \rfloor} \right)^2 < \infty,
 \end{aligned}$$

avec α et λ_1 sont donnés pas (3.36). D'où la relation (3.35) est vérifiée.

3.3.3 Propriété de la fonction covariance

Rappelons que la condition (3.28) du théorème 3.5 assure que le processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par (3.26) est périodiquement stationnaire au second ordre. On a montré dans les propositions 3.1 et 3.2 que sous la condition (3.28), la fonction covariance vérifie, $0 \leq \text{Cov}(\varepsilon_t^2, \varepsilon_{t-h}^2) < \infty$ pour tout $h \in \mathbb{Z}$. Dans le prochain résultat qui généralise la proposition 3.1 de Giraitis et al [87], on montre que sous la condition (3.28), le processus $(\varepsilon_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est un processus de courte mémoire dans le sens que la fonction covariance vérifie

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(\varepsilon_{nS+v}^2, \varepsilon_v^2) < \infty, \quad v \in \{0, \dots, S-1\}.$$

Théorème 3.6. *Si la condition (3.28) est vérifiée, alors*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{Cov}(\varepsilon_{nS+v}^2, \varepsilon_v^2) < \infty, \quad \forall v \in \{0, \dots, S-1\} \quad (3.39)$$

Preuve. Comme dans la preuve de la proposition 3.1, on pose

$$\begin{aligned}
 \text{Cov}(\varepsilon_{nS+v}^2, \varepsilon_v^2) &= \text{Cov}(\eta_{nS+v}^2 \sum_{k=0}^{\infty} M_{nS+v}(k), \eta_v^2 \sum_{k'=0}^{\infty} M_v(k')) \\
 &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} \text{Cov}(\eta_{nS+v}^2 M_{nS+v}(k), \eta_v^2 M_v(k')) \\
 &= \sum_{k, k'=0}^{\infty} R_{nS+v}(k, k'). \quad (3.40)
 \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned}
 R_{nS+v}(k, k') &= \text{Cov}(\eta_{nS+v}^2 M_{nS+v}(k), \eta_v^2 M_v(k')) \\
 &= \sum_{\substack{i_k < \dots < i_1 < nS+v \\ i'_{k'} < \dots < i'_1 < v}} (\phi_{nS+v, nS+v-i_1} \phi_{i_1, i_1-i_2} \dots \phi_{i_{k-1}, i_{k-1}-i_k} \phi_{i_k, 0}) \\
 &\quad \times (\phi_{v, v-i'_1} \phi_{i'_1, i'_1-i'_2} \dots \phi_{i'_{k'-1}, i'_{k'-1}-i'_{k'}} \phi_{i'_{k'}, 0}) \\
 &\quad \times \text{Cov}(\eta_{nS+v}^2 \eta_{i_1}^2 \dots \eta_{i_k}^2, \eta_v^2 \eta_{i'_1}^2 \dots \eta_{i'_{k'}}^2)
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

On utilise les lemmes suivants.

Lemme 3.5. *Si la condition (3.28) est vérifiée, alors pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$*

$$\begin{aligned}
 R_{nS+v}(k, k') &\leq \alpha^2 \lambda_1^2 E(\eta_0^4) \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lfloor \frac{k-m}{S} \rfloor} \\
 &\quad \times \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lfloor \frac{k'-l}{S} \rfloor} (E(\eta_0^4))^{\frac{m+l}{2}}
 \end{aligned} \tag{3.42}$$

avec α, λ_1 sont donnés par (3.36) et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned}
 Q_{nS+v}(m, l) &= \sum_{\substack{i_m < \dots < i_1 < nS+v \\ i_m < \dots < i'_1 < v}} (\phi_{nS+v, nS+v-i_1} \phi_{i_1, i_1-i_2} \dots \phi_{i_{m-1}, i_{m-1}-i_m}) \\
 &\quad \times (\phi_{v, v-i'_1} \phi_{i'_1, i'_1-i'_2} \dots \phi_{i'_{l-1}, i'_{l-1}-i'_l})
 \end{aligned}$$

Preuve. Puisque dans la relation (3.41), on utilise seulement les indices de recouvrement $I = \{i_1, \dots, i_k, nS+v\} \cup \{i'_1, \dots, i'_{k'}, v\}$, alors l'ensemble I peut être factorisé en sous ensembles dont l'intersection est l'ensemble vide, $I_{m,l}, m = 1, \dots, k, l = 1, \dots, k'$ constitués des indices $(i) = \{i_1, \dots, i_k\}$ et $\{i'_1, \dots, i'_{k'}\}$ tels que les ensembles $\{nS+v, i_1, \dots, i_{m-1}\}$ et $\{v, i'_1, \dots, i'_{l-1}\}$ ne sont pas recouvrant et $i_m = i'_l$. Par les relations (3.41) et (3.38), on déduit que

$$\begin{aligned}
 R_{nS+v}(k, k') &\leq \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} \sum_{(i), (i') \in I_{m,l}} (\phi_{nS+v, nS+v-i_1} \phi_{i_1, i_1-i_2} \cdots \phi_{i_{k-1}, i_{k-1}-i_k} \phi_{i_k, 0}) \\
 &\quad \times (\phi_{v, v-i'_1} \phi_{i'_1, i'_1-i'_2} \cdots \phi_{i'_{k'-1}, i'_{k'-1}-i'_{k'}} \phi_{i'_{k'}, 0}) E(\eta_0^4) (E(\eta_0^4))^{\frac{k+k'}{2}} \\
 &\leq \alpha^2 \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \sum_{\substack{i_k < \cdots < i_{m+1} < i_m \\ i'_k < \cdots < i'_{l+1} < i_m}} (\phi_{i_m, i_m-i_{m+1}} \cdots \phi_{i_{k-1}, i_{k-1}-i_k}) \\
 &\quad \times (\phi_{i_m, i_m-i'_{l+1}} \cdots \phi_{i'_{k'-1}, i'_{k'-1}-i'_{k'}}) E(\eta_0^4) (E(\eta_0^4))^{\frac{k+k'}{2}} \\
 &\leq \alpha^2 \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \sum_{\substack{i_m, i_{m+1}, \dots, i_k=1 \\ i_m, i'_{l+1}, \dots, i'_{k'}=1}} (\phi_{nS+v-i_m, i_{m+1}} \cdots \phi_{nS+v-i_m, \dots, i_{k-1}, i_k}) \\
 &\quad \times (\phi_{v-i_m, i'_{l+1}} \cdots \phi_{v-i_m, i'_{l+1}, \dots, i'_{k'-1}, i'_{k'}}) E(\eta_0^4) (E(\eta_0^4))^{\frac{k+k'}{2}} \\
 &= \alpha^2 \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \left(\prod_{j=m+1}^k \sum_{i_j=1}^{\infty} \phi_{nS+v-i_m, \dots, i_{j-1}, i_j} \right) \\
 &\quad \times \left(\prod_{j=l+1}^{k'} \sum_{i'_{j'}=1}^{\infty} \phi_{v-i'_l, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \right) E(\eta_0^4) (E(\eta_0^4))^{\frac{k+k'}{2}} \\
 &= \alpha^2 \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \left(\prod_{j=m+1}^k (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i_j=1}^{\infty} \phi_{nS+v-i_m, \dots, i_{j-1}, i_j} \right) \\
 &\quad \times \left(\prod_{j'=l+1}^{k'} (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i'_{j'}=1}^{\infty} \phi_{v-i'_l, \dots, i'_{j'-1}, i'_{j'}} \right) E(\eta_0^4) (E(\eta_0^4))^{\frac{m+l}{2}} \\
 &= \alpha^2 \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k-m]} \\
 &\quad \times \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{[k'-l]} \left(\prod_{h=1}^{\beta} (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-h+1,i} \right) \\
 &\quad \times \left(\prod_{p=1}^{\gamma} (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i'=1}^{\infty} \phi_{v-p+1,i'} \right) E(\eta_0^4) (E(\eta_0^4))^{\frac{m+l}{2}}
 \end{aligned}$$

avec $\beta, \gamma \in \{0, \dots, S-1\}$. Finalement, pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned}
 R_{nS+v}(k, k') &\leq \alpha^2 \lambda_1^2 E(\eta_0^4) \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} Q_{nS+v}(m, l) \left(\prod_{J=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{J,i} \right)^{[k-m]} \\
 &\quad \times \left(\prod_{J=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{J,i} \right)^{[k'-l]} (E(\eta_0^4))^{\frac{m+l}{2}} \quad (3.44)
 \end{aligned}$$

Lemme 3.6. *Si la condition (3.28) est vérifiée, alors pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} R_{nS+v}(k, k') \leq \alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\frac{1}{2} \lceil \frac{k+k'}{S} \rceil} (k+1)(k'+1).$$

Preuve. Pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_{nS+v}(m, l) \leq \left(\prod_{j=1}^S \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lceil \frac{m+l}{S} \rceil} \left(\prod_{j=1}^q \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-j+1,i} \right)$$

Donc, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} (E(\eta_0^4))^{\frac{m+l}{2}} \sum_{n=0}^{\infty} Q_{nS+v}(m, l) &\leq \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lceil \frac{m+l}{S} \rceil} \left(\prod_{j=1}^q (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{v-j+1,i} \right) \\ &\leq \lambda_1 \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lceil \frac{m+l}{S} \rceil} \end{aligned}$$

Maintenant, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} R_{nS+v}(k, k') &\leq \alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lceil \frac{k-m}{S} \rceil} \\ &\quad \times \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lceil \frac{k'-l}{S} \rceil} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\lceil \frac{m+l}{S} \rceil} \\ &\leq \alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \sum_{m=1}^k \sum_{l=1}^{k'} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\frac{1}{2} \lceil \frac{k+k'}{S} \rceil} \\ &= \alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\frac{1}{2} \lceil \frac{k+k'}{S} \rceil} (k+1)(k'+1). \end{aligned}$$

Revenons maintenant à la preuve du théorème 3.6. Par la relation 3.40 et le lemme 3.6, on a pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \text{cov}(\varepsilon_{nS+v}^2, \varepsilon_v^2) &= \text{Cov}(\varepsilon_v^2, \varepsilon_v^2) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \text{cov}(\varepsilon_{nS+v}^2, \varepsilon_v^2) \\ &= \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{k, k'=0}^{\infty} R_{nS+v}(k, k') \\ &\leq 2\alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \sum_{k, k'=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\frac{1}{2} \lceil \frac{k+k'}{S} \rceil} (k+1)(k'+1) \\ &\leq 2\alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \sum_{k, k'=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\frac{1}{2} \lceil \frac{k}{S} \rceil + \frac{1}{2} \lceil \frac{k'}{S} \rceil} (k+1)(k'+1) \\ &\leq 2\alpha^2 \lambda_1^3 E(\eta_0^4) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\prod_{j=1}^S (E(\eta_0^4))^{1/2} \sum_{i=1}^{\infty} \phi_{j,i} \right)^{\frac{1}{2} \lceil \frac{k}{S} \rceil} (k+1) \right)^2 < \infty. \end{aligned}$$

3.4 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons étudié le modèle GARCH(p, q) périodique en utilisant le fait que ce modèle s'écrit comme équation aux récurrences stochastique et nous avons montré que le modèle GARCH(p, q) périodique admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire si et seulement l'exposant de Lyapounov est strictement négatif. Nous avons trouvé une condition suffisante pour que cette solution ait des moments d'ordre supérieurs. Nous avons étudié le modèle ARCH(∞) périodique et nous avons trouvé une condition suffisante pour que ce modèle admette une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire et nous avons trouvé une condition suffisante assurant que cette solution est aussi périodiquement stationnaire au second ordre. Nous avons terminé notre étude de ce modèle par la propriété de la fonction covariance de la solution périodiquement stationnaire au second ordre.

Chapitre 4

Modèle INGARCH de Poisson double mélangé

4.1 Introduction

Au cours des dernières années, les séries temporelles à valeurs entières ont suscité un intérêt croissant, avec des applications dans de nombreux domaines scientifiques, par exemple, l'économie et la finance (voir Christou et Fokianos [49], Doukhan et al [70], Weiss [140]) où de nombreux modèles et méthodes ont été introduits. Zhu et al [145] ont proposé le modèle mélange INARCH de Poisson (MINARCH(q)) avec une suite iid de mélange. Dans ce modèle, la distribution conditionnelle est un mélange fini de distributions de Poisson où l'intensité de chaque composante (ou régime) est une fonction linéaire des q observations retardées. Les modèles MINARCH vise essentiellement à prendre en compte la multimodalité de la distribution marginale, un fait fréquemment observé dans les applications réelles. Il s'avère que ce modèle peut également représenter d'autres caractéristiques bien connues des séries chronologiques à valeurs entières fréquemment observées dans la pratique, telles que la sur-dispersion conditionnelle et l'asymétrie. Pour plus de persistance de modèle, Diop et al [65], [66] ont généralisé le modèle de Zhu et al [145] afin d'inclure les valeurs retardées de l'intensité de chaque régime. La généralisation (Mélange INGARCH : MINGARCH(p, q)) a été faite par Haas et al [99] afin que chaque régime spécifique ait sa propre dynamique INGARCH. Plus précisément, toutes les intensités retardées dans chaque régime sont conditionnées par la valeur actuelle du processus de régime. Ce dispositif, appelé par Aknouche et Rabehi [22] mélange présent, évite au modèle d'avoir le problème de dépendance (voir M. Haas et all [99] pour le cas de mélange GARCH à valeurs réelles. En particulier, il permet facilement d'estimer les paramètres à l'aide de l'algorithme *EM*. Zhu et al [145], Diop et al [65], [66] ont étudié les propriétés de la moyenne et la structure d'autocovariance de leurs modèles. Cependant, certaines propriétés importantes telles que la stationnarité stricte et l'ergodicité qui sont essentielle pour l'inférence asymptotique n'ont pas été prises en compte. Dans cette partie, on étudie l'ergodicité d'un processus autorégressif de Poisson double mélangé qui généralise le modèle de Zhu et al [145] dans trois directions : premièrement, la distribution conditionnelle du modèle proposé est une superposition de deux mélanges de distributions de Poisson. Le premier mélange permet de définir finement de nombreuses spécifications de régime(s) pour l'intensité. Il est décrit par une suite iid à valeurs dans un ensemble fini appelé processus de régime. Le second mélange qui un facteur d'échelle de l'intensité, contrôle la distribution conditionnelle de chaque régime (Poisson, binomiale négative,...). Deuxièmement, le modèle permet l'inclusion des valeurs retardées de l'intensité dans chaque régime qui sont plutôt dictées par les valeurs

retardées (dans l'ordre respectif) de la suite de régimes (voir les exemples (4.16), (4.17)). Notre spécification est alors différente de celle de Diop et al [65], [66] et se caractérise par la dépendance du trajet de l'intensité (i.e les variables $\lambda_t(\Delta_t)$ sont dépendantes). Troisièmement, l'intensité de chaque régime est une fonction générale de ses valeurs retardées et les observations. En particulier, les représentations INARCH(∞) linéaires ou non linéaires sont autorisées. Ainsi, le modèle qu'on propose est assez général et semble qu'il présente une grande flexibilité potentielle par rapport au cas de mélange de Poisson, le modèle proposé contient quelques paramètres supplémentaires. Du point de vue statistique, ce modèle souffre du problème de dépendance de trajet (i.e la dépendance de $\theta_t(\Delta_t)$ impliquée par la dépendance de $\lambda_t(\Delta_t)$) qui rend l'estimation du maximum de vraisemblance impossible, mais il peut en principe être estimé par d'autres méthodes assez comparables, telles que la méthode généralisée des moments et les estimations bayésiennes MCMC (voir Francq et Zakoian [78]) pour le cas de mélange GARCH à valeurs réelles). Sous certaines conditions de contraction en moyenne, on montre que le modèle proposé admet une solution faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique avec une moyenne finie. Dans certains cas, les conditions suffisantes sont également nécessaires pour l'ergodicité. Notre approche suit l'approche de dépendance faible de Doukhan et Wintenberger [67], Doukhan et al [71].

4.2 Modèle général INGARCH de Poisson double mélangé

Considérons une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées $(\Delta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs dans l'ensemble fini $\{1, \dots, K\}$, $K \in \mathbb{N}^*$ et de fonction de probabilité de masse $P(\Delta_t = k) = \pi(k)$ où $\pi(k) \geq 0$ et $\sum_{k=1}^K \pi(k) = 1$. Les valeurs prises par Δ_t sont appelées régimes ou composantes, tandis que les probabilités $(\pi(k))_{1 \leq k \leq K}$ représentent les proportions du mélange. Supposons aussi que pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $(Z_t(k))_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de variables aléatoires positives iid de moyenne unité et de variance $\sigma^2(k) \geq 0$. Contrairement à la variable du régime Δ_t qui est finie, les variables du mélange $(Z_t(k))_{t \in \mathbb{Z}}$ peuvent être discrètes ou absolument continues, mais elles sont souvent considérées absolument continues. Considérons $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite indépendante de processus de Poisson d'intensité unité. Un processus stochastique $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs entières est dit processus autorégressif de Poisson double mélangé s'il est solution de l'équation suivante :

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t), \\ \lambda_t = f_{\Delta_t}(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-q}, \lambda_{t-1}, \dots, \lambda_{t-p}; \theta(\Delta_t)), \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.1)$$

où $p, q \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ et $\{\theta(1), \theta(2), \dots, \theta(K)\}$ est l'ensemble de vecteurs paramètres avec $\theta(k) \in \Theta_k \subset \mathbb{R}^{m_k}$ où $m_k \in \mathbb{N}^*$. La fonction $f_k : \mathbb{N} \times]0, \infty[\times \Theta_k \rightarrow]0, \infty[$ est mesurable pour chaque $k \in \{1, \dots, K\}$. Pour chaque $k \in \{1, \dots, K\}$, les processus $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$, $(\Delta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(Z_t(k))_{t \in \mathbb{Z}}$ sont supposés indépendants. Deux cas particuliers importants du modèle (4.1) sont : le modèle général INARCH(∞) de Poisson double mélangé pour lequel $p = 0$ et $q = \infty$, i.e.,

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t), \\ \lambda_t = f_{\Delta_t}(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots; \theta(\Delta_t)), \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.2)$$

et le deuxième est le modèle général INGARCH(1,1) de Poisson double mélangé qui correspond à $p = q = 1$, i.e.,

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t), \\ \lambda_t = f_{\Delta_t}(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta(\Delta_t)), \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4.3)$$

Le terme "général" est introduit afin d'indiquer la forme fonctionnelle générale des fonctions $(f_k)_{1 \leq k \leq K}$.

Soit \mathcal{F}_t la σ -algèbre générée par les variables $\{(Y_t, \Delta_t), (Y_{t-1}, \Delta_{t-1}), \dots\}$, alors le modèle (4.1) peut être écrit sous la forme de distribution conditionnelle suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} P(Y_t = y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \pi(k) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-z(k)\lambda_t(k)} \frac{(z(k)\lambda_t(k))^{y_t}}{y_t!} dF_{Z_t(k)}(z(k)), y_t \in \mathbb{N}, \\ \lambda_t(k) = f_k(Y_{t-1}, \dots, Y_{t-q}, \lambda_{t-1}, \dots, \lambda_{t-p}, \theta(k)), t \in \mathbb{Z}, \end{array} \right. \quad (4.4)$$

où $F_{Z_t(k)}(\cdot)$ est la distribution cumulative de $Z_t(k)$.

Le modèle (4.4) consiste en une composition de deux mélanges de distributions de Poisson avec des intensités $(\lambda_t(k))_{1 \leq k \leq K}$ satisfaisant les représentations générales *INGARCH* (i.e, l'intégrale représente un mélange infini non dénombrable de distributions de poissons, après la somme un mélange fini de distributions de poissons). C'est pour cela le modèle (4.1) est appelé autorégressif double mélangé de Poisson. Le premier mélange, dirigé par Δ_t , régit l'intensité λ_t en permettant un changement de régime. Le deuxième, entraîné par $Z_t(k)$ est un facteur d'échelle pour l'intensité de la $k^{\text{ème}}$ composante et est conçu pour contrôler la distribution de cette composante. Comme on le verra par la suite, la distribution de $Z_t(k)$ n'influence ni la moyenne conditionnelle du modèle (cf. (4.5)) ni les conditions d'ergodicité du modèle (cf. (4.19) et (4.41)). Contrairement au modèle autorégressif de Poisson à régime unique (voir Doukhans et al [71]), λ_t dans (4.1) qui peut également être écrit comme $\lambda_t(\Delta_t)$, n'est pas \mathcal{F}_{t-1} -mesurable. En fait, à condition que Δ_t ne soit pas dégénérée, le modèle (4.1) est une sous-classe des modèles "parameter-driven" dans le sens de Cox et al [71] qui ont classifié les modèles en deux catégories principales : les modèles "parameter-driven" (pour lesquels le paramètre d'intérêt dépend d'un processus latent) et les modèles "observation-driven" (pour lesquels le paramètre d'intérêt ne dépend que des observations) (voir aussi Ahmad [1]). Sous les propriétés indiquées ci-dessus, la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle du modèle (4.1) sont données comme suit :

$$E(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k), \quad (4.5)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \pi(k) (\lambda_t(k) + \sigma^2(k) \lambda_t^2(k)) + \sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t^2(k) \\ &\quad - \left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k) \right)^2, \end{aligned} \quad (4.6)$$

où $\lambda_t(k)$ est donné dans (4.4). Notons que le modèle (4.1) est général parce que la classe des distributions conditionnelles possibles de Y_t sachant \mathcal{F}_{t-1} est assez large. Ces distributions peuvent être données explicitement pour certaines distributions spécifiques de $(Z_t(k))_{1 \leq k \leq K}$ et Δ_t . Par exemple, lorsque Δ_t et $(Z_t(k))_{1 \leq k \leq K}$ sont dégénérées en 1, alors le modèle (4.1) se réduit au modèle autorégressif de Poisson (voir Doukhan et al [71]). Lorsque Δ_t est dégénéré en 1, i.e., $K = 1$, la variable $Z_t(k)$ s'écrit Z_t et le modèle (4.1) se réduit au modèle autorégressif de Poisson mélangé proposé par Christou et Fokianos [49]. D'autres cas particuliers importants du modèle (4.1) sont donnés comme suit :

4.2.1 Mélanges INGARCH (p, q) de Poisson

Lorsque $Z_t(k)$ est dégénérée en 1 pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, alors la distribution conditionnelle du modèle (4.1) se réduit au mélange fini de distributions de Poisson (voir Zhu et al [145] pour le cas particulier du mélange $INARCH(q)$), i.e.,

$$Y_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \sum_{k=1}^K \pi(k) \mathcal{P}(\lambda_t(k)), \quad (4.7)$$

où $\lambda_t(k)$ est défini dans (4.4) et $\mathcal{P}(\lambda)$ désigne la distribution de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. La moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle de Y_t sont données par (4.5) et (4.6) en prenant $\sigma^2(k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$. Ce modèle permet aussi une sur-dispersion conditionnelle (i.e. la variance conditionnelle est supérieure à l'espérance conditionnelle) à condition que $K > 1$.

4.2.2 Mélanges INGARCH binomial négatif

Lorsque $Z_t(k) \sim G(\sigma^{-2}(k), \sigma^{-2}(k))$, où $\sigma^{-2}(k) > 0$ pour tout $k \in \{0, \dots, K\}$, alors la distribution conditionnelle du modèle (4.1) se réduit à un mélange fini de distributions binomiales négatives, i.e.,

$$Y_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \sum_{k=1}^K \pi(k) \mathcal{NB}\left(\sigma^{-2}(k), \frac{\sigma^{-2}(k)}{\sigma^{-2}(k) + \lambda_t(k)}\right), \quad (4.8)$$

où $\mathcal{NB}(r, p)$ et $G(a, b)$ désignent respectivement la loi binomiale négative de paramètres $a > 0$ et $p \in]0, 1[$, la loi Gamma de paramètre de forme $a > 0$ et de paramètre d'intensité $b > 0$. La moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle de Y_t sont donnés par (4.5) et (4.6). Ce modèle est conditionnellement sur-dispersé même lorsque $K = 1$.

D'après la forme de la moyenne conditionnelle et la variance conditionnelle données dans (4.5) et (4.6), il s'avère que dans le cas général où $Z_t(k)$ et Δ_t ne sont pas dégénérés, le modèle (4.1) permet une sur-dispersion conditionnelle avec un ordre de magnitude supérieur à celui obtenu par un autorégressif de Poisson mélangé (Christou et Fokianos [49]) et supérieur à celui obtenu par le mélange INGARCH (p, q) de Poisson (4.7).

D'autres distributions conditionnelles bien connues de Y_t peuvent être obtenues à partir de la spécification de la distribution de la variable de mélange $Z_t(k)$. Par exemple, si $Z_t(k)$ est de loi inverse-gaussienne, alors Y_t/\mathcal{F}_{t-1} suit un mélange fini de Poisson-inverse-gaussienne. De plus, si la distribution $Z_t(k)$ est log-normal, alors la distribution conditionnelle de Y_t est un mélange de Poisson-log-normal.

En plus de la largeur de classe de distributions conditionnelles possibles de Y_t , la généralité du modèle (4.1) découle également de la forme générale des formes fonctionnelles des régimes $(f_k)_{1 \leq k \leq K}$ qui peuvent être linéaires ou non linéaires. Certains cas importants sont les suivants.

4.2.3 Modèle $INARCH(\infty)$ de Poisson double mélangé

Lorsque $(p, q) = (0, \infty)$ et pour chaque $k \in \{1, \dots, K\}$, f_k est linéaire en Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots , on obtient la spécification $INARCH(\infty)$ de Poisson double mélangé infini suivante :

$$\lambda_t = \alpha_0(\Delta_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(\Delta_t) Y_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.9)$$

où $\alpha_0(k) > 0$ et $\alpha_j(k) \geq 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ et $j \in \mathbb{N}^*$.

1) Lorsque pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $Z_t(k) \sim G(\sigma^{-2}(k), \sigma^{-2}(k))$ avec $\sigma^{-2}(k) > 0$, on obtient le modèle mélange INARCH(∞) binomial négatif.

2) Lorsque $Z_t(k)$ est dégénérée en 1 pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, alors le modèle (4.9) est le modèle mélange INARCH(∞) de Poisson (MINARCH(∞) de Poisson) qui est une version infinie du modèle mélange INARCH(q) de Poisson (MINARCH(q) de Poisson) introduit par Zhu et al [145],

$$\lambda_t = \alpha_0(\Delta_t) + \sum_{j=1}^q \alpha_j(\Delta_t) Y_{t-j}, \quad t \in Z, \quad (4.10)$$

qu'on peut réécrire dans la forme de distribution conditionnelle suivante :

$$\begin{cases} Y_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim \sum_{k=1}^K \pi(k) \mathcal{P}(\lambda_t(k)), \\ \lambda_t(k) = \alpha_0(k) + \sum_{j=1}^q \alpha_j(k) Y_{t-j}, \quad t \in Z, \quad 1 \leq k \leq K. \end{cases} \quad (4.11)$$

La moyenne conditionnelle du modèle MINARCH(q) de Poisson (4.11) est donnée par (4.5) qui s'écrit aussi comme suit :

$$\begin{aligned} E(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k) \\ &= \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_0(k) + \sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{i=1}^q \alpha_i(k) Y_{t-i} \\ &= \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_0(k) + \sum_{i=1}^q \left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_i(k) \right) Y_{t-i} \end{aligned} \quad (4.12)$$

et sa variance conditionnelle est donnée par (4.6) en posant $\sigma^2(k) = 0$ pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, i.e.,

$$\text{Var}(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}) = \sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k) + \sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t^2(k) - \left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k) \right)^2, \quad (4.13)$$

où $\lambda_t(k)$ est donné dans (4.11). De plus, la moyenne et la variance inconditionnelles du modèle (4.11) sont données par :

$$E(Y_t) = \sum_{k=1}^K \pi(k) E(\lambda_t(k)), \quad (4.14)$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(Y_t) &= E(\text{Var}(Y_t / \mathcal{F}_{t-1})) + \text{Var}(E(Y_t / \mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \sum_{k=1}^K \pi(k) E(\lambda_t(k)) + \sum_{k=1}^K \pi(k) E(\lambda_t^2(k)) - E\left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k) \right)^2 \\ &\quad + \text{Var}\left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \lambda_t(k) \right) \\ &= E(Y_t) + \sum_{k=1}^K \pi(k) E(\lambda_t^2(k)) - (E(Y_t))^2. \end{aligned} \quad (4.15)$$

En général, la variance inconditionnelle (4.15) est supérieure à la moyenne inconditionnelle (4.14), alors le modèle mélange INARCH(q) de Poisson peut décrire les séries chronologiques à valeurs entières sur-dispersées.

La condition nécessaire est suffisante de stationnarité en moyenne pour le processus mélange INARCH(q) de Poisson est donnée par le théorème suivant de Zhu et al [145].

Théorème 4.1. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus mélange INARCH(q) de Poisson soit stationnaire au premier ordre est que les racines de l'équation*

$$1 - \sum_{l=1}^q \left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_i(k) \right) z^{-1} = 0,$$

sont à l'intérieur du cercle unité.

Si le processus mélange INARCH(q) de Poisson est stationnaire au premier ordre, alors de la relation (4.12), on déduit que

$$E(Y_t) = E(E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1})) = \frac{\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_0(k)}{1 - \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \pi(k) \alpha_i(k)}.$$

La condition nécessaire est suffisante de stationnarité au second ordre pour le processus mélange INARCH(q) de Poisson est donnée par le théorème suivant de Zhu et al [145].

Théorème 4.2. *Une condition nécessaire et suffisante pour que le processus mélange INARCH(q) de Poisson soit stationnaire au second ordre est que les racines de l'équation $1 - C_1 z^{-1} - \dots - C_q z^{-q} = 0$, sont à l'intérieur du cercle unité, où pour tout $u, l = 1, \dots, q - 1$,*

$$C_u = \sum_{k=1}^K \pi(k) \left(\alpha_u^2(k) - \sum_{v=1}^{q-1} \sum_{|i-j|=v} \alpha_i(k) \alpha_j(k) b_{vu} \vartheta_{u0} \right), \quad C_q = \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_q^2(k),$$

$$\vartheta_{l0} = \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_l(k), \quad \vartheta_{ll} = \left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{|i-l|=l} \alpha_i(k) \right) - 1,$$

et

$$\vartheta_{lu} = \sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{|i-l|=u} \alpha_i(k), \quad u \neq l.$$

Dans le cas d'un mélange INARCH(1) de Poisson, le théorème 4.2 se simplifie comme suit (voir Zhu et al [145]).

Corollaire 4.2.1. *Le processus mélange INARCH(1) de Poisson est stationnaire au second ordre si seulement si*

$$\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_1^2(k) < 1.$$

Dans le cas d'un mélange INARCH(2) de Poisson, le théorème 4.2 se simplifie comme suit (voir Zhu et al [145]).

Corollaire 4.2.2. *Le processus mélange INARCH(2) de Poisson est stationnaire au second ordre si seulement si*

$$\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_1^2(k) + 2 \frac{\left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_1(k) \alpha_2(k) \right) \left(\sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_1(k) \right)}{1 - \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_2(k)} + \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha_2^2(k) < 1.$$

4.2.4 Modèle INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé

Un exemple important du modèle (4.3) est le modèle linéaire INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé défini par la forme linéaire des fonctions f_k , $k \in \{1, \dots, K\}$ telles que pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $f_k = f$, avec $p = q = 1$ et

$$f(y, \lambda; \theta(k)) = \omega(k) + \alpha(k)y + \beta(k)\lambda,$$

où $\theta(k) = (\omega(k), \alpha(k), \beta(k))' \in]0, \infty[^3$. Autrement dit, le modèle linéaire INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé est donné par les équations suivantes :

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t(\Delta_t)), \\ \lambda_t = \omega(\Delta_t) + \alpha(\Delta_t)Y_{t-1} + \beta(\Delta_t)\lambda_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.16)$$

1) Lorsque $Z_t(k)$ est dégénérée pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, le modèle (4.16) se réduit au modèle mélange INGARCH(1, 1) de Poisson (MINGARCH(1, 1) de Poisson). Comme on l'a déjà mentionné dans l'introduction, ce modèle est différent du modèle mélange INGARCH de Poisson (MINGARCH de Poisson) proposé par Diop et al [66] qui est dans le cas où $p = q = 1$ a la spécification

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t(\Delta_t)), \\ \lambda_t(\Delta_t) = \omega(\Delta_t) + \alpha(\Delta_t)Y_{t-1} + \beta(\Delta_t)\lambda_{t-1}(\Delta_t), \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4.17)$$

La différence entre (4.16) et (4.17) est due au terme $\beta(\Delta_t)\lambda_{t-1} = \beta(\Delta_t)\lambda_{t-1}(\Delta_{t-1})$ dans (4.16) qui est différent de terme $\beta(\Delta_t)\lambda_{t-1}(\Delta_t)$ dans le modèle de Diop et al [66] (voir aussi Aknouche et Rabehi [22]).

2) Lorsque pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $Z_t(k) \sim G(\sigma^{-2}(k), \sigma^{-2}(k))$, avec $\sigma^{-2}(k) > 0$, on obtient le modèle mélange INGARCH(1, 1) binomial négatif (MINGARCH(1, 1) binomial négatif). Ce dernier modèle obtenu est une extension du modèle INGARCH(1, 1) binomial négatif (voir Zhu et al [144], [142], Christou et Fokianos [49]). Notons que sauf pour le cas où $K = 1$, le modèle (4.16) n'est pas un cas particulier du modèle (4.9). En effet, par substitutions successives dans (4.16), sous la condition $\sum_{k=1}^K \pi(k) \log \beta(k) < 0$, on obtient la forme *INGARCH*(∞) suivante :

$$\lambda_t = \alpha_0(\underline{\Delta}_{t,\infty}) + \alpha_1(\underline{\Delta}_{t,1})Y_{t-1} + \alpha_2(\underline{\Delta}_{t,2})Y_{t-1} + \dots, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.18)$$

où $\underline{\Delta}_{t,\infty} = (\Delta_t, \Delta_{t-1}, \dots)'$, $\underline{\Delta}_{t,j} = (\Delta_t, \Delta_{t-1}, \dots, \Delta_{t-j+1})'$, $j \in \mathbb{N}^*$,

$$\alpha_0(\underline{\Delta}_{t,\infty}) = \sum_{j=0}^{\infty} \prod_{i=0}^{j-1} \beta(\Delta_{t-i})\omega(\Delta_{t-j}),$$

et

$$\alpha_j(\underline{\Delta}_{t,j}) = \prod_{i=0}^{j-1} \beta(\Delta_{t-i})\alpha(\Delta_{t-j}), \quad j \in \mathbb{N}^*.$$

La différence entre les modèles (4.18) et (4.9) c'est que la suite $(\underline{\Delta}_{t,j})_{j \in \mathbb{N}}$ dans le modèle (4.18) n'est pas iid. Par conséquent, le modèle (4.16) n'est pas un cas particulier du modèle (4.9).

4.3 Conditions d'ergodicité

Dans cette partie, on propose des conditions nécessaires et suffisantes sur les fonctions f_1, \dots, f_K pour que le modèle autorégressif de Poisson double mélangé (4.1), avec

$(p, q) = (1, 1)$ ou $(p, q) = (0, \infty)$, admette une solution faiblement dépendante strictement stationnaire, ergodique et de moyenne finie. La notion appropriée de dépendance faible pour le modèle (4.1) est basée sur le concept du coefficient de dépendance τ introduit par Dedecker et Prieur [61]. Plus précisément, soient

- $(E, \|\cdot\|)$ un espace de Banach et $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ un processus strictement stationnaire défini sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans E .

- Pour une variable aléatoire Z définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans E et $m \geq 1$, on note

$$\|Z\|_m = \left(E\|Z\|^m \right)^{1/m}.$$

- Pour $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, soit $\|h\|_\infty = \sup_{x \in E} |h(x)|$ et

$$Lip(h) = \sup_{x \neq y} \frac{|h(x) - h(y)|}{\|x - y\|}.$$

- $\Lambda_1(E)$ est l'ensemble de fonctions $h : E \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $Lip(h) \leq 1$.

Maintenant, on définit la notion de τ -dépendance introduite par Dedecker et Prieur [61] comme suit.

Définition 4.1. Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité, \mathcal{M} une sous σ -algèbre de \mathcal{F} et X une variable aléatoire définie sur (Ω, \mathcal{F}, P) à valeurs dans E . Supposons que $\|X\|_1 < \infty$ et on définit le coefficient τ comme

$$\tau(\mathcal{M}, X) = \left\| \sup \left\{ \left| \int f(x) P_{X/\mathcal{M}}(dx) - \int f(x) P_X(dx) \right| : f \in \Lambda_1(E) \right\} \right\|_1,$$

Le coefficient $\tau(\mathcal{M}, X)$ vérifie l'inégalité $\tau(\mathcal{M}, X) \leq \|X - Y\|_1$, où Y est distribuée comme X et indépendante de \mathcal{M} . De plus, l'espace (E, \mathcal{A}) (ou bien pour (Ω, \mathcal{F}, P)) est suffisamment riche pour qu'il existe une version X^* distribuée comme X et indépendante de \mathcal{M} telle que $\tau(\mathcal{M}, X) = \|X - X^*\|_1$. Ce résultat de couplage définit le coefficient τ comme le minimum $\tau(\mathcal{M}, X) = \min \|X - X'\|_1$ pour toute version X' distribuée comme X et indépendante de \mathcal{M} (voir Dedecker et Prieur [61], voir aussi Prieur [122] et Wintenberger [141] pour plus de détails sur la comparaison entre les coefficients de dépendances). En utilisant cette définition de $\tau(\mathcal{M}, X)$, la dépendance entre le passé du processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et ses k -uplet futurs est définie comme suit : considérons la norme $\|x - y\| = \|x_1 - y_1\| + \dots + \|x_k - y_k\|$ sur E^k , soit la σ -algèbre $\mathcal{M}_p = \sigma(X_t, t \leq p)$ et

$$\tau_k(r) = \max_{1 \leq l \leq k} \frac{1}{l} \sup \left\{ \tau(\mathcal{M}_p, (X_{j_1}, \dots, X_{j_l})) : p + r \leq j_1 < \dots < j_l \right\},$$

$$\tau(r) = \sup_{k > 0} \tau_k(r),$$

alors le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit τ -faiblement dépendant si $\tau(r)$ tend vers zéro lorsque r tend vers l'infini.

4.3.1 Modèle général INARCH(∞) de Poisson double mélangé

Pour le modèle général INARCH(∞) de Poisson double mélangé (4.2), considérons l'hypothèse de contraction en moyenne suivante :

H₁ : Pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$ et $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots) \in \mathbb{N}^\infty$,

$$|f_k(\mathbf{y}; \theta(k)) - f_k(\mathbf{y}'; \theta(k))| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i(k) |y_i - y'_i|, \quad (4.19)$$

où $(\kappa_i(k))_{i \in \mathbb{N}, 1 \leq k \leq K}$ sont des constantes positives qui vérifient

$$\sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i(k) < 1. \quad (4.20)$$

La condition (4.19) signifie que les fonctions f_1, \dots, f_K sont Lipschitziennes et satisfont la contraction en moyenne (4.20). Il est intéressant de noter que dans le cas $K > 1$, il n'est pas nécessaire que toutes les formes fonctionnelles des régimes $(f_k(\mathbf{y}; \theta(k)))_{1 \leq k \leq K}$ soient contractantes.

Pour le modèle linéaire $INARCH(\infty)$ de Poisson double mélangé, i.e.,

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t), \\ \lambda_t = \alpha_0(\Delta_t) + \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j(\Delta_t)Y_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.21)$$

où $\alpha_0(k) > 0$ et $\alpha_j(k) \geq 0$, $j \in \mathbb{N}^*$, $k \in \{1, \dots, K\}$, la condition \mathbf{H}_1 se réduit à

$$\sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i(k) < 1. \quad (4.22)$$

Considérons le modèle linéaire $INARCH(q)$ de Poisson double mélangé, i.e.,

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t(\Delta_t)\lambda_t), \\ \lambda_t = \alpha_0(\Delta_t) + \sum_{j=1}^q \alpha_j(\Delta_t)Y_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.23)$$

où $\alpha_0(k) > 0$ et $\alpha_j(k) \geq 0$, $j = 1, \dots, q$, $k \in \{1, \dots, K\}$, la condition \mathbf{H}_1 se réduit à

$$\sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{i=1}^q \alpha_i(k) < 1. \quad (4.24)$$

qui est la même condition pour la stationnarité en moyenne donnée par Zhu et al [145] pour le cas d'un mélange $INARCH(q)$ de Poisson, i.e., pour le modèle (4.23) lorsque $Z_t(k)$ est dégénérée pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$.

En posant, $\zeta_t = (N_t, \Delta_t, Z_t(\Delta_t))$ et

$$F(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots; \zeta_t) = N_t(Z_t(\Delta_t)f_{\Delta_t}(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots; \theta(\Delta_t))),$$

le modèle général $INARCH(\infty)$ de Poisson double mélangé (4.2) peut s'écrire comme une chaîne infinie suivante (voir Doukhan et Wintenberger [67]),

$$Y_t = F(Y_{t-1}, Y_{t-2}, \dots; \zeta_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.25)$$

où $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d.

Le résultat suivant de Aknouche et Demmouche [10] donne la condition suffisante pour que le modèle (4.2) admette une solution faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique de moyenne finie.

Théorème 4.3. *Si les conditions (4.19) et (4.20) sont vérifiées, alors le modèle (4.2) admet une solution faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ donnée par*

$$Y_t = H(\zeta_t, \zeta_{t-1}, \dots), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.26)$$

pour une certaine fonction mesurable $H : (\mathbb{N} \times]0, \infty[\times \{1, \dots, K\})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N}$. De plus, cette solution a une moyenne finie.

Preuve. La preuve est basée sur la vérification de la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67]. Soit $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots)$, $\mathbf{y}' = (y'_1, y'_2, \dots) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Par (4.25), la propriété de Lipschitz (4.19), le fait que $E(Z_t(k)) = 1$ pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, la propriété de Poisson du processus $N_t(\cdot)$ et la propriété d'indépendance des processus $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$, $(\Delta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(Z_t(k))_{t \in \mathbb{Z}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} E|F(\mathbf{y}, \zeta_t) - F(\mathbf{y}', \zeta_t)| &= E\left(E|N_t(Z_t(\Delta_t)f_{\Delta_t}(\mathbf{y}; \theta(\Delta_t))) - N_t(Z_t(\Delta_t)f_{\Delta_t}(\mathbf{y}'; \theta(\Delta_t)))|/\Delta_t\right) \\ &= \sum_{k=1}^K \pi(k)E(|Z_t(k)f_k(\mathbf{y}; \theta(k)) - Z_t(k)f_k(\mathbf{y}'; \theta(k))|) \\ &\leq \sum_{k=1}^K \pi(k) \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i(k)|y_i - y'_i|. \end{aligned} \quad (4.27)$$

De la relation (4.27), on déduit que si les conditions (4.19) et (4.20) sont vérifiées, alors la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67]) est satisfaite pour la fonction d'Orlicz identité. Maintenant, par le théorème 3.1 de Doukhan et Wintenberger [67]), il existe une solution de (4.25) donnée par (4.26) qui est faiblement dépendante, strictement stationnaire, ergodique et de moyenne finie.

Pour le modèle linéaire INARCH(∞) de Poisson double mélangé défini par (4.9), le théorème 4.3 se simplifie comme suit.

Corollaire 4.1. *Sous la condition (4.22), le processus INARCH(∞) double mélangé de Poisson défini par (4.9) est faiblement dépendant strictement stationnaire, ergodique et de moyenne finie.*

Pour le modèle mélange INARCH(q) de Poisson (MINARCH(q) de Poisson) défini par (4.10), le théorème 4.3 se simplifie comme suit.

Corollaire 4.2. *Sous la condition (4.24), le processus MINARCH(q) de Poisson défini par (4.10) est faiblement dépendant strictement stationnaire, ergodique et de moyenne finie.*

Notons que la condition (4.22) est aussi nécessaire pour l'ergodicité du processus linéaire INARCH(∞) de Poisson double mélangé (4.9).

4.3.2 Modèle général INGARCH de Poisson

Lorsque Δ_t est dégénérée en valeur 1, i.e., $K = 1$, $Z_t(1) = Z_t$ est dégénérée en valeur 1 et $p = q = \infty$, le modèle général INGARCH double mélangé (4.1) se réduit au modèle général INGARCH de Poisson introduit par Doukhan et al [71], i.e.,

$$\begin{cases} Y_t = N_t(\lambda_t), \\ \lambda_t = f(Y_{t-1}, \dots, \lambda_{t-1}, \dots; \theta), \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4.28)$$

Considérons les conditions suivantes :

\mathbf{H}_2 : Pour tout $\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in \mathbb{N}^{\infty} \times]0, \infty[^{\infty}$,

$$|f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \|x_i - x'_i\|, \quad (4.29)$$

où $(\kappa_i)_{i \in \mathbb{N}}$ sont des constantes positives vérifiant

$$\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i < 1. \quad (4.30)$$

En posant $X_t = (Y_t, \lambda_t)$ et $F(X_{t-1}, \dots, N_t) = (N_t(f(X_{t-1}, \dots; \theta)), f(X_{t-1}, \dots; \theta))$, le modèle (4.28) peut s'écrire comme une chaîne infinie suivante

$$X_t = F(X_{t-1}, \dots, N_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.31)$$

Le résultat suivant de Doukhan et al [71] donne la condition suffisante pour que le modèle (4.28) admette une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique qui admet des moments de tout ordre.

Théorème 4.4. *Si les conditions (4.29) et (4.30) sont vérifiées, alors le modèle (4.28) admet une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique telle que $E\|(Y_t, \lambda_t)\|^r < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$.*

Preuve. On montre d'abord que sous les conditions (4.29) et (4.30), le modèle (4.28) admet une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire de moyenne finie. La preuve est basée sur la vérification de la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67]. Pour tout $x = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$, soit la norme $\|\cdot\|_\epsilon$ sur \mathbb{R}^2 définie par $\|x\|_\epsilon = |y| + \epsilon|\lambda|$. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $\mathbf{x}' = (x'_1, x'_2, \dots) \in (\mathbb{N} \times]0, \infty])^\infty$. Par (4.31), la propriété de Lipschitz (4.29) et la propriété de Poisson du processus $N_t(\cdot)$, on déduit que, i.e., la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger devient

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{x}, N_t) - F(\mathbf{x}', N_t)\|_\epsilon &= E|N_t(f(\mathbf{x}; \theta)) - N_t(f(\mathbf{x}'; \theta))| + \epsilon|f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)| \\ &= (1 + \epsilon)|f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)| \leq \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \|x_i - x'_i\|. \end{aligned} \quad (4.32)$$

De la relation (4.32), on déduit que sous les conditions (4.29) et (4.30), la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67] est satisfaite. Par le théorème 3.1 de Doukhan et Wintenberger [67], il existe une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ du modèle (4.28) qui est faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique de moyenne finie. On montre maintenant que cette solution est telle que $E\|(Y_t, \lambda_t)\|^r < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $x = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, $\epsilon > 0$ et $r \in \mathbb{N}^*$, soit la norme $\|\cdot\|_{\epsilon, r}$ définie sur \mathbb{R}^2 par $\|x\|_{\epsilon, r} = (|y|^r + \epsilon|\lambda|^r)^{1/r}$. Soit $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots) \in (\mathbb{N} \times]0, \infty])^\infty$. Par (4.29), on a

$$|f(\mathbf{x}; \theta)| \leq g(\mathbf{x}) + c,$$

où $c = f(\mathbf{0}; \theta)$ et $g(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \|x_i\|_{\epsilon, r}$. Par conséquent,

$$|f(\mathbf{x}; \theta)|^j \leq \sum_{k=0}^j \binom{j}{k} c^{j-k} g^k(\mathbf{x}), \quad j < r$$

et

$$|f(\mathbf{x}; \theta)|^r \leq g^r(\mathbf{x}) + \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} c^{r-k} g^k(\mathbf{x}) = g^r(\mathbf{x}) + m(\mathbf{x}), \quad (4.33)$$

$$\text{où } m(\mathbf{x}) = \sum_{k=0}^{r-1} \binom{r}{k} c^{r-k} g^k(\mathbf{x}).$$

Maintenant, par l'inégalité de Jensen, on trouve pour tout $j \in \{1, \dots, r\}$,

$$g^j(\mathbf{x}) \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \right)^{j-1} \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \|x_i\|_{\epsilon, r}^j.$$

Par conséquent,

$$E \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \|X_{t-i}\|_{\epsilon, r} \right)^j \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \right)^{j-1} \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i E \|X_{t-i}\|_{\epsilon, r}^j \leq \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \right)^j E \|X_t\|_{\epsilon, r}^j. \quad (4.34)$$

On utilise le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soit N une variable aléatoire de loi de Poisson avec la moyenne λ et soit $r \in \mathbb{N}^*$, alors les moments de N vérifient la relation suivante*

$$E(N^r) = \sum_{j=0}^r \left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} \lambda^j,$$

où $\left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\}$ désigne le nombre de Stirling de second espèce tel que $\left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} = 0$ pour $j \notin \{1, \dots, r\}$ et pour $r \geq 0$, $0 \leq j \leq r$, satisfait la récurrence suivante

$$\left\{ \begin{matrix} r \\ j \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ j-1 \end{matrix} \right\} + j \left\{ \begin{matrix} r-1 \\ j \end{matrix} \right\}.$$

En posant, $\delta_t = \sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \|X_{t-i}\|_{\epsilon, r}$, alors par le lemme 4.1 on obtient

$$E\|X_t\|_{\epsilon, r}^r = E(Y_t^r + \epsilon \lambda_t^r) \leq (1 + \epsilon)E(\lambda_t^r) + \sum_{i=0}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} E(\lambda_t^i).$$

Par (4.33), (4.34) et le fait que la solution est strictement stationnaire, on obtient

$$E\|X_t\|_{\epsilon, r}^r = E(Y_t^r + \epsilon \lambda_t^r) \leq (1 + \epsilon)E(\delta_t^r) + C_1 \leq (1 + \epsilon) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \right)^r E\|X_t\|_{\epsilon, r}^r + C_2,$$

pour certaines constantes $C_1 \leq C_2 < \infty$ puisque $E\|X_t\|_{\epsilon, r}^{r-1} < \infty$. Par conséquent, pour $\epsilon = \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \right)^{-1} - 1$, on obtient

$$E\|X_t\|_{\epsilon, r}^r \leq \frac{C_2}{1 - (1 + \epsilon) \left(\sum_{i=1}^{\infty} \kappa_i \right)^r} < \infty.$$

4.3.3 Modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé

Lorsque Δ_t est dégénérée en valeur 1, i.e., $K = 1$, le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé (4.3) se réduit au modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé introduit par Christou et Fokianos [49],

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t \lambda_t), \\ \lambda_t = f(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta), \quad t \in \mathbb{Z}. \end{cases} \quad (4.35)$$

Considérons les conditions suivantes :

H₃ : La fonction f est Lipschitzienne, i.e., pour tout $y, y' \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \lambda' \in]0, \infty[$,

$$|f(y, \lambda; \theta) - f(y', \lambda'; \theta)| \leq \kappa_1 |\lambda - \lambda'| + \kappa_2 |y - y'|, \quad (4.36)$$

où κ_1 et κ_2 sont des constantes positives satisfont la condition de contraction suivante

$$\kappa_1 + \kappa_2 < 1. \quad (4.37)$$

Soit $X_t = (Y_t, \lambda_t)$, $\zeta_t = (N_t, Z_t)$ et $F(X_{t-1}; \zeta_t) = (N_t(Z_t f(X_{t-1}; \theta)), f(X_{t-1}; \theta))$, alors le modèle (4.35) peut s'écrire comme la chaîne de Markov suivante

$$X_t = F(X_{t-1}; \zeta_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.38)$$

où $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d.

Le résultat suivant de Christou et Fokianos [49] donne une condition suffisante pour que le modèle (4.35) admette une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire ergodique de moyenne finie.

Théorème 4.5. *Si les conditions (4.36) et (4.37) sont vérifiées, alors le modèle (4.35) admet une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique donnée par*

$$X_t = H(\zeta_t, \zeta_{t-1} \dots), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.39)$$

pour une certaine fonction mesurable $H : (\mathbb{N} \times]0, \infty[)^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times]0, \infty[$. De plus, cette solution a une moyenne finie.

Preuve. On montre d'abord que sous les conditions (4.36) et (4.37), le modèle (4.35) admet une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire de moyenne finie. La preuve est basée sur la vérification de la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67]. Pour tout $\mathbf{x} = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$, soit la norme $\|\cdot\|_\epsilon$ définie sur \mathbb{R}^2 par $\|\mathbf{x}\|_\epsilon = |y| + \epsilon|\lambda|$. Par (4.38), la propriété de Lipschitz (4.36), le fait que $E(Z_t) = 1$, la propriété de Poisson du processus $N_t(\cdot)$ et la propriété d'indépendance des processus $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} \|F(\mathbf{x}; \zeta_t) - F(\mathbf{x}'; \zeta_t)\|_\epsilon &= E|N_t(Z_t f(\mathbf{x}; \theta)) - N_t(Z_t f(\mathbf{x}'; \theta))| \\ &\quad + \epsilon |f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)| \\ &= E(E|N_t(Z_t f(\mathbf{x}; \theta)) - N_t(Z_t f(\mathbf{x}'; \theta))|/Z_t) \\ &\quad + \epsilon |f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)| \\ &= E(Z_t |f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)|) + \epsilon |f(\mathbf{x}; \theta) - f(\mathbf{x}'; \theta)| \\ &\leq (1 + \epsilon) \max\left(\frac{\kappa_1}{\epsilon}, \kappa_2\right) \|\mathbf{x} - \mathbf{x}'\|_\epsilon. \end{aligned} \quad (4.40)$$

En choisissant, $\epsilon = \frac{\kappa_1}{\kappa_2}$, on trouve $(1 + \epsilon) \max\left(\frac{\kappa_1}{\epsilon}, \kappa_2\right) = \kappa_1 + \kappa_2 < 1$. De la relation (4.40), on déduit que si les conditions (4.36) et (4.37) sont vérifiées, alors la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67] est satisfaite. Par le théorème 3.1 de de Doukhan et Wintenberger [67], il existe une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ du modèle (4.35) donnée par (4.39) qui est faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique de moyenne finie.

Remarque 4.1. Lorsque $Z_t \sim G(\sigma^{-2}, \sigma^{-2})$, le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé (4.35) se réduit au modèle général INGARCH(1, 1) binomial négative introduit par Christou et Fokianos [49], i.e., $Y_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{NB}\left(\sigma^{-2}, \frac{\sigma^{-2}}{\sigma^{-2} + \lambda_t}\right)$, où λ_t est défini dans (4.35). Sous les conditions (4.36) et (4.37), le modèle général INGARCH(1, 1) binomial négatif admet une solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique donnée par (4.39) qui satisfait $E\|(Y_t, \lambda_t)\|^r < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$. (voir V. Christou et K. Fokianos [49] pour plus de détails sur les moments d'ordres supérieurs de la distribution binomiale négative).

4.3.4 Modèle INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé

Pour le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé (4.3), considérons les conditions suivantes :

\mathbf{H}_4 : Les fonctions f_1, \dots, f_k sont Lipschitziennes, i.e., pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$, $y, y' \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \lambda' \in]0, \infty[$,

$$|f_k(y, \lambda; \theta(k)) - f_k(y', \lambda'; \theta(k))| \leq \kappa(k)|y - y'| + \tau(k)|\lambda - \lambda'|, \quad (4.41)$$

où $(\kappa(k))_{1 \leq k \leq K}$ et $(\tau(k))_{1 \leq k \leq K}$ sont des constantes positives vérifiant une des conditions de contraction suivantes :

$$\max_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\kappa(k) + \tau(k)}{\kappa(k)} \right) \sum_{k=1}^K \pi(k) \kappa(k) < 1, \quad (4.42)$$

$$\frac{1}{\min_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\tau(k)}{\kappa(k)} \right)} \sum_{k=1}^K \pi(k) (\kappa(k) + \tau(k)) \frac{\tau(k)}{\kappa(k)} < 1. \quad (4.43)$$

Lorsque $K = 1$, chacune des conditions (4.42) et (4.43) se réduit à la condition de contraction standard $\kappa(k) + \tau(k) < 1$ (voir Christou et Fokianos [49]). Pour le modèle linéaire INGARCH(1,1) de Poisson double mélangé définie dans l'exemple 4.16, i.e., les fonctions f_1, \dots, f_k sont linéaires, les conditions (4.42) et (4.43) sont réduites à

$$\max_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\alpha(k) + \beta(k)}{\alpha(k)} \right) \sum_{k=1}^K \pi(k) \alpha(k) < 1, \quad (4.44)$$

$$\frac{1}{\min_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\beta(k)}{\alpha(k)} \right)} \sum_{k=1}^K \pi(k) (\alpha(k) + \beta(k)) \frac{\beta(k)}{\alpha(k)} < 1, \quad (4.45)$$

où dans le cas $p = 0$, la condition (4.44) est la même condition de stationnarité en moyenne donnée par F. Zhu et al [145].

En posant $X_t = (Y_t, \lambda_t)$, $\zeta_t = (N_t, \Delta_t, Z_t(\Delta_t))$ et

$$F(X_{t-1}; \zeta_t) = \left(N_t(Z_t(\Delta_t) f_{\Delta_t}(X_{t-1}; \theta(\Delta_t))), f_{\Delta_t}(X_{t-1}; \theta(\Delta_t)) \right),$$

le modèle général INGARCH(1,1) de Poisson double mélangé (4.3) peut être écrit comme une chaîne de Markov suivante

$$X_t = F(X_{t-1}; \zeta_t), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.46)$$

où $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite i.i.d.

Le résultat suivant de Aknouche et Demmouche [10] donne les conditions suffisantes pour que le modèle général INGARCH(1,1) de Poisson double mélangé (4.3) admette une solution faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique.

Théorème 4.6. *Supposons que la condition (4.41) est vérifiée. Si l'une des conditions (4.42) ou (4.43) est vérifiée, alors le modèle (4.3) admet une solution faiblement dépendante strictement stationnaire et ergodique $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ donnée par*

$$X_t = H(\zeta_t, \zeta_{t-1}, \dots), \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.47)$$

pour une certaine fonction mesurable $H : (\mathbb{N} \times]0, \infty[\times \{1, \dots, K\})^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{N} \times]0, \infty[$. De plus, cette solution a une moyenne finie.

Preuve. Pour tout $x = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $\epsilon > 0$, soit $\|\cdot\|_\epsilon$ une norme sur \mathbb{R}^2 définie par $\|x\|_\epsilon = |y| + \epsilon|\lambda|$. Par la condition (4.41), la relation (4.46) et les mêmes arguments utilisés dans la preuve du théorème 4.3, on trouve

$$\begin{aligned} E\|F(x, \zeta_t) - F(x', \zeta_t)\|_\epsilon &= (1 + \epsilon) \sum_{k=1}^K \pi(k) |f_k(y, \lambda; \theta(k)) - f_k(y', \lambda'; \theta(k))| \\ &\leq \sum_{k=1}^K \pi(k) (1 + \epsilon) \max\left(\kappa(k), \frac{\tau(k)}{\epsilon}\right) \|x - x'\|_\epsilon. \end{aligned} \quad (4.48)$$

En prenant $\epsilon = \max_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\tau(k)}{\kappa(k)}\right)$, alors pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$(1 + \epsilon) \max\left(\kappa(k), \frac{\tau(k)}{\epsilon}\right) = \max_{1 \leq k \leq K} \left(1 + \frac{\tau(k)}{\kappa(k)}\right) \kappa(k).$$

Par conséquent, la relation (4.48) devient

$$E\|F(x, \zeta_t) - F(x', \zeta_t)\|_\epsilon \leq \max_{1 \leq k \leq K} \left(1 + \frac{\tau(k)}{\kappa(k)}\right) \sum_{k=1}^K \pi(k) \kappa(k) \|x - x'\|_\epsilon. \quad (4.49)$$

De même, si on prend $\epsilon = \min_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\tau(k)}{\kappa(k)}\right)$, alors pour tout $k \in \{1, \dots, K\}$,

$$(1 + \epsilon) \max\left(\kappa(k), \frac{\tau(k)}{\epsilon}\right) \leq \frac{\tau(k)}{\epsilon \kappa(k)} (\kappa(k) + \tau(k)).$$

Par conséquent, la relation (4.48) devient

$$E\|F(x, \zeta_t) - F(x', \zeta_t)\|_\epsilon \leq \frac{1}{\min_{1 \leq k \leq K} \left(\frac{\tau(k)}{\kappa(k)}\right)} \sum_{k=1}^K \pi(k) \frac{\tau(k)}{\kappa(k)} (\kappa(k) + \tau(k)) \|x - x'\|_\epsilon. \quad (4.50)$$

Maintenant, depuis les relations (4.49) et (4.50), on déduit que si la condition (4.41) est vérifiée et l'une des conditions (4.42) ou (4.43) est vérifiée, alors la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67]) est satisfaite. Par le théorème 3.1 de Doukhan et Wintenberger [67]), il existe une solution de modèle général *INGARCH*(1, 1) de Poisson double mélangé (4.3) donnée par (4.47) qui est faiblement dépendante, strictement stationnaire, ergodique et de moyenne finie.

Notons que sauf pour $K = 1$, il apparaît que les conditions (4.41) et (4.42) ne sont pas nécessaires pour l'ergodicité du modèle (4.3), même dans le cas linéaire. Pour le modèle linéaire *INGARCH*(1, 1) de Poisson double mélangé défini par (4.16), le théorème 4.6 se simplifie comme suit.

Corollaire 4.3. *Si l'une des conditions (4.44) et (4.45) est vérifiée, alors le modèle linéaire *INGARCH*(1, 1) de Poisson double mélangé (4.16) est faiblement dépendant strictement stationnaire et ergodique de moyenne finie.*

4.4 Ergodicité périodique du modèle *INGARCH*(1, 1) de Poisson mélangé périodique

Dans cette partie, on étudie le modèle général *INGARCH*(1, 1) de Poisson mélangé périodique dont la distribution conditionnelle est un mélange de lois de Poisson et dont

la moyenne conditionnelle est une fonction non linéaire de ses valeurs retardées et des observations. En fonction de la variable du mélange, la distribution conditionnelle de modèle proposé englobe une large gamme de distributions incluant la distribution de Poisson, la distribution binomiale négative, la distribution double de Poisson. De plus, à l'exception du cas de Poisson pur, le modèle proposé est conditionnellement sur-dispersé et se réduit dans le cas a périodique au modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé introduit par Christou et Fokianos [49], [51]. On étudie certaines propriétés de ce modèle proposé, à savoir la stationnarité périodique stricte, l'ergodicité périodique, la dépendance faible périodique et l'existence des moments d'ordres supérieurs.

4.4.1 Modèle INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique

Soit $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ une suite indépendante de processus de Poisson homogènes d'intensité unité. Considérons une suite de variables aléatoires $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ positives, indépendantes et périodiquement distribuées de période $S \in \mathbb{N}^*$, c'est-à-dire Z_t a la même distribution que Z_{t+kS} pour tout $t, k \in \mathbb{Z}$, avec $E(Z_t) = 1$ et $\text{Var}(Z_t) = \sigma_t^2$. La périodicité du processus $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ implique que la suite $(\sigma_t^2)_{t \in \mathbb{Z}}$ est périodique en t , i.e., $\sigma_t^2 = \sigma_{t+kS}^2$ pour tout $t, k \in \mathbb{Z}$. On suppose aussi que la suite ipd $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est indépendante de la suite $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$.

Un processus stochastique $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs entières est dit processus autorégressif de Poisson mélangé périodique (i.e., satisfait le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique) s'il est solution de l'équation suivante

$$\begin{cases} Y_t = N_t(Z_t \lambda_t), \\ \lambda_t = f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t), t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.51)$$

où $(\theta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite de paramètres périodiques en t de période $S \in \mathbb{N}^*$, i.e., $\theta_t = \theta_{t+kS}$ pour tout $t, k \in \mathbb{Z}$ tel que $\theta_t \in \Theta_t \subset \mathbb{R}^{m_t}$, avec $m_t \in \mathbb{N}^*$.

La suite de fonctions $(f_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ définie par $f_t : \mathbb{N} \times]0, \infty[\times \Theta_t \rightarrow]0, \infty[$ est périodique en t , i.e., $f_t = f_{t+kS}$ pour tout $t, k \in \mathbb{Z}$. Soit \mathcal{F}_t une σ -algèbre générée par les variables aléatoires Y_t, Y_{t-1}, \dots , alors grâce aux propriétés de $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$, on déduit que

$$\begin{aligned} E(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \lambda_t. \\ \text{Var}(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}) &= \lambda_t(1 + \sigma_t^2 \lambda_t) \geq E(Y_t / \mathcal{F}_{t-1}). \end{aligned}$$

Ainsi, mis à part le cas de Poisson pur correspondant à $\sigma_t^2 = 0$, le modèle (4.51) est conditionnellement sur-dispersé, bien que le modèle conditionnellement de Poisson puisse générer une sur-dispersion (inconditionnelle) et même une sous-dispersion (inconditionnelle) (voir Christou et Fokianos [49]). De plus, la loi conditionnelle de Y_t peut être donnée explicitement pour des lois spécifiques de la variable Z_t . En effet, si Z_t est dégénérée en la valeur 1 pour tout $t \in \mathbb{Z}$, alors Y_t / \mathcal{F}_{t-1} suit une loi de Poisson de paramètre λ_t , i.e., $Y_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$. De même, si Z_t suit une loi Gamma de paramètre de forme $\sigma_t^{-2} > 0$ et de paramètre d'intensité $\sigma_t^{-2} > 0$, i.e., $Z_t \sim G(\sigma_t^{-2}, \sigma_t^{-2})$, alors Y_t / \mathcal{F}_{t-1} suit une loi binomiale négative de paramètres $\sigma_t^{-2} > 0$ et $\sigma_t^{-2}(\sigma_t^{-2} + \lambda_t)^{-1} \in]0, 1[$, i.e., $Y_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{NB}(\sigma_t^{-2}, \sigma_t^{-2}(\sigma_t^{-2} + \lambda_t)^{-1})$.

Le modèle (4.51) peut être écrit sous la forme suivante :

$$\begin{cases} Y_{v+nS} = N_{v+nS}(Z_{v+nS} \lambda_{v+nS}), \\ \lambda_{v+nS} = f_v(Y_{v-1+nS}, \lambda_{v-1+nS}; \theta_v), n \in \mathbb{Z}, 0 \leq v \leq S-1, \end{cases} \quad (4.52)$$

où $f_v = f_{v+nS}$ et $\theta_v = \theta_{v+nS}$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$ et $v \in \{0, \dots, S-1\}$. Le modèle (4.51) est assez général et couvre une gamme étendue de modèles à valeurs entières bien connus.

Par exemple, lorsque $S = 1$, on trouve le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé proposé par Christou et Fokianos [49], [51]. D'autres cas particuliers importants sont donnés par les exemples suivants

4.4.2 Exemples

Exemple 4.4.1. (Moyenne conditionnelle linéaire)

Pour chaque $v \in \{0, \dots, S - 1\}$, soit

$$f_v(y, \lambda; \theta_v) = \omega_v + \alpha_v y + \beta_v \lambda, \quad (4.53)$$

où $\theta_v = (\omega_v, \alpha_v, \beta_v)' \in \Theta_v \subset]0, \infty[^3$.

1) Lorsque Z_v est dégénérée en valeur 1 pour tout $v \in \{0, \dots, S - 1\}$, le modèle (4.51) se réduit au modèle linéaire INGARCH(1, 1) de Poisson périodique proposé par Bentarzi et Bentarzi [31]. En effet, un processus stochastique $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ à valeurs entières est dit processus INGARCH(1, 1) de Poisson périodique de période $S \in \mathbb{N}^*$, s'il satisfait le modèle suivant

$$\begin{cases} Y_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t), \\ \lambda_t = \omega_t + \alpha_t Y_{t-1} + \beta_t \lambda_{t-1}, \quad t \in \mathbb{Z}, \end{cases} \quad (4.54)$$

où les paramètres ω_t , α_t et β_t sont périodiques en t de période $S \in \mathbb{N}^*$, i.e., $\omega_t = \omega_{t+kS}$, $\alpha_t = \alpha_{t+kS}$ et $\beta_t = \beta_{t+kS}$ pour tout $t, k \in \mathbb{Z}$. De plus, ces paramètres sont tels que $\omega_t > 0$, $\alpha_t \geq 0$ et $\beta_t \geq 0$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$.

La condition nécessaire et suffisante pour que le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle INGARCH(1, 1) de Poisson périodique (4.54) soit périodiquement stationnaire en moment d'ordre un est donnée par le résultat suivant de Bentarzi et Bentarzi [31].

Théorème 4.7. *Le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle INGARCH(1, 1) de Poisson périodique (4.54) est périodiquement stationnaire en moment d'ordre un si et seulement si*

$$\prod_{v=1}^S (\alpha_v + \beta_v) < 1. \quad (4.55)$$

De plus, sous la condition (4.55), les S moments d'ordre un, $E(Y_v) = \mu_Y^{(v)}$, $v \in \{0, \dots, S - 1\}$, du processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont données par :

$$\mu_Y^{(v)} = \left(1 - \prod_{i=1}^S (\alpha_i + \beta_i)\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j (\alpha_{v-i+1} + \beta_{v-i+1})\right) \omega_{v-j}. \quad (4.56)$$

Preuve. Pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la moyenne $E(Y_t) = \mu_Y^{(t)}$ vérifie la relation suivante

$$\mu_Y^{(t)} = \phi_t \mu_Y^{(t-1)} + \omega_t. \quad (4.57)$$

où $\phi_t = \alpha_t + \beta_t$. Après m itérations sur (4.57), on obtient

$$\mu_Y^{(t)} = \left(\prod_{i=1}^m \phi_{t-i+1}\right) \mu_Y^{(t-m)} + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \phi_{t-i+1}\right) \omega_{t-j}, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.58)$$

En remplaçant m par t en posant $t = v + kS$, avec $v \in \{0, \dots, S - 1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$, la

relation (4.58) devient

$$\begin{aligned}
 \mu_Y^{(v+kS)} &= \sum_{j=1}^{v+kS} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1+kS} \right) \omega_{v-j+1+kS} + \left(\prod_{i=1}^{v+kS} \phi_{v-i+1+kS} \right) \mu_Y^{(0)} \\
 &= \sum_{j=1}^{kS} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1} \right) \omega_{v-j+1} + \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1+kS} \phi_{v-i+1} \right) \omega_{v-j+1} \\
 &\quad + \left(\prod_{i=1}^{v+kS} \phi_{v-i+1} \right) \mu_Y^{(0)} \\
 &= \sum_{m=0}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1} \right)^m \sum_{l=1}^S \left(\prod_{i=1}^{l-1} \phi_{v-i+1} \right) \omega_{v-l+1} \\
 &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1} \right)^k \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1} \right) \omega_{v-j+1} + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1} \right)^k \left(\prod_{i=1}^v \phi_{v-i+1} \right) \mu_Y^{(0)} \\
 &= \frac{1 - \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1} \right)^k}{1 - \prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}} \sum_{l=1}^S \left(\prod_{i=1}^{l-1} \phi_{v-i+1} \right) \omega_{v-l+1} \\
 &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1} \right)^k \left[\sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1} \right) \omega_{v-j+1} + \left(\prod_{i=1}^v \phi_{v-i+1} \right) \mu_Y^{(0)} \right].
 \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_Y^{(v+kS)} = \mu_Y^{(v)}$, avec $\mu_Y^{(v)}$ définie par (4.56) si et seulement si la condition (4.55) est vérifiée.

La condition nécessaire et suffisante pour que le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle INGARCH(1, 1) de Poisson périodique (4.54) soit périodiquement stationnaire en moment d'ordre deux est donnée par le résultat suivant de Bentarzi et Bentarzi [31].

Théorème 4.8. *Le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ satisfaisant le modèle INGARCH(1, 1) de Poisson périodique (4.54) est périodiquement stationnaire au second ordre si et seulement si*

$$\prod_{v=1}^S (\alpha_v + \beta_v) < 1. \tag{4.59}$$

De plus, sous la condition (4.59), les S variances, $\text{Var}(Y_v) = \gamma_Y^{(v)}(0)$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, de processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et les S variances, $\text{Var}(\lambda_v) = \gamma_\lambda^{(v)}(0)$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, de processus $(\lambda_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont données par :

$$\gamma_Y^{(v)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S (\alpha_i + \beta_i)^2 \right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j (\alpha_{v-i+1} + \beta_{v-i+1})^2 \varphi_{v-j}. \tag{4.60}$$

$$\gamma_\lambda^{(v)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S (\alpha_i + \beta_i)^2 \right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=1}^j (\alpha_{v-i+1} + \beta_{v-i+1})^2 \varphi_{v-j} - \mu_Y^{(v)}, \tag{4.61}$$

où $\mu_Y^{(v)}$ est définie par (4.56) et $\varphi_v = \mu_Y^{(v)} - (\alpha_v + \beta_v)^2 \mu_Y^{(v-1)} + \alpha_v^2 \mu_Y^{(v-1)}$.

Preuve. Pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, le moment d'ordre deux $E(Y_t^2)$ est donnée par

$$E(Y_t^2) = E(E(Y_t^2 / \mathcal{F}_{t-1})) = E(\lambda_t^2) + E(\lambda_t).$$

Ce qui est équivalent à $\gamma_Y^{(t)}(0) = \gamma_\lambda^{(t)}(0) + E(\lambda_t)$. Maintenant, on calcule $E(\lambda_t^2)$. On a

$$\begin{aligned} E(\lambda_t^2) &= E(E(\lambda_t^2/\mathcal{F}_{t-1})) \\ &= \phi_t^2 E(\lambda_{t-1}^2) + \omega_t^2 + (\alpha_t^2 + 2\omega_t\phi_t)E(\lambda_{t-1}) \end{aligned} \quad (4.62)$$

où $\phi_t = \alpha_t + \beta_t$. La relation (4.62) est équivalente à

$$\gamma_Y^{(t)}(0) = \phi_t^2 \gamma_Y^{(t-1)}(0) + (\omega_t + \phi_t \mu_\lambda^{(t-1)})^2 + \alpha_t^2 \mu_\lambda^{(t-1)} - \mu_\lambda^{(t)2}.$$

Par le fait que $\mu_Y^{(t)} = \mu_\lambda^{(t)}$ et $\mu_Y^{(t)} = \omega_t + \phi_t \mu_\lambda^{(t-1)}$, on déduit que

$$\gamma_Y^{(t)}(0) = \phi_t^2 \gamma_Y^{(t-1)}(0) + \varphi_t, \quad (4.63)$$

où $\varphi_t = \mu_Y^{(t)} - \phi_t^2 \mu_Y^{(t-1)} + \alpha_t^2 \mu_Y^{(t-1)}$. Après m itérations sur (4.63), on obtient

$$\gamma_Y^{(t)}(0) = \left(\prod_{i=1}^m \phi_{t-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(t-m)}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} \left(\prod_{i=1}^j \phi_{t-i+1}^2 \right) \varphi_{t-j}. \quad (4.64)$$

En remplaçant m par t , avec $t = v + kS$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(v+kS)}(0) &= \sum_{j=1}^{v+kS} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1+kS} + \left(\prod_{i=1}^{v+kS} \phi_{v-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0) \\ &= \sum_{j=1}^{kS} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1+kS} + \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1+kS} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k \left(\prod_{i=1}^v \phi_{v-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0) \\ &= \sum_{j=1}^{kS} \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1+kS} + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k \\ &\quad \times \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1} + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k \left(\prod_{i=1}^v \phi_{v-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0) \\ &= \sum_{l=0}^{k-1} \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^l \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k \sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k \left(\prod_{i=1}^v \phi_{v-i+1}^2 \right) \gamma_Y^{(0)}(0), \end{aligned}$$

et ceci implique que

$$\begin{aligned} \gamma_Y^{(v+kS)}(0) &= \frac{1 - \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k}{1 - \prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2} \sum_{j=1}^S \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1} \\ &\quad + \left(\prod_{i=1}^S \phi_{v-i+1}^2 \right)^k \left[\sum_{j=1}^v \left(\prod_{i=1}^{j-1} \phi_{v-i+1}^2 \right) \varphi_{v-j+1} + \left(\prod_{i=1}^v \phi_{v-i+1}^2 \right) \right] \gamma_Y^{(0)}(0). \end{aligned}$$

Par conséquent, pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $\lim_{k \rightarrow \infty} \gamma_Y^{(v+kS)}(0) = \gamma_Y^{(v)}(0)$, avec $\gamma_Y^{(v)}(0)$ définie par (4.60), si et seulement si la condition (4.59) est vérifiée.

Pour chaque $t \in \mathbb{Z}$, la variance de λ_t est donnée par

$$\gamma_\lambda^{(t)}(0) = \gamma_Y^{(t)}(0) - \mu_Y^{(t)} = \left(1 - \prod_{i=1}^S \phi_{t-i+1}^2\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \phi_{t-i+1}^2\right) \varphi_{t-j} - \mu_Y^{(t)}. \quad (4.65)$$

On remplace t par $v + kS$, avec $v \in \{0, \dots, S-1\}$ et $k \in \mathbb{Z}$, on obtient

$$\gamma_\lambda^{(v)}(0) = \left(1 - \prod_{i=1}^S \phi_i^2\right)^{-1} \sum_{j=0}^{S-1} \left(\prod_{i=1}^j \phi_{v-i+1}^2\right) \varphi_{v-j} - \mu_Y^{(v)}. \quad (4.66)$$

2) Lorsque $Z_v \sim G(\sigma_v^{-2}, \sigma_v^{-2})$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, le modèle (4.51) se réduit au modèle INGARCH(1,1) binomial négatif périodique. Ce dernier modèle généralise le modèle INGARCH(1,1) binomial négatif proposé par Zhu [144].

Exemple 4.4.2. (Moyenne conditionnelle exponentielle)

Considérons le modèle (4.52), avec pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$f_v(y, \lambda; \theta_v) = \omega_v + \alpha_v y + (\beta_v + \delta_v \exp(-\gamma_v \lambda^2)) \lambda,$$

où $\theta_v = (\omega_v, \alpha_v, \beta_v, \delta_v, \gamma_v)' \in \Theta_v \subset]0, \infty[^5$.

- 1) Si pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, Z_v est dégénérée, alors on obtient une version périodique de la spécification proposée par Fokianos et al [76] (voir aussi Fokianos [75], Doukhan et al [71]).
- 2) Si pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $Z_v \sim G(\sigma_v^{-2}, \sigma_v^{-2})$, le modèle (4.52) se réduit à une extension périodique du modèle autorégressif binomial négatif exponentiel de Christou et Fokianos [49].

Exemple 4.4.3. (Moyenne conditionnelle linéaire perturbée)

Considérons le modèle (4.52), avec pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$f_v(y, \lambda, \theta_v) = \omega_v (1 + \lambda)^{-\gamma_v} + \alpha_v y + \beta_v \lambda,$$

où $\theta_v = (\omega_v, \alpha_v, \beta_v, \gamma_v)' \in \Theta_v \subset]0, \infty[^4$. Plus γ_v s'approche de zéro et plus le modèle résultant s'approche du modèle linéaire (4.53) dont il est une perturbation (voir Christou [50]).

Exemple 4.4.4. (Moyenne conditionnelle mixte)

Le modèle (4.51) permet aussi différentes spécifications le long des canaux $v \in \{0, \dots, S-1\}$ (voir Aknouche et al [21]). Par exemple, pour $S = 2$, f_1 et f_2 définies par

$$f_v(y, \lambda; \theta_1) = \omega_1 + \alpha_1 y + \beta_1 \lambda,$$

$$f_v(y, \lambda; \theta_2) = \omega_2 + \alpha_2 y + (\beta_2 + \delta_2 \exp(-\gamma_2 \lambda^2)) \lambda.$$

Dans ce cas, les paramètres du modèle sont $\sigma^2 = (\sigma_1^2, \sigma_2^2) \in]0, \infty[^2$ et $\theta = (\theta'_1, \theta'_2)'$ avec $\theta'_1 = (\omega_1, \alpha_1, \beta_1)' \in]0, \infty[^3$ et $\theta'_2 = (\omega_2, \alpha_2, \beta_2, \delta_2, \gamma_2)' \in]0, \infty[^5$. Lorsque Z_v est dégénéré pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, alors seul θ seul est retenu.

4.4.3 Conditions d'ergodicité périodique

Dans cette partie, on donne une condition suffisante sur la suite $(f_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ pour que le modèle INGARCH(1,1) de Poisson mélangé périodique (4.51) admette une solution strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante de moyenne finie. Sous d'autres conditions supplémentaires, cette solution possède des moments d'ordres supérieurs finis. Rappelons que la stationnarité périodique stricte de période $S \in \mathbb{N}^*$ d'un processus aléatoire $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est équivalente à la stationnarité périodique stricte de ses S sous processus $(Y_{v+nS})_{n \in \mathbb{Z}}$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$. De même, le processus $(Y_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est dit périodiquement faiblement dépendant de période $S \in \mathbb{N}^*$ si et seulement si pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, le processus $(Y_{v+nS})_{n \in \mathbb{Z}}$ est faiblement dépendant dans le sens de la définition 4.1 de τ -dépendance de la définition introduite par Dedecker et Prieur [61].

Considérons l'hypothèse suivante qu'on qualifie de condition de contraction périodique sur la suite de fonctions périodique $(f_t)_{t \in \mathbb{Z}}$.

H₃ : Pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, $y, y' \in \mathbb{N}$ et $\lambda, \lambda' > 0$:

$$|f_v(y, \lambda) - f_v(y', \lambda')| < \kappa_{v,1}|y - y'| + \kappa_{v,2}|\lambda - \lambda'|, \quad (4.67)$$

où $\kappa_{v,1}$ et $\kappa_{v,2}$ sont des constantes positives qui vérifient

$$\prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{v,1} + \kappa_{v,2}) < 1. \quad (4.68)$$

Notons que si pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la fonction f_v est contractante, i.e., f_v est Lipschitzienne dans le sens de la définition (4.67), avec $(\kappa_{v,1} + \kappa_{v,2}) < 1$, alors la suite de fonctions $(f_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est périodiquement contractante dans le sens de la définition (4.68). Il est clair que la réciproque n'est pas vraie parce qu'on peut avoir une suite $(f_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ périodiquement contractante, alors qu'il existe $v_0 \in \{0, \dots, S-1\}$ pour le quel f_{v_0} n'est pas contractante, i.e., f_{v_0} est Lipschitzienne dans le sens de la définition (4.67), mais $(\kappa_{v_0,1} + \kappa_{v_0,2}) \geq 1$.

Dans l'exemple 4.4.1, puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la fonction f_v est linéaire, alors la condition (4.68) se réduit à la condition suivante.

$$\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v + \beta_v) < 1. \quad (4.69)$$

Pour l'exemple 4.4.2, puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a

$$\frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial y} = \alpha_v, \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial \lambda} \right| < \beta_v + \delta_v,$$

alors la condition (4.68) devient

$$\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v + \beta_v + \delta_v) < 1. \quad (4.70)$$

Pour l'exemple 4.4.3, puisque pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, on a

$$\frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial y} = \alpha_v, \quad \text{et} \quad \left| \frac{\partial f_v(y, \lambda)}{\partial \lambda} \right| < \beta_v + \omega_v \gamma_v,$$

alors la condition (4.68) devient

$$\prod_{v=0}^{S-1} (\alpha_v + \beta_v + \omega_v \gamma_v) < 1. \quad (4.71)$$

Pour l'exemple 4.4.4, la condition (4.68) devient

$$(\alpha_1 + \beta_1)(\alpha_2 + \beta_2 + \delta_2) < 1. \quad (4.72)$$

Soit $X_t = (Y_t, \lambda_t)$, $\zeta_t = (N_t, Z_t)$ et

$$F_t(X_{t-1}, \zeta_t) = \left(N_t(Z_t f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t)), f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t) \right), \quad (4.73)$$

alors la suite de fonctions $(F_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est périodique en t de période $S \in \mathbb{N}^*$ et le modèle (4.52) peut être écrit sous la forme Markovienne non-homogène suivante

$$X_{v+nS} = F_v(X_{v-1+nS}, \zeta_{v+nS}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq v \leq S-1, \quad (4.74)$$

où $(\zeta_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est une suite indépendante périodiquement distribuée de période S .

Le résultat suivant de Aknouche et al [17] donne une condition suffisante pour que l'équation (4.74) admette une unique solution strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante.

Théorème 4.9.

1. *Sous les conditions (4.67) et (4.68), l'équation (4.74) admet une unique solution $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante de moyennes finies, donnée par*

$$X_{v+nS} = H_v(\xi_{v+nS}, \xi_{v+(n-1)S}, \dots), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq v \leq S-1, \quad (4.75)$$

pour certaines fonctions mesurables H_v , $0 \leq v \leq S-1$, définies de $(\mathbb{N} \times]0, \infty[)^{\mathbb{N}}$ dans $\mathbb{N} \times]0, \infty[$, où pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\xi_{v+nS} = (\zeta_{v+nS}, \zeta_{v-1+nS}, \dots, \zeta_{v-S+1+nS})', \quad n \in \mathbb{Z}$$

2. *De plus, si pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la variable Z_v est dégénérée, alors l'unique solution de l'équation (4.74) définie par (4.75) est telle que pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,*

$$E(Y_v^r + \lambda_v^r) < \infty, \quad \forall r \in \mathbb{N}^*.$$

Preuve. 1) Après S itérations sur l'équation (4.74), on obtient les S équations Markoviennes homogènes suivantes :

$$X_{v+nS} = \mathbb{F}_v(X_{v+(n-1)S}, \xi_{v+nS}), \quad n \in \mathbb{Z}, \quad 0 \leq v \leq S-1. \quad (4.76)$$

où $\mathbb{F}_v = F_v \circ F_{v-1} \circ \dots \circ F_{v-S+1}$ et pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, la suite $(\xi_{v+nS})_{n \in \mathbb{Z}}$ est iid, avec $\xi_{v+nS} = (\zeta_{v+nS}, \zeta_{v-1+nS}, \dots, \zeta_{v-S+1+nS})'$. La preuve est alors basée sur le théorème 3.1 de Doukhan et Wintenberger [67]. En effet, pour $x = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$ et $\varepsilon > 0$, soit la norme $\|\cdot\|_\varepsilon$ définie sur \mathbb{R}^2 par

$$\|x\|_\varepsilon = |y| + \varepsilon|\lambda|.$$

Par les relations (4.76), (4.67), la propriété de Poisson du processus $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ et l'indépendance de $(N_t(\cdot))_{t \in \mathbb{Z}}$ avec la suite $(Z_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ qui vérifie $E(Z_t) = 1$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on déduit que pour tout $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} E(\|\mathbb{F}_v(x, \xi_{v+nS}) - \mathbb{F}_v(x', \xi_{v+nS})\|_\varepsilon) & \\ & \leq (1 + \varepsilon) \prod_{k=0}^{S-2} (\kappa_{v-k,1} + \kappa_{v-k,2}) [\kappa_{v-S+1,1}|y - y'| + \kappa_{v-S+1,2}|\lambda - \lambda'|] \\ & \leq (1 + \varepsilon) \prod_{k=0}^{S-2} (\kappa_{v-k,1} + \kappa_{v-k,2}) \max(\kappa_{v-S+1,1}, \frac{\kappa_{v-S+1,2}}{\varepsilon}) \|x - x'\|_\varepsilon \end{aligned}$$

On pose $\varepsilon = \kappa_{v-S+1,2} \cdot \kappa_{v-S+1,1}^{-1}$. Par la relation (4.68), on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$,

$$\begin{aligned} E(\|\mathbb{F}_v(x_1, \xi_{v+nS}) - \mathbb{F}_v(x_2, \xi_{v+nS})\|_\varepsilon) & \leq \left(\prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{v-k,1} + \kappa_{v-k,2}) \right) \|x - x'\|_\varepsilon \\ & = \left(\prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{k,1} + \kappa_{k,2}) \right) \|x - x'\|_\varepsilon \\ & < \|x - x'\|_\varepsilon. \end{aligned}$$

Ainsi, on a montré que sous les conditions (4.67) et (4.68), la condition (3.1) de Doukhan et Wintenberger [67] est satisfaite pour la norme $\|\cdot\|_\varepsilon$. Par conséquent, par le théorème 3.1 de Doukhan et Wintenberger [67], on déduit que pour chaque $v \in \{0, \dots, S-1\}$, l'équation (4.76) admet une unique solution $((Y_{v+nS}, \lambda_{v+nS}))_{n \in \mathbb{Z}}$ non-anticipative strictement stationnaire, ergodique, faiblement dépendante et de moyenne finie donnée par (4.75). Ceci implique que le processus $((Y_t, \lambda_t))_{t \in \mathbb{Z}}$ est l'unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique, périodiquement faiblement dépendante de l'équation (4.74) ayant S moyennes finies.

2) Notons que la condition (4.68) implique que $\prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{v,1} + \kappa_{v,2})^r < 1$ pour tout $r \in \mathbb{N}$. Maintenant, on peut vérifier facilement que $E(Y_t^r + \lambda_t^r) < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$. En effet, pour $r \in \mathbb{N}^*$ et $x = (y, \lambda) \in \mathbb{R}^2$, soit la norme $\|\cdot\|_{\varepsilon,r}$ définie sur \mathbb{R}^2 par $\|x\|_{\varepsilon,r} = (|y|^r + \varepsilon|\lambda|^r)^{1/r}$. Pour tout $t \in \mathbb{Z}$, on a

$$E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) = E(Y_t^r + \varepsilon\lambda_t^r) = E(E(Y_t^r / \mathcal{F}_{t-1})) + \varepsilon E(\lambda_t^r). \quad (4.77)$$

Puisque $Y_t / \mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{P}(\lambda_t)$, alors la relation (4.77) devient

$$E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) = (1 + \varepsilon)E(\lambda_t^r) + \sum_{i=0}^{r-1} \left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\} E(\lambda_t^i) \quad (4.78)$$

où $\left\{ \begin{matrix} r \\ i \end{matrix} \right\}$ est le nombre de Sterling de second espèce défini dans le lemme 4.1.

Maintenant, par récurrence sur $r \in \mathbb{N}$, on peut montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) < \infty$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$. En utilisant le modèle (4.51) et la condition (4.67), on déduit que pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$\begin{aligned} E(\lambda_t^r) & = E((f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t))^r) = E((f_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}; \theta_t) - f_t(0, 0; \theta_t) + f_t(0, 0; \theta_t))^r) \\ & \leq E((\kappa_{t,1}Y_{t-1} + \kappa_{t,2}\lambda_{t-1} + f_t(0, 0; \theta_t))^r) = E((g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}) + b_t)^r) \\ & = E((g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}))^r) + R_{t,r-1}, \end{aligned} \quad (4.79)$$

où $g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}) = \kappa_{t,1}Y_{t-1} + \kappa_{t,2}\lambda_{t-1}$, $b_t = f_t(0, 0; \theta_t)$ et

$$R_{t,r-1} = \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} E((g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}))^i) b_t^{r-i} < \infty.$$

D'autre part, en utilisant l'inégalité de Jensen, on déduit que

$$\begin{aligned} E((g_t(Y_{t-1}, \lambda_{t-1}))^r) &= (\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2})^r E\left(\frac{\kappa_{t,1}}{\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2}}Y_{t-1} + \frac{\kappa_{t,2}}{\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2}}\lambda_{t-1}\right)^r \\ &\leq (\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2})^{r-1} (\kappa_{t,1}E(Y_{t-1}^r) + \kappa_{t,2}E(\lambda_{t-1}^r)) \\ &\leq (\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2})^r E(\|X_{t-1}\|_{\varepsilon,r}^r). \end{aligned} \quad (4.80)$$

On remplace (4.80) dans (4.79), on trouve

$$E(\lambda_t^r) \leq (\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2})^r E(\|X_{t-1}\|_{\varepsilon,r}^r) + R_{t,r-1}. \quad (4.81)$$

En combinant les relations (4.78) et (4.81), on obtient

$$E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) \leq (1 + \varepsilon)(\kappa_{t,1} + \kappa_{t,2})^r E(\|X_{t-1}\|_{\varepsilon,r}^r) + C_t, \quad (4.82)$$

où pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$C_t = (1 + \varepsilon)R_{t,r-1} + \sum_{i=0}^{r-1} \binom{r}{i} E(\lambda_t^i) < \infty.$$

Puisque $(X_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est strictement périodiquement stationnaire, alors $E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) = E(\|X_{t-kS}\|_{\varepsilon,r}^r)$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Par conséquent, de la relation (4.82), on déduit que

$$E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) \leq (1 + \varepsilon)^S \prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{v,1} + \kappa_{v,2})^r E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) + K_t, \quad (4.83)$$

où pour tout $t \in \mathbb{Z}$,

$$K_t = \sum_{j=0}^{S-1} \prod_{i=0}^{j-1} (\kappa_{t-i,1} + \kappa_{t-i,2})^r C_{t-j} (1 + \varepsilon)^j < \infty.$$

Maintenant, pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon < \prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{v,1} + \kappa_{v,2})^{\frac{-r}{S}} - 1$, on déduit de la relation (4.83) que pour tout $r \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{Z}$,

$$E(\|X_t\|_{\varepsilon,r}^r) \leq \frac{K_t}{1 - (1 + \varepsilon)^S \prod_{v=0}^{S-1} (\kappa_{v,1} + \kappa_{v,2})^r} < \infty.$$

Le résultat précédent montre que sous les conditions (4.67) et (4.68), le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique (4.51) admet une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante donnée par (4.75) et cette solution admet des moments de tout ordre. Pour les cas particuliers des exemples 4.4.1, 4.4.2 et 4.4.3, on a les résultats suivants dû à Aknouche et al [17].

Corollaire 4.4. *Sous la condition (4.69), le modèle INGARCH(1, 1) de Poisson périodique avec une moyenne conditionnelle linéaire (cf. Exemple 4.4.1,1) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante $(Y_t, \lambda_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ telle que $E(Y_t^r + \lambda_t^r) < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$.*

Corollaire 4.5. *Sous la condition (4.70), le modèle INGARCH(1, 1) de Poisson périodique avec une moyenne conditionnelle exponentielle (cf. Exemple 4.4.2, 1) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante $(Y_t, \lambda_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ telle que $E(Y_t^r + \lambda_t^r) < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$.*

Corollaire 4.6. *Sous la condition (4.71) et $\sigma_t^2 = 0$, le modèle INGARCH de Poisson périodique avec une moyenne conditionnelle perturbée (cf. Exemple 4.4.3) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante $(Y_t, \lambda_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ telle que $E(Y_t^r + \lambda_t^r) < \infty$ pour tout $r \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{Z}$.*

Dans le cas non-poissonien, les conditions d'existence des moments d'ordre supérieurs peuvent dépendre de la variance du mélange $\sigma^2 = (\sigma_0^2, \dots, \sigma_{S-1}^2)$. En particulier, pour le modèle INGARCH(1, 1) binomial négatif périodique avec une moyenne conditionnelle linéaire (cf. Exemple 4.4.1, 2), i.e., $Z_v \sim G(\sigma_v^{-2}, \sigma_v^{-2})$, $v \in \{0, \dots, S-1\}$, le résultat suivant montre que ces conditions varient en fonction de l'ordre du moment.

Proposition 4.1. *Le modèle INGARCH(1, 1) binomial négatif périodique avec une moyenne conditionnelle linéaire (cf. Exemple 4.4.1, 2) admet une unique solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique $(Y_t, \lambda_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ telle que :*

1. $E(Y_t) < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$ si et seulement si la condition (4.69) est vérifiée.
2. $E(Y_t^2) < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$ si et seulement si

$$\prod_{v=1}^S ((\alpha_v + \beta_v)^2 + \sigma_{v-1}^2 \alpha_v^2) < 1. \quad (4.84)$$

3. $E(Y_t^3) < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$ si et seulement si (4.84) est vérifiée et

$$\prod_{v=1}^S [(\alpha_v + \beta_v)^3 + (3\sigma_{v-1}^2 + 2\sigma_{v-1}^4)\alpha_v^3 + 3\sigma_{v-1}^2\alpha_v^2\beta_v] < 1. \quad (4.85)$$

4. $E(Y_t^4) < \infty$, $t \in \mathbb{Z}$ si et seulement si les conditions (4.84) et (4.85) sont vérifiées et

$$\prod_{v=1}^S [(\alpha_v + \beta_v)^4 + 6\sigma_{v-1}^6\alpha_v^2(\alpha_v + \beta_v)^2 + \sigma_{v-1}^4\alpha_v^3(11\alpha_v + 8\beta_v) + 6\sigma_{v-1}^6\alpha_v^4] < 1. \quad (4.86)$$

Preuve. Puisque $Y_t/\mathcal{F}_{t-1} \sim \mathcal{NB}(\sigma_t^{-2}, \sigma_t^{-2}(\sigma_t^{-2} + \lambda_t)^{-1})$, alors d'après G. C. Jain et P. C. Consul [102], les moments jusqu'à l'ordre 4 de la loi binomiale négative sont définis par comment suit :

$$E(Y_t/\mathcal{F}_{t-1}) = \lambda_t. \quad (4.87)$$

$$E(Y_t^2/\mathcal{F}_{t-1}) = (1 + \sigma_t^2) + \lambda_t. \quad (4.88)$$

$$E(Y_t^3/\mathcal{F}_{t-1}) = (1 + 3\sigma_t^2 + 2\sigma_t^4)\lambda_t^3 + 3(1 + \sigma_t^2)\lambda_t^2 + \lambda_t. \quad (4.89)$$

$$E(Y_t^4/\mathcal{F}_{t-1}) = (1 + 6\sigma_t^2 + 11\sigma_t^4 + 6\sigma_t^6)\lambda_t^4 + (6 + 16\sigma_t^2 + 12\sigma_t^4)\lambda_t^3 + 7(1 + \sigma_t^2)\lambda_t^2 + \lambda_t. \quad (4.90)$$

On remarque que pour chaque $i = 1, \dots, 4$, $E(Y_t^i/\mathcal{F}_{t-1})$ est un polynôme en λ_t de degré i . Par conséquent, $E(Y_t^i/\mathcal{F}_{t-1}) < \infty$, $i = 1, \dots, 4$ si et seulement si $E(\lambda_t^i) < \infty$, $i = 1, \dots, 4$.

Pour montrer le reste de la proposition 4.1, on utilise le lemme suivant.

Lemme 4.2. *Soit l'équation aux récurrences ordinaire suivante*

$$y_t = a_t y_{t-1} + b_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.91)$$

où $(a_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ et $(b_t)_{t \in \mathbb{Z}}$ sont deux suite réelles positives périodiques de période $S \in \mathbb{N}^*$, i.e., $a_t = a_{t+nS}$, $b_t = b_{t+nS}$ pour tout $t \in \mathbb{Z}$, alors l'équation (4.91) admet une unique solution positive si et seulement si

$$\prod_{v=1}^S a_v < 1. \quad (4.92)$$

1) Par les relations (4.87) et (4.53), on trouve l'équation aux récurrences ordinaire suivante

$$E(\lambda_t) = (\alpha_t + \beta_t)E(\lambda_{t-1}) + \omega_t, \quad t \in \mathbb{Z}. \quad (4.93)$$

L'équation (4.93) est sous la forme (4.91), alors par le lemme 4.2, on déduit que l'équation (4.93) admet une unique solution positive si et seulement si la condition (4.69) est vérifiée.

2) Par les relations (4.87), (4.88) et (4.53), on trouve l'équation

$$E(\lambda_t^2) = ((\alpha_t + \beta_t)^2 + \sigma_{t-1}^2 \alpha_t^2)E(\lambda_{t-1}^2) + C_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.94)$$

où $C_t = (2\alpha_t \omega_t + 2\beta_t \omega_t + \alpha_t^2)E(\lambda_{t-1}) + \omega_t^2$ qui est finie si et seulement si $E(\lambda_{t-1}) < \infty$, i.e., si et seulement si la condition (4.69) est vérifiée. Maintenant, l'équation (4.94) est sous la forme (4.91), alors par le lemme 4.2, on déduit que l'équation (4.94) admet une unique solution positive si et seulement si les conditions (4.69) et (4.84) sont vérifiées. Remarquons que

$$\prod_{v=1}^S (\alpha_v + \beta_v)^2 + \sigma_{v-1}^2 \alpha_v^2 = \prod_{v=1}^S (\alpha_v + \beta_v)^2 + c,$$

où c est une quantité positive. Par conséquent, si la condition (4.84) est vérifiée, alors la condition (4.69) est vérifiée.

3) Par les relations (4.87), (4.89), (4.88) et (4.53), on trouve l'équation aux récurrences ordinaire suivante

$$E(\lambda_t^3) = ((\alpha_t + \beta_t)^3 + (3\sigma_{t-1}^2 + 2\sigma_{t-1}^4)\alpha_t^3 + 3\sigma_{t-1}^2 \alpha_t^2 \beta_t)E(\lambda_{t-1}^3) + C_t, \quad t \in \mathbb{Z}, \quad (4.95)$$

où

$$C_t = (3\alpha_t^3(1 + \sigma_{t-1}^2) + 3\alpha_t^2 \beta_t + 6\alpha_t \beta_t \omega_t + 3\beta_t^2 \omega_t + 3\alpha_t^2 \omega_t(1 + \sigma_{t-1}^2))E(\lambda_{t-1}^2) + (3\alpha_t^3(1 + \sigma_{t-1}^2) + 3\alpha_t \omega_t^2 + 3\beta_t \omega_t^2 + 3\alpha_t^2 \omega_t(1 + \sigma_{t-1}^2))E(\lambda_{t-1}) + \omega_t^3$$

qui est finie si et seulement si $E(\lambda_{t-1})$ et $E(\lambda_{t-1})^2$ sont finies, i.e., si et seulement si la condition (4.84) est vérifiée. Maintenant, l'équation (4.95) est sous la forme (4.91), alors par le lemme 4.2, on déduit que l'équation (4.95) admet une unique solution positive si et seulement si les conditions (4.84) et (4.85) sont vérifiées.

4) Par les relations (4.87), (4.88), (4.89), (4.90) et (4.53), on trouve l'équation aux récurrences ordinaire suivante

$$E(\lambda_t^4) = (\alpha_t + \beta_t)^4 + 6\alpha_t^2(\alpha_t + \beta_t)^2 \sigma_{t-1}^2 + \alpha_t^3(11\alpha_t + 8\beta_t)\sigma_{t-1}^4 + 6\sigma_{t-1}^6 \alpha_t^4)E(\lambda_{t-1}^4) + C_t, \quad (4.96)$$

où

$$\begin{aligned}
 C_t = & [12\alpha_t^3\beta_t(1 + \sigma_{t-1}^2) + 12\alpha_t^2\beta_t\omega_t(1 + \sigma_{t-1}^2) + 6\alpha_t^2\beta_t^2 + 4\beta_t^3\omega_t \\
 & + 4\alpha_t^3\omega_t(1 + 3\sigma_{t-1}^2 + 2\sigma_{t-1}^4) + 12\alpha_t^5\beta_t^2\omega_t(6 + 16\sigma_{t-1}^2 + 12\sigma_{t-1}^4)]E(\lambda_{t-1}^3) \\
 & + [7\alpha_t^4(1 + \sigma_{t-1}^2) + 12\alpha_t^3\omega_t(1 + \sigma_{t-1}^2) + 12\alpha_t^2\beta_t\omega_t + 6\beta_t^2\omega_t^2 \\
 & + 6\alpha_t^2\omega_t^2(1 + \sigma_{t-1}^2) + 12\alpha_t\beta_t\omega_t^2 + 4\alpha_t^3\beta_t]E(\lambda_{t-1}^2) \\
 & + [\alpha_t^4 + 4\alpha_t^3\omega_t + 6\alpha_t^2\omega_t^2 + 4\alpha_t\omega_t^3 + 4\beta_t\omega_t^3] + \omega_t^4.
 \end{aligned}$$

qui est finie si et seulement si $E(\lambda_{t-1}^3)$, $E(\lambda_{t-1}^2)$ et $E(\lambda_{t-1})$ sont finies, i.e., si et seulement si les conditions (4.84) et (4.85) sont vérifiées. Maintenant, l'équation (4.96) est sous la forme (4.91), alors par le lemme 4.2, on déduit que l'équation (4.96) admet une unique solution positive si et seulement si les conditions (4.84), (4.85) et (4.86) sont vérifiées.

4.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous avons proposé le modèle général $\text{INGARCH}(p, q)$ de Poisson double mélangé dans lequel l'intensité λ_t dépend de la variable du régime Δ_t et satisfait la représentation général $\text{INGARCH}(p, q)$. En particulier, nous avons étudié deux modèles particuliers, à savoir le modèle général $\text{INARCH}(\infty)$ de Poisson double mélangé et le modèle général $\text{INGARCH}(1, 1)$ de Poisson double mélangé, nous avons trouvé des conditions suffisantes assurant la stationnarité stricte, la dépendance faible et l'ergodicité de ces deux modèles. Notons que pour les modèles non linéaires de séries chronologiques à valeurs entières, un problème qui restait jusque là ouvert est celui de l'ergodicité qui n'est pas facile à établir et ceci due a la forme non linéaire du modèle. L'approche des Poissons mélangés que nous avons adoptée ne résout pas le problème pour toutes les distributions bien connues et ne fonctionne que pour $p = q = 1$ ou $p = 0, q = \infty$. Récemment, Aknouche et Francq [12] ont étudié l'ergodicité d'une classe très générale de modèles INGARCH linéaires ou non linéaires, d'ordres quelconques et pour une famille de distributions très large qui englobe la famille exponentielle et d'autres lois importantes qui ne figurent pas dans la famille exponentielle, il s'agit de la famille de lois dont l'ordre stochastique est régi par la moyenne, voir Aknouche et Francq [12] pour la définition de cette famille. Dans le cas périodique, nous avons proposé le modèle général $\text{INGARCH}(1, 1)$ de Poisson mélangé périodique et nous avons montré que sous une certaine condition de contraction périodique, ce modèle est strictement périodiquement stationnaire, faiblement périodiquement dépendant de moyenne finie et nous avons montré que lorsque les variables du mélange sont dégénérées en valeur un, ce modèle admet des moments finis de tout ordre. Notons qu'il est intéressant d'étudier le modèle général $\text{INGARCH}(p, q)$ de Poisson double mélangé périodique et les modèles particuliers correspondants, à savoir le modèle général $\text{INGARCH}(p, q)$ de Poisson mélangé périodique, le modèle général mélange $\text{INGARCH}(p, q)$ de Poisson périodique, le modèle général mélange $\text{INGARCH}(p, q)$ binomial négatif périodique.

Conclusion générale

Dans cette thèse, nous avons étudié l'équation stochastique $X_t = \psi_t(X_{t-1})$, $t \in \mathbb{N}$ lorsque ψ_t est une application affine aléatoire définie par $\psi_t(x) = A_t x + B_t$ avec $((A_t, B_t))_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite de variables aléatoires indépendantes périodiquement distribuées de période $S \in \mathbb{N}^*$. Dans ce cas unilatéral, nous avons montré que sous la condition que l'exposant de Lyapounov associé à la suite ipd $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est strictement négatif, le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par l'équation aux récurrences stochastique $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$, $t \in \mathbb{N}$ converge en distribution vers des variables aléatoires $\{X^{(v)}, 0 \leq v \leq S-1\}$, pour n'importe quelle variable aléatoire initiale X_0 indépendante de la suite $((A_t, B_t))_{t \in \mathbb{N}}$, qui vérifient les égalités en distributions $X^{(v)} = A_v X^{(v-1)} + B_v$ pour $v = 1, \dots, S-1$ et $X^{(0)} = A_0 X^{(S-1)} + B_0$. Nous avons montré que lorsque les variables initiales ont les mêmes distributions que les variables limites, le processus $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ défini par l'équation aux récurrence stochastique est strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique. En suite, nous avons montré que sous des conditions sur les moments d'un certain ordre pour les variables A_t et B_t , les variables limites ont des moments d'ordres supérieurs. Par ailleurs, nous avons étudié l'équation aux récurrence stochastique multidimensionnelle et bilatérale, nous avons montré que la condition suffisante pour l'existence et l'unicité d'une solution non-anticipative strictement périodiquement stationnaire et périodiquement ergodique est que l'exposant de Lyapounov associé à suite ipd $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ soit strictement négatif. Nous avons montré que sous l'hypothèse d'irréductibilité périodique de l'équation aux récurrence stochastiques, cette condition suffisante est aussi nécessaire.

Ensuite, nous avons étudié le comportement asymptotique des queues de la solution strictement périodiquement stationnaire et nous avons démontré que les S distributions marginales sont à variations régulières de même indice de variation. Nous avons appliqué nos résultats à certains modèles de séries temporelles périodiques. Ensuite, nous avons étudié les modèles GARCH(p, q) et ARCH(∞) périodiques, nous avons établi la stationnarité périodique stricte, la stationnarité périodique au second ordre et l'ergodicité périodique.

Enfin, nous avons étudié quelques modèles des séries temporelles à valeurs entières. Nous avons proposé le modèle général INGARCH(p, q) de Poisson double mélangé et nous avons montré que sous des conditions de contraction en moyenne, le modèle général INARCH(∞) de Poisson double mélangé et le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson double mélangé admettent des solutions strictement stationnaires faiblement dépendantes et ergodiques avec des moyennes finies. Nous avons étudié le modèle général INGARCH(1, 1) de Poisson mélangé périodique et nous avons montré que sous une certaine condition de contraction périodique, ce modèle admet une solution strictement périodiquement stationnaire, périodiquement ergodique et périodiquement faiblement dépendante de moyenne finie.

Le travail réalisé dans cette thèse comporte de nombreuses extensions possibles. Par exemple, nous allons étudier l'équation stochastique $X_t = \psi_t(X_{t-1})$, $t \in \mathbb{N}$ lorsque $(\psi_t)_{t \in \mathbb{N}}$ est une suite de fonctions Lipschitzienne indépendantes périodiquement distribuées. Nous cherchons des conditions suffisantes pour que $(X_t)_{t \in \mathbb{N}}$ converge en distribution et nous étudions le comportement asymptotiques des queues des distributions limites. Il est aussi très intéressant d'étudier l'équation aux récurrences stochastiques linéaire $X_t = A_t X_{t-1} + B_t$, $t \in \mathbb{N}$ lorsque les suites des coefficients $(A_t)_{t \in \mathbb{N}}$ et $(B_t)_{t \in \mathbb{N}}$ sont des chaînes de Markov périodiquement stationnaires et périodiquement ergodiques à espace d'états dénombrable ou à espace d'états continu.

Le chapitre 4 pourrait être complété par l'estimation des paramètres des modèles proposés par la méthode du quasi-maximum de vraisemblance et l'étude des propriétés asymptotiques de l'estimateur du QMV, par exemple la consistance et la normalité asymptotique. Une autre voie de recherche est d'étudier quelques modèle de séries temporelles à valeurs entières, par exemple le modèle général INGARCH(p, q) de Poisson double mélangé pour $p, q \geq 1$ et pour $p = q = \infty$, le modèle général mélange INGARCH(p, q) binomial négatif, le modèle général INGARCH(p, q) de Poisson double mélangé périodique, le modèle général INGARCH(p, q) de Poisson mélangé périodique, le modèle général mélange INGARCH(p, q) de Poisson périodique, le modèle général mélange INGARCH(p, q) binomial négatif périodique.

Bibliographie

- [1] Ahmad, A. (2016). *Contribution à l'économétrie des séries temporelles à valeurs entières*. PhD thesis, Université de Lille 3.
- [2] Ahmad, A., and Francq, C. (2016). Poisson QMLE of count time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **37**, 291-314.
- [3] Aknouche, A. (2017). Periodic autoregressive stochastic volatility. *Stat Inference Stoch Process*, **20**, 139-177.
- [4] Aknouche, A. (2015). Explosive strong periodic autoregression with multiplicity one, *Journal of Statistical Planning and Inference*, **161**, 50-72.
- [5] Aknouche, A. (2014). Quadratic random coefficient autoregression with linear-in-parameters volatility. *Stat Inference Stoch Process*, **18**, 99-125.
- [6] Aknouche, A. (2014). *Modèles de séries chronologiques homogènes et périodiquement homogènes : stabilité, inférence et applications*. Mémoire d'habilitation à diriger des recherches (HDR), universite de Lille 3.
- [7] Aknouche, A. (2013). Recursive online EM estimation of mixture autoregressions. *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **83**, 370-383.
- [8] Aknouche, A. (2012). Multistage weighted least squares estimation of ARCH processes in the stable and unstable cases, *Stat Inference Stoch Process*, **15**, 241-256.
- [9] Aknouche, A. (2007). Causality conditions and autocovariance calculations in PVAR models, *Journal of Statistical Computation and Simulation*, **77**, 769-780.
- [10] Aknouche, A., and Demmouche, N. (2019). Ergodicity conditions for a double mixed Poisson autoregression. *Statistics and Probability Letters*, **147**, 1-6.
- [11] Aknouche, A., and Demmouche, N. (2018). On the stability of stochastic recurrence equations with periodically stationary inputs. Working paper.
- [12] Aknouche, A. et Francq, C. (2018). Count and duration time series with equal conditional stochastic and mean orders. MPRA 90838.
- [13] Aknouche, A., and Al-Eid, E. (2012). Asymptotic inference of unstable periodic ARCH processes. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **15**, 61-79.
- [14] Aknouche, A., Al-Eid, E., and Demouche, N. (2017). Generalized quasi-maximum likelihood inference for periodic conditionally heteroskedastic models. *Statistical Inference for Stochastic Processes*, **21**, 485-511.
- [15] Aknouche, A., and Bibi, A. (2009). Quasi-maximum likelihood estimation of periodic GARCH and periodic ARMA-GARCH processes. *Time Series Analysis*, **30**, 19-46.
- [16] Aknouche, A., and Bentarzi, M. (2008). On the existence of higher-order moments of periodic GARCH models. *Statistics and Probability Letters*, **78**, 3262-3268.
- [17] Aknouche, A., Bentarzi, W., and Demouche, N (2018). On periodic ergodicity of a general periodic mixed Poisson autoregression. *Statistics and Probability Letters*, **134**, 15-21.

- [18] Aknouche, A., and Guerbyenne, H. (2009). On some probabilistic properties of double periodic AR models. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 407-413.
- [19] Aknouche, A., and Guerbyenne, H. (2009). Periodic stationarity of random coefficient periodic autoregressions. *Statistics and Probability Letters*, **79**, 990-996.
- [20] Aknouche, A., and Bentarzi, W. (2014). Stability analysis of the first-order periodic autoregressive diagonal bilinear model. *Random Oper. Stoch. Equ.*, **22**, 139-150.
- [21] Aknouche, A., Bendjeddou, S., and Touche, N. (2017). Negative Binomial Quasi-Likelihood Inference for General Integer-Valued Time Series Models. *Journal time series analysis*, 1-20.
- [22] Aknouche, A., and Rabehi, N. (2010). On an independent and identically distributed mixture bilinear time series model. *Journal of Time Series Analysis*, **31**, 113-131.
- [23] Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiß, J. P. and Mikosch, T. (2009). *Handbook of Financial Time Series*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [24] Aue, A. (2006). Testing for parameter stability in RCA(1) time series. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **136**, 3070-3089.
- [25] Aue, A., Horváth, L. and Steinebach, J. (2007). Estimation in random coefficient autoregressive models. *Time Series Analysis*, **27**, 61-76.
- [26] Babillot, M., Bougerol, P., and Elie, L. (1997). The random difference equation $X_n = A_n X_{n-1} + B_n$ in the critical case. *The Annals of Probability*, **25**, 478-493.
- [27] Basrak, B. (2000). *The sample autocorrelation function of non-linear time series*. PhD thesis, University of Groningen.
- [28] Basrak, B., Davis, R. A., and Mikosch, T. (1999). The sample ACF of a simple bilinear process. *Stochastic Processes and their Applications*, **83**, 1-14.
- [29] Basrak, B., Davis, R. A., and Mikosch, T. (2002). A characterization of multivariate regular variation. *Anna. Appl. Probab.*, **12**, 908-920.
- [30] Basrak, B., Davis, R. A., and Mikosch, T. (2002). Regular variation of GARCH processes. *Stochastic. Process. Appl.*, **99**, 95-115.
- [31] Bentarzi, M., and Bentarzi, W. (2017). Periodic integer-valued GARCH (1, 1) model. *Communications in Statistics-Simulation and Computation*, **47**, 1167-1188.
- [32] Berkes, I., Horváth, L., and Kokoszka, P. (2003a) GARCH processes : structure and estimation. *Bernoulli*, **9**, 201-227.
- [33] Berkes, I., Horváth, L., and Ling, S. (2009). Estimation in nonstationary random coefficient autoregressive models. *Time Series Analysis*, **30**, 395-416.
- [34] Bibi, A. and Aknouche, A. (2008). On periodic GARCH Processes : Stationarity, existence of moments and geometric ergodicity. *Mathematical Methods of Statistics*, **17**, 305-316.
- [35] Bibi, A. and Aknouche, A. (2010). Stationnarité et β -mélange des processus bilinéaires généraux à changement de régime markovien. *C. R. Acad. Sci. Paris*, **348**, 185-188.
- [36] Billingsley, P. (1965) *Ergodic theory and information*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [37] Billingsley, P. (1968) *Convergence of probability measures*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [38] Billingsley, P. (1968) *Probability and Measure*, third edition. John Wiley and Sons, Inc., New York.

- [39] Bingham, N. H., Goldie, C. M., and Teugels, J. L. (1987). *Regular variation*. Cambridge University Press, Cambridge.
- [40] Bollerslev, T. (1986). Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity. *Journal of Econometrics*, **31**, 307-327.
- [41] Bougerol, P. and Picard, N. (1992a). Strict stationarity of generalized autoregressive processes. *The Annals of Probability*, **20**, 1714-1730.
- [42] Bougerol, P., and Picard, N. (1992b). Stationarity of GARCH processes and some nonnegative time series. *Journal of Econometrics*, **52**, 115-127.
- [43] Bougerol, P., and Lacroix, J. (1985). *Products of random matrices with applications to Schrodinger operators*. Progress in Probability and Statistics Vol. 8., Boston.
- [44] Bougerol, P. (1987). Tightness of products of random matrices and stability of linear stochastic systems. *The Annals of Probability*, **15**, 40-74.
- [45] Boyles, R. A., and Gardner, W. A. (1983). Cycloergodic properties of discrete-parameter nonstationary stochastic processes. *IEEE, Trans. Infor. Theory*, **29**, 105-114.
- [46] Brandt, A. (1986). The stochastic equation $X_{n+1} = A_n X_n + B_n$ with stationary coefficients. *Advances in Applied Probability*, **18**, 211-220.
- [47] Breiman, L. (1968) *Probability*. Addison-Wesley Publishing Company, Inc., Reading, Massachusetts.
- [48] Breiman, L. (1965). On some limit theorems similar to the arc sin law. *Theory of Probability and Its Applications* , **10**, 323-331.
- [49] Christou, V. and Fokianos, K. (2014). Quasi-likelihood inference for negative binomial time series models. *Journal of Time Series Analysis*, **35**, 55-78.
- [50] Christou, V. (2013). *Statistical theory for mixed Poisson time series models*. PhD thesis, University of Cyprus.
- [51] Christou, V., and Fokianos, K. (2015). Estimation and testing linearity for non-linear mixed Poisson autoregressions. *Electronic Journal of Statistics*, **9**, 1357-1377.
- [52] Cox, D. R., Hinkley, D. V., and Barndorff-Nielsen, O. E. (1996). *Time Series Models In econometrics, finance and other fields* . Springer-Science and Business Media.
- [53] Cox, D. R., Gudmundsson, G., Lindgren, G., Bondesson, L., Harsaae, E., Laake, P., Juselius, K., and Lauritzen, S. L. (1981). Statistical analysis of time series : some recent developments. *Scandinavian Journal of Statistics*, **8**, 93-115.
- [54] Davis, R. A., Holan, S. H., Lund, R., and Ravishanker, N. (2016). *Handbook of Discrete-Valued Time Series*. Chapman and Hall/CRC, New York.
- [55] Davis, R. A., and Resnick, S. I. (1996). Limit theory for bilinear processes with heavy-tailed noise. *Anna. Appl. Probab*, **6**, 1191-1210.
- [56] Davis, R. A., and Mikosch, T. (1998). The sample autocorrelations of heavy-tailed processes with applications to ARCH. *Annals of statistics*, **26**, 2049-2080.
- [57] Davis, R. A., and Mikosch, T. (2009). Extreme Value Theory for GARCH Processes. In T.G. Andersen, R.A. Davis, J.P. Kreiss and T. Mikosch (eds), *Handbook of Financial Time Series*. Springer-Verlag, Berlin.
- [58] Davis, R. A., Dunsmuir, W., and Streett, S. (2003). Observation-driven models for Poisson counts. *Biometrika*, **90**, 777-790.
- [59] Davis, R. A., Dunsmuir, W., and Streett, S. (2005). Maximum Likelihood Estimation for an Observation Driven Model for Poisson Counts. *Methodology and Computing in Applied Probability*, **7**, 149-159.

- [60] Dedecker, J., Doukhan, P., Lang, G., León, J. R., Louhichi, S., Prieur, C. (2007). *Weak dependence : with examples and applications*. vol 190. Lecture Notes in Statistics. Springer, New York
- [61] Dedecker, J., and Prieur, C., (2004). Coupling for τ -dependent sequences and applications. *Journal of Theoretical Probability*, **17**, 861-885.
- [62] de Saporta, B. (2004). *Etude de la solution stationnaire de l'equation $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ à coefficients aléatoires*. PhD thesis, Université de Rennes 1.
- [63] de Saporta, B. (2005). Tail of the stationary solution of the stochastic $Y_{n+1} = A_n Y_n + B_n$ with Markovian coefficients. *Stochastic Processes and their Applications*, **115**, 1954-1978.
- [64] de Saporta, B. (2003). Renewal theorem for a system of renewal equations. *Ann. I. H. Poincaré*, **5**, 823-838.
- [65] Diop, M. L., Diop, A., and Diongue, A. K. (2018). A negative binomial mixture integer-valued GARCH model. *Afrika Statistika*, **13**, 1645-1666.
- [66] Diop, M.L., Diop, A., and Diongue, A. K. (2016). A mixture integer-valued GARCH model. *REVSTAT – Statistical Journal*, **14**, 245-271.
- [67] Doukhan, P., and Wintenberger, O. (2008). Weakly dependent chains with infinite memory. *Stochastic Processes and their Applications*, **118**, 1997-2013.
- [68] Doukhan, P., and Wintenberger, O. (2007). An invariance principle for weakly dependent stationary general models. *Probability and Mathematical Statistics*, **1**, 45-73.
- [69] Doukhan, P., and Louhichi, S. (1999). A new weak dependence condition and applications to moment inequalities. *Stochastic Processes and their Applications*, **84**, 313-342.
- [70] Doukhan, P., Latour, A., and Oraichi, D. (2006). A simple integer-valued bilinear time series model. *Advances in Applied Probability*, **38**, 559-578.
- [71] Doukhan, P., Fokianos, K., and Tjøstheim, D. (2012). On weak dependence conditions for Poisson autoregressions. *Statistics and Probability Letters*, **82**, 942-948.
- [72] Embrechts, P., Kluppelberg, C., and Mikosch, T. (1997). *Modelling extremal events for insurance and finance*. Springer-Verlag, New York.
- Engle, R. F. (1982). Autoregressive conditional heteroscedasticity with estimates of the variance of United Kingdom inflation. *Econometrica*, **50**, 987-1008.
- [73] Ferland, R., Latour, A., and Oraichi, D. (2006). Integer-valued GARCH process. *Journal of Time Series Analysis*, **27**, 923-942.
- [74] Feller, W. (1971). *An introduction to probability theory and its applications*. Vol. II. Second edition. John Wiley and Sons Inc., New York.
- [75] Fokianos, K. (2012). Count time series. In Rao, T. S., Rao, S. S., and Rao, C. R., *Handbook of Financial of statistics : Times series analysis-methods and applications*, pp. 315-347. Elsevier, B. V., Amsterdam.
- [76] Fokianos, K., Rahbek, A., and Tjøstheim, D. (2009). Poisson autoregression. *Journal of the American Statistical Association*, **140**, 1430-1439.
- [77] Fokianos, K., and Tjøstheim, D. (2009). Log-linear Poisson autoregression, *Manuscript*.
- [78] Francq, C., and Zakoian, J. M. (2008). Deriving the autocovariances of powers of Markov-switching GARCH models, with applications to statistical inference. *Comput. Statist. Data Anal*, **52**, 3027-3046.

- [79] Francq, C., and Zakoïan, J. M. (2013). Optimal predictions of powers of conditionally heteroskedastic processes. *Royal Statistical Society*, **75**, 345-367.
- [80] Francq, C., and Zakoïan, J. M. (2009). A tour in the asymptotic theory of GARCH estimation. In T.G. Andersen, R.A. Davis, J.P. Kreiss and T. Mikosch (eds), *Handbook of Financial Time Series*. Springer-Verlag, Berlin.
- [81] Francq, C., and Zakoïan, J. M. (2004). Maximum likelihood estimation of pure GARCH and ARMA-GARCH processes. *Bernoulli*, **10**, 605-637.
- [82] Francq, C., and Zakoïan, J. M. (2010). *GARCH Models, Structure, Statistical inference and nancial applications*. John Wiley and Sons, Ltd., Publication.
- [83] Furstenberg, H., and Kesten. H. (1960). Products of random matrices. *Annals of Mathematical Statistics*, **31**, 457-469.
- [84] Fryzlewicz, P., and Rao, S. S. (2011). Mixing properties of ARCH and time-varying ARCH processes. *Bernoulli*, **17**, 320-346.
- [85] Giraitis, L., Leipus, R., Robinson P.M., and Surgailis, D. (2004). LARCH, leverage and long memory. *Financial econometrics*, **2**, 177-210.
- [86] Giraitis, L., and Surgailis, D. (2002). ARCH-type bilinear models with double long memory. *Stochastic Processes and their Applications*, **100**, 275-300.
- [87] Giraitis, L., Kokoszka, P., and Leipus, R. (2000). Stationary ARCH models : Dependences structure and central limit theorem. *Econometric Theory*, **16**, 3-22.
- [88] Giraitis, L., Robinson, P. M., and Surgailis, D. (2000). A model for long memory conditional heteroscedasticity. *The Annals of Applied Probability*, **10**, 1002-1024.
- [89] Giraitis, L., Surgailis, D., and Skarnulis, A. (2017). Stationary integrated ARCH(∞) and AR(∞) processes with finite variance. *Econometric Theory*, **34**, 1159-1179.
- [90] Giraitis, L., Leipus, R., and Surgailis, D. (2007). Recent advances in ARCH modelling. In Teyssière, G. and Kirman, A. P., *Long Memory in Economics*, pp. 3-38. Springer-Verlag, New York.
- [91] Giraitis, L., Leipus, R., and Surgailis, D. (2009). ARCH(∞) models and long memory properties. In Andersen, T. G., Davis, R. A., Kreiss, J. P. and Mikosch, T., *Handbook of Financial Time Series*, pp. 71-84. Springer-Verlag, New York.
- [92] Giraitis, L., Leipus, R., and Surgailis, D. (2007). Aggregation of the random coefficient GLARCH (1,1) process. *Econometric Theory*, **26**, 406-425.
- [93] Goldie, C. M. (1991). Implicit renewal theory and Tails of solutions of random equations. *The Annals of Applied Probability*, **1**, 126-166.
- [94] Goldie, C. M. and Maller, R. A. (2000). Stability of perpetuities. *The Annals of Probability*, **28**, 1195-1218.
- [95] Gonçalves, E., Mendes-Lopes, N., and Silva. F. (2015). Infinitely Divisible Distributions in Integer-Valued Garch Models. *Journal of Time Series Analysis*, 2015, **36**, 503-527.
- [96] Grey, D. R. (1994). Regular variation in the tail behaviour of solutions of random difference equations. *The Annals of Applied Probability*, **4**, 169-183.
- [97] Grincevičius, A. K.(1981). Products of random affine transformations. *Litovsk. Mat. Sbornik*, **20** 279-282.
- [98] Grincevičius, A. K.(1982). A random difference equation. *Litovsk. Mat. Sbornik*, **21**, 57-64.

- [99] Haas, M., Mittnik, S., and Paollela, M. S. (2004). A new approach to Markov-Switching GARCH models. *Journal Finance Economic*, **4**, 493-530
- [100] Halmos, P. (1950). *Measure Theory*. Springer-Verlag, New York.
- [101] Hult, H., Lindskog, F., Mikosch, T., and Samorodnitsky, G. (2005). Functional large deviations for multivariate regularly varying random walks. *The Annals of Applied Probability*, **15**, 2651–2680
- [102] Jain, G. C., and Consul, P. C. (1971). A generalized negative binomial distribution. *siam Journal on Applied Mathematics*, **21**, 501-513.
- [103] Kazakevicius, V., and Leipus, R. (2002). On Stationarity in the ARCH(∞) model. *Econometric Theory*, **18**, 1-16.
- [104] Kazakevicius, V., Leipus, R., and Viano, M. C. (2004). Stability of random coefficient ARCH models and aggregation schemes. *Econometrics*, **120**, 139-158.
- [105] Kesten, H. (1973). Random difference equations and renewal theory for products of random. *Acta Mathematica*, **131**, 207-248.
- [106] Kesten, H. (1974). Renewal theory for functionals of markov chain with general stat space. *The Annals of Probability*, **2**, 355-386.
- [107] Kesten, H., and Spitzer, F. (1984). Convergence in Distribution of Products of Random Matrices. *Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Gebiete*, **67**, 363-386.
- [108] Kingman, J. F. C. (1973). Subadditive ergodic theory. *The Annals of Probability*, **2**, 883-909.
- [109] Kokoszka, P., and Leipus, R. (2000). Change-point estimation in ARCH models. *Bernoulli*, **6**, 513-539.
- [110] Konstantinides, D. G., and Mikosch, T. (2005). Large deviations and ruin probabilities for solutions to stochastic recurrence equations with heavy-tailed innovations. *The Annals of Probability*, **33**, 1992-2035.
- [111] Korolov, L. B., and Sinai, Y. G. (2000) *Theory of probability and random processes*, second edition. Springer-Verlag, New York.
- [112] Leipus, R., and Surgailis, D. (1973). Random coefficient autoregression, regime switching and long memory. *Advances in Applied Probability*, **35**, 737-754.
- [113] Leipus, R., and Viano, M.C. (2000). Modelling long-memory time series with finite or infinite variance : A general approach. *Time Series Analysis*, **21**, 61-74.
- [114] Loève, M. (1977). *Probability Theory* 1, 4th ed. Springer-Verlag Inc., New York.
- [115] Marque, S. (2003). *Prise en compte de la surdispersion par des modèles à mélange de Poisson*. PhD thesis, Université de Bordeaux 2.
- [116] Mikosch, T., and Starica, C. (2000). Limit theory for the sample autocorrelations and extremes of GARCH(1,1) process. *The Annals of Statistics*, **28**, 1427-1451.
- [117] Mikosch, T. (2009). *Non-Life Insurance Mathematics : An Introduction with the Poisson Process*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- [118] Nelson, D. B. (1990). Stationarity and persistence in the GARCH (1,1) model. *Econometric Theory*, **6**, 318-334.
- [119] Nicholls, F. and Quinn, B. G. (1982). *Random coefficient autoregressive models : An Introduction*. Springer-Verlag, New York.
- [120] Petrov, V. V. (1995). *Limit Theorems of Probability Theory : Sequences of Independent Random Variables*. Oxford University Press Inc., New York.

- [121] Petrov, V. V. (1975). *Sums of independent random variables*. Springer-Verlag, New York.
- [122] Prieur, C. (2002). Applications statistiques de suites faiblement dépendantes et de systèmes dynamiques. PhD thesis, Université de Cergy-Pontoise.
- [123] Pruitt, W. E. (1981). General one-sided laws of the iterated logarithm. *The Annals of Probability*, **9**, 1-48.
- [124] Quinn, B. G. (1982). A note on the existence of strictly stationary solutions to bilinear equations. *Time series analysis*, **3**, 249-252.
- [125] Quinn, B. G., and Nicholls, F. (1981). The Stability of Random Coefficient Autoregressive Models. *International Economic Review*, **22**, 741-744.
- [126] Resnick, S. I. (1992) *Adventures in stochastic processes*. Birkhäuser, Boston.
- [127] Resnick, S. I. (1987) *Extreme Values, Regular Variation, and Point Processes*. Springer-Verlag, New York.
- [128] Resnick, S. I. (2006) *Probabilistic and Statistical Modeling of Heavy Tailed Phenomena*. Springer-Verlag, New York.
- [129] Robinson, P. M. (1991) Testing for strong serial correlation and dynamic conditional heteroskedasticity in multiple regression. *Journal of Econometrics*, **47**, 67-84.
- [130] Rossi, E. (2006) *Lecture notes on GARCH models*. University of Pavia.
- [131] Rydberg, T. H., and Shephard, N. (2000). BIN models for trade-by-trade data. Modelling the number of trades in a fixed interval of time. In World Conference Econometric Society. *Contributed Paper* 0740.
- [132] Scotto, M.G., and Turkman, K. F. (2002) On the extremal behavior of subsampled solutions of stochastic difference equations. *Portugaliae mathematica.*, **59**, 267-282.
- [133] Straumann, D., and Mikosch, T. (2006). Quasi-maximum-likelihood estimation in conditionally heteroscedastic time series : A stochastic recurrence equations approach. *The Annals of Statistics*, **34**, 2449-2495.
- [134] Straumann, D. (2004). *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*. Springer-Verlag, Zürich, Switzerland.
- [135] Streett, S. (2008). *Some observation driven models for time series of counts*, PhD Thesis, Colorado State University.
- [136] Tsay, R. S. (2002) *Analysis of financial time series*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [137] Tsay, R. S. (2005) *Analysis of financial time series*, second edition. John Wiley and Sons, Inc., New Jersey.
- [138] Vervaat, W. (1979). On a stochastic difference equation and a representation of non negative infinitely divisible random variables. *Advances in Applied Probability*, **11**, 750-783.
- [139] Weiß, C. H. (2009). Modelling time series of counts with overdispersion. *Statistical Methods and Applications*, **18**, 507-519.
- [140] Weiss, C. H. (2018). *An Introduction to Discrete-Valued Time Series*. John Wiley and Sons, Inc., New York.
- [141] Wintenberger, O. (2007). *Utilisation des notions de dépendance faible en statistique*. PhD thesis, Université de Paris 1.

- [142] Zhu, F. (2012c). Zero-inflated Poisson and negative binomial integer-valued GARCH models. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **142**, 826-839.
- [143] Zhu, F. (2012a). Modeling overdispersed or underdispersed count data with generalized poisson integer-valued garch models. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, **389**, 58-71.
- [144] Zhu, F. (2011). A negative binomial integer-valued GARCH model. *Journal of Time Series Analysis*, **32**, 54-67.
- [145] Zhu, F., Li, Q., and Wang, D. (2010). A mixture integer-valued ARCH model. *Journal of Statistical Planning and Inference*, **14**, 2025-2036.