

RÉPUBLIQUE ALGÉRIENNE DÉMOCRATIQUE ET POPULAIRE

Ministère de l'Enseignement Supérieur et de la Recherche Scientifique

Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene

Faculté de Mathématiques



THÈSE DE DOCTORAT

Présentée pour l'obtention du grade de DOCTEUR EN SCIENCES

En : MATHÉMATIQUES

Spécialité : Recherche Opérationnelle

Par : BESSOUF Ouahiba

Thème

**STRUCTURES ALGÈBRIQUES DE
PRÉFÉRENCES**

Soutenue publiquement le 13/10/2018, devant le jury composé de :

BERRACHEDI	Abdelhafid	Professeur à l'USTHB	Président
KHELLADI	Abdelkader	Professeur à l'USTHB	Directeur de Thèse
AIDER	Meziane	Professeur à l'USTHB	Examineur
BLIDIA	Mostafa	Professeur à l'USDB	Examineur
CHELLALI	Mustapha	Professeur à l'USDB	Examineur
SADI	Bachir	Maître de conférences/A à l'UMMTO	Examineur

Remerciements

Je tiens à exprimer toute ma gratitude et ma reconnaissance à mon directeur de thèse, le Professeur Abdelkader KHELLADI, pour ses compétences, son soutien et sa patience durant toutes les années de préparation de ma thèse.

J'adresse mes remerciements les plus sincères et chaleureuses au Pr. Thomas ZASLAVSKY avec qui j'ai pu finaliser mes travaux présentés dans cette thèse. Je lui exprime ma gratitude pour m'avoir accordé de son temps, distingué de ses conseils et suivis. Je ne puisse oublier de remercier également le Journal RAIRO, grâce à laquelle j'ai pu avoir l'opportunité de travailler avec le Professeur Thomas ZASLAVSKY.

J'adresse mes remerciements les plus sincères également à Alexis TSOUKIAS avec qui j'ai pu réaliser des résultats présentés dans cette thèse. Je lui témoigne toute ma gratitude pour m'avoir accueilli dans son laboratoire LAMSADE à l'université Paris Dauphine et m'avoir accordé de son temps au cours de mes stages. Je remercie également Mme Meltem OZTURK du laboratoire LAMSADE pour sa précieuse collaboration.

Mes vifs remerciements s'adressent aux membres du jury Pr. Abdelhafid BERRACHEDI pour l'honneur qu'il me fait de présider le jury, Pr. Meziane AIDER, Pr. Mostafa BLIDIA, Pr. Mustapha CHELLALI et Pr. Bachir SADI qui ont bien voulu examiner ce travail.

Je ne cesse d'exprimer ma reconnaissance envers le Professeur Abdelhafid BERRACHEDI pour le soutien moral et les vives réactions envers la finalisation de cette thèse. Un grand merci à Mme Hafida GUERBIENE pour sa gentillesse et ses prières.

Je remercie également mes collègues du département de recherche Opérationnelle qui m'ont soutenue, et spécialement Isma BOUCHEMAKH et Mohamed YAGOUNI pour leurs conseils et ses encouragements.

Je tiens aussi à exprimer ma gratitude à Nawel KAHOUl de m'avoir aidée à rédiger mes papiers en LATEX, et pour sa disponibilité.

Je ne peux oublier de remercier mes collègues et amis : Kahina, Merieme, Siham, Nacera, Fadila, Aicha , . . . , merci pour votre soutien moral.

Je ne peux évidemment terminer sans remercier toute ma famille et en particulier : ma mère, ma sœur Amel, mes frères, mes nièces et mes neveux.

Merci à tous

Dédicaces

Je dédie ce travail à la mémoire de mon très cher père

” **Ammi Ahmed** ” *Allah yerrahmou*

Et à mes très chères filles **SARRA** et **RANIA**.

TABLE DES MATIÈRES

INTRODUCTION	7
CHAPITRE 1	10
1 Généralités sur les graphes non-orientés et les graphes orientés	11
1.1 Définitions et concepts de base	11
1.1.1 Notion non-orientée	11
1.1.2 Notion orientée	12
1.1.3 Définitions et résultats	12
2 Définitions et concepts de base des graphes signés et des graphes biorientés . . .	14
2.1 Graphes signés	14
2.2 Graphes biorientés	17
2.3 Graphes biorientés équilibrés	18
2.4 Graphe signé sous-jacent à un graphe biorienté	20
2.5 Réorienter une arête d'un graphe biorienté	20
2.6 Les graphes biorientés b-complets	21
3 Généralités sur les matroïdes	22
3.1 Définitions et notations	22
3.2 Caractérisation des matroïdes	22
3.2.1 Circuits de M :	22
3.2.2 Bases de M	23
3.2.3 Rang de M	23
3.3 Sur la connexité des matroïdes	23
3.4 Matroïde des cycles d'un graphe	24
3.4.1 Conséquences directes	24
3.4.2 Matroïdes des graphes signés (biorientés)	24
3.4.3 Conséquence de la caractérisation des circuits définis par Zaslavsky	26

3.5	Connexité des graphes signés	27
3.6	Composantes Frame connexes et Composantes Lift connexes	27
3.7	Rang du matroïde d'un graphe signé	28
3.8	Les isthmes d'un matroïde d'un graphe signé	29
CHAPITRE 2		32
1	La S -connexité dans les graphes signés	33
1.1	La connexité	33
1.2	S -chaîne; S -cycle	34
1.3	Connexité des graphes signés	37
1.4	$\mathbf{S}$ -isthme; $\mathbf{S}$ -sommet d'articulation; $\mathbf{S}$ -bloc	39
1.5	$\mathbf{S}$ -connexité; Frame connexité; Lift connexité	41
1.6	Les graphes signés sans cycles positifs	42
1.7	Connexité positive et connexité négative	44
2	La b -connexité dans les graphes biorientés.	46
2.1	b -chemin; b -circuit	46
2.2	b -connexité	50
CHAPITRE 3		54
1	La fermeture transitive dans les graphes	55
1.1	La Fermeture Transitive dans les Graphes Orientés	55
1.2	Construction	58
1.3	La Fermeture Transitive Dans les Graphes Biorientés	59
1.4	Commutation sur un sommet	66
1.5	La Fermeture Transitive et les graphes frame connexes	68
1.6	La frame-Cohérence et la Fermeture Transitive des graphes biorientés . .	73
2	La réduction transitive dans les graphes	74
2.1	La Réduction Transitive dans Les Graphes Orientés	74
2.2	La Réduction Transitive dans les Graphes Biorientés	75
2.3	La Réduction Transitive et les graphes frame connexes	81
2.4	La Réduction Transitive dans les graphes biorientés frame-Cohérents . .	82

2.5	La fermeture Transitive - La réduction transitive	83
CHAPITRE 4		86
1	Le principe d'incertitude	87
2	Définition (axiome)	87
2.1	Description	88
3	Relation d'ordre	88
3.1	Définitions et exemples	88
3.2	Exemples et contre-exemples	89
3.3	Diagramme de Hasse	89
4	Définitions Algébriques	91
4.1	Quelques lois usuelles	91
4.2	Treillis	91
4.2.1	Propriétés des treillis	92
5	L'algèbre de Boole ou calcul booléen	93
5.1	Algèbre de Boole des valeurs de vérité	93
5.2	Algèbre de Boole (structure)	94
6	La modélisation de préférence - La logique quadrivalente	94
6.1	Introduction	94
6.2	L'idée de Belnap	95
6.3	La logique DDT (la logique quadrivalente)	97
6.4	La logique DDT et la modélisation de préférence	98
7	La relation entre les graphes biorientés et la logique quadrivalente	100
7.1	L'outil graphique dans la logique DDT	101
7.2	Discussion (L'analyse des résultats précédents)	104
8	Fermatures transitives directes et indirectes dans les graphes biorientés orientés .	106
8.1	Fermatures transtives dans les graphes biorientés (G_{τ}, S)	106
8.2	Cheminement dans les graphes biorientés orientés (G_{τ}, S)	109
CONCLUSION		111
BIBLIOGRAPHIE		113

INTRODUCTION

INTRODUCTION

Les mathématiques ont pour but de résoudre des problèmes de divers aspects, cette vocation est affirmée par les plus grands mathématiciens, et elle doit se réaliser autant de l'enseignement qu'à celui de la recherche.

Vu la complexité des problèmes par lesquels l'homme est confronté dans la vie courante, il est rare qu'on puisse les modéliser par un modèle numérique. En effet, un modèle numérique revient à supposer que cette réalité est approximativement isomorphe à une structure numérique, et possède des propriétés équivalentes aux propriétés de cette structure, ce qui est rarement vrai. Il faut donc recourir à des structures non numériques, en particulier à des structures mathématiques assez pauvres, dont quelques propriétés seront facilement détectées dans la réalité étudiée.

La théorie des graphes est l'un des moyens de manipuler certaines de ces structures pauvres.

” Un dessin vaut mieux qu'un discours ”; c'est un réflexe naturel qui pousse à abstraire une situation donnée en traçant, sur une feuille, des points reliés entre eux par des lignes symbolisant une certaine relation. Cette représentation fournit une vision globale du problème, ce qui constitue un guide précieux pour l'intuition et le raisonnement.

La théorie des graphes a eu un développement bien étrange depuis 1876; d'abord apparue dans le magasin des curiosités mathématiques (les ponts de Königsberg), puis devenue un outil pour l'étude des circuits électriques (Kirchoff), elle a été utilisée par la chimie, la psychosociologie et l'économie avant même d'avoir été constituée.

Outre les graphes non orientés et orientés, notre travail est basé essentiellement sur deux classes de graphes, *la classe des graphes signés* et celle *des graphes biorientés*. De nouvelles notions sont introduites pour cette catégorie de graphes.

Il s'agit des notions de cheminement, de connexité, de fermeture transitive et de celle de réduction transitive dans les graphes biorientés. Nous utilisons une logique non classique, appelée la logique DDT (P. Doherty, D. Driankov, A. Tsoukias). C'est une logique quadrivalente (i.e. elle admet 4 valeurs de vérité), les quatre valeurs sont : vraie (t), faux (f), vraie et faux (k), ni vraie ni faux (u). Dans cette perspective la négation ne coïncide pas avec le complémentaire et les raisons pour lesquelles une expression peut être considérée comme vraie ne sont pas le complémentaire des raisons pour lesquelles elle peut être considérée comme fausse.

F. Harary [25] définit en 1954 la notion des graphes signés, un graphe dont chaque arête est munie d'un signe +1 ou -1.

Un graphe biorienté est un graphe dont chaque arête est considérée comme un ensemble de deux demi-arêtes, chaque demi-arête du graphe étant munie d'un signe +1 et -1. Cette notion a déjà été étudiée depuis longtemps par de nombreux mathématiciens dans la théorie de l'homologie et la topologie algébrique. Dans les années cinquante, l'aspect purement combinatoire des graphes biorientés est réaffirmé. A tout graphe biorienté on peut associer un graphe signé (comme un graphe sous-jacent). Réciproquement, à tout graphe signé on peut lui associer un graphe biorienté (n'est pas unique).

On parlera aussi dans cette thèse de la notion de matroïde. H. Whitney [54] fût le premier en 1935, à avoir utilisé ce concept dans le but de généraliser les notions fondamentales de l'Algèbre linéaire, telles que l'indépendance, les bases et les parties génératrices. La correspondance entre les concepts de l'Algèbre linéaire et ceux de la théorie des graphes donna naissance à la théorie des matroïdes.

Ce document est composé de quatre chapitres dont voici une description.

Dans le premier chapitre, le lecteur trouvera un rappel de définitions fondamentales des graphes considérés dans ce travail : graphes non-orientés graphes orientés, graphes biorientés et les graphes signés, ainsi on donne quelques définitions et résultats originaux concernant les matroïdes associés aux graphes utilisés dans ce travail, qui seront utiles dans la suite.

Le second chapitre est composé de deux parties.

La première partie a pour objet de donner une définition du cheminement dans les graphes signés, ainsi nous donnons également une nouvelle notion de S-connexité dans ces graphes. On montre aussi des propriétés de la S-connexité telles que, les S-isthmes, S-sommets d'articulations, S-blocks, Dans cette partie on donne aussi des résultats concernant les graphes signés frame connexes (frame matroïde) et les graphes signés lift connexes (lift matroïde). On achèvera cette partie avec une étude sur les relations entre ces différentes notions de connexité. La deuxième partie a pour objet de donner une définition du cheminement dans les graphes biorientés, ainsi nous donnons également une nouvelle notion de b-connexité dans ces graphes avec ses propriétés.

Le troisième chapitre est composé de deux parties.

La première partie est consacrée à l'étude de la fermeture transitive dans les graphes biorientés. La deuxième partie a pour objet l'étude de la réduction transitive dans les graphes biorientés. On achèvera le chapitre avec des résultats montrant la relation qui peut exister entre les deux transitivités.

Le quatrième chapitre, est consacré à l'étude d'une logique non classique introduite par Belnap, appelée la logique quadrivalente. C'est une logique qui accepte 4 valeurs de vérité (t, f, u et k), et plus précisément la logique DDT qui est une extension de la logique de Belnap dont elle introduit la négation faible, elle est destinée pour la modélisation des préférences sous l'hésitation. Au premier lieu, on a pu donner une représentation graphique pour cette logique, et à travers la fermeture transitive des graphes biorientés, on a déterminé des relations transitives pour les opérateurs de la logique DDT (T, F, U, K, . . .). Ces relations de transitivités ont permis de déterminer de nouvelles fermetures transitives pour les graphes biorientés orientés (orienté par une relation binaire). Le chapitre s'achèvera avec une définition et des résultats d'une nouvelle notion de cheminement pour les graphes biorientés orientés.

CHAPITRE 1

CHAPITRE 1.

Ce chapitre constitue une introduction générale pour les graphes et les matroïdes.

1.1 Les graphes non orientés et les graphes orientés.

1.2 Les graphes signés et les graphes biorientés.

1.3 Les matroïdes associés aux graphes étudiés dans cette thèse.

1. Généralités sur les graphes non-orientés et les graphes orientés

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions classiques en Théorie des Graphes qui seront utiles dans la suite. Le lecteur pourra consulter [8], [16], [28].

1.1 Définitions et concepts de base

1.1.1 Notion non-orientée

Un **graphe** est un triplet $G = (V, E, I)$ où V et E deux ensembles finis disjoints, $V \neq \emptyset$ et I est une application (incidence) de E dans $V \cup \mathcal{P}_2(V)$ (V est identifié à l'ensemble de ses parties à un élément et $\mathcal{P}_2(V) = \{A \subseteq V / |A| = 2\}$).

L'ensemble V est *l'ensemble de sommets* et E est celui *des arêtes* de G .

Le cardinal de V ($|V|$) est *l'ordre* de G .

Si $e \in E$ et $I(e) = \{x, y\}$, on dira que x et y sont *les extrémités de l'arête e* .

Si $I(e) = \{x\}$, l'arête e est *une boucle* de G en x , dont le sommet x est aussi appelé *extrémité*.

Deux arêtes distinctes qui ont mêmes extrémités sont *des arêtes parallèles*.

Si deux arêtes ont une seule extrémité commune, elles sont dites *adjacentes*.

Deux sommets distincts seront dits *adjacents* s'ils sont les extrémités d'une arête.

Une arête e sera dite *incidente* à un sommet x si le sommet x est l'une de ses extrémités, dans ce cas x sera également dit *incident* à e .

Le *degré* $d_G(x)$ est défini comme le nombre d'arêtes incidentes à x , c'est-à-dire :

$$d_G(x) = |\{e \in E / y \neq x, I(e) = \{x, y\}\}| + 2|\{e \in E / e \text{ est une boucle en } x\}|.$$

On écrira $e = \{x, y\}$ au lieu de $I(e) = \{x, y\}$ et $d(x)$ pour $d_G(x)$, $G = (V, E)$ pour $G = (V, E, I)$ lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

- Un graphe régulier de degré d , est un graphe dont tout sommet est de degré d ($\forall x \in V : d(x) = d$).
- Un sommet x de G est dit *pendant* si $d(x) = 1$, et il est dit *isolé* si $d(x) = 0$.
- Pour tout graphe G , $\sum_{x \in V} d(x) = 2|E|$.
- Dans un graphe G , le nombre de sommets de degré impair est pair.

1.1.2 Notion orientée

Un graphe orienté est un triplet $G = (V, U, O)$ tel que, V (resp. U) est l'ensemble de sommets (resp. d'arcs) de G et O est une application (orientation) de U dans $V \times V$.

Si $u \in U$, alors $O(u) = (x, y)$ est une orientation de u en un arc de G .

Si $O(u) = (x, y)$, alors x (resp. y) est l'extrémité initiale (resp. terminale) de u .

Si $O(u) = (x, x)$, alors l'arc (x, x) est une boucle de G en x .

Deux arcs u et u' sont dits parallèles, si $O(u) = O(u')$.

On écrira $G = (V, U)$ au lieu de $G = (V, U, O)$ s'il n'y a pas d'ambiguïté.

Soit $u = (x, y)$ un arc de G . x est appelé *prédécesseur* de y et y est dit *un successeur* de x .

$\Gamma_G^+(x)$ (resp. $\Gamma_G^-(x)$) est l'ensemble des successeurs (resp. prédécesseurs) de x ,

$\Gamma_G = \Gamma_G^+ \cup \Gamma_G^-$ (l'ensemble des voisins de x).

$$d^+(x) = |\{u \in U / u = (x, y), y \in \Gamma_G^+(x)\}|$$

et

$$d^-(x) = |\{u \in U / u = (x, y), y \in \Gamma_G^-(x)\}|$$

d'où le degré de x noté $d_G(x)$ est donné comme suit : $d_G(x) = d^+(x) + d^-(x)$.

1.1.3 Définitions et résultats

- Un graphe G *non-orienté* (resp. *orienté*) est un graphe simple, s'il ne possède ni arêtes (resp. arcs) parallèles, ni boucles.

- Un graphe G est *biparti*, si l'ensemble de ses sommets peut-être partitionné en deux sous-ensembles, de sorte que deux sommets d'un même ensemble de la partition ne soient jamais adjacents. Chaque sous-ensemble de la partition est dit *stable*.

- Un graphe G est *complet*, si chaque paire de sommets distincts sont adjacents.

- K_n est le graphe simple complet d'ordre n .

- $K_{p,q}$ est le graphe simple biparti complet d'ordre $p + q$.

- Soient G un graphe et V l'ensemble de ses sommets, A un sous-ensemble de sommets de V , le *sous-graphe engendré par A* est le graphe noté G_A dont l'ensemble de sommets est A et l'ensemble des arêtes (resp. arcs) dans le cas non-orienté (resp. cas orienté) est celui de toutes (resp. tous) les arêtes (resp. les arcs) de G ayant leurs deux extrémités dans A .

- Soient G un graphe et F un sous-ensemble d'arêtes (resp. arcs) dans le cas non-orienté (resp. orienté), le *graphe partiel engendré par l'ensemble F* est le graphe ayant le même ensemble de sommets que G et dont les arêtes (resp. arcs) sont les arêtes (resp. arcs) de F .

- Un *graphe sous-jacent* à un graphe orienté G , est le graphe non-orienté G' , obtenu à partir de G en oubliant l'orientation de tous les arcs.

- Un *chemin* (resp. *une chaîne*) dans un graphe G orienté (resp. non-orienté) est une séquence d'arcs (resp. d'arêtes) distincts (resp. distinctes), tel que chaque arc (resp. arête) de la séquence a une extrémité en commun avec l'arc (resp. arête) précédent, c'est-à-dire un sommet est à la fois un successeur et un prédécesseur (resp. précédente), et l'autre extrémité avec l'arc (resp. arête) suivant (resp. suivante). Le nombre d'arcs (resp. arêtes) de la séquence est la longueur du chemin (resp. chaîne).

- Un chemin (resp. chaîne) qui ne rencontre pas deux fois le même sommet est dit (resp. dite) *chemin* (resp. *chaîne*) *élémentaire*.
- Un chemin (resp. chaîne) peut être représenté(e) aussi par une séquence de sommets.
- Un *circuit* (resp. *cycle*) est un chemin (resp. une chaîne) dont le sommet de l'extrémité initial et le sommet de l'extrémité terminale du chemin (resp. chaîne) coïncident. Un *circuit* (resp. *cycle*) *élémentaire* est un circuit (resp. cycle) minimal pour l'inclusion des ensembles de sommets, c'est-à-dire en parcourant un circuit (resp. cycle) élémentaire, on ne rencontre pas deux fois le même sommet, sauf le sommet qui a été choisi comme origine du parcours. Si l'ensemble des sommets d'un circuit (resp. cycle) élémentaire est celui du graphe considéré, alors le circuit (resp. cycle) élémentaire du graphe sera dit *circuit* (resp. *cycle*) *hamiltonien*.
- Un graphe est *connexe*, si et seulement si pour toute paire de sommets du graphe, il existe une chaîne les reliant. Un graphe *non connexe* consiste en une union disjointe de graphes connexes appelés *composantes connexes* de G .
 - L'ensemble des arêtes d'un graphe non orienté, est partitionné par l'ensemble des arêtes de ses composantes connexes.
 - Un *arbre* est un graphe sans cycle connexe.
 - Une *forêt* est un graphe sans cycle, dont les composantes connexes sont des arbres.
- Un graphe orienté est fortement connexe, si et seulement si pour tout couple de sommets x et y , il existe un chemin de x à y et un chemin de y à x . L'ensemble des arcs d'un graphe orienté, n'est pas partitionné par l'ensemble des arcs de ses composantes fortement connexes.
- Soient $G = (V, E)$ un graphe non orienté et A un sous-ensemble de V . Un *cocycle* de G , est un ensemble d'arêtes engendré par A , il est défini par :

$$W_G(A) = \{e \in E / e \text{ a une extrémité dans } A \text{ et l'autre extrémité dans } V - A\}.$$
 - Une boucle n'appartient à aucun cocycle.
 - Un cocycle $W_G(A)$ est élémentaire, si et seulement si les deux graphes G_A et G_{V-A} sont des graphes connexes.
- un sommet x d'un graphe G connexe, est dit *point d'articulation*, si $G - x$ est non connexe.
- Un *isthme* dans un graphe connexe G est une arête dont la suppression déconnecte le graphe.
 - un isthme n'appartient à aucun cycle de G .

2. Définitions et concepts de base des graphes signés et des graphes biorientés

Cette partie du chapitre constitue une introduction aux graphes signés et aux graphes biorientés. Les définitions et les notations utilisées sont celles utilisées dans [10], [11], [12], [13] et [31] et elles sont différentes des références usuelles.

Sauf spécification contraire, les graphes $G = (V, E)$ considérés sont non-orientés connexes et simples.

2.1 Graphes signés

2.1.1 Définition ([10], [30]). *Un graphe signé est un triplet (V, E, σ) où $G = (V, E)$ est un graphe non-orienté et σ une signature de l'ensemble des arêtes.*

$$\begin{aligned} \sigma : E &\rightarrow \{+1, -1\} \\ e &\mapsto \sigma(e) \end{aligned}$$

Lorsque G est muni de la signature σ on le notera G_σ .

Si $\forall e \in E$ on a $\sigma(e) = -1$, alors G est noté G_- , et G_- appelé un graphe négatif.

2.1.2 Définition (Graphes signés équilibrés, [25]). *Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé et C un cycle de G . C est positif si et seulement si le produit de ses arêtes est positif, ou il possède un nombre pair d'arêtes négatives.*

*Un graphe signé G_σ est dit **équilibré** si tous ses cycles sont positifs, sinon G est appelé **un graphe signé non équilibré**.*

En particulier, un graphe signé sans cycles (arbre, forêt) est équilibré. Il s'ensuit par définition qu'un cycle est équilibré si et seulement s'il est positif.

2.1.1 Remarques.

- Un graphe négatif G_- est équilibré si et seulement s'il est biparti.
- Les résultats trouvés pour les graphes signés sont appliqués pour les graphes non orientés, il suffit de remplacer "positif", "négatif" et "équilibré" par "pair", "impair" et "biparti" respectivement.

2.1.1 Théorème ([25]). *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. G est équilibré, si et seulement s'il existe une partition V_1, V_2 de V telle que :*

- (i) *L'ensemble des arêtes positives, est l'ensemble des arêtes dont les deux extrémités sont soit dans V_1 , soit dans V_2 .*
- (ii) *L'ensemble des arêtes négatives, est l'ensemble des arêtes dont une extrémité est dans V_1 , et l'autre extrémité est dans V_2 .*

2.1.2 Théorème ([25]). *Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe signé. Les assertions suivantes sont équivalentes.*

- (i) *G_σ est équilibré.*
- (ii) *Pour toute paire de sommets x et y , toutes les chaînes reliant x et y ont même parité dans G_σ (au sens des arêtes négatives).*
- (iii) *L'ensemble des arêtes négatives de G_σ est un cocycle de G_σ .*

2.1.3 Définition. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. Une commutation sur un ensemble de sommet $W \subseteq V$, signifie d'inverser le signe de toutes les arêtes qui sont entre W et son complémentaire $V - W$ c'est-à-dire si x et y sont les extrémités de e :

$$\sigma_W(e) = \begin{cases} \sigma(e) & \text{si } x, y \in W \text{ ou } x, y \in V - W \\ -\sigma(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

2.1.1 Lemme. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé.

- (i) Une commutation d'un graphe signé équilibré résulte un graphe signé équilibré.
- (ii) G_σ est équilibré, si et seulement s'il existe un sous ensemble de sommets W de V tel que une commutation sur W produit un graphe signé dont toutes les arêtes sont positives.

Preuve :

- (i) L'opération de commutation ne change le signe d'aucun cycle.
- (ii) $\Rightarrow$) D'après Théorème 2.1.2, l'ensemble des arêtes négatives F est un cocycle de G_σ . Le cocycle partitionne V en deux sous ensembles W et $V - W$, tels que toute arête de F a une extrémité dans W et l'autre dans $V - W$, donc par commutation sur W , on obtient $\sigma(e) = +1, \forall e \in F$ dans le nouveau graphe et le signe des autres arêtes reste inchangé, d'où toutes les arêtes du nouveau graphe signé sont positives.
 $\Leftarrow$) Inversement, s'il existe $W \subseteq V$ tel que toutes les arêtes du nouveau graphe signé obtenu par commutation sur W sont positives, alors ce graphe est équilibré donc G_σ est équilibré d'après (i). ■

2.1.4 Définition. Soit W un ensemble de sommets défini dans le Lemme 2.1.1.

Alors $\{W, V - W\}$ est dite la bipartition de Harray de G_σ elle est unique si et seulement si G_σ est connexe.

2.1.5 Définition. Soit G_σ un graphe signé connexe non équilibré. Une arête e telle que $G_\sigma - e$ est équilibré est dite, **arête d'équilibration** de G_σ .

2.1.1 Proposition ([11]). Soient G_σ un graphe signé connexe non équilibré et e une arête de G_σ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- (1) e est une arête d'équilibration.
- (2) e appartient à tout cycle négatif.
- (3) e appartient à tout cycle négatif et n'appartient à aucun cycle positif.
- (4) e n'est pas un isthme, $G_\sigma - e$ est équilibré, et $\sigma(e)$ est différent de celui de la chaîne reliant les extrémités de e dans $G_\sigma - e$.
- (5) Commuter G_σ , les arêtes de $E - e$ seront positives et l'arête e sera négative.

Preuve :

- (4) $\Leftrightarrow$ (5) d'après le Lemme 2.1.1.
- (1) $\Leftrightarrow$ (2) se déduit à partir de la définition.
- (1) $\Rightarrow$ (5) si e est une arête d'équilibration, alors une commutation sur G_σ implique que l'ensemble $E - e$ est positif (Lemme 2.1.1). Si e est positive alors G_σ est équilibré, ce qui n'est pas vraie, donc e est négative.
- (5) $\Rightarrow$ (3) évidente.
- (3) $\Rightarrow$ (2) évidente. ■

2.1.6 Définition ([11]). Un graphe signé G_σ est dit **anti-équilibré** si $G_{-\sigma}$ est équilibré.

2.1.2 Lemme ([11]). Un graphe signé est anti-équilibré, si et seulement si tout cycle positif est de longueur paire et tout cycle négatif est de longueur impaire.

Preuve : Soit G_σ un graphe signé. Il est anti-équilibré, si et seulement si $G_{-\sigma}$ admet seulement des cycles positifs. Le signe d'un cycle est le même dans G_σ et $G_{-\sigma}$ si le cycle est de longueur paire et il est différent si le cycle est de longueur impaire. Ainsi $G_{-\sigma}$ est équilibré si et seulement si tout cycle pair dans G_σ est positif et tout cycle impair dans G_σ est négatif. ■

2.1.3 Lemme. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé.

G est anti-équilibré, si et seulement s'il existe un sous ensemble de sommets W de V tel qu'une commutation sur W produit un graphe signé dont toutes les arêtes sont négatives.

Preuve : G_σ est anti-équilibré $\Leftrightarrow G_{-\sigma}$ est équilibré $\Leftrightarrow \exists W \subseteq V$ tel que toutes les arêtes du graphe obtenu par commutation de W dans $G_{-\sigma}$ sont positives $\Leftrightarrow \exists W \subseteq V$ tel que toutes les arêtes du graphe obtenu par commutation de W dans G_σ sont négatives. ■

2.1.7 Définition (Graphes signés S -complets). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. G_σ est dit **S -complet** si toute paire de sommets x et y de V , sont reliés par deux arêtes de signes différents.

G_σ est dit **semi- S -complet** si le graphe $G = (V, E)$ est complet. (Voir FIGURE 1.1).

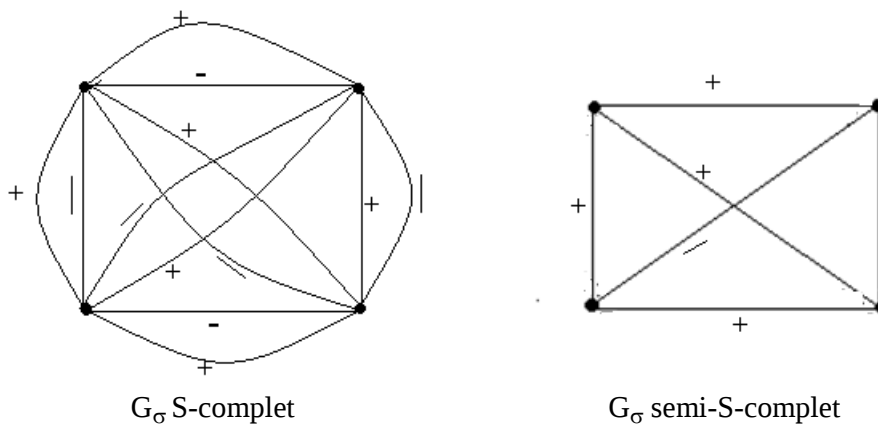


FIGURE 1.1 –

2.1.2 Proposition. Tout graphe signé S -complet est un graphe non équilibré.

Preuve : Il suffit d'utiliser la Définition 2.1.7 et la définition des graphes signés non équilibrés. ■

2.2 Graphes biorientés

Soit $G = (V, E)$ un graphe non-orienté. L'ensemble des demi-arêtes de G est l'ensemble noté $\Phi(G)$ défini par :

$$\Phi(G) = \{(e, x) \in E \times V / e \text{ est incidente à } x\}$$

Ainsi, chaque arête e d'extrémités x et y , peut être représentée par les deux demi-arêtes (e, x) et (e, y) .

2.2.1 Définition. Une biorientation de G est une signature de ses demi-arêtes.

$$\tau : \Phi(G) \longrightarrow \{-1, +1\}$$

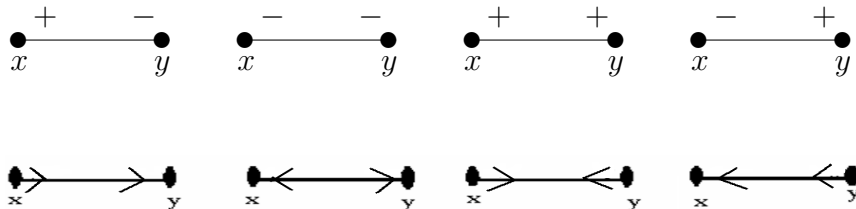
On convient que $\tau(e, x) = 0$ si (e, x) n'est pas une demi-arête de G , ce qui permet d'étendre τ à tout $E \times V$.

2.2.2 Définition. Un graphe biorienté est un triplet (V, E, τ) où $G = (V, E)$ est un graphe non orienté, et τ une biorientation de G , on le note G_τ .

2.2.3 Définition. Si $G = (V, E, \tau)$ est un graphe biorienté, il est d'usage de représenter une demi-arête (e, x) de G par :

$$\begin{array}{ll} x \bullet \longrightarrow & \text{si } \tau(e, x) = +1 \quad \text{ou par} \quad \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \\ x \bullet \longleftarrow & \text{si } \tau(e, x) = -1 \quad \text{ou par} \quad \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \end{array}$$

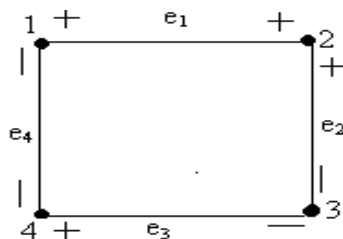
Une arête e de G d'extrémités x et y peut être biorientée de quatre façons différentes :



Exemple.

Soit $G = (V, E, \tau)$ un graphe biorienté, $V = \{1, 2, 3, 4\}$ et $E = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et τ défini par :

$$\begin{array}{ll} \tau(e_1, 1) = +\tau(e_1, 2) = +1 & \tau(e_2, 2) = -\tau(e_2, 3) = +1 \\ \tau(e_3, 4) = -\tau(e_3, 3) = +1 & \tau(e_4, 1) = +\tau(e_4, 4) = -1 \end{array}$$

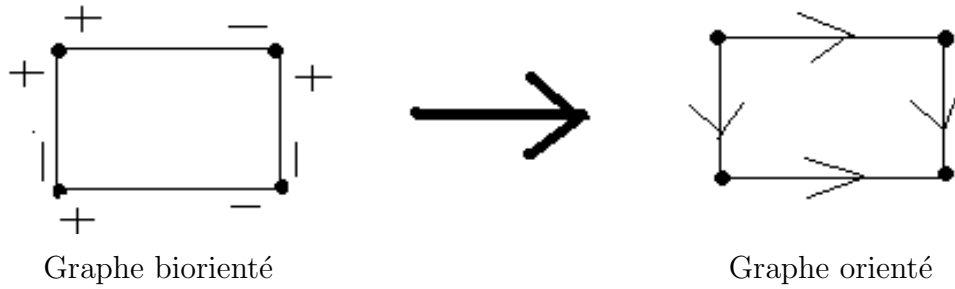


D'après la définition précédente, on remarque que si l'arête e d'extrémités x et y vérifie

$$\tau(e, x) = -\tau(e, y) \cdots \cdots \cdots (1)$$

alors e peut être orientée, au sens usuel de son extrémité correspondant à la demi-arête signée $+1$ vers l'autre extrémité. En conséquence, une biorientation τ de G vérifiant la relation (1) pour toute arête e de G équivaut à une orientation de G .

Exemple.



2.2.4 Définition (Degré extérieur (resp. Degré intérieur)). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté, et x un sommet de G_τ . **Le degré extérieur** (resp. **intérieur**) de x , est le nombre noté $d^+(x)$ (resp. $d^-(x)$) et il est défini par :

$$d^+(x) = |\{e \in E / \tau(e, x) = +1\}| \text{ (resp. } d^-(x) = |\{e \in E / \tau(e, x) = -1\}|).$$

On a donc par définition :
$$\sum_{(e,x) \in (E \times V)} \tau(e, x) = \sum_{x \in V} d^+(x) - \sum_{x \in V} d^-(x).$$

et par conséquent :
$$\sum_{x \in V} d^+(x) \equiv \sum_{x \in V} d^-(x) \pmod{2}.$$

2.3 Graphes biorientés équilibrés

2.3.1 Définition ([10]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. Soient W et $\overline{W}$ deux fonctions définies sur V et E respectivement telles que :

$$\begin{array}{ll} W : V \longrightarrow \mathbb{Z} & \overline{W} : E \longrightarrow \{-2, 0, 2\} \\ x \longmapsto W(x) = \sum_{e \in E} \tau(e, x) & e \longmapsto \overline{W}(e) = \sum_{x \in V} \tau(e, x) \end{array}$$

D'après la Définition 2.3.1, la fonction $\overline{W}$ partitionne l'ensemble E en 3 sous-ensembles : $E = E_0 \cup E_{-2} \cup E_{+2}$ où :

$$\begin{aligned} E_0 &= \{e \in E / \overline{W}(e) = 0\} \\ E_{-2} &= \{e \in E / \overline{W}(e) = -2\} \\ E_{+2} &= \{e \in E / \overline{W}(e) = +2\} \end{aligned}$$

2.3.1 Proposition ([10]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. Pour tout sommet x de G_τ on a : $d(x) \geq W(x)$.

2.3.1 Corollaire ([10]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. Si un sommet x de V vérifie que $\tau(e, x) = +1$ (resp. $\tau(e, x) = -1$) pour toute arête e incidente à x , alors $d(x) = W(x)$ (resp. $d(x) = -W(x)$).

Preuve : Soient G_τ un graphe biorienté et x un sommet de G_τ , tel que $\tau(e, x) = +1$ pour toute arête e incidente à x , alors on a :

$$d(x) = \sum_{e \in E} |\tau(e, x)| \text{ et } W(x) = \sum_{e \in E} \tau(e, x)$$

et puisque pour toute arête e incidente à x , on a $\tau(e, x) = +1$, alors $d(x) = W(x)$.

◆ Pour $\tau(e, x) = +1$, on montre autrement :

$$W(x) = \sum_{e \in E} \tau(e, x) = d^+(x) - d^-(x) \text{ (d'après la Définition 2.2.4), et on a } d(x) = d^+(x) + d^-(x).$$

Et puisque $\forall e \in E : \tau(e, x) = -1$, alors $d^+(x) = 0$, donc $W(x) = -d^-(x)$ et $d(x) = d^-(x)$, d'où $W(x) = -d(x)$. ■

2.3.2 Définition ([10]). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et C un cycle de G_τ . C est **un cycle positif** si et seulement si $|E_{-2}(C)| + |E_{+2}(C)|$ est pair.

$$E_{-2}(C) = \{e \in C / \overline{W}(e) = -2\} \text{ et } E_{+2}(C) = \{e \in C / \overline{W}(e) = +2\}.$$

Un graphe biorienté G_τ est **équilibré**, si tous ses cycles sont positifs.
En particulier un graphe G_τ sans cycle est équilibré.

2.3.1 Théorème ([10]). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et C un cycle de G_τ . C est positif si et seulement si

$$\sum_{e \in E_{+2}(C)} \overline{W}(e) - \sum_{e \in E_{-2}(C)} \overline{W}(e) \equiv 0[4].$$

2.3.2 Théorème ([10]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté avec $E_0 = \emptyset$, G_τ est équilibré si et seulement s'il est biparti.

2.3.2 Corollaire ([10]). Un graphe $G_\tau = (V, E)$ complet est équilibré, si et seulement si pour chaque triangle C de G_τ on a :

$$\sum_{e \in E(C)} \overline{W}(e) \equiv 0[4].$$

2.4 Graphe signé sous-jacent à un graphe biorienté

2.4.1 Définition. À toute biorientation τ d'un graphe $G = (V, E)$, on associe une signature σ de E , définie pour toute arête e de E dont les extrémités sont x et y par :

$$\sigma(e) = -\tau(e, x) \cdot \tau(e, y).$$

Un graphe biorienté détermine un unique graphe signé qui est aussi son graphe sous-jacent, mais la détermination d'un graphe biorienté à partir d'un graphe signé n'est pas unique.

Ainsi,

les arêtes biorientées de type $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$ ou $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$ sont signées $+1$ (voir FIGURE 1.2),

les arête biorientées de type $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$ ou $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$ sont signées -1 (voir FIGURE 1.2).

Par conséquent à tout graphe biorienté G_τ , on associe le graphe signé $(G_\tau)_\sigma$ où σ est la signature définie par τ (voir FIGURE 1.2).

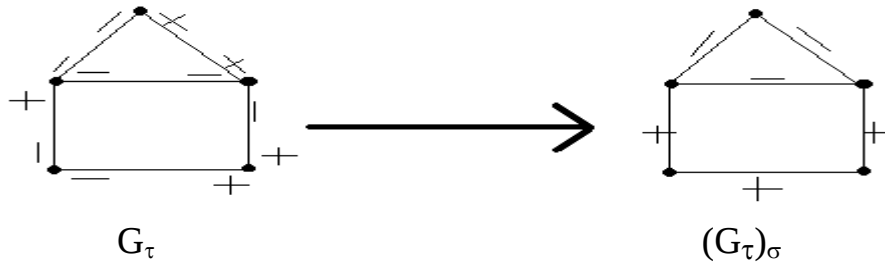


FIGURE 1.2 –

2.4.2 Définition. Les arêtes signées $+1$ sont appelées **arêtes positives**.
Les arêtes signées -1 sont appelées **arêtes négatives**.

2.5 Réorienter une arête d'un graphe biorienté

Les arêtes biorientées $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$ et $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$ sont dites **opposées**,
(comme le sont $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$ et $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$)

2.5.1 Définition. Réorienter une arête d'un graphe biorienté, signifie de remplacer sa biorientation par son opposée.

La réorientation de l'arête $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$ est $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$

La réorientation de l'arête $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$ est $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$

La réorientation de l'arête $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$ est $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$

La réorientation de l'arête $x \bullet \overset{+}{\longrightarrow} \overset{+}{\bullet} y$ est $x \bullet \overset{-}{\longrightarrow} \overset{-}{\bullet} y$

Si τ est une biorientation de G , et si F est une partie de E , réorienter F signifie de remplacer la biorientation de chaque arête de F par son opposée, les biorientations des autres arêtes restant inchangées.

Après réorientation de F , la nouvelle biorientation de G_τ notée F est appelée **biorientation obtenue à partir de τ par réorientation de F** . Par définition, quel que soit x appartenant à V :

$$\begin{aligned}\tau_F(e, x) &= -\tau(e, x) \quad \forall e \in F \\ \tau_F(e, x) &= \tau(e, x) \quad \forall e \in E - F\end{aligned}$$

Le graphe biorienté G_{τ_F} est obtenu à partir de G_τ , par réorientation de F (voir FIGURE 1.3).

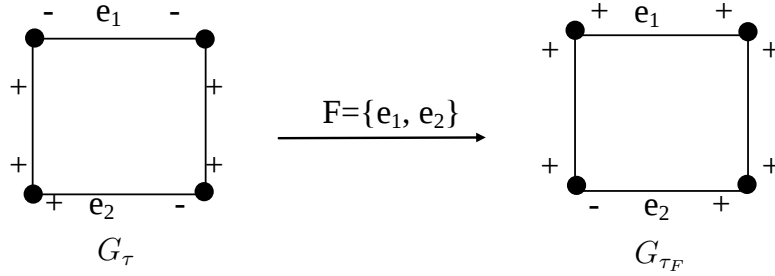


FIGURE 1.3 –

2.5.1 Proposition. Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et $F \subseteq E$. Si C est un cycle négatif (resp. positif) dans G_τ , alors C est un cycle négatif (resp. positif) dans G_{τ_F} .

Preuve : La preuve est évidente, puisque les arêtes opposées ont un même signe. ■

2.6 Les graphes biorientés b-complets

2.6.1 Définition. Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. G_τ est dit **b-complet** si toute paire de sommets x et y de V sont reliés par les quatre types d'arêtes de G_τ .

G_τ est dit **semi-b-complet** si toute paire de sommets x et y de V , sont reliés par deux arêtes e_1 et e_2 avec $\overline{W}(e_1) + \overline{W}(e_2) = \pm 2$.

G_τ est dit **complet** si $G = (V, E)$ est complet (Voir FIGURE 1.4).

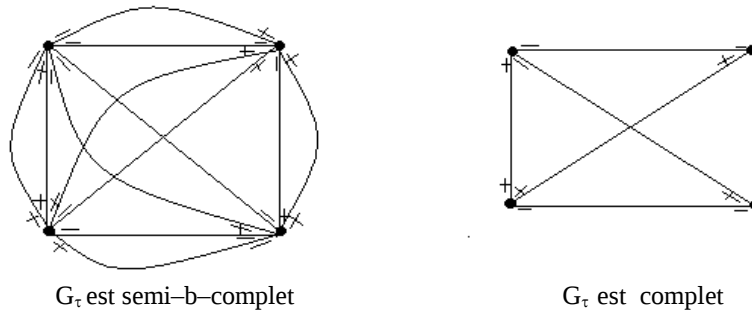


FIGURE 1.4 –

2.6.1 Proposition. Tout graphe biorienté b-complet ou semi-b-complet est un graphe biorienté non équilibré.

Preuve : Il suffit d'utiliser la Définition 2.6.1 et la définition des graphes biorientés non équilibrés. ■

3. Généralités sur les matroïdes

Dans cette partie, nous rappelons quelques définitions et théorèmes classiques (aussi bien en théorie des graphes qu'en théorie des matroïdes) qui nous seront utiles dans toute la suite.

3.1 Définitions et notations

Un matroïde M peut être défini de différentes manières. La terminologie relative aux matroïdes utilisée dans ce travail est conforme à celle de TUTTE [49] ou celle de WELSH [52] et AIGNER [3], le lecteur pourra les consulter pour des résultats et preuves non rappelées.

Soient E un ensemble fini et $\mathfrak{S}$ une famille de parties de E . Le couple $(E, \mathfrak{S})$ définit un système d'indépendants si :

1 – $\emptyset \in \mathfrak{S}$.

2 – Si $A \in \mathfrak{S}$, $B \subseteq A \implies B \in \mathfrak{S}$.

Un système d'indépendants $(E, \mathfrak{S})$ est un matroïde noté M si :

3 – Pour tout A , $A \subset E$, si B et B' sont deux sous-ensembles maximaux de A , tels que $B \in \mathfrak{S}$ et $B' \in \mathfrak{S}$, alors $|B| = |B'|$.

On peut remplacer (3) par :

3' – Si $A \in \mathfrak{S}$ et $B \in \mathfrak{S}$, avec $|A| = |B| + 1$, alors il existe un élément x de $A - B$ tel que $B \cup \{x\} \in \mathfrak{S}$.

Soit $M = (E, \mathfrak{S})$ un matroïde défini sur E , les membres de $\mathfrak{S}$ sont appelés **les ensembles indépendants** de M .

Les ensembles qui n'appartiennent pas à $\mathfrak{S}$, sont appelés **les ensembles dépendants**.

Un ensemble dépendant minimal (par inclusion des ensembles) est dit **circuit** de M .

3.2 Caractérisation des matroïdes

Soit $M = (E, \mathfrak{S})$ un matroïde.

3.2.1 Circuits de M :

Si on note ζ la famille des circuits de M , alors

1 – $\forall C_1, C_2 \in \zeta$ et $C_1 \subseteq C_2 \implies C_1 = C_2$

2 – $\forall C_1, C_2 \in \zeta$, et a, b deux éléments de E avec $a \in C_1 \cap C_2$ et $b \in C_1 - C_2$ alors il existe $C_3 \in \zeta$ tel que $b \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - a$.

- Un élément de E , est dit boucle de M si et seulement si $\{e\}$ est un circuit de M .

- Deux éléments e_1 et e_2 de E , sont dits parallèles si et seulement si $\{x, y\}$ est un circuit de M .

3.2.2 Bases de M

Une base d'un matroïde M, est un sous-ensemble de E maximal (pour l'inclusion des ensembles) dans $\mathfrak{S}$. Si on note β la famille des bases de M, on a :

1 – Si $B_1, B_2 \in \beta$, alors $|B_1| = |B_2|$.

2 – Si $B_1, B_2 \in \beta$, et $a \in B_1 - B_2$, alors il existe un élément b dans $B_2 - B_1$ tel que $B_1 - a + b \in \beta$.

3.2.3 Rang de M

On appelle fonction rang du matroïde M, la fonction $\mathbf{r}$ définie comme suit :

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : 2^E &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ A &\longmapsto \mathbf{r}(A) \end{aligned}$$

$$\mathbf{r}(A) = \max_{\{F \in \mathfrak{S} : F \subseteq A\}} |F| = \max_{F \in \mathfrak{S}} |F \cap A|$$

Dans [52] ont montré que tous les indépendants maximaux (par inclusion des ensembles) sont de même cardinalité, appelée rang du matroïde M noté $\mathbf{r}(M)$ ou $\mathbf{r}(E)$ (i.e si B est une base de M, $\mathbf{r}(M) = B$)

La fonction rang $\mathbf{r}$ de M vérifie :

1) $\mathbf{r}(\emptyset) = 0$.

2) Si $A \subseteq B \Rightarrow \mathbf{r}(A) \leq \mathbf{r}(B)$ ($A, B \subseteq E$) (monotone).

3) $\mathbf{r}(A) + \mathbf{r}(B) \geq \mathbf{r}(A \cup B) + \mathbf{r}(A \cap B)$ (sous-modularité).

Si C est un circuit de M, $\mathbf{r}(C) = |C| - 1$.

3.3 Sur la connexité des matroïdes

3.3.1 Définition ([52]). Soit $M = (E, \mathfrak{S})$ un matroïde. M est dit **connexe**, s'il n'existe pas de partition $\{E_1, E_2\}$ non triviale de E telle que :

$$\mathbf{r}(E_1) + \mathbf{r}(E_2) = \mathbf{r}(E) \quad (\mathbf{r}(E) = \mathbf{r}(M))$$

Ceci équivaut à dire, qu'un matroïde M est connexe, s'il n'existe pas de partition $\{E_1, E_2\}$ non triviale de E , telle que tout circuit C de M, est soit dans E_1 soit dans E_2 .

Soit $M = (E, \mathfrak{S})$ un matroïde, considérons la relation dans E définie par : e est en relation avec e' si et seulement si

$$\ll e = e' \text{ ou il existe un circuit } C \text{ de M contenant } e \text{ et } e' \gg.$$

Dans [52] ont montré, aussi que cette relation est une relation d'équivalence. Les classes d'équivalence sont appelées **les composantes connexes de M**.

3.4 Matroïde des cycles d'un graphe

3.4.1 Théorème ([52]). Soit $G = (V, E)$ un graphe, les cycles élémentaires de G , sont les circuits d'un matroïde $M(G)$ défini sur l'ensemble des arêtes E .

- Le matroïde $M(G)$, est dit **matroïde des cycles du graphe** G .
- Un graphe sans cycles est dit **acyclique**, sinon il sera dit **cyclique**.

3.4.1 Conséquences directes

Soient $G = (V, E)$ un graphe non orienté et $M(G)$ son matroïde associé.

Un ensemble d'arêtes S de E ($S \subseteq E$), est **indépendant** dans $M(G)$, si le graphe partiel engendré par S est acyclique.

Une base de $M(G)$ par définition, est un ensemble d'arêtes maximal (pour l'inclusion des arêtes) dans E , qui engendre un graphe partiel acyclique, et ceci coïncide avec la définition d'un arbre (resp. forêt) maximal, si G est connexe (resp. non connexe).

Le rang de $M(G)$ est égal à $|V| - P(G)$, où $|V|$ c'est le nombre de sommets de G et $P(G)$ le nombre de composantes connexes de G .

$$(\mathbf{r}(M(G)) = |V| - P(G))$$

- Deux matroïdes M_1, M_2 définis sur E_1, E_2 respectivement sont isomorphes s'il existe une bijection $f : E_1 \longrightarrow E_2$ qui préserve l'indépendance.

3.4.1 Définition (Matroïde graphique, [52]). Un matroïde M , est dit **graphique**, s'il existe un graphe G , tel que M soit isomorphe au matroïde $M(G)$ des cycles de G .

Remarque.

Si $M(G)$ est le matroïde associé à un graphe orienté G , alors $M(G)$ ne dépend pas de l'orientation du graphe G , mais il dépend de son graphe sous-jacent non orienté. C'est-à-dire que l'orientation des arêtes n'influe pas sur la définition de $M(G)$.

3.4.2 Matroïdes des graphes signés (biorientés)

Dans ce paragraphe, nous présentons des définitions et des théorèmes et quelques résultats sur la notion des matroïdes des graphes signés (biorientés) qui seront utiles dans la suite de notre travail.

Le lecteur pourra consulter [10], [11], [56], [30] pour des résultats et preuves non rappelées.

Remarque

L'étude d'un matroïde associé à un graphe biorienté, revient à étudier le matroïde associé à son graphe sous-jacent signé.

On rappelle qu'un cycle d'un graphe signé est dit **positif** si le produit des signes du cycle est positif, sinon il sera dit **négatif**.

Zaslavsky [56] a montré le résultat suivant (Frame matroïde et Lift matroïde) :

3.4.2 Théorème. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. On associe à G_σ deux matroïdes, un frame matroïde noté $M(G_\sigma)$ et un lift matroïde noté $L(G_\sigma)$. Un ensemble d'arêtes F de E est un circuit de $M(G_\sigma)$ (frame circuit de G_σ) si et seulement s'il est l'un des trois types suivants :

- (i) Un cycle positif (Type (i)),
- (ii) La réunion de deux cycles négatifs, ayant exactement un seul sommet commun (Type (ii)),
- (iii) La réunion de deux cycles négatifs sommet-disjoints et d'une chaîne qui rencontre chacun des deux cycles en exactement un sommet qui est une extrémité de la chaîne (Type (iii)).

Dans la FIGURE 1.5, on représente les trois types de circuits de $M(G_\sigma)$, (on représente un cycle positif (resp. non équilibré) par un quadrilatère (resp. triangle)).

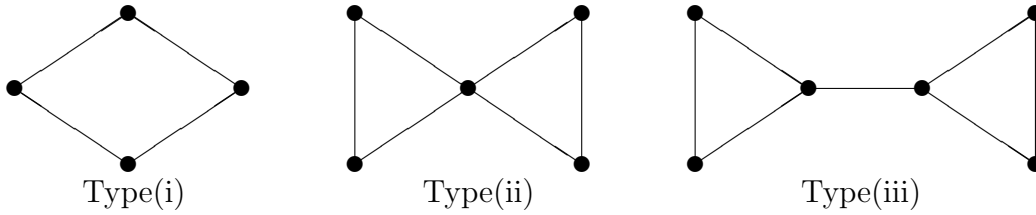


FIGURE 1.5 –

La définition de $L(G_\sigma)$. Un ensemble F d'arêtes de E est un circuit de $L(G_\sigma)$ (lift circuit de G_σ) si et seulement s'il est de type (i), (ii) ou (iii').

Type (iii') : F est la réunion de deux cycles négatifs sommet-disjoints.

3.4.1 Corollaire. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. Un cycle négatif est un indépendant de $M(G)$.

Preuve : Soit C un cycle négatif, si C n'est pas un indépendant de $M(G_\sigma)$, alors C est un circuit de $M(G_\sigma)$, mais d'après la caractérisation de Zaslavsky concernant les circuits, un cycle négatif ne peut jamais être un circuit mais il peut être inclu dans un circuit de $M(G_\sigma)$ (Théorème 3.4.2), contradiction. ■

3.4.2 Définition. Un graphe signé $G_\sigma = (V, E)$ est dit **quasi-équilibré**, si le frame matroïde $M(G_\sigma)$ (resp. lift matroïde $L(G_\sigma)$) n'admet pas de circuits de type (ii) et (iii) (resp. type (ii) et (iii')).

3.4.1 Proposition. Un graphe signé connexe $G_\sigma = (V, E)$ est quasi-équilibré si et seulement si, quel que soit deux cycles négatifs C et C' de G_σ on a :

$$|V(C) \cap V(C')| \geq 2.$$

Preuve :

C.S : la preuve se déduit à partir du Théorème 3.4.2 et la Définition 3.4.2.

C.N : supposons que G_σ possède deux cycles C et C' négatifs tels que, $|V(C) \cap V(C')| \leq 1$.

- Si $|V(C) \cap V(C')| = 0$, on a G_σ est connexe, alors il existe une chaîne reliant un sommet de C avec un sommet de C' , donc d'après Zaslavsky, il existe un circuit de type (iii) contenant C et C' , contradiction.
- Si $|V(C) \cap V(C')| = 1$, alors d'après Zaslavsky $C \cup C'$ est un circuit de type (ii), contradiction. ■

3.4.2 Corollaire. *Un graphe signé est quasi-équilibré, si et seulement si toutes ses composantes connexes le sont.*

Preuve : Évidente, d'après la Définition 3.4.2 et le Théorème 3.4.2. ■

3.4.3 Corollaire. *Soit G_σ est un graphe connexe quasi-équilibré. Il existe dans G_σ deux cycles négatifs tels que :*

$$|E(C) \cap E(C')| \geq 0.$$

Preuve : Si les sommets en comuns ne sont pas adjacents donc $|E(C) \cap E(C')| = 0$.
Pour la suite de la preuve, il suffit d'utiliser la Proposition 3.4.1. ■

3.4.4 Corollaire. *Une boucle négative dans un graphe signé quasi-équilibré, est l'unique cycle négatif.*

Preuve : Soient C un cycle négatif et e une boucle négative de G_σ . $C \cup \{e\}$ est soit un circuit de type (ii) ou (iii'), soit il est contenu dans un circuit de type (iii), contradiction. ■

3.4.2 Proposition. *Un graphe signé $G_\sigma = (V, E)$ est quasi-équilibré si et seulement s'il possède au plus un bloc non équilibré qui est lui-même quasi-équilibré.*

Preuve : Évidente. ■

3.4.3 Proposition. *Un graphe signé est sans circuit de type (ii) et (iii) si et seulement si chaque composante connexe est quasi-équilibrée.*

Un graphe signé est sans circuit de type (ii) et (iii') si et seulement s'il est quasi-équilibré.

Preuve : Il suffit d'utiliser la Définition 3.4.2, les Propositions 3.4.1 et 3.4.2. ■

3.4.3 Conséquence de la caractérisation des circuits définis par Zaslavsky

Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. Une base de $M(G_\sigma)$ est un indépendant maximal, elle est la réunion d'un arbre maximal T de G et d'une arête e de E , telle que, $e \in E - T$ et $T \cup \{e\}$ contient un cycle C négatif.

Remarque

On a $C \subseteq T \cup \{e\}$, alors C est unique si G est connexe sinon, une base de $M(G_\sigma)$, contient p cycles négatifs où p est le nombre de composantes connexes non équilibrées de G_σ . C'est-à-dire, que si G_σ est non équilibré, alors le nombre de composantes connexes non équilibrées de G_σ est donné par le nombre de cycles négatifs d'une base de $M(G_\sigma)$.

3.4.1 Lemme. Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé sans boucles négatives, et B une base de $M(G_\sigma)$. G_σ est équilibré, si et seulement si pour toute paire de sommets x et y de V , il existe au plus une chaîne les reliant dans B .

Preuve :

C.N : Soit G_σ un graphe signé équilibré, et soit B est une base de $M(G_\sigma)$.

Si G_σ est non connexe, alors il existe deux sommets x et y de V qui ne sont reliés par aucune chaîne de G_σ dans B (B est une forêt).

Si G_σ est connexe, B est un arbre maximal de G_σ , alors pour toute paire de sommets x et y il existe une chaîne unique les reliant dans B d'après la caractérisation des arbres.

C.S : Supposons que G_σ est non équilibré, alors la base B , admet au moins un cycle négatif C , donc il existe au moins une paire de sommets x et y de C qui sont reliés par deux chaînes, contradiction. ■

3.5 Connexité des graphes signés

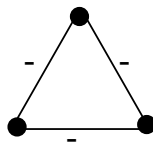
3.5.1 Définition. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. G_σ est dit **frame connexe**, si $M(G_\sigma)$ est connexe ou si $G_\sigma = K_1$. Il est dit **lift connexe** si $L(G_\sigma)$ est connexe ou si $G_\sigma = K_1$.

3.5.1 Lemme. Un graphe signé est frame connexe (resp. lift connexe), si et seulement si chaque paire d'arêtes e et e' de G_σ sont contenues dans un frame circuit (resp. lift circuit).

Preuve : La preuve est une conséquence directe de la Définition 3.5.1, la définition de la connexité des matroïdes et du Théorème 3.4.2. ■

Exemples

- Le graphe complet négatif $(K_3)_-$, n'est ni frame connexe ni lift connexe.



- Un circuit C de $M(G_\sigma)$ (resp. $L(G_\sigma)$) est frame (resp. lift) connexe.

3.6 Composantes Frame connexes et Composantes Lift connexes

3.6.1 Définition ([11]). Les composantes connexes de $M(G_\sigma)$ induisent des sous-graphes de G_σ , qui sont appelés **frame composantes de G_σ** . Ainsi, une frame composante de G_σ est un sous-graphe maximal (pour l'inclusion des arêtes) sans sommets isolés dont son frame matroïde est connexe, ou c'est un sommet isolé.

Les composantes connexes de $L(G_\sigma)$ induisent des sous-graphes de G_σ , qui sont appelés **lift composantes de G_σ** . Ainsi, une lift composante de G_σ est un sous-graphe maximal (pour l'inclusion des arêtes) sans sommets isolés dont son lift matroïde est connexe, ou c'est un sommet isolé.

Remarques

- Les frame composantes d'un graphe non équilibré ne sont pas nécessairement non équilibrées (voir FIGURE 1.6).

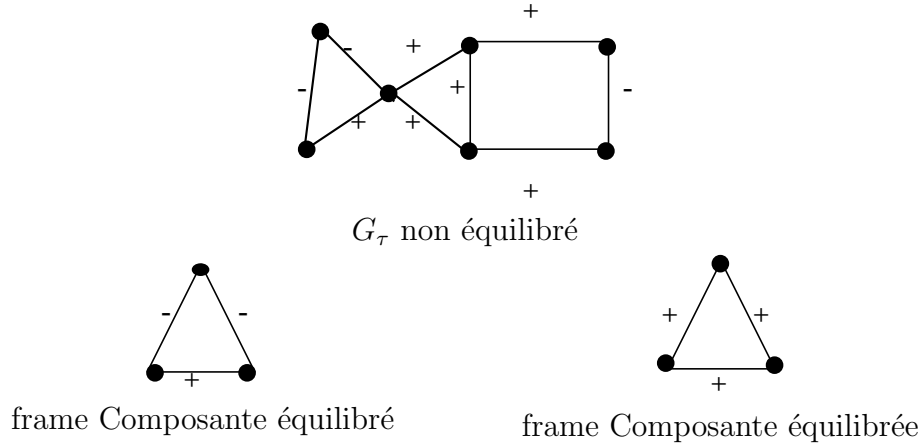


FIGURE 1.6 –

- Il est clair que d'après le Lemme 3.5.1 qu'une frame composante de G_σ est un graphe connexe, mais une lift composante ne peut l'être. Par exemple, le lift circuit de type (iii') est un graphe non connexe mais il est lift connexe.

3.7 Rang du matroïde d'un graphe signé

Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. La fonction rang $\mathbf{r}$ de $M(G_\sigma)$ est définie comme suit ([10] et [56]) :

- On désigne par $b(G_\sigma)$ (resp. $\tilde{b}(G_\sigma)$), le nombre de composantes connexes équilibrées (resp. non équilibrées) de G_σ .

$$\begin{aligned} \mathbf{r} : 2^E &\longrightarrow \mathbb{Z}_+ \\ A &\longmapsto \mathbf{r}(A) \end{aligned}$$

où $\mathbf{r}(A)$ est le nombre maximum d'éléments indépendants dans A .

Si de plus A est un indépendant, alors $\mathbf{r}(A) = |A|$.

$$\mathbf{r}(M(G_\sigma)) = |V| - b(G_\sigma).$$

$$\mathbf{r}(L(G_\sigma)) = |V| - P(G_\sigma) + \delta \quad \text{où} \quad \begin{aligned} \delta &= 0 \text{ si } G_\sigma \text{ est équilibré,} \\ \delta &= 1 \text{ si } G_\sigma \text{ est non équilibré.} \end{aligned}$$

3.8 Les isthmes d'un matroïde d'un graphe signé

3.8.1 Définition. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé sans boucles. Une arête e de E qui est un isthme de $M(G_\sigma)$ est dite **un frame isthme de G_σ** . Une arête e de E qui est un isthme de $L(G_\sigma)$ est dite **un lift isthme de G_σ** .

Remarques.

- Si G_σ est équilibré, alors les notions d'isthme, frame isthme et de lift isthme coïncident.
- Une arête e de G_σ est un frame isthme (resp. lift isthme) si et seulement si elle n'appartient à aucun frame circuit (resp. lift circuit).
- Si l'arête e est un frame isthme, alors $\tilde{b}(G_\sigma - e) \leq \tilde{b}(G_\sigma)$.

3.8.1 Lemme ([10]). Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé et e une arête de E . L'arête e est un frame isthme de G_σ , si et seulement si on a : $b(G_\sigma - e) > b(G_\sigma)$.

3.8.2 Lemme ([10]). Soit e un isthme de G_σ . L'arête e vérifie l'une des assertions suivantes :

$$b(G_\sigma) < b(G_\sigma - e).$$

$$\tilde{b}(G_\sigma) \leq \tilde{b}(G_\sigma - e).$$

3.8.1 Proposition ([10]). Une arête e qui vérifie que $\tilde{b}(G_\sigma) < \tilde{b}(G_\sigma - e)$, appartient à un circuit de type (iii).

3.8.2 Proposition ([10]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé connexe sans boucles. Si e est un frame isthme de G_σ , tel que $G_\sigma - e$ est connexe, alors il existe un cycle négatif de G_σ contenant e .

3.8.3 Lemme ([10]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe quasi-équilibré (non équilibré), connexe tel que $|E| \geq 2$. Si G_σ est réduit à un cycle, alors toute arête e de ce cycle est un frame isthme de G_σ .

3.8.1 Corollaire ([10]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe connexe non équilibré. Si G_σ est quasi-équilibré tel que $|E| \geq 2$, alors G_σ n'est pas frame connexe.

3.8.3 Proposition ([10]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé frame connexe. G_σ est équilibré, si et seulement si G_σ est quasi-équilibré.

3.8.4 Proposition. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé connexe quasi-équilibré. Si e est une boucle négative de G_σ , alors e est un frame isthme et un lift isthme.

Preuve : Si e n'est ni frame ou lift isthme, elle doit appartenir donc soit à un circuit de type (ii) ou (iii) où (iii'). Ces circuits possèdent un cycle négatif C qui n'est pas $\{e\}$. Puisque G_σ est quasi-équilibré, le cycle C n'existe pas. Cependant, e est un frame isthme et un lift isthme. ■

3.8.4 Lemme ([11]).

- (1) Une arête e de G_σ est un frame isthme, si et seulement si e est soit :
- Un isthme d'une composante connexe équilibrée de G_σ ;
 - Un isthme d'une composante connexe non équilibrée de G_σ , tel que l'une des deux composantes connexes obtenue de $G_\sigma - e$ est équilibrée ;
 - une arête d'équilibration d'une composante connexe non équilibrée de G_σ .
- (2) Une arête e de G_σ est un lift isthme, si et seulement si e est soit :
- Un isthme de G_σ ;
 - une arête d'équilibration d'une composante connexe non équilibrée de G_σ .

Preuve : Un élément e d'un matroïde M est un isthme si et seulement si $\mathbf{r}(M - e) < \mathbf{r}(M)$.

(1) **Pour $M(G_\sigma)$,** une arête e est un frame isthme de G_σ , si et seulement si $b(G_\sigma - e) > b(G_\sigma)$. En supprimant e , soit elle décompose une composante connexe équilibrée en deux composantes connexes équilibrées (e est un isthme), où elle décompose une composante connexe non équilibrée en deux composantes connexes, l'une est équilibrée (e est un isthme), où elle ne décompose pas une composante connexe en deux mais elle change la composante connexe non équilibrée à une composante connexe équilibrée.

(2) **Pour $L(G_\sigma)$,** une arête e est un lift isthme de G_σ , si et seulement si $P(G_\sigma - e) - P(G_\sigma) > \delta(G_\sigma - e) - \delta(G_\sigma)$. Si e est un isthme, alors $P(G_\sigma - e) - P(G_\sigma) = 1$ et $\delta(G_\sigma - e) - \delta(G_\sigma) \leq 0$. Si e n'est pas un isthme, alors $P(G_\sigma - e) - P(G_\sigma) = 0$, e est un lift isthme si et seulement si $\delta(G_\sigma - e) = 0$ et $\delta(G_\sigma) = 1$. ■

CHAPITRE 2

CHAPITRE 2.

Dans ce chapitre, nous présentons deux nouvelles notions de connexité.

2.1 La S -connexité dans les graphes signés.

2.2 La b -connexité dans les graphes biorientés.

1. La S -connexité dans les graphes signés

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude d'un nouveau concept de connexité dans les graphes signés.

1.1 La connexité

1.1.1 Définition ([8]). Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté. G est **connexe**, si $\forall x, y \in V$, il existe une chaîne dans G les reliant.

1.1.2 Définition ([8]). Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté connexe et $|V| \geq 3$. G est **2-connexe**, s'il n'admet pas un sommet d'articulation.

1.1.3 Définition ([8]). Soit $G = (V, E)$ un graphe. On dit que deux chaînes P_1 et P_2 reliant deux sommets x, y de G sont **des chaînes-sommet-disjointes** (resp. **chaînes-arête-disjointes**), si P_1 et P_2 n'ont pas des sommets internes communs (resp. arêtes communes).

1.1.1 Théorème ([8]). Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe et $|V| \geq 3$. G est 2-connexe si et seulement si pour toute paire de sommets distincts x et y de V , il existe au moins 2 chaînes-sommet-disjointes les reliant.

1.1.1 Proposition ([8]). Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe. G est 2-connexe si et seulement si quelles que soient les arêtes e, e' ($e \neq e'$) de G , il existe un cycle C de G les contenant.

1.1.1 Lemme. Soient $G = (V, E)$ un graphe connexe avec $|V| \geq 3$ et $M(G)$ son matroïde associé. $M(G)$ est connexe, si et seulement si G est 2-connexe.

Preuve : La preuve se déduit de la Proposition 1.1.1 et de la Définition 3.3.1 du Chapitre 1. ■

Rappelons qu'un graphe signé G_σ est frame connexe, si et seulement si quelles que soient deux arêtes e et e' de G_σ , il existe un frame circuit de G_σ (un circuit de $M(G_\sigma)$) contenant e et e' .

1.1.2 Théorème. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé équilibré tel que $|V| \geq 3$. G_σ est 2-connexe si et seulement s'il est frame connexe.

Preuve : La preuve se déduit directement de la Propositions 1.1.1 et du Lemme 1.1.1. ■

1.2 S -chaîne ; S -cycle

1.2.1 Définition ([11]). Soient G_σ un graphe signé, et P une chaîne usuelle (pas nécessairement élémentaire) reliant x et y dans G_σ :

$$P : x, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, y$$

où $x, x_1, \dots, y \in V$ et $e_1, e_2, \dots \in E$.

On pose :

$$\sigma(P) = \prod_{e_i \in P} \sigma(e_i) \in \{-1, +1\}.$$

P est dite **positive** (resp. **négative**) si $\sigma(P) = +1$ (resp. $\sigma(P) = -1$) (il en est de même pour le signe d'un cycle).

On notera alors P^ε la chaîne P si $\varepsilon = \sigma(P)$ et on écrit $P^\varepsilon(x, y)$ lorsque P est une chaîne reliant x et y .

$P^\varepsilon(x, y)$ est appelée **une S -chaîne** de signe ε reliant x et y (S pour signé).

Une S -chaîne $P^\varepsilon(x, y)$ est dite **une S -chaîne élémentaire**, si elle est minimale en donnant son signe et ses extrémités.

Minimale, signifie que $P^\varepsilon(x, y)$ n'admet pas d'autres S -chaînes reliant x et y comme un sous graphe.

Remarques.

- * Une S -chaîne positive reliant deux sommets x et y , peut contenir une autre S -chaîne négative (comme une sous- S -chaîne) reliant x et y , et inversement (voir la FIGURE 2.1).
- * Toute chaîne (au sens usuel) est une S -chaîne, mais l'inverse n'est pas toujours vrai.

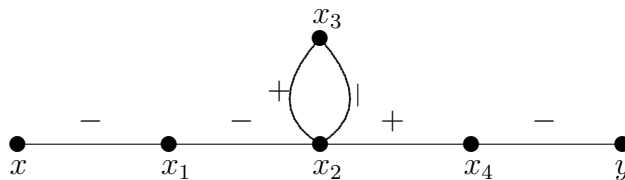


FIGURE 2.1 –

$P^+(x, y) : x, x_1, x_2, x_3, x_2, x_4, y$; est une S -chaîne positive.

$P^-(x, y) : x, x_1, x_2, x_4, y$; est une S -chaîne négative.

P^+ contient P^- comme une sous- S -chaîne.

Les deux S -chaînes P^+ et P^- sont des S -chaînes élémentaires, de différentes valeurs de ε .

Nous présentons dans le paragraphe suivant les différents types de S -chaînes élémentaires qui possèdent un cycle négatif.

1.2.2 Définition ([11]). Une hypercyclique S -chaîne P^ε reliant deux sommets (pas nécessairement distincts) dans un graphe signé G_σ , est une S -chaîne élémentaire qui admet un cycle négatif.

Notons que la valeur de ε n'influe pas sur la définition d'une hypercyclique S -chaîne.

1.2.1 Proposition ([11]). *Un graphe signé G_σ admet trois types d'hypercycliques S -chaînes.*

- (a) *La réunion d'une chaîne élémentaire et d'un cycle négatif, ayant exactement un seul sommet commun à l'une des extrémités de la chaîne.*
- (b) *La réunion d'une chaîne élémentaire et d'un cycle négatif, ayant exactement un seul sommet commun différent des extrémités de la chaîne.*
- (c) *La réunion d'une chaîne élémentaire et d'un cycle négatif sommet-disjoint et d'une chaîne élémentaire reliant le cycle négatif avec un sommet interne de la chaîne.*

La FIGURE 2.2 ci-dessous, illustre les trois cas possibles ($\alpha, \beta, \gamma, \lambda \in \{-1, +1\}$).

Preuve : Chaque figure représente le graphe qui est constitué par, une S -chaîne élémentaire de signe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$ reliant x et y possédant un cycle négatif, et aussi une S -chaîne élémentaire de signe $-\varepsilon$ reliant x et y sans cycle négatif.

Soit $P^\varepsilon(x, y)$ une hypercyclique S -chaîne dans G_σ . Elle ne peut pas être un arbre, puisque elle doit contenir un cycle négatif.

➤ Supposons que le graphe $G(P^\varepsilon)$ engendré par l'hypercyclique S -chaîne P^ε contient un cycle positif C . Soit $e \in C$, l'arête e peut être remplacée par $C - e$ dans P^ε pour avoir une nouvelle S -chaîne Q^ε reliant x et y qui est un sous-graphe de $G(P^\varepsilon)$. Ceci contredit le fait que P^ε est minimal. D'où $G(P^\varepsilon)$ ne peut avoir un cycle positif. Il ne peut contenir deux cycles négatifs qui ont plus d'un sommet commun, car leur union possède un cycle positif.

➤ Supposons que $G(P^\varepsilon)$ contient deux cycles négatifs C et C' .

- Si C et C' n'ont pas de sommet en commun, alors $G(P^\varepsilon)$ contient aussi une S -chaîne élémentaire Q reliant x et y ceci contredit P^ε est minimale.
- Si C et C' ont un seul sommet en commun v . Soient $F = C \cup C' \cup Q$ (F est un frame circuit) et $e = \{u_1, u_2\}$ une arête de C . Alors e peut être remplacé dans P^ε par une chaîne dans $F - e$ reliant u_1 et u_2 même raisonnement à celui du cycle positif, ceci contredit P^ε est minimale.

On conclue que P^ε contient un unique cycle qui est négatif.

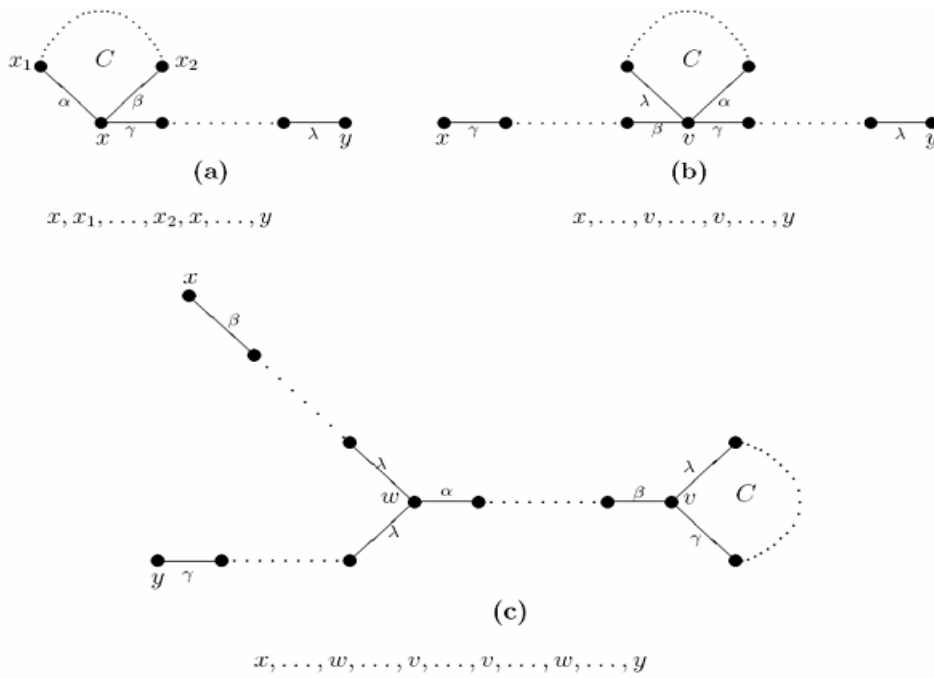
Il existe dans $G(P^\varepsilon)$ une chaîne élémentaire A reliant x à un sommet $t \in C$ et une chaîne élémentaire B reliant y à un sommet $u \in C$.

Si $t \neq u$, alors il existe dans C deux chaînes élémentaires de t à u , appelons les C_1 et C_2 .

Les S -chaînes élémentaires $P_1 = AC_1B^{-1}$ et $P_2 = AC_2B^{-1}$ sont de signe opposés.

L'hypercyclique S -chaîne $P^\varepsilon(x, y)$ doit avoir la forme $AC_1C_2^{-1}C_1B^{-1}$ afin d'obtenir un cycle négatif, mais elle n'est pas minimale car soit P_1 ou P_2 a le même signe ε . Donc $t = u$.

$P^\varepsilon(x, y)$ est minimale. Si A et B n'ont pas de sommet commun on a les types (a) ou (b) dans la FIGURE 2.2. Si elles ont des sommets en communs c'est le type (c). ■

FIGURE 2.2 – Illustration d'une hypercyclique S -chaîne.

1.2.2 Proposition. Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé et $P^\varepsilon(x, y)$ une S -chaîne de G_σ de signe $\varepsilon \in \{-1, +1\}$. $P^\varepsilon(x, y)$ est une hypercyclique S -chaîne si et seulement si $\forall v \in P^\varepsilon(x, y)$, $d_{P^\varepsilon}(v) = 2$ ou $P^\varepsilon(x, y)$ admet un sommet v tel que $d_{P^\varepsilon}(v) \in \{3, 4\}$.

Preuve : Soit $P^\varepsilon(x, y)$ une S -chaîne de G_σ ; $P^\varepsilon(x, y) : xe_1x_1e_2x_2 \dots x_{n-1}e_ny$.

$\Rightarrow$) On a $P^\varepsilon(x, y)$ est une hypercyclique S -chaîne, donc $P^\varepsilon(x, y)$ admet un cycle négatif C .

Cas 1 : Si les sommets x et $y \in C$, alors $x = y$, $P^\varepsilon(x, y) = C$ et $\varepsilon = -1$.

D'où $\forall v \in P^\varepsilon(x, y)$, $d_{P^\varepsilon}(v) = 2$, la S -chaîne est de la forme $P^\varepsilon(x, x)$.

Cas 2 : Si le sommet x (ou y) $\in C$, donc $P^\varepsilon(x, y)$ est de la forme suivante :

$P^\varepsilon(x, y) : xe_1x_1e_2x_2 \dots x \dots x_{n-1}e_ny$ (voir FIGURE 2.2 (a)).

Ceci implique que le sommet x est incident à 3 arêtes, d'où $d_{P^\varepsilon}(x) = 3$.

Cas 3 : Si les sommets x et $y \notin C$, alors $P^\varepsilon(x, y)$ est sous l'une des formes suivantes :

$P^\varepsilon : x e_1 x_1 e_2 x_2 \dots x' \dots x' \dots x_{n-1} e_n y; \dots (*)$ (voir FIGURE 2.2 (b))

$P^\varepsilon : x e_1 x_1 e_2 x_2 \dots e' x' e'' \dots e''' x' e' \dots x_{n-1} e_n y; \dots (**)$ (voir FIGURE 2.2 (c))

On a d'après (*) le sommet x' est incident à 4 arêtes d'où, $d_{P^\varepsilon}(x') = 4$ et pour (**) le sommet x' est incident à 3 arêtes d'où, $d_{P^\varepsilon}(x') = 3$.

$\Leftarrow$) Si $P^\varepsilon(x, y)$ admet un sommet v tel que $d_{P^\varepsilon}(v) \in \{2, 3, 4\}$ ceci implique que lorsque on parcourt la S -chaîne $P^\varepsilon(x, y)$ le passage par le sommet v n'est pas unique, donc on en déduit que ce sommet est dans un cycle, et ce dernier est négatif, si non la S -chaîne $P^\varepsilon(x, y)$ n'est pas minimale. ■

Remarque : Si $d_{P^\varepsilon}(v) = 4$, alors le sommet v est unique dans $P^\varepsilon(x, y)$ et

$\forall x \in P^\varepsilon(x, y) (x \neq v) : d_{P^\varepsilon}(x) \in \{1, 2\}$ (voir FIGURE 2.2 cas (b)).

1.2.3 Définition ([11]). Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé et C une S -chaîne élémentaire de G_σ donnée comme suit :

$$C = x, e_1, x_1, e_2, x_2, \dots, y.$$

On pose $x = y$: si $\sigma(C) = +1$, alors la S -chaîne C est dite **un S -cycle élémentaire** de G_σ (on a trois types de S -cycles pour G_σ).

1.2.3 Proposition. C est un S -cycle élémentaire de G_σ , si et seulement si C est un frame circuit de G_σ .

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition d'un circuit de type [(i), (ii), (iii)] de $M(G_\sigma)$ donnée par Zaslavsky, la Proposition 1.2.1 et la Définition 1.2.3. ■

1.2.1 Corollaire. Un S -cycle qui est réduit à une seule arête (une boucle) est un S -cycle de type (i), et s'il est réduit à deux arêtes soit il est un S -cycle de type (i) ou de type (ii), et s'il admet au moins 3 arêtes soit c'est un S -cycle de type (i), (ii) ou de type (iii).

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition des circuits de type [(i), (ii), (iii)] de $M(G_\sigma)$ donnée par Zaslavsky. ■

1.3 Connexité des graphes signés

1.3.1 Définition. soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. Considérons la relation R dans V définie par :

$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ \text{Il existe deux } S\text{-chaînes de signes différents reliant } x \text{ et } y. \end{cases}$$

1.3.1 Proposition ([11]). R est une relation d'équivalence.

Preuve :

1. **R est Réflexive :** évidente.

2. **R est Symétrique :** évidente.

3. **R est Transitive :** $\forall x, y$ et $z \in V$, il existe dans G_σ les S -chaînes suivantes :

$$P^+(x, y), P^-(x, y), P^+(y, z) \text{ et } P^-(y, z).$$

La concaténation de $P^+(x, y)$ (resp. $P^-(x, y)$) et $P^+(y, z)$ (resp. $P^-(y, z)$) donne $P^+(x, z)$, et la concaténation de $P^-(x, y)$ (resp. $P^+(x, y)$) et $P^+(y, z)$ (resp. $P^-(y, z)$) donne $P^-(x, z)$. ■

1.3.2 Définition ([11]). Un graphe signé G_σ est dit **S -connexe** (S est pour signé), si pour toute paire de sommets x et y , il existe deux S -chaînes de signes différents les reliant.

Les classes d'équivalence de la relation d'équivalence R forment une partition $(V_1, \dots, V_q)$ de $V(G_\sigma)$. Les sous-graphes de G_σ engendrés par les sous-ensembles V_i ($i = 1, \dots, q$) sont appelés les **composantes S -connexes** de G_σ .

1.3.2 Proposition. *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé. Si G_σ est réduit à un cycle négatif, alors G_σ est un graphe signé S -connexe.*

Preuve : Un cycle négatif est une S -chaîne fermée de signe négatif (une hypercyclique S -chaîne), d'où chaque paire de sommets de cette S -chaîne sont reliés par deux S -chaînes de signes différents. ■

1.3.1 Lemme ([11]). *Une hypercyclique S -chaîne est un graphe signé S -connexe.*

Preuve : Soit $P^\alpha(x, y)$ une hypercyclique S -chaîne de signe α reliant x et y (voir FIGURE 2.2),

$$P^\alpha(x, y) : x, x_1, x_2, \dots, x_i, z_1, \dots, z_j, x_i, x_{i+1}, \dots, y.$$

À partir de $P^\alpha(x, y)$, la séquence donnée par $C : x_i, z_1, \dots, z_j, x_i$; est un cycle négatif. Soit

$$P^\beta(x, y) : x, x_1, x_2, \dots, x_i, x_{i+1}, \dots, y.$$

la S -chaîne acyclique de signe β contenue dans $P^\alpha(x, y)$. β est donné par :

$$\alpha = \sigma(P^\alpha) = \sigma(P^\beta)\sigma(C) = -\beta, \Rightarrow \beta = -\alpha.$$

Donc les deux S -chaînes $P^\alpha(x, y)$ et $P^\beta(x, y)$ sont de signes différents. ■

1.3.1 Corollaire. *Les S -cycles de type (ii) et (iii) sont des graphes signés S -connexes.*

Preuve : Il suffit d'utiliser le Lemme 1.3.1, car les S -cycles de type (ii) et (iii) sont des hypercycliques S -chaînes fermées. ■

1.3.1 Théorème ([11]). *Les S -composantes d'un graphe signé sont les composantes connexes non équilibrées et les sommets isolés des composantes connexes équilibrées.*

Un graphe signé G_σ est un graphe S -connexe, si et seulement si G_σ est un graphe signé connexe non équilibré, ou il est réduit à un sommet isolé.

Preuve : Supposons que G_σ est S -connexe.

C. N : Supposons que G_σ est équilibré (G_σ est sans hypercycliques S -chaînes). Supposons qu'il existe deux sommets x et y de G_σ tels que on a $P^+(x, y)$ et $P^-(x, y)$, la concaténation des deux chaînes donne un cycle négatif. Après commutation, G_σ est positif (d'après le Lemme 2.1.1 du Chapitre 1) mais le cycle reste négatif ce qui est impossible. Cependant tels sommets différents ne peuvent exister, ainsi $|V| = 1$.

C. S : Supposons que G_σ est non équilibré et soient C un cycle négatif et x, y deux sommets de G_σ . Puisque le graphe est connexe, soit P_x (resp. P_y) une chaîne de x à $x' \in C$ (resp. de y à $y' \in C$). Si $x' = y'$ alors $P_x \cup P_y \cup C$ est une hypercyclique S -chaîne, ainsi d'après le Lemme 1.3.1, x et y sont reliés par deux S -chaînes de signes différents. Si $x' \neq y'$, soient C_1 et C_2 les deux chaînes reliant x' et y' dans C , qui sont de signes opposés, alors $P_x \cup P_y \cup C_1$ et $P_x \cup P_y \cup C_2$ sont deux S -chaînes de signes opposés reliant x et y . ■

1.4 S -isthme ; S -sommet d'articulation ; S -bloc

1.4.1 Définition ([11]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. Une arête e de E est appelée un S -**isthme**, si le graphe $G_\sigma - e$ n'est pas S -connexe.

1.4.1 Proposition ([11]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe avec $|V| > 1$. Une arête e de E est un S -isthme, si et seulement si e est un isthme ou est une arête d'équilibration.

Preuve : Soit e un S -isthme, on distingue les deux cas suivants :

Case 1. Si $G_\sigma - e$ est connexe, supposons qu'il est non équilibré.

Donc il est S -connexe (Théorème 1.3.1). Ainsi, e n'est pas un S -isthme. Cependant $G_\sigma - e$ est équilibré. Puisque G_σ est non équilibré (Théorème 1.3.1), e est une arête d'équilibration. Inversement, si e est une arête d'équilibration alors $G_\sigma - e$ est équilibré ainsi il n'est pas S -connexe.

Case 2. Si $G_\sigma - e$ n'est pas connexe, alors e est un isthme de G_σ . Inversement, un isthme dans un graphe signé S -connexe c'est évident qu'il est un S -isthme. ■

1.4.2 Proposition ([11]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. Si toutes les composantes connexes de $G_\sigma - e$ sont des composantes S -connexes pour toute arête e de E , alors G_σ n'est pas quasi-équilibré.

Preuve : Soit e arête de E . Si toutes les composantes connexes de $G_\sigma - e$ sont des composantes S -connexes, alors elles sont non équilibrées, ceci implique que chaque composante connexe admet un cycle négatif, d'où G_σ possède des S -cycles de type (ii) et (iii), cependant G_σ est non quasi-équilibré. ■

1.4.3 Proposition. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. Si e est un S -isthme, alors elle vérifie l'une des propriétés suivantes :

- e est un isthme.
- e n'appartient à aucun cycle positif.

Preuve : Soit e un S -isthme, on distingue les deux cas suivants :

1. Si $G_\sigma - e$ est non connexe, alors e est un isthme.
2. Si $G_\sigma - e$ est connexe, alors l'arête e appartient à un cycle, et puisque $G_\sigma - e$ n'est pas S -connexe, alors il est un graphe équilibré, ceci implique que G_σ est un graphe quasi-équilibré. On distingue les deux cas suivants :

- Si e appartient uniquement à un cycle positif, alors $G_\sigma - e$ est non équilibré, contradiction.
- Si e appartient à la fois à un cycle positif et un cycle négatif, alors $G_\sigma - e$ est non équilibré (car l'union des deux cycles précédents est un cycle négatif), contradiction.

D'où l'arête e appartient à un cycle négatif de G_σ . ■

1.4.2 Définition. Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe et x un sommet de V . Le sommet x est appelé un **sommet d'équilibration**, si x est dans chaque cycle négatif de G_σ , c'est-à-dire $G_\sigma - x$ est équilibré.

1.4.3 Définition. Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe et x un sommet de V . Le sommet x est appelé un **sommet S -sommet d'articulation**, si le graphe $G_\sigma - x$ n'est pas S -connexe et non vide.

1.4.4 Proposition ([11]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe avec au moins deux sommets. Un sommet x est un S -sommet d'articulation si et seulement s'il vérifie l'une des propriétés suivantes :

1. x est un sommet d'articulation.
2. x est un sommet d'équilibration.

Preuve : Soit x est un S -sommet d'articulation, on distingue les deux cas suivants :

Case 1. Si $G_\sigma - x$ est non connexe, alors x est un sommet d'articulation.

Case 2. Si $G_\sigma - x$ est connexe, alors x appartient à un cycle. $G_\sigma - x$ est non S -connexe, donc il est équilibré, et comme G_σ est non équilibré, alors le cycle contenant le sommet x est négatif, cependant x est un sommet d'équilibration. ■

1.4.1 Corollaire. Si un S -sommet d'articulation x appartient uniquement à un S -cycle de type (i), alors x est un sommet d'articulation.

Preuve : Si x est un S -sommet d'articulation appartenant uniquement à un S -cycle de type (i), et par hypothèse il est un S -sommet d'articulation, alors $G_\sigma - x$ est non connexe, donc il est un sommet d'articulation. ■

1.4.5 Proposition ([11]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. Si G_σ contient deux cycles négatifs sommet-disjoint, alors tout S -sommet d'articulation est un sommet d'articulation.

Preuve : Soient C_1 et C_2 deux cycles négatifs de G_σ , qui sont sommet-disjoint. Ainsi $G_\sigma - x$ est non équilibré et il est sans sommet d'équilibration. D'après le Théorème 1.3.1, $G_\sigma - x$ est S -connexe s'il est connexe. Cependant, si x est un S -sommet d'articulation, il est un sommet d'articulation. ■

1.4.6 Proposition ([11]). Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe et x un sommet d'articulation de G_σ . Si au moins deux composantes connexes de $G_\sigma - x$ sont des composantes S -connexes et possèdent au moins deux sommets, ou elles sont réduites à des boucles négatives, alors G_σ n'est pas quasi-équilibré.

Preuve : G_σ est connexe, x est un sommet d'articulation. Si les composantes connexes de $G_\sigma - x$ non réduites à un sommet isolé sont des composantes S -connexes, alors elles sont non équilibrées, ceci implique que chaque composante connexe admet un cycle négatif, d'où G_σ possède des S -cycles de type (ii) et (iii), cependant G_σ n'est pas quasi-équilibré. ■

1.4.4 Définition. Soient $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. G_σ est appelé **un S -bloc**, si G_σ est sans S -sommet d'articulation.

1.4.7 Proposition. Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. Si G_σ est un bloc et il possède un S -cycle de type (ii) ou de type (iii), alors il est un S -bloc.

Preuve : Il suffit d'utiliser la Définition 1.4.4 et la Proposition 1.4.5. ■

1.4.2 Corollaire. Les graphes quasi-équilibrés non équilibrés, ne sont pas des S -blocs.

Preuve : Il suffit d'utiliser la Proposition 1.4.7. ■

1.4.8 Proposition ([11]). *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un bloc S -connexe avec $|V| \geq 2$. G_σ est un S -bloc, si et seulement si G_σ est sans sommet d'équilibration.*

Preuve : Puisque G_σ est S -connexe avec au moins 2 sommets, il est non équilibré.

Un sommet x est un S -sommet d'articulation
 $\Updownarrow$
 $G_\sigma - x$ n'est pas S -connexe
 $\Updownarrow$
 (puisque $G_\sigma - x$ est connexe)
 $G_\sigma - x$ est équilibré avec au moins deux sommets (par hypothèse).
 Cependant, G_σ n'admet pas de S -sommet d'articulation
 $\Updownarrow$
 $G_\sigma - x$ est non équilibré pour tout sommet x . ■

1.5 S -connexité ; Frame connexité ; Lift connexité

1.5.1 Théorème ([11]). *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé non équilibré.*

- *Si G_σ est frame connexe, alors il est S -connexe. S'il est S -connexe, il peut ne pas être frame connexe.*
- *Si G_σ est lift connexe, alors chaque composante connexe de G_σ est S -connexe et elle est une S -composante. S'il est S -connexe, il peut ne pas être lift connexe.*

Preuve : Il suffit de comparer entre les S -composantes (Théorème 1.3.1) et les composants frame connexes, composantes lift connexes (Définition 3.6.1 du Chapitre 1) de G_σ . ■

1.5.1 Proposition ([11]). *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe. Si pour une certaine arête e de G_σ chaque composante connexe de $G_\sigma - e$ est S -connexe et admet plus d'un sommet ou est réduite à une boucle négative, alors G_σ n'est pas quasi-équilibré.*

Preuve : Puisque G_σ est S -connexe, il est connexe.

Si pour une certaine arête e de G_σ les composantes connexes de $G_\sigma - e$ sont S -connexes, alors chacune d'elles est non équilibrée puisque par hypothèse, elle possède plus d'un sommet ou elle a une boucle négative.

Ceci implique que chaque composante connexe admet un cycle négatif, cependant G_σ n'est pas quasi-équilibré. ■

1.5.2 Proposition ([11]). *Tout frame isthme ou un lift isthme e dans un graphe signé S -connexe est un S -isthme, mais si $|V| = 1$, e est l'unique boucle négative, alors e n'est pas un S -isthme.*

Preuve : D'après le Théorème 1.3.1 G_σ est connexe. Soit e un frame isthme de G_σ . Si e est un isthme de G_σ , e est aussi un S -isthme de G_σ . Si e n'est pas un isthme de G_σ , alors e est une arête d'équilibration de G_σ .

- Si $|V| > 1$, ceci implique que $G_\sigma - e$ n'est pas S -connexe, de cela l'arête e est un S -isthme.
- Si $|V| = 1$, e est une boucle négative et $G_\sigma - e$ est S -connexe, ainsi e n'est pas un S -isthme.

Soit e un lift isthme. Si elle est, soit un isthme ou une arête d'équilibration de G_σ , alors elle est un S -isthme si $|V| > 1$ mais non si $|V| = 1$ pour la même raison donnée ci-dessus. ■

Remarque :

Un S -isthme qui n'est pas une boucle négative n'est pas toujours un frame isthme. Soient G_σ un graphe signé connexe et e un isthme tel que $G_\sigma - e$ possède deux composantes non équilibrées. Alors e est un S -isthme mais n'est pas un frame isthme.

Cependant, d'après la Proposition 1.4.1 et le Lemme 3.8.4 du Chapitre 1 tout S -isthme est un lift isthme.

1.5.2 Théorème ([11]). *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé S -connexe, et e un S -isthme avec $G_\sigma - e$ est non connexe. Les composantes connexes de $G_\sigma - e$ sont des composantes S -connexes, si et seulement si l'arête e n'est pas un frame isthme.*

Preuve : Soit e un S -isthme de G_σ avec $G_\sigma - e$ est non connexe.

C. N : Une composante connexe de $G_\sigma - e$ qui est S -connexe, elle est non équilibrée ou équilibré réduite à un sommet isolé. Si les composantes connexes de $G_\sigma - e$ sont non équilibrées, alors e est dans un frame circuit de type (iii) ainsi e n'est pas un frame isthme.

C. S : Supposons que $G_\sigma - e$ admet une composante connexe non S -connexe, donc d'après le Théorème 1.3.1, cette composante connexe est équilibrée, d'où $b(G_\sigma - e) > b(G)$, contradiction. ■

Remarque

Sous les hypothèses du Théorème 1.5.2, les composantes connexes de $G_\sigma - e$ sont S -connexes, si et seulement si elles sont non équilibrées. La preuve est la même.

1.6 Les graphes signés sans cycles positifs

1.6.1 Définition ([60], Exemple 6.2). *Un graphe signé sans cycles positifs est appelé **un graphe signé contre-équilibré**.*

1.6.1 Proposition ([11]). *Soit G_σ un graphe signé contre-équilibré. Si C et C' sont deux cycles négatifs de G_σ , alors $|V(C) \cap V(C')| \leq 1$.*

Preuve : Si $|V(C) \cap V(C')| \geq 2$, alors il existe dans G_σ un cycle positif C_1 tel que, $C_1 \subseteq C \cup C'$ et $C_1 \in M(G_\sigma)$, contradiction. ■

1.6.1 Lemme. *Soit G_σ un graphe non équilibré. G_σ est contre-équilibré, si et seulement si quelque soit C et C' deux cycles négatifs de G_σ , $E(C) \cap E(C') = \emptyset$.*

Preuve : G_σ est contre-équilibré avec au moins deux cycles négatifs $\Leftrightarrow G_\sigma$ admet des S -cycles de type (ii), (iii) ou (iii') $\Leftrightarrow \forall C$ et C' deux cycles négatifs de G_σ : $E(C) \cap E(C') = \emptyset$. ■

1.6.1 Corollaire. *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé contre-équilibré. Si C et C' sont deux cycles négatifs de G_σ , alors $|E(C) \cap E(C')| = 0$.*

Preuve : On suppose que G_σ admet deux cycles négatifs C et C' , tels que $|E(C) \cap E(C')| \geq 1$, alors on aura une contradiction avec la Proposition 1.6.1 et le Lemme 1.6.1. ■

1.6.2 Définition. *Une forêt de cactus est un graphe dans lequel, chaque bloc est un cycle, un isthme, ou un K_1 .*

Un téta graphe est un graphe qui se compose de trois chaînes élémentaires sommet-disjoint avec les mêmes extrémités.

1.6.1 Théorème ([11]). *Un graphe signé est sans cycles positifs, si et seulement s'il est une forêt de cactus contre-équilibrée.*

Preuve : Le graphe signé G_σ contient un cycle positif s'il contient un téta graphe, car tout téta graphe dans un graphe signé contient un nombre impair de cycles positifs [[57], Théorème 6].

Si G_σ est contre-équilibré, alors chaque bloc est un isthme, un cycle ou un K_1 . ■

1.6.2 Théorème ([11]). *Soit G_σ un graphe signé connexe, contre-équilibré avec au moins deux sommets. G_σ est S -connexe si et seulement s'il admet un cycle.*

Si G_σ admet un unique cycle, alors chaque arête est un S -isthme. S'il admet au moins deux cycles, une arête est un S -isthme si et seulement si elle est un isthme.

Preuve :

S -conexité : le graphe signé G_σ est équilibré si et seulement s'il est sans cycles. D'après le Théorème 1.3.1 il est S -connexe, si et seulement s'il est non équilibré.

S -isthmes : Si G_σ possède des cycles, alors il est non équilibré, ainsi d'après la Proposition 1.4.1 il est S -connexe. Soit e une arête de G_σ . Si G_σ admet au moins deux cycles, $G_\sigma - e$ est non équilibré; cependant, il est S -connexe si et seulement s'il est connexe. Ainsi, e est un S -isthme si et seulement si elle est un isthme.

Si G_σ a exactement un seul cycle, alors il est non équilibré mais $G_\sigma - e$ est soit un graphe équilibré, si e est dans le cycle, ou un graphe non connexe, si e n'est pas dans le cycle. D'où chaque arête est un S -isthme. ■

1.6.3 Théorème ([11]). *Soit G_σ un graphe signé connexe, contre-équilibré avec au moins deux arêtes. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

- (1) G_σ est frame connexe.
- (2) G_σ est sans frame isthme.
- (3) G_σ admet au moins deux cycles et sans arête pendante.

Si G_σ n'a pas ces propriétés, alors chaque arête est un frame isthme.

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) : Puisque G_σ est frame connexe et il admet au moins deux arêtes, il ne peut avoir un frame isthme.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Puisque G_σ est sans frame isthme, toute arête est dans un frame circuit de type (ii) ou (iii). Il suit que G_σ admet au moins deux cycles et il est sans arêtes pendantes.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Tout bloc de G_σ est soit un cycle négatif ou un isthme qui est sur une chaîne reliant deux cycles négatifs. Donc chaque paire d'arêtes est dans un circuit de $M(G_\sigma)$, ceci implique que $M(G_\sigma)$ est connexe, d'où G_σ est frame connexe.

Frames isthmes : Si (3) n'est pas vraie, alors on n'a pas des frames circuits, cependant chaque arête est un frame isthme. ■

1.6.4 Théorème ([11]). Soit G_σ un graphe signé connexe, contre-équilibré avec au moins deux arêtes et sans sommet isolé. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

- (1) G_σ est lift connexe.
- (2) G_σ est sans lift isthme.
- (3) G_σ admet au moins deux cycles et il est sans isthme.

Si G_σ n'a pas au moins deux cycles, alors chaque arête est un lift isthme.

Preuve :

(1) $\Rightarrow$ (2) : Puisque G_σ est lift connexe et il admet au moins deux arêtes, il ne peut avoir un lift isthme.

(2) $\Rightarrow$ (3) : Puisque G_σ est sans lift isthme, toute arête est dans un lift circuit de type (ii) ou (iii'). Il suit que G_σ admet au moins deux cycles et il est sans isthme.

(3) $\Rightarrow$ (1) : Chaque paire de cycles forme un lift circuit de type (ii) ou (iii') de $L(G_\sigma)$, ceci implique d'après le Lemme 3.5.1 Chapitre 1, que $L(G_\sigma)$ est connexe, d'où G_σ est lift connexe.

Lift isthmes : Chaque isthme est un lift isthme d'après le Lemme 3.8.4 Chapitre 1. Si G_σ admet un unique cycle, alors chaque arête de ce cycle est une arête d'équilibration ainsi elle est un lift isthme d'après le Lemme 3.8.4 du Chapitre 1. ■

1.7 Connexité positive et connexité négative

Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé dont toutes ses arêtes sont négatives (c'est-à-dire $\forall e \in E : \sigma(e) = -1$) et il est noté G_- .

Une chaîne est positive si elle est de longueur paire et elle est négative si elle est de longueur impaire.

Rappelons qu'un graphe signé G_σ est dit anti-équilibré, si G_- est équilibré. D'une manière équivalente G_σ est commuté pour avoir tous ses signes négatifs. Aussi d'une manière équivalente, les cycles positifs sont de longueur paire et les cycles négatifs sont de longueur impaire.

1.7.1 Définition ([11]). Dans un graphe non orienté G , deux sommets sont appelés **parité reliés** s'ils sont reliés par deux chaînes de longueurs différentes.

D'une manière équivalente, sont appelés **S-reliés** dans G_- .

Ainsi G_- (resp. G) est dit **S-connexe** (resp. **parité connexe**), si et seulement si chaque paire de sommets sont reliés par deux chaînes, une chaîne de longueur paire et une chaîne de longueur impaire.

1.7.1 Théorème ([11]). Un graphe non orienté connexe avec au moins deux sommets est parité connexe si et seulement s'il n'est pas biparti.

Preuve : Soit G un graphe connexe. Il est parité connexe, si et seulement si G_- est S-connexe, et il n'est pas biparti, si et seulement si G_- est non équilibré.

D'après le Théorème 1.3.1, G_- est S-connexe si et seulement s'il est non équilibré. ■

1.7.2 Définition ([11]). Un graphe signé G_σ est dit **positivement connexe** si chaque paire de sommets sont reliés par une chaîne de signe positive.

Les composantes positivement connexes de G_σ sont les sous graphes maximaux positivement connexes de G_σ .

Deux sommets x et y de G_σ sont dits **négativement reliés** s'ils sont reliés par une chaîne de signe négative. Généralement, la relation d'être négativement reliés n'est pas transitive. Cependant, les composantes négativement connexes de G_σ sont les sous graphes maximaux tels que chaque paire de sommets x et y sont négativement reliés, ou elle a un troisième sommet z tel que x et y sont négativement reliés à z .

1.7.1 Proposition ([11]). Les composantes positivement connexes de G_σ sont les composantes connexes non équilibrées de G_σ , les sous graphes induits par les deux ensembles de la bipartition de Harary de chaque composante connexe équilibrée dans lesquels pas toutes les arêtes sont positives, et les composantes connexes dans lesquels toutes les arêtes sont positives.

Les composantes négativement connexes de G_σ sont les composantes connexes non équilibrées de G_σ , les composantes connexes équilibrées qui ne sont pas positives (ont des arêtes négatives), et les sommets isolés des composantes connexes dans lesquels toutes les arêtes sont positives.

Preuve : Une composante S -connexe de G_σ est à la fois positivement connexe et négativement connexe.

Donc d'après le Théorème 1.3.1, chaque composante connexe non équilibrée est à la fois une composante positivement connexe et une composante négativement connexe.

Une composante connexe équilibrée dont toutes les arêtes sont positives est positivement connexe, et aucun de ces sommets sont négativement reliés.

Ainsi la composante est une composante positivement connexe et chaque sommet isolé lui même est une composante négativement connexe.

Si une composante connexe équilibrée G'_σ n'est pas positive (ses arêtes ne sont pas toutes positives), alors soient W , $V - W$ les ensembles de sa bipartition de Harary (voir Définition 2.1.4 Chapitre 1). Les arêtes négatives sont les arêtes qui relient W et $V - W$. La chaîne positive qui commence dans W doit terminer dans W , ou une chaîne négative qui commence dans W doit terminer dans $V - W$. Ainsi, les sommets de W ne sont pas positivement reliés à ceux de $V - W$, mais puisque il existe une chaîne reliant deux sommets quelconques de la composante, tous les sommets dans W sont positivement reliés entre eux.

Cependant, W engendre une composante positivement connexe de G_σ .

Pareillement, $V - W$ aussi engendre une composante positivement connexe.

Puisque dans G'_σ une chaîne négative relie entre un sommet de W et un sommet de $V - W$, G'_σ est une composante négativement connexe de G_σ . ■

2. La b-connexité dans les graphes biorientés.

Nous nous intéressons dans cette partie à l'étude d'un nouveau concept de connexité dans les graphes biorientés.

2.1 b-chemin ; b-circuit

2.1.1 Définition ([12]). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté, et P une chaîne reliant x et y dans G_τ :

$$P : x e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y \text{ où } x, x_i, y \in V \text{ et } e_j \in E.$$

Supposons que : $\tau(e_1, x) = \alpha$ et $\tau(e_k, y) = \beta$ tels que $\alpha, \beta \in \{-1, +1\}$.

$\forall x_i \in V(P)$, on pose $W_P(x_i) = \tau(e_i, x_i) + \tau(e_{i+1}, x_i)$.

On notera dans ces conditions :

$$P_{(\alpha, \beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta.$$

On dira que $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ est **un b-chemin** (b est pour biorienté) de x^α à y^β si :

- (i) $k \geq 1$.
- (ii) $\tau(e_1, x) = \alpha$, et $\tau(e_k, y) = \beta$.
- (iii) $W_P(x_i) = 0, \forall i = 1, \dots, k-1$ si $k > 1$.
- (iv) $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ est minimal pour les propriétés (i)-(iii).

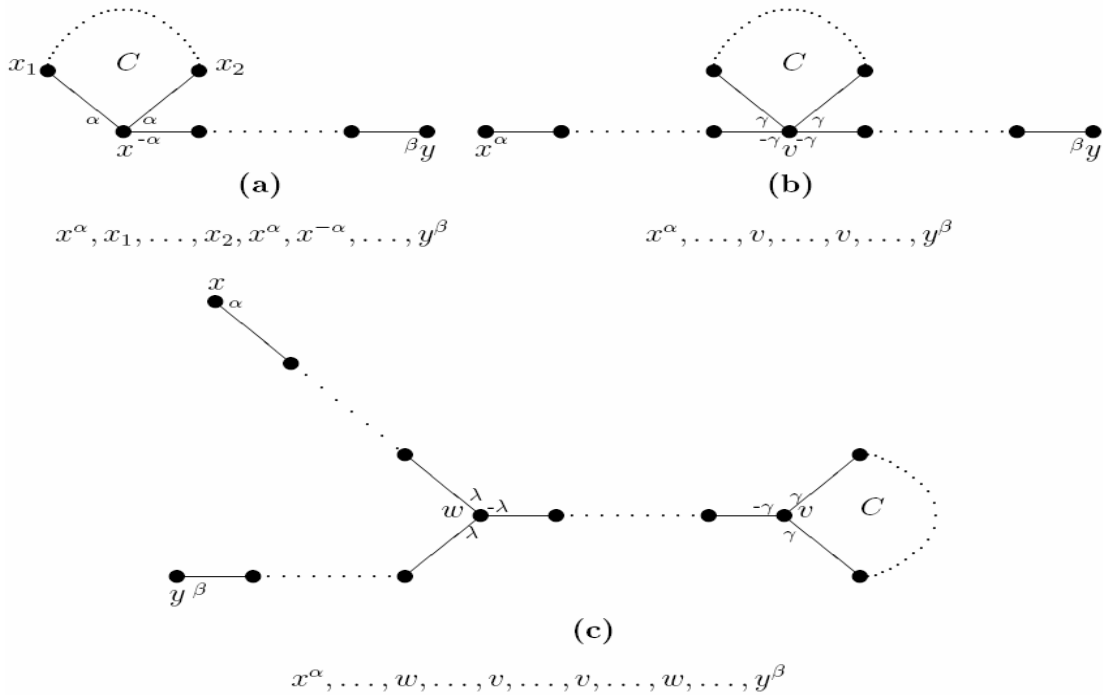


FIGURE 2.3 – Illustration d'un b-chemin où C est un cycle élémentaire négatif.

2.1.1 Remarques.

- Si e_i, e_{i+1} sont deux arêtes consécutives dans $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$, alors $e_i \neq e_{i+1}$. Si non on peut trouver un autre b-chemin plus petit que $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ qui ne passe pas par $e_i x_i e_{i+1}$, contradiction.
- Si $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ est un b-chemin de x^α à y^β , alors la séquence $P_{(\beta,\alpha)}(y, x)$ suivante :

$$P_{(\beta,\alpha)}(y, x) : y^\beta e_k x_{k-1} \dots e_{i+1} x_i e_i \dots x_1 e_1 x^\alpha$$

est un b-chemin de y^β à x^α .

2.1.1 Proposition ([12]). Le signe $\sigma(P_{(\alpha,\beta)}(x, y))$ du b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ est donnée par : $\sigma(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) = -\alpha\beta$.

Preuve : Soit $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ un b-chemin de x^α à y^β donné par la séquence suivante :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta.$$

$$\begin{aligned} \sigma(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) &= \prod_{e \in P_{(\alpha,\beta)}(x, y)} \sigma(e) \\ &= [-\tau(e_1, x)\tau(e_1, x_1)] \dots \\ &\quad [-\tau(e_{k-2}, x_{k-2})\tau(e_{k-1}, x_{k-1})][-\tau(e_k, x_{k-1})\tau(e_k, y)] \\ &= -\tau(e_1, x)[-\tau(e_1, x_1)\tau(e_2, x_1)] \dots \\ &\quad [-\tau(e_{k-1}, x_{k-1})\tau(e_k, x_{k-1})]\tau(e_k, y) \end{aligned}$$

D'après la définition des b-chemins des graphes biorientés on a :

$$W_P(x_i) = \tau(e_i, x_i) + \tau(e_{i+1}, x_i) = 0.$$

Ceci implique que,

$$\tau(e_i, x_i)\tau(e_{i+1}, x_i) = -1 \quad \forall i = 1, \dots, k-1 \text{ si } k > 1.$$

D'où $\sigma(P_{(\alpha,\beta)}) = -\tau(e_1, x)\tau(e_k, y) = -\alpha\beta$. ■

2.1.2 Proposition ([12]). Le poids $\overline{W}(P_{(\alpha,\beta)}(x, y))$ du b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ est donné par : $\overline{W}(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) = \alpha + \beta$.

Preuve : Soit $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ un b-chemin de x^α à y^β , donné par la séquence suivante :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta.$$

On a :

$$\begin{aligned} \overline{W}(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) &= \sum_{e \in P_{(\alpha,\beta)}(x, y)} \overline{W}(e) \\ &= \tau(e_1, x) + W_P(x_1) + W_P(x_2) + \dots + W_P(x_{k-1}) + \tau(e_k, y) \end{aligned}$$

D'après la définition des b-chemins des graphes biorientés on a :

$$W_P(x_i) = 0 \quad \forall i = 1, \dots, k-1 \text{ si } k > 1.$$

Ainsi

$$\overline{W}(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) = \tau(e_1, x) + \tau(e_k, y) = \alpha + \beta. \quad \blacksquare$$

2.1.3 Proposition ([12]). Soient G_τ un graphe biorienté et P une chaîne reliant x_0 et x_k ;

$$P : x_0 \ e_1 \ x_1 \ \dots \ e_i \ x_i \ e_{i+1} \ \dots \ x_{k-1} \ e_k \ x_k,$$

où $k \geq 1$ et $e_i = \{x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}, x_i^{\beta_i}\}$ pour $i = 1, \dots, k$.

Alors P est un b-chemin de G_τ , si et seulement si,

- (a) $\alpha_i = -\beta_i$ pour $i = 1, \dots, k-1$ et
- (b) $x_i^{\alpha_i} \neq x_j^{\alpha_j}$ si $i < j$ et $(i, j) \neq (0, k)$;

Et donc $P_{(\alpha_0, \beta_k)}$ est un b-chemin de $x_0^{\alpha_0}$ à $x_k^{\beta_k}$.

Preuve : Soient $x = x_0$, $y = x_k$, $\alpha = \alpha_0$, $\beta = \alpha_k$.

$\Rightarrow$) puisque $W_P(x_i) = \beta_i + \alpha_i$ pour $i = 1, \dots, k-1$, donc la condition (iii) is équivalente à la condition (1). Supposons que P est un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ de x^α à y^β . Donc P est une chaîne

$$x^{\alpha_0} \ e_1 \ x_1 \ \dots \ e_i \ x_i \ e_{i+1} \ \dots \ x_{k-1} \ e_k \ y^{\beta_k}$$

de $x_0^{\alpha_0}$ à $x_k^{\beta_k}$ qui satisfait (i)-(iii) dans la Définition 2.1.1. Si $x_i^{\alpha_i} = x_j^{\alpha_j}$ pour certain $i < j$, alors en négligeant $e_{i+1} \dots e_j$ nous obtenons une petite S -chaîne avec les mêmes propriétés (i)-(iii), à moins que $(i, j) = (0, k)$. On conclue que si $x_i = x_j$ ($i < j$ et $(i, j) \neq (0, k)$), alors $\alpha_i \neq \alpha_j$. Il suit que P satisfait (b).

$\Leftarrow$) Supposons que P satisfait (a) et (b). Alors elle satisfait (i)-(iii). Supposons que P n'était pas minimal avec ces propriétés. Alors il existe un b-chemin $Q_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ de x^α à y^β donc ses arêtes sont certaines arêtes de P dans le même ordre que dans P . Si Q commence par l'arête e_{i+1} , alors elle commence à $x_i^{\alpha_i}$ et $x_i^{\alpha_i} = x^\alpha = x_0^{\alpha_0}$, cependant $i = 0$ par (b). Pareillement, Q termine à l'arête e_k et au sommet $x_k^{\beta_k}$. Si Q admet les arêtes e_i et e_{j+1} avec $i < j$ mais non les arêtes $e_{i+1}, \dots, e_j$, alors $x_i^{\alpha_i} = x_i^{-\beta_i} = x_j^{\alpha_j}$, ce qui contredit (b). Cependant Q utilise toutes les arêtes de P . Il suit que P est minimal satisfaisant (i)-(iii), ainsi P est un b-chemin de x^α à y^β . ■

2.1.1 Corollaire ([12]). Si P est un b-chemin possédant un cycle positif C , alors $P = C$.

Preuve : Évidente d'après la Définition 2.1.1 et la Proposition 2.1.3. ■

2.1.2 Définition ([12]). Soient $G_{\tau=(V, E)}$ un graphe biorienté et $x \in V$. Un hypercyclique b-chemin en x est un b-chemin $P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)$ de x^α à x^α , qui est une hypercyclique S -chaîne réduite à un cycle négatif.

Remarque : Si $P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)$ est un hypercyclique b-chemin fermé en x , alors on a $\alpha \in \{-2, +2\}$, et x est l'unique sommet qui vérifie que $W_{P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)} = \pm 2$.

2.1.3 Définition ([12]). Un hypercyclique b-chemin dans un graphe biorienté G_τ , est un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ de x^α à y^β qui admet un seul hypercyclique b-chemin en un sommet de $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$.

Nous avons présenté dans la FIGURE 2.3 1 ci-dessus, les 3 cas possibles d'un hypercyclique b-chemin. On note que $\alpha, \beta, \lambda \in \{-1, +1\}$. Si $x = y$ dans le type (a), alors le hypercyclique b-chemin est dit un hypercyclique b-chemin fermé.

2.1.1 Lemme ([12]). *Un hypercyclique b-chemin doit être de la forme (a), (b) ou (c) de la FIGURE 2.3 ci-dessus.*

Preuve : Soient $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ un hypercyclique b-chemin de x^α à y^β , et C l'hypercyclique b-chemin en v dans $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ tel que $W_C(v) = \pm 2$. Le graphe engendré par $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ doit être constitué de C et des arbres reliés à C par un sommet, et il peut avoir au plus deux sommets de degré 1 car $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ admet seulement deux extrémités, nous pouvons le supposer $y \neq v$. $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ doit rencontrer C au sommet v (à moins que $v = x$) et le quitter à v pour arriver à y . Cependant, il doit y avoir un arbre relié à v . On ne peut pas y avoir un arbre relié à aucun sommet z de C autre que v , car $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ devrait rencontrer l'arbre de C à z^γ et retracer son chemin de nouveau à z^γ dans C , dans ce cas $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ contredit Remarques 2.1.1.

Cependant, les deux sommets x et y sont dans un arbre T relié à v , possible avec $x = v$.

Si $x \neq v$, alors x doit être un sommet de degré 1 dans T , ou $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ contredirait

Remarques 2.1.1. Pareillement, y doit être un sommet de degré 1 dans T . Comme T doit être l'union des chemins dans T de x et y à v , $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ peut seulement être l'un des types dans la FIGURE 2.3. ■

2.1.4 Définition ([12]). *Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et C un b-chemin de G_τ de la forme : $C : x^\alpha e_1 x_1 \dots x_{k-1} e_k x^\beta$; et $\alpha, \beta \in \{-1, +1\}$. Si $\alpha = -\beta$, dans C , alors la séquence C est appelée un **b-circuit** de G_τ .*

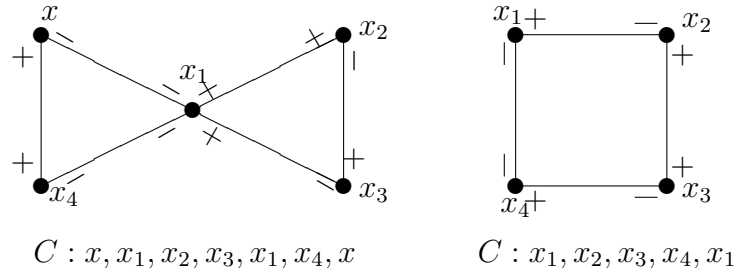


FIGURE 2.4 – Illustration d'un b-circuit

2.1.4 Proposition. *Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et C un b-circuit de G_τ . C est un S -cycle de type (i), (ii) ou (iii) de $(G_\tau)_\sigma$ (un circuit de $M((G_\tau)_\sigma)$).*

Preuve : Il suffit d'utiliser la Définition 2.1.1, le Lemme 2.1.1 et la Définition 2.1.4. ■

2.2 b-connexité

2.2.1 Définition ([12]). Soit G_τ un graphe biorienté. Considérons une relation R dans V définie par :

$$xRy \Leftrightarrow \begin{cases} x = y \\ \text{ou} \\ \text{Il existe un b-chemin } P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \text{ de } x^\alpha \text{ à } y^\beta ; \forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}. \end{cases}$$

2.2.1 Proposition ([12]). R est une relation d'équivalence.

Preuve :

1- R est réflexive : $\forall x \in V$, on a $x = x$. D'où xRx

2 - R est symétrique :

$$xRy \Leftrightarrow \text{il existe un b-chemin } P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \text{ de } x^\alpha \text{ à } y^\beta ; \forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}.$$

D'après la remarque donnée dans la Définition 2.1.1, il existe un b-chemin $P_{(\beta,\alpha)}(y,x)$ de y^β à x^α $\forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}$. D'où yRx .

3 - R est transitive : $\forall x, y$ et $z \in V$,

il existe un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ de x^α à y^β $\forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}$

et

il existe aussi un b-chemin $P_{(\alpha',\beta')}(y,z)$ de $y^{\alpha'}$ à $z^{\beta'}$ $\forall \alpha', \beta' \in \{-1, +1\}$.

Choisissons $\alpha' \in \{-1, +1\}$ tel que $\alpha' + \beta = 0$.

Alors il existe un b-chemin $P_{(\alpha,\beta')}(x,z)$ de x^α à $z^{\beta'}$ $\forall \alpha, \beta' \in \{-1, +1\}$. D'où xRz . ■

2.2.2 Définition ([12]). Un graphe biorienté G_τ est dit **b-connexe**, si pour toute paire de sommets x et y de G_τ , il existe un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ de x^α à y^β ; $\forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}$.

Les classes d'équivalence de la relation d'équivalence R forment une partition $(V_1, \dots, V_q)$ de $V(G_\tau)$. Les sous-graphes de G_τ engendrés par les sous-ensembles V_i ($i = 1, \dots, q$) sont appelés les **composantes b-connexes** de G_τ .

2.2.2 Proposition. Soit G_τ un graphe biorienté tel que $|V| \geq 2$. Si G_τ est b-connexe, alors il est non équilibré.

Preuve : Puisque G_τ est un graphe b-connexe, donc il existe deux sommets qui sont reliés par un b-chemin positif et un b-chemin négatif. Si les deux b-chemins sont non hypercycliques donc, ils sont des chaines élémentaires, et d'après Harary le graphe est non équilibré. Si l'un des deux est hypercyclique, alors ce b-chemin possède un cycle négatif, d'où le graphe b-chemin est non équilibré. ■

2.2.3 Proposition ([12]). Soit G_τ un graphe biorienté. Si G_τ est b-connexe, alors il est sans sommet pendant.

Preuve : Si G_τ admet un sommet pendant, alors ce sommet est l'extrémité d'au plus un b-chemin. Ceci contredit la définition de la b-connexité des graphes biorientés. ■

2.2.4 Proposition ([12]). Soit G_τ un graphe biorienté. Les b-circuits de types (ii) sont des graphes b-connexes.

Preuve : Soient $C = C_1 \cup C_2$ un b-circuit de type (ii) et x, y et v sont des sommets de C tels que $C_1 \cap C_2 = \{v\}$.

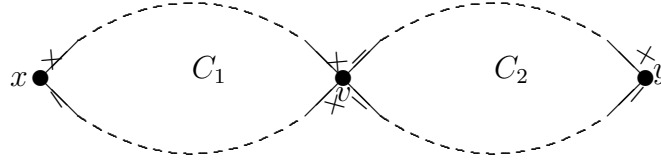


FIGURE 2.5 –

On distingue les cas suivants :

Cas 1 : Soient $x \in C_1 - v$ et $y \in C_2 - v$ (voir FIGURE 2.5). Puisque pour chaque sommet dans C on a $W(x) = W(v) = W(y) = 0$, alors x est une extrémité d'une arête $e_1 \in C_1$ telle que $\tau(x, e_1) = +1$ et aussi une extrémité d'une arête $e_2 \in C_1$ telle que $\tau(x, e_2) = -1$.

Soit P_i un b-chemin de x à v dans C_1 qui admet e_i , $i = 1, 2$.

Pareillement, y est une extrémité d'une arête $f_1 \in C_2$ telle que $\tau(y, f_1) = +1$ et aussi une extrémité d'une arête $f_2 \in C_2$ telle que $\tau(y, f_2) = -1$. Soit Q_j un b-chemin de y à v dans C_2 qui admet f_j , $j = 1, 2$.

Cependant, par la concaténation des b-chemins $P_i Q_j$, $(i, j = 1, 2)$, on obtient 4 b-chemins $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ de x^α à $y^\beta \forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}$.

Cas 2 : Soient x et $y \in C_1 - v$. Alors $C_1 - v$ admet un b-chemin P de x^α à y^β pour un certain $\alpha, \beta \in \{+1, -1\}$. En supprimant les arêtes de P , la partie restante de C est un b-chemin Q de $x^{-\alpha}$ à $y^{-\beta}$ qui possède C_2 . Maintenant pour les b-chemins de x^α à $y^{-\beta}$ sont obtenus comme suit : en prenant P suivi d'un b-chemin P_y dans C_1 , de y à v , passant par C_2 , ensuite P_y dans la direction inverse, et en termine à y . Cette dernière est obtenue en prenant le b-chemin P_x de x à v dans C_1 passant par C_2 ensuite rétractant P_x de v à x et continuons par P à y , on obtient 4 b-chemins $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ de x^α à $y^\beta \forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}$.

Cas 3 : Soient $y = v$ et $x \in C_1 - v$, de même que le cas 1. Les b-chemins P_1 et P_2 sont respectivement de x^+ à y^β et de x^- à y^β pour un certain $\beta \in \{+1, -1\}$. Les b-chemins $P_1 C_2$ et $P_2 C_2$ sont respectivement de x^+ à $y^{-\beta}$ et de x^- à $y^{-\beta}$ pour un certain $\beta \in \{+1, -1\}$, on obtient 4 b-chemins $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ de x^α à $y^\beta \forall \alpha, \beta \in \{-1, +1\}$. ■

2.2.5 Proposition ([12]). Soit G_τ un graphe biorienté. Les b-circuits de types (iii) sont des graphes b-connexes.

Preuve : La preuve est similaire à celle donnée dans la Proposition 2.2.4. ■

2.2.1 Théorème ([12]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté, tel que $|E(G_\tau)| \geq 1$. Si G_τ est b-connexe, alors il passe par chaque arête de G_τ un b-circuit.

Preuve : Soit $\{x^\alpha, y^\beta\}$ une arête de G_τ telle que $\alpha, \beta \in \{-1, +1\}$, puisque G_τ est b-connexe alors il existe un b-chemin de $x^{-\alpha}$ à $y^{-\beta}$. Donc l'union de ce b-chemin avec l'arête $\{x^\alpha, y^\beta\}$ constitue un b-circuit. ■

2.2.2 Théorème ([12]). *Soit $G_\sigma = (V, E)$ un graphe signé connexe. Il est possible en donnant une biorientation à G_σ afin d'obtenir un graphe biorienté G_τ b-connexe, si chaque paire de sommets appartient à un S -cycle de type (ii) ou (iii) dans G_σ .*

Preuve : Supposons que G_σ admet un S -cycle de type (ii) ou (iii), donc il est S -connexe. Pour la proof procédant comme suit :

Soit W un S -cycle de type (ii) ou (iii) de G_σ . Soit V_1 l'ensemble des sommets de W . On donne d'après la Définition 2.4.1 Chapitre 1, une biorientation compatible aux arêtes de W qui a pour but d'obtenir un b-circuit, et on donne une biorientation quelconque pour chaque d'autre arête ayant ses deux extrémités dans V_1 et qu'elle n'a pas été biorienté. D'après les Propositions 2.2.4 et 2.2.5 le sous graphe engendré par V_1 est b-connexe.

Si $V_1 = V$, la proof est terminée et le graphe biorienté G_τ obtenu est b-connexe.

Si non ($V - V_1 \neq \emptyset$), il existe alors un sommet $x \notin V_1$ et qui est adjacent à un sommet $y \in V_1$ (car G_σ est connexe). Ceci implique d'après l'hypothèse que cette arête appartient à un S -cycle W' de type (ii) ou (iii) de G_σ , qui admet une S -chaîne de y à un de V_1 , on donne d'après la Définition 2.4.1 Chapitre 1 une biorientation compatible aux arêtes de ce S -cycle W' de façon à en faire un b-circuit.

Soit V_2 l'union de V_1 et tous les sommet de W' . On donne une biorientation quelconque pour chaque d'autre arête ayant ses deux extrémités dans V_2 et qu'elle n'a pas été biorienté.

D'après les Propositions 2.2.4 et 2.2.5 le sous graphe engendré par V_2 est b-connexe.

Si $V_2 = V$, la proof est terminée et le graphe biorienté G_τ obtenu est b-connexe. Si non, nous répétons la même opération. ■

CHAPITRE 3

CHAPITRE 3.

Ce chapitre est consacré à l'étude des Fermetures et des réductions transitives dans les graphes.

3.1 La fermeture transitive dans les graphes biorientés.

3.2 La réduction transitive dans les graphes biorientés.

À la fin du chapitre nous donnerons des résultats reliant les deux transitivités.

1. La fermeture transitive dans les graphes

La Fermeture Transitive dans les Graphes Orientés a été introduite par B. ROY. Cette notion possède une signification graphique comme elle peut être interprétée au moyen de la matrice d'adjacence du graphe. Le but de cette partie est de prolonger cette notion pour les graphes biorientés. Nous cherchons à trouver une extension de la Fermeture Transitive usuelle pour les graphes biorientés, à travers laquelle la notion classique serait un cas particulier. Quelques résultats et propriétés seront établis et leurs relations avec les propriétés classiques seront notées.

1.1 La Fermeture Transitive dans les Graphes Orientés

1.1.1 Définition. Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté. **La fermeture transitive de G** , est le graphe $\text{Ft}(G) = (V, \text{Ft}(U))$ tel que $(x, y) \in \text{Ft}(U)$ s'il existe dans G un chemin P de x à y ($P : x \ x_1 \ x_2 \ x_3 \dots x_j \dots x_k \ y$).

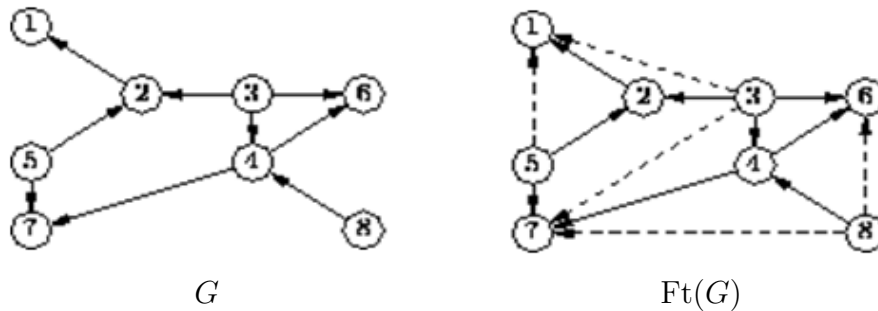


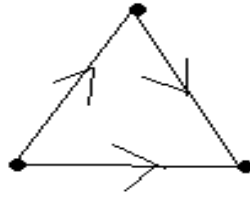
FIGURE 3.1 – Un graphe orienté G et sa fermeture transitive $\text{Ft}(G)$

1.1.2 Définition. Un **tournoi** est un graphe orienté $G = (V, U)$ tel que on a soit $(x, y) \in U$ ou bien $(y, x) \in U$.

Un **tournoi symétrique** est un graphe orienté $G = (V, U)$ complet, tel que on a $(x, y) \in U$ et $(y, x) \in U$.

1.1.1 Proposition. La fermeture transitive $\text{Ft}(P_{(x,y)})$ d'un chemin $P_{(x,y)}$ est un tournoi dont les triangles ne sont pas des circuits (voir FIGURE 3.2).

Preuve : Soit $P_{(x,y)}$ un chemin du sommet x au sommet y . Soient P_1 un sous-chemin de $P_{(x,y)}$ reliant x_1 à x_2 , et P_2 un autre sous-chemin de $P_{(x,y)}$ reliant x_2 à x_3 , et d'où d'après la définition de la fermeture transitive des graphes orientés, il existe dans $\text{Ft}(P_{(x,y)})$ un arc (x_1, x_2) et un arc (x_2, x_3) , ceci implique aussi qu'il existe un arc de x_1 à x_3 car d'après la concaténation de P_1 et P_2 il existe un sous-chemin de $P_{(x,y)}$ de x_1 à x_3 , et donc les triangles de $\text{Ft}(P_{(x,y)})$ sont tous de la forme ci-dessous (voir FIGURE 3.2). ■

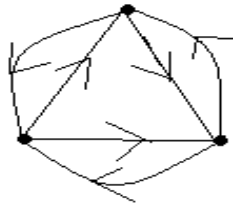
FIGURE 3.2 – Les triangles de $\text{Ft}(P_{(x,y)})$

1.1.2 Proposition. Soit $P_{(x,y)}$ un chemin de x à y . Si H est un sous graphe de $\text{Ft}(P_{(x,y)})$, alors $\text{Ft}(H) = H$.

Preuve : il est clair que le graphe $\text{Ft}(H)$ est complet. Chaque paire de ses sommets sont reliés soit par un arc de $P_{(x,y)}$ soit par un arc de $\text{Ft}(P_{(x,y)})$, ce dernier arc correspond à un chemin de $P_{(x,y)}$, donc toute fois qu'il existe un chemin dans H reliant deux sommets il existe aussi dans H l'arc qui lui correspond, donc chaque triplet de sommets de H forment un triangle (voir FIGURE 3.2), d'où $\text{Ft}(H) = H$. ■

1.1.3 Proposition. La fermeture transitive $\text{Ft}(C_n)$ d'un circuit C_n , $n \geq 3$, est un graphe complet symétrique, dont chaque triplet de sommets forme deux circuits (C_3) symétriques de longueur 3 (voir FIGURE 3.3).

Preuve : Soit C_n un circuit. Quels que soient les sommets x , y et z de C_n , il existe un chemin de x à y (resp. y à x) et un chemin de y à z (resp. z à y) ; chacun de ces chemins donne naissance à un arc de x à y (resp. y à x) et un arc de y à z (resp. z à y) et de plus un arc de x à z (resp. z à x) dans le graphe $\text{Ft}(C_n)$, et donc tout triplet de sommets de $\text{Ft}(C_n)$ forme deux circuits symétriques (voir FIGURE 3.3). ■

FIGURE 3.3 – Les triangles de $\text{Ft}(P_{(x,y)})$

1.1.4 Proposition. Soit C un circuit. Si H est un sous graphe de $\text{Ft}(C)$, alors $\text{Ft}(H) = H$ (H est transitif).

Preuve : Chaque deux sommet distinct de H sont reliés par deux arcs symétriques, donc s'il existe un chemin reliant deux sommets de H , il lui correspond un arc de $\text{Ft}(H)$ qui existe déjà dans le graphe H . ■

1.1.1 Corollaire. Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté. Si tous les chemins de G sont de longueur inférieure ou égale à 1 alors, G est biparti et $\text{Ft}(G) = G$ (Dans ce cas G est un graphe transitif).

Preuve : Si G possède un cycle pair, alors il existe un sommet x de V tel que $d^+(x) \neq 0$ et $d^-(x) \neq 0$, d'où il existe dans G un chemin de longueur supérieure ou égale à 2, contradiction donc G est biparti.

D'autre part, puisque G est un graphe partiel de $\text{Ft}(G)$, il suffit de montrer que :

$\forall u \in \text{Ft}(G)$, alors $u \in G$.

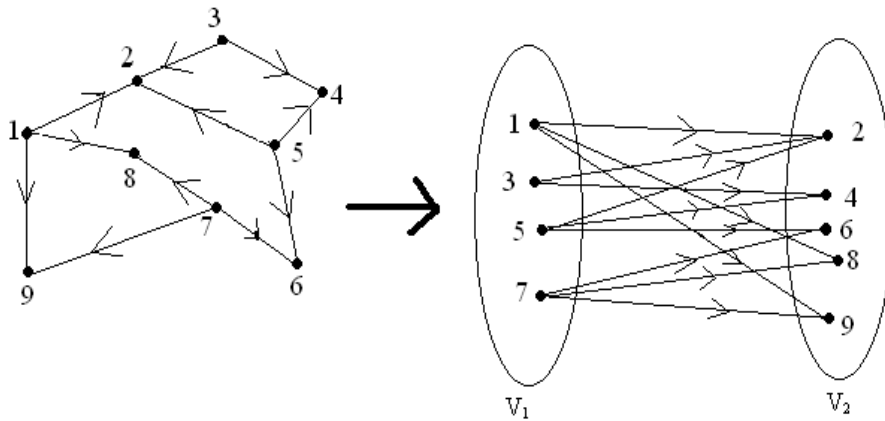
Supposons qu'il existe un arc $u = (x, y) \in \text{Ft}(G) - G$; ceci implique qu'il existe dans G d'après la définition de la fermeture transitive des graphes orientés un chemin de x à y de longueur supérieure ou égale à 2, contradiction. ■

• D'après le Corollaire 1.1.1, chaque sommet est soit une source soit un puit alors, on peut caractériser les graphes du Corollaire 1.1.1 comme suit :

Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté qui satisfait les suppositions du Corollaire 1.1.1, alors on a :

Le graphe G est un graphe biparti $G = (V_1 \cup V_2, U)$, dont tous les arcs sont orientés d'un sommet de V_1 vers un sommet de V_2 .

$$\begin{aligned} V_1 &= \{x \in G / d^-(x) = 0\} && \text{est l'ensemble des sommets sources.} \\ V_2 &= \{x \in G / d^+(x) = 0\} && \text{est l'ensemble des sommets puits.} \end{aligned}$$



1.1.5 Proposition. Soient G un graphe orienté et $u = (x, y)$ un arc qui n'est pas dans G , alors $\text{Ft}(G + u) = \text{Ft}(G)$ si et seulement si il existe dans G un chemin $P_{(x,y)}$ du sommet x au sommet y .

Preuve : Soit $u = (x, y) \in G$

$\Leftarrow$) Si $P_{(x,y)}$ est un chemin de x à y dans G , alors $\text{Ft}(G + u) = \text{Ft}(G)$ d'après la définition de la fermeture transitive de G .

$\Rightarrow$) Si $u = (x, y) \in G$ et $u \in \text{Ft}(G + u) \Rightarrow u \in \text{Ft}(G)$ [$\text{Ft}(G) = \text{Ft}(G + u)$]

$\Rightarrow$ il existe dans G un chemin de x à y . ■

1.2 Construction

Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté connexe, et soit $U = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}$ son ensemble d'arcs ordonné comme suit, $u_i < u_j \Leftrightarrow i < j$.

Soit $(G)_i$ la famille des graphes construite à partir de G comme suit :

$$\begin{aligned} G_0 &= G \\ G_1 &= G - u_1, u_1 = (x_1, y_1) \text{ tel que un chemin } P(x_1, y_1) \text{ existe dans } G \\ G_2 &= G_1 - u_2, u_2 = (x_2, y_2) \text{ tel que un chemin } P(x_2, y_2) \text{ existe dans } G_1 \\ &\vdots \\ G_n &= G_{n-1} - u_n, u_n = (x_n, y_n) \text{ tel que un chemin } P(x_n, y_n) \text{ existe dans } G_{n-1} \end{aligned}$$

1.2.1 Proposition. *Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté connexe. Le graphe G_n est connexe $\forall n \geq 0$.*

Preuve : Par récurrence. On définit la propriété $P(n)$ comme suit :

$$P(n) : G_n \text{ est connexe } \forall n \geq 0.$$

Pour $n = 0$, on a $G_0 = G$ est connexe.

Supposons que la propriété est vraie jusqu'à l'ordre $(n - 1)$ et montrons qu'elle est vraie pour l'ordre (n) , c'est-à-dire est ce que $P(n-1) \Rightarrow P(n)$?

$P(n) : G_n$ est connexe $\forall n \geq 0$.

On a $G_n = G - \{u_1, u_2, \dots, u_k, \dots, u_{n-1}\} = G_{n-1} - u_n$ d'après l'hypothèse de récurrence le graphe G_{n-1} est connexe, et puisqu'il existe dans le graphe $G_{n-1} - u_n$ un chemin $P(x_n, y_n)$ où toutes les chaînes qui passent par l'arc u_n vont utiliser ce chemin, alors $G_{n-1} - u_n$ est connexe et d'où G_n est connexe. ■

1.2.2 Proposition. *Soient $G = (V, U)$ un graphe orienté et $S \subseteq U$ tel que : $S = \{u_i \in U / u_i \in G_{i-1} - G_i\}$. Alors $\text{Ft}(G - S) = \text{Ft}(G)$.*

Preuve : Il est clair que $\text{Ft}(G - S) \subset \text{Ft}(G)$, donc il suffit de montrer que $\text{Ft}(G) \subset \text{Ft}(G - S)$. Soit $u = (x, y)$ un arc tel que ; $u \in \text{Ft}(G) - \text{Ft}(G - S)$:

- 1) Si $u \in G$, et on a supposé que $u \in \text{Ft}(G - S)$, alors $u \notin -S \Rightarrow u \in S$
 $\Rightarrow$ il existe un chemin de x à y dans $G - S$
 $\Rightarrow$ il existe un arc de x à y dans $\text{Ft}(G - S)$, contradiction.
- 2) Si $u \notin G \Rightarrow u \notin S$ ($u \in \text{Ft}(G)$)
 $\Rightarrow$ il existe un chemin de x à y dans G
 $\Rightarrow$ d'après la Proposition 1.2.1 il existe dans $G - S$ un chemin de x à y
et aussi l'arc $u = (x, y)$ existe et il appartient au graphe $\text{Ft}(G - S)$, contradiction. ■

1.3 La Fermeture Transitive Dans les Graphes Biorientés

Procédure vers la définition de la fermeture transitive des graphes biorientés.

D'après la définition de la fermeture transitive dans les graphes orientés, le rajout d'un arc pour construire le graphe de la Fermeture Transitive ne doit pas créer un circuit contenant les deux sommets considérés.

Rappelons que dans les graphes biorientés deux sommets peuvent être reliés par des arêtes de 4 types différents. Si x et y sont reliés par un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$, alors pour l'extension de la fermeture transitive aux graphes biorientés la question qui se pose est la suivante : lesquelles ou bien laquelle parmi les 4 arêtes doit on choisir (voir figure ci - dessous) :



Procédure : Soit $P_{(-,-)}(x,y)$ un b-chemin (voir FIGURE 3.4). La procédure consiste à relier les deux sommets x et y , par les 4 arêtes comme suit :

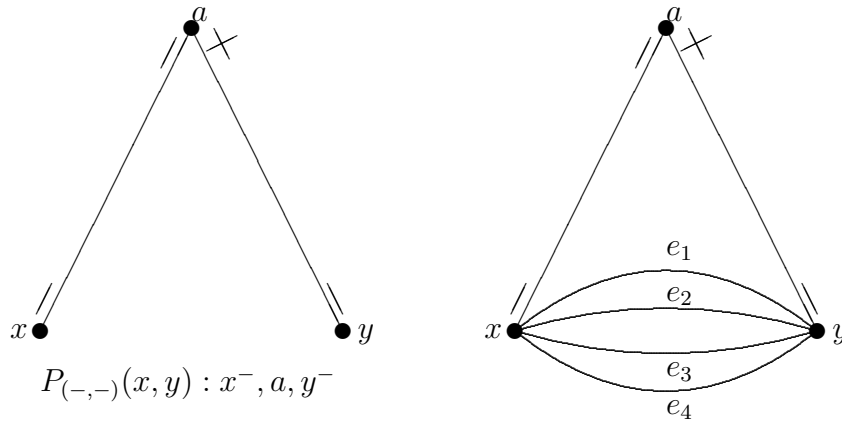


FIGURE 3.4 –

CAS 1 si on considère l'arête $e_2 = \{x^+, y^+\}$ comme l'arête de la fermeture, alors les deux sommets seront dans un b-circuit, et ceci contredit la définition de la fermeture.

CAS 2 si on considère les deux arêtes $e_3 = \{x^-, y^+\}$ et $e_4 = \{x^+, y^-\}$ simultanément comme arêtes de la fermeture, alors les deux sommets seront aussi dans un b-circuit. C'est-à-dire que ces deux arêtes ne doivent pas être ensemble dans le graphe de la fermeture transitive.

On constate ainsi que l'on a deux possibilités de fermetures transitives différentes Ft_1 et Ft_2 pour ce graphe (c'est-à-dire que chacun contient l'une des ces deux arêtes) Voir FIGURE 3.5

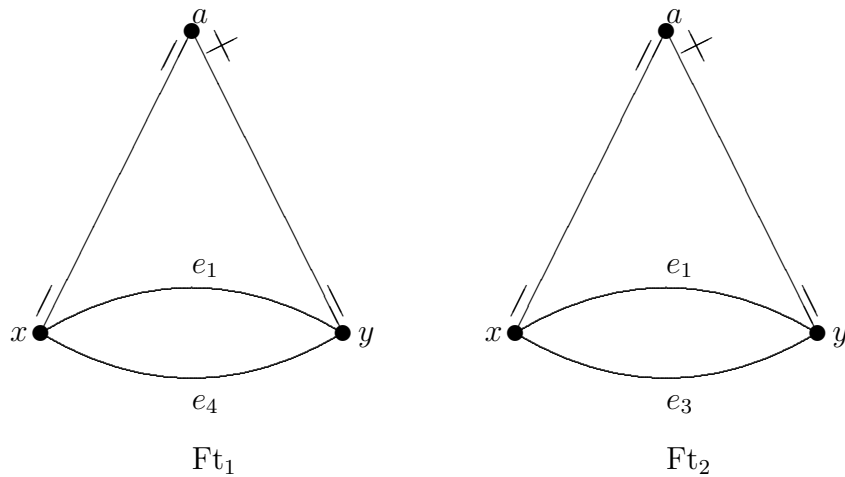


FIGURE 3.5 –

Considérons le graphe suivant (voir FIGURE 3.6(a)), en appliquant au b-chemin : $P_{(-,-)} : x^-, v, y^-$ les deux fermetures Ft_1 et Ft_2 , on obtient les deux FIGURE 3.6 (b) pour Ft_1 et FIGURE 3.6 (c) pour Ft_2 .

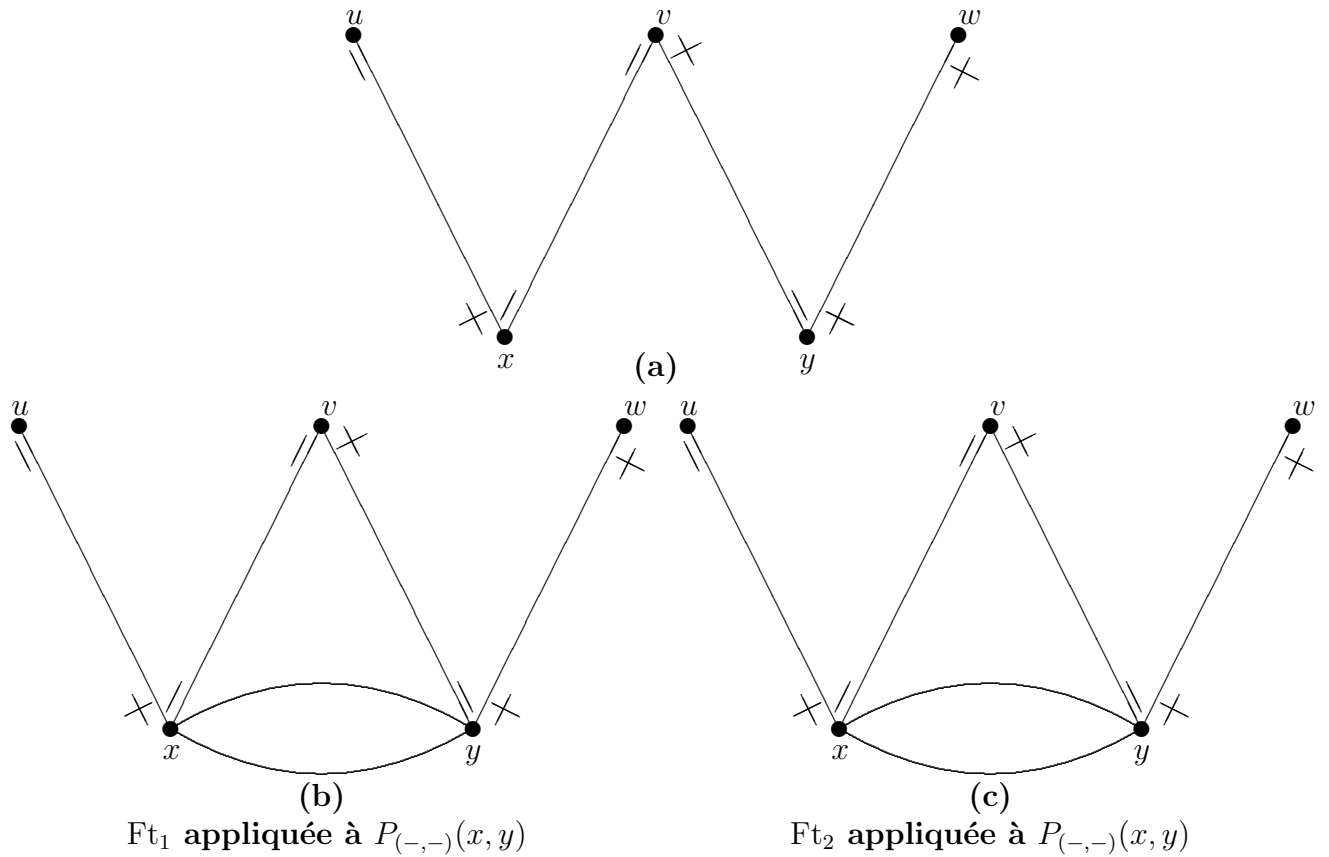


FIGURE 3.6 –

Dans le graphe G_τ de la FIGURE 3.6 (a) pour aller de u^- à w^+ on doit passer par le b-chemin $P_{(-,-)}(x, y)$. Mais les deux arêtes e_4, e_3 dans Ft_1 (FIGURE 3.6 (b)) et dans Ft_2 (FIGURE 3.6 (c)) respectivement ne peuvent être utilisées pour aller de u^- à w^+ , on constate qu'aucune d'elles ne peut remplacer le b-chemin $P_{(-,-)}(x, y)$ dans Ft_1 et Ft_2 .

Ceci implique qu'on doit éliminer les deux arêtes e_4, e_3 dans les FIGURES 3.5, 3.6 (b) et 3.6 (c), ce qui revient à supprimer les b-chemins en x et en y dans les deux graphes Ft_1 et Ft_2 respectivement.

Ainsi, d'après cette analyse :

- On utilise pour la fermeture transitive biorientée une seule arête parmi les 4 différentes arêtes existantes

Cette arête choisie complète le b-chemin considéré, et de plus elle-même est un b-chemin.

Ceci nous amène à proposer la définition suivante de la *Fermeture Transitive dans les Graphes Biorientés*, qui sera la seule utilisée par la suite :

1.3.1 Définition ([13]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. G_τ est transitif si pour toute paire de sommets x et y (non nécessairement distincts) il existe à la fois un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}$ de x^α à y^β et une arête $\{x^\alpha, y^\beta\}$ dans G_τ .

1.3.2 Définition ([13]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. La fermeture transitive de G_τ est le graphe noté $Ft(G_\tau) = (V, Ft(E))$ telle que $\{x^\alpha, y^\beta\} \in Ft(E)$ s'il existe un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ de x^α à y^β dans G_τ (x et y ne sont pas nécessairement distincts).

Remarque :

Il est clair que $E \subseteq Ft(E)$. Si $\{x^\alpha, y^\beta\} \in E$, alors $\{x^\alpha, y^\beta\}$ est une arête d'un b-chemin de longueur 1, ainsi $\{x^\alpha, y^\beta\} \in Ft(E)$.

1.3.1 Proposition ([13]). Ft est un opérateur de fermeture abstrait :

- (i) G_τ est un graphe partiel de $Ft(G_\tau)$.
- (ii) Si H_τ est un graphe partiel de G_τ , alors $Ft(H_\tau)$ est un graphe partiel de $Ft(G_\tau)$.
- (iii) $Ft(Ft(G_\tau)) = Ft(G_\tau)$.

Preuve : (i) et (ii) sont évidentes à partir de la Définition 1.3.2.

(iii) Il suffit de montrer que le graphe $Ft(G_\tau)$ est transitif. Soit $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ un b-chemin de x^α à y^β dans $Ft(G_\tau)$ tel que :

$P_{(\alpha,\beta)}(x, y) : x^\alpha \ e_1 \ x_1 \ \dots \ e_i \ x_i \ e_{i+1} \ \dots \ x_{k-1} \ e_k \ y^\beta$, avec $e_i = \{x_{i-1}^{\alpha_{i-1}}, x_i^{\alpha_i}\}, \forall i = 1, \dots, k$.
 $\alpha_0 = \alpha, \beta_k = \beta$, et $\alpha_i = -\beta_i, \forall i = 1, \dots, k-1$.

Pout toute arête e_i il existe dans G_τ un b-chemin $Q_i = Q_{(\alpha_{i-1}, \alpha_i)}(x_{i-1}, x_i)$ (peut être e_i elle-même).

Soit $R = x \ Q_1 \ x_1 \ Q_2 \ \dots \ Q_k y$, la concaténation de $Q_1, Q_2, \dots, Q_k$.

D'après la propriété (iii) de la Définition 2.1.1 du Chapitre 2, chaque sommet de Q_i vérifie que $W_R = W_{Q_i} = 0$ et chaque sommet de R vérifie que $W_R(x_i) = \alpha_i + \beta_i = 0, \forall i = 1, \dots, k-1$ d'où d'après la Proposition 2.1.3 Chapitre 2, R est un b-chemin de x^α à y^β dans G_τ . On en déduit que l'arête $\{x^\alpha, y^\beta\}$ appartient à la fermeture transitive de G_τ , ainsi $Ft(G_\tau)$ est transitif et sa fermeture transitive est le graphe lui-même. ■

1.3.1 Théorème ([13]). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et $\text{Ft}(G_\tau) = (V, \text{Ft}(E))$ sa fermeture transitive. Si $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ est une arête de $\text{Ft}(G_\tau)$ induite par la fermeture transitive du b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ dans G_τ , alors

$$\overline{W}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = \overline{W}(e).$$

Preuve : Soit $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ un b-chemin de x à y dans G_τ .

$P_{(\alpha, \beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta$, d'après la Proposition 2.1.2 du Chapitre 2 partie 2 on a, $\overline{W}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = \alpha + \beta$ et d'après la Définition 1.3.1 et les différents cas étudiés au-dessus, afin d'obtenir le graphe $\text{Ft}(G_\tau)$ on a : $\overline{W}(e) \neq -\alpha - \beta$, $\overline{W}(e) \neq -\alpha + \beta$, $\overline{W}(e) \neq \alpha - \beta$, cependant $\overline{W}(e) = \alpha + \beta \Rightarrow \overline{W}(e) = \overline{W}(P_{(\alpha, \beta)})$. ■

1.3.1 Corollaire ([13]). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et $\text{Ft}(G_\tau) = (V, \text{Ft}(E))$ sa fermeture transitive. Si $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ est une arête de $\text{Ft}(G_\tau)$ induite par la fermeture transitive du b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ dans G_τ , alors

$$\sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = \sigma(e).$$

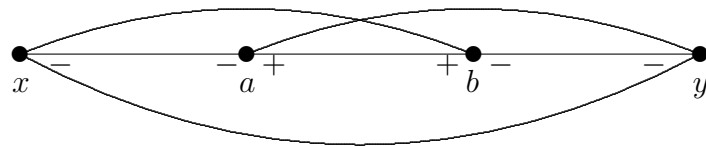
Preuve : Soit $P_{(\alpha, \beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta$.

Un b-chemin de x^α à y^β , d'après la Proposition 2.1.1 du Chapitre 2 partie 2 on a : $\sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = -\alpha\beta$, et on a dans $\text{Ft}(G_\tau) : \sigma(e) = -\tau(e, x)\tau(e, y) = -\alpha\beta$. ■

Exemple explicatif :



$$P_{(-, -)}(x, y) : x^-, a, b, y^-$$



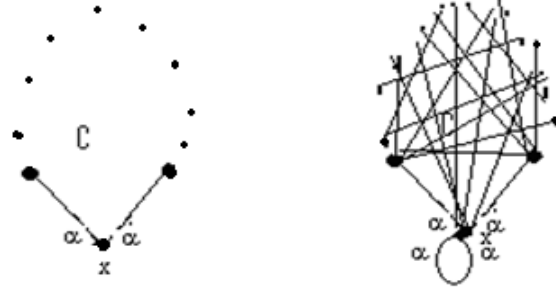
$$\text{Ft}(P_{(-, -)}(x, y))$$

1.3.2 Proposition. La fermeture transitive d'un b-chemin fermé $P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)$ d'ordre n , est un graphe complet K_n avec une boucle $e = \{x^\alpha, x^\alpha\}$ en x .

Preuve : Soit $P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)$ un b-chemin en x qui s'écrit de la forme suivante :

$$P_{(\alpha, \alpha)}(x, x) : x^\alpha e_1 x_1 e_2 x_2 \dots x_{n-1} e_n x^\alpha.$$

Pour toute paire de sommets de $P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)$ il existe un b-chemin qui les relie, donc d'après la définition de la fermeture transitive il existe entre chaque paire de sommets dans le graphe $\text{Ft}(P_{(\alpha, \alpha)}(x, x))$ une arête, et puisque $P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)$ est un b-chemin de x^α à x^α alors il existe aussi une arête de type $e = \{x^\alpha, x^\alpha\}$ qui est une boucle négative dans le graphe $\text{Ft}(P_{(\alpha, \alpha)}(x, x))$ (voir FIGURE 3.7). ■



$$P_{(\alpha, \alpha)}(x, x) \quad \text{Ft}(P_{(\alpha, \alpha)}(x, x)) \quad \alpha \in \{-1, 1\}$$

FIGURE 3.7 –

1.3.3 Proposition. Soit $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ un hypercyclique b-chemin. Le graphe $P_{(\alpha, \beta)}(x, y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un S -cycle de type (ii) ou (iii) de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$.

Preuve : Soit $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ un hypercyclique b-chemin (voir FIGURE 2.1 du Chapitre 2).

Cas 1 : Si $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ est de la forme (a), ou (b), alors on a :

$$P_{(\alpha, \beta)}(x, y) = C(\text{cycle négatif}) \cup \text{une } S\text{-chaîne } P^\gamma \text{ reliant } x \text{ et } y.$$

$$\sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = \sigma(C) \times (P_{(x, y)}^\gamma) = -\sigma(P_{(x, y)}^\gamma).$$

- Si $\sigma(P_{(x, y)}^\gamma) = +1 \Rightarrow \sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = -1$
 - $\Rightarrow \sigma(e) = -1$ ou $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ l'arête de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$
 - $\Rightarrow C' = P_{(x, y)}^\gamma \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un cycle négatif
 - $\Rightarrow C \cup C'$ est un S -cycle de type (ii).
- Si $\sigma(P_{(x, y)}^\gamma) = -1 \Rightarrow \sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = +1$
 - $\Rightarrow \sigma(e) = +1$ ou $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ l'arête de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$
 - $\Rightarrow C' = P_{(x, y)}^\gamma \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un cycle négatif
 - $\Rightarrow C \cup C'$ est un S -cycle de type (ii).

Cas 2 : Si $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ est de la forme (c) de la FIGURE 2.1 du Chapitre 2, alors on a :

$$P_{(\alpha, \beta)}(x, y) = P_{(x, y)}^\gamma \cup P_{(v, w)}^\lambda \cup C(\text{cycle négatif}).$$

$$\sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = \sigma(C) \times \sigma(P_{(x, y)}^\gamma) \times [\sigma(P_{(v, w)}^\lambda)]^2 = -[\sigma(P_{(x, y)}^\gamma) \times [\sigma(P_{(v, w)}^\lambda)]^2].$$

$$\sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = -\sigma(P_{(x, y)}^\gamma).$$

- Si $\sigma(P_{(x, y)}^\gamma) = +1 \Rightarrow \sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = -1$
 - $\Rightarrow \sigma(e) = -1$ où $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ l'arête de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$
 - $\Rightarrow C' = P_{(x, y)}^\gamma \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un cycle négatif
 - $\Rightarrow C' \cup P_{(v, w)}^\lambda \cup C$ est un S -cycle de type (iii).
- Si $\sigma(P_{(x, y)}^\gamma) = -1 \Rightarrow \sigma(P_{(\alpha, \beta)}(x, y)) = +1$
 - $\Rightarrow \sigma(e) = +1$ où $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ l'arête de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$
 - $\Rightarrow C' = P_{(x, y)}^\gamma \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un cycle négatif
 - $\Rightarrow C \cup P_{(v, w)}^\lambda \cup C'$ est un S -cycle de type (iii). ■

N. B : $P_{(x, y)}^\gamma$ est une S -chaîne reliant x et y de signe $\gamma \in \{-1, 1\}$.

$P_{(v, w)}^\lambda$ est une S -chaîne reliant v et w de signe $\lambda \in \{-1, 1\}$.

1.3.4 Proposition. *Soit H un sous graphe de $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$, alors $\text{Ft}(H) = H$.*

Preuve : Il suffit de montrer que $\text{Ft}(H) \subseteq H$, car H est un graphe partiel de $\text{Ft}(H)$.

Soit e une arête de $\text{Ft}(H) \Rightarrow$ il existe un b-chemin dans H relatif à e
 $\Rightarrow$ ce b-chemin appartient à $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$,
 et puisque $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est un graphe transitif.
 $\Rightarrow e$ appartient à $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$,
 et ce dernier est un graphe complet.
 $\Rightarrow e$ appartient à H , car H est un sous graphe
 complet de $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$.

D'où $\text{Ft}(H) = H$. ■

1.3.5 Proposition. *Soit C un b-circuit. Si H est un sous graphe de $\text{Ft}(C)$, alors $\text{Ft}(H) = H$ (H est transitif).*

Preuve : La preuve est similaire à celle donnée pour la Proposition 1.3.4. ■

1.3.2 Corollaire ([13]). *Soient G_τ un graphe biorienté et $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ un b-chemin de G_τ tel que $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) : x^\alpha \xrightarrow{e_1} x_1 \dots \xrightarrow{e_i} x_{i+1} \xrightarrow{e_{i+1}} \dots \xrightarrow{e_{k-1}} x_k \xrightarrow{e_k} y^\beta$.
 Si $\forall x, y \in V(G_\tau) \ k \leq 1$, alors $\text{Ft}(G_\tau) = G_\tau$.*

Preuve : Puisqu'on a G_τ est un graphe partiel de $\text{Ft}(G_\tau)$, il suffit de montrer que $\forall e \in \text{Ft}(G_\tau)$, alors $e \in G_\tau$.

Supposons qu'il existe une arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in \text{Ft}(G_\tau) - G_\tau$, ceci implique d'après la définition de la fermeture transitive des graphes biorientés, qu'il existe dans G_τ un b-chemin de x^α à y^β tel que $k \geq 2$, contradiction. ■

• On peut caractériser les graphes du Corollaire 1.3.2, ainsi :

Soit G_τ un graphe biorienté on a, $G_\tau = (V_1 \cup V_2, E)$ tel que :

$$V_1 = \{x \in G_\tau / \tau(e, x) = +1, \forall e \in E\}$$

$$V_2 = \{x \in G_\tau / \tau(e, x) = -1, \forall e \in E\}$$

- 1) Toutes les arêtes reliant un sommet de V_1 à un sommet de V_2 sont positives.
- 2) Toutes les arêtes reliant deux sommets d'un même ensemble sont négatives.
- 3) Les cycles négatifs sont de longueurs impaires.
- 4) Les cycles positifs sont de longueurs paires (si le graphe est équilibré, alors il est biparti).

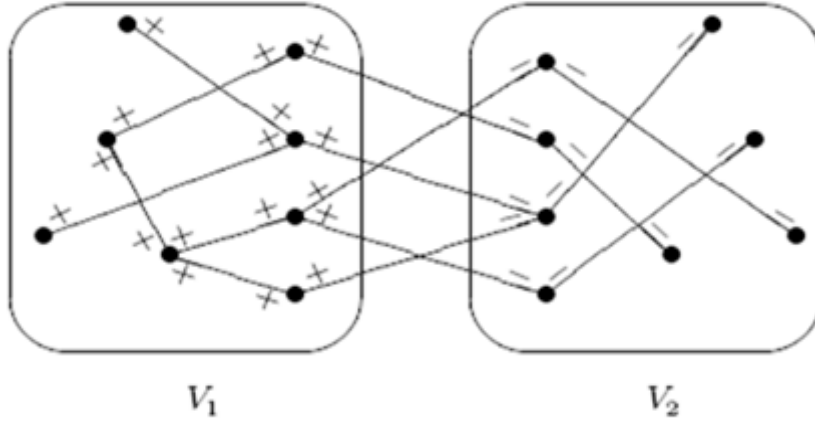


FIGURE 3.8 – Les graphes satisfaisants les hypothèses du Corollaire 1.3.2

1.3.3 Corollaire. Soit G_τ un graphe biorienté négatif. $\text{Ft}(G_\tau) = G_\tau$ si et seulement si $\forall e \in G_\tau, \overline{W}(e) = -2$ (ou $\forall e \in G_\tau, \overline{W}(e) = +2$).

Preuve : Soit $G_\tau = (V, E)$ graphe biorienté négatif.

$\Rightarrow$) supposons que $\text{Ft}(G_\tau) = G_\tau$, ceci implique que $\text{Ft}(G_\tau)$ est sans arête positives, donc le graphe G_τ n'admet pas de b-chemin de longueur ≥ 2 , alors $\forall e \in E$: $\overline{W}(e) = -2$ (ou $\overline{W}(e) = +2$).

$\Leftarrow$) Si $e \in E$: $\overline{W}(e) = -2$ (ou $\overline{W}(e) = +2$), alors les b-chemin du graphe sont réduits à une arête, d'où $\text{Ft}(G_\tau) = G_\tau$. ■

1.3.3 Définition. Un graphe biorienté $G_\tau = (V, E)$ est dit symétrique si et seulement si, $\{x^\alpha, y^\beta\} \in E$, alors $\{x^{-\alpha}, y^{-\beta}\} \in E$, $\alpha, \beta \in \{-1, 1\}$.

1.3.6 Proposition. La fermeture transitive d'un b-circuit C d'ordre n est un graphe complet K_n symétrique.

Preuve : Soit C un b-circuit. Si une paire de sommets de C sont reliés par un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$, il existe aussi dans C un b-chemin opposé $P_{(-\alpha, -\beta)}(x, y)$ les reliant, d'où d'après la définition de la fermeture transitive de $\text{Ft}(C)$ toute paire de sommets x et y sont reliés par des arêtes opposées, donc le graphe $\text{Ft}(C)$ est un graphe complet symétrique. ■

1.3.7 Proposition. Soit $(G_\tau)_-$ un graphe biorienté négatif. La fermeture transitive $\text{Ft}((G_\tau)_-)$ est un graphe négatif, si et seulement si $\forall x, y \in V$:

$$|E(P_{(x,y)}(\alpha, \alpha))| \equiv 1 \text{ mod}(2) \quad \alpha \in \{-1, 1\}.$$

Preuve : Soient $x, y \in V$ et $P_{(x,y)}(\alpha, \alpha)$ un b-chemin de x^α à y^α on a :

$$\begin{aligned} |E(P_{(x,y)}(\alpha, \alpha))| \equiv 1 \text{ mod}(2) &\Leftrightarrow \overline{W}(P_{(\alpha, \alpha)}) = \mp 2 \quad (\alpha = \mp 1) \\ &\Leftrightarrow \overline{W}(e^*) = \mp 2 \quad (e^* = \{x^\alpha, y^\alpha\} \in \text{Ft}(E)) \\ &\Leftrightarrow \text{Ft}((G_\tau)_-) \text{ est un graphe négatif. } \blacksquare \end{aligned}$$

1.3.8 Proposition. *Soit G_τ un graphe biorienté quasi-équilibré. $\text{Ft}(G_\tau)$ est quasi-équilibré si et seulement si G_τ ne possède pas un hypercyclique b-chemin.*

Preuve : Soit G_τ un graphe biorienté quasi-équilibré.

$\Leftarrow$) Supposons que $\text{Ft}(G_\tau)$ admet des circuit de type (ii) ou (iii), ceci implique d'après la définition de la fermeture transitive et la Proposition 1.3.3, que le seul cas où on a $P_{(\alpha,\beta)}(x, y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un S -cycle de type (ii) ou (iii) c'est lorsque $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ est un hypercyclique b-chemin de G_τ , contradiction.

$\Rightarrow$) Soit $\text{Ft}(G_\tau)$ un graphe quasi-équilibré $\Rightarrow \text{Ft}(G_\tau)$ n'admet de S -cycle de type (ii) et (iii)
 $\Rightarrow \forall x, y \in V(\text{Ft}(G_\tau))$ on a :
 $P_{(\alpha,\beta)}(x, y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un S -cycle de type (i)
 $\Rightarrow P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ est un b-chemin simple (sans cycle)
 $\Rightarrow G_\tau$ est sans hypercyclique b-chemin. ■

1.3.9 Proposition ([13]). *La Fermeture Transitive d'un graphe biorienté positif, est un graphe positif.*

Preuve : soit $P_{(\alpha,\beta)}$ un b-chemin de x^α à y^β tel que $\alpha = -\beta$, (on ne peut avoir $\alpha = \beta$ car $\bar{W}(P) \neq 0$) donc on ferme ce b-chemin avec l'arête $\{x^\alpha, y^{-\alpha}\}$, et cette arête est positive. ■

1.4 Commutation sur un sommet

1.4.1 Définition. *Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et x un sommet de G_τ . On définit une biorientation τ_x de G_τ en posant pour toute arête $e \in E$:*

$$\begin{cases} \tau_x(e, x) = -\tau(e, x) \\ \tau_x(e, y) = \tau(e, y) \end{cases} \quad \forall y \in V - \{x\}$$

On dira que la biorientation τ_x et le graphe biorienté G_{τ_x} sont obtenus respectivement à partir de τ et G_τ , par commutation sur x .

Si σ (resp. σ_x) est la signature associées à τ (resp. τ_x), alors

$$\begin{cases} \sigma_x(e) = -\sigma(e) & \text{si } e \text{ est incidente à } x \\ \sigma_x(e) = \sigma(e) & \text{sinon} \end{cases}$$

En effet, la commutation sur un sous-ensemble de sommets de V ne change pas le signe de l'arête dont les deux extrémités sont dans le sous-ensemble, mais les arêtes ayant une extrémité dans les sous-ensembles changent de signe.

1.4.1 Proposition. *Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté équilibré. La commutation sur un sous-ensemble de sommets de V , produit un graphe équilibré dont toutes les arêtes sont positives.*

Preuve : Harary [26] a montré que l'ensemble des arêtes négatives d'un graphe biorienté équilibré constitue un cocycle de G_τ . Alors, soit F l'ensemble des arêtes négatives de G_τ .

Considérons un sous-ensemble de sommets X de V défini comme suit :

$$X = \{\text{une extrémité de chaque arête de } F\}$$

Le cocycle $W(X)$ est l'ensemble F .

Donc par commutation sur X on aura : $\sigma(e) = +1 \forall e \in F$ dans le nouveau graphe G_{τ_x} . C'est-à-dire que si dans G_τ $\overline{W}(e) = \pm 2$, alors dans G_{τ_x} , $\overline{W}(e) = 0$ et les autres arêtes restent inchangées. ■

1.4.1 Lemme ([13]). *Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et $X \in V$. Le graphe $\text{Ft}(G_{\tau_x})$ est obtenu par commutation sur X dans $\text{Ft}(G_\tau)$.*

Preuve : un b-chemin de G_τ reste un b-chemin de G_τ même après commutation. Pour $X \subseteq V$ on définit $\vartheta(u) = +1$ si $u \notin X$ et $\vartheta(u) = -1$ si $u \in X$.

Considérons une arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in (\text{Ft}(G_\tau) - G_\tau)$ ceci implique que G_τ possède un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$. Par commutation sur X dans G_τ et $\text{Ft}(G_\tau)$ l'arête e devient $\{x^{\vartheta(x)\alpha}, y^{\vartheta(y)\beta}\}$ et le b-chemin devient $P_{(\vartheta(x)\alpha, \vartheta(y)\beta)}(x, y)$. Cependant e est induite par le b-chemin $P_{(\vartheta(x)\alpha, \vartheta(y)\beta)}(x, y)$ dans G_{τ_x} , ainsi e est une arête de $\text{Ft}(G_{\tau_x})$.

D'où le graphe $\text{Ft}(G_\tau)$ après commutation sur X devient un graphe partiel de $\text{Ft}(G_{\tau_x})$.

Par un même raisonnement, si $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in (\text{Ft}(G_{\tau_x}) - G_{\tau_x})$, alors elle est induite par un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ dans G_{τ_x} . Par commutation sur X , l'arête $\{x^{\vartheta(x)\alpha}, y^{\vartheta(y)\beta}\}$ est induite par $P_{(\vartheta(x)\alpha, \vartheta(y)\beta)}(x, y)$, ce dernier est un b-chemin dans le graphe G_{τ_x} commuté par X qui devient G_τ , alors l'arête e est une arête de $\text{Ft}(G_\tau)$. D'où le graphe $\text{Ft}(G_{\tau_x})$ après commutation sur X devient un graphe partiel de $\text{Ft}(G_\tau)$. ■

1.4.2 Proposition ([13]). *La Fermeture Transitive d'un graphe biorienté équilibré est un graphe équilibré.*

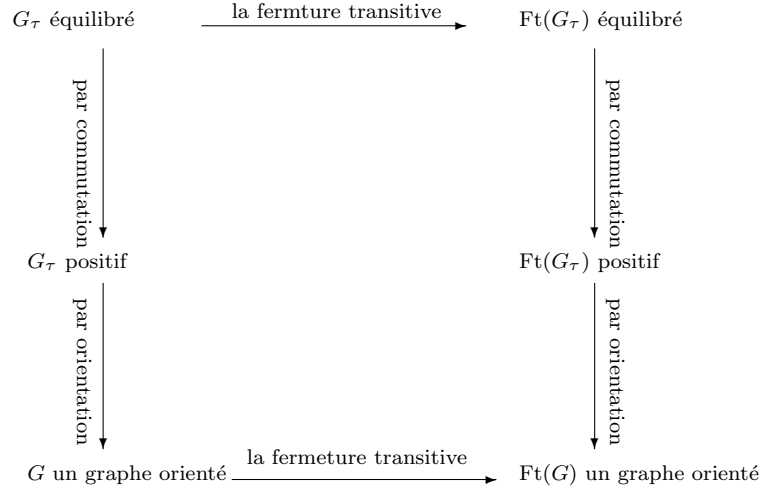
Preuve : Il suffit d'utiliser les Propositions 1.4.1 et 1.3.9. ■

1.4.3 Proposition. *La fermeture transitive $\text{Ft}(G_\tau)$ est non équilibrée, si et seulement si le graphe G_τ est non équilibré.*

Preuve : Si le graphe $\text{Ft}(G_\tau)$ est non équilibré, alors le graphe G_τ est non équilibré d'après la Proposition 1.4.2.

Si le graphe G_τ est non équilibré, ceci implique que G_τ possède un cycle négatif qui appartient toujours au graphe $\text{Ft}(G_\tau)$, donc la fermeture transitive de G_τ est un graphe non équilibré. ■

Remarque : le diagramme ci-dessous est obtenu à partir des résultats ci-dessus. Il montre que la notion classique de la fermeture transitive pour les graphes orientés est un cas particulier de celle retrouvée pour les graphes biorientés.



1.5 La Fermeture Transitive et les graphes frame connexes

Rappelons qu'un graphe signé G_σ est dit frame connexe, si toute paire d'arêtes distinctes e et e' de G_σ , est contenue dans un circuit C de $M(G_\sigma)$.

Un graphe biorienté est frame connexe, si son graphe signé sous jacent est frame connexe.

1.5.1 Théorème. *Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. Si G_τ est frame connexe, alors la fermeture transitive $\text{Ft}(G_\tau) = (V, \text{Ft}(E))$ est frame connexe.*

Preuve : On montre que pour toute paire d'arêtes de $\text{Ft}(G_\tau)$ il existe un S -cycle les contenant. Soient e et e' deux arêtes de $\text{Ft}(E)$:

Cas 1 : Si e et e' sont deux arêtes de E , alors il existe un S -cycle C de G_τ tel que $\{e, e'\} \subseteq C$ car le graphe G_τ est frame connexe.

Cas 2 : Si $e \in E$ et $e' \in \text{Ft}(E) - E$, alors il existe pour e' un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ dans G_τ qui lui correspond d'après la définition de la fermeture transitive de G_τ tel que :

$P_{(\alpha, \beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots e_{k-1} e_k y.$

Puisque G_τ est frame connexe, alors $\forall i = 1, \dots, k, \exists$ un S -cycle C_i de G_τ tel que $\{e, e_i\} \subseteq C_i$ (les S -cycles C_i ne sont pas nécessairement différents), et on a de plus un S -cycle C' de $\text{Ft}(G_\tau)$ tel que $C' = P_{(\alpha, \beta)}(x, y) \cup \{e'\}$ d'où :

$$\begin{aligned}
 e_i \in C_i \cap C' \text{ et } e' \in C' - C_i &\Rightarrow \text{un } S\text{-cycle } C \text{ de } \text{Ft}(G_\tau) : e' \in C \subseteq [C_i \cup C'] - e_i \\
 &\Rightarrow e' \in C \subseteq [C_i P_{(\alpha, \beta)}(x, y) e'] - e_i \quad \forall i = 1, \dots, k.
 \end{aligned}$$

Ceci implique que le graphe $\text{Ft}(G_\tau)$ est frame connexe.

Cas 3 : Si e et e' sont dans $\text{Ft}(E) - E$. Soient $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ et $P_{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1, y_1)$ les deux b-chemins qui leur correspondent respectivement dans G_τ :

$$P_{(\alpha,\beta)}(x, y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta \rightarrow C = P_{(\alpha,\beta)}(x, y) \cup \{e\}.$$

$$P_{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1, y_1) : x_1^{\alpha_1} e'_1 x'_1 \dots e'_i x'_{i+1} e'_{i+1} \dots x'_{k-1} e'_k y_1^{\beta_1} \rightarrow C' = P_{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1, y_1) \cup \{e'\}.$$

- Si $E(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) \cap E(P_{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1, y_1)) \neq \emptyset$, ceci implique qu'il existe une arête $s \in C \cup C'$, donc on a :

$s \in C \cap C'$ et $e \in C - C' \Rightarrow \exists$ un S -cycle C'' de $\text{Ft}(G_\tau) : e \in C'' \subseteq [C \cup C'] - s$ donc, $\text{Ft}(G_\tau)$ est frame connexe.

- Si $E(P_{(\alpha,\beta)}(x, y)) \cap E(P_{(\alpha_1,\beta_1)}(x_1, y_1)) = \emptyset$, G_τ est frame connexe alors il existe un S -cycle C'' tel que $\{e_i, e'_j\} \in C'' \forall i, j$, d'où :

$e_i \in C \cap C''$ et $e \in C - C'' \Rightarrow \exists$ un S -cycle C_1 de $\text{Ft}(G_\tau) : e \in C_1 \subseteq [C \cup C''] - e_i$

$e'_j \in C' \cap C''$ et $e' \in C' - C'' \Rightarrow \exists$ un S -cycle C_2 de $\text{Ft}(G_\tau) : e' \in C_2 \subseteq [C' \cup C''] - e'_j$

il est clair que $e \in C_1 - C_2$ et $e' \in C_2 - C_1$, alors on a :

- Si $C_1 \cap C_2 = \emptyset \Rightarrow C'' = \{e_i, e'_j\}$ (C'' est un S -cycle de type (i) ou (ii)).
 $\Rightarrow [C - e_i] \cup e'_j$ est un S -cycle de $\text{Ft}(G_\tau)$,
 $\Rightarrow e'_j \in C' \cap [[C - e_i] \cup e'_j]$ et $e \in [[C - e_i] \cup e'_j] - C'$
 $\Rightarrow \exists$ un C_3 de $\text{Ft}(G_\tau) : e \in C_3 \subseteq ([C - e_i] \cup e'_j) \cup C' - e'_j$

donc $\text{Ft}(G)$ est frame connexe.

- Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset \Rightarrow \exists s \in C_1 \cap C_2$
 $\Rightarrow s \in C_1 \cap C_2$ et on a $e \in C_1 - C_2$
 $\Rightarrow \exists$ un S -cycle C_3 de $\text{Ft}(G_\tau) : e \in C_3 \subseteq [C_1 \cup C_2] - s$.

donc $\text{Ft}(G_\tau)$ est frame connexe. ■

Remarque : On peut avoir G_τ qui n'est pas frame connexe mais $\text{Ft}(G_\tau)$ peut être frame connexe où ne pas l'être, voir FIGURE 3.9.

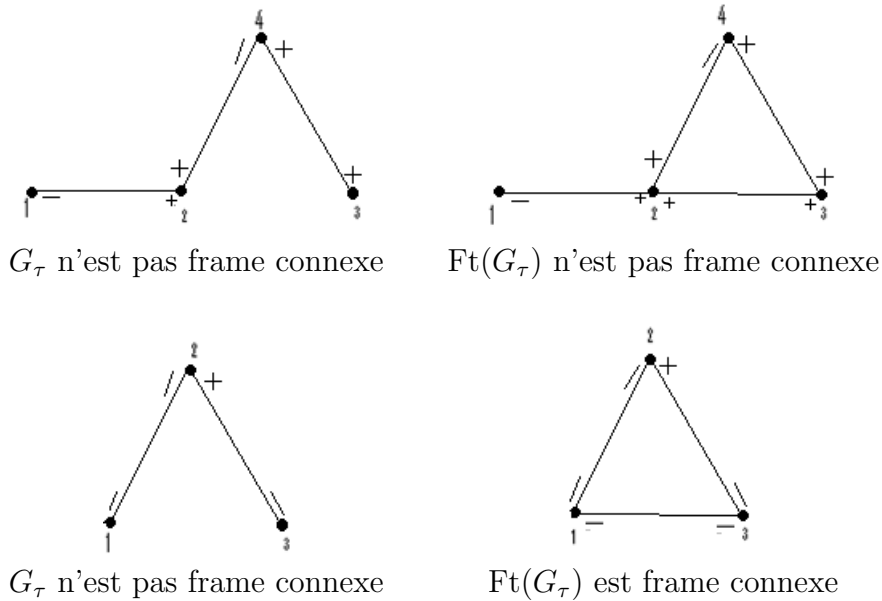


FIGURE 3.9 –

1.5.1 Corollaire. *La fermeture transitive d'un b-circuit est un graphe frame connexe.*

Preuve : Soit C un b-circuit, on a C est un graphe frame connexe, alors d'après le Théorème 1.5.1 $\text{Ft}(C)$ est un graphe frame connexe. ■

1.5.1 Proposition. *Soit $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ un b-chemin de x à y , alors $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ est un graphe frame connexe.*

Preuve : Posons $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y^\beta$.

Cas 1 : Si $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ est un b-chemin simple, on a d'après la définition de la fermeture transitive que $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un S -cycle de type (i) avec $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in \text{Ft}(E) - E$, de plus $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est un graphe complet équilibré, ceci implique que quelles que soient $e_1 = \{x_1^{\alpha_1}, y_1^{\beta_1}\}$ et $e_2 = \{x_2^{\alpha_2}, y_2^{\beta_2}\}$ deux arêtes de $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$, il existe toujours des arêtes $e_3 = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}\}$ et $e_4 = \{y_1^{\beta_1}, y_2^{\beta_2}\}$ dans $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ telles que $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ est un S -cycle de type (i) d'où $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est frame connexe.

Cas 2 : Si $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ est un hypercyclique b-chemin, on a d'après la définition de la fermeture transitive que $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un S -cycle de type (ii) ou (iii) avec $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in \text{Ft}(E) - E$, de plus $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est un graphe complet non équilibré.

- Si e et e' sont deux arêtes de $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ qui appartiennent à $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$, alors il existe un S -cycle $C = P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ de $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ tel que $\{e, e'\} \subseteq C$, donc le graphe $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est frame connexe.

Soient $e_1 = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}\}$ et $e_2 = \{x_2^{\beta_1}, x_3^{\beta_2}\}$ deux arêtes incidentes ($\alpha_2 = -\beta_1$) dans $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ voir FIGURE 3.10 :

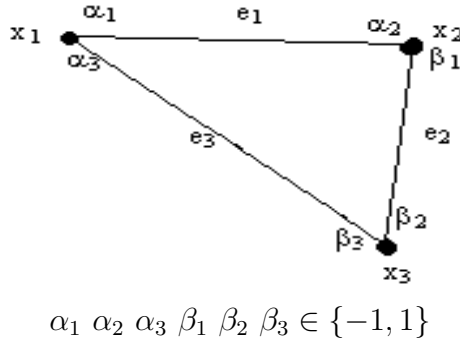


FIGURE 3.10 –

- Si $e_1 \cup e_2 \cup e_3$ ($e_3 = \{x_3^{\beta_3}, x_1^{\alpha_3}\}$) est un cycle positif, donc c'est un S -cycle de type (i), d'où $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est frame connexe.
- Si $e_1 \cup e_2 \cup e_3$ est un cycle négatif. Soient $C = \{e_1 \cup e_2 \cup e_3\}$ et C_1 le cycle négatif de $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$:

– Si $|V(C) \cap V(C_1)| \leq 1$, ceci implique que $C \cup C_1$ est un S -cycle de type (ii) ou bien il est contenu dans un S -cycle de type (iii), d'où $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est frame connexe.

– Si $|V(C) \cap V(C_1)| \geq 2$, il existe un cycle négatif C_2 qui contient l'arête $\{x^\alpha, y^\beta\}$ tel que $|V(C) \cap V(C_2)| \leq 1$, d'où il existe un S -cycle de type (ii) ou (iii) qui contient les deux arêtes e_1 et e_2 , donc $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y))$ est frame connexe.

- Soient $e_1 = \{x_1^{\alpha_1}, x_2^{\alpha_2}\}$ et $e_2 = \{y_1^{\beta_1}, y_2^{\beta_2}\}$ deux arêtes de $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x, y))$:
 - Si $\{e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4\}$ est un cycle positif, donc c'est un S -cycle de type (i), d'où $\text{Ft}(P_{(\alpha,\beta)}(x, y))$ est frame connexe.
 - Si $\{e_1 \cup e_2 \cup e_3 \cup e_4\}$ est un cycle négatif (voir FIGURE 3.11).

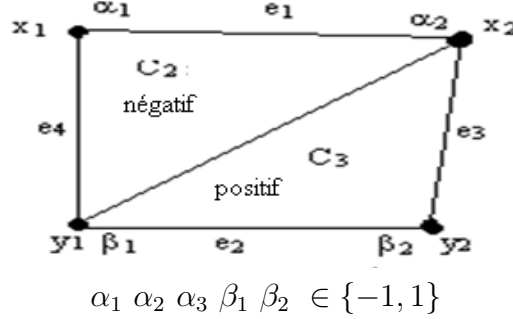


FIGURE 3.11 –

Posons $C = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ et soient :

$P_{(\alpha_1, \alpha_2)}(x_1, x_2)$ et $P_{(\beta_1, \beta_2)}(y_1, y_2)$ les b-chemins dans $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ correspondants aux deux arêtes e_1 et e_2 de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$:

■ Si au moins l'un des b-chemins est un hypercyclique b-chemin (supposons $P_{(\alpha_1, \alpha_2)}$), alors $P_{(\alpha_1, \alpha_2)} \cup C$ admet un S -cycle de type (ii) ou (iii), d'où $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$ est frame connexe.

■ Si les deux b-chemins ne sont pas des hypercycliques b-chemins. Soit C_1 le cycle négatif de b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$:

▲ Si $C_1 = P_{(\beta_1, \beta_2)}(y_1, y_2) \cup P' \Rightarrow C' = \{e_2\} \cup P'$ est un cycle négatif dans $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$.
 $\Rightarrow C_2 \cup C'$ est un S -cycle de type (ii) ou (iii).

▲ Si $E(C_1) \cap E(P_{(\beta_1, \beta_2)}(y_1, y_2)) = \emptyset \Rightarrow$ d'après les propriétés de la définition d'un hypercyclique b-chemin, il existe dans $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ un hypercyclique b-chemin $P_{(-\beta_1, \beta_2)}(y_1, y_2)$ ou $P_{(\beta_1, -\beta_2)}(y_1, y_2)$

$\Rightarrow$ l'arête $\{y_1^{-\beta_1}, y_2^{-\beta_2}\}$ de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$
 $\Rightarrow C'' = e_2 \cup \{y_1^{-\beta_1}, y_2^{-\beta_2}\}$ est un cycle négatif de $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$.
 $\Rightarrow C_2 \cup C''$ est un S -cycle de type (ii).

D'après les cas 1, 2 et 3 le graphe biorienté $\text{Ft}(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$ est frame connexe. ■

Remarque : Ce résultat n'est pas employé par le Théorème 1.5.1 car $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ n'est pas frame connexe.

1.5.2 Proposition. *Soit e un frame isthme d'un graphe biorienté G_τ (e n'est pas un isthme). L'arête e est un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$ si et seulement si e n'appartient à aucun hypercyclique b-chemin de G_τ .*

Preuve : Soit e un frame isthme de G_τ .

$\Leftarrow$) On a l'arête e n'est pas un isthme de G_τ , ceci implique qu'il existe un cycle négatif C contenant e et qui n'est pas un hypercyclique b-chemin en un sommet car e n'appartient à aucun hypercyclique b-chemin de G_τ et on a $G_\tau - e$ est un graphe connexe équilibré, c'est-à-dire il n'existe pas d'autres cycles négatifs qui ne contiennent pas l'arête e dans G_τ sinon l'arête e ne sera pas un frame isthme, d'où le graphe $\text{Ft}(G_\tau)$ ne possède pas des S -cycles de type (ii) et (iii), alors $\text{Ft}(G_\tau)$ est quasi-équilibré, donc $\text{Ft}(G_\tau) - e$ est équilibré, ceci implique que e est un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$.

$\Rightarrow$) Soit e une arête de G_τ appartenant à un cycle négatif. Supposons qu'il existe un hypercyclique b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ dans G_τ contenant e , ceci implique que $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un S -cycle de type (ii) ou (iii) qui admet l'arête e , alors le graphe $\text{Ft}(G_\tau) - e$ n'est pas équilibré, contradiction. ■

1.5.3 Proposition. *Soit e un frame isthme d'un graphe biorienté G_τ tel que $G_\tau - e$ est non connexe. L'arête e est un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$ si et seulement si e n'appartient à aucun b-chemin de G_τ .*

Preuve : Soit e un frame isthme qui est aussi un isthme de G_τ .

$\Leftarrow$) e n'appartient à aucun b-chemin de $G_\tau \Rightarrow e$ n'appartient à aucun cycle de $\text{Ft}(G_\tau)$ car e n'appartient à aucun cycle de G_τ

$\Rightarrow e$ est un isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$. Si e n'est pas un frame isthme

$\Rightarrow e$ appartient à un S -cycle de type (iii)

$\Rightarrow$ les composantes connexes de $G_\tau - e$ sont non équilibrées (sont S -connexes)

$\Rightarrow e$ n'est pas un frame isthme de G_τ , contradiction.

$\Rightarrow e$ est un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$.

$\Rightarrow$) Soit e un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$.

Supposons qu'il existe un b-chemin dans G_τ contenant $e \Rightarrow$ il existe d'après la définition de la fermeture transitive, un S -cycle C de $\text{Ft}(G_\tau)$ contenant e :

- Si C est de type (i) :

alors e n'est pas un isthme de $\text{Ft}(G_\tau) \Rightarrow b(\text{Ft}(G_\tau - e)) = b(\text{Ft}(G_\tau))$

$\Rightarrow e$ n'est pas un frame isthme de $\text{Ft}(G)$, contradiction.

- Si C est de type (ii) :

alors e appartient à un cycle négatif $\Rightarrow e$ n'est pas un isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$

$\Rightarrow b(\text{Ft}(G_\tau - e)) = b(\text{Ft}(G_\tau))$

$\Rightarrow e$ n'est pas un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$, contradiction.

- Si C est de type (iii) :

alors on a $\tilde{b}(\text{Ft}(G_\tau - e)) \geq \tilde{b}(\text{Ft}(G_\tau))$:

- Si $\tilde{b}(\text{Ft}(G_\tau - e)) > \tilde{b}(\text{Ft}(G_\tau)) \Rightarrow e$ est un isthme qui n'est pas un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$, contradiction.

- Si $\tilde{b}(\text{Ft}(G_\tau - e)) = \tilde{b}(\text{Ft}(G_\tau)) \Rightarrow e$ appartient à un cycle négatif

$\Rightarrow e$ n'est pas un isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$

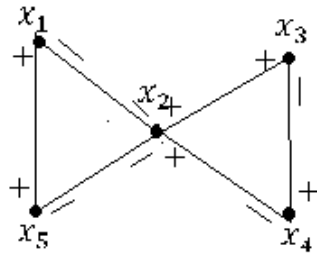
$\Rightarrow b(\text{Ft}(G_\tau - e)) = b(\text{Ft}(G_\tau))$

$\Rightarrow e$ n'est pas un frame isthme de $\text{Ft}(G_\tau)$,

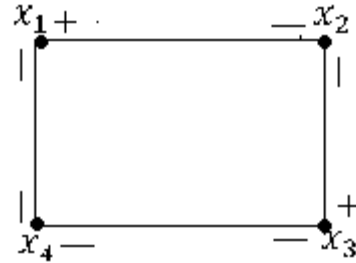
$\Rightarrow$ contradiction. ■

1.6 La frame-Cohérence et la Fermeture Transitive des graphes biorientés

1.6.1 Définition. G_τ est dit *frame-cohérent*, si tout circuit de $M(G_\tau)$ est un b-circuit de G_τ , ou il est sans cycles.



G_τ est frame-cohérent



G_τ n'est pas frame-cohérent

1.6.1 Proposition. Soit G_τ un graphe biorienté frame-cohérent. La fermeture transitive $\text{Ft}(G_\tau)$ de G_τ n'est pas un graphe biorienté frame-cohérent.

Preuve : D'après la définition de la fermeture transitive de G_τ , $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ est un circuit de $M(\text{Ft}(G_\tau))$ mais pas un b-circuit de $\text{Ft}(G_\tau)$ (où l'arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in \text{Ft}(E) - E$). ■

1.6.2 Proposition. Soit G_τ un graphe biorienté frame-cohérent. La fermeture transitive $\text{Ft}(G_\tau)$ est un graphe biorienté frame-cohérent, si et seulement si $\text{Ft}(G_\tau) = G_\tau$.

Preuve : Évidente. ■

1.6.1 Corollaire. Si G_τ est un graphe frame-cohérent, alors G_τ n'est pas transitif.

Preuve : G_τ est un graphe frame-cohérent, si G_τ est transitif ceci implique, d'après la définition de la fermeture transitive que, $\forall x, y \in V(\text{Ft}(G_\tau))$ on a : $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) \cup \{x^\alpha, y^\beta\}$ n'est pas un b-circuit de $\text{Ft}(G_\tau)$ mais c'est un circuit de $M(\text{Ft}(G_\tau))$, contradiction. ■

2. La réduction transitive dans les graphes

La réduction transitive dans les graphes orientés a été introduite par A. V. AHO. Le but de cette partie est de prolonger cette notion pour les Graphes Biorientés à travers laquelle la notion classique sera un cas particulier.

2.1 La Réduction Transitive dans Les Graphes Orientés

Soit G un graphe orienté, la fermeture transitive de G par définition est de rajouter des arcs à G , la notion duale de cette définition est appelée la réduction transitive.

En effet, l'idée principale de cette notion est de chercher si c'est possible un graphe G^* qui possède moins d'arcs que le graphe donné, doit satisfaire les conditions suivantes :

1. Il existe un chemin de x à y dans G^* si et seulement s'il existe un chemin de x à y dans G .
2. Pas d'autres graphes avec moins d'arcs que G^* satisfaisant 1.

2.1.1 Définition. Soit $G = (V, U)$ un graphe orienté. La réduction transitive de G est le graphe noté $G^* = (V, U^*)$ tel que U^* est minimal et $\text{Ft}(G) = \text{Ft}(G^*)$.

2.1.1 Proposition. Soient G un graphe orienté et S l'ensemble définit dans le chap 3 la partie 1. Alors $\text{Rt}(G) = G - S$.

Preuve : La preuve est identique à celle donnée pour la Proposition 1.2.2 dans le Chapitre 3 partie 1 ($S = \{u_i \in U / u_i \in G_{i-1} - G_i\}$). ■

2.1.1 Théorème. Soit G un graphe orienté. $\text{Ft}(G)$ et $\text{Rt}(G)$ sont la fermeture transitive et la réduction transitive de G respectivement. Si $\text{M}(\text{Ft}(G))$ et $\text{M}(\text{Rt}(G))$ sont les frames matroïdes associés à $\text{Ft}(G)$ et $\text{Rt}(G)$ respectivement, alors ils ont le même rang c'est-à-dire :

$$\mathbf{r}(\text{M}(\text{Ft}(G))) = \mathbf{r}(\text{M}(\text{Rt}(G))).$$

Preuve : Pour montrer ce théorème, on doit tout d'abord démontrer les deux lemmes suivants. ■

2.1.1 Lemme. Soit $\text{M}(G)$ (resp , $\text{M}(\text{Ft}(G))$) le frame matroïde associé à G (resp, $\text{Ft}(G)$), alors $\mathbf{r}(\text{M}(G)) = \mathbf{r}(\text{M}(\text{Ft}(G)))$.

Preuve : G est un graphe partiel de $\text{Ft}(G)$, donc $\mathbf{r}(\text{M}(G)) \leq \mathbf{r}(\text{M}(\text{Ft}(G)))$. D'une part, on suppose que :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(\text{M}(G)) < \mathbf{r}(\text{M}(\text{Ft}(G))) &\Rightarrow |B_1| < |B_2| \text{ ou } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont deux Bases} \\ &\quad \text{de } \text{M}(G) \text{ et } \text{M}(\text{Ft}(G)) \text{ respectivement} \\ &\Rightarrow \text{il existe un sous-ensemble d'arcs } S \text{ de } \text{Ft}(U) - U \\ &\quad \text{tel que } |B_1 \cup S| = |B_2| \\ &\Rightarrow |B_1| + |S| = |B_2| \\ &\Rightarrow |S| \geq 1 \\ &\Rightarrow \forall u \in S : B_1 \cup \{u\} \text{ est un élément indépendant de } \text{M}(\text{Ft}(G)). \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a G un graphe partiel de $\text{Ft}(G)$ et d'après la définition de la fermeture transitive de G , pour chaque arc (x, y) on a $P(x, y) \cup (x, y)$ est un circuit de $\text{M}(\text{Ft}(G))$. Puisque B_1 est maximal dans $\text{M}(G)$, alors toute paire de sommets de B_1 sont reliés par un chemin et donc $B_1 \cup \{u\}$ contient un circuit de $\text{M}(\text{Ft}(G))$, contradiction d'où $\mathbf{r}(\text{M}(G)) = \mathbf{r}(\text{M}(\text{Ft}(G)))$. ■

2.1.2 Lemme. Soit $M(G)$ (resp. $M(Rt(G))$) le frame matroïde associé à G (resp. $Rt(G)$), alors $\mathbf{r}(M(G)) = \mathbf{r}(M(Rt(G)))$.

Preuve : $Rt(G)$ est un graphe partiel de G , donc $\mathbf{r}(M(Rt(G))) \leq \mathbf{r}(M(G))$.

D'une part, on suppose que :

$$\begin{aligned} \mathbf{r}(M(Rt(G))) < \mathbf{r}(M(G)) &\Rightarrow |B_1| < |B_2| \text{ ou } B_1 \text{ et } B_2 \text{ sont deux Bases} \\ &\quad \text{de } M(Rt(G)) \text{ et } M(G) \text{ respectivement} \\ &\Rightarrow \text{il existe un sous-ensemble d'arcs } S \text{ de } U - Rt(U) \\ &\quad \text{tel que } |B_1 \cup S| = |B_2| \\ &\Rightarrow |B_1| + |S| = |B_2| \\ &\Rightarrow |S| \geq 1 \\ &\Rightarrow \forall u \in S : B_1 \cup \{u\} \text{ est un élément indépendant de } M(G). \end{aligned}$$

Et d'autre part, on a $Rt(G)$ un graphe partiel de G et d'après la définition de la réduction transitive de G et d'après la définition de la réduction transitive de G l'ensemble S représente l'ensemble des arcs redondants de G (chaque élément de S appartient à un circuit de $M(G)$ et de plus toute paire de sommets de B_1 sont reliés par un chemin, et puisque B_1 est maximal dans $M(Rt(G))$, donc $B_1 \cup \{u\}$ contient un circuit de $M(G)$, contradiction d'où

$\mathbf{r}(M(G)) = \mathbf{r}(M(Rt(G)))$. ■

2.2 La Réduction Transitive dans les Graphes Biorientés

2.2.1 Définition ([13]). Soit $G_\tau = (V, E; \tau)$ un graphe biorienté.

$ft(G_\tau; H_\tau) = ft(H_\tau)$ = la fermeture transitive de H_τ dans G_τ , où H_τ est un graphe partiel de G_τ .

2.2.1 Proposition ([13]). Soit H_τ un graphe partiel de G_τ .

$$ft(G_\tau; H_\tau) = Ft(H_\tau) \cap G_\tau.$$

Preuve : D'après la Définition 2.2.1 $Ft(H_\tau) \cap G_\tau \subseteq ft(G_\tau; H_\tau)$.

Soit e une arête de $ft(G_\tau; H_\tau)$ qui n'est pas dans H_τ . L'arête est induite par un b-chemin dans H_τ . Ainsi $e \in Ft(H_\tau)$. Puisque aussi $e \in E(G_\tau)$, on conclue que

$$ft(G_\tau; H_\tau) \subseteq Ft(H_\tau) \cap G_\tau. \quad \blacksquare$$

2.2.2 Définition ([13]). Soit $G_\tau = (V, E; \tau)$ un graphe biorienté. La réduction transitive de G_τ est un ensemble minimal d'arêtes engendré sous ft .

Ainsi la réduction transitive $Rt(G_\tau) = (V, Rt(E); \tau)$ est un graphe partiel minimal de G_τ satisfait la propriété, $ft(G_\tau; Rt(G_\tau)) = G_\tau$.

À partir des définitions, et la Proposition 1.3.1 Partie 1 on obtient :

$$ft(Ft(G_\tau); Rt(G_\tau)) = ft(Ft(G_\tau); G_\tau) = Ft(G_\tau).$$

($Rt(G_\tau)$ peut ne pas être unique voir Remarque 1 ci-dessous).

2.2.2 Proposition ([13]). Soient G_τ un graphe biorienté et $Rt(G_\tau)$ sa réduction transitive. $Ft(Rt(G_\tau)) = Ft(G_\tau)$.

Preuve : $Ft(Rt(G_\tau)) = ft(Ft(G_\tau); Rt(G_\tau)) = Ft(G_\tau)$. ■

2.2.3 Proposition ([13]). Soit $G_\tau = (V, E; \tau)$ un graphe biorienté. Un graphe partiel minimal H_τ de G_τ est la réduction transitive $\text{Rt}(G_\tau)$, si et seulement si $G_\tau \subseteq \text{Ft}(H_\tau)$.

Preuve : D'après la Proposition 2.2.1 et la Définition 2.2.2 pour que H_τ soit la réduction transitive de G_τ il est nécessaire que $G_\tau \subseteq \text{Ft}(H_\tau)$. Il s'ensuit que H_τ est la réduction transitive de $G_\tau \Leftrightarrow H_\tau$ est minimal tel que $G_\tau \subseteq \text{Ft}(H_\tau)$. ■

2.2.4 Proposition ([13]). Si G_τ est un graphe biorienté connexe, alors le graphe $\text{Rt}(G_\tau)$ est aussi connexe.

Preuve : L'opérateur Ft ne change pas les composantes connexes du graphe. ■

2.2.1 Corollaire ([13]). Soit G_τ un graphe biorienté sans boucles positives. Si G_τ n'admet pas de b -chemin de longueur supérieur à 1, alors $\text{Rt}(G_\tau) = G_\tau$ et chaque sommet est soit un puits soit une source.

Preuve : Puisque on a $\text{Rt}(G_\tau)$ est un graphe partiel de G_τ , il suffit de montrer que $G_\tau \subseteq \text{Rt}(G_\tau)$. Supposons qu'il existe une arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in G_\tau - \text{Rt}(G_\tau)$, ceci implique d'après les définitions de la réduction transitive et la fermeture transitive, qu'il existe un b -chemin de x^α à y^β dans $G_\tau - \{e\}$ de longueur $k \geq 2$, contradiction.

Si un sommet x est ni un puits ni une source, donc il est incident à deux demi arêtes (e, x) et (f, x) avec $\tau(e, x) = +1$ et $\tau(f, x) = -1$. Alors la séquence ef est un b -chemin de longueur 2, contradiction, ou $e = f$ ceci implique que e est une boucle positive, contradiction. ■

• On peut caractériser les graphes du Corollaire 2.1 comme suit (voir FIGURE 3.12) :

- $G_\tau = (V_{+1} \cup V_{-1}, E; \tau)$ tel que :
 - $V_1 = \{x \in G_\tau / \forall e \in E : \tau(e, x) = +1\}$ (sommets sources)
 - $V_2 = \{x \in G_\tau / \forall e \in E : \tau(e, x) = -1\}$ (sommets puits).
- G_τ est non équilibré (si le graphe est équilibré, alors il est biparti).
- Toutes les arêtes reliant un sommet de V_1 à un sommet de V_2 sont positives.
- Toutes les arêtes reliant deux sommets d'un même ensemble sont négatives.
- Les cycles négatifs sont de longueurs impaires.
- Les cycles équilibrés sont de longueurs paires.

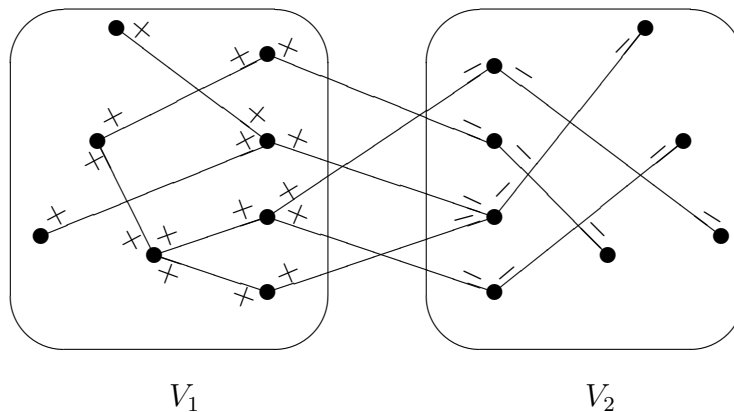


FIGURE 3.12 – Les graphes satisfaisants les hypothèses du Corollaire 2.2.1

2.2.1 Théorème ([13]). *La Réduction Transitive $Rt(G_\tau)$ est positive, si et seulement si G_τ est un graphe positif.*

Preuve : D'après les Propositions 1.3.9 et 1.4.2 Partie 1, on a que

$$Rt(G_\tau) \text{ est positive} \Leftrightarrow Ft(Rt(G_\tau)) \text{ est positive}$$

et que

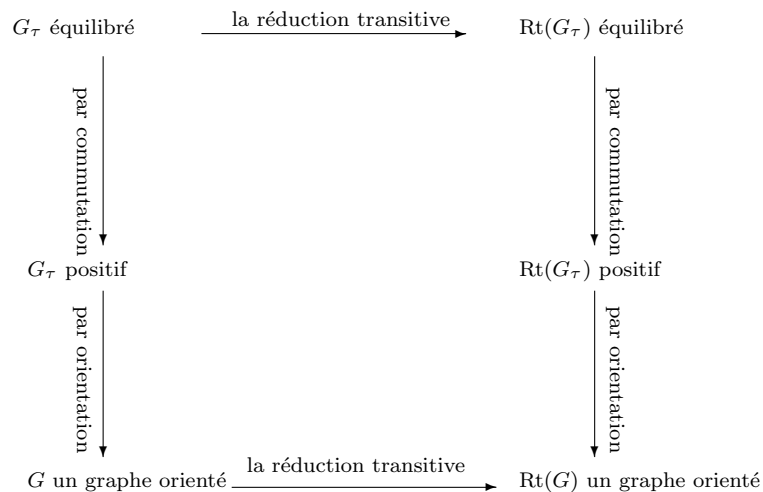
$$G_\tau \text{ est positif} \Leftrightarrow Ft(G_\tau) \text{ est positive.}$$

Et à partir de la Proposition 2.2.2, $Ft(Rt(G_\tau)) = Ft(G_\tau)$, d'où le résultat. ■

2.2.2 Théorème ([13]). *La Réduction Transitive $Rt(G_\tau)$ est équilibrée, si et seulement si G_τ est équilibré.*

Preuve : la preuve est similaire à celle donnée dans le Théorème 2.2.1. ■

Remarque : Le diagramme ci-dessous obtenu à partir des résultats ci-dessus, montre que la notion classique de la réduction transitive pour les graphes orientés, est un cas particulier de celle retrouvée pour les graphes biorientés.



2.2.5 Proposition ([13]). Soit G_τ un graphe biorienté sans b-circuits.

Le graphe de la réduction transitive $Rt(G_\tau)$ est unique. Il est obtenu en supprimant les arêtes qui sont dans la fermeture transitive d'un b-chemin de G_τ .

Preuve : Soit $R(G_\tau)$ l'ensemble des arêtes qui sont dans la fermeture transitive d'un b-chemin (ces arêtes sont redondantes). Si H_τ est un graphe partiel de G_τ , alors $R(H_\tau) \subseteq R(G_\tau)$. Tout d'abord on montre que, si $e, f \in R(G_\tau)$, alors $f \in R(G_\tau - \{e\})$. Supposons $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ est impliquée par le b-chemin $P_0 = P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ et $f = \{z^\gamma, w^\delta\}$ est impliquée par le b-chemin $Q_0 = Q_{(\gamma, \delta)}(z, w)$.

- Si $e \in Q_0$, alors Q_0 est un b-chemin dans $G_\tau - \{e\}$ qui implique f .
- Si $e \in Q_0$ mais $f \notin P_0$, alors $Q_0 = Q_1 e Q_2$ où, par choix de notation, $e = (x^\alpha, y^\beta)$ dans cet ordre, d'où $Q_1 = P_{(\gamma, -\alpha)}(z, x)$ et $Q_2 = P_{(-\beta, \delta)}(y, w)$. Remplaçons Q_0 par $Q_1 P_0 Q_2$. C'est un b-chemin non élémentaire de z^γ à w^δ ainsi il contient un b-chemin P de z^γ à w^δ , dans $G_\tau - \{e\}$, et P implique f .
- Si $e \in Q_0$ et $f \in P_0$, alors $Q_0 = Q_1 e Q_2$ où e, Q_1 et Q_2 sont donnés, dans les cas précédents et $P_0 = P_1 f P_2$ où f est appariée dans P_0 , soit (z^γ, w^δ) ou (w^δ, z^γ) .

- Supposons la première possibilité. Alors $P_1 = P_{(\alpha, -\gamma)}(x, z)$ d'où $P_1 Q_1$ est un b-chemin non élémentaire de x^α à $x^{-\alpha}$; cependant $P_1 Q_1$ possède un b-circuit, ce qui est impossible.
- Supposons la deuxième possibilité, et soit P^* l'inverse du b-chemin P . Alors $P_1 Q_2^* P_2^* Q_1$ est un b-chemin non élémentaire de x^α à $x^{-\alpha}$; d'où il possède un b-circuit, ce qui est impossible.

Donc, ce cas n'existe pas.

On conclue que $f \in R(G_\tau - \{e\}) \forall f \in R(G_\tau), f \neq e$. Donc, $R(G_\tau) - \{e\} \subseteq R(G_\tau - \{e\})$. Puisque $G_\tau - \{e\}$ est un graphe partiel de G_τ , $R(G_\tau - \{e\}) \subseteq R(G_\tau)$ d'où $R(G_\tau - \{e\}) = R(G_\tau) - \{e\}$. On déduit que, $R(G_\tau - R(G_\tau)) = R(G_\tau) - R(G_\tau) = \emptyset$. On conclue aussi que, $f \in Ft(G_\tau - \{e\})$ et on déduit que $R(G_\tau) \subseteq Ft(G_\tau - R(G_\tau))$. Cependant, $Rt(G_\tau) = G_\tau - R(G_\tau)$, d'où d'après les Propositions 2.2.1 et 2.2.2 $G_\tau = Ft(G_\tau; Rt(G_\tau))$. C'est unique puisque

$$R(Rt(G_\tau)) = R(G_\tau) \cup [E(Rt(G_\tau)) - E(G_\tau)]$$

à partir de la définition de la fermeture transitive. ■

Ces arêtes, sont appelées les arêtes redondantes de G_τ . FIGURE 3.13 montre que la fermeture transitive du b-chemin $P_{(-, -)}(2, 3) : 2^-, 1, 3^-$ contient l'arête $\{2^-, 3^-\}$ qui est une arête redondante.

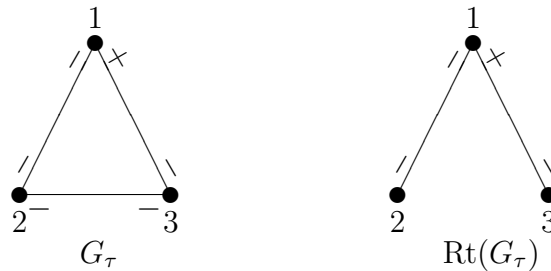


FIGURE 3.13 – $\{2^-, 3^-\}$ est une arête redondante.

Remarque 1 : on montre un exemple, dans lequel la réduction transitive est unique, et un exemple dans lequel elle n'est pas unique.

Si C_1 et C_2 sont deux b-circuits symétriques, alors $\text{Ft}(C_1) = \text{Ft}(C_2) = \text{Ft}(G_\tau)$.

Dans la FIGURE 3.14, G_τ a une seule réduction transitive C_1 , mais $\text{Ft}(G_\tau)$ a deux réductions transitives $C_1 = \text{Rt}(G_\tau)$ et $C_2 = \text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau))$.

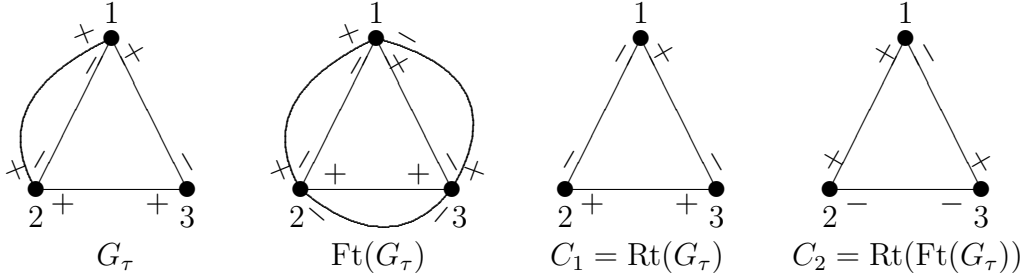


FIGURE 3.14 – C_1 est la réduction transitive de G_τ et de $\text{Ft}(G_\tau)$. C_2 est la réduction transitive de $\text{Ft}(G_\tau)$, mais pas de G_τ . Car il n'est pas contenu dans G_τ . Chaque sommet de $\text{Ft}(G_\tau)$ possède une boucle positive.

➤ Soient G_τ un graphe biorienté et $E = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$ son ensemble d'arêtes.

Supposons que E est linéairement ordonné par un ordre linéaire $<$ dans l'ordre des indices, c'est-à-dire, $e_i < e_j \Leftrightarrow i < j$.

Soit $(G_\tau)_i$ la famille des graphes construite à partir de G_τ comme suit :

$$(G_\tau)_0 = G_\tau \text{ et } (G_\tau)_i = \begin{cases} (G_\tau)_{i-1} - e_i & \text{si } e_i = \{x^\alpha, y^\beta\} \text{ est induite par la fermeture transitive} \\ & \text{du b-chemin } P_{(\alpha,\beta)}(x, y) \text{ dans } (G_\tau)_{i-1} - \{e_i\}, \\ (G_\tau)_{i-1} & \text{sinon.} \end{cases}$$

On pose : $S_<(G_\tau) = \{e_i \in E : e_i \in (G_\tau)_{i-1} \text{ et } e_i \notin (G_\tau)_i\}$.

2.2.6 Proposition ([13]). Soit G_τ un graphe biorienté. Pour un ordre linéaire $<$ de E , $G_\tau - S_<(G_\tau)$ est une réduction transitive de G_τ .

Inversement, si $\text{Rt}(G_\tau) = (V, \text{Rt}(E); \tau)$ est une réduction transitive de G_τ , alors $\text{Rt}(G_\tau) = G_\tau - S_<(G_\tau)$ pour un certain ordre linéaire $<$ de E .

Preuve : Supposons un ordre linéaire $<$ de E . Par construction, si $e_i \in S_<(G_\tau)$, alors $e_i \in \text{Ft}((G_\tau)_i)$. Soit $m = |E|$; alors $\text{Ft}(G_\tau) = \text{Ft}^m(G_\tau - S_<(G_\tau))$ (les m itérations de Ft) = $\text{Ft}(G_\tau - S_<(G_\tau))$ d'après la Proposition 1.3.1 Partie 1.

À partir de la Proposition 2.2.1,

$$\text{ft}(G_\tau; G_\tau - S_<(G_\tau)) = G_\tau \text{ puisque } G_\tau \subseteq \text{Ft}(G_\tau) = \text{Ft}(G_\tau - S_<(G_\tau)).$$

Si $G_\tau - S_<(G_\tau)$ n'est pas un graphe partiel minimal qui engendre G_τ sous Ft , alors il y aurait une arête $e_j \in E - S_<(G_\tau)$ telle que e_j est déduite par un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ dans $(G_\tau - S_<(G_\tau)) - e_j$, où $e_j = \{x^\alpha, y^\beta\}$. Ce b-chemin est dans $(G_\tau)_{j-1} - e_j$ ainsi, par construction $e_j \notin (G_\tau)_j$, donc $e_j \in S_<(G_\tau)$, contradiction. D'où, $G_\tau - S_<(G_\tau)$ est la réduction transitive de G_τ .

Supposons que $\text{Rt}(G_\tau)$ est la réduction transitive de G_τ . Soit $S = E - \text{Rt}(E)$. Chaque arête de S est induite par un b-chemin dans $\text{Rt}(G_\tau)$. Ordonnons linéairement E par $<$ ainsi $S = \{e_1, \dots, e_k\}$ est ordonné. Alors à l'étape $i \leq k$ lors de la construction de $S_<(G_\tau)$, l'arête e_i est induite par la fermeture transitive d'un b-chemin dans $(G_\tau)_{i-1} - \{e_i\}$ ainsi $e_i \in S_<(G_\tau)$, mais à l'étape $i > k$, $(G_\tau)_i = \text{Rt}(G_\tau)$, qu'il n'a pas un tel b-chemin car $\text{Rt}(G_\tau)$ est minimal. ■

2.2.2 Corollaire ([13]). Si $S_<(G_\tau) = \emptyset$, alors $\text{Rt}(G_\tau) = G_\tau$.

Preuve : Supposons que $\text{Rt}(G_\tau) \neq G_\tau$. On a $\text{Rt}(G_\tau)$ est un graphe partiel de G_τ .

Si $e \in G_\tau$ et $e \notin \text{Rt}(G_\tau) \Rightarrow$ d'après la définition de la réduction transitive, il existe dans G_τ un b-chemin, dont e est sa fermeture transitive
 $\Rightarrow e \in S_<(G_\tau)$, contradiction. ■

2.2.3 Corollaire ([13]). Si $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ est un b-chemin, alors $\text{Rt}(P_{(\alpha,\beta)}(x,y)) = P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$.

Preuve : Pour le graphe $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$, on a $S_<(G_\tau) = \emptyset$. ■

2.2.4 Corollaire. Si C est un b-circuit, alors $\text{Rt}(C) = C$.

Preuve : Pour le graphe C on a $S_<(G_\tau) = \emptyset$. ■

2.2.7 Proposition. Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ une arête n'appartenant pas à E . Alors $\text{Rt}(G_\tau + e) = \text{Rt}(G_\tau)$, si et seulement si il existe dans G_τ un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$.

Preuve : Soit $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \notin E$.

$\Rightarrow$) $\text{Rt}(G_\tau) = \text{Rt}(G_\tau + e) \Rightarrow e \notin \text{Rt}(G_\tau)$ car $e \notin E$
 $\Rightarrow e \notin \text{Rt}(G_\tau)$
 $\Rightarrow e \in S_<(G_\tau)$ (d'après la Proposition 2.2.6)
 $\Rightarrow$ il existe dans G_τ un b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$.

$\Leftarrow$) Supposons que $\text{Rt}(G_\tau + e) \not\subset \text{Rt}(G_\tau)$. Soit s une arête telle que :

$s \in \text{Rt}(G_\tau + e) - \text{Rt}(G_\tau) \Rightarrow s \in (G_\tau + e)$ et $s \notin \text{Rt}(G_\tau)$:

◆ Si $s \in G_\tau \Rightarrow s$ est relative à un b-chemin dans G_τ
 $\Rightarrow s$ est relative à un b-chemin dans $G_\tau + e$
 $\Rightarrow s \in \text{Rt}(G_\tau + e)$, contradiction.

◆ Si $s \notin G_\tau$ et $s \in (G_\tau + e) \Rightarrow s = e$
 $\Rightarrow e \in \text{Rt}(G_\tau + e)$
 $\Rightarrow e$ n'est relative à aucun b-chemin dans $G_\tau + e$
 $\Rightarrow e$ n'est relative à aucun b-chemin dans G_τ ,
 $\Rightarrow$ contradiction. ■

2.2.8 Proposition ([13]). Si G_τ est un graphe biorienté quasi-équilibré, alors $\text{Rt}(G_\tau)$ est un graphe biorienté quasi-équilibré.

Preuve : On a G_τ est sans circuit de type (ii) et (iii), $\text{Rt}(G_\tau)$ est un graphe partiel de G_τ , d'où le résultat. ■

2.2.9 Proposition ([13]). Soit G_τ un graphe biorienté tel que $\text{Rt}(G_\tau)$ est quasi-équilibré. Soit $<$ un ordre linéaire de E . Si G_τ est quasi-équilibré, alors toute arête e appartenant à l'ensemble $S_<(G_\tau)$, e n'est la fermeture transitive d'aucun hypercyclique b-chemin dans G_τ .

Preuve : Soit G_τ un graphe biorienté, G_σ est son graphe signé sous-jacent.

Supposons qu'il existe une arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in S_<(G_\tau)$, qui est la fermeture transitive d'un hypercyclique b-chemin $P = P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$, qui admet un cycle négatif C . Ceci implique que $P \cup \{e\}$ est un S -cycle de type (ii) ou (iii) de G_τ , si le cycle C' de $P \cup \{e\}$ contenant e est négatif.

D'après la Proposition 2.1.1 Chapitre 2, le signe de P est $-\alpha\beta$, qui est aussi le signe de e d'après le Corollaire 1.3.1 Chapitre 3 partie 1. Cependant, le signe du S -cycle $P \cup \{e\}$ est positif(+). Ce signe égal le produit de $\sigma(C)\sigma(C')$, ainsi $\sigma(C') = \sigma(C) = -$. D'où G_τ n'est pas quasi-équilibré, contradiction. ■

❖ La condition suffisante n'est pas vérifiée. La réciproque de la Proposition 2.2.9 est fausse. Considérons un graphe G_τ avec $V = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$ et les arêtes sont

$$1^-2^+, 2^+3^+, 3^+4^+, 4^+5^+, 1^-5^+, 5^-6^+, 6^-7^+, 5^+7^+, 7^-2^+,$$

linéairement ordonnée dans cet ordre.

L'arête $e = \{1^-, 2^+\}$ est supprimable en utilisant le chemin $P : 15672$, et pas d'autre arête est supprimable. On n'a pas un S -cycle de type (ii) ou (iii) dans $G_\tau - e$.

Mais $G_\tau - 7^-2^+$ est un S -cycle de type (ii). Cependant, G_τ n'est pas quasi-équilibré, mais le graphe $\text{Rt}(G_\tau) = G_\tau - e$ est quasi-équilibré. D'où, e n'est pas la fermeture transitive d'aucun hypercyclique b-chemin. P et e sont les seuls b-chemins reliant les deux sommets 1 et 2.

2.3 La Réduction Transitive et les graphes frame connexes

2.3.1 Théorème. Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. Si $\text{Rt}(G_\tau)$ est frame connexe, alors G_τ est frame connexe.

Preuve : Supposons que G_τ n'est pas frame connexe, c'est-à-dire

il existe deux arêtes $e_1, e_2 \in E : \{e_1, e_2\}$ n'est pas inclus dans aucun circuit de $M(G_\tau)$.

Considérons les cas suivants :

(1) Si $e_1 \notin \text{Rt}(G_\tau)$ et $e_2 \in \text{Rt}(G_\tau)$.

On a : $e_1 \in E - \text{Rt}(G_\tau) \Rightarrow e_1 \in S_<(G_\tau)$

$\Rightarrow$ il existe un b-chemin dans G_τ relatif à e_1

$\Rightarrow$ il existe un circuit C_1 de $M(G_\tau) : e_1 \in C_1 = P \cup \{e_1\}$

$\Rightarrow \forall e \in P$, il existe un circuit C_2 de $M(G_\tau) : \{e_2, e\} \subseteq C_2$,

car $\text{Rt}(G_\tau)$ est frame connexe

$\Rightarrow e \in C_1 \cap C_2$ et $e_2 \in C_2 - C_1$

$\Rightarrow$ Il existe un circuit C_3 de $M(\text{Rt}(G_\tau)) : e_2 \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$

$\Rightarrow C_3$ est dans G_τ et $e_2 \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$, contradiction

car G_τ n'est pas frame connexe.

(2) Si $e_2 \notin \text{Rt}(G_\tau)$ et $e_1 \in \text{Rt}(G_\tau) : ($ de même que (1)).

(3) Si $e_1 \notin \text{Rt}(G_\tau)$ et $e_2 \notin \text{Rt}(G_\tau) :$

On a : e_1 et $e_2 \in E - \text{Rt}(G_\tau) \Rightarrow e_1 \in S_<(G_\tau)$ et $e_2 \in S_<(G_\tau)$.

Il existe P_1 et P_2 deux b-chemins de $G_\tau : C_1 = P_1 \cup \{e_1\}$ et $C_2 = P_2 \cup \{e_2\}$ sont deux circuits

de $M(G_\tau)$, alors :

- Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$.

Soit $e \in C_1 \cap C_2$ et on a $e_1 \in C_1 - C_2$, ceci implique qu'il existe un frame circuit C_3 de G_τ tel que : $e_1 \in C_3 \subseteq (C_1 \cup C_2) - e$, d'où la contradiction car G_τ n'est pas frame connexe (il en est de même pour $e_2 \in C_2 - C_1$).

- Si $C_1 \cap C_2 = \emptyset$.

Soient e'_1 et e'_2 deux arêtes de E telles que $e'_1 \in P_1$ et $e'_2 \in P_2$ et puisque le graphe $Rt(G_\tau)$ est frame connexe, il existe un circuit C tel que $\{e'_1, e'_2\} \subseteq C$, d'où on a : $e'_2 \in C_2 \cap C$ et on a de plus $e_2 \in C_2 - C$, ceci implique qu'il existe un circuit C_3 de $M(G_\tau)$ tel que : $e_2 \in C_3 \subseteq (C \cup C_2) - e'_2$, d'où $e'_1 \in C_3 \cap C_1$ et on a $e_2 \in C_3 - C_1$, ceci implique qu'il existe un circuit C_4 de $M(G_\tau)$ tel que : $e_2 \in C_4 \subseteq (C_1 \cup C_3) - e'_1$, d'où la contradiction car G_τ n'est pas frame connexe (il en est de même pour $e'_1 \in C_1 \cap C$ et $e_1 \in C_1 - C$).

(4) Cependant, on conclue d'après (1), (2) et (3), que e_1 et $e_2 \in Rt(G_\tau)$ et puisque $Rt(G_\tau)$ est frame connexe, alors il existe un circuit C de $M(Rt(G_\tau))$ tel que $\{e_1, e_2\} \subseteq C$, ceci implique qu'il existe un circuit C de $M(G_\tau)$ tel que $\{e_1, e_2\} \subseteq C$, contradiction.

Donc à partir de (1), (2), (3), et (4) le graphe G_τ est frame connexe. ■

Remarque : La réciproque du Théorème 2.3.1 est fausse. Considérons le graphe biorienté suivant $G_\tau = P_{(\alpha, \beta)}(x, y) \cup \{e\}$, tel que $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ est un b -chemin de longueur inférieur ou égal à 2, et $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$. $Rt(G_\tau) = P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ et $M(Rt(G_\tau)) = M(P_{(\alpha, \beta)}(x, y))$ n'est pas connexe tandis que $M(G_\tau)$ est connexe (G_τ est frame connexe) car le graphe signé associé à G_τ est un S -cycle de type (i) ou de type (ii).

2.3.1 Proposition. *Si une arête e est un frame isthme de G_τ , alors e est un frame isthme de $Rt(G_\tau)$.*

Preuve : Supposons que l'arête e n'est pas un frame isthme de $Rt(G_\tau)$, alors les composantes connexes de $Rt(G_\tau) - e$ sont non équilibrées, ceci implique que les composantes connexes de G_τ sont aussi non équilibrées, donc e n'est pas un frame isthme de G_τ , contradiction. ■

2.3.2 Proposition. *Soit G_τ un graphe biorienté quasi-équilibré. $Rt(G_\tau)$ admet un frame isthme, si et seulement si G_τ admet un frame isthme.*

Preuve : La preuve se déduit des Propositions 2.3.1 et 2.2.8, et la définition d'un graphe biorienté quasi-équilibré. ■

2.4 La Réduction Transitive dans les graphes biorientés frame-Cohérents

2.4.1 Proposition. *Soit G_τ un graphe biorienté frame-cohérent. $G_\tau = Rt(G_\tau)$.*

Preuve : Il suffit d'utiliser la définition de la réduction transitive. ■

2.4.2 Proposition. *Soit G_τ un graphe frame connexe. Si G_τ est frame-cohérent, alors $\text{Rt}(G_\tau)$ est frame connexe.*

Preuve : Si G_τ est frame-cohérent, on a d'après la Proposition 2.4.1 $\text{Rt}(G_\tau) = G_\tau$, la preuve s'ensuit. ■

2.4.3 Proposition. *Si G_τ est frame-cohérent, alors G_τ est frame connexe, si et seulement si $\text{Rt}(G_\tau)$ est frame connexe.*

Preuve : Il suffit d'utiliser les Propositions 2.4.2 et 2.4.1. ■

2.4.4 Proposition. *Si G_τ est frame-cohérent, alors une arête e est un frame isthme de G_τ , si et seulement si e est un frame isthme de $\text{Rt}(G_\tau)$.*

Preuve : La preuve se déduit des Propositions 2.4.1 et 2.3.1. ■

2.5 La fermeture Transitive - La réduction transitive

2.5.1 Proposition ([13]). *Soit G_τ un graphe biorienté. La réduction transitive de G_τ est une réduction transitive de $\text{Ft}(G_\tau)$.*

Preuve : Nous appliquons la Proposition 2.2.6. Soit $\text{Rt}(G_\tau)$ la réduction transitive de G_τ . Choisissons un ordre linéaire de $E(\text{Ft}(G_\tau))$ tel que les arêtes de $\text{Ft}(G_\tau) - E(G_\tau)$ sont initiales et les arêtes de $\text{Rt}(G_\tau)$ sont finales. A partir de la définition de la fermeture transitive, les m arêtes de $\text{Ft}(G_\tau) - E(G_\tau)$ sont dans $S_<(\text{Ft}(G_\tau) - E(G_\tau))$ et $(\text{Ft}(G_\tau))_m = \text{Ft}(G_\tau)$. La proposition s'ensuit. ■

Pour la réciproque. Soit H_τ un graphe biorienté qui possède plus d'une réduction transitive, et soit $G_\tau = \text{Rt}(H_\tau)$. Alors $G_\tau = \text{Rt}(G_\tau)$. Puisque $H_\tau \subseteq \text{Ft}(H_\tau) = \text{Ft}(G_\tau)$, toute réduction transitive de H_τ est une réduction transitive de $\text{Ft}(G_\tau)$, mais seulement une de ces réductions transitives peut être $G_\tau = \text{Rt}(G_\tau)$. Ceci ne peut être réalisé si G_τ n'a pas de b -circuit.

On montre en premier le Lemme suivant.

2.5.1 Lemme ([13]). *Soit G_τ un graphe biorienté sans b -circuit. Alors $\text{Ft}(G_\tau)$ est sans b -circuit.*

Preuve : Supposons une arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in \text{Ft}(G_\tau) - E(G_\tau)$. Ça signifie qu'il existe un b -chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x, y)$ dans G_τ . Supposons maintenant qu'il existe un b -circuit C de z^γ à $z^{-\gamma}$ dans $G_\tau \cup \{e\}$, $C = C_1 e C_2$, où on suppose que C_1 se termine au sommet $x^{-\alpha}$ et C_2 commence par le sommet $y^{-\beta}$. Alors la séquence $C_1 P C_2$ est un b -circuit non élémentaire de z^γ à $z^{-\gamma}$ dans G_τ , ainsi il contient un b -circuit, contradiction. Cependant, $G_\tau \cup \{e\}$ n'admet pas un b -circuit. La preuve s'ensuit par induction sur le nombre d'arêtes dans $\text{Ft}(G_\tau) - E(G_\tau)$. ■

2.5.2 Proposition ([13]). *Soit G_τ un graphe biorienté sans b -circuit. $\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau)) = \text{Rt}(G_\tau)$. L'unique réduction transitive de $\text{Ft}(G_\tau)$ est (l'unique) la réduction transitive de G_τ .*

Preuve : D'après le Lemme 2.5.1, $\text{Ft}(G_\tau)$ n'a pas de b -circuit. À partir de la Proposition 2.2.5, $\text{Ft}(G_\tau)$ a une seule réduction transitive c'est $\text{Rt}(G_\tau)$. Cependant, $\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau)) = \text{Rt}(G_\tau)$. ■

2.5.1 Corollaire ([13]). Soit G_τ un graphe biorienté sans b -circuit. Si $S_<(G_\tau) = \emptyset$, alors $\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau)) = G_\tau$.

Preuve : Si $S_<(G_\tau) = \emptyset$, alors d'après le Corollaire 2.2.2 on a $\text{Rt}(G_\tau) = G_\tau$.

De plus, il s'ensuit à partir de la Proposition 2.5.2 que $\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau)) = \text{Rt}(G_\tau)$, d'où le résultat. ■

2.5.3 Proposition ([13]). Soit G_τ un graphe biorienté sans b -circuit. Alors

$$\text{Ft}(\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau))) = \text{Ft}(G_\tau).$$

Preuve : D'après la Proposition 2.5.2 $\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau)) = \text{Rt}(G_\tau)$

$$\Rightarrow \text{Ft}(\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau))) = \text{Ft}(\text{Rt}(G_\tau))$$

$$\Rightarrow \text{Ft}(\text{Rt}(\text{Ft}(G_\tau))) = \text{Ft}(G_\tau) \text{ (d'après la Proposition 2.2.2).} \quad \blacksquare$$

2.5.1 Théorème ([13]). Soient G_τ un graphe biorienté et $\text{Ft}(G_\tau)$, $\text{Rt}(G_\tau)$ sont la fermeture transitive et la réduction transitive de G_τ respectivement. Si $P_{(\alpha,\beta)}(x,y)$ est un b -chemin de G_τ tel que : $P_{(\alpha,\beta)}(x,y) : x^\alpha e_1 x_1 \dots e_i x_{i+1} e_{i+1} \dots x_{k-1} e_k y$, alors $\text{Ft}(G_\tau) = \text{Rt}(G_\tau)$, si et seulement si pour toute paire de sommets x et y de G_τ on a $k \leq 1$.

Preuve : La preuve se déduit à partir du Corollaire 1.3.2 partie 1 et du Corollaire 2.2.1. ■

On désigne par $\overline{F}$ la fermeture de F dans un matroïde $M(E)$.

$$\overline{F} = \{x \in E / \mathbf{r}(F) = \mathbf{r}(F \cup \{x\})\}.$$

2.5.2 Lemme ([13]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté. Si $e \in E - \text{Rt}(E)$, alors e appartient à la fermeture $\overline{\text{Rt}(E)}$ dans $M(G_\tau)$. Si $e \in E(\text{Ft}(G_\tau)) - E$, alors e appartient à la fermeture $\overline{E}$ dans $M(\text{Ft}(G_\tau))$.

Preuve : Soit P un b -chemin dans $\text{Rt}(G_\tau)$ dont il est relatif à l'arête $e \in E$. Alors $P \cup \{e\}$ est un S -cycle de type (i), (ii) ou (iii) dans G_τ . Ainsi, $e \in \overline{\text{Rt}(E)}$ dans $M(G_\tau)$.

La deuxième assertion est déduite à partir de la première car dans $M(\text{Ft}(G_\tau))$, $\overline{E}$ est la fermeture de $\overline{\text{Rt}(E)}$, qui égal à $\overline{\text{Rt}(E)}$. ■

2.5.2 Théorème ([13]). Soient G_τ un graphe biorienté et $\text{Ft}(G_\tau)$, $\text{Rt}(G_\tau)$ sont la fermeture transitive et la réduction transitive de G_τ respectivement. Si $M(\text{Ft}(G_\tau))$ et $M(\text{Rt}(G_\tau))$ sont respectivement les matroïdes associés à $\text{Ft}(G_\tau)$ et $\text{Rt}(G_\tau)$, alors ils ont le même rang c'est-à-dire :

$$\mathbf{r}(M(\text{Ft}(G_\tau))) = \mathbf{r}(M(G_\tau)) = \mathbf{r}(M(\text{Rt}(G_\tau))).$$

Preuve : Pour $\mathbf{r}(M(\text{Ft}(G_\tau))) = \mathbf{r}(M(G_\tau))$, il suffit d'utiliser le Lemme 2.5.2.

Pour $\mathbf{r}(M(\text{Rt}(G_\tau))) = \mathbf{r}(M(\text{Ft}(G_\tau)))$, il suffit d'utiliser la Proposition 2.2.2 et remplaçons G_τ par $\text{Rt}(G_\tau)$ dans le cas précédent. ■

Remarque : On peut montrer le Théorème 2.3.1 en utilisant le Théorème 2.5.2 comme suit (voir [13]) :

Le Théorème 2.5.2 implique que $\overline{E(\text{Rt}(G_\tau))} = \overline{E(G_\tau)} = E(\text{Ft}(G_\tau))$ dans $M(\text{Ft}(G_\tau))$. $M(\text{Rt}(G_\tau))$ est connexe, il s'ensuit d'après la théorie des matroïdes que $M(G_\tau)$ et $M(\text{Ft}(G_\tau))$ sont connexes.

CHAPITRE 4

CHAPITRE 4.

Dans ce chapitre on présentera une logique quadrivalente qui est différente de la logique classique. Tout d'abord on donne quelques résultats principaux sur des notions algébriques de base nécessaires et utiles pour la logique quadrivalente, par la suite à l'aide des graphes biorientés on donnera une représentation graphique des 4 valeurs (opérateurs) de la logique du premier ordre appelée la logique DDT.

D'une part, en utilisant la définition de la fermeture transitive des graphes biorientés pour les 4 opérateurs de la logique DDT, nous avons obtenu des fermetures transitives pour cette logique quadrivalente. Par la suite à travers ces nouvelles fermetures transitives de la logique DDT, nous avons obtenu de nouvelles fermetures transitives commutatives pour les graphes biorientés orientés.

1. Le principe d'incertitude

Le principe d'incertitude (ou **principe d'indétermination**) fut énoncé au printemps 1927 par Heisenberg lors des balbutiements de la mécanique quantique. Énonce que, pour une particule massive donnée, on ne peut pas connaître simultanément sa position et sa vitesse.

Le principe d'incertitude est souvent appelé principe d'indétermination. L'emploi de ces deux termes pour désigner la même notion résulte d'un problème lors de la traduction en anglais de l'article de Heisenberg. En effet, lors de la première rédaction de son article, Heisenberg emploie les termes *Unsicherheit* (incertitude) et *Ungenauigkeit* (imprécision) puis, comprenant que ces termes peuvent prêter à confusion, il décide d'utiliser finalement le terme *Unbestimmtheit* (indétermination). Mais l'article est déjà traduit et c'est le terme "*principe d'incertitude*" qui sera consacré.

Bien que la dénomination « principe d'incertitude » soit la plus usitée, on devrait en toute rigueur parler de « principe d'indétermination ». Cependant l'expression s'est répandue à tel point qu'elle est aujourd'hui acceptée par tous les physiciens. Le terme de « principe » est aussi inapproprié, quoique souvent encore utilisé. Il conviendrait de parler de relations d'incertitude ou mieux de relations d'indétermination, étant donné que ces relations sont parfaitement justifiées au point de vue mathématique.

En raison des compréhension philosophiques du terme de "principe", aujourd'hui, les physiciens parlent davantage des *relations d'incertitude*, ou des *inégalités de Heisenberg*, car il s'agit d'une *inégalité* portant sur des grandeurs physiques *non-commutatives*.

2. Définition (axiome)

Axiome : nom masculin, Anglais axiome.

Sens : Proposition évidente, dont la vérité est reconnue sans démonstration.

Synonymes axiome : Abstraction, énoncé, évidence, postulat, principe.

Un **axiome** (du grec ancien $\alpha\zeta\tau\omega\mu\alpha$ / *axioma*, « considéré comme digne, convenable, évident en soi » lui-même dérivé de $\alpha\zeta\tau\varsigma$ (*axios*), signifiant « digne ») désigne une vérité indémontrable qui doit être admise. Pour certains philosophes grecs de l'Antiquité, un axiome était une affirmation qu'ils considéraient comme évidente et qui n'avait nul besoin de preuve.

2.1 Description

En mathématiques, le mot *axiome* désignait une proposition qui est évidente en soi dans la tradition mathématique grecque, comme dans les *Éléments* d'Euclide. L'axiome est utilisé désormais, en logique mathématique, pour désigner une vérité première, à l'intérieur d'une théorie. L'ensemble des axiomes d'une théorie est appelé **axiomatique** ou théorie axiomatique. Cette axiomatique doit être non contradictoire ; c'est sa seule contrainte. Cette axiomatique définit la théorie ; ce qui signifie que l'axiome ne peut être remis en cause à l'intérieur de cette théorie, on dit alors que cette théorie est consistante. Un axiome représente donc plutôt un point de départ dans un système de logique et il peut être choisi arbitrairement.

La pertinence d'une théorie dépend de la pertinence de ses axiomes et de son interprétation. En réalité, c'est de la non cohérence de son interprétation que vient la réfutation de la théorie non contradictoire et, par voie de conséquence, de son axiomatique. L'axiome est donc à la logique mathématique, ce qu'est le postulat à la physique théorique. Des axiomes servent de base élémentaire pour tout système de logique formelle.

Tout résultat que nous pouvons déduire des axiomes n'a pas besoin d'être un axiome. Toute affirmation qui ne peut être déduite des axiomes et dont la négation ne peut pas non plus se déduire de ces mêmes axiomes, peut raisonnablement être ajoutée comme axiome.

3. Relation d'ordre

Une **relation d'ordre** dans un *ensemble* est une *relation binaire* dans cet ensemble qui permet de comparer ses éléments entre eux de manière cohérente. Un ensemble muni d'une relation d'ordre est un **ensemble ordonné** ou tout simplement un **ordre**.

3.1 Définitions et exemples

Une relation d'ordre est une relation binaire réflexive, transitive et antisymétrique : soit E un ensemble et une relation binaire sur cet ensemble notée « $\leq$ », cette relation est une relation d'ordre si pour tous x, y et z éléments de E :

- $x \leq x$ (réflexivité)
- $(x \leq y \text{ et } y \leq x) \Rightarrow x = y$ (antisymétrie)
- $(x \leq y \text{ et } y \leq z) \Rightarrow x \leq z$ (transitivité)

Une relation d'ordre au sens de la définition ci-dessus est parfois qualifiée d'*ordre large*.

Pour certaines relations d'ordre, deux éléments de E sont toujours *comparables*, c'est-à-dire que pour tous x, y de E : $x \leq y$ ou $y \leq x$.

On dit alors que la relation d'ordre est *totale*, et que l'ensemble E est *totalelement ordonné* par cette relation. Une relation d'ordre sur E est dite *partielle* si elle n'est pas totale, et E est alors *partiellement ordonné*.

3.2 Exemples et contre-exemples

- La relation « est inférieur ou égal à » est une relation d'ordre total sur l'ensemble des entiers (naturels ou relatifs), sur l'ensemble des rationnels ou l'ensemble des réels.
- La relation « est strictement inférieur à », par exemple sur l'ensemble des entiers naturels, n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas réflexive .
- La relation d'inclusion, « est un sous-ensemble de » ou « est contenu dans » est une relation d'ordre partiel sur l'ensemble des parties d'un ensemble. Si l'ensemble donné est fini, son ensemble des parties est fini (plus précisément si un ensemble contient n éléments, son ensemble des parties en contient 2^n).

3.3 Diagramme de Hasse

En mathématiques, le **diagramme de Hasse**, du nom du mathématicien Allemand Helmut Hasse (1898-1979), est une représentation visuelle d'un ordre fini.

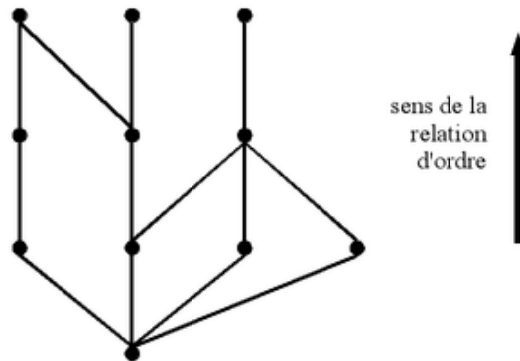
Pour dessiner un diagramme de Hasse :

- On représente les éléments de l'ordre par des points.
- Si un élément x est plus grand qu'un autre élément y selon « $\leq$ », on place la représentation de x plus haut que celle de y .
- Le fait que deux éléments sont en relation est représenté par un segment entre ces deux points. Du fait de la disposition des points, on n'a pas besoin d'orienter ces segments avec une flèche (on sait qu'on va du bas vers le haut).
- Pour ne pas charger le schéma, on ne représente pas toute la relation d'ordre, mais seulement sa réduction réflexive transitive : d'une part si $x \leq y$, mais qu'il existe z différent de x et de y tel que $(x \leq z) \wedge (z \leq y)$, alors on ne trace pas le segment entre x et y ; d'autre part on ne représente pas les boucles d'un élément vers lui-même.
- On veille autant que possible à ne pas croiser les segments.

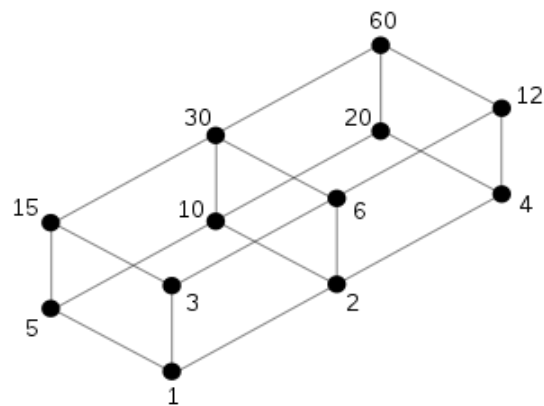
En cas d'ordre infini, on peut néanmoins aussi utiliser le diagramme de Hasse pour représenter une restriction finie de l'ordre.

Exemples de diagramme de Hasse

- Ici, on a représenté un ensemble ordonné de 11 éléments avec trois éléments maximaux, et un minimum (qui est donc aussi un minorant de l'ensemble et sa borne inférieure).



- Soit l'ensemble $A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60\}$ de tous les diviseurs de 60, partiellement ordonné par la relation de divisibilité. On a le diagramme de Hasse suivant :



4. Définitions Algébriques

4.1 Quelques lois usuelles

4.1.1 Définition (Conjonction). Elle est définie de la manière suivante :

a ET b est VRAI si et seulement si a est VRAI et b est VRAI. Cette loi est aussi notée « $\wedge$ ».

Table de la loi ET		
$b \backslash a$	0	1
0	0	0
1	0	1

4.1.2 Définition (Disjonction). Elle est définie de la manière suivante :

a OU b est VRAI si et seulement si a est VRAI ou b est VRAI (si a est vrai et que b est vrai aussi, alors a OU b est vrai). Cette loi est aussi notée « $\vee$ ».

Table de la loi OU		
$b \backslash a$	0	1
0	0	1
1	1	1

4.1.3 Définition (Négation). Le contraire de a est VRAI si et seulement si a est FAUX.

Le contraire de a est noté $\bar{a}$. On obtient alors $\bar{0} = 1$ et $\bar{1} = 0$.

4.1.4 Définition. Les opérations $\wedge$ et $\vee$ sont associatives, commutatives, que 0 est neutre pour $\vee$ et absorbant pour $\wedge$, que 1 est neutre pour $\wedge$ et absorbant pour $\vee$, et que ces opérations sont idempotentes.

4.2 Treillis

Un treillis (en anglais : lattice) en mathématiques, est un ensemble partiellement ordonné dans lequel chaque couple d'éléments admet une borne supérieure et une borne inférieure. Un treillis peut être vu comme le treillis de Galois d'une relation binaire.

4.2.1 Définition. Un treillis est un ensemble E muni de deux lois internes habituellement notées $\wedge$ et $\vee$.

À partir d'une telle structure on peut définir sur E une relation d'ordre, ici notée $\subseteq$ de la manière suivante :

$$a \subseteq b \Leftrightarrow a \vee b = b.$$

On peut montrer que cette relation est bien une relation d'ordre (éventuellement partielle). La propriété d'associativité assure la transitivité. La propriété d'idempotence assure la réflexivité. La définition même assure l'antisymétrie. Grâce aux deux propriétés d'absorption, on peut aussi montrer que

$$a \subseteq b \Leftrightarrow a \wedge b = a.$$

4.2.2 Définition. *Un treillis est un ensemble E muni d'une relation d'ordre $\subseteq$ vérifiant :*

Pour tous éléments a et b de E , il existe une borne supérieure et une borne inférieure à l'ensemble $\{a, b\}$.

Pour munir E d'une structure de treillis algébrique, on remarque que la borne supérieure et la borne inférieure définissent alors deux lois internes :

- $a \vee b = \sup(a, b)$
- $a \wedge b = \inf(a, b)$

4.2.3 Définition (Dualité). *Le treillis dual de $(E, \vee, \wedge, \leq)$ est le treillis $(E, \wedge, \vee, \geq)$.*

4.2.1 Théorème (Théorème de dualité). *Si un théorème T est vrai pour tous les treillis alors le théorème dual de T , obtenu en remplaçant toutes les occurrences de $\vee$ par $\wedge$ (et réciproquement) et toutes les occurrences de $\leq$ par $\geq$ (et réciproquement) est un théorème vrai pour tous les treillis.*

4.2.1 Propriétés des treillis

- Un ensemble ordonné dans lequel chaque couple d'éléments possède une borne supérieure (ou une borne inférieure) est un **semi-treillis**.
- Un treillis est dit **distributif** si la loi $\vee$ est distributive par rapport à la loi $\wedge$, ou encore (ce qui dans un treillis est équivalent) si la loi $\wedge$ est distributive par rapport à la loi $\vee$.
- Un treillis est dit **borné** s'il possède un maximum et un minimum.
- Un treillis borné est dit **complémenté** si chacun de ses éléments x possède un complément y vérifiant $x \wedge y = 0$ et $x \vee y = 1$, où 0 désigne l'élément minimum du treillis, et 1 l'élément maximum.
- Un treillis E est dit **complet** si toute partie de E possède une borne supérieure, ou encore (ce qui dans un ensemble partiellement ordonné est équivalent) si toute partie de E possède une borne inférieure. Un treillis complet est borné.
- Dans un treillis E possédant un minimum que l'on note 0 , les **atomes** sont les éléments minimaux de E autres que 0 . Par exemple dans le treillis de l'ensemble des parties d'un ensemble, les atomes sont les singletons.
- Un **idéal** du treillis E est une partie I qui est stable par l'opération $\vee$ et qui est telle que : si $x \in E$ et $y \in I$, alors $x \wedge y \in I$.
- Étant donnée une partie A d'un ensemble X , l'ensemble des parties de A est un idéal du treillis de l'ensemble des parties de X .

Exemples.

L'ensemble des parties d'un ensemble muni de l'inclusion forme un treillis où la borne supérieure est l'union et la borne inférieure est l'intersection.

- Dans le même ordre d'idée, l'ensemble des ouverts d'un espace topologique (toujours muni de l'inclusion) forme un treillis. L'ensemble des ouverts réguliers (ouverts égaux à l'intérieur de leur adhérence) d'un espace topologique forme un treillis sans atomes.
- L'ensemble des entiers naturels muni de son ordre usuel est un exemple de treillis incomplet, et même non borné (voir plus loin les définitions d'un treillis complet et d'un treillis borné) : il n'admet pas d'élément maximum.
- L'ensemble des entiers naturels muni de la relation "divise" forme un treillis, où la borne supérieure est le PPCM et la borne inférieure est le PGCD. C'est un treillis borné (l'élément minimum est 1, l'élément maximum est 0) et même complet.
- Soient f, g deux fonctions boréliennes sur $\mathbb{R}$, intégrables au sens de Lebesgue et vérifiant $f < g$. L'ensemble des fonctions boréliennes h comprises entre f et g est un treillis non complet qui devient complet si on identifie deux fonctions égales presque partout (attention ! la borne supérieure d'une famille de fonctions boréliennes peut être non mesurable ; lorsqu'on quotient modulo l'égalité presque-partout, on regarde ce qu'on appelle une borne **essentielle** supérieure, laquelle, en revenant aux fonctions, majore presque-partout chaque élément de la famille).

5. L'algèbre de Boole ou calcul booléen

Elle fut initiée du milieu du XIX^e siècle par le Mathématicien, Logicien George Boole, philosophe britannique. Créateur de la logique moderne, fondée sur une structure algébrique, que l'on appelle algèbre de Boole (ou algèbre booléenne en son honneur), une des bases de la logique des mathématiques, l'électronique et de l'informatique.

Plus spécifiquement, l'algèbre booléenne permet d'utiliser des techniques algébriques pour traiter les expressions à deux valeurs du calcul des propositions.

Aujourd'hui, l'algèbre de Boole trouve de nombreuses applications en informatique et dans la conception des circuits électroniques. Elle fut utilisée la première fois pour les circuits de commutation téléphoniques par Claude Shannon.

5.1 Algèbre de Boole des valeurs de vérité

On appelle B l'ensemble constitué de deux éléments appelés valeurs de vérité $\{VRAI, FAUX\}$. Cet ensemble est aussi noté $B = \{1, 0\}$.

Sur cet ensemble on peut définir deux lois, les lois ET et OU et une transformation appelée complémentaire, inversion ou contraire.

5.2 Algèbre de Boole (structure)

En mathématiques, une **algèbre de Boole**, ou parfois **anneau de Boole**, est une structure algébrique étudiée en particulier en logique mathématique. Une algèbre de Boole peut être définie soit comme une structure ordonnée particulière - c'est un treillis avec plus grand et plus petit élément, dont les opérations de borne inférieure et de borne supérieure, sont chacune distributives par rapport à l'autre, et dont tout élément possède un complément, soit comme un anneau (unitaire) dont tout élément égale son carré.

Pour tout ensemble, l'ensemble de ses parties est une algèbre de Boole, l'ordre associé étant l'inclusion et les lois d'anneau la différence symétrique et l'intersection. Un autre exemple est donné par l'ensemble des formules du calcul propositionnel prises à équivalence (en logique classique) près (sur un nombre de variables de cardinal arbitraire), l'ordre associé est la relation de conséquence logique, les lois d'anneau la disjonction exclusive et la conjonction.

6. La modélisation de préférence - La logique quadrivalente

6.1 Introduction

La modélisation de préférences a été un sujet de base dans beaucoup de domaines théoriques et applications en tant que la théorie économique, la recherche opérationnelle, psychologie etc. L'intérêt principal de cette discipline est de donner une base théorique solide aux modèles des préférences, principalement préférences humaines, exprimées sur un ensemble d'objets (actions, ...).

La modélisation de préférence conventionnelle est basée sur des relations binaires représentant des relations de la sorte " a est préférée à b ", " a est indifférente à b ", etc. Caractérisé par différentes propriétés (réflexivité, asymétrie, transitivité etc.).

Un intérêt particulier a été consacré dans le développement des modèles de préférence qui permettent à une utilisation opérationnelle facile afin d'obtenir une prescription vers une décision possible pour extraire un choix ou une classification finale.

Les problèmes surgissent quand des situations particulières doivent être faites face comme des problèmes de discrimination, incertitude, ambiguïté, conflit et préférences multidimensionnelles.

De telles situations sont très communes quand les utilisations opérationnelles des modèles de préférence sont demandées. Sur cette base, la préférence non-conventionnelle modelant des théories a été développée [44], afin d'améliorer la représentation opérationnelle de la théorie.

L'information contradictoire est une situation courante dans la vie et dans le raisonnement humain de chaque jour. D'ailleurs les humains peuvent normalement agir sous de telles situations contradictoires ou en l'absence d'information.

Sous cette perspective, la logique classique que l'on connaît n'est pas une bonne représentation du raisonnement humain puisque n'importe quelle contradiction (incohérence) permet la déduction de tout et l'absence d'information simplement n'est pas considérée. La logique classique permet de déduire automatiquement tous les théorèmes possibles d'un ensemble donné de propositions. L'introduction de nouvelle information (sous la forme d'une nouvelle proposition) ne changera rien (si la proposition est conformée à l'ensemble déjà donné) ou détruira la conclusion (si elle est contradictoire).

Le problème du raisonnement sous la contradiction a été considéré dans des logiques paraconsistent. Pour les logiciens, la solution naturelle pour résoudre ce problème était d'introduire une nouvelle logique qui utilise un nouveau langage qui capte et distingue les situations de l'information incomplète (incertitude, imprécision, un oubli des données, etc.) et l'information contradictoire (ambiguïté, incohérence, etc.).

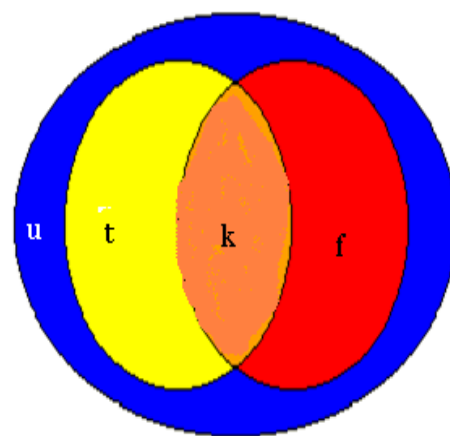
La logique multi-valeur a été définie pour ce genre de problèmes. Dans notre travail on s'intéresse à la logique quadrivalente (la logique de 4 valeurs de vérité).

L'idée principale (voir [7]), présentée par Dubarle (1963) et Belnap (1976 et 1977) était de définir une logique où les valeurs de vérité sont partiellement ordonnées sur un treillis.

6.2 L'idée de Belnap

Ce diagramme de Venn ci-contre peut se lire ainsi :

Le diagramme au complet représente l'ensemble de toutes les assertions possibles, c'est l'ensemble universel ou univers logique $tfku = (t \text{ ou } f \text{ ou } k \text{ ou } u)$
La zone k représente l'ensemble des assertions vraies-et-fausses,
La zone t représente l'ensemble des assertions strictement vraies
La zone f représente l'ensemble des assertions strictement fausses
La zone u représente l'ensemble des assertions ni-vraies-ni-fausses



Les ensembles t , f , k et u sont disjoints (i.e : ils n'ont aucun élément en commun).

On voit que les symboles tu (t ou u), fk (f ou k ou u), $tfku$ (t ou f ou k ou u), etc., représentent divers états d'incertitude.

Il est clair que ce système logique exige, contrairement à la logique binaire usuelle :

1. de rejeter l'exclusion d'un troisième terme afin d'admettre l'ensemble u des assertions ni-vraies-ni-fausses.
2. de rejeter le principe de non-contradiction afin d'admettre l'ensemble k des assertions vraies-et-fausses.

La proposition originale de Belnap [7] est destinée à capturer les situations où l'hésitation en établissant la vérité d'une proposition peut être associée soit à l'ignorance (l'information faible) ou à la contradiction (excès d'information).

Afin de distinguer ces deux types d'incertitude, il a suggéré l'utilisation de quatre valeurs de vérité formant un bitreillis, ces valeurs sont :

t, f, u et k, peuvent être lues en tant que vraie, faux, aucune et toutes les deux, respectivement. L'intuition est que les valeurs de vérité pourraient être partiellement ordonnées sur la base d'une relation de « plus d'information » le treillis correspondant appelé A4 (**treillis d'approximation**), et par une relation de « plus de vérité » le treillis correspondant appelé L4 (**le treillis logique**) ce treillis est constitué à partir des tableaux donnés dans la FIGURE 4.3. Les deux treillis sont montrés dans la FIGURE 4.1.

Sous cette perspective ils ont introduit ensuite le concept d'un « bitreillis » voir FIGURE 4.2 dont l'ensemble $\{t, k, u, f\}$ est ordonné sous les deux ordres partiels d'une manière qui présentent les correspondances fonctionnelles intéressantes qui seront exploitées dans la définition des opérateurs logiques.

L'utilisation de tels treillis a été étudiée dans la recherche d'intelligence artificielle (voir [23] et [24]).

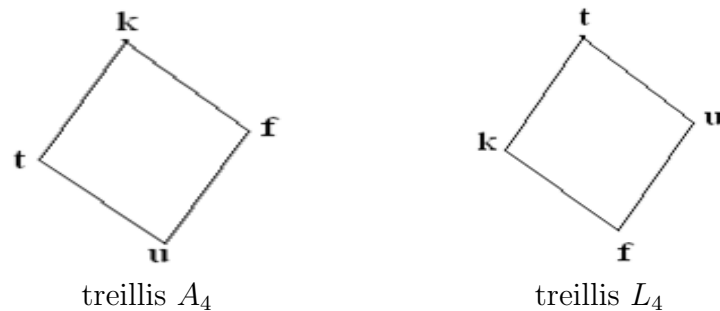


FIGURE 4.1 –

Remarque : $\inf(A4)$ et $\inf(L4)$ sont respectivement u et f, et $\sup(A4)$ et $\sup(L4)$ sont respectivement k et t.

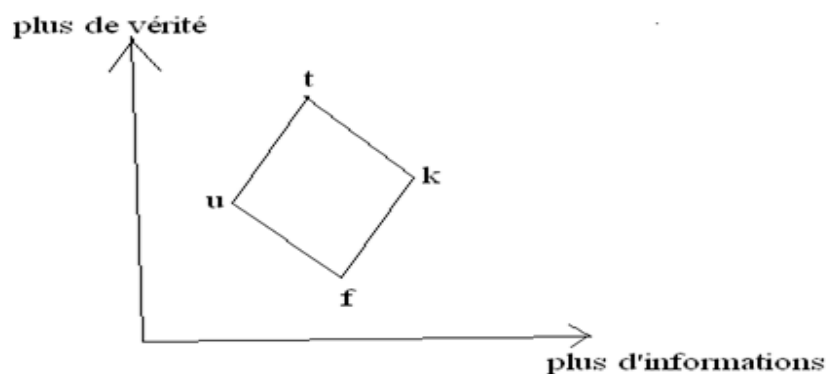


FIGURE 4.2 –

Les liaisons binaires emploient le principe habituel de l'algèbre booléen (conjonction étant $\{\inf\}$ et disjonction étant $\{\sup\}$ sur la bitreillis des valeurs de vérité (voir [23])).

$\wedge$	u	f	t	k
u	u	f	u	f
f	f	f	f	f
t	u	f	t	k
k	f	f	k	k

$\vee$	u	f	t	k
u	u	u	t	t
f	u	f	t	k
t	t	t	t	t
k	t	k	t	k

$\Rightarrow$	u	f	t	k
u	t	k	t	k
f	t	t	t	t
t	u	f	t	k
k	u	u	t	t

Table de vérité de $\wedge$ Table de vérité de $\vee$ Table de vérité de $\Rightarrow$

FIGURE 4.3 –

6.3 La logique DDT (la logique quadrivalente)

Les trois lettres du mot DDT désigne (P. Doherty, D. Driankov, A. Tsoukias).

La logique DDT est une logique quadrivalente du premier ordre (une logique de 4 valeurs de vérité, c'est-à-dire elle accepte, vraie, faux, vraie et faux, ni vraie ni faux), qui est une extension de la logique de Belnap, et utilise une négation faible, elle introduit les concepts de « peut-être » ou « il est possible ».

Dans cette perspective la négation ne coïncide pas avec le complément et les raisons pour les quelles une proposition peut être considérée comme vraie ne sont pas le complémentaire des raisons pour les quelles elle peut être considérée comme fausse. Cette logique peut être considérée comme une logique de l'incertain.

❖ Un ensemble A peut être défini, mais l'appartenance d'un élément a à cet ensemble ne peut pas être certaine soit à cause de l'insuffisance des informations ou bien à cause des informations contradictoires.

Afin de distinguer ces deux sources principales de l'incertitude, la connaissance de l'appartenance de l'élément a à l'ensemble A et non appartenance de a à l'ensemble A sont évalués indépendamment puisque ils ne sont pas nécessairement complémentaires. De ce point de vue, d'une connaissance donnée nous avons deux réalisations possibles, l'une positive pour l'appartenance et l'autre négative pour non-appartenance.

Cependant, toute relation est définie par deux ensembles, son positif et son négative extension dans l'univers de discours. Puisque l'extension négatives ne correspond pas nécessairement aux complémentaires de l'extension positive de la relation nous pouvons y attendre que les deux extensions peuvent chevauchées (due à l'évaluation indépendante), il existe des parts de l'univers du discours qui ne sont pas dans aucune des deux extensions.

Les 4 valeurs de vérité captent ces situations, mais la logique classique est assez pauvre pour les capturer.

➤ Plus formellement, si α est une proposition alors :

- α est vraie (t) : il y a d'évidence soutenant α et il n'y a aucune évidence contre elle ;
- α est fausse (f) : il n'y a aucune évidence soutenant α et il y a d'évidence contre elle ;
- α est inconnue (u) : il n'y a ni d'évidence soutenant α ni contre elle ;
- α est contradictoire (k) : il y a d'évidence soutenant α et contre elle.

Les différences entre, la négation forte ($\neg$), le complément ($\sim$) et la négation faible ($\approx$) sont présentées dans la TABLE 4.1.

α	$\neg\alpha$	$\sim\alpha$	$\approx\alpha$	$\sim\approx\alpha$	$\neg\approx\alpha$	$\neg\sim\approx\alpha$	$\neg\sim\alpha$
t	f	f	k	u	k	u	t
k	k	u	t	f	f	t	u
u	u	k	f	t	t	f	k
f	t	t	u	k	u	k	f

TAB. 4.1 – Tableau de vérité de $\sim$, $\approx$ et $\neg$

Il est facile de vérifier d'après la TABLE 4.1 que :

- $\sim\alpha \equiv \neg\approx\neg\approx\alpha \equiv \approx\neg\approx\neg\alpha$;
- $\neg\neg\alpha \equiv \alpha$;
- $\sim\sim\alpha \equiv \alpha$;
- $\approx\approx\alpha \equiv \alpha$.

où :

- $\sim$ inverse les raisons positives et les raisons négatives,
- $\neg$ permute entre les raisons positives et les raisons négatives,
- $\approx$ inverse les raisons négatives.

6.4 La logique DDT et la modélisation de préférence

Comme déjà mentionné, la logique de DDT a été conçue comme langage à capturer l'hésitation (elle traite l'incertain), quand les rapports de préférence doivent être considérés dans des arrangements de prise de décision (voir [36], [38], [45] et [47]).

L'idée fondamentale est simple. Considérer la relation binaire utilisée dans la modélisation de préférence, $S(x, y)$: « x est au moins aussi bien que y ».

Étant donné un ensemble A (sur quel S s'applique), nous définissons un univers du discours $A \times A$ pour S .

Si nous permettons maintenant aux interprétations de S en $A \times A$ d'être une évaluation quadratique, au lieu de l'évaluation binaire comme dans la modélisation de préférence conventionnelle, nous obtenons un langage plus riche dans la modélisation de préférence où :

- L'hésitation au sujet d'un rapport de préférence peut être explicitement considéré (voir [44]).
- Il est possible de construire des structures de préférence plus riches que la bien connue « P, I, J », tenant compte des relations de préférence explicites au sujet des préférences contradictoires, l'ignorance au sujet de préférence etc. (voir [45]).

Nous donnons maintenant les définitions de quelques opérateurs univalents solides permettant d'obtenir des déclarations non « contradictoire » (seulement vrai (t) ou faux (f)) d'une proposition α .

6.4.1 Définition ([41]). *Soit α une proposition alors :*

$$\begin{aligned} \mathbf{T}\alpha &\equiv \alpha \wedge \sim \neg\alpha & : \alpha \text{ est vrai} \\ \mathbf{K}\alpha &\equiv \alpha \wedge \approx \neg\alpha & : \alpha \text{ est contradictoire} \\ \mathbf{U}\alpha &\equiv \neg \approx \alpha \wedge \neg \approx \neg\alpha & : \alpha \text{ est inconnue} \\ \mathbf{F}\alpha &\equiv \neg\alpha \wedge \sim \alpha & : \alpha \text{ est fausse} \end{aligned}$$

α	$\mathbf{T}\alpha$	$\mathbf{K}\alpha$	$\mathbf{U}\alpha$	$\mathbf{F}\alpha$
t	t	f	f	f
k	f	t	f	f
u	f	f	t	f
f	f	f	f	t

TAB. 4.2 – Table de vérité des 4 opérateurs $\mathbf{T}\alpha$, $\mathbf{K}\alpha$, $\mathbf{U}\alpha$ et $\mathbf{F}\alpha$

6.4.2 Définition ([41]). *Soit α une proposition alors :*

$$\begin{aligned} \Delta\alpha &\equiv \mathbf{T}\alpha \vee \mathbf{K}\alpha & : \text{il y a une présence de vérité en affirmant } \alpha \\ \Delta\neg\alpha &\equiv \mathbf{F}\alpha \vee \mathbf{K}\alpha & : \text{il y a une présence de vérité en affirmant } \neg\alpha \\ \neg\Delta\alpha &\equiv \mathbf{F}\alpha \vee \mathbf{U}\alpha & : \text{pas de présence de vérité en affirmant } \alpha \\ \neg\Delta\neg\alpha &\equiv \mathbf{T}\alpha \vee \mathbf{U}\alpha & : \text{pas de présence de vérité en affirmant } \neg\alpha \end{aligned}$$

α	$\Delta\alpha$	$\Delta\neg\alpha$
t	t	f
k	t	t
u	f	f
f	f	t

TAB. 4.3 – Table de vérité des 2 opérateurs $\Delta\alpha$ et $\Delta\neg\alpha$

⊙ L'idée fondamentale de la modélisation de préférence sous l'hésitation dans la logique DDT est donnée ainsi :

Considérons la relation binaire de surclassement S utilisée dans la modélisation de préférence définie sur A telle que :

$$\mathbf{S}(x, y) : x \text{ est au moins aussi bien que } y.$$

- Plus formellement nous acceptons que, $\mathbf{S}$ et $\neg\mathbf{S}$ ne sont pas complémentaires et ou que l'extension des deux relations peut se chevaucher et aussi elles ne couvrent pas l'ensemble de totalité de situations possibles. Nous pouvons exprimer cette idée en présentant l'expression $\Delta\mathbf{S}(x, y)$ et $\Delta\neg\mathbf{S}(x, y)$ qui sont dites aussi les règles de la décision.

- $\Delta\mathbf{S}(x, y)$; il y a une présence de vérité en affirmant $\mathbf{S}(x, y)$;
- $\Delta\neg\mathbf{S}(x, y)$; il y a une présence de vérité en affirmant $\neg\mathbf{S}(x, y)$;
- $\neg\Delta\mathbf{S}(x, y)$; pas de présence de vérité en affirmant $\mathbf{S}(x, y)$;
- $\neg\Delta\neg\mathbf{S}(x, y)$; pas de présence de vérité en affirmant $\neg\mathbf{S}(x, y)$.

- Les interprétations de S en $A \times A$ sont une évaluation quadratique, donc nous obtenons un langage plus riche dans la modélisation de préférence sous l'hésitation.

- Cependant $\mathbf{TS}(x, y)$, $\mathbf{FS}(x, y)$, $\mathbf{US}(x, y)$ et $\mathbf{KS}(x, y)$, sont définis comme suit :

$\mathbf{TS}(x, y)$: il existe suffisamment des raisons positives d'accepter $S(x, y)$ et il n'existe pas suffisamment des raisons négatives d'accepter $\neg S(x, y)$; $S(x, y)$ est vraie ;

$$\mathbf{TS}(x, y) \equiv \Delta S(x, y) \wedge \neg \Delta \neg S(x, y);$$

$\mathbf{FS}(x, y)$: il n'existe pas suffisamment des raisons positives d'accepter $S(x, y)$ et il existe suffisamment des raisons négatives d'accepter $\neg S(x, y)$; $S(x, y)$ est fausse ;

$$\mathbf{FS}(x, y) \equiv \neg \Delta S(x, y) \wedge \Delta \neg S(x, y);$$

$\mathbf{US}(x, y)$: il n'existe pas suffisamment des raisons positives d'accepter $S(x, y)$ et il n'existe pas suffisamment des raisons négatives d'accepter $\neg S(x, y)$; $S(x, y)$ est inconnue ;

$$\mathbf{US}(x, y) \equiv \neg \Delta S(x, y) \wedge \neg \Delta \neg S(x, y);$$

$\mathbf{KS}(x, y)$: il existe suffisamment des raisons positives d'accepter $S(x, y)$ et il existe suffisamment des raisons négatives d'accepter $\neg S(x, y)$; $S(x, y)$ est contradictoire ;

$$\mathbf{KS}(x, y) \equiv \Delta S(x, y) \wedge \Delta \neg S(x, y).$$

Conclusion : *on conclue que, la modélisation de préférence sous l'hésitation dans la logique DDT est plus efficace pour l'aide à la décision que la modélisation de préférence classique, car le discours ou le dialogue dans cette modélisation sous l'hésitation est plus riche, puisque elle prend en considération toutes les situations possibles, présence et absence des raisons positives et des raisons négatives.*

7. La relation entre les graphes biorientés et la logique quadrivalente (la logique DDT)

Jusqu'aujourd'hui on n'y'avait pas une représentation graphique pour les structures de préférences permises par la logique DDT. Il s'est avéré que les graphes biorientés sont les graphes adéquats pour représenter cette logique. Donc nous avons enrichi et rajouté aux résultats de Tsoukias et Vincke un outil graphique.

7.1 L'outil graphique dans la logique DDT

Dans cette partie, nous donnons tout d'abord une représentation graphique des opérateurs de la logique DDT, ensuite on exploite ce lien afin d'obtenir des résultats pour les deux concepts.

7.1.1 Définition ([14]). Soient $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté et S la relation binaire donnée au paravent, définie sur V . $\forall x, y \in V$ on pose :

$$\Delta S(x, y) = \tau(e, x) = +1 \quad ; \quad \neg \Delta S(x, y) = \tau(e, x) = -1$$

$$\Delta \neg S(x, y) = \tau(e, y) = +1 \quad ; \quad \neg \Delta \neg S(x, y) = \tau(e, y) = -1$$

D'où chacun de ces opérateurs **TS**, **FS**, **KS** et **US** correspond à une arête biorientée, voir FIGURE 4.4, l'orientation des arêtes signifie que la relation $S(x, y)$ est de x à y .



FIGURE 4.4 –

Dorénavant un graphe biorienté muni de la relation S est noté (G_τ, S) , et il est appelé graphe biorienté orienté.

7.1.2 Définition ([14]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté.

❖ La Rotation d'une arête signifie, de permuter les signes de ses deux demi-arêtes.

la rotation de l'arête $x \bullet + \text{---} - \bullet y$ est $x \bullet - \text{---} + \bullet y$

la rotation de l'arête $x \bullet - \text{---} - \bullet y$ est $x \bullet + \text{---} + \bullet y$

la rotation de l'arête $x \bullet + \text{---} + \bullet y$ est $x \bullet - \text{---} - \bullet y$

la rotation de l'arête $x \bullet - \text{---} + \bullet y$ est $x \bullet + \text{---} - \bullet y$

❖ La commutation gauche (resp. commutation droite) d'une arête signifie, de remplacer le signe de sa demi-arête gauche (resp. droite) par son opposée.

la commutation gauche de l'arête $x \bullet - \text{---} + \bullet y$ est $x \bullet + \text{---} + \bullet y$

la commutation gauche de l'arête $x \bullet + \text{---} - \bullet y$ est $x \bullet - \text{---} - \bullet y$

la commutation gauche de l'arête $x \bullet - \text{---} - \bullet y$ est $x \bullet + \text{---} - \bullet y$

la commutation gauche de l'arête $x \bullet + \text{---} + \bullet y$ est $x \bullet - \text{---} + \bullet y$

la commutation droite de l'arête $x \bullet - \text{---} + \bullet y$ est $x \bullet - \text{---} - \bullet y$

la commutation droite de l'arête $x \bullet + \text{---} - \bullet y$ est $x \bullet + \text{---} + \bullet y$

la commutation droite de l'arête $x \bullet - \text{---} - \bullet y$ est $x \bullet - \text{---} + \bullet y$

la commutation droite de l'arête $x \bullet + \text{---} + \bullet y$ est $x \bullet + \text{---} - \bullet y$

7.1.3 Définition ([14]). Soit ϕ un prédicat qui admet une représentation graphique à travers un graphe biorienté. On désigne par :

- $H_d(\phi)$ (resp. $H_g(\phi)$) la commutation droite (resp. gauche) de ϕ .
- $R(\phi)$ est la réorientation de ϕ .
- $Rt(\phi)$ est la rotation de ϕ .

7.1.1 Proposition ([14]). Soient $\phi \in \{\mathbf{T}, \mathbf{F}, \mathbf{K}, \mathbf{U}\}$ et S la relation binaire usuelle, on a :

1. $H_d(\phi(S)) = \phi(\approx S)$
2. $H_g(\phi(S)) = \phi(\sim S)$
3. $R(\phi(S)) = \phi(\sim S)$
4. $Rt(\phi(S)) = \phi(\neg S)$

Preuve : La preuve est obtenue à partir de la Définition 6.4.1, pour une proposition ϕ quelconque, $\mathbf{T} \approx \phi \equiv \mathbf{K}\phi$, $\mathbf{T} \sim \phi \equiv \mathbf{F}\phi$, $\mathbf{K} \sim \phi \equiv \mathbf{U}\phi$, $\mathbf{K} \approx \phi \equiv \mathbf{T}\phi$ et ainsi de suite.

En appliquant la définition de H_d , H_g , R et Rt pour ϕ à partir de la Définition 7.1.3 et aussi de la FIGURE 4.4 nous achevons la preuve. ■

ϕ	$H_d(\phi)$	$H_g(\phi)$	$R(\phi)$	$Rt(\phi)$
$\mathbf{T}_S$	$\mathbf{K}_S$	$\mathbf{U}_S$	$\mathbf{F}_S$	$\mathbf{F}_S$
$\mathbf{F}_S$	$\mathbf{U}_S$	$\mathbf{K}_S$	$\mathbf{T}_S$	$\mathbf{T}_S$
$\mathbf{K}_S$	$\mathbf{T}_S$	$\mathbf{F}_S$	$\mathbf{U}_S$	$\mathbf{K}_S$
$\mathbf{U}_S$	$\mathbf{F}_S$	$\mathbf{T}_S$	$\mathbf{K}_S$	$\mathbf{U}_S$

Remarque : Le tableau donné au dessus est identique à la TABLE 4.1 de vérité de $\neg$, $\sim$ et $\approx$.

Nous désignons par $\oplus$ l'opération de la fermeture transitive dans les graphes biorientés donnée dans le Chapitre 3.

7.1.2 Proposition ([14]). Soit $G_\tau = (V, E)$ un graphe biorienté munit de la relation binaire S et de l'opération de la fermeture transitive $\oplus$. $\forall x, y$ et $z \in V$ on a les fermetures transitives suivantes :

$$\begin{aligned}
\mathbf{T}S(x, y) \oplus \mathbf{T}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{T}S(x, z) \\
\mathbf{T}S(x, y) \oplus \mathbf{K}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{K}S(x, z) \\
\mathbf{F}S(x, y) \oplus \mathbf{F}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{F}S(x, z) \\
\mathbf{F}S(x, y) \oplus \mathbf{U}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{U}S(x, z) \\
\mathbf{U}S(x, y) \oplus \mathbf{T}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{U}S(x, z) \\
\mathbf{U}S(x, y) \oplus \mathbf{K}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{F}S(x, z) \\
\mathbf{K}S(x, y) \oplus \mathbf{F}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{K}S(x, z) \\
\mathbf{K}S(x, y) \oplus \mathbf{U}S(y, z) &\rightarrow \mathbf{T}S(x, z)
\end{aligned}$$

Preuve : D'après la définition de la fermeture transitive des graphes biorientés (donnée dans le Chapitre 3) et la représentation graphique des 4 opérateurs $\{\mathbf{T}S, \mathbf{F}S, \mathbf{K}S, \mathbf{U}S\}$ (voir FIGURE 4.4), la preuve est donnée par les graphes ci-dessous voir FIGURE 4.5. ■

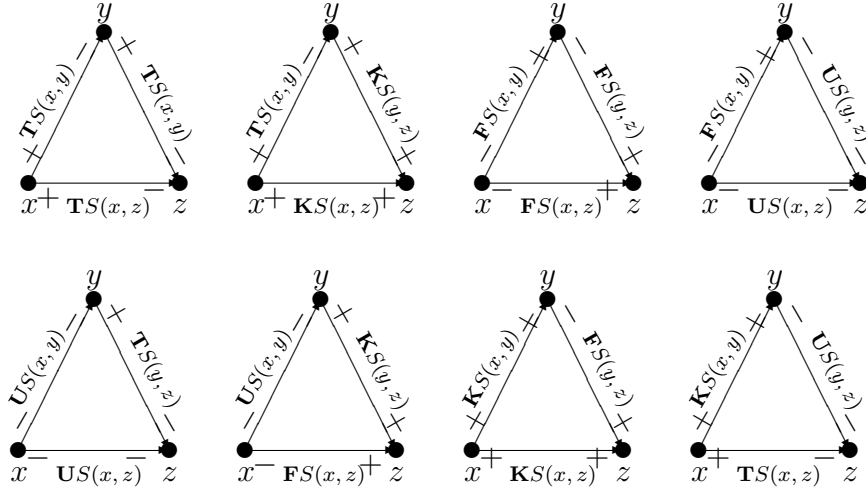


FIGURE 4.5 –

➤ Résumons les résultats de la Proposition 7.1.2 dans le tableau suivant :

$\oplus$	$TS(y, z)$	$FS(y, z)$	$KS(y, z)$	$US(y, z)$
$TS(x, y)$	$TS(x, z)$		$KS(x, z)$	
$FS(x, y)$		$FS(x, z)$		$US(x, z)$
$KS(x, y)$		$KS(x, z)$		$TS(x, z)$
$US(x, y)$	$US(x, z)$		$FS(x, z)$	

7.1.3 Proposition ([14]). *La fermeture transitive des graphes biorientés est associative mais, elle n'est pas symétrique.*

Preuve :

Symétrie : Soient $e_1 = \{x^-, y^-\}$ et $e_2 = \{y^+, z^-\}$ deux arêtes de G_τ . La fermeture transitive du b-chemin $P_{(-,-)}(x, z) : x^- e_1 e_2 z^-$; est l'arête $e_3 = \{x^-, z^-\}$ dans $Ft(G_\tau)$. La fermeture transitive de la séquence $:x^+ e_2 e_1 z^-$ où $e_1 = \{x^+, y^-\}$ et $e_2 = \{y^-, z^-\}$ n'existe pas car, elle n'est pas un b-chemin.

D'où, la fermeture transitive n'est pas commutative.

Associativité : Soient $e_1 = \{x^\alpha, y^\beta\}$, $e_2 = \{y^{-\beta}, z^\gamma\}$ and $e_3 = \{z^{-\gamma}, w^\lambda\}$, trois arêtes de G_τ .

- La fermeture transitive du b-chemin $P_{(\alpha,\beta)}(x, z) : x^\alpha e_1 e_2 z^\gamma$; est l'arête $e_4 = \{x^\alpha, z^\gamma\}$ dans $Ft(G_\tau)$. La fermeture transitive du b-chemin $P_{(\alpha,\lambda)}(x, w) : x^\alpha e_4 e_3 w^\lambda$; est l'arête $e_5 = \{x^\alpha, w^\lambda\}$ dans $Ft(G_\tau)$. La fermeture transitive du b-chemin $P_{(-\beta,\lambda)}(y, w) : y^{-\beta} e_2 e_3 w^\lambda$; est l'arête $e_4 = \{y^{-\beta}, w^\lambda\}$ dans $Ft(G_\tau)$. La fermeture transitive du b-chemin $P_{(\alpha,\lambda)}(x, w) : x^\alpha e_1 e_4 w^\lambda$; est l'arête $e_5 = \{x^\alpha, w^\lambda\}$ dans $Ft(G_\tau)$.
- Il on est de même s'il n'existe un b-chemin entre au moins deux sommets, car dans ce cas la fermeture transitive n'existe pas.

On conclue que la fermeture transitive est associative. ■

7.2 Discussion (L'analyse des résultats précédents)

On a vu dans la Proposition 7.1.3 que la fermeture transitive des graphes biorientés donnée dans la Définition 1.3.2 Chapitre 3 n'est pas symétrique. Cependant, pour la modélisation des préférences nous allons à partir de la Proposition 7.1.2 introduire un nombre des opérations transitives basées sur la logique DDT afin d'obtenir des fermetures transitives symétriques.

À cet effet nous introduisons deux nouvelles fermetures transitives comme suit :

7.2.1 Définition ([14]).

1. $\Delta S(x, y) \wedge \Delta S(y, z) \rightarrow \Delta S(x, z)$ (transitivité des raisons positives : ΔS)
2. $\neg \Delta S(x, y) \wedge \neg \Delta S(y, z) \rightarrow \neg \Delta S(x, z)$ (transitivité négative des raisons positives : $\neg \Delta S$)

Les fermetures transitives ci-dessus représentent comment la transitivité s'applique à la partie positive du raisonnement de la modélisation de préférence.

Substitutions S par $\Delta \neg S$ nous obtenons une fermeture transitive équivalente pour la partie négative du raisonnement de la modélisation de préférence.

3. $\Delta \neg S(x, y) \wedge \Delta \neg S(y, z) \rightarrow \Delta \neg S(x, z)$ (transitivité des raisons négatives : $\Delta \neg S$)
4. $\neg \Delta \neg S(x, y) \wedge \neg \Delta \neg S(y, z) \rightarrow \neg \Delta \neg S(x, z)$ (transitivité négative des raisons négatives : $\neg \Delta \neg S$)

Ces quatre fermetures transitives combinent le même type d'information (présence ou absence des raisons positives ou des raisons négatives).

Dans la suite nous introduisons quatre fermetures transitives, données dans les cas 5, 6, 7 et 8 où nous combinons des raisons positives et négatives dans le but de créer des raisons (positives ou négatives). Les dernières sont symétriques.

5. $\Delta S(x, y) \wedge \neg \Delta \neg S(y, z) \rightarrow \Delta S(x, z)$
 $\neg \Delta \neg S(x, y) \wedge \Delta S(y, z) \rightarrow \Delta S(x, z)$ (créer des raisons positives).
6. $\Delta \neg S(x, y) \wedge \neg \Delta S(y, z) \rightarrow \neg \Delta S(x, z)$
 $\neg \Delta S(x, y) \wedge \Delta \neg S(y, z) \rightarrow \neg \Delta S(x, z)$ (éliminer des raisons positives).
7. $\Delta \neg S(x, y) \wedge \neg \Delta S(y, z) \rightarrow \Delta \neg S(x, z)$
 $\neg \Delta S(x, y) \wedge \Delta \neg S(y, z) \rightarrow \Delta \neg S(x, z)$ (créer des raisons négatives).
8. $\Delta S(x, y) \wedge \neg \Delta \neg S(y, z) \rightarrow \neg \Delta \neg S(x, z)$
 $\neg \Delta \neg S(x, y) \wedge \Delta S(y, z) \rightarrow \neg \Delta \neg S(x, z)$ (éliminer des raisons négatives).

Les huit fermetures transitives sont présentées graphiquement dans la FIGURE 4.6 ci-dessous.

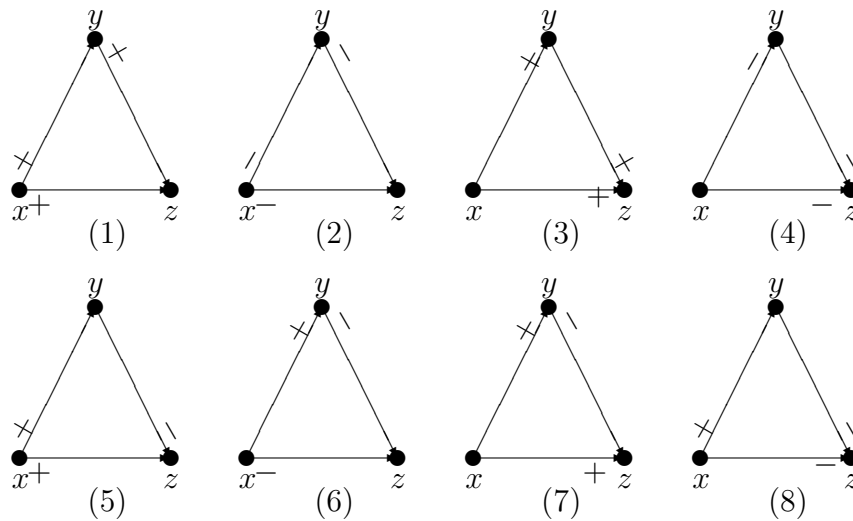


FIGURE 4.6 –

Nous allons voir maintenant ce qui se produit si nous supposons que certains des 8 fermetures transitives ci-dessus se réalisent. Il existe $255 = (2^8 - 1)$ de telles combinaisons (voir [14]). Parmi elles :

Nous présentons dans la TABLE 4.4 le résultat quand chacune des fermetures transitives au-dessus est prise seule.

Nous présentons dans la TABLE 4.5 le résultat quand les quatre fermetures transitives directes et les quatre fermetures transitives indirectes au-dessus sont présent à la fois.

Nous présentons dans la TABLE 4.6 le résultat quand les 8 fermetures transitives au-dessus sont présent à la fois.

La lecture des tableaux : $\alpha S(x, y) \wedge \alpha S(y, z)$ où $\alpha \in \{\mathbf{T}, \mathbf{K}, \mathbf{U}, \mathbf{F}\}$ (les lignes : $S(x, y)$ et les colonnes : $S(y, z)$).

1	TS	FS	KS	US
TS	ΔS	-	ΔS	-
FS	-	-	-	-
KS	ΔS	-	ΔS	-
US	-	-	-	-

2	TS	FS	KS	US
TS	-	-	-	-
FS	-	$\neg \Delta S$	-	$\neg \Delta S$
KS	-	-	-	-
US	-	$\neg \Delta S$	-	$\neg \Delta S$

3	TS	FS	KS	US
TS	-	-	-	-
FS	-	$\Delta \neg S$	$\Delta \neg S$	-
KS	-	$\Delta \neg S$	$\Delta \neg S$	-
US	-	-	-	-

4	TS	FS	KS	US
TS	$\neg \Delta \neg S$	-	-	$\neg \Delta \neg S$
FS	-	-	-	-
KS	-	-	-	-
US	$\neg \Delta \neg S$	-	-	$\neg \Delta \neg S$

5	TS	FS	KS	US
TS	ΔS	-	ΔS	ΔS
FS	-	-	-	-
KS	ΔS	-	-	ΔS
US	ΔS	-	ΔS	-

6	TS	FS	KS	US
TS	-	-	-	-
FS	-	$\neg \Delta S$	$\neg \Delta S$	$\neg \Delta S$
KS	-	$\neg \Delta S$	-	$\neg \Delta S$
US	-	$\neg \Delta S$	$\neg \Delta S$	-

7	TS	FS	KS	US
TS	-	-	-	-
FS	-	$\Delta \neg S$	$\Delta \neg S$	$\Delta \neg S$
KS	-	$\Delta \neg S$	-	$\Delta \neg S$
US	-	$\Delta \neg S$	$\Delta \neg S$	-

8	TS	FS	KS	US
TS	$\neg \Delta \neg S$	-	$\neg \Delta \neg S$	$\neg \Delta \neg S$
FS	-	-	-	-
KS	$\neg \Delta \neg S$	-	-	$\neg \Delta \neg S$
US	$\neg \Delta \neg S$	-	$\neg \Delta \neg S$	-

TAB. 4.4 –

1234	TS	FS	KS	US	5678	TS	FS	KS	US
TS	TS	-	ΔS	$\neg\Delta\neg S$	TS	TS	-	TS	TS
FS	-	FS	$\Delta\neg S$	$\neg\Delta S$	FS	-	FS	FS	FS
KS	ΔS	$\Delta\neg S$	KS	-	KS	TS	FS	-	-
US	$\neg\Delta\neg S$	$\neg\Delta S$	-	US	US	TS	FS	-	-

TAB. 4.5 –

12345678	TS	FS	KS	US
TS	TS	-	TS	TS
FS	-	FS	FS	FS
KS	TS	FS	KS	-
US	TS	FS	-	US

TAB. 4.6 –

Résultats : d'après ces tableaux on a :

1. La transitivité directe de **T**, **F**, **U** et **K** est obtenue à travers les fermetures notées 1, 2, 3 et 4. Les résultats de la diagonale sur la gauche de la TABLE 4.5 sont dits les fermetures transitives directes de **T**, **F**, **U** et **K**.
2. Les fermetures notées 5, 6, 7 et 8 aident seulement à aboutir à des conclusions des combinaisons dans le cas d'hésitations par exemple pour le cas de $\mathbf{TS}(x, y) \wedge \mathbf{KS}(y, z)$. Les fermetures transitives données sur la droite de la TABLE 4.5, sont dits les fermetures transitives indirectes ou d'hésitation de **T**, **F**, **U** et **K**.

8. Fermetures transitives directes et indirectes dans les graphes biorientés orientés

8.1 Fermetures transtives dans les graphes biorientés (G_τ, S)

Nous présentons dans cette partie de nouvelles fermetures transitives dans les graphes biorientés, on considérons le graphe biorientés, orienté (G_τ, S) dont l'existence d'un b-chemin n'est pas nécessaire, où $G_\tau = (V, E)$ et S la relation binaire définie au paravent.

D'après les nouvelles fermetures transitives directes et indirectes obtenues pour la logique DDT de **T**, **F**, **U** et **K**, nous avons obtenu de nouvelles fermetures transitives pour les graphes (G_τ, S) .

Des fermetures directes basées sur les fermetures notées (1) – (4) et des fermetures indirectes (hésitations) basées sur les fermetures notées (5) – (8).

Ces deux types de fermetures transitives des graphes biorientés n'exigent pas l'existence ou non d'un b-chemin.

8.1.1 Proposition ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté positif (i.e : $\forall e \in E : \overline{W}(e) = 0$). La fermeture transitive de (G_τ, S) , est le graphe noté $((Ft(G_\tau), S) = (V, Ft(E)))$ tel que $e = \{x^\alpha, y^\beta\} \in Ft(E)$ s'il existe un b-chemin $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ dans (G_τ, S) .

Preuve : Les arêtes de $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ sont de type **T** ou de **F**, et d'après les fermetures transitives directes de **F** et **T** données dans les TABLES 4.5 et 4.6, on a : $\mathbf{T} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{T}$ et $\mathbf{F} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$, d'où le résultat. ■

8.1.1 Corollaire ([14]). (G_τ, S) est un graphe partiel de $(Ft(G_\tau), S)$.

Preuve : La preuve est déduite à partir de la Proposition 8.1.1. ■

8.1.2 Corollaire ([14]). $(Ft(G_\tau), S)$ est un graphe positif (i.e : $\forall e \in Ft(E) : \overline{W}(e) = 0$).

Preuve : La fermeture transitive de $P_{(\alpha, \beta)}(x, y)$ est l'arête $e = \{x^\alpha, y^\beta\}$ dont elle est de type **T** ou de type **F**, et elles sont des arêtes positives ($\overline{W}(\mathbf{F}) = \overline{W}(\mathbf{T}) = 0$). ■

8.1.2 Proposition ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté négatif (i.e : $\forall e \in E : \overline{W}(e) = -2$). La fermeture transitive de (G_τ, S) , est le graphe noté $((Ft(G_\tau), S) = (V, Ft(E)))$ tel que $e = \{x^-, y^-\} \in Ft(E)$ s'il existe une séquence $Q(x^-, y^-) : x^-e_1x_1e_2x_2 \dots x_k e_k y^-$ dans (G_τ, S) .

Preuve : D'après la fermeture transitive directe de **U** donnée dans les TABLES 4.5 et 4.6 on a : $\mathbf{U} \wedge \mathbf{U} = \mathbf{U}$, d'où le résultat. ■

8.1.3 Corollaire ([14]). (G_τ, S) est un graphe partiel de $(Ft(G_\tau), S)$.

Preuve : La preuve est déduite à partir de la Proposition 8.1.2. ■

8.1.4 Corollaire ([14]). $(Ft(G_\tau), S)$ est un graphe négatif tel que $\forall e \in Ft(E) : \overline{W}(e) = -2$.

Preuve : La fermeture transitive de $Q(x^-, y^-)$ est l'arête $e = \{x^-, y^-\}$ dont elle est de type **U**, et **U** est une arête négative avec $\overline{W}(\mathbf{U}) = -2$. ■

8.1.3 Proposition ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté négatif (i.e : $\forall e \in E : \overline{W}(e) = +2$). La fermeture transitive de (G_τ, S) , est le graphe noté $((Ft(G_\tau), S) = (V, Ft(E)))$ tel que $e = \{x^+, y^+\} \in Ft(E)$ s'il existe une séquence $Q(x^+, y^+) : x^+e_1x_1e_2x_2 \dots x_k e_k y^+$ dans (G_τ, S) .

Preuve : D'après la fermeture transitive directe de **K** donnée dans les Tables 4.5 et 4.6 on a : $\mathbf{K} \wedge \mathbf{K} = \mathbf{K}$, d'où le résultat. ■

8.1.5 Corollaire ([14]). (G_τ, S) est un graphe partiel de $(Ft(G_\tau), S)$.

Preuve : La preuve est déduite à partir de la Proposition 8.1.3. ■

8.1.6 Corollaire ([14]). $(Ft(G_\tau), S)$ est un graphe négatif tel que $\forall e \in Ft(E) : \overline{W}(e) = +2$.

Preuve : La fermeture transitive de $Q(x^+, y^+)$ est l'arête $e = \{x^+, y^+\}$ dont elle est de type **K**, et **K** est une arête négative avec $\overline{W}(\mathbf{K}) = +2$. ■

8.1.4 Proposition ([14]). *Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté. La fermeture transitive de (G_τ, S) , est le graphe noté $((\text{Ft}(G_\tau), S) = (V, \text{Ft}(E)))$ tel que $e = \{x^+, y^-\} \in \text{Ft}(E)$ s'il existe une séquence $Q(x^\alpha, y^\beta) : x^\alpha e_1 x_1 e_2 x_2 \dots x_k e_k y^\beta$ dans (G_τ, S) n'est pas nécessairement un b-chemin, et elle admet seulement des arêtes de type **T** et **U** ou bien seulement des arêtes de type **K** et **T**.*

Preuve : D'après les fermetures transitives indirectes de **T**, **U** et **K** données dans les TABLES 4.5 et 4.6 on a : $\mathbf{K} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{T} \wedge \mathbf{T} = \mathbf{T}$, d'où le résultat. ■

8.1.7 Corollaire ([14]). (G_τ, S) est un graphe partiel de $(\text{Ft}(G_\tau), S)$.

Preuve : La preuve est déduite à partir de la Proposition 8.1.4. ■

8.1.5 Proposition ([14]). *Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté. La fermeture transitive de (G_τ, S) , est le graphe noté $((\text{Ft}(G_\tau), S) = (V, \text{Ft}(E)))$ tel que $e = \{x^-, y^+\} \in \text{Ft}(E)$ s'il existe une séquence $Q(x^\alpha, y^\beta) : x^\alpha e_1 x_1 e_2 x_2 \dots x_k e_k y^\beta$ dans (G_τ, S) n'est pas nécessairement un b-chemin, et elle admet seulement des arêtes de type **F** et **U** ou bien seulement des arêtes de type **K** et **F**.*

Preuve : D'après les fermetures transitives indirectes de **F**, **U** et **K** données dans les TABLES 4.5 et 4.6 on a : $\mathbf{K} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{U} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F} \wedge \mathbf{F} = \mathbf{F}$, d'où le résultat. ■

8.1.8 Corollaire ([14]). (G_τ, S) est un graphe partiel de $(\text{Ft}(G_\tau), S)$.

Preuve : La preuve est déduite à partir de la Propositions 8.1.5. ■

Remarques :

- La fermeture transitive directe donnée dans la Proposition 8.1.1 est identique à la définition de la fermeture transitive des graphes biorientés donnée dans la Définition 1.3.2 Chapitre 3.
- La fermeture transitive donnée dans la Proposition 8.1.1 exige l'existence d'un b-chemin, et elle est dite fermeture transitive positive directe, car elle est déduite des fermetures transitives directes [(1), (4)] et [(2), (3)] données dans la Définition 7.2.1
- Les fermetures transitives données dans les Propositions 8.1.2 et 8.1.3 n'exigent pas l'existence d'un b-chemin, et elles sont dites fermetures transitives négatives directes, car elles sont déduites des fermetures transitives directes [(1), (3)] et [(2), (4)] données dans la Définition 7.2.1.
- Les fermetures transitives données dans les Propositions 8.1.4 et 8.1.5 n'exigent pas l'existence ou non d'un b-chemin et elles sont dites, fermetures transitives des hésitation ou indirectes, car elles sont déduites des fermetures transitives indirecte (5) - (8) données dans la Définition 7.2.1.

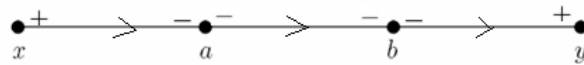
8.2 Cheminement dans les graphes biorientés orientés (G_τ, S)

➤ Ces nouvelles fermetures transitives de (G_τ, S) explicitées au-dessus, nous ont permis de définir une nouvelle notion de cheminement dans les graphes biorientés orientés (G_τ, S) :

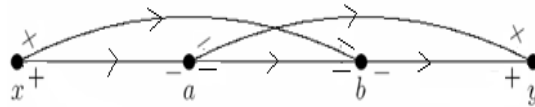
8.2.1 Définition ([14]). Soient (G_τ, S) un graphe biorienté orienté et x_i un sommet de V . on définit un t -chemin de G_τ , toute séquence d'arêtes de E qui n'admet pas deux arêtes positives (resp. négatives) opposées consécutives $e_i = \{x_{i-1}, x_i\}$ et $e_{i+1} = \{x_i, x_{i+1}\}$.

8.2.1 Proposition ([14]). La fermeture transitive d'un t -chemin dans (G_τ, S) ne donne pas toujours un t -chemin.

Preuve : Il suffit de considérer la séquence d'arêtes suivante :



La séquence $xaby$ est un t -chemin, mais la fermeture transitive de la séquence xab ou bien de la séquence aby aura comme conséquence une séquence xy qui n'est pas un t -chemin, de même pour la séquence xay , n'est pas un t -chemin. La fermeture transitive de ces deux dernières séquences n'existe pas. ■



8.2.2 Définition ([14]). Un t_s -chemin fort, est un t -chemin qui est un t -chemin sous une fermeture transitive adéquate.

8.2.1 Théorème ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté positif. Tout t -chemin est un t_s -chemin.

Preuve : Dans un graphe positif tout t -chemin est un b -chemin, pour la suite de la preuve il suffit d'utiliser les Définitions 8.2.1 et 8.2.2 et la Propositions 8.1.1. ■

8.2.2 Théorème ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté négatif. Tout t -chemin est un t_s -chemin.

Preuve : Il suffit d'utiliser les Définitions 8.2.1 et 8.2.2 et les Propositions 8.1.2 et 8.1.3. ■

8.2.3 Théorème ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté. Tout t -chemin sans arêtes de type **T** est un t_s -chemin.

Preuve : Il suffit d'utiliser les Définitions 8.2.1 et 8.2.2 et la Proposition 8.1.5. ■

8.2.4 Théorème ([14]). Soit (G_τ, S) un graphe biorienté orienté. Tout t -chemin sans arêtes de type **F** est un t_s -chemin.

Preuve : Il suffit d'utiliser les Définitions 8.2.1 et 8.2.2 et la Proposition 8.1.4. ■

CONCLUSION

CONCLUSION

Les travaux sur les graphes biorientés et signés sont peu. Dans notre présent travail, nous avons essayé d'enrichir ces deux classes de graphes, en donnant une caractérisation du cheminement pour les deux classes de graphes, dont on a introduit des nouveaux concepts tels que, graphe signé S -complet, graphe biorienté b -complet, la S -connexité, b -connexité, etc.

On a aussi montré que les définitions de la fermeture transitive et la réduction transitives classiques sont des cas particuliers de celles données pour les graphes biorientés.

Nous avons offert à la logique DDT un outil graphique qui permet de représenter graphiquement ses structures de préférences pour l'aide à la décision.

La fermeture transitive des graphes biorientés nous a conduite à déterminer des fermetures transitives pour cette logique. À son rôle cette dernière a permis à travers ses fermetures transitives de déterminer des fermetures transitives commutatives ainsi une nouvelle notion de cheminement pour les graphes biorientés orientés.

Perspectives :

- Caractériser les graphes signés S -complet.
- Caractériser les graphes signés positivement connexes et les graphes signés négativement connexes.
- Exploiter les résultats (les transitivités) des opérateurs **T**, **F**, **U** et **K** pour les 10 relations de préférences ($p, q, i, r, h, k \dots$) proposées par A. Tsoukias et Ph. Vincke.
- Caractériser la structure de préférence PQI à l'aide des fermetures transitives de **T**, **F**, **U** et **K**.

BIBLIOGRAPHIE

BIBLIOGRAPHIE

- [1] M. Ahmane, *Sur la caractérisation des matroïdes graphiques par mineurs exclus*, Thèse de magister, Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger, 1985.
- [2] Aho, M. R. Garey and J. D. Ullman, *The transitive reduction of directed graph*, SIAM journal of computing, vol.1,no.2(june 1972) 131-137.
- [3] M. Aigner, *Combinatorial Theory*, Springer, Verlag, Berlin Heildberg, New york.
- [4] Gautam Appa and Balazs Kotnyek, *A bidirected generalization of network matrices*, Networks 47 (2006) 185-198.
- [5] M.A. Babenko, A.V. Karzanov, *Free multiflows in bidirected and skew-symmetric graphs*, Discrete Applied Mathematics 155(2007) 1715-1730.
- [6] N.D. Belnap, *How a new computer should think*, Proceeding of the Oxford International Symposium on Contemporary Aspects of Philosophy, Oxford, England, (1976) 30-56.
- [7] N.D. Belnap, *A useful four-valued logic*, in G. Epstein, J.Dumm, (eds), Modern uses of multiple valued logics, D. Reidel, Dordrecht, (1977) 8-37.
- [8] C. Berge, *Graphes et Hypergraphes*, Dunod, Paris, 1970.
- [9] C. Berge, *Théorie des Graphes et ses Applications*.
- [10] O. Bessouf, *Théorème de Menger dans les graphes biorientés*, Thèse de magister, Faculté de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger, Mars 1999.
- [11] O. Bessouf, Thomas Zaslavsky and A. Khelladi, *New concept of connection in signed graphs*, en révision , Ars Combinatoria.
- [12] O. Bessouf and A. Khelladi, *New concept of connection in bidirected graphs*, Journal RAIRO-Operations Research, volume 52, number 2 (2018) 351-357.
- [13] O. Bessouf, A. Khelladi and Thomas Zaslavsky, *Transitive closure and transitive reduction in bidirected graphs*, en révision ,czechoslovak Mathematical Journal.
- [14] O. Bessouf, A. Khelladi, M. Öztürk and Alexis Tsoukiàs, *Bi-oriented Graphs and Four Valued Logics*, soumis.
- [15] Ethan D. Bolker and Thomas Zaslavsky, *A simple algorithm that proves half integrality of bidirected network programming*, Networks 48 (2006) 36-38.
- [16] J.A. Bondy and U.S.R. Murty, *Graph Theory with Applications*, Mac. Milan, N.Y, 1976.
- [17] B. Bollobas, *Extremal Graph Theory*, Academic press, London, New york, San francisco, 1978.
- [18] A.Bouchet, *Nowhere-zero integer flows on a bidirected graph*, J. combin. Theory ser. B 34 (1983) 279-292.
- [19] P. Doherty, D. Driankov and A. Tsoukias, *Partial logics and partial preferences*, Proceedings of the CEMIT 92 International Conference, Tokyo, (1992) 525-528.
- [20] P. Doherty, D. Driankov and A. Tsoukias, *Partiality, Para-consistency and Preference Modelling*, IDA research report Lith-IDA-R-92-18, Linköping University, 1992.
- [21] D. Dubarle, *Essai sur la généralisation naturelle de la logique usuelle*, manuscript published posthumously in Mathématique, Information, Sciences Humaines, N°107 (1989) 17-73.

- [22] P.C. Fitting, *Bilattice in logic programming*, in G. Epstein (ed.), the Twentieth International Symposium on Multiple -Valued Logic, IEEE (1990) 238-246.
- [23] M.C. Ginsberg, *Multivalued logic : A uniform approach to reasoning in artificial intelligence*, Computational Intelligence, vol. 4 (1988) 265-316.
- [24] Curtis Green and Thomas Zaslavsky, *on the interpretation of whitney numbers through arrangements of hyperplanes, zonotopes, non radon partitions, and orientations of graphs*, Trans. Amer. Math. Soc. 280 (1983) 97-126.
- [25] F. Harary, *On the concept of balances in Signed Graphs*, Michigan Math J.3 (1955-1956) 143-146.
- [26] F. Harary, *On local balance and N-balance in signed graphs*, Miching Math. J.3 (1955-1956) 37-41.
- [27] F. Harary, *Structural duality*, Behavioral Sci. 2 (1957) 255-265.
- [28] F. Harary, *Graph Theory*, California, 1972.
- [29] J. Kacprzyk and M. Roubens, *Non Conventional Preference Relations in Decision Making*, Springer Verlag, LNMES n. 301, Berlin, 1988.
- [30] A. Khelladi, *Propriétés algébriques de structures combinatoires*, Thèse de doctorat d'état Institut de mathématiques, U.S.T.H.B. Alger, 1985.
- [31] A. Khelladi, *Nowhere-zero integral chains and flows in bidirected graphs*, J. Combin. Theory Ser. B 43 (1987) 95-115.
- [32] A. Khelladi, *Bidirected graphs Flow and classification*, Prépublication de l'Institut de Mathématiques, U.S.T.H.B. Alger.
- [33] A. Mehoulas, *Algorithme de flots dans les graphes biorientés*, Thèse de Magister, Institut de mathématiques, U.S.T.H.B. Alger, 1991.
- [34] James G. Oxley, *On a matroid generalization of graph connectivity*, Math. proc. camb. phil. soc. 90 (1981) 207-214.
- [35] G. Oxley, *Matroid Theory*, Oxford Univ.Press, Oxford, 1992, second ed. 2011.
- [36] M. Ozturk and A.Tsoukias, *Bipolar preference modelling and aggregation in decision support*, International Journal of Intelligent Systems, 23 (2008) 970-984.
- [37] M. Ozturk, A. Tsoukias and Ph. Vincke, *Preference modelling*, In M. Ehrgott, S. Greco, and J. Figueira, editors, State of the Art in Multiple Criteria Decision Analysis, Springer Verlag, Berlin (2005) 27-72.
- [38] M. Ozturk and A. Tsoukias, *modeling uncertain positive and negative reason in decision aiding*, Decision Support Systems, (to appear).
- [39] P. Perny and A. Tsoukias, *On the continuous extension of a four valued logic for preference modelling*, in Proceeding of the IPMU conference (1998) 302-309.
- [40] B. Roy, *Modern Algebra and Graph Theory*, Springer-Verlag, Berlin, 1978.
- [41] A. Tsoukias, *A first-order, four valued, weakly paraconsistent logic*, Cahier du LAMSADE N°139, 1996.
- [42] A. Tsoukias and Ph. Vincke, *A survey on non conventional preference modeling*, Ricerca Operativa, n. 61 5-49.
- [43] A. Tsoukias and Ph. Vincke(1995), *A new axiomatic foundation of partial comparability*, Theory and decision, vol. 39 (1992) 79-114.
- [44] A. Tsoukias, *A qualitative approach to face uncertainty in decision models*, Decision Support Systems 12 (1994) 287-296.

- [45] A. Tsoukias, *Sur la généralisation des concept de concordance et discordance en aide multicritère à la décision*, Mémoire présenté pour l'obtention de l'habilitation à diriger des recherches, Université Paris dauphine, appeared also as Document du LAMSADE N°117, 1997.
- [46] A. Tsoukias and Ph. Vincke, *Extended preference structure in MCDA*, in J Climaco(ed). Multi-criteria Analysis, Springer Verlag, Berlin, Springer Verlag, Berlin (1997) 35-50.
- [47] A. Tsoukias, P. Perny and Ph. Vincke Ph, *From concordance/discordance to the modelling of positive and negative reasons in decision aiding*, In D. Bouyssou, E. Jacquet-Lagrèze, P. Perny, R. Slowinski, D. Vanderpooten, and Ph. Vincke, editors, Aiding Decisions with Multiple Criteria : Essays in Honour of Bernard Roy, Kluwer Academic, Dordrecht (2002) 147-174.
- [48] W.T. Tutte, *The factorization of linear graphs*, J.London Math Ploughshare 22 (1947) 107-111.
- [49] W.T. Tutte, *Lecture on Matroids*, J of Research of the Nat. Bur. Of Standards B 69 (1965) 1-47.
- [50] W.T. Tutte, *Connectivity in Matroids*, Canad. J. of Math. 18 (1966) 1301-1324.
- [51] W.T. Tutte, *On chain groups and the factors of graphs*, Colloq. Math Societas János Bolyai 25. (Algebraic Methods in Graph Theory). Szeged Hungary, 1978.
- [52] D.J.A. Welsh, *Matroid Theory*, Academic press London, 1976.
- [53] H. Whitney, *Congruent graphs and the connectivity of graphs*, Am. J. Math, 54 (1932) 150-168.
- [54] H. Whitney, *The abstract properties of linear dependence*, Amer. J of math 57 (1935) 507-533.
- [55] Thomas Zaslavsky, *Orientation of signed graphs*, European J. Comb. 12 (1991) 361-375. MR 93a :05065. Zbl.
- [56] T. Zaslavsky, *Signed graphs*, Disc. Appl. Math 4 (1982) 47-74.
- [57] T. Zaslavsky, *Erratum*, Disc. Appl. Math 5 (1982) 248.
- [58] T. Zaslavsky, *Characterization of signed graphs*, J. graph theory 5 (1981), 401-406. Disc. Appl. Math 5 (1982) 248.
- [59] Thomas Zaslavsky, *Signed graph coloring*, Discrete Math. 39 (1982) 215-228. MR 84h :05050 a. Zbl. 487. 05027.
- [60] T. Zaslavsky, *Biased graphs. I. Bias, balance, and gains*, J. Combinatorial Theory Ser. B 47 (1989), 32-52.
- [61] T. Zaslavsky, *Biased graphs. II. The three matroids*, J. Combinatorial Theory Ser. B 51 (1991), 46-72.
- [62] O. Zyka, *Nowhere-zero 30-flow on bidirected graphs*, Thesis, charles university, Praha, 1987, KAM-DIMATIA series 87-26.