

REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE

MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

UNIVERSITE DES SCIENCES ET LA TECHNOLOGIE HOUARI  
BOUMEDIENE

FACULTE DE GENIE CIVIL

Laboratoire du Bâti dans l'Environnement

THESE PRESENTEE PAR :

**DJOUDER SALIMA**

INGENIEUR D'ETAT

POUR L'OBTENTION DU GRADE DE MAGISTER ( 2002 )

**INTERACTION FISSURE MICRO-FISSURE**  
**PAR UNE**  
**APPROCHE SEMI-EMPIRIQUE**

Mr LARADI. N – MAITRE DE CONFERENCE (USTHB) Président

Mr CHABAAT. M – MAITRE DE CONFERENCE (USTHB) Directeur de thèse

Mr BALI. A – PROFESSEUR (ENP) Examineur

Mr ABADLIA. M. T– PROFESSEUR (UB.INMC) Examineur

Mr AOUDJANE. K- CHARGE DE COURS (USTHB) Examineur

Mr OUDJIT. M. N - CHARGE DE COURS (USTHB) Examineur

## DEDICACES

Je dédie ce modeste travail :

- A mon très cher et bien aimé père, que j'aime beaucoup, qui m'a toujours encouragé dans mes études . Il m'a appris la persévérance , le courage , et d'aller toujours de l'avant .
- A ma très chère mère, que j'adore beaucoup, elle m'a toujours encouragé à poursuivre mes études .
- A mon cher mari qui n'a jamais cessé de m'encourager à poursuivre mes études , et il a beaucoup contribué à la réalisation de cette thèse , et m'a toujours soutenu dans les moments les plus difficiles .
- A mes deux rayons du soleil , et ma raison de vivre qui sont mes deux adorables enfant : la princesse **MANEL** et le chevalier **AREZKI** .
- A mon frère DJOUDER Toufik qui m'a été d'un grand secours dans la réalisation de ce travail .
- A toute la famille DJOUDER en particulier Smail , Brahim , Farida , Mourad.
- A la mémoire de mon défunt beau père **AREZKI** .
- A ma belle mère , qui m'a aidé à élever mes deux anges .

## REMERCIEMENTS

Je tiens à exprimer ici mes remerciements les plus chaleureux et les plus sincères à Monsieur CHABAAT Mohamed Maître de Conférence à la Faculté de Génie Civil, pour son assistance, et pour m'avoir guidé et soutenu. Sa grande disponibilité, son aide, et ses conseils sont pour beaucoup dans l'aboutissement de ma thèse .

A monsieur LARADI Nadir Maître de Conférence à la Faculté de Génie de Civil qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury . Qu'il trouve ici tout ma gratitude .

A monsieur BALI A. Professeur à l'Ecole Nationale Polytechnique pour avoir bien voulu évaluer mon travail et participer au jury. Que je remercie profondément.

A monsieur ABADLIA Mohamed Tahar Professeur à l'Université de Boumerdès pour sa participation au jury en tant qu'examineur et que je remercie infiniment.

A monsieur OUDJIT Mohamed chargé de cours à l'U.S.T.H.B. qui n'a pas hésité a être examinateur. Qu'il soit remercié vivement.

A monsieur AOUDJANE Kheiredine chargé de cours à l'U.S.T.H.B. , qui a bien voulu être membre du jury . Qu'il trouve ici mes sincères remerciements.

## SOMMAIRE

### INTRODUCTION

### CHAPITRE I : BIBLIOGRAPHIE ET ANALYSE EXPERIMENTALE

I-1) Bibliographie	
I-1-1) Historique.....	3
I-1-2) Aspect pratique des ruptures.....	10
I-1-3) Modes de rupture.....	12
I-1-4) Analyse Energétique.....	14
I-2) Analyse expérimentale	
I-2-1) Introduction.....	18
I-2-2) Différentes méthodes utilisées.....	18
I-2-3) Différents procédés de la Photoélasticimétrie.....	20
I-2-4) Les instruments.....	21
I-2-5) Mise en œuvre.....	23
I-2-6) Procédure expérimentale.....	29
I-2-7) Conclusion.....	34

### CHAPITRE II : ANALYSE DES CHAMPS DE CONTRAINTES

II-1) Introduction.....	36
II-2) Formulation du problème.....	38
II-3) Discussions.....	51

### **CHAPITRE III : FACTEUR D'INTENSITE DE CONTRAINTE**

III-1) Introduction.....	59
III-2) Détermination du facteur d'intensité de contrainte.....	60
III-3) Résultats et discussions.....	64
III-4) Conclusion.....	70

### **CHAPITRE IV : EVALUATION DES TAUX D'ENERGIE DES RESTITUTION**

IV-1) Introduction.....	73
IV-2) Détermination des taux d'énergie de restitution.....	74
IV-3) Résultats et discussions.....	81
IV-4) Conclusion.....	92

### **CHAPITRE V : CONCLUSION GENERALE ET RECOMMANDATIONS**

V-1) Conclusion générale.....	95
V-2) Recommandations.....	100

### **ANNEXES :**

ANNEXE A : Fonctions des champs de contraintes...	104
ANNEXE B : Calcul des facteurs d'intensité de contraintes.....	112
ANNEXE C : Taux d'énergie de restitution.....	128

### **REFERENCES**

**CHAPITRE I**  
**BIBLIOGRAPHIE**  
**ET**  
**ANALYSE EXPERIMENTALE**

## TABLEAU DES FIGURES, PHOTOS ET TABLEAUX

### Chapitre I :

Photo 1.1 : Rupture fragile d'un tube de synthèse.

Photo 1.2 : Rupture ductile par surpression.

Photo 1.3 : Cisaillement des perrons.

Photo 1.4 : Rupture d'une construction.

Photo 1.5 : Instrument de base.

Photo 1.6 : Photoélasticimétrie avec éclairage en lumière diffusée.

Photo 1.7 : Incidence oblique.

Photo 1.8 : Photoélasticimétrie équipée pour l'incidence oblique.

Photo 1.9 : Compensateur.

Photo 1.10 : Photoélasticimétrie équipée de tous les instruments.

Photo 1.11 : Modèle chargé.

Fig.1.1 : Courbe charge - allongement.

Fig.1.2 : Représentation des différents modes d'ouverture.

Fig.1.3 : Eprouvette d'essai.

Fig.1.4 : Evolution de la contrainte.

### Chapitre II :

Fig.2.1 : Géométries du spécimen.

Fig.2.2 : Représentation de la zone d'endommagement.

Fig.2.3 : Schématisation de la zone fissurée.

Fig.2.4 : Schématisation de la force dipôle.

Fig.2.5 : Positionnement d'une microfissure.

Fig.2.6 : Courbes des champs de contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  pour  $\beta=0$ .

Fig.2.7 : Courbes des champs de contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  pour  $\beta=45^\circ$ .

Fig.2.8 : Courbes des champs de contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  pour  $\beta=60^\circ$ .

Fig.2.9 : Courbes des champs de contraintes  $\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{12}$  pour  $\beta=90^\circ$ .

Tableau 1 : Fonctions des champs de contraintes.

Tableau 2 : Fonction  $F_{ij}(\alpha)=0$  pour différents  $\beta$ .

Tableau 3 : Tableau récapitulatif (zone d'amplification et zone de réduction).

### Chapitre III :

Fig.3.1 : Schéma représentant les bornes limites des intégrales.

Fig.3.2 : Variation des facteurs d'intensité de contraintes  $\Delta K_{ij}/K_0$  en fonction de  $\beta$ .

Fig.3.3 : Variation  $\Delta K_{22}/K_0$  pour (la) et (w) variables.

Fig.3.4 : Variation du facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K_{22}/K_0$  pour (la) variable et (w) fixe.

Fig.3.5 : Variation du facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K_{22}/K_0$  pour (w) variable et (la) fixe.

### Chapitre IV :

Fig.4.1 : Schématisation du contour de l'intégrale de RICE.

Fig.4.2 : Schéma représentant les bornes des intégrales.

Fig.4.3 : Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la fissure L pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.4 : Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la Largeur de la zone microfissurée (w) avec (la) fixe pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.5 : Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la zone microfissurée ( $la$ ) avec ( $w$ ) fixe pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.6 : Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur ( $la$ ) et la largeur ( $w$ ) de la zone microfissurée pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.7 : Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la fissure  $L$  pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.8 : Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la largeur de la zone microfissurée ( $w$ ) avec ( $la$ ) fixe pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.9 : variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la zone microfissurée ( $la$ ) avec ( $w$ ) fixe pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

Fig.4.10: Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la largeur ( $w$ ) et la longueur ( $la$ ) de la zone microfissurée pour  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ .

## **Chapitre V :**

Tableau 4 : Résultats des différents chercheurs.

Fig.5.1 : Spécimen chargé.

Photo 5.1 : Champ de contrainte au voisinage de l'entaille.

Fig.5.2 : Coalescence des pores sous traction pure.

## **Annexes :**

Fig.A.1 : Schéma représentant les axes.

Fig.A.2 : Schéma représentant l'angle  $\beta$ .

Fig.B.1 : Schéma représentant force dipôle.

Fig.B.2 : schéma représentant la contrainte que soumet la fissure.

Fig.C.1 : Contour de Griffith.

## NOMENCLATURE

- $A_1, A_2, A_3$  : Constantes pour le calcul des facteurs d'intensité de contraintes.
- $E$  : Module de young.
- $F$  : Densité d'énergie de déformation.
- $F_{ij}(\alpha)$  : Equations du 4<sup>ième</sup> degré en fonction de la valeur finie  $\alpha = \text{tg}\zeta_2/\zeta_1$ .
- $H, B, t$  : Dimensions du spécimen ( hauteur, largeur, épaisseur, respectivement ).
- $I$  : Tenseur unité du second ordre.
- $J$  : Intégrale  $J$  de RICE dû à la microfissure principale.
- $J_F, J^{MF}, J_F^{MF}$  : Taux d'énergie de restitution due à la fissure principale, à la microfissure et à l'interaction entre les deux, respectivement.
- $K_0$  : Facteur d'intensité de contrainte dû à la fissure principale en l'absence de microfissures.
- $K_I, K_{II}, K_{III}$  : Facteurs d'intensité de contraintes pour le mode I, II, III, respectivement.
- $K_{I\text{eff}}$  : Facteur d'intensité de contrainte effective en mode I.
- $L$  : Longueur de la fissure principale.
- $P_0$  : Charge normal appliquée à l'infini.
- $R$  : Position du vecteur de déplacement.
- $T_x$  : Opérateur de contrainte par rapport à la position de la fissure initiale.
- $U(x)$  : Vecteur déplacement de la fissure principale.
- $X_1, X_2$  : Coordonnées de la fissure principale.
- $a, b, c, e, f$  : Constantes des fonctions d'influences dépendant de  $\beta$ .
- $b(\zeta)$  : Vecteur de l'ouverture de la fissure principale.
- $b_0$  : L'ouverture d'une fissure (COD), ( c'est une donnée expérimentale qui est égale à  $1 \mu\text{m}$  ).

$n_1$  : Normale extérieure au contour  $\Gamma$ .  
 $n(\zeta)$  : Vecteur unitaire dans la direction de la force dipôle en un point  $\zeta$ .  
 $r, \theta$  : Coordonnées polaires.  
 $u_{i,j}$  : Tenseur de déformations.  
 $\beta$  : Angle d'orientation que fait la microfissure par rapport à la fissure principale.  
 $\delta_{ij}$  : Kronecker delta.  
 $\phi(\zeta, x, n(\zeta))$  : Tenseur de Green du second ordre.  
 $\phi_{yy}(\zeta)$  : Densité des microfissures suivant la direction  $y$ .  
 $\phi(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta))$  : Numérateur des fonctions  $\psi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2))$ .  
 $\lambda, \mu$  : constantes de Lamé.  
 $\nu$  : Coefficient de poisson = 0.3.  
 $\theta$  : Angle séparant l'effet de réduction de l'effet d'amplification.  
 $\sigma_0$  : Contrainte initiale.  
 $\sigma$  : Champs de contraintes dû aux charges appliquées.  
 $\sigma(x)$  : Champ de contrainte généré par la fissure principale.  
 $\sigma_i(x)$  : Champ de contrainte généré par la  $i^{\text{ième}}$  microfissure.  
 $\sigma_{ij}^F, \sigma_{ij}^{MF}$  : Champs de contraintes générés par la fissure en l'absence et en présence des microfissures, respectivement.  
 $\sigma_{ij}$  : Tenseur de contraintes.  
 $\zeta_1, \zeta_2$  : Coordonnées de la microfissure.  
 $\psi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2))$  : Fonctions d'influence des champs de contraintes suivant les directions  $XX, YY, XY$  pour les différentes orientations des microfissures.  
 $\Gamma$  : Contour qui limite la zone microfissurée.  
 $\Delta K(+), \Delta K(-)$  : Fonction d'interaction due à la présence des microfissures (amplifications et réduction).

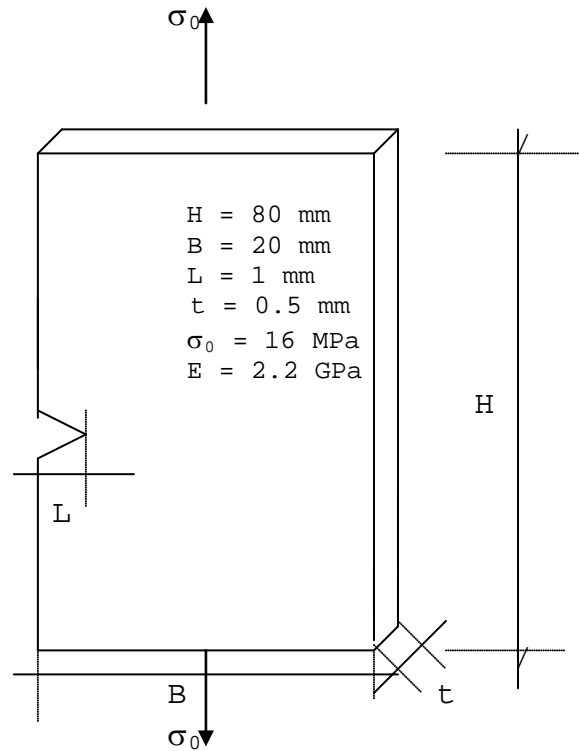
## INTRODUCTION

La rupture fragile est influencée dans la majorité des cas par la composition micro structurale du matériau. En général, les matériaux sont considérés hétérogènes. Leur comportement est soit ductile ou fragile. La présence de particules (inclusion, fissure, défaut, vide...) dans ces matériaux influence grandement la propagation des fissures déjà existantes. Pour cela, l'objectif principal de cette étude est d'évaluer d'une façon quantitative l'interaction d'une microfissure orientée arbitrairement aux alentours de la fissure principale .

L'objectif principal de ce travail est donc d'étudier l'influence des microfissures sur la fissure principale et de permettre ainsi de mieux évaluer la résistance à la rupture du matériau.

Le modèle proposé tout au long de ce travail, tient compte du feedback de cette zone de micro fissures. Ceci a permis d'élucider le phénomène d'amplification et de réduction des champs de contraintes proches de la fissure principale, générés essentiellement par les différentes orientations des microfissures.

Dans ce cas, la fissure principale est représentée comme une fissure semi-infinie soumise à un champ de contraintes sous le premier mode de rupture Fig.1.5 . Donc, l'interaction de la fissure avec les microfissures est évaluée en termes de facteurs d'intensité de contraintes amplifié ( ou réduit ) agissant au bout de la fissure. Le phénomène d'interaction est alors élucider par l'utilisation des fonctions dites d'influence reposant sur certaines données expérimentales propres aux microfissures d'où l'appellation « d'Approche Semi-Empirique ( A.S.E ) ».



**Fig.1.1 Géométrie du spécimen**

Ce travail est composé de cinq parties :

La première partie consiste à faire une recherche bibliographique ainsi qu'à l'utilisation d'un procédé expérimental tel la photoélasticimétrie dans le but de visualiser d'une façon globale les isocontraintes sur le modèle choisi.

La deuxième partie consiste à l'évaluation des champs de contraintes en présence de microfissures. Ces champs ont permis d'élucider le phénomène d'amplification et de réduction pouvant se produire lors de l'interaction tout en tenant compte de l'orientation arbitraire ainsi que de la position des microfissures par rapport à la fissure principale.

La troisième partie est consacrée à l'étude des facteurs d'intensité de contraintes lors de l'interaction entre une fissure et des microfissures avoisinantes. Les phénomènes d'amplification et de réduction durant les différentes phases d'interaction ont été élucidés.

La quatrième partie est l'étude de l'évaluation du taux d'énergie de restitution dû à l'interaction entre la fissure et les microfissures avoisinantes.

La cinquième partie consiste en une conclusion générale et des recommandations nécessaires dans le but d'une utilisation ultérieure de la méthode de calcul.

## I-1) Bibliographie :

### I-1-1) Historique :

Depuis presque trois décennies, la mécanique de la rupture ne fait que progresser d'une façon remarquable du fait de l'apparition d'un très grand nombre de fissures, que ça soit dans le domaine de la construction que celui de l'industrie. En général, les méthodes d'approche utilisées jusqu' à nos jours avaient pour base d'étude "la théorie de l'élasticité" et la méthode classique de "la résistance des matériaux".

Parmi un grand nombre de principes utilisés dans ces théories, on retiendra celui de l'équilibre des forces connu sous le nom du "Principe de Saint Venant", qui admet que pour une distance proche des zones d'application des efforts; les champs de contraintes et de déplacements ne dépendent qu'assez peu des conditions d'application. Donc, le remplacement des efforts appliqués par d'autres qui lui sont statiquement équivalents tout en ignorant les singularités et les fortes concentrations se produisant dans les régions d'application des efforts réels, est un des principes de base pour l'approche de problèmes présentant des singularités. Ces zones de concentration de contraintes sont les initiatives de fissures, qui elles-mêmes peuvent engendrer des ruptures soudaines, ou brutales se terminant pour la plupart des cas par la ruine.

L'exemple type [1] étant celui de l'explosion d'une chaudière vers les années 1948 du service des mines, due essentiellement à une rupture très ancienne (photo 1.1 et 1.2). On a aussi observé des ruptures dues principalement à la fatigue de certains matériaux composant certaines structures telles les ponts, les ouvrages d'habitation, les châteaux d'eaux, etc... (photo 1.3 et 1.4 a,b).

Les plus récentes découvertes de ce phénomène ont été observées même dans le domaine de l'aviation. Les divers changements de température dans le cas des réservoirs peuvent aussi faire apparaître des fissures provoquant ainsi une faible résistance. Donc, autant d'exemples réels sont cités à travers le temps prouvant que dans la majorité des cas la présence de fissures ou l'apparition d'un nombre assez élevé de ces derniers menant à la rupture est la cause majeure d'accidents.



**Photo.1.1 : Rupture fragile d'un tube de synthèse [1]**

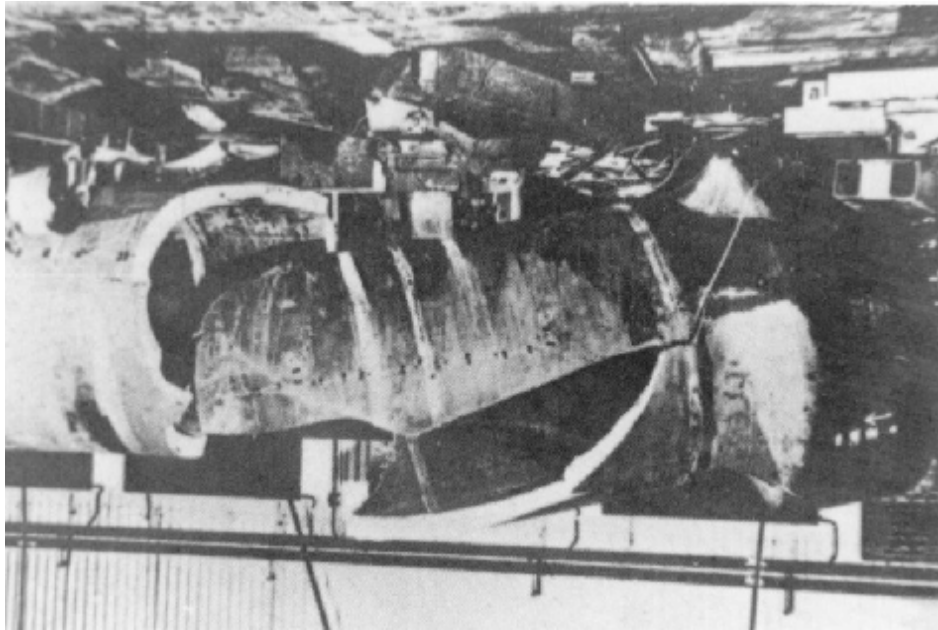


Photo.1.2 :Rupture ductile par surpression [1]



Photo.1.3 : Cisaillement des perrons



a) Apparition des fissures sur les murs



b) Chute d'une partie de la paroi

Photo.1.4 :Rupture d'une construction

On citera aussi [2], un pétrolier en construction soudé, le Schenectady qui se brisa complètement en deux parties. Durant les dix années qui suivirent cette catastrophe, plus de deux cents navires construits pour les besoins de la guerre furent plus ou moins sévèrement endommagés par ce phénomène de rupture.

L'un des exemples les plus typiques [2] est, dans le domaine aérospatial celui de la rupture d'un réservoir de 6.6 m de diamètre en maraging ( $\sigma_E = 170 \text{ hb}$ ) au cours de son timbrage ; survenu le 11 avril 1965, aux Etats-Unis. Ce réservoir appartenait à un programme de faisabilité de propulseurs à poudre de grand diamètre, financé par la NASA. La pression limite de fonctionnement du propulseur étant d'environ 60 bars, l'essai de timbrage devait être conduit jusqu'à 66.3 bars ; or l'éclatement se produisit sous 37.4 bars, c'est-à-dire 62% seulement de la pression pour lequel le réservoir était dimensionné. L'expertise montra que cet éclatement prématuré était dû à la présence de deux fissures situées dans des reprises de soudures. Ces fissures dont la profondeur était inférieure au cinquième de l'épaisseur de la tôle, n'avaient pas été détectées par les moyens de contrôle non destructif. Ce réservoir avait succombé au phénomène de la fracture.

Tous ces problèmes ont amené les constructeurs à se poser la même question: Comment peut-on expliquer ce phénomène d'apparition de fissures ? Et qu'elle est la solution adéquate à trouver pour mettre fin à ces catastrophes ?

L'instabilité est considérée comme étape cruciale dans l'étude de résistance des constructions (bois, métaux, bétons), ce qui a amené plusieurs chercheurs à se pencher d'avantage sur le domaine pas très exploité tels les problèmes présentant certaines singularités. Depuis longtemps, on savait que dans certaines conditions les solides supportaient l'existence de fissures, et que la rupture brutale résultait de l'instabilité soudaine de celles-ci. Donc, la théorie de la mécanique de la rupture s'est avérée indispensable pour éclairer et même trouver une meilleure compréhension des problèmes et accidents cités précédemment.

L'étude de problèmes de rupture revient généralement à la détermination des champs de contraintes et de déplacements autour de la fissure tout en tenant compte des conditions aux limites. En général, il est difficile de déterminer ces champs en raison de la présence de la singularité au devant de la fissure.

A ce jour, les solutions proposées [1] à [6] sont basées sur des hypothèses fictives. Puisque la distribution des contraintes n'est pas uniforme, alors la présence de discontinuités de géométrie variable perturbe le réseau et engendre des concentrations de contraintes assez importantes. Donc, toutes les solutions asymptotiques déterminées à partir des champs de contraintes et déformations élastiques ne sont pas fiables vis à vis de la réalité pratique.

Pour cela, on citera les travaux très laborieux effectués par certains chercheurs tels; INGLIS [7] qui étudia les champs de contraintes pour un trou elliptique dans une plaque élastique chargée uniformément. Selon ce chercheur, une fissure peut être représentée comme une ellipse étroite infinitésimale.

GRIFFITH [8] en se basant sur la théorie de l'élasticité, avait formulé un critère énergétique, et a pu ainsi résoudre certains problèmes simples. En utilisant le principe général de la physique, qui admet que tout système évolue pour rendre son énergie potentielle totale minimale, Griffith a pu démontrer que l'instabilité se produisait lorsque l'énergie potentielle mécanique libérée par l'extension d'une fissure dépassait l'énergie absorbée par cette extension. IRWIN [9], par contre, avait donné la forme du premier terme singulier du développement limité des contraintes au voisinage du front de la fissure.

Actuellement, les industriels orientent la mécanique de la rupture dans les deux directions suivantes:

- Développement de méthodes d'évaluation quantitative, destinées à dimensionner les structures .
- Développement de méthodes d'essais (avec élaboration de normes), et ce pour la sélection des matériaux.

Plus récemment [10] et [11], ont cherché à caractériser la résistance des matériaux à la propagation des fissures. La mécanique élastique linéaire de la rupture permet dans certaines conditions d'associer à une géométrie d'éprouvette de la fissure et pour un mode de sollicitation donné, un facteur d'intensité de contrainte critique  $K_{1c}$ , qui représente la résistance intrinsèque de l'échantillon à la propagation d'une rupture brutale.

Ils ont pu ainsi calculer le seuil de chargement critique que doit supporter une structure comportant des défauts de taille connue ou inversement déterminer une dimension critique de défaut pour une sollicitation de nature et d'intensité connues. Ces notions sont évidemment d'une très grande utilité dans le calcul de la résistance des éléments composant les structures.

### I-1-2) Aspects pratiques des ruptures:

La mécanique de la rupture considère le matériau comme continu au sens macroscopique du terme mais admet l'existence de fissures initiales, provoquant des surfaces de discontinuités. Dans l'hypothèse la plus simple, elle admet que toute l'énergie libérée par l'extension d'une fissure est absorbée par la création de nouvelles surfaces.

Dans la pratique courante, la rupture d'un échantillon est définie comme le phénomène qui conduit à la séparation de cet échantillon en deux ou plusieurs morceaux . Cette séparation peut survenir dans des circonstances très diverses (essai mécanique, mise en forme et de service) et pour des sollicitations de différentes natures (état et niveau de contraintes, température, vitesse, environnement...).

La rupture est, d'autre part, indissociable de la déformation qui la précède. Du point de vue pratique, il est indispensable de connaître les caractéristiques de déformation des matériaux. Un critère d'appréciation fréquent de la ductibilité est l'aspect des cassures . On en distingue deux types : - Cassures fibreuses ou à nerfs.

- Cassures à grains.

Quelque soit le mode de rupture, il y a aussi, deux aspects à considérer : - Amorçage.

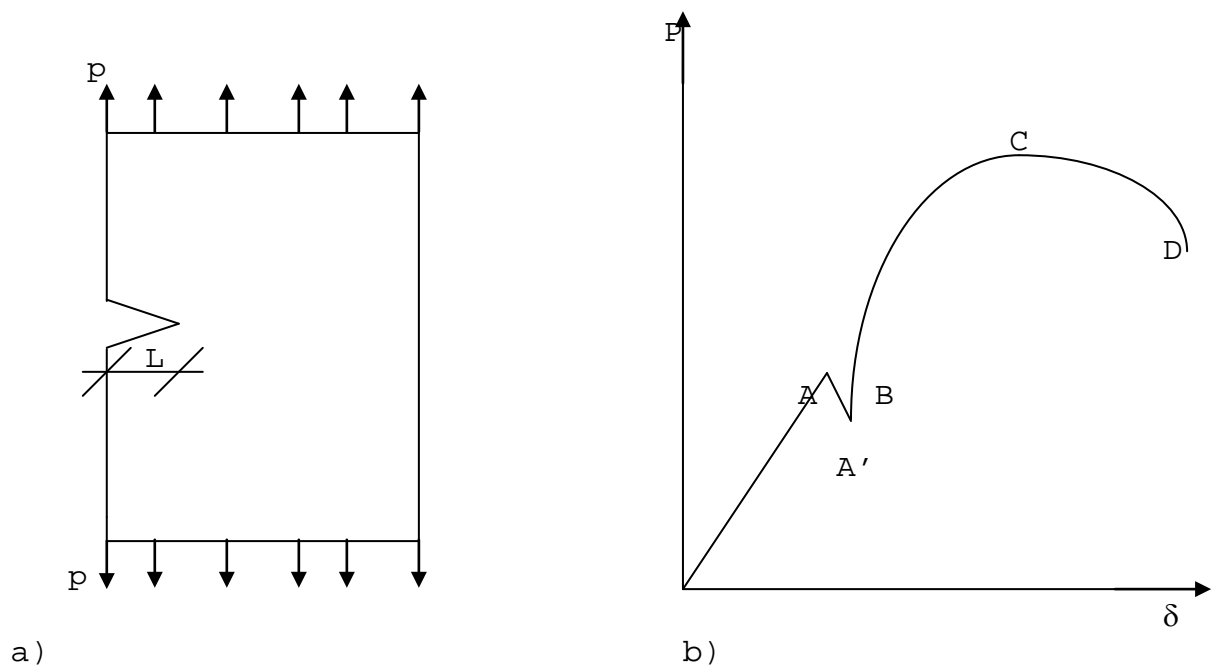
- Propagation.

L'importance relative de ces deux stades peut varier dans de larges proportions, selon le mode de sollicitations considérées.

Normalement, la rupture se produit lorsque la sollicitation appliquée au matériau dépasse sa résistance ou sa capacité de déformation, telle qu'on peut les apprécier d'après les essais mécaniques effectués sur le matériau (effet de surcharge). La rupture peut cependant intervenir pour des niveaux de sollicitations plus faibles et avoir un caractère brutal (rupture prématurée due à une fragilisation du métal ou aux conditions d'essais : présence d'inclusions, durcissement, basse température, entailles ou fissures préexistantes, environnement,...) ou un caractère progressif (fluage, fatigue, corrosion sous tension,...).

La Fig.1.1.a montre un spécimen de dimensions finies possédant une fissure, de longueur  $L$ , et est soumis à un chargement "P". Théoriquement, sous cet effet, la fissure subit un déplacement " $\delta$ ", et ainsi la fissure commence soudainement à se propager jusqu'au point A (Fig.1.1.b). L'augmentation de la longueur de la fissure cause la chute soudaine de la charge de A à A'. Comme la charge augmente, le front de la fissure se propage, et la fissure continue de grandir d'une manière stable à une charge maximale C. D est considéré comme étant le point de séparation finale.

La mécanique de la rupture étudie l'initiation de la rupture de A et l'accroissement de la fissure stable de A' à B. Souvent le point de l'initiation de la rupture n'est pas défini clairement, dans ce cas on introduit un degré arbitraire pour pouvoir définir cette initiation.



**Fig.1.1 Courbe charge - allongement [5]**

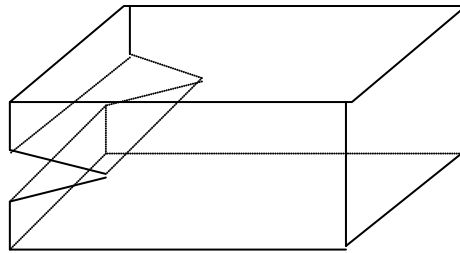
**I-1-3) Modes de rupture:**

Le développement des fissures peut s'effectuer sous divers types de chargement. IRWIN (1957) a mis en évidence trois modes cinématiquement indépendants de propagation des fissures comme décrits par la Fig.1.2. (a,b,et c).

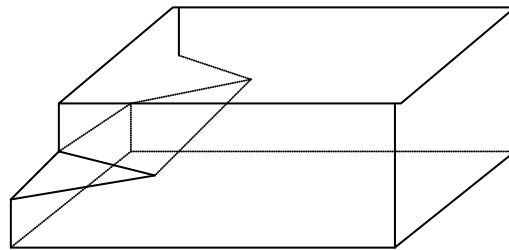
Pour le mode I, la contrainte agit perpendiculairement au plan de la fissure, alors que dans les modes II et III la contrainte agit dans le plan de la fissure. Mais pour chaque cas, le bord de la fissure se propage dans le plan moyen de celle-ci.

L'expérience a toujours montré que le mode I est le mode le plus étudié en comparaison des deux autres modes II et III. Les trois modes sont néanmoins nécessaires et suffisants pour décrire, toutes les possibilités de propagation d'une fissure.

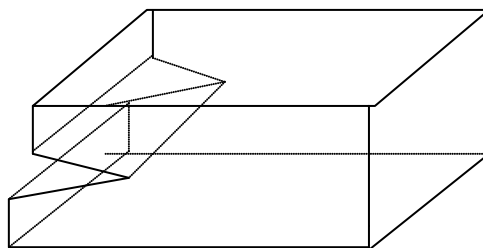
Le mode le plus général de propagation est donc la superposition de ces trois modes simples. Une superposition des modes II et III donne une surface de rupture inclinée, alors que le mode I seul correspond à une surface de rupture plate.



a-Mode I  
Ouverture



b-Mode II  
Glissement droit



c-Mode III  
Glissement perpendiculaire au plan

**Fig.1.2 Représentation des différents modes d'ouverture**

#### I-1-4) Analyse Energétique :

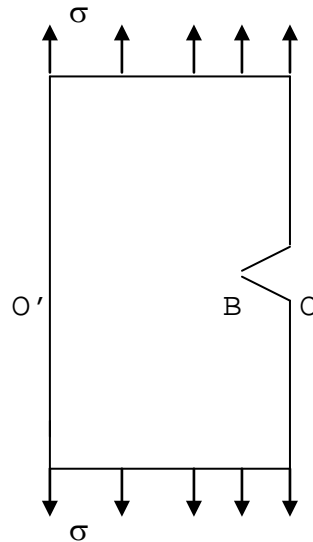
Depuis les travaux de GRIFFITH dans les années 1920, l'analyse du phénomène de rupture a fait de nombreux progrès. Du point de vue mécanique macroscopique, le problème fondamental est le suivant: dans un corps soumis à un trajet de charge donné, il s'agit de déterminer l'évolution d'une fissure préexistante qui peut correspondre par exemple à un défaut afin de prévoir la sécurité vis-à-vis de la rupture.

La rupture est un phénomène consommateur d'énergie. Cette énergie selon GRIFFITH est le taux d'énergie élastique  $U_e$  libérée par l'accroissement de l'aire  $S$  de la fissure  $G = \partial U_e / \partial S$ . GRIFFITH a admis pour que l'équilibre soit stable, il faut que ce taux soit inférieur ou égal au taux d'énergie que peut absorber le matériau autrement que par des cohésions. Donc, si  $G < 2 \gamma$  alors la fissure ne se propage pas ( $\gamma$  est une constante intrinsèque). Il faut noter que tout ce qui a été établi par GRIFFITH est l'origine physique de l'énergie de rupture.

Considérons une éprouvette comme montrée par la Fig.1.3 soumise à une charge de traction. Cette éprouvette possède une entaille en  $V$  prolongée (fissure  $OB$ ) créée par exemple par fatigue du spécimen.

Cette fissure est supposée être:

- traversante.
- petite par rapport aux dimensions de l'éprouvette ( en particulier  $OB \ll O'B$  ).
- située dans un plan perpendiculaire à la direction de la contrainte de traction  $\sigma$ .

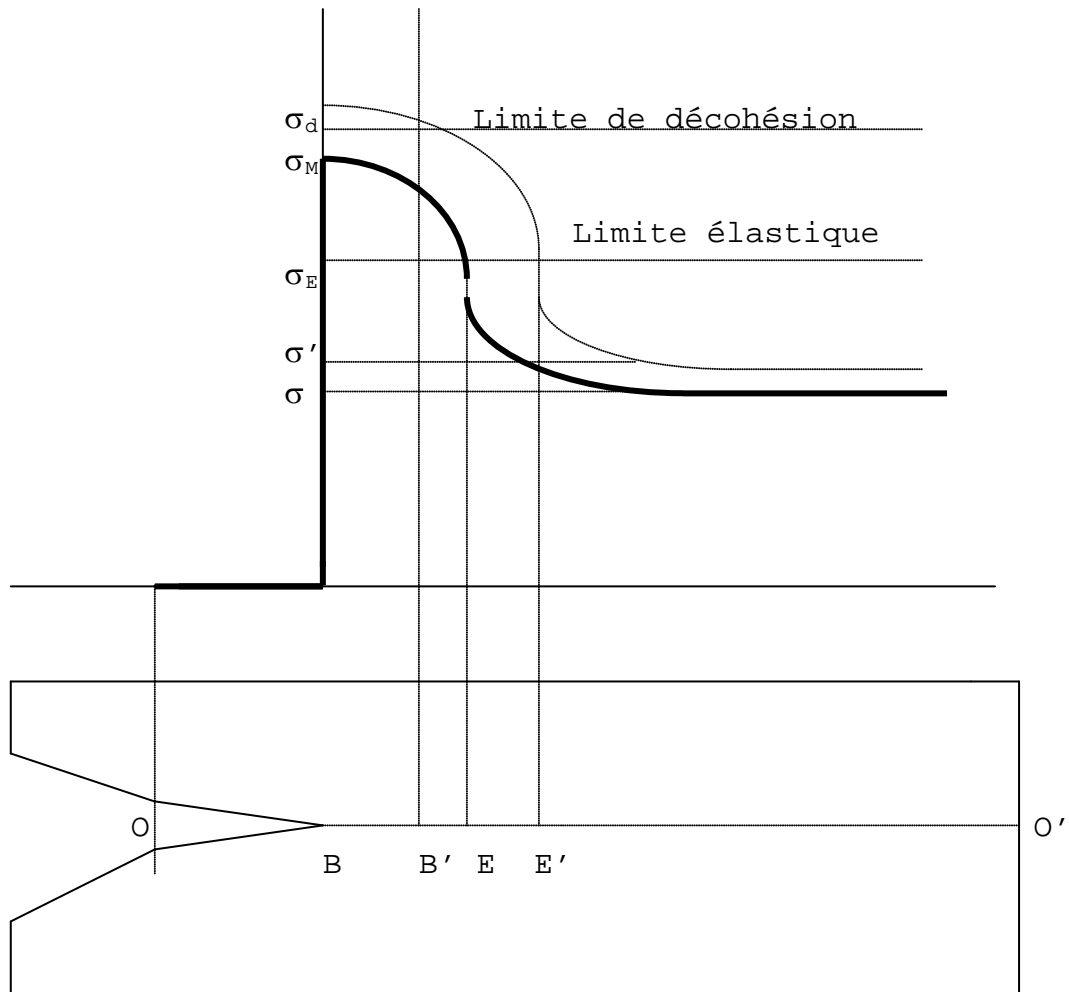


**Fig.1.3 Epreuve d'essai**

Loin de cette fissure, le champ de contrainte est supposé uniforme. Par contre, il est connu que :

- Au voisinage du fond de la fissure (point B) la contrainte est très supérieure à  $\sigma$  à cause de la singularité.
- Dans les régions bordant les deux faces (OB) de la fissure, la contrainte est supposée être nulle.

Le diagramme suivant (Fig.1.4) représente l'évolution de la contrainte le long du segment OO'.



**Fig.1.4 Evolution de la contrainte [5]**

Au voisinage du fond B de la fissure, la contrainte est donc maximale (de valeur  $\sigma_M$ ). Si l'effort appliqué est important, la limite élastique du matériau peut donc être localement dépassée (de B en E). Pour cela, l'existence d'une zone de déformation plastique autour du fond de la fissure est apparente.

L'équilibre peut être traduit, grâce au théorème de l'énergie potentielle, par l'équation ;

$$\delta U = \delta A$$

où A est le travail de la force extérieure de traction, et U l'énergie de déformation.

Lorsque la traction augmente, alors le travail  $A$  augmente proportionnellement et par conséquent  $U$  aussi jusqu'à ce que l'équilibre soit atteint. Or, l'énergie de déformation  $U$  est la somme d'une énergie de déformation élastique  $U_e$ , libérable si la charge est supprimée, et d'une énergie de déformation non libérable  $U_d$ , c'est-à-dire dissipée traduisant ainsi les phénomènes irréversibles tels que la déformation plastique ou la décohésion des grains. Ce qui se traduit par la relation suivante :

$$U = U_e + U_d$$

Nous admettons qu'il existe une valeur  $\sigma_d$  de la contrainte au-dessus de laquelle apparaît une décohésion des grains. Si la contrainte moyenne de traction approche la valeur  $\sigma'$  (voir Fig.1.4), de B en B' alors la contrainte de décohésion est atteinte. Donc, la fissure s'ouvre jusqu'en B', et la zone plastique s'étend jusqu'en E'. Mais cette ouverture de la fissure provoque une libération d'énergie de déformation élastique  $\Delta U_e$  importante d'où une plus grande déformation élastique.

Ainsi, l'apport de travail  $\Delta A$  produit par l'augmentation de contrainte  $\Delta\sigma = \sigma' - \sigma$ , est absorbée partiellement par un accroissement de la déformation plastique et partiellement par la décohesion. Cette dernière produit une libération d'énergie ( sans augmentation du travail ) doit être absorbée à son tour en déformation plastique. On constate alors qu'un processus instable est engagé, dans la mesure où la déformation plastique ne peut absorber la totalité de cette libération d'énergie.

## I-2) Analyse expérimentale :

### I-2-1) Introduction :

L'étude théorique du comportement des structures sous l'action des forces appliquées est souvent fastidieuse voir même impossible dès que les formes géométriques des corps étudiés sont complexes. Face à ces difficultés, différentes sciences et techniques se sont développées.

Elles constituent "l'analyse expérimentale des contraintes". Les mesures obtenues sont de plus en plus précises. Elles permettent de réfuter de nombreuses études théoriques aux hypothèses contestables. La théorie permet de limiter le nombre des expériences, cependant que la mesure sert à confirmer ou infirmer les hypothèses des calculs. Ceci requiert de connaître les techniques expérimentales [11], au moins dans leurs grandes lignes, ainsi que leurs limitations.

### I-2-2) différentes méthodes utilisées:

**1- Méthodes optiques:** La méthode optique consiste tout simplement à suivre l'évolution de la fissure. L'apport d'un microscope mobile et d'un éclairage astucieux permettent d'améliorer la précision des mesures. La longueur de la fissure se fait soit en utilisant une réticule monté dans le microscope, soit en utilisant des repères solidaires de l'éprouvette.

**2- Méthode des filaments brisés:** Des filaments sont tendus sur la face de l'éprouvette, en travers du chemin supposé de la fissure et perpendiculaire à celui-ci. Les fils se brisent les uns après les autres au fur et à mesure que les lèvres de la fissure s'écartent, c'est-à-dire au fur et à mesure que la fissure se propage.

Ces filaments peuvent être traversés par un courant électrique, ce qui rend la fissure facilement repérable.

**3- Méthode par ultra-sons:** Un traducteur mobile, guidé par des glissières, est placé sur la face supérieure de l'éprouvette et est relié à un réflectoscope. Un montage déclenche le mouvement du traducteur lorsque l'écho de fissure atteint un niveau donné. Le mouvement du traducteur est alors égal à l'avancement du front de la fissure. Cette méthode est difficile à mettre en oeuvre avec des éprouvettes minces.

**4- Méthode du potentiel:** Cette méthode consiste à mesurer les variations de la résistance électrique de l'éprouvette au fur et à mesure que la fissure avance. Pour cela, un courant (en général continu) est envoyé dans l'éprouvette par l'intermédiaire de deux fils soudés. On mesure la différence de potentiel entre deux points situés de part et d'autre de l'entaille. Quand la fissure grandit la différence de potentiel augmente régulièrement. Cette méthode est relativement facile à mettre en oeuvre et nécessite un équipement assez simple. Cependant, ce procédé est très sensible à tous les courants parasites, en particulier ceux produits par l'effet thermoélectrique.

**5- Les techniques de photoélasticité:** Les techniques de mesure des paramètres de la rupture par photoélasticité complètent heureusement les approches analytiques au-delà des limites de ces dernières. La photoélasticité est la science qui étudie en physique les effets sur la lumière des contraintes ou déformations appliquées à des corps élastiques. Par contre la technique expérimentale qui sert à mesurer les contraintes par photoélasticité est la photoélasticimétrie. Cette technique a été découverte en 1816 par David Brewster, depuis elle est devenue très pratique pour visualiser la concentration des champs de contraintes expérimentalement [12 à 15].

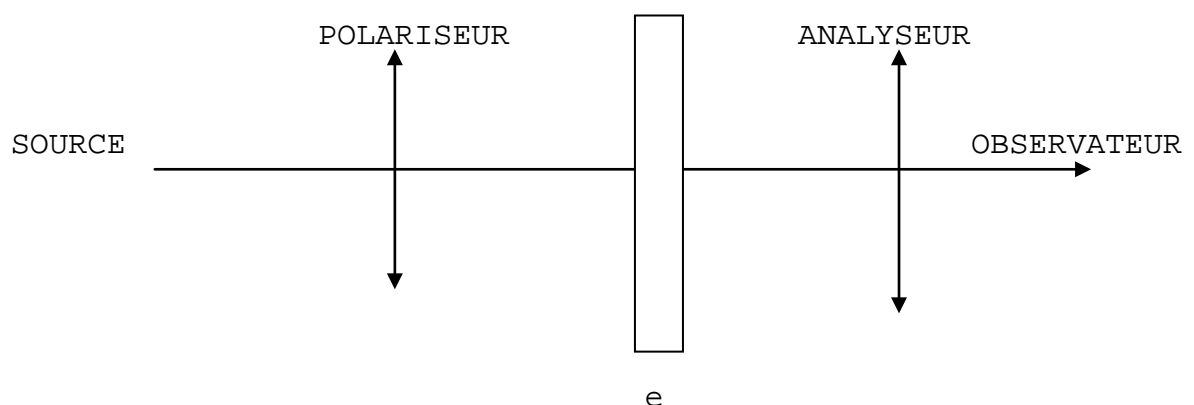
Plusieurs recherches [16] à [20] se sont accomplies en particulier aux USA et ces dernières années l'industrie aussi a pû mener à bien de considérables travaux par cette technique.

### I-2-3) Différents procédés de la photoélasticimétrie:

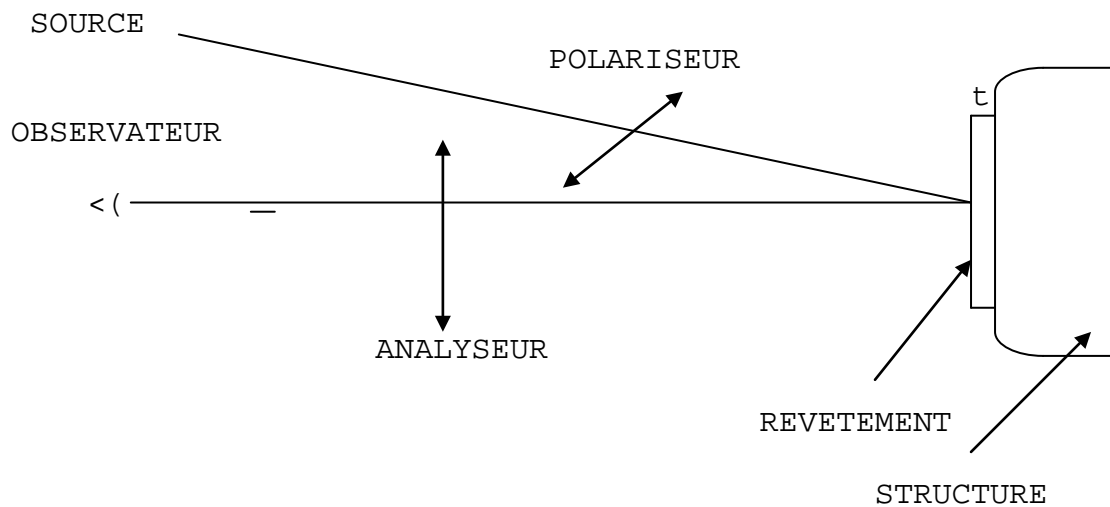
Pour mesurer les contraintes, on utilise plusieurs procédés;

- On peut réaliser une reproduction plane de la forme à étudier, découpé dans un matériau photo-élastique. Ce modèle est observé par transparence et placé entre les filtres polarisants (Fig.1.6), pendant qu'on lui applique des efforts.

- On peut également recouvrir une structure réelle avec une mince couche de produit photo-élastique. La structure n'étant pas transparente à l'aide d'une peinture ou d'une colle chargée de poudre métallique. La lumière traverse le revêtement photo-élastique, est réfléchié et traverse une seconde fois le revêtement (Fig.1.7). Les filtres polarisants sont placés côte à côte. Cette méthode est souvent appelée photo-stress.



**Fig.1.6 Photoélasticité par transmission**



**Fig.1.7 Photoélasticité par réflexion**

Généralement, les procédés de la photoélasticité sont identiques, qu'il s'agisse d'instruments par transparence ou par réflexion. Simplement, il faut bien noter que, par réflexion, l'épaisseur du revêtement compte deux fois.

#### **I-2-4) Les instruments:**

a) **Les filtres polarisants:** Un photo-élasticimètre comprend essentiellement deux platines verticales et parallèles montées sur un bâti robuste (photo 1.5). Chacune d'elles comporte un polaroid circulaire, l'un polariseur, à droite, l'autre analyseur, à gauche. Les cadres circulaires qui portent ces polaroids peuvent être entraînés solidairement par la poignée que l'on voit à la base, sur le bâti. De plus, le polaroid analyseur peut tourner à l'intérieur de son cadre. Ces deux mouvements sont repérés par des graduations. Le mouvement solidaire, qui sert aux mesures de directions pour les isoclines, est repéré en degrés. Le mouvement indépendant de l'analyseur, qui sert aux interpolations, est gradué de 0 à 1 sur demi-tour avec des graduations de 0.01, ce qui correspond au 1/100 de frange.

b) **Le cadre de chargement:** Ce dispositif destiné à appliquer des efforts aux modèles placé environ à égale distance du polariseur et de l'analyseur. Les forces sont appliquées par des dispositifs à vis ou par des leviers et des poids (photo 1.6).

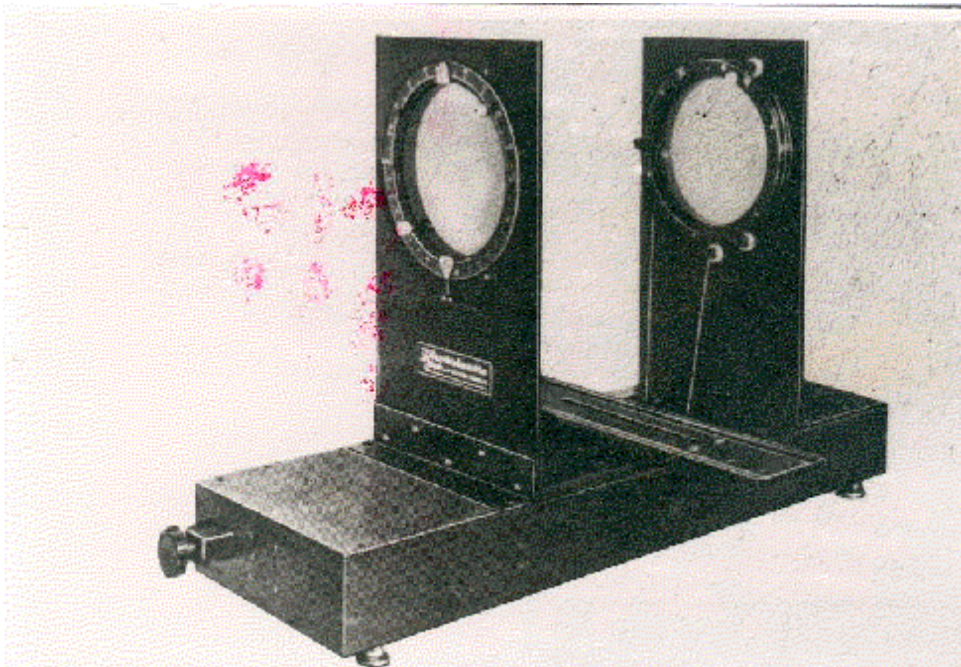
c) **Source lumineuse:** La source peut être un écran de lumière diffusée. A l'opposé de l'instrument, l'observateur voit l'ensemble du modèle, très lumineuse. La vision totale du modèle est un avantage.

D) **Accessoires:** Ceux-ci sont nombreux et plus ou moins facultatifs, nous en citerons quelques un dont le laboratoire est équipé.

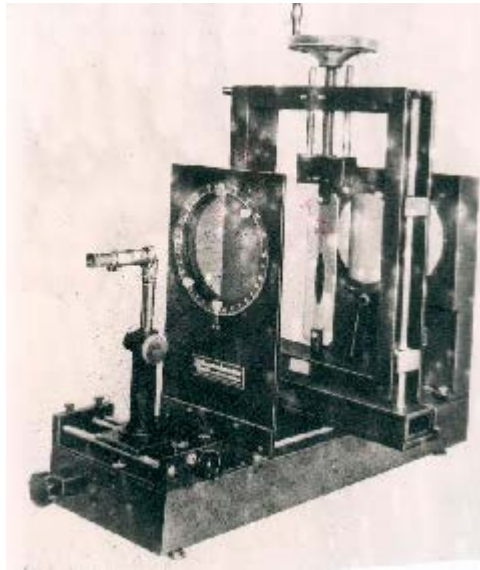
- **Incidence oblique:** Ces prismes, montés sur des dispositifs circulaires repérés en rotation, sont représentés sur la (photo 1.7) et sont montés sur l'instrument comme le montre la (photo 1.8).
- **Compensateur:** Le compensateur à teinte plate se place instantanément par une glissière sur le cadre de l'analyseur (photo 1.9). Lorsqu'on l'utilise, on observe la structure par son trou qui se trouve au centre de l'analyse et on peut toujours se référer à l'observation directe en regardant par la partie restante du champ.
- **Appareil photo:** Pour les prises de vue, un appareil photographique est monté derrière l'analyseur (photo 1.10).

### I-2-5) Mise en oeuvre:

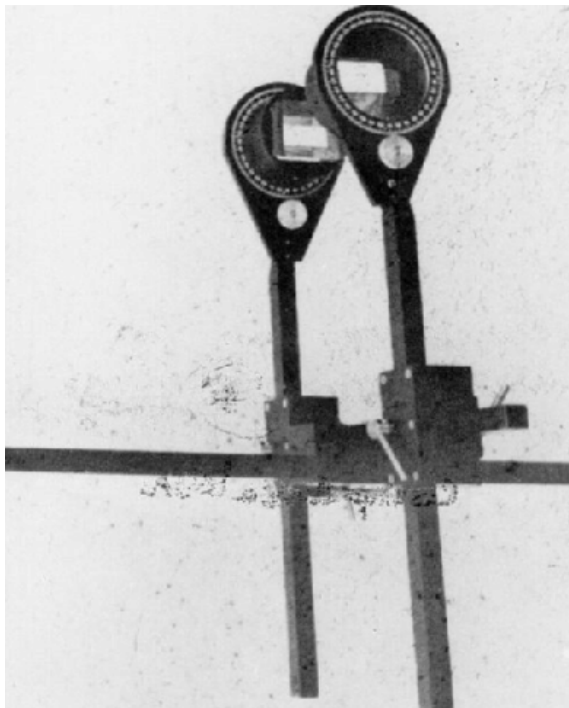
Le modèle à étudier est fixé verticalement, par deux boulons dans ses deux extrémités à égale distance du polariseur et de l'analyseur. Avec la lumière blanche, à l'état initial, c'est-à-dire sans aucun effort, le spécimen est de sa couleur transparente. On applique des forces par le levier qui se trouve dans le cadre du chargement, on observe des franges colorées dans la surface soumise à des contraintes, mais aussi des lignes ou des zones noires, qui peuvent être soit l'isochrome des contraintes nulle soit des isoclines. Ces dernières sont reconnaissables au fait que, lorsqu'on tourne solidairement les polaroids à l'aide d'une poignée, elles se déplacent, alors que l'isochrome noire de contrainte nulle reste fixe.



**Photo 1.5 Instrument de base**



**Photo 1.6 Photoélasticimétrie avec éclairage en lumière diffusée**



**Photo 1.7 Incidence oblique**

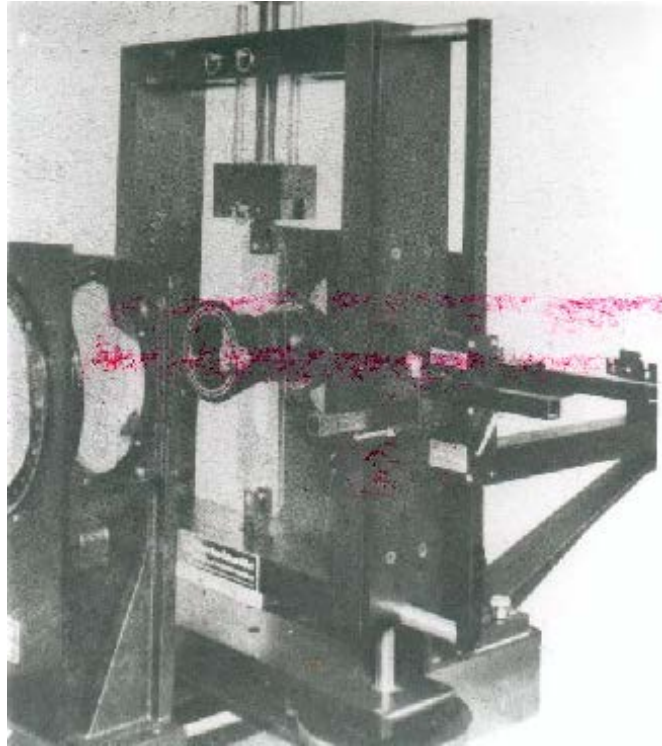
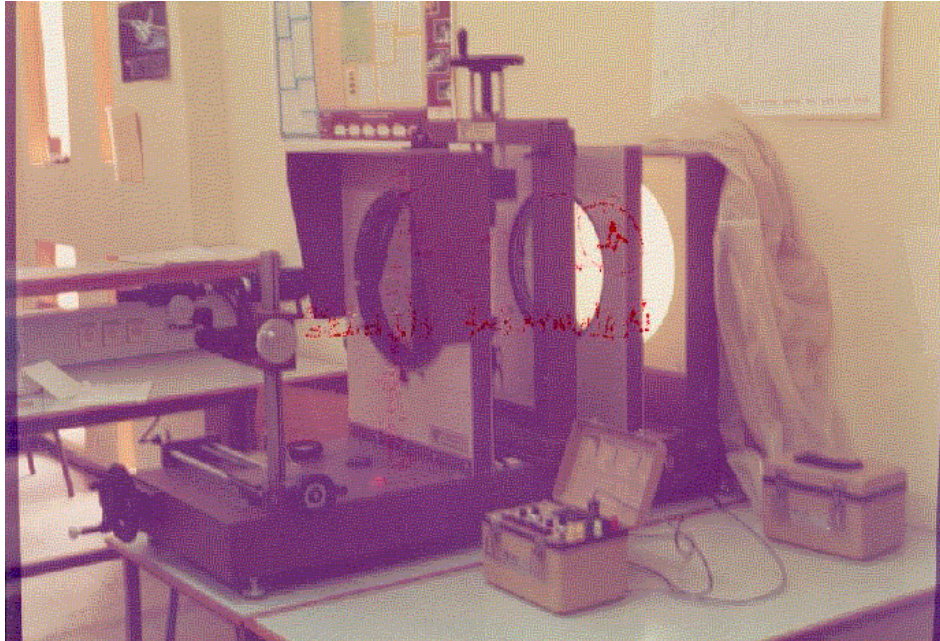


Photo 1.8 Photoélasticimétrie équipée pour l'incidence oblique



Photo 1.9 Compensateur

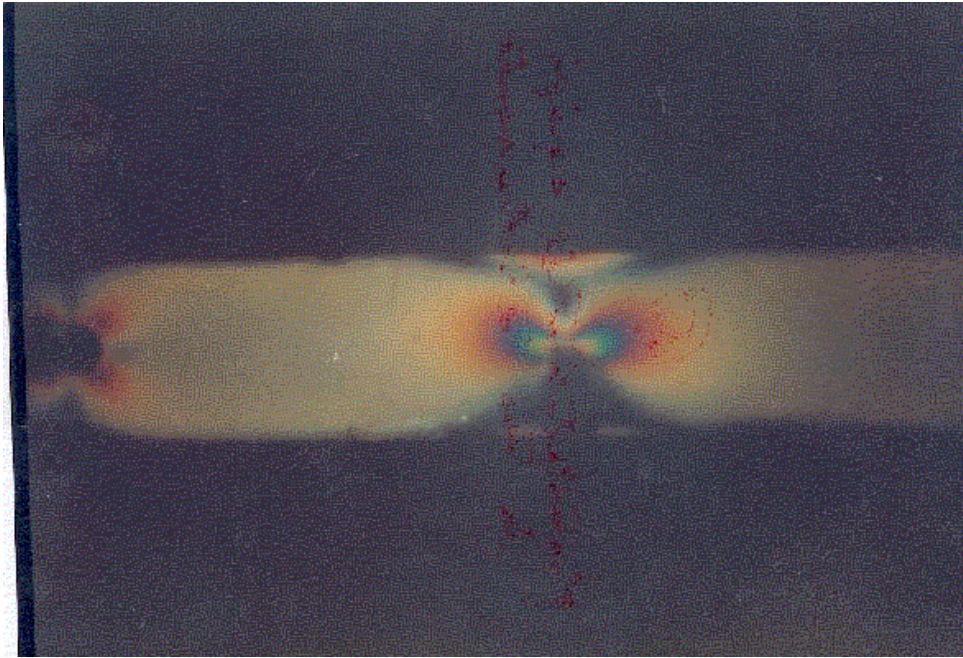


**Photo 1.10 Photoélasticimétrie équipée de tous les instruments**

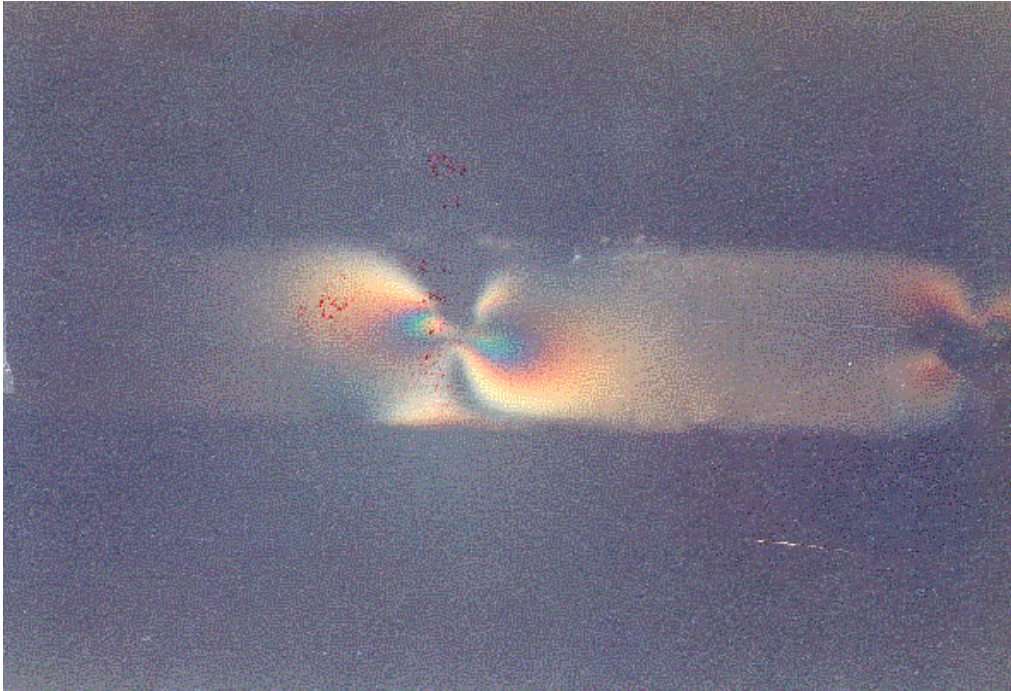
**I-2-6) Procédure expérimentale :**

Le premier matériau utilisé fut le verre, évidemment abandonné maintenant. Le polymétacrylate de méthyle (plexiglas) a été longtemps utilisé, c'est un matériau mécaniquement très stable, et élastique. Pour ces raisons on l'a choisi comme modèle dans cette analyse. Ce dernier est chargé à travers des épingles par un mécanisme à l'aide d'une vis. La fissure est obtenue par une lame. Elle est repérée bien sûr quand on la charge. Le chargement est maintenu assez petit pour empêcher des fissures additionnelles dans la fissure racine . La source de la lumière utilisée est une lampe.

Les modèles choisis sont pris par photographie type 35mm. La photo 1.11 (a,b) montre les franges pour un modèle chargé.



a) Cas où  $F = 142 \text{ N}$



B) Cas où  $F = 1070 \text{ N}$

Photo 1.11 Modèle chargé

### Etalonnage :

Avant d'utiliser le matériel il faut tout d'abord on procède +l'étalonnage. La théorie de la photoélasticimétrie peut-être explicitée par la relation de Maxwell. On détermine d'abord C par étalonnage.

On soumet l'éprouvette à une traction on a alors ;

$$\sigma_y = 0 \quad \text{et} \quad \sigma_x = F / S \quad \text{avec} \quad (S = e . b)$$

$$\sigma_x = c / e.N$$

donc on a ;  $F = (C.b)/N$

Cette relation lie la charge F à l'ordre de frange N pour déterminer la valeur de C. C'est ainsi qu'on a pu tracer la courbe reliant la charge au nombre de franges. Pour cela on fait varier les charges de traction en augmentant progressivement et on mesure les ordres de frange N au centre de l'éprouvette pour chaque cas de chargements. Les mesures obtenues sont reportées sur le tableau ci-après.

N ordre de frange	F (poids)	F (newtons)
0.5	32	142.69
1	64	285.38
1.5	98	436.99
2	121	539.54
2.5	160	713.45
3	185	824.92
3.5	194	865.06
4	240	1070.17

Le graphe de la charge F en fonction de l'ordre de franges N est montré sur la Fig.1.8. L'équation liant la charge F à l'ordre de frange N est donnée par ce qui suit :

$$F = 271.88 N + 9.51$$

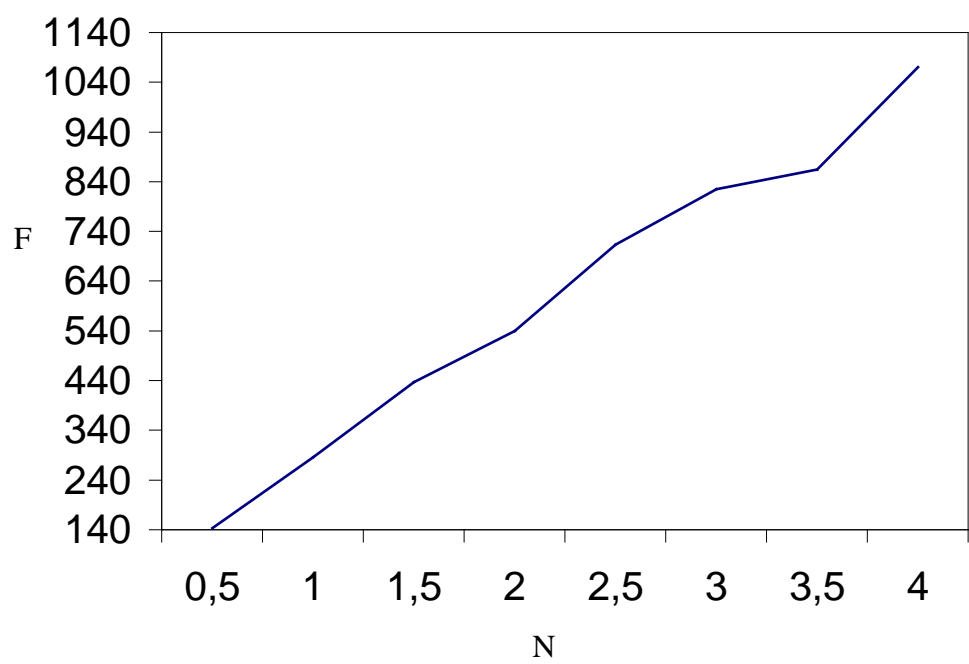
A partir de cette équation, on a pu tirer la valeur de C qui est estimée à 71.54 bar /frange /mm.

L'erreur relative correspondante est :

$$\varepsilon_{rel} = (C_{cal} - C_{donnée}) / C_{calculée}$$

$$\text{d'où} \quad \varepsilon_{rel} = (71.54 - 71) / 71.54 = 0.75 \%$$

L'erreur est donc très faible de l'ordre de  $10^{-2}$  .



**Fig.1.8 Courbes charges-ordre de frange**

### I-2-7) Conclusion :

En visionnant directement l'échantillon, on remarque qu'au voisinage immédiat de la pointe de la fissure:

- Des franges élevées d'où obtention des concentrations de contraintes assez importantes au bout de la singularité.
- Le contour de densités est proportionnel au chargement.
- L'évolution des couleurs observées avec l'augmentation des charges est composée de : noir, jaune, rouge, bleu, rouge, vert, jaune, rouge, vert, etc... Une ligne de couleur uniforme est une ligne d'isocontraintes, le noir dans ce cas de figure indique les zones sans contraintes (loin de la fissure).

Cette analyse confirme qu'au voisinage du front de la fissure, le champ de contraintes est très élevé ( les franges majeures apparues particulièrement dans la région de grandes contraintes ). A ce propos la photo 1.12 montre clairement l'existence de cette interaction entre fissures ( déviation du champ de contraintes vers une fissure secondaire ).

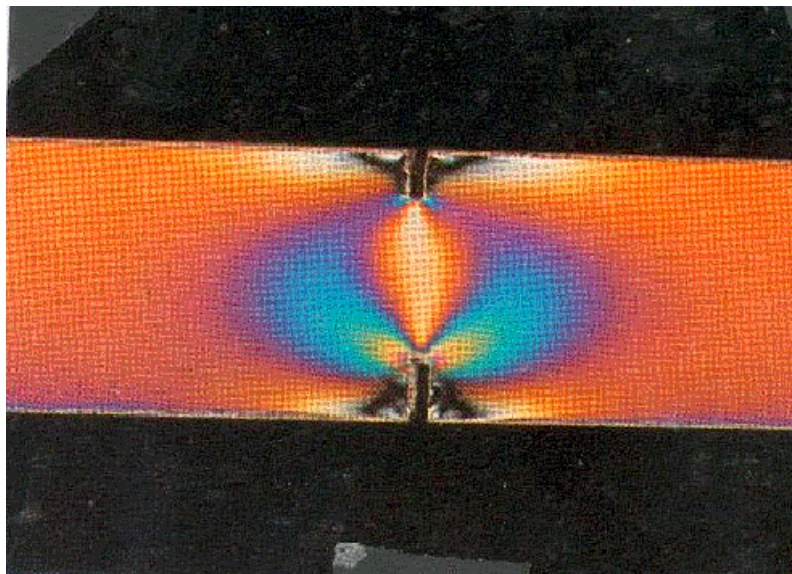


Photo 1.12 Spécimen avec double entaille

**CHAPITRE I I**  
**ANALYSE  
DES  
CHAMPS DE CONTRAINTES**

## II.1) Introduction:

Le phénomène le plus important qu'on peut observer lors de la formation d'une fissure, est la concentration très importante des champs de contraintes au front de la fissure (voir photol), appelée zone à fortes perturbations.

Les observations microscopiques de la propagation de la fissure dans les matériaux fragiles [21] et [22] ont montré que la zone d'endommagement se développe au voisinage du front de la fissure. Cette zone peut être identifiée dans certain cas [1] à [4] comme une région intensive de microfissures. Le modèle théorique le plus récent est celui proposé par A. CHUDNOVSKY and co [18] connu sous l'appellation de " Crack Layer Theory ". Cette théorie considère le processus de propagation de la fissure comme étant un développement et une coalescence subséquente des micro-défauts au voisinage de la pointe de la fissure.

Trois autres approches assez distinctes les unes des autres ont été récemment développées pour déterminer ces champs de contraintes associés à la présence de microfissures autour de la fissure principale.

- La première étant celle où la microfissure est modélisée par une inclusion dans un milieu élastique effectif. Ce type de modèle a fait l'objet de recherche par plusieurs auteurs entre autres ceux de [23] à [26]. Cependant, il existe des insuffisances dans leur approche d'un point de vue physique. D'abord, les fluctuations locales des microfissures (densités et longueurs) qui sont des paramètres assez importants dans le processus de rupture, n'ont pas été prises en considération. Ensuite, la distribution de microfissures est en général une distribution hétérogène.

Généralement une inclusion élastique équivalente se distingue par un comportement non-homogène et anisotrope, d'où des difficultés dans les calculs.

- Dans la deuxième approche, l'interaction entre la fissure et les microfissures repose sur une description détaillée de localisation de chaque microfissure [18], [19] et [24]. Apparemment, l'approche en elle-même présente des limitations dans les calculs et devient peu pratique pour un nombre assez élevé de microfissures.

- Dans la troisième approche, la zone de microfissures est caractérisée par une distribution statistique de densités de microfissures. Ce qui a amené les auteurs [27] et [29] à évaluer des paramètres d'intégrations associés aux microfissures, d'où l'utilisation d'une méthode semi-empirique reposant sur des données expérimentales.

Le modèle [18] traite la méthode de la double couche dans un milieu élastique linéaire au front de la fissure principale interagissant avec les microfissures. Dans ce cas, la microfissure considérée est petite par rapport aux dimensions de la fissure principale (la surface occupée par les microfissures est petite en comparaison à celle occupée par la fissure principale). Sous ces hypothèses, le champ de contrainte apparaît dominant et est défini par un facteur d'intensité de contraintes noté  $K_I$ .

Dans ce travail, on considère une interaction élastique d'une fissure avec une zone d'endommagement formée de microfissures. L'approche utilisée est basée sur la technique de la double couche. Cette dernière a été choisie comme moyen pour solutionner le problème d'interactions fissures-microfissures.

Les différents champs de déplacements et de contraintes pouvant générés à partir de l'interaction fissure-microfissures ont été ainsi déterminés et ce par l'utilisation des fonctions de GREEN et par conséquent, l'obtention du facteur d'intensité de contraintes  $K_I$ .

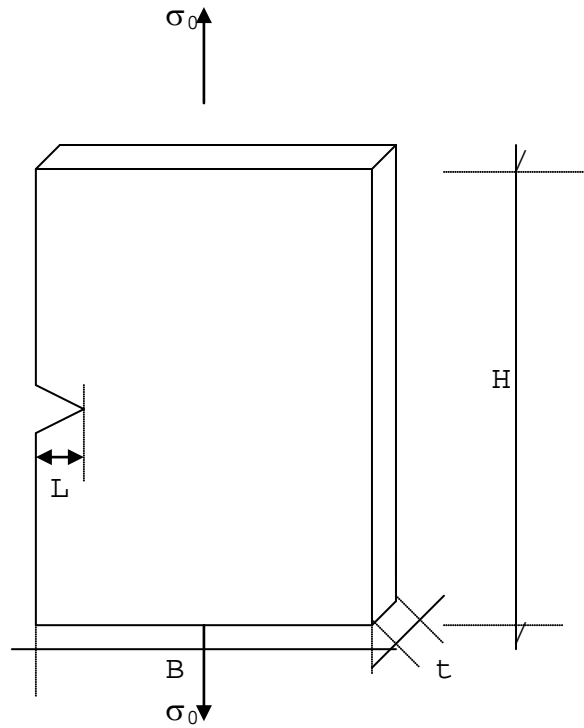
## **II-2) Formulation du problème:**

Le problème considéré est un spécimen fissuré latéralement et soumis à un chargement uniforme à l'infini sous le mode pure I (voir Fig.2.1).

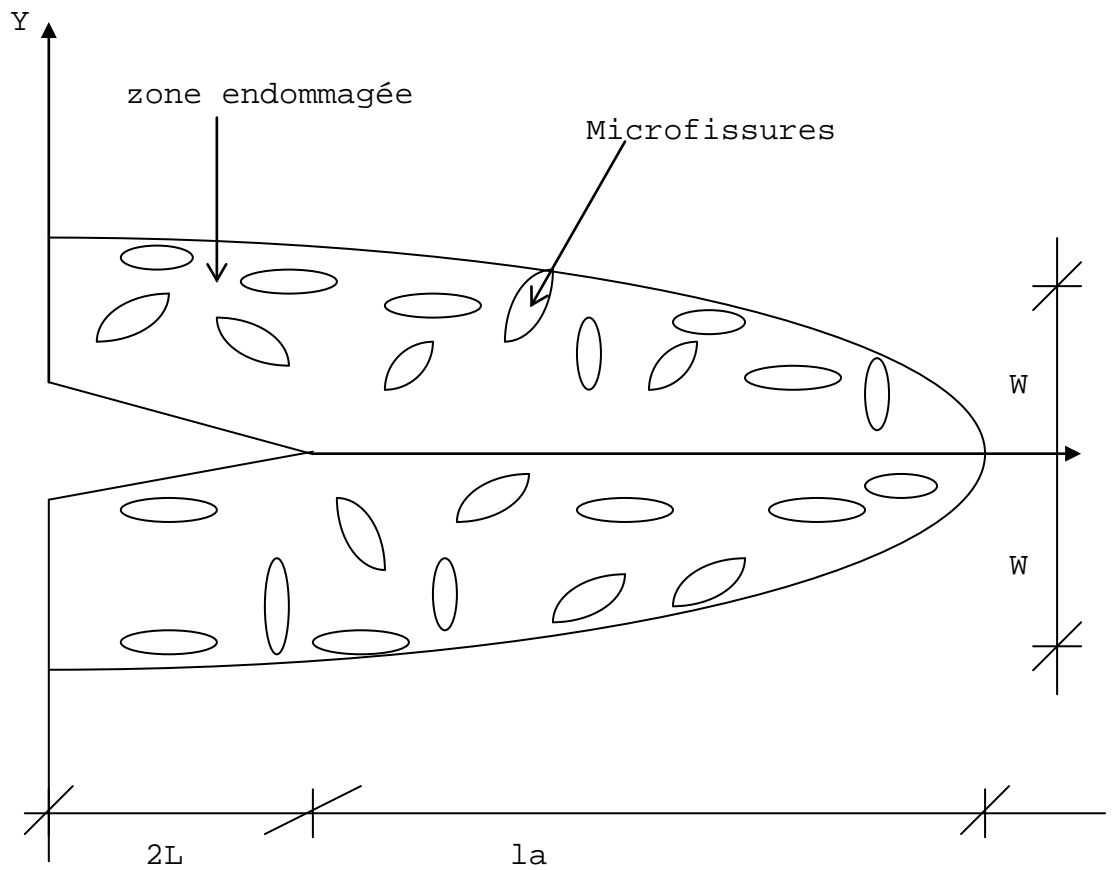
La fissure initiale ayant la dimension  $(-L, +L)$  est considérée à deux dimensions et est précédée par une zone de microfissures (Fig.2.2).

Les hypothèses de calcul tolérées sont comme suit :

- Milieu élastique, homogène et isotrope,
- Dimensions de la microfissure sont petites par rapport aux dimensions de la fissure principale,
- La zone microfissurée est petite par rapport à la fissure principale,
- Les microfissures sont orientées et positionnées arbitrairement,
- La zone microfissurée est symétrique par rapport à la ligne de la fissure principale,
- La fissure se propage d'une manière réctiligne,
- Le mode de rupture est le mode I,
- La valeur du vecteur de la densité d'ouverture de la fissure principale est une donnée expérimentale.
- Etat de contrainte plane.



**Fig.2.1 Géométrie du spécimen  
(Single Edge Notch Specimen)**



**Fig.2.2 Représentation de la zone d'endommagement**

Le champ de déplacements dans un solide élastique linéaire généré par une fissure principale peut être représenté sous la forme d'une intégrale de la double couche tout en tenant compte du déplacement de l'ouverture d'une fissure qui est définie comme suit [27]:

$$u(x) = \int_{\Gamma} b(\zeta) \cdot \phi(\zeta, x, n(\zeta)) d\zeta \quad (2.1)$$

où  $\Gamma$  est la surface de la fissure dans le plan (Fig.2.3);  $\phi(\zeta, x, n(\zeta))$  est le tenseur de Green du second ordre qui peut être interprété comme étant le déplacement en un point  $x$  de la fissure principale dû à une force "dipôle" d'intensité unitaire appliquée en un point  $\zeta$  de la microfissure (Fig2.4).

Dans le cas d'un problème en état de contrainte plane, le tenseur de GREEN est donné comme suit [20]:

$$\phi(\zeta, x, n(\zeta)) = [(1+\nu) / 4\pi R^2] [(1-\nu) / (1+\nu) (nR - Rn - nRI) - 2nR / R^2 \cdot RR] \quad (2.2)$$

où  $R = \zeta - x$  est la position du vecteur,  $I$  le tenseur unité du second ordre,  $n$  le vecteur unitaire dans la direction de la force dipôle en un point  $\zeta$  de la microfissure et  $\nu$  est le coefficient de POISSON.

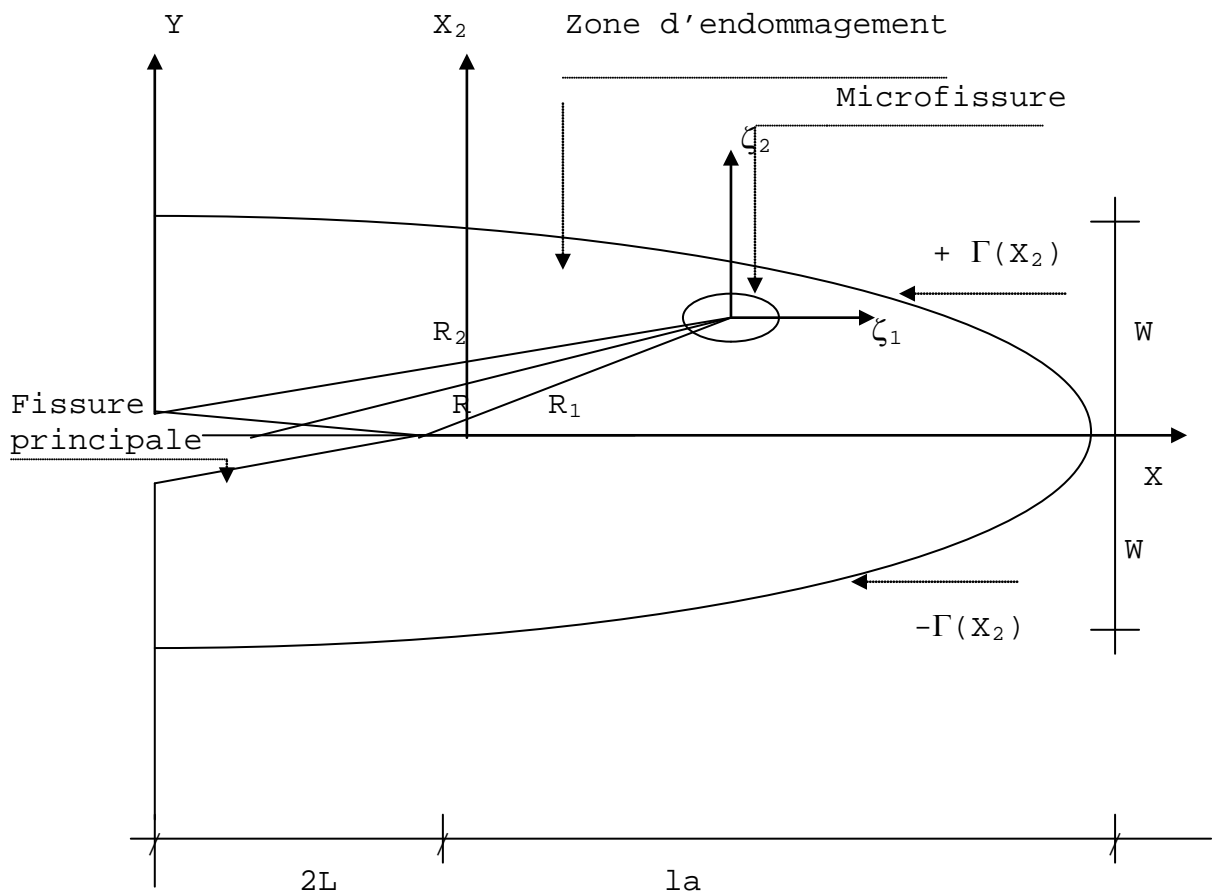
L'application de la loi de HOOK permet d'écrire le champ de contraintes généré par une fissure principale sous la forme suivante [30]:

$$\sigma(x) = T_x \int_{\Gamma} b(\zeta) \cdot \phi(x, \zeta, n(\zeta)) \cdot d\zeta \quad (2.3)$$

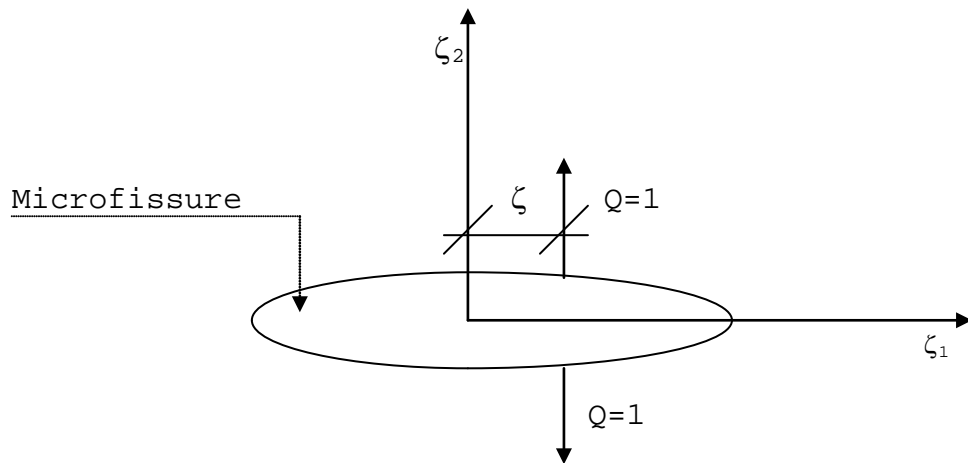
où  $T_x$  dénote l'opérateur de contrainte qui transforme le champ de déplacement en un champ de contrainte comme suit:

$$T_{ij}(u) = \mu [ u_{i,j} + u_{j,i} ] + \lambda_{k,k} \delta_{ij} \quad (2.4)$$

$\lambda$  et  $\mu$  sont les constantes de Lamé,  $\delta_{ij}$  est le knocker delta et  $i, j=1, 2$ . "x" indique que la différentiation de  $T_x$  est exécutée par rapport à la position  $x$  sur la fissure initiale.



**Fig.2.3 Schématisation de la zone fissurée**



**Fig.2.4 Schématisation de la force dipôle**

Lors de l'interaction entre la fissure et une microfissure avoisinante, le champ de contraintes généré autour de la fissure principale peut être représenté par une superposition des différents champs de contraintes mis en jeu ;

$$\sigma(x) = \sigma + \sigma'(x) + \sum_{i=1}^N \sigma_i(x) \quad (2.5)$$

où,  $\sigma$  est le champ de contraintes dû aux charges infinies appliquées extérieurement et ce en l'absence de la fissure initiale,  $\sigma'(x)$  est le champ de contraintes généré par la fissure principale et  $\sum \sigma_i(x)$  est le champ de contraintes généré par la présence de microfissures .

Dans ce travail, la zone microfissurée est supposée petite par rapport à la longueur de la fissure initiale  $L$ . Dans ce cas de figure,  $\sigma$  est négligée comparativement à  $\sigma'(x)$  généré au bout de la fissure. Ce qui nous amène à la relation suivante ;

N

$$\sigma(\mathbf{x}) = \sigma'(\mathbf{x}) + \sum_{i=1} \sigma_i(\mathbf{x}) \quad (2.6)$$

$$i=1$$

Puisque le chargement est en mode pure I et pour des raisons de simplifications, la zone de microfissures est symétrique par rapport à la ligne de la fissure principale et que cette dernière se propage d'une façon rectiligne. Les conditions externes (de libre contraintes) de la fissure principale en mode I sont satisfaites et le champ  $\sigma'(\mathbf{x})$  est représenté sous la forme usuelle [31] et [32] comme suit ;

$$\sigma'(\mathbf{x}) = K_{Ieff} \sigma_0(\mathbf{x}) \quad (2.7)$$

avec, 
$$\sigma_0(\mathbf{x}) = \varphi[\theta(\mathbf{x})] / \sqrt{2\pi r(\mathbf{x})} \quad (2.8)$$

$\sigma_0(\mathbf{x})$  représente le champ de contrainte dû au mode pure I ,  $(r, \theta)$  sont les coordonnées polaires dans le système de coordonnées de la fissure principale et  $K_{Ieff}$  est le facteur d'intensité de contrainte effectif.

En substituant l'équation (2.7) dans l'équation (2.6), on obtient l'expression suivante ;

$$\sigma(\mathbf{x}) = K_{Ieff} \sigma_0(\mathbf{x}) + \sum_{i=1}^N \sigma_i(\mathbf{x}) \quad (2.9)$$

Le champ de contraintes généré par la présence de la zone d'endommagement (microfissures) s'obtient alors en substituant les équations précédentes (2.3), (2.7) et (2.8) dans l'équation (2.9) comme suit ;

$$N$$

$$\sigma(x) = \varphi[\theta(x)] / \sqrt{2\pi r(x)} \cdot K_{Ieff} + \sum_{i=1}^n \int_{-l}^l b(\zeta) \cdot \phi(\zeta, x, n(\zeta)) d\zeta \quad (2.10)$$

Le facteur d'intensité effectif reflétant l'effet de la microfissure par rapport à la fissure principale est donné sous la forme suivante ;

$$K_{Ieff} = K_0 + \Delta K \quad (2.11)$$

avec,  $\Delta K = \Delta K(+) + \Delta K(-)$

et où,  $K_0 = \sigma / \sqrt{\pi L}$  est le facteur d'intensité de contrainte dû à la fissure principale en l'absence de la zone d'endommagement (Voir Annexe B).

$\Delta K(+)$  et  $\Delta K(-)$  sont les fonctions d'interaction due à la présence des microfissures. On note par  $\Delta K(-)$  l'effet de réduction et par  $\Delta K(+)$  l'effet d'amplification de contraintes. Ces deux fonctions sont formulées telle suit (Voir Annexe B pour plus de détails) ;

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-l}^l \sqrt{\frac{L+x}{L-x}} dx \int \left\{ \mu [\phi_{2i,j}(x, \zeta, n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(x, \zeta, n(\zeta))] + \lambda \phi_{2k,k}(x, \zeta, n(\zeta)) \right\} b(\zeta) dv \quad (2.12)$$

où,  $b(\zeta) = K_{Ieff} \varphi(\zeta)$  est le vecteur de la densité d'ouverture d'une fissure et  $\varphi(\zeta)$  est la densité des microfissures

Le vecteur densité est donné par la relation suivante:

$$b(\zeta) = b_0 \varphi_{YY}(\theta(\zeta)) / E \sqrt{2\pi r(x)} \quad (2.13)$$

$b_0$  est l'ouverture d'une fissure (COD) déterminée grâce aux observations expérimentales,  $E$  est le module de YOUNG et  $r^2(\zeta) = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$  vecteur de position de la microfissure.

En utilisant le schéma de la Fig.2.3, l'expression (2.12) devient ;

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \cdot K I_{eff} \int_0^L \sqrt{2L+x_1/1-x_1} \cdot dx_1 \int \{ \mu [\phi_{2i,j}(\zeta, x, n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(\zeta, x, n(\zeta))] + \lambda \phi_{2k,k}(\zeta, x, n(\zeta)) \delta_{i,j} \} b_0 \varphi_{YY}[\theta(\zeta)] / E \sqrt{2\pi r(x)} \cdot P_0 d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.14)$$

avec,  $i, j, k = 1, 2$

La partie droite de l'intégrale (2.14) dénommée  $H(\zeta, x, n(\zeta))$  peut se mettre sous la forme suivante :

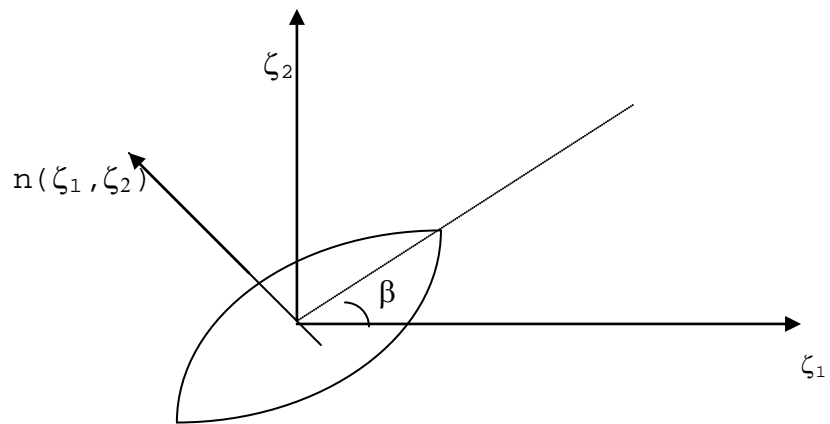
$$H(\zeta, x, n(\zeta)) = \int d\zeta_1 \int \{ \mu [\phi_{2i,j}(\zeta, x, n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(\zeta, x, n(\zeta))] + \lambda \phi_{2k,k}(\zeta, x, n(\zeta)) \delta_{i,j} \} \Gamma(x_1) \cdot P_0 d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (2.15)$$

Pour des raisons de simplicité, on dénote par  $\psi_{i,j}(\zeta, x, n(\zeta))$  l'expression suivante :

$$\psi_{i,j}(\zeta, x, n(\zeta)) = \mu [\phi_{2i,j}(\zeta, x, n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(\zeta, x, n(\zeta))] + \lambda \phi_{2k,k}(\zeta, x, n(\zeta)) \quad (2.16)$$

L'étude détaillée de l'équation (2.16) permet de mieux élucider les phénomènes de réduction et d'amplification des champs de contraintes et de trouver ainsi la limite séparant ces deux effets.

$\beta$  est l'angle d'orientation de la microfissure par rapport à la fissure principale comme montrée sur la Fig.2.5.



**Fig.2.5 Positionnement d'une microfissure.**

Le tableau suivant récapitule toutes les fonctions d'influence dues aux différentes orientations de la microfissure par rapport à la fissure principale.

**Tableau 1: Fonctions de champs de contraintes :**

$\beta$	$\Psi_{11}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2))$	$\Psi_{22}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2))$	$\Psi_{12}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2))$
0	$1.346\zeta_1^4 + 0.654\zeta_2^4 - 6\zeta_1^2\zeta_2^2$	$1.346\zeta_1^4 - 3.346\zeta_2^4 + 6\zeta_1^2\zeta_2^2$	$2\zeta_1^3\zeta_2 - 6\zeta_1\zeta_2^3$
45	$0.951\zeta_1^4 + 0.462\zeta_2^4 + 4.732\zeta_1^3\zeta_2 - 0.924\zeta_1\zeta_2^3 + 4.243\zeta_1^2\zeta_2^2$	$0.951\zeta_1^4 - 4.486\zeta_2^4 - 0.924\zeta_1^3\zeta_2 + 4.732\zeta_1\zeta_2^3 + 4.243\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-0.707\zeta_1^4 - 0.707\zeta_2^4 + 1.414\zeta_1^3\zeta_2 - 4.242\zeta_1\zeta_2^3 + 4.242\zeta_1^2\zeta_2^2$
60	$0.672\zeta_1^4 + 0.328\zeta_2^4 + 5.800\zeta_1^3\zeta_2 - 1.130\zeta_1\zeta_2^3 - 3.000\zeta_1^2\zeta_2^2$	$0.672\zeta_1^4 - 1.672\zeta_2^4 - 1.130\zeta_1^3\zeta_2 + 5.800\zeta_1\zeta_2^3 + 3.000\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-0.866\zeta_1^4 - 0.866\zeta_2^4 + 1.00\zeta_1^3\zeta_2 - 3.00\zeta_1\zeta_2^3 + 5.200\zeta_1^2\zeta_2^2$
90	$6.700\zeta_1^3\zeta_2 - 1.308\zeta_1\zeta_2^3$	$6.700\zeta_1\zeta_2^3 - 1.308\zeta_1^3\zeta_2$	$-\zeta_1^4 - \zeta_2^4 + 6\zeta_1^2\zeta_2^2$
120	$-0.672\zeta_1^4 - 0.328\zeta_2^4 + 5.800\zeta_1^3\zeta_2 - 1.130\zeta_1\zeta_2^3 + 3.000\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-0.672\zeta_1^4 + 1.672\zeta_2^4 - 1.130\zeta_1^3\zeta_2 + 5.800\zeta_1\zeta_2^3 + 3.000\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-0.866\zeta_1^4 - 0.866\zeta_2^4 - 1.00\zeta_1^3\zeta_2 + 3.00\zeta_1\zeta_2^3 + 5.200\zeta_1^2\zeta_2^2$
150	$-1.166\zeta_1^4 - 0.564\zeta_2^4 + 3.346\zeta_1^3\zeta_2 - 0.654\zeta_1\zeta_2^3 + 5.196\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-1.166\zeta_1^4 + 2.896\zeta_2^4 - 0.654\zeta_1^3\zeta_2 + 3.346\zeta_1\zeta_2^3 - 5.196\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-0.500\zeta_1^4 - 0.500\zeta_2^4 - 1.732\zeta_1^3\zeta_2 + 5.196\zeta_1\zeta_2^3 + 3.00\zeta_1^2\zeta_2^2$
180	$-1.346\zeta_1^4 - 0.654\zeta_2^4 + 6\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-1.346\zeta_1^4 + 3.346\zeta_2^4 - 6\zeta_1^2\zeta_2^2$	$-2\zeta_1^3\zeta_2 + 6\zeta_1\zeta_2^3$

--	--	--	--

Suivant les différentes orientations de la microfissure ( $\beta$ ), les fonctions trouvées dans le tableau 1 ont permis de déterminer les courbes d'isocontraintes comme montrées sur les Fig.2.6 à 2.12.

La droite séparant l'effet de réduction de l'effet d'amplification a été déterminée en annulant les fonctions du champ de contraintes précitées .

$$\psi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta))=0 \Rightarrow \varphi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta))=0 \quad (2.17)$$

où,  $\varphi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta))$  est le numérateur des fonctions  $\psi(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta))$

En utilisant la différentielle exacte, l'expression (2.17) se traduit par ce qui suit:

$$d_{\zeta_1} \varphi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta))=0 \quad (2.18)$$

La ligne de séparation est obtenue par la résolution tangentielle comme suit :

$$\left. \frac{d\zeta_2}{d\zeta_1} \right|_{\zeta_1=0} = \lim_{\zeta_1 \rightarrow 0} \zeta_2/\zeta_1 = \text{une valeur finie } \alpha \quad (2.19)$$

La résolution des équations du quatrième degré dénommées  $F_{ij}(\alpha)$ , sont résumées dans le tableau 2.

**Tableau 2: Fonctions  $F_{ij}(\alpha) = 0$  pour les différentes orientations de la microfissure ( $\beta$ ).**

$\beta$	$F_{11}$	$F_{22}$	$F_{12}$
$0^\circ$	$\alpha^4 - 9,174\alpha^2 + 2.06$	$\alpha^4 - 1.794\alpha^2 - 0.40$	$1 - 0.3\alpha^2$
$45^\circ$	$\alpha^4 - 2\alpha^3 - 9.184\alpha^2 + 10.242\alpha + 2.058$	$\alpha^4 - 2\alpha^3 - 1.794\alpha^2 + 0.390\alpha + 0.402$	$\alpha^4 + 6\alpha^3 - 6\alpha^2 - 2\alpha + 1$
$60^\circ$	$\alpha^4 - 3.44\alpha^3 - 9.146\alpha^2 + 17.683\alpha + 2.049$	$\alpha^4 - 3.469\alpha^3 - 1.794\alpha^2 + 0.676\alpha + 0.402$	$\alpha^4 - 3.469\alpha^3 - 6\alpha^2 - 1.155\alpha + 1$
$90^\circ$	$\alpha^3 - 5.116\alpha$	$\alpha^3 - 0.195\alpha$	$\alpha^4 - 6\alpha^2 + 1$
$120^\circ$	$\alpha^4 + 3.44\alpha^3 - 9.146\alpha^2 - 17.683\alpha + 2.049$	$\alpha^4 + 3.469\alpha^3 - 1.794\alpha^2 - 0.676\alpha - 0.402$	$\alpha^4 - 3.469\alpha^3 - 6\alpha^2 + 1.155\alpha + 1$
$150^\circ$	$\alpha^4 + 1.16\alpha^3 - 9.213\alpha^2 - 5.933\alpha + 2.067$	$\alpha^4 + 1.155\alpha^3 - 1.794\alpha^2 - 0.266\alpha - 0.402$	$\alpha^4 - 10.392\alpha^3 - 6\alpha^2 + 3.464\alpha + 1$

180°	$\alpha^4 - 9,174\alpha^2 + 2.1$	$\alpha^4 - 1.793\alpha^2 - 0.40$	$1 - 0.3\alpha^2$
------	----------------------------------	-----------------------------------	-------------------

La résolution de ces fonctions est illustrée dans le tableau ci-après en fonction de l'orientation  $\beta$ . Dans ce cas, on note par  $\theta$  l'angle séparant l'effet de réduction de l'effet d'amplification (tableau 3) .

**Tableau 3: Tableau récapitulatif ( Zones d'Amplification (+), Zones de Réduction (-)).**

$\beta$	$\sigma_{11}$	$\sigma_{22}$	$\sigma_{12}$
0°	$\theta < 25^\circ (+)$ $25^\circ < \theta < 71^\circ (-)$	$\theta < 55^\circ (+)$ $55^\circ < \theta < 125^\circ (-)$	$\theta < 30^\circ (+)$ $30^\circ < \theta < 90^\circ (-)$
45°	$\theta < 50^\circ (+)$ $50^\circ < \theta < 125^\circ (-)$	$\theta < 70^\circ (+)$ $70^\circ < \theta < 140^\circ (-)$	$\theta < 17^\circ (+)$ $17^\circ < \theta < 46^\circ (-)$
60°	$\theta < 57^\circ (+)$ $57^\circ < \theta < 77^\circ (-)$	$\theta < 75^\circ (+)$ $75^\circ < \theta < 142^\circ (-)$	$\theta < 20^\circ (+)$ $20^\circ < \theta < 53^\circ (-)$
90°	$\theta < 66^\circ (+)$ $66^\circ < \theta < 90^\circ (-)$	$\theta < 25^\circ (-)$ $25^\circ < \theta < 90^\circ (+)$	$\theta < 22^\circ (-)$ $22^\circ < \theta < 67^\circ (+)$
120°	$\theta < 6^\circ (-)$ $6^\circ < \theta < 69^\circ (+)$	$\theta < 38^\circ (-)$ $38^\circ < \theta < 104^\circ (+)$	$\theta < 24^\circ (+)$ $24^\circ < \theta < 78^\circ (-)$

150°	$\theta < 20^\circ (-)$ $20^\circ < \theta < 70^\circ (+)$	$\theta < 45^\circ (-)$ $45^\circ < \theta < 115^\circ (+)$	$\theta < 25^\circ (+)$ $25^\circ < \theta < 85^\circ (-)$
180°	$\theta < 25^\circ (-)$ $25^\circ < \theta < 71^\circ (+)$	$\theta < 55^\circ (-)$ $55^\circ < \theta < 125^\circ (+)$	$\theta < 30^\circ (-)$ $30^\circ < \theta < 90^\circ (+)$

Les droites délimitant les deux effets (amplification et réduction) comme récapitulées sur le tableau 3 sont montrées sur les figures Fig.2.6 à 2.12.

### II-3) Discussions :

A travers les courbes des champs de contraintes données par les Fig.2.6 à 2.12, on remarque que l'existence de la microfissure au voisinage de la fissure principale donne naissance à deux effets agissant mutuellement (effet d'amplification (+) et effet de réduction(-)). Ces derniers dépendent de l'orientation de la microfissure par rapport à la fissure initiale. Pour une microfissure parallèle à la fissure principale (cas où  $\beta = 0$ ), la composante de la contrainte  $\sigma_{22}$  produit un effet d'amplification pouvant atteindre l'angle  $\theta = 55^\circ$ , d'autre part, l'effet de réduction est délimité entre  $55^\circ < \theta < 125^\circ$ . Pour une microfissure perpendiculaire à la fissure principale (cas où  $\beta = 90^\circ$ ), l'effet d'amplification prend naissance à partir de  $\theta < 23^\circ$  par contre l'effet de réduction se limitant entre  $25^\circ < \theta < 90^\circ$ .

On remarque aussi que, pour la même composante de contrainte et pour des orientations de la microfissure

$\beta < 90^\circ$ , des effets d'amplification prennent place à partir de  $\theta < 90^\circ$  et pour  $\beta \geq 90^\circ$ , des effets de réduction se produisent à partir de  $\theta < 90^\circ$ . Donc, il est possible de déterminer à travers ces champs, les différents effets pouvant générés au voisinage de la fissure principale dûs essentiellement à l'orientation arbitraire de la microfissure et en déduire ainsi le comportement des fissures.

Fig.2.6 : Courbes d'isocontraintes ( $\beta = 0^\circ$ )  
 (microfissure parallèle à la fissure principale)

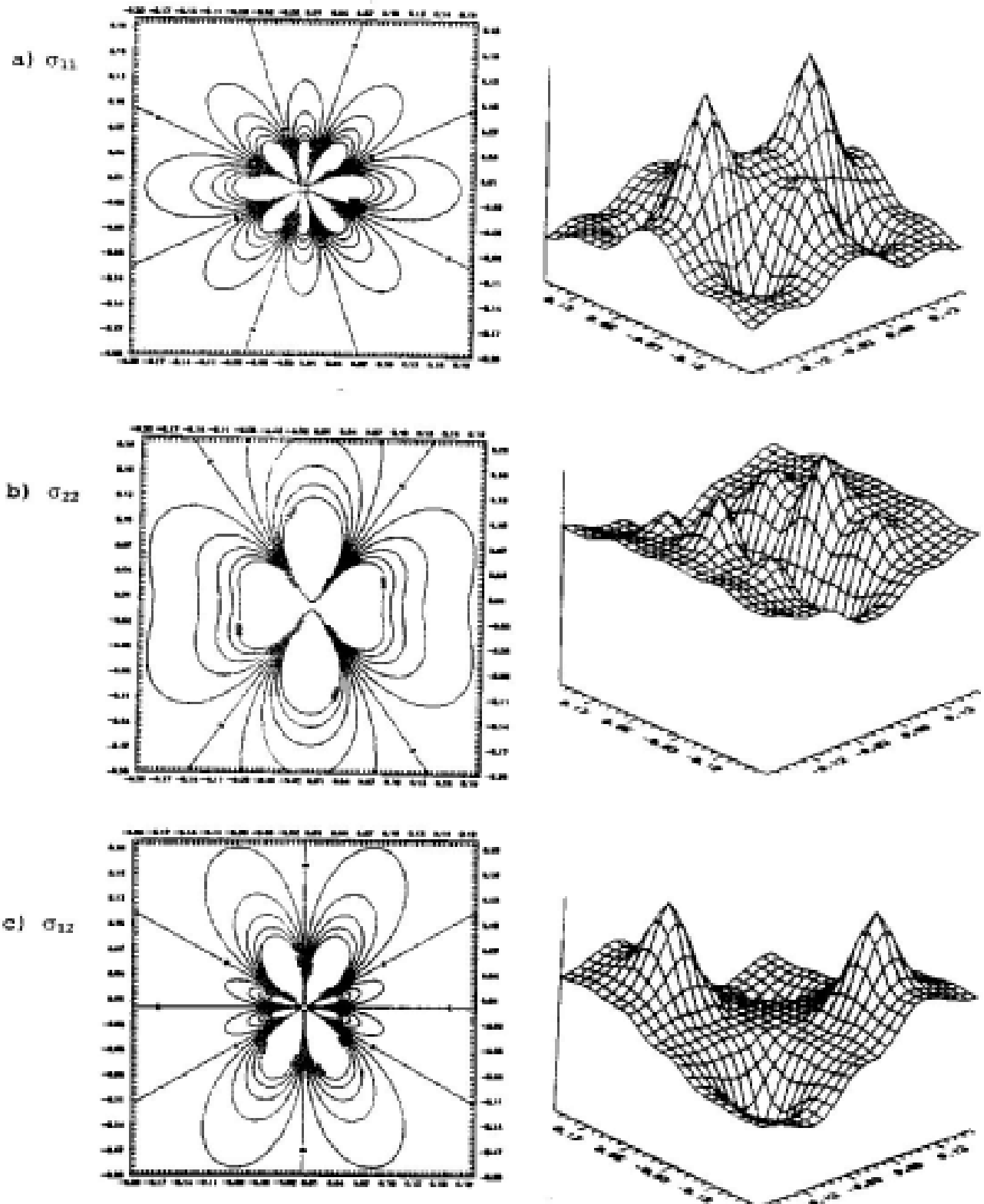


Fig.2.7 : Courbes d'isocontraintes ( $\beta = 45^\circ$ )

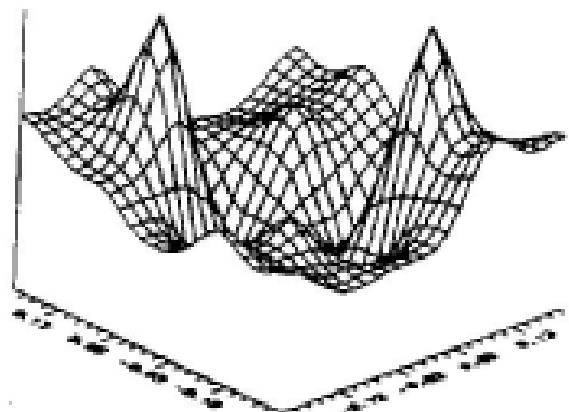
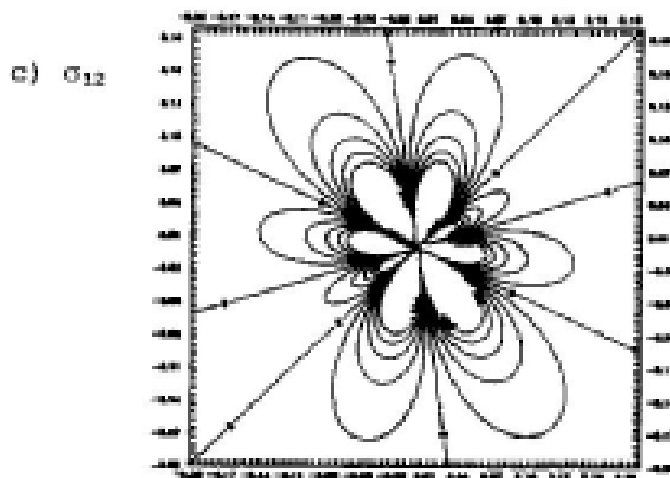
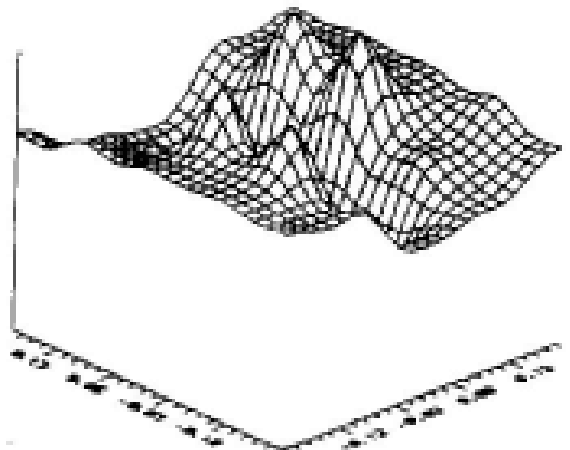
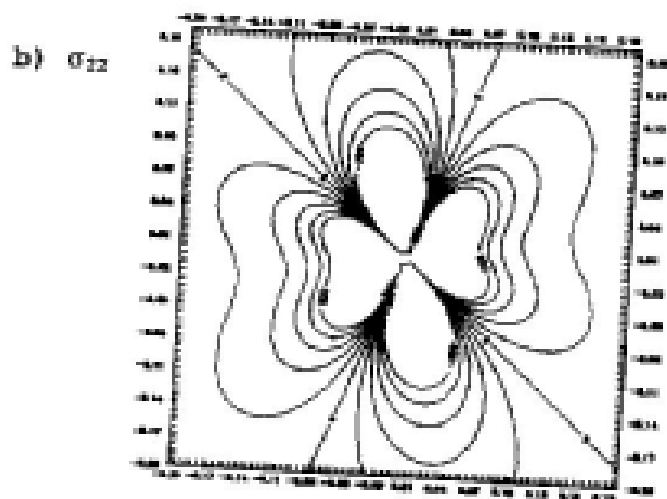
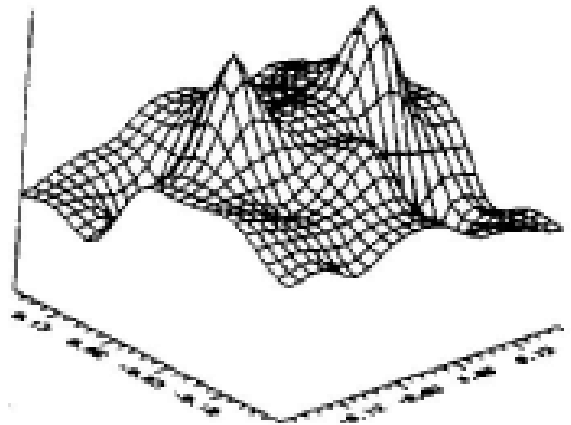
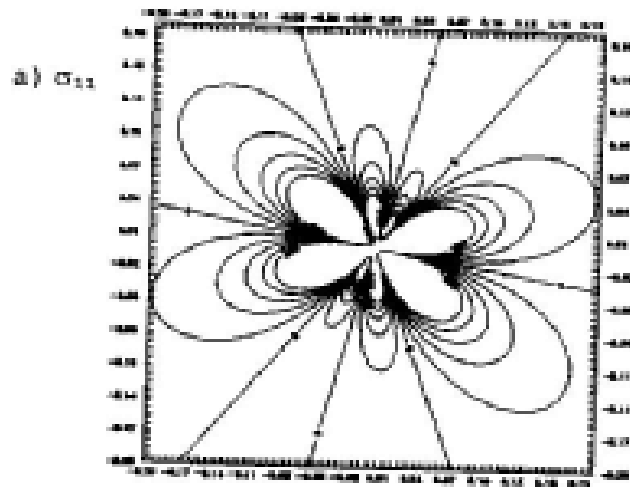


Fig.2.8 : Courbes d'isocontraintes ( $\beta = 60^\circ$ )

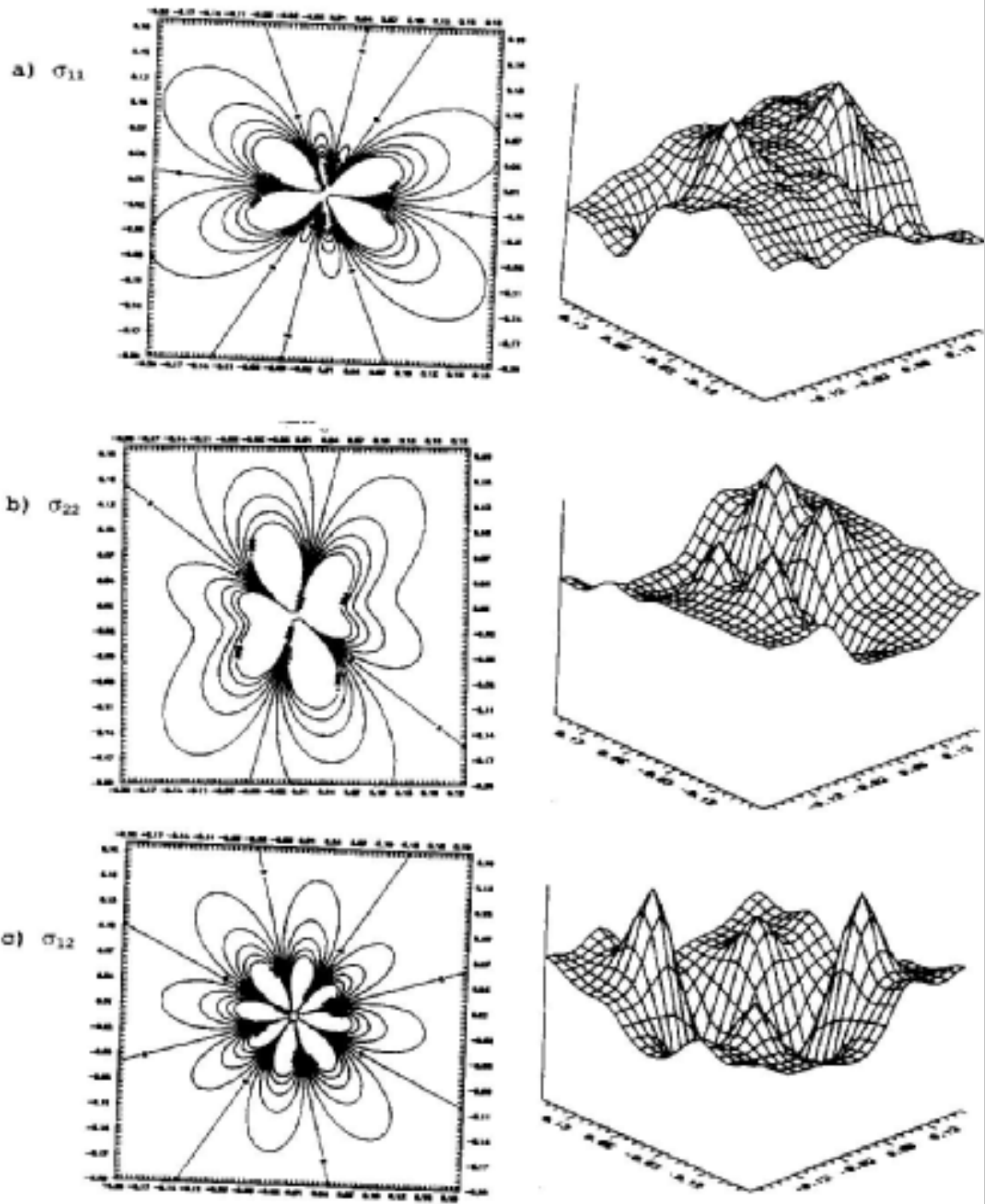
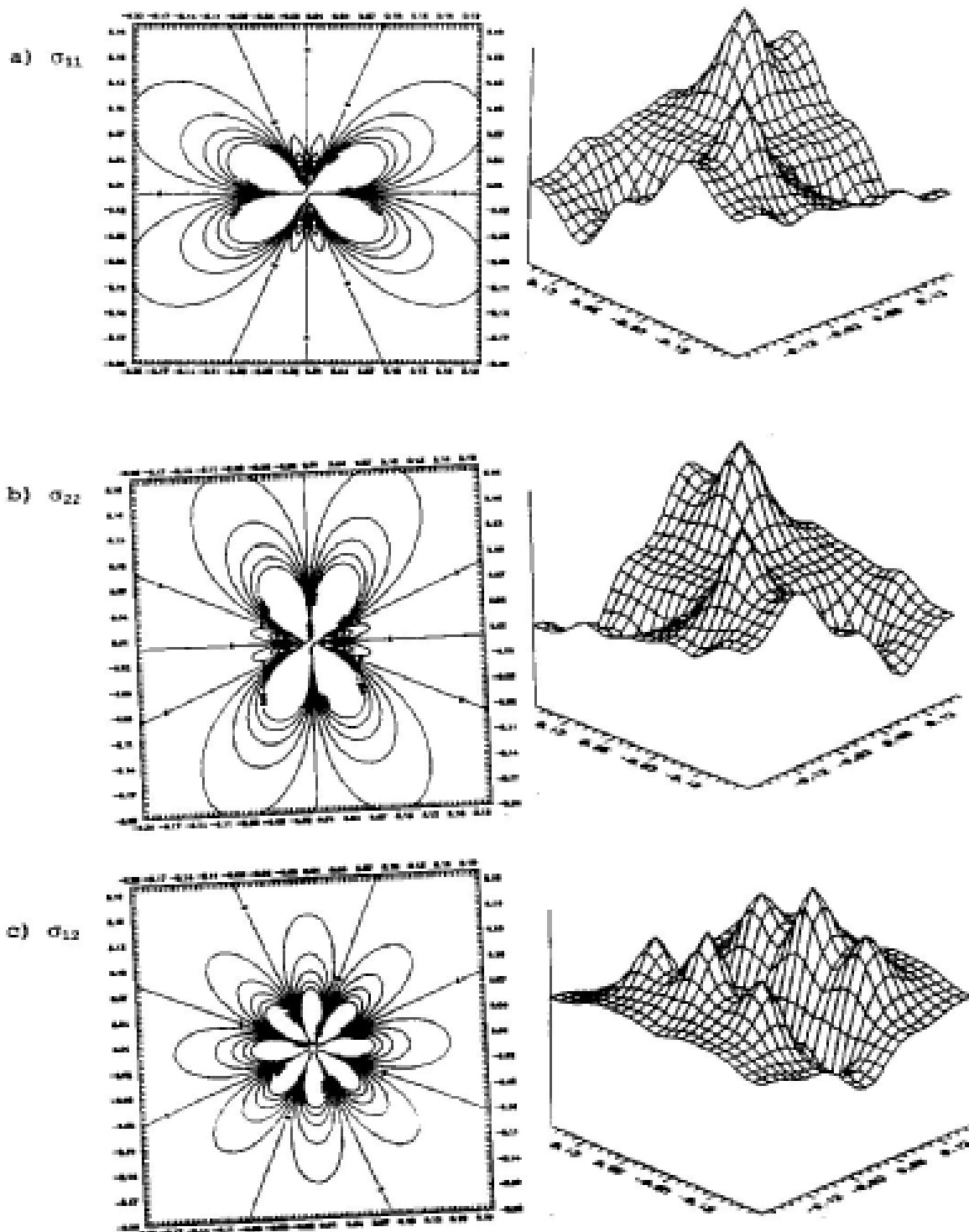
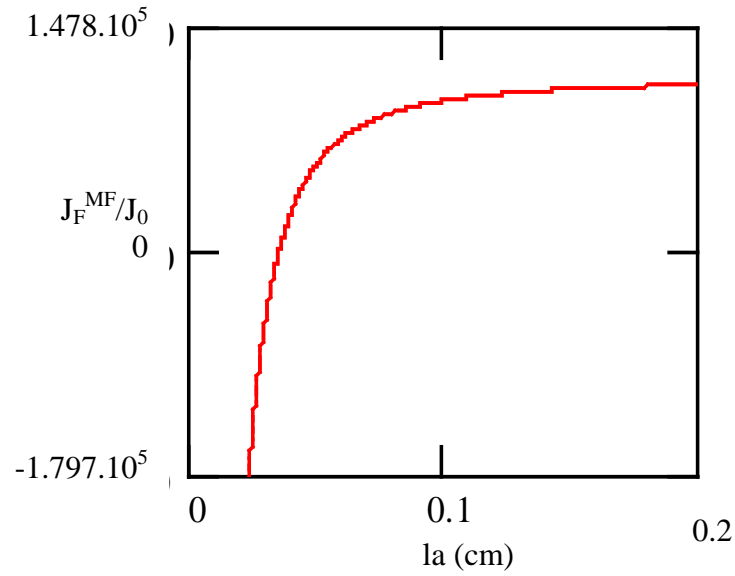
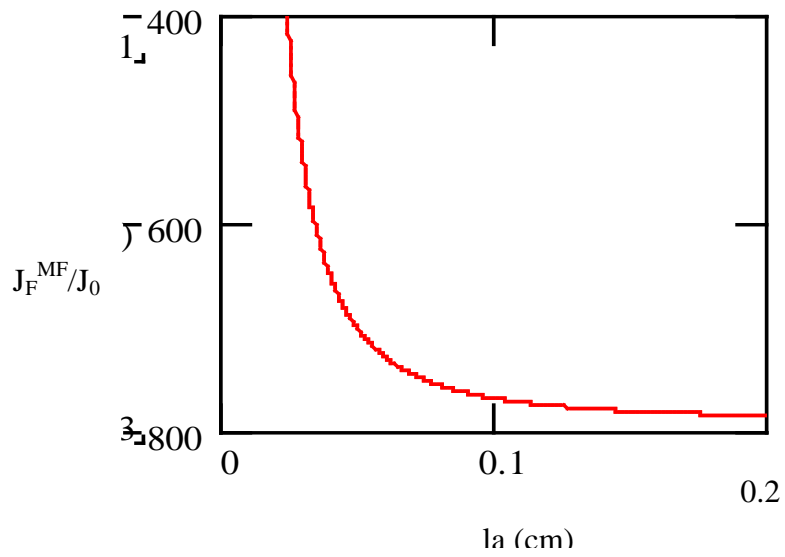


Fig.2.9 : Courbes d'isocontraintes ( $\beta = 90^\circ$ )  
 (microfissure perpendiculaire à la fissure principale)



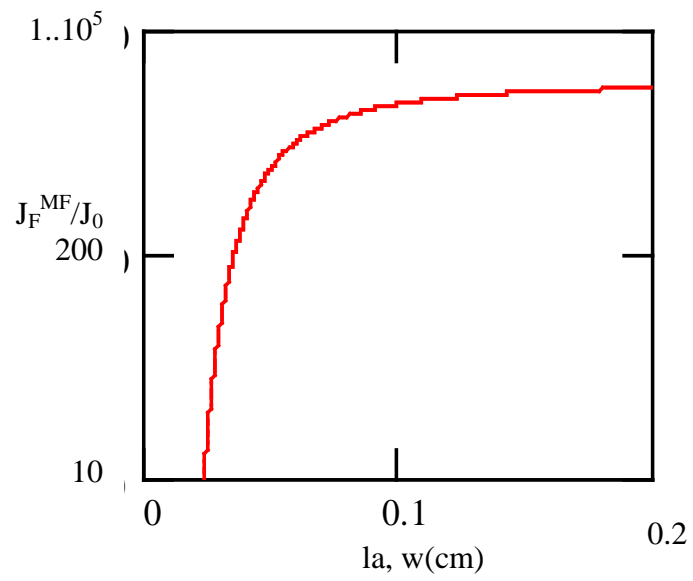


a) Cas où  $\beta = 0^\circ$

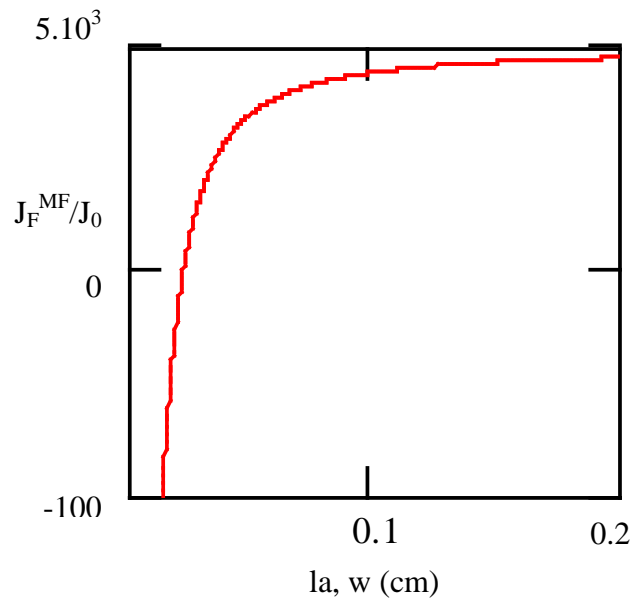


b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.9 Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la zone microfissurée  $l_a$  pour  $w$  fixe



a) Cas où  $\beta = 0^\circ$



b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.10 Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la largeur  $w$  et la longueur  $la$  de la zone microfissurée

Cas où  $\beta = 90^\circ$

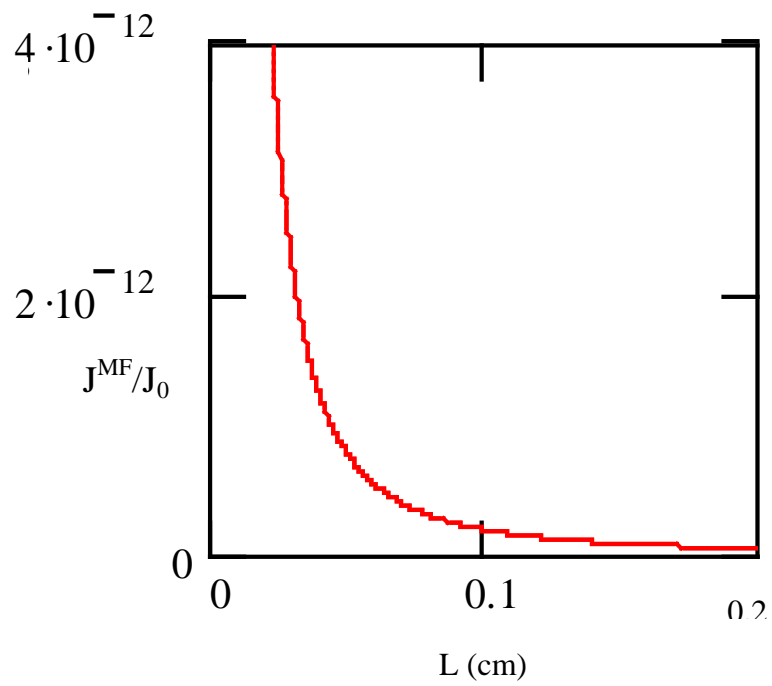
#### IV-4) Conclusion :

On constate à travers l'étude des différents taux de restitution d'énergie que l'existence d'une zone de microfissures influe grandement sur la propagation de la fissure principale. En fonction de la configuration géométrique (orientation de la microfissure par rapport à la fissure principale) ; les taux d'énergie de restitution ont été évalués séparément. Donc, l'existence de la zone d'endommagement donne naissance à deux termes d'énergie  $J_F^{MF}$  et  $J^{MF}$ . Dans ce cas, le rôle de la microfissure est soit de retarder soit d'accélérer la propagation de la fissure principale.

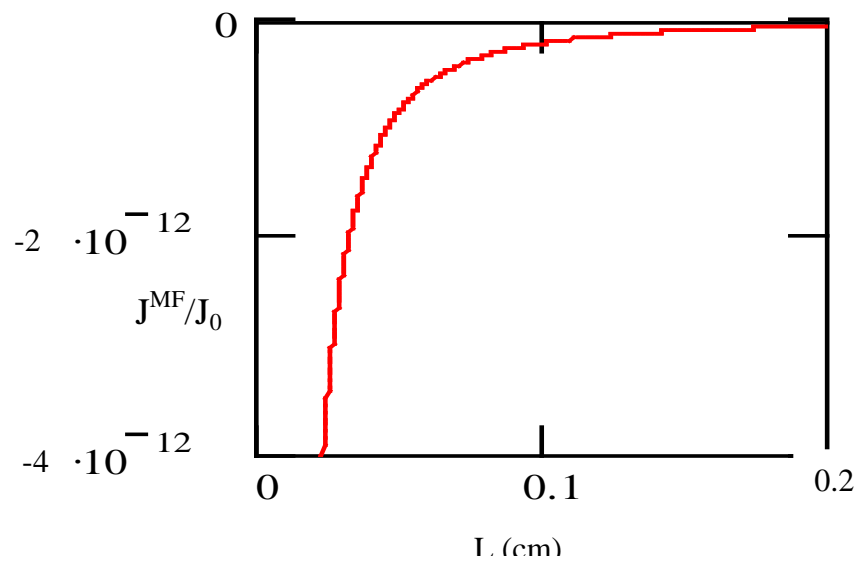
On remarque aussi que lorsque la longueur de la zone microfissurée ( $la$ ) augmente et que sa largeur ( $w$ ) est maintenue fixe, la microfissure parallèle à la fissure principale favorise l'ouverture et la propagation de la fissure principale et quand elle est perpendiculaire, elle la retarde. Par contre lorsque la largeur de la zone microfissurée ( $w$ ) augmente et sa longueur ( $la$ ) est fixé alors c'est l'effet inverse qui se produit, en d'autres termes quand la microfissure est parallèle à la fissure principale elle retarde la propagation de la fissure principale et quand elle est perpendiculaire à cette dernière elle accélère sa propagation.

Pour le cas où la zone d'endommagement augmente en longueur et en largeur ( $w$  et  $la$ ) la microfissure quel que soit son orientation accélère la propagation de la fissure principale vu que la densité (présence de microfissures) de cette zone est importante.



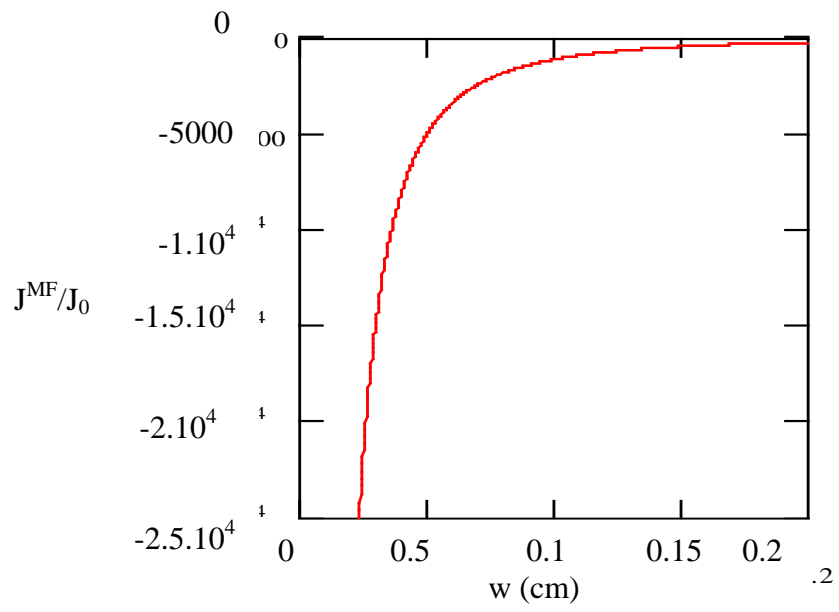


a) Cas où  $\beta = 0^\circ$

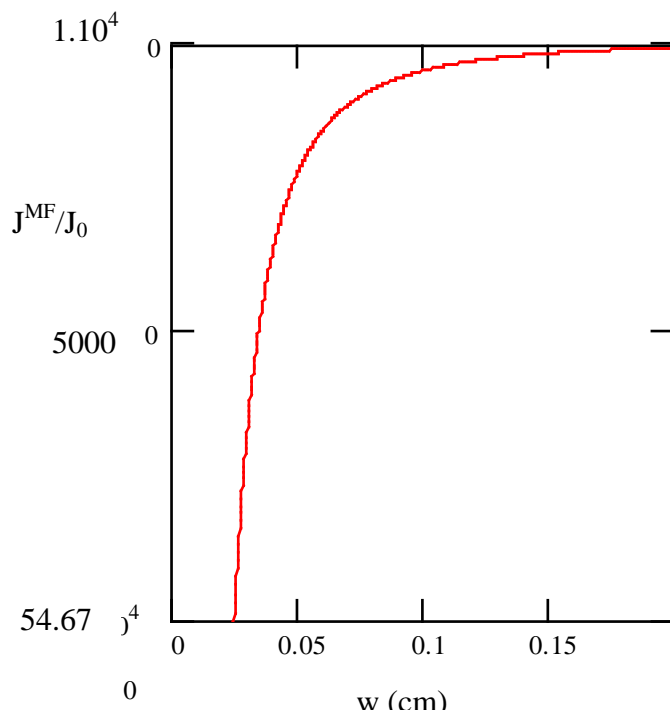


b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.3 Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la fissure



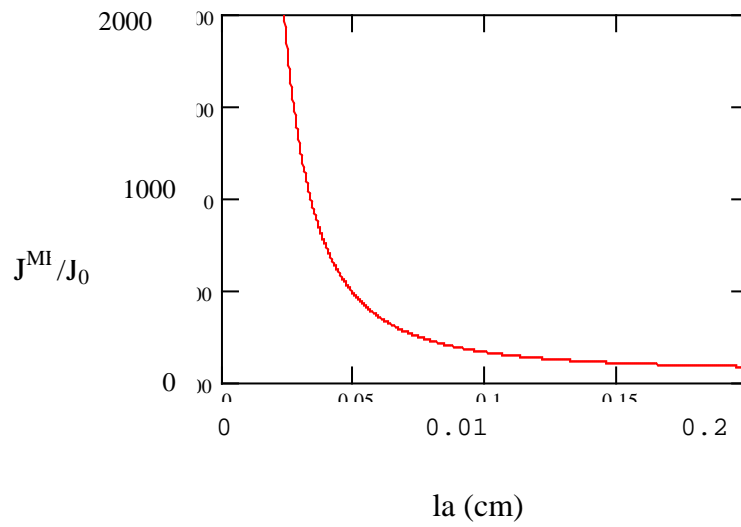
a) Cas où  $\beta = 0^\circ$



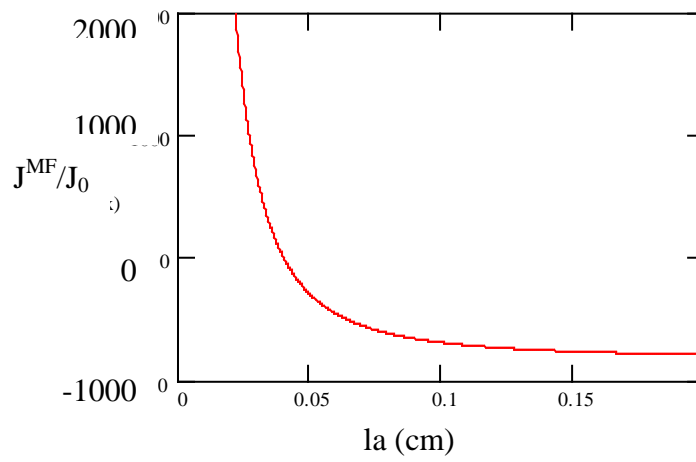
b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig. 4.4 Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la largeur de la zone microfissurée  $w$

(la fixe)



a) Cas où  $\beta = 0^\circ$



b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.5 Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la zone microfissurée  $la$  pour  $w$  fixe

**CHAPITRE III**

**FACTEURS D'INTENSITE  
DE  
CONTRAINTES**

### III-1) Introduction:

Les contraintes trouvées dans le chapitre précédent n'ont d'intérêt dans cette étude que si elles sont caractérisées par des facteurs d'intensité de contraintes qui sont considérés comme des paramètres essentiels pour l'étude de la résistance à la rupture des matériaux et par conséquent l'état de contrainte au voisinage du fond de fissure.

Dans l'analyse, la détermination de ces facteurs se fait selon les deux approches :

La première est une approche par l'utilisation des fonctions à variables complexes de MUSHKELISHVILI [33] et développé par SIH [31] et [34].

La deuxième approche se base sur les fonctions d'influences de GREEN [27] et [32]. D'autres méthodes analytiques et numériques ont été développées récemment [33] à [38].

Pour cette étude, on considère la deuxième approche avec les hypothèses suivantes :

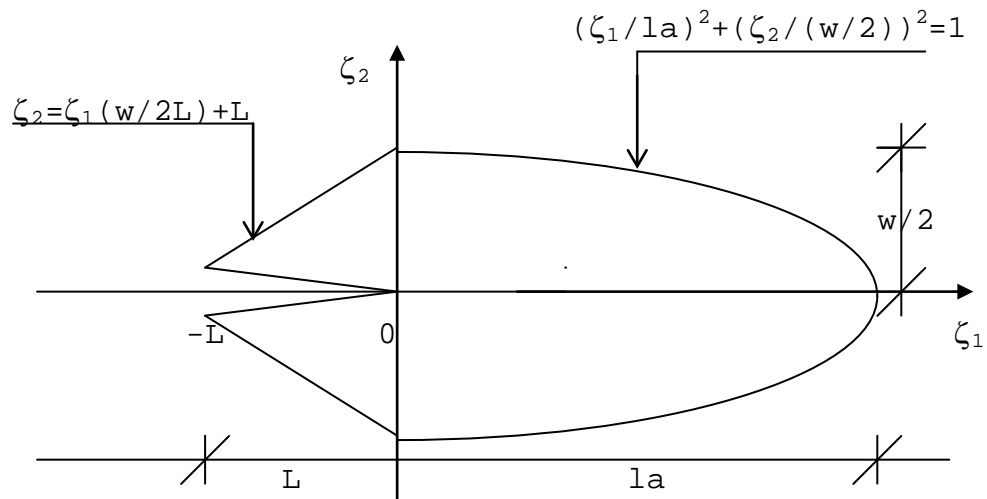
- Solide linéairement élastique,
- La zone microfissurée est limitée par une droite et une ellipse,
- La zone microfissurée est symétrique à la ligne de la fissure principale,
- Les dimensions de la zone microfissurée sont petites par rapport à celles de la fissure principale,
- Le mode I est le plus approprié
- Pour des raisons de simplicité, les équations obtenus sont élaborées sans dimensions.

**III-2) Détermination du facteur d'intensité de contrainte :**

La fonction donnant l'allure du facteur d'intensité de contraintes est déduite à partir de l'équation (2.12) sous la forme suivante :

$$\Delta k = \int_v \psi_{ij}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta)) dv \quad (3.1)$$

où, l'intégrale est prise sur toute la surface de la zone microfissurée et est représentée par une ellipse et une droite (voir Fig.3.1)



**Fig.3.1**  
**Schéma représentant les bornes limites des intégrales**

D'après le tableau 1 précédent, les fonctions de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\psi_{i,j}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta)) = [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2 + e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \quad (3.2)$$

Où , a, b, c, e, f sont des constantes dépendant directement de l'orientation de la microfissure  $\beta$  .

En substituant l'expression (3.2) dans celle donnée par (3.1) , on obtient :

$$\Delta K = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \{ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2 + e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \} d\zeta_1$$

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2-L}^{-L} \{ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2 + e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \} d\zeta_1$$

(3.3)

Sachant qu'on est dans un cas d'un solide linéairement élastique, on peut ainsi écrire l'expression (3.3) sous la forme suivante:

$$\Delta K = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \{ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \} d\zeta_1$$

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2-L}^{-L} \{ [e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \} d\zeta_1$$

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2-L}^{-L} \{ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \} d\zeta_1$$

(3.4)

Pour des raisons de simplification, l'expression (3.4) devient :

$$I_1 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (3.5.a)$$

$$I_2 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{[e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (3.5.b)$$

$$I_3 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (3.5.c)$$

$$I_4 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} \frac{[e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (3.5.d)$$

Où, les termes  $I_1(\zeta_2)$ ,  $I_2(\zeta_2)$ ,  $I_3(\zeta_2)$  et  $I_4(\zeta_2)$  sont donnés comme suit (voir démonstration et détails en annexe B):

$$I_1(\zeta_2) = A_1/\zeta_2 \arctg(la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}) + A_2(la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2})/(\zeta_2^2 + l^2 a\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}) + A_3\zeta_2^2 la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}/\zeta_2^2 + l^2 a\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2} - A_1/\zeta_2 \arctg(0.005//\zeta_2) - A_2 0.005/((0.005)^2 + \zeta_2^2) - A_3\zeta_2(0.005)/((0.005)^2)^2 \quad (3.6.a)$$

avec :

$$A_1 = 1/8(3a+3b+c)$$

$$A_2 = 1/8(-5a+3b+c)$$

$$A_3 = 1/4(a+b+c)$$

$$\begin{aligned} I_2(\zeta_2) = & -e/2.\zeta_2/(\zeta_2^2+l^2a(1-(2\zeta_2/w)^2) + e/2.\zeta_2/((0.005)^2+\zeta_2^2)) \\ & + (e-f)/4.\zeta_2^3/(\zeta_2^2+l^2a(1-(2\zeta_2/w)^2)) \\ & - (e-f)/4.\zeta_2^3/((0.005)^2+\zeta_2^2) \end{aligned} \quad (3.6.b)$$

$$\begin{aligned} I_3(\zeta_2) = & A_1/\zeta_2 \arctg(-L/\zeta_2) + A_2(-L)/(L^2+\zeta_2) + A_3(-L)\zeta_2^2/(L^2+\zeta_2^2)^2 \\ & - A_1/\zeta_2 \arctg((2L/w)\zeta_2-L)/\zeta_2 \\ & - A_2((2L/w)\zeta_2-L)/(\zeta_2^2+((2L/w)\zeta_2-L)^2) \\ & - A_3(\zeta_2^2((2L/w)\zeta_2-L)^2)/(\zeta_2^2+((2L/w)\zeta_2-L)^2)^2 \end{aligned} \quad (3.6.c)$$

$$\begin{aligned} I_4(\zeta_2) = & -e/2.\zeta_2/(L^2+\zeta_2^2) + (e-f)/4.\zeta_2^3/(L^2+\zeta_2^2)^2 \\ & + e/2.((2L/w)\zeta_2-L)^2+\zeta_2^2) \\ & + (e-f)/4.\zeta_2^3/\zeta_2^2+((2L/w)\zeta_2-L)^2)^2 \end{aligned} \quad (3.6.d)$$

L'expression du facteur d'intensité de contrainte prend finalement la forme globale suivante :

$$\begin{aligned} \Delta k = & \int_{0.005}^{w/2} \{ I_1(\zeta_2) + I_2(\zeta_2) + I_2(\zeta_2) + I_4(\zeta_2) \} d\zeta_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

Le facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K$  ainsi obtenu est étudié en tenant compte de l'orientation arbitraire de la microfissure  $\beta$  par rapport à la fissure principale et des paramètres ayant traits aux dimensions du spécimen fissuré (largeur (w) et longueur (la) de la zone microfissurée).

### III-3) Résultats et discussions :

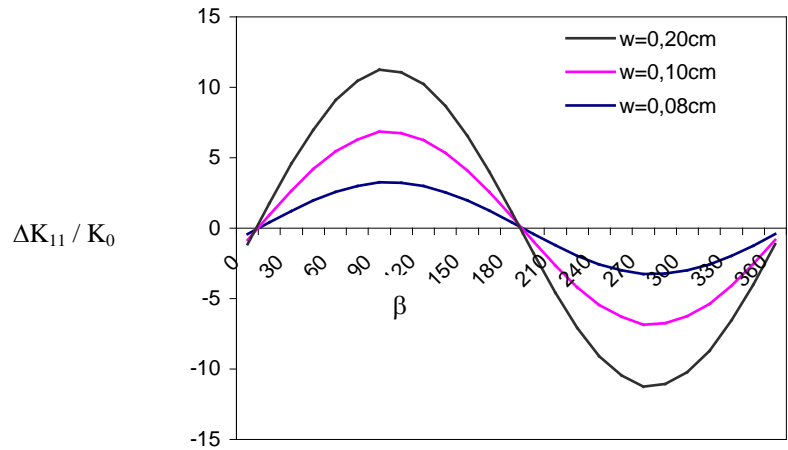
Les Fig.3.2 (a, b, c)), montrent les facteurs d'intensité de contrainte  $\Delta K_{ij}/K_0$  ( $i,j=1,2$ ) en fonction de l'orientation arbitraire ( $\beta$ ) et de la position des microfissures (( $la$ ) et ( $w$ )). Donc la zone microfissurée perturbe la propagation de la fissure principale soit en l'accélérant (valeur positive de  $\Delta K_{ij}/K_0$ ) ou soit en la retardant ( $\Delta K_{ij}/K_0$  négatif).

Les Fig.3.3.(a,b) donnent la variation du facteur d'intensité de contrainte pour les cas où la microfissure est parallèle ( $\beta=0^0$ ) et perpendiculaire ( $\beta=90^0$ ) à la fissure principale, et ce en fonction de la largeur " $w$ " et la longueur " $la$ " de la zone microfissurée. Ces courbes ascendantes montrent, l'existence d'une zone perturbée pouvant favoriser la propagation de la fissure initiale.

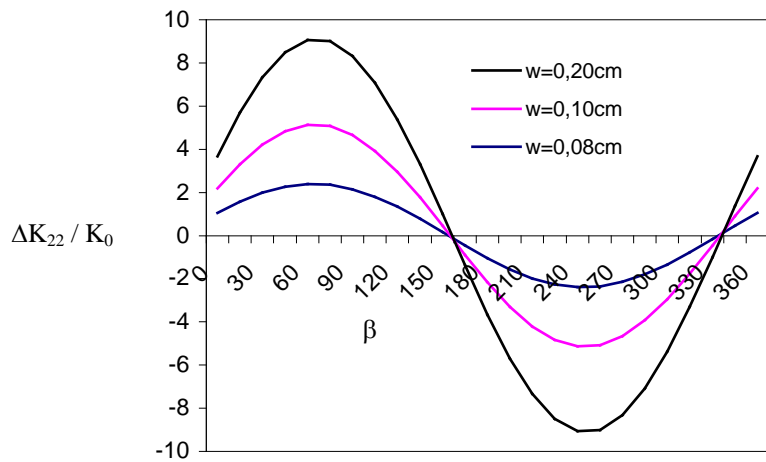
La Fig.3.4(a) montre que pour le cas où la microfissure est parallèle à la fissure principale ( $\beta=0^0$ ), le facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_{22}/K_0$  augmente proportionnellement avec " $la$ ". Par contre dans la Fig.3.4(b), cas où la microfissure est perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=90^0$ ), le facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K_{22}/K_0$  diminue d'une façon drastique jusqu'à annulation. Donc, en fixant la largeur de la zone microfissurée " $w$ ", tout en faisant varier la longueur de cette dernière progressivement, le facteur d'intensité de contraintes  $\Delta K_{22}/K_0$  augmente pour une microfissure parallèle à la fissure principale ( $\beta=0^0$ ), ceci favorise la propagation de la fissure et pour une microfissure perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=90^0$ ), la propagation est retardée.

Dans la Fig.3.5(a), on constate que pour le cas où la microfissure est parallèle à la fissure principale ( $\beta=0^0$ ), et lorsque "w" s'annule (absence de la zone endommagée) , le facteur d'intensité de contrainte approche celui obtenu par Griffith ( $\Delta K_{22} = K_0$  ). La Fig.3.5(b),montre le cas où la microfissure est perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=90^0$ ). Alors on constate que lorsque la largeur de la zone des microfissures "w" augmente, tout en fixant la longueur de cette dernière "la" et pour une microfissure parallèle à la fissure principale ( $\beta=0^0$ ), l'effet de réduction est prédominant par contre lorsque les microfissures sont perpendiculaires à la fissure principale ( $\beta=90^0$ ),  $\Delta K_{22}/K_0$  augmente c'est l'effet d'amplification qui prend le dessus.

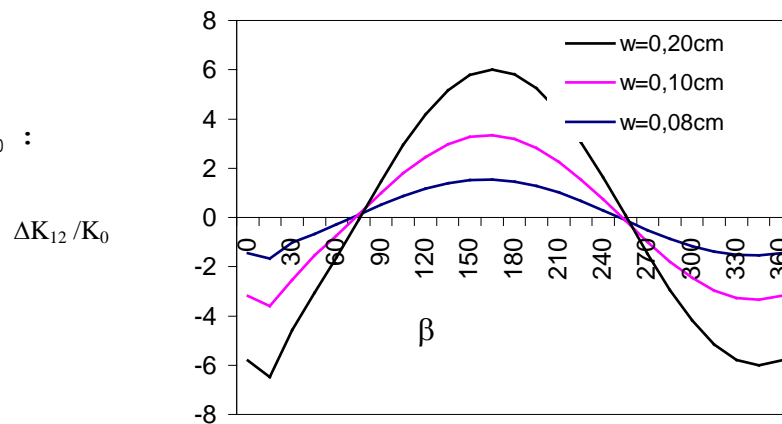
a) Cas de  $\Delta K_{11} / K_0$  :



b) Cas de  $\Delta K_{22} / K_0$  :

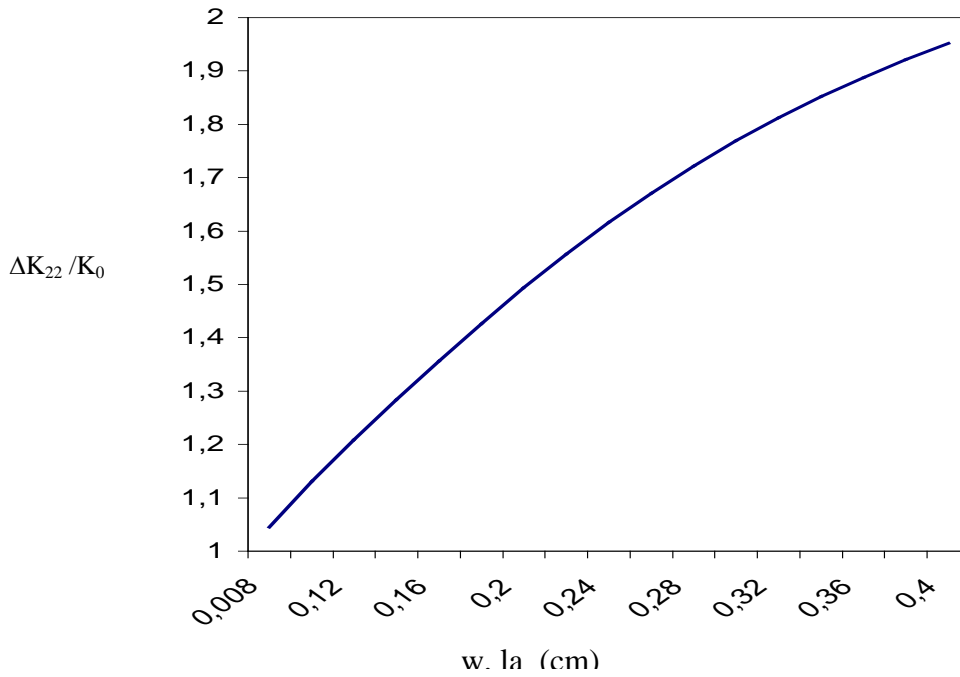


c) Cas de  $\Delta K_{12} / K_0$  :



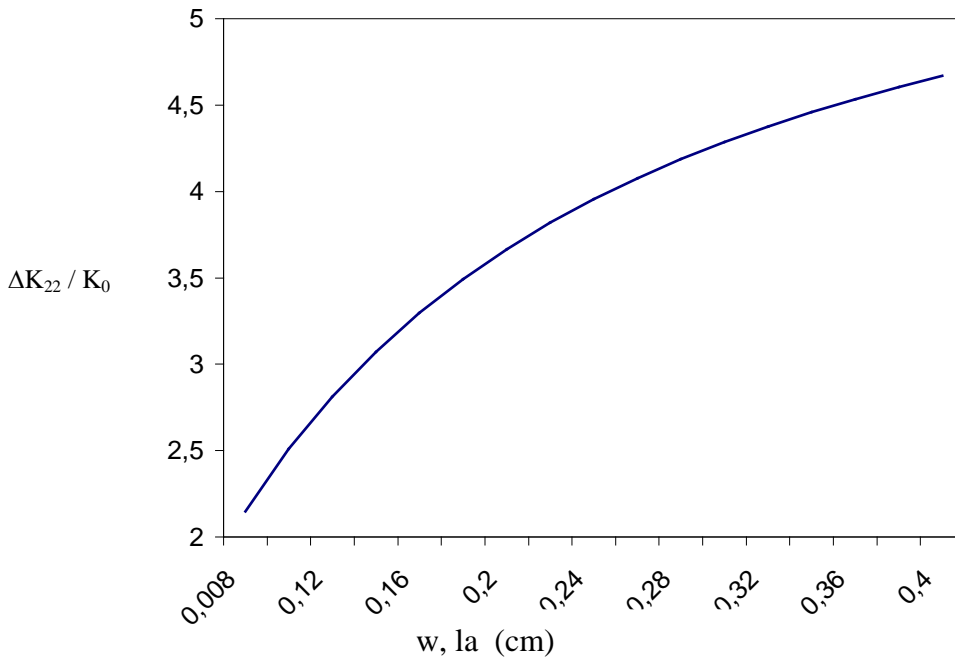
**Fig.3.2** :Variation du facteur d'intensité de contrainte en fonction de l'orientation arbitraire de la microfissure( $\beta$ )





**a)** Cas où  $\beta = 0^\circ$

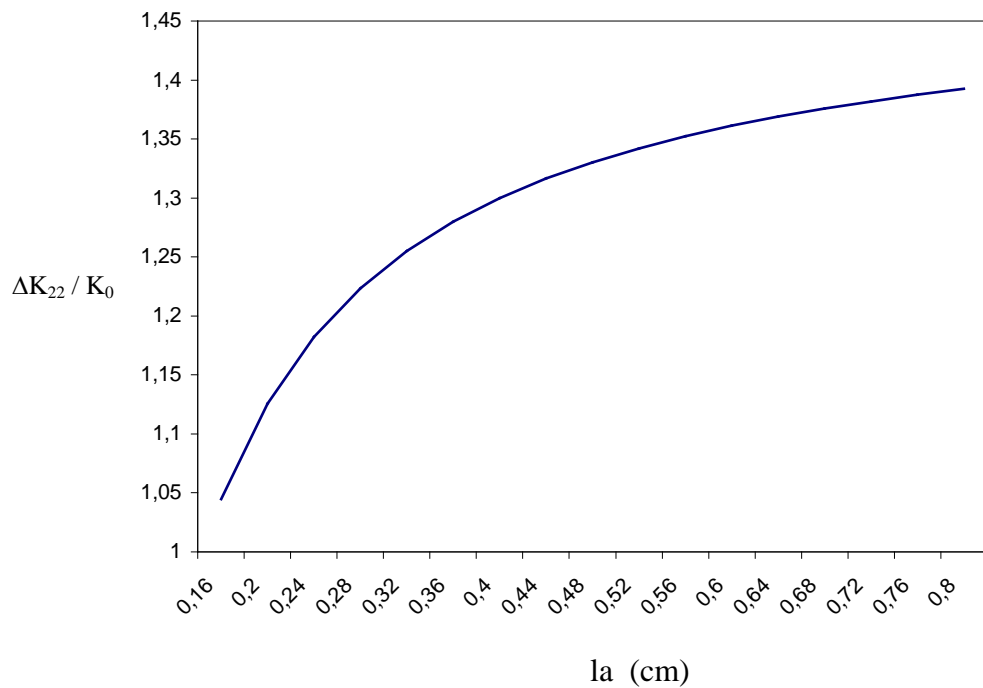
microfissure parallèle à la fissure principale.



**b)** Cas où  $\beta = 90^\circ$

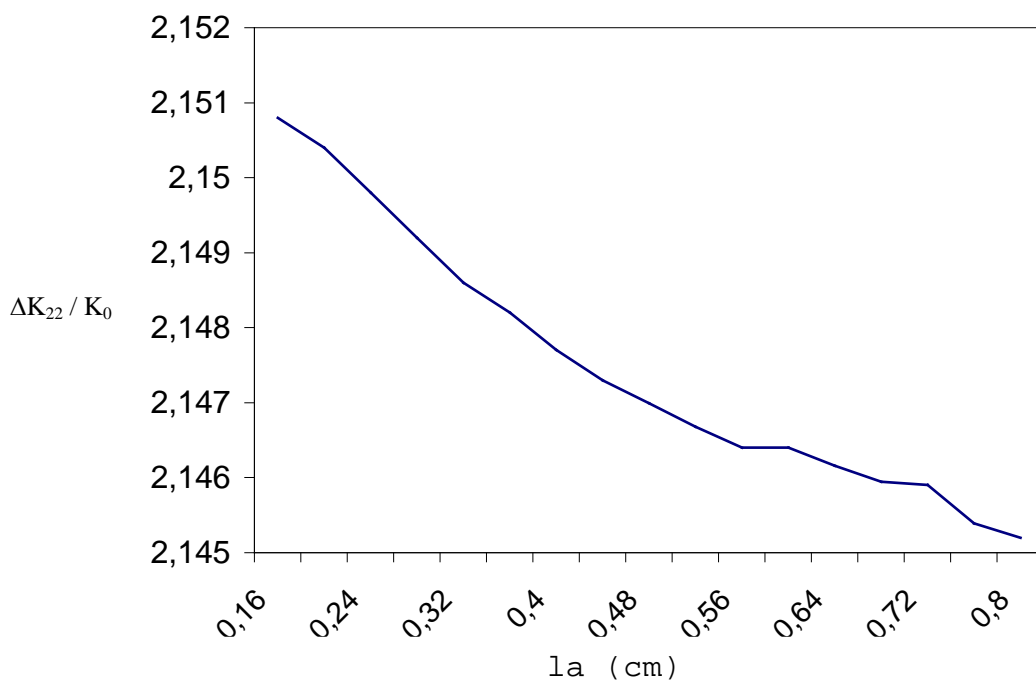
microfissure perpendiculaire à la fissure principale.

**Fig.3.3** :Variation du facteur d'intensité de contrainte  $\Delta K_{22} / K_0$  pour le cas où (la) et (w) variables.



**a)** Cas où  $\beta = 0^\circ$

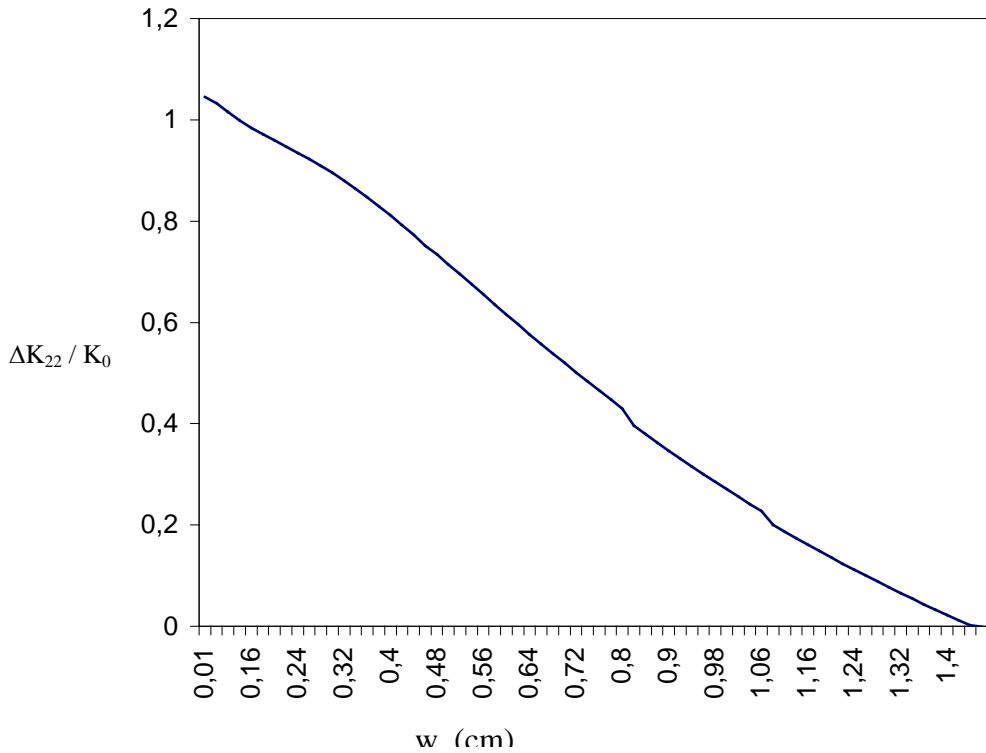
microfissure parallèle à la fissure principale.



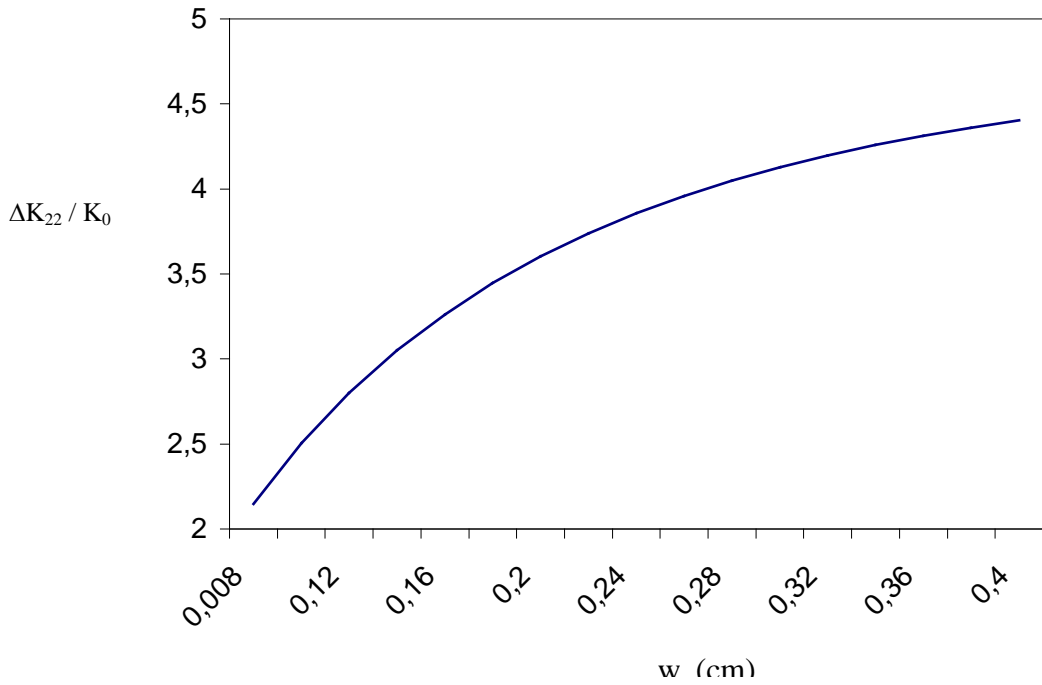
**b)** Cas où  $\beta = 90^\circ$

microfissure perpendiculaire à la fissure principale.

**Fig.3.4** :Variation du facteur d'intensités de contraintes  $\Delta K_{22} / K_0$  pour le cas où  $(l_a)$  est variable et  $(w)$  est fixe.



**a)** Cas où  $\beta = 0^\circ$   
microfissure parallèle à la fissure principale.



**b)** Cas où  $\beta = 90^\circ$   
microfissure perpendiculaire à la fissure principale.

**Fig.3.5** :Variation du facteur d'intensités de contraintes  $\Delta K_{22} / K_0$  pour le cas où (w)est variable et (la) est fixe.

#### III-4) Conclusion:

Dans ce chapitre, on a montré que l'aspect géométrique tel l'orientation et la position de la microfissure par rapport à la fissure initiale peut avoir un effet influant sur la propagation de la fissure. Ceci peut se manifester, soit par une intensification du champs de contraintes entraînant ainsi une accélération de la propagation, soit par une diminution de ces champs pouvant retarder cette propagation.

Pour ce fait, on peut en déduire qu'à partir d'une certaine orientation de la microfissure par rapport à la fissure principale ainsi que de sa position, l'effet  $\Delta K/K_0$  retarde ou accélère la propagation de la fissure.



**CHAPITRE IV**  
**EVALUATION  
DES  
TAUX D'ENERGIE DE RESTITUTION**

#### **IV-1) Introduction :**

Depuis les travaux de Griffith dans les années 1920, l'analyse du phénomène de rupture a fait de nombreux progrès. Irwin [9] a ouvert la voie à l'application des solutions élastiques et a fourni ainsi la théorie mathématique de la rupture fragile. Au point de vue énergétique, les analyses de Griffith [8] et Irwin [9] ont montré que si l'on néglige l'énergie cinétique, le bilan de l'énergie  $W_e = E_e + W_f$ , où  $E$  est l'énergie élastique,  $W_f$  énergie dépensée par fissuration, conduit à la définition du taux de restitution de l'énergie  $G$ . L'intégrale  $J$ , due à Rice [30], permet d'obtenir une expression indépendante du contour choisi notée  $G$ .

La rupture est un phénomène consommateur d'énergie. Cette dernière est selon Griffith, la différence entre l'état énergétique des atomes avant et après fissuration. L'origine physique de l'énergie de rupture n'est pas clairement établie mais on admet que le phénomène de rupture dissipe de l'énergie. De nombreuses généralisations [1], [2], [39] et [40] de la notion de restitution de l'énergie ont été proposées, mais elles n'apportent pas de réponses entièrement satisfaisantes. Parmi les résultats intéressants, on cite les travaux de Rice [30].

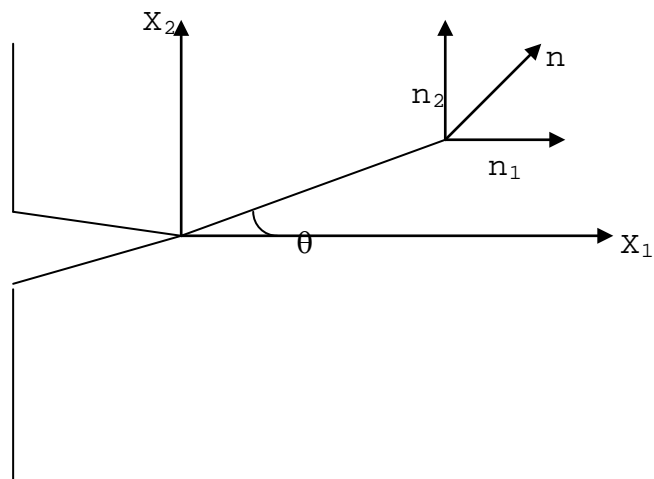
Le taux d'énergie de restitution est défini comme étant l'énergie libérée lors de la propagation de la fissure. C'est une mesure précise du champ de contraintes au front de la fissure. C'est donc, une caractéristique essentielle de l'augmentation ou la réduction du taux d'énergie de restitution de la fissure. Plusieurs chercheurs [30] à [32] et [41] à [43] utilisent le principe de l'intégrale de Rice  $J$  pour l'étude de l'évolution de la fissure.

#### IV-2) Détermination des taux d'énergie de restitution :

L'intégrale J de Rice est définie comme suit [30] ;

$$J = \int_{\Gamma} [fn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}] d\Gamma \quad (4.1)$$

où,  $\Gamma$  est le contour fermé englobant la fissure principale et la zone d'endommagement (Fig.4.1),  $f$  est la densité d'énergie de déformation,  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy,  $u_{i,1}$  est le tenseur de déformation (dans la direction de l'ouverture de la fissure principale) et  $n_1$  est la normale extérieure au contour  $\Gamma$ .



**Fig.4.1 Contour de GRIFFITH**

L'énergie de déformation est donnée pour un état de contrainte plane par la formule suivante ;

$$f = (1/2) \sigma_{ij} \varepsilon_{ij} \quad (4.2)$$

où, le tenseur de déformations  $\varepsilon_{ij}$  est définie comme suit :

$$\varepsilon_{ij} = (1/E) [(1+\nu) \sigma_{ij} - \nu \delta_{ij} \sigma_{nn}] ; \quad i, j = 1, 2 \quad (4.3)$$

En substituant l'équation (4.3) dans (4.2), on obtient l'expression suivante:

$$f = (1/2E) [(1+\nu) \sigma_{ij}^2 - \nu \delta_{ij} \sigma_{ij} \sigma_{nn}] \quad (4.4)$$

Le tenseur de contraintes  $\sigma_{ij}$  dû à l'interaction entre une fissure et des microfissures avoisinantes est donc la superposition de deux champs de contraintes ;

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^F + \sigma_{ij}^{MF} \quad (4.5)$$

où,  $\sigma_{ij}^F$  et  $\sigma_{ij}^{MF}$  sont les champs de contraintes générés par la fissure principale en absence de microfissures et en présence de ces derniers, respectivement .

Ces champs sont donnés par ce qui suit :

$$\sigma_{ij} = K_I^{eff} \cdot F(\theta) / \sqrt{2\pi r(x)} \quad (4.6)$$

$$\text{et, } \sigma_{ij} = I_x \int_{-1}^1 b_i(\zeta) \phi_{ij}(\zeta, x) d\zeta \quad (4.7)$$

La substitution de (4.5) dans l'expression (4.4) donne :

$$F = (1/2E)[(1+\nu)^2(\sigma_{ij}^F) - \nu\delta_{ij}\sigma_{ij}^F\sigma_{nn}^F + (1+\nu)^2\sigma_{ij}^{MF} - \delta_{ij}\sigma_{ij}^{MF}\sigma_{nn} + 2(1+\nu)\sigma_{ij}^F\sigma_{ij}^{MF} - \nu\delta_{ij}\sigma_{ij}^F\sigma_{nn}^{MF} - \nu\delta_{ij}\sigma_{ij}^{MF}\sigma_{nn}^F] \quad (4.8)$$

En d'autres termes, on a ;

$$f = f_F + f^{MF} + f_F^{MF} \quad (4.9)$$

où,  $f_F$ ,  $f^{MF}$  et  $f_F^{MF}$  sont l'énergie de déformation due à la fissure principale, à la microfissure et à l'interaction entre fissure et microfissure, respectivement. Ces énergies s'expriment comme suit :

$$f_F = 1/2E \{ (\sigma_{11}^F)^2 + (\sigma_{22}^F)^2 - 2\nu\sigma_{11}^F\sigma_{22}^F + 2(1+\nu)(\sigma_{12}^F)^2 \} \quad (4.9.a)$$

$$f^{MF} = 1/2E \{ (\sigma_{11}^{MF})^2 + (\sigma_{22}^{MF})^2 - 2\nu\sigma_{11}^{MF}\sigma_{22}^{MF} + 2(1+\nu)(\sigma_{12}^{MF})^2 \} \quad (4.9.b)$$

$$f_F^{MF} = 1/E \{ \sigma_{11}^F\sigma_{11}^{MF} + \sigma_{22}^F\sigma_{22}^{MF} - \nu(\sigma_{11}^F\sigma_{22}^{MF} + \sigma_{22}^F\sigma_{11}^{MF}) + (1+\nu)\sigma_{12}^F\sigma_{12}^{MF} \} \quad (4.9.c)$$

En utilisant le principe de superposition, on obtient le champ de déplacements  $u(x)$  sous la forme suivante ;

$$U_i = U_i^F + U_i^{MF} \quad (4.10)$$

où,  $U_i^F$  est le champ de déplacements généré par la fissure principale et  $U_i^{MF}$  est le champ de déplacements généré par la présence d'une microfissure (zone d'endommagement). Ces champs ont été dérivés en utilisant les relations précédentes pour les cas suivants :

Pour la fissure en absence de microfissures ; on a :

$$U_i^F = (K_I^{eff}/2E) \sqrt{r(x)/2\pi} \cdot \phi(x) \quad (4.11)$$

Pour la zone fissurée, on obtient ;

$$U_i^{MF} = \int_{-l}^l b_i(\zeta) \cdot \phi(\zeta, x) d\zeta \quad (4.12)$$

La substitution des équations (4.5) et (4.10) dans l'équation (4.1) donne la relation suivante ;

$$\sigma_{ij} n_j u_{i,1} = (\sigma_{ij}^F + \sigma_{ij}^{MF}) (u_{i,1}^F + u_{i,1}^{MF}) n_j \quad (4.13)$$

En développant l'équation (4.13), on en déduit ;

$$\sigma_{ij} n_j u_{i,1} = \sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^F + \sigma_{ij}^{MF} u_{i,1}^{MF} n_j + \sigma_{ij}^F u_{i,1}^{MF} n_j + \sigma_{ij}^{MF} u_{i,1}^F n_j \quad (4.14)$$

Puisque l'ouverture se fait suivant  $x_2$ , la normale  $n_2$  est prise égale à 0. Pour chaque terme de l'expression (4.14), on obtient :

- le terme correspondant à la fissure principale :

$$\sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^F = \sigma_{11}^F n_1 u_{1,1}^F + \sigma_{12}^F u_{2,1}^F n_1 \quad (4.14.a)$$

- le terme correspondant à la zone d'endommagement :

$$\sigma_{ij}^{MF} n_j u_{i,1}^{MF} = \sigma_{11}^{MF} u_{1,1}^{MF} n_1 + \sigma_{12}^{MF} u_{2,1}^{MF} n_1 \quad (4.14.b)$$

- le terme correspondant à l'interaction entre fissure et microfissure :

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^{MF} + \sigma_{ij}^{MF} n_j u_{i,1}^F = & \sigma_{11}^F n_1 u_{1,1}^{MF} + \sigma_{12}^F n_1 u_{2,1}^{MF} + \sigma_{11}^{MF} n_1 u_{1,1}^F \\ & + \sigma_{12}^{MF} n_1 u_{2,1}^F \end{aligned} \quad (4.14.c)$$

En substituant les expressions (4.9) et (4.14) dans l'expression (4.1), on obtient d'une façon globale:

$$J = \int_{\Gamma} [(f_F n_1 - \sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^F)] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(f^{MF} n_1 - \sigma_{ij}^{MF} n_j u_{i,1}^{MF})] d\Gamma + \int_{\Gamma} [(f_F^{MF} n_1 - \sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^{MF} - \sigma_{ij}^{MF} n_j u_{i,1}^F)] d\Gamma \quad (4.15)$$

En séparant chaque terme de l'équation (4.15), pour les cas sus-cités, on en déduit :

$$J_F = \int_{\Gamma} [f_F n_1 - \sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^F] d\Gamma \quad (4.16.a)$$

$$J^{MF} = \int_{\Gamma} [f^{MF} n_1 - \sigma_{ij}^{MF} n_j u_{i,1}^{MF}] d\Gamma \quad (4.16.b)$$

$$J_F^{MF} = \int_{\Gamma} [f_F^{MF} n_1 - \sigma_{ij}^F n_j u_{i,1}^{MF} - \sigma_{ij}^{MF} n_j u_{i,1}^F] d\Gamma \quad (4.16.c)$$

où,  $J_F$  est l'énergie de restitution due à la fissure principale,  $J^{MF}$  est l'énergie de restitution due à la microfissure et  $J_F^{MF}$  est l'énergie de restitution due à l'interaction entre fissure et microfissures avoisinantes.

#### **Energie de restitution $J_F$ :**

Cette énergie est due à la présence de la fissure principale en l'absence de la zone microfissurée. Celle-ci peut être assimilée à l'énergie donnée par Griffith sous la forme suivante ;

$$J_F = G = K_0^2 / E \quad (4.17)$$

où ;  $k_0 = \sigma \sqrt{\pi l}$  et  $l$  est la longueur de la fissure principale.

On remarque que l'énergie  $J_F$  due à la fissure principale est indépendante du contour  $\Gamma$ . Cette énergie dépend uniquement de la longueur de la fissure  $L$ .

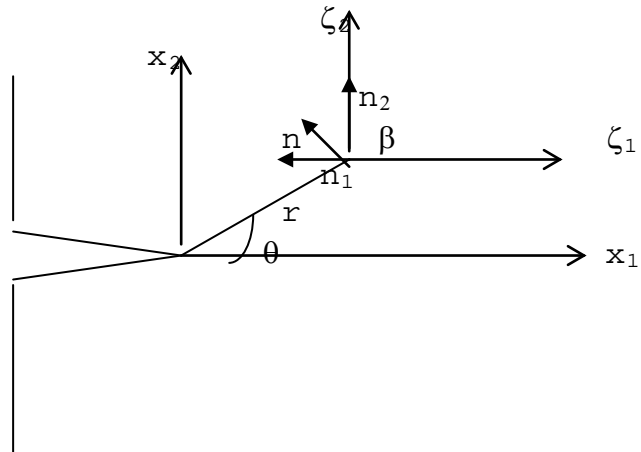
**.Energies de restitution  $J^{MF}$  et  $J_F^{MF}$  :**

Les champs de déplacements dûs à la présence de microfissure sont considérés comme étant des fonctions d'influence de GREEN.

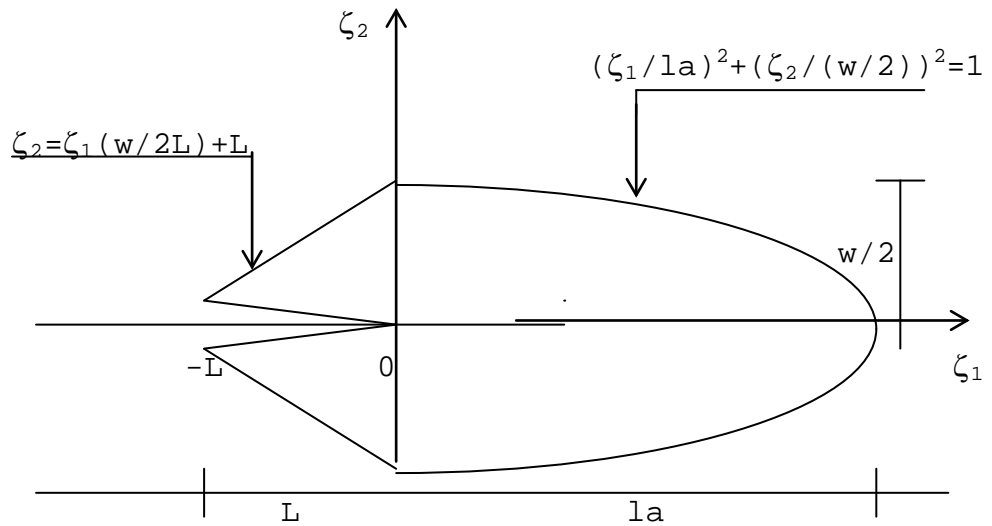
L'intégrale des énergies  $J^{MF}$  et  $J_F^{MF}$  est déterminée pour le cas où :

- le contour d'intégration est un cercle ( Fig.4.2.(a)).
- le contour d'intégration est une ellipse (se référer à la Fig.4.2.(b)).

a) Cas d'un cercle



b) Cas d'une ellipse



**Fig.4.2**  
Schéma représentant les bornes des intégrales

Suivant les différentes orientations de la microfissure  $\beta$ , on a pu tracer les courbes de  $J^{MF}$  et  $J_F^{MF}$  en fonction de la largeur  $w$  et la longueur  $L$  de la microfissure.

### IV-3) Résultats et discussion :

Fig.4.3 (a et b) : Variation de l'énergie  $J^{MF}$  due à la microfissure en fonction de la longueur de la fissure pour une microfissure parallèle et perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=0^\circ$  et  $\beta=90^\circ$ ), respectivement. Pour ces deux cas, le contour choisi est d'abord un cercle. Pour le cas où la microfissure, est parallèle à la fissure principale, on constate que l'énergie libérée étant complètement positive, ce qui favorise l'ouverture de la fissure principale, . Dans le cas où la microfissure est perpendiculaire à la fissure principale  $\beta=90^\circ$ , l'énergie diminue d'une façon drastique ce qui retarde l'ouverture ainsi que la propagation de la fissure principale.

Fig.4.4 (a et b) : Variation de l'énergie  $J^{MF}$  due à la microfissure en fonction de la largeur de la microfissure  $w$  tout en fixant la longueur de la zone microfissurée ( $l_a$ ) et ce pour une microfissure parallèle et perpendiculaire à la fissure principale (respectivement  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ ). Dans ces deux cas, le contour choisi est une ellipse. On remarque alors que la présence de la microfissure provoque une diminution de l'énergie ce qui par conséquent retarde l'ouverture de la fissure principale et la propagation de cette dernière.

Fig.4.5 ( a et b) : Variation de l'énergie  $J^{MF}$  due à la microfissure en fonction de la longueur de la microfissure ( $l_a$ ) tout en fixant la largeur de la microfissure ( $w$ ) et ce pour une microfissure parallèle et perpendiculaire à la fissure principale (respectivement  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ ). Dans ces deux cas le contour choisi étant le même que précédemment (Fig.4.4 (a et b)).

Dans le cas où la microfissure est parallèle à la fissure principale ( $\beta=0^\circ$ ), l'énergie libérée est prédominante au voisinage de la fissure principale. Donc l'ouverture ainsi que la propagation de la fissure principale est en voie d'être accélérée. Par contre dans le cas où la microfissure est perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=90^\circ$ ), l'énergie provoquée diminue d'une façon drastique ce qui retarde l'ouverture et la propagation de la fissure principale.

Fig.4.6 (a et b) : Variation de l'énergie  $J^{MF}$  due à la microfissure en fonction de la largeur  $w$  et la longueur  $la$  de la zone microfissurée. Dans les deux cas où la microfissure est parallèle et perpendiculaire à la fissure principale (respectivement  $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ ), on remarque que la microfissure provoque une diminution d'énergie qui retarde par voie de conséquence la propagation de la fissure.

Fig.4.7 (a et b) : Variation de l'énergie  $J_F^{MF}$  due à l'interaction de la zone microfissurée en fonction de la longueur de la fissure et ce pour des microfissures parallèles et perpendiculaires à la fissure, respectivement, ( $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ ). Le contour choisi est un cercle. Dans ce cas, la microfissure développe une énergie négative au voisinage de la fissure principale, par conséquent retarde la propagation de la fissure principale.

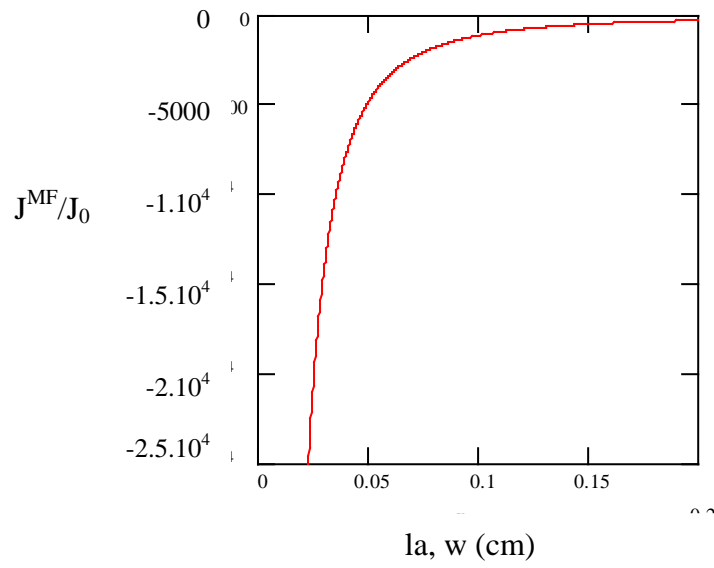
Fig.4.8 (a et b) : Variation de l'énergie  $J_F^{MF}$  due à l'interaction de la zone microfissurée en fonction de la largeur de la microfissure  $w$  tout en fixant la longueur de la cette dernière  $la$ . Le contour choisi est une ellipse. Pour une microfissure parallèle à la fissure principale ( $\beta=0$ ), la microfissure provoque une énergie positive au voisinage de la fissure principale, puis diminue tout en s'éloignant de cette dernière. Dans le cas où la microfissure est perpendiculaire

à la fissure principale  $\beta=90^\circ$ , l'énergie augmente d'une façon exponentielle ce qui favorise l'ouverture de la fissure principale.

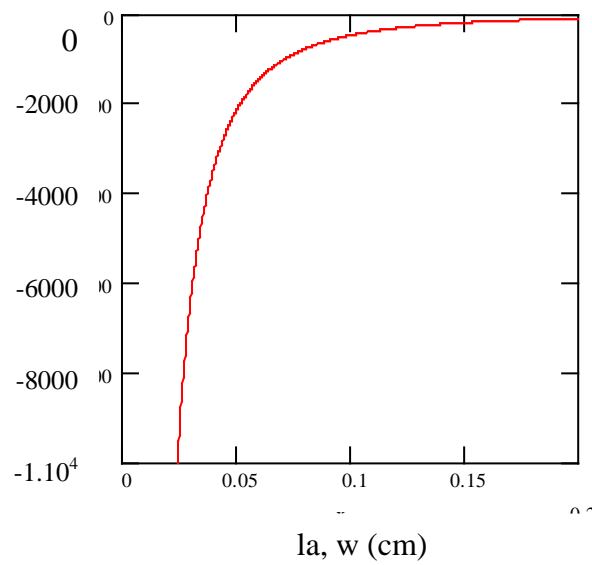
Fig.4.9 (a et b) : Variation de l'énergie  $J_F^{MF}$  due à l'interaction de la zone microfissurée en fonction de la longueur de la microfissure ( $l_a$ ) tout en fixant la largeur de la microfissure ( $w$ ). Le contour choisi est une ellipse. Dans le cas où la microfissure est parallèle à la fissure principale ( $\beta=0$ ), l'énergie libérée au voisinage de la fissure principale augmente d'une façon drastique, ce qui évidemment accélère la propagation de la fissure principale.

Dans le cas où la microfissure est perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=90^\circ$ ) l'énergie diminue d'où un retardement dans la propagation.

Fig.4.10 ( a et b) : Variation de l'énergie  $J_F^{MF}$  due à l'interaction de la zone microfissurée en fonction de la largeur de la microfissure ( $w$ ) et la longueur ( $l_a$ ) de la zone microfissurée. Le contour choisi est une ellipse. Dans les deux cas, (la microfissure est considérée d'abord parallèle puis perpendiculaire à la fissure principale ( $\beta=0$  et  $\beta=90^\circ$ )). L'énergie libérée étant essentiellement importante ce qui favorise l'ouverture de la fissure principale et par conséquent une accélération de la propagation de cette dernière.

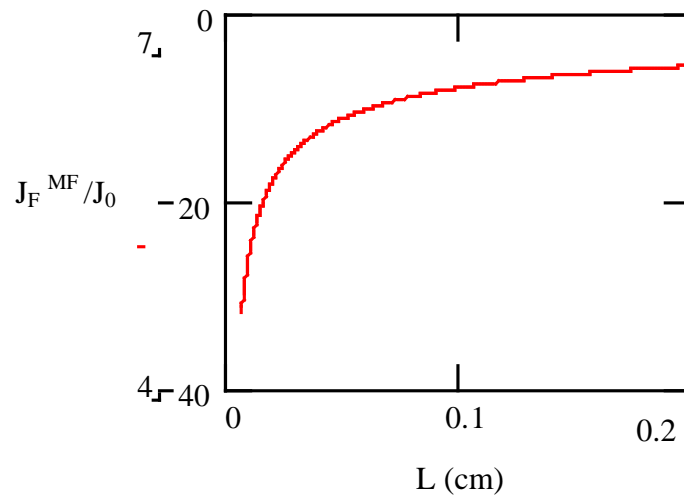


a) Cas où  $\beta = 0^\circ$

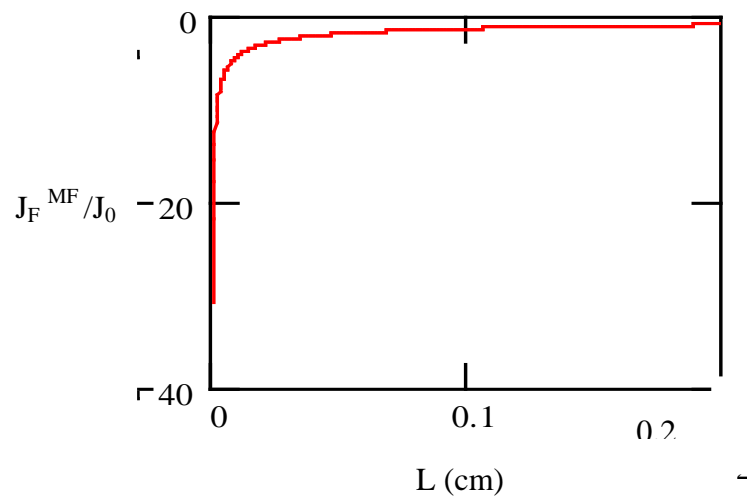


b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.6 Variation de l'énergie  $J^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur  $la$  et de la largeur  $w$  de la zone microfissurée

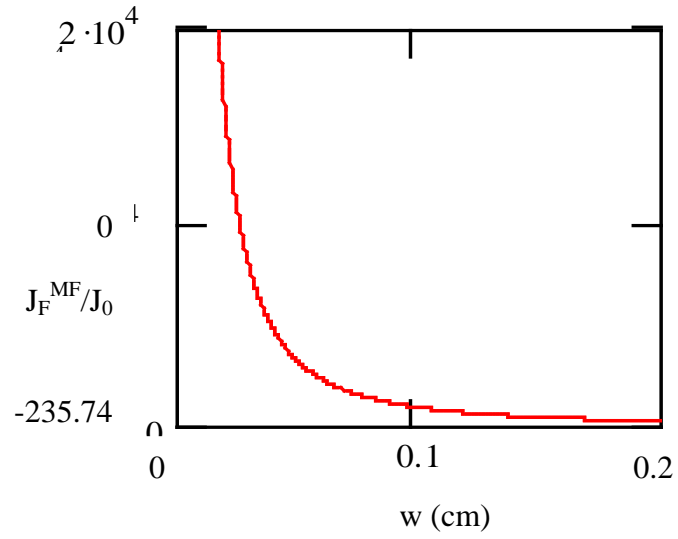


Cas où  $\beta = 0^\circ$

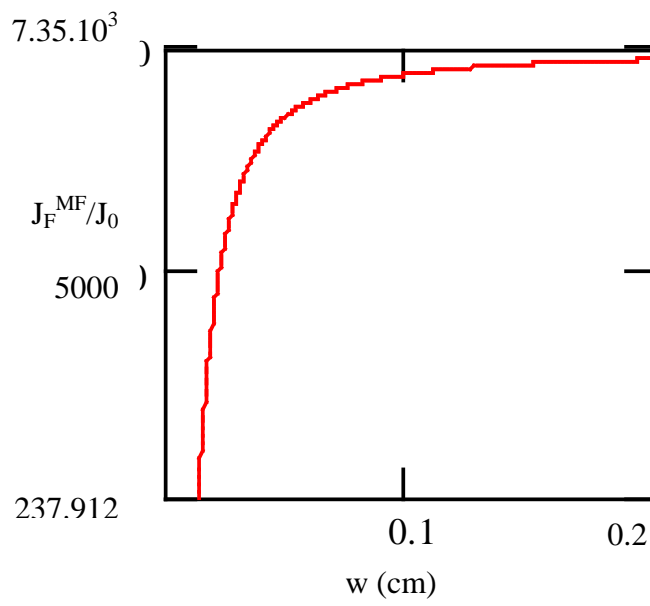


b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.7 Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la longueur de la fissure



a) Cas où  $\beta = 0^\circ$



b) Cas où  $\beta = 90^\circ$

Fig.4.8 Variation de l'énergie  $J_F^{MF}/J_0$  en fonction de la largeur de la zone microfissurée  $w$  (la fixe)

**CHAPITRE V**

**CONCLUSION GENERALE  
et  
RECOMMANDATIONS**

## V-1) CONCLUSION GENERALE :

Lorsqu'on soumet un spécimen fissuré comme montré sur la Fig.5.1, un chargement uniforme à l'infini, une forte concentration de contraintes se produit au voisinage de l'entaille provoquant ainsi une zone composée de microfissures. L'utilisation de la photoélasticimétrie nous a permis de repérer cette zone perturbée (voir photo 5.1), et le microscope à balayage détecte l'état cristallographe de la structure après perturbation (voir photo 5.2).

Ceci a amené bon nombre de chercheurs à penser que l'existence de cette zone peut d'une façon générale avoir un effet important sur la propagation ou non de la fissure principale.

L'objectif principal de notre recherche est la détermination des champs de contraintes pouvant être générés lors de l'interaction entre la fissure principale préexistante et les microfissures avoisinantes.

La méthode de calcul utilisée est une approche semi-empirique (l'ouverture de la microfissure est une donnée expérimentale et la surface occupée par les microfissures est très petite par rapport à la fissure principale), basée sur les fonctions d'influence de GREEN.

Cette méthode a contribué à trouver des résultats assez fiables en comparaison avec ceux d'autres chercheurs (voir tableau 4).

Ce procédé a été choisi pour les raisons suivantes :

- La simplicité de calcul des différents champs de contraintes.
- Possibilité de généralisation pour plusieurs microfissures.

- Prise arbitraire de l'orientation et de la position des microfissures par rapport à la fissure principale.
- Possibilité du choix du contour limitant la zone microfissurée (cercle, ellipse, etc...).

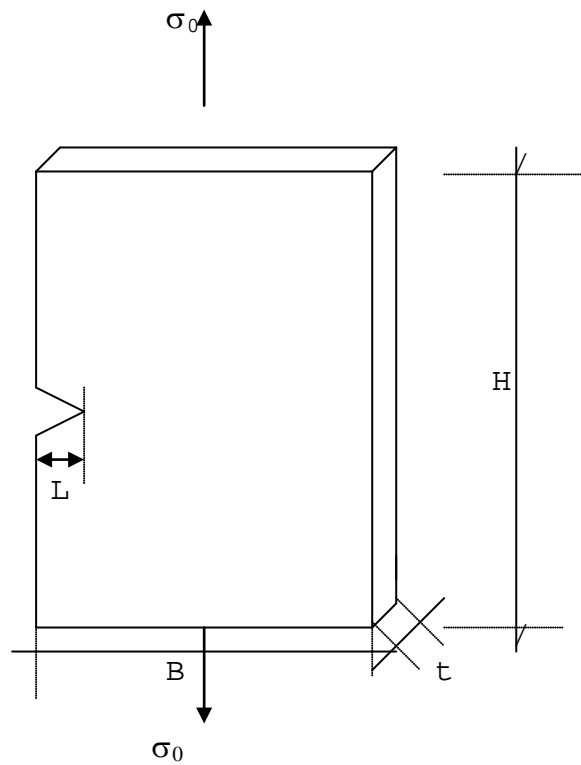
On a constaté que l'existence de la zone microfissurée influence grandement la propagation de la fissure principale. Ce phénomène s'est manifesté soit par un effet d'amplification (propagation assez rapide de la fissure principale), soit par un effet de réduction (propagation assez lente de cette dernière). Ceci nous a amené à dire que les microfissures jouent un rôle assez conséquent dans le processus de la propagation de la fissure .

On a montré que l'étude des fonctions d'influence tout en tenant compte de l'orientation arbitraire de la microfissure par rapport à la fissure principale a permis d'élucider le phénomène d'amplification et de réduction, et ceci à travers les facteurs d'intensité de contraintes et surtout l'évaluation des différents taux d'énergie de restitution à plusieurs étapes.

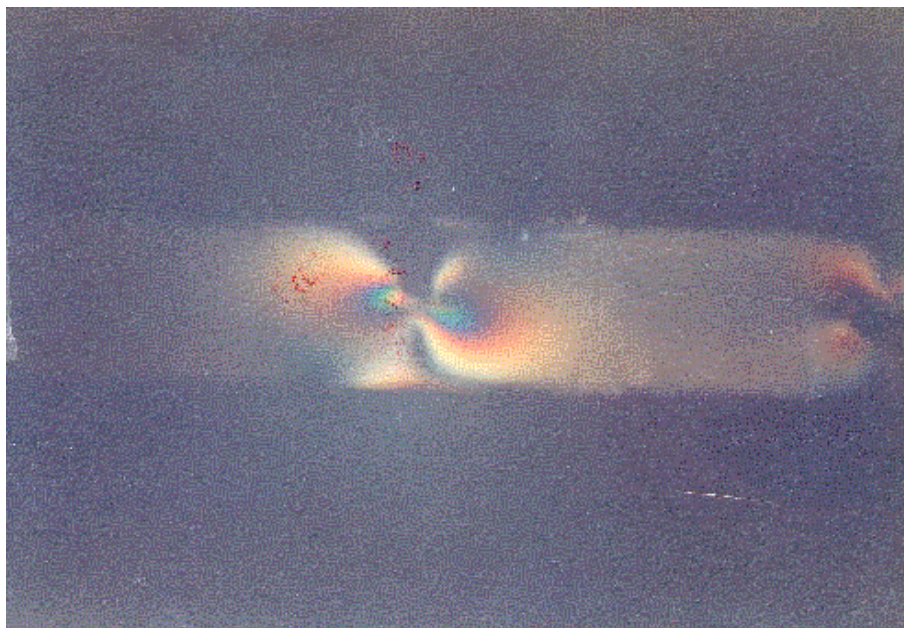
On guise de conclusion, on a constaté que lorsque :

- La zone perturbée augmente, les microfissures quelles que soit leurs orientations par rapport à la fissure principale favorisent l'ouverture et la propagation de fissure initiale.
- La largeur de la zone microfissurée augmente et que sa longueur est maintenue fixe, une microfissure parallèle à la fissure principale provoque un effet de réduction par contre une microfissure perpendiculaire induit un effet d'amplification

- La longueur d'endommagement augmente et sa largeur est constante, c'est l'effet inverse qui se produit.



**Fig.5.1 : Specimen chargé.**



**Photo 5.1 : Champ de contrainte au voisinage de l'entaille.**

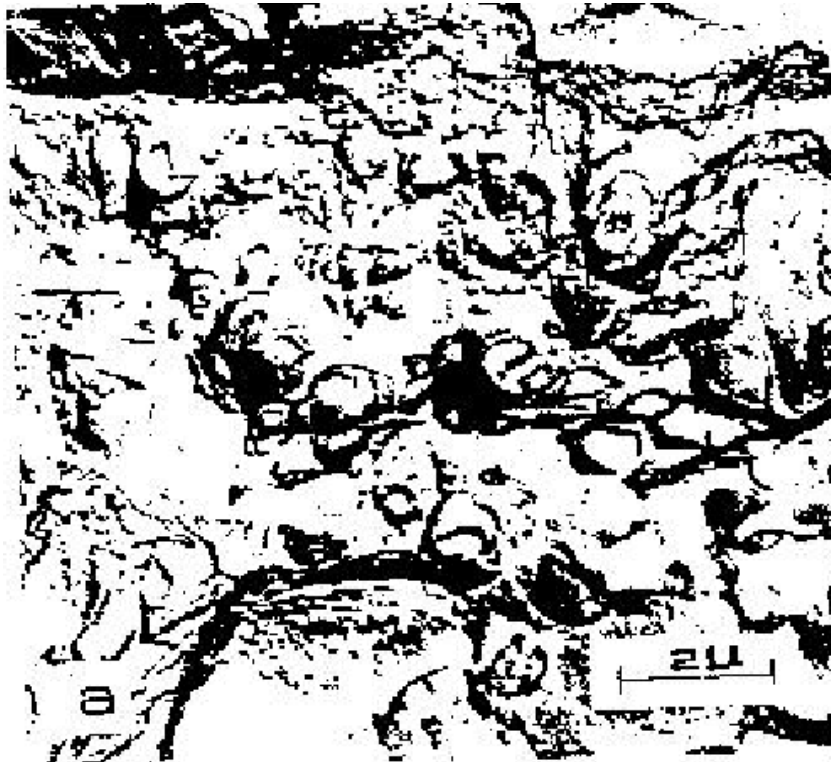


Photo 5.2: Coalescence des pores sous traction pure [4].

**Tableau 4 : Résultats des différents chercheurs.**

Auteurs	Orientation de la microfissure par rapport à la fissure principale ( $\beta$ )	Amplification (-)	Réduction (-)
BALLARINI [44]	$\beta = 0^\circ$	$<70^\circ$	$70^\circ < \theta < 135^\circ$
L.R.F.ROSE [19]	$\beta = 0^\circ$	$<70^\circ$	$70^\circ < \theta < 125^\circ$
A.CHUDNOVSKY S.WU [28]	$\beta = 0^\circ$	$<68^\circ$	$68^\circ < \theta < 155^\circ$
Y.LAM, B.COTTERELL [45]	$\beta = 0^\circ$	$<51^\circ$	$51^\circ < \theta < 124^\circ$
S.GONG H.HORII [46]	$\beta = 0^\circ$	$<75^\circ$	$75^\circ < \theta < 155^\circ$
A.CHUDNOVSKY M.CHABAAT [47]	$\beta = 0^\circ$	$<69^\circ$	$69^\circ < \theta < 138^\circ$
	$\beta = 90^\circ$	$<36^\circ$	$36^\circ < \theta < 138^\circ$
M.CHABAAT H.HADJAB [31]	$\beta = 0^\circ$	$<67^\circ$	$67^\circ < \theta < 142^\circ$
	$\beta = 90^\circ$	$<37^\circ$	$37^\circ < \theta < 108^\circ$
M.CHABAAT S.DJOUDER [32]	$\beta = 0^\circ$	$<55^\circ$	$55^\circ < \theta < 138^\circ$
	$\beta = 90^\circ$	$<25^\circ$	$25^\circ < \theta < 90^\circ$

## V-2 Recommandations :

Les microfissures sont considérées comme un mécanisme qui modifie la résistance mécanique des matériaux fragiles, leurs étude est fastidieuse, par conséquent notre travail de recherche est basé sur une Approche Semi Empirique dont le vecteur de densité est considéré comme une donnée expérimentale.

La méthode utilisée dans cette étude a abouti à des résultats probants et est destinée principalement au :

- Matériau où la propagation de fissures est accompagnée par la formation d'une zone d'endommagement où les microfissures sont orientées arbitrairement et positionnées non loin de la fissures principales. Donc, cette approche prend en considération que les paramètres orientations et positionnements de microfissures à l'intérieur de la zone. Néanmoins, d'autres facteurs influents ont été négligés pour la simple raison que ces phénomènes font l'objet d'une autre recherche. Parmi ces paramètres, on citera :
- Densité de la zone perturbée ;
- Effets de température ;
- Formes des fissures ;
- Facteur temps, etc... ;

Pour cela, il faut :

- Prendre en considération les autres paramètres tels : la fissure, les dimensions ainsi que les caractéristiques intrinsèques de la zone perturbée pouvant jouer un rôle important dans la caractérisation de la durabilité des matériaux hétérogènes.

- Introduire ces paramètres pour pouvoir développer un modèle constructif et rationnel élucidant d'une façon claire le comportement des matériaux hétérogènes.
- Analyse expérimentale de la zone endommagée par l'utilisation d'émission acoustique et surtout par la visu d'un microscope électronique à haute résolution.

## RESUME

Ce travail traite de l'interaction entre une fissure principale et une zone de micro fissures avoisinantes. La distribution des champs de contraintes générée au bout de la fissure principale lors de l'interaction a été déterminée en utilisant une Approche Semi-Empirique (ASE). Le phénomène d'amplification et de réduction (effet d'écran) de ces champs de contraintes a été élucidé à partir d'une étude du facteur d'intensité de contraintes en mode I caractérisant ainsi les contraintes au niveau de la fissure initiale.

Le taux de restitution d'énergie a été évalué sur la base de la superposition des différentes énergies : énergie de restitution due à la fissure principale, énergie de restitution due à la microfissure, énergie de restitution due à l'interaction entre fissure principale et microfissure. L'étude met en évidence l'influence de l'orientation arbitraire et de la configuration de la microfissure par rapport à la fissure principale.

L'utilisation d'un procédé expérimentale tel la photoélasticimétrie a permis de visualiser d'une façon globale les isocontraintes au front de la fissure principale.

Les résultats présentés ont été discutés et comparés à ceux d'autres chercheurs.

## ABSTRACT

In this work, interaction between a main crack and a surrounding layer of microcracks is considered. A stress field distribution induced during this interaction has been obtained using a Semi-Empirical Approach (SEA). The effect of amplification and shielding on the resulting stress field is shown, herein, through a study of mode I stress intensity factor. The total energy release rate has been evaluated on the basis of the following energies : energy release rate due to the main crack, energy release rate due to the microcrack and energy release rate due to the interaction between a main crack and a microcrack.

An experimental analysis of stress based on photoelasticity approach is used herein in order to visualise the isostress around the main crack.

The obtained results are discussed and agreed with those obtained by other researchers.

**ANNEXE**

**A**

**Fonctions d'influence :**

Le facteur d'intensité de contrainte est formulé comme suit [ ]:

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-L}^{+L} \sqrt{\frac{L+\zeta}{L-\zeta}} \sigma(\zeta) d\zeta \quad (1)$$

Le champ de contrainte est donné par:

$$\sigma_{ij}(u) = \mu [ u_{i,j} + u_{j,i} ] + \lambda U_{k,k} \delta_{ij} \quad (2)$$

La contrainte agissant suivant l'axe y (i = 2) est :

$$\sigma_{2j}(u) = \mu [ u_{2,j} + u_{j,2} ] + \lambda U_{2,k} \quad (3)$$

Le champ de déplacement est donné par:

$$u_i(x) = \int_{\Omega} c(\zeta) \cdot \phi_{ij}(\zeta, x, n(\zeta)) d\Omega \quad (4)$$

$$u_{2,i}(x) = \int_{\Omega} c(\zeta) \cdot \phi_{2i,i}(\zeta, x, n(\zeta)) d\Omega \quad (5)$$

$$u_{2,j}(x) = \int_{\Omega} c(\zeta) \cdot \phi_{2i,j}(\zeta, x, n(\zeta)) d\Omega \quad (6)$$

$$u_{2,k}(x) = \int_{\Omega} c(\zeta) \cdot \phi_{2i,k}(\zeta, x, n(\zeta)) d\Omega \quad (7)$$

La substitution de (5), (6), (7) dans l'équation (3) donne:

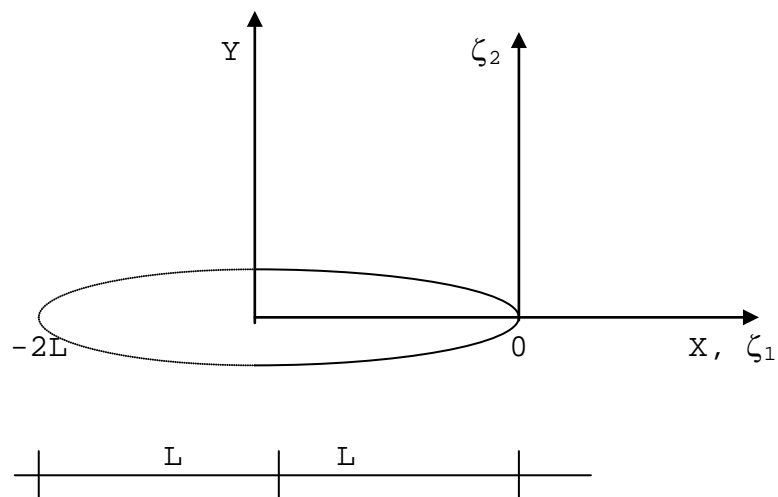
$$\sigma_{2j}(u) = \int_{\Gamma} \left\{ \mu [ \phi_{2i,j}(x, \zeta, n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(x, \zeta, n(\zeta)) ] + \lambda \phi_{2k,k}(x, \zeta, n(\zeta)) \delta_{ij} \right\} c(\zeta) d\Gamma$$

$$\Gamma \quad (8)$$

La substitution de l'équation (8) dans l'équation (1) donne ce qui suit:

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{L+x}{L-x}} dx \int_{\Gamma} \left\{ \mu [\phi_{2i,j}(x,\zeta,n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(x,\zeta,n(\zeta))] + \lambda \phi_{2k,k}(x,\zeta,n(\zeta)) \delta_{i,j} \right\} c(\zeta) d\Gamma \quad (9)$$

La translation des axes donne Fig.A.1:



**Fig.A.1**

$$X_1 = X - l \Rightarrow X = X_1 + l \quad (10)$$

En remplaçant l'expression (10) dans l'équation (9) on obtient:

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-2l}^0 \sqrt{\frac{2L+\zeta_1}{-\zeta_1}} d\zeta_1 \int_{\Omega} \left\{ \mu [\phi_{2i,j}(\zeta,x,n(\zeta)) + \phi_{2j,i}(\zeta,x,n(\zeta))] + \lambda \phi_{2k,k}(\zeta,x,n(\zeta)) \delta_{i,j} \right\} c(\zeta) d\Omega$$

$$\lambda \phi_{2k,k}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) \delta_{i,j} \} C(\zeta) d\Omega \quad (11)$$

et où :  $C(\zeta) = K_T \rho_0 b_0 \phi_{YY}[\theta(\zeta)] / E \sqrt{2\pi} r(\mathbf{x})$  (12)

cas où :  $i=j=2, k=1, 2$  (la contrainte agit suivant Y) (13)

La substitution de l'équation (12) et l'équation (13) dans l'équation (11) donne :

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} K_T \int_{-2l}^0 \sqrt{2L+x_1} / -x_1 \cdot dx_1 \int_{\Omega} \{ (\lambda+2\mu) [\phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))] + \lambda \phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) \} \rho_0 b_0 \phi_{YY}[\theta(\zeta)] / E \sqrt{2\pi} r(\mathbf{x}) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (14.1)$$

cas où :  $i = j = 1, k = 1, 2$

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} K_T \int_{-2l}^0 \sqrt{2L+x_1} / -x_1 \cdot dx_1 \int_{\Omega} \{ (\lambda+2\mu) \phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \lambda \phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) \} \rho_0 b_0 \phi_{YY}[\theta(\zeta)] / E \sqrt{2\pi} r(\mathbf{x}) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (14.2)$$

cas où :  $i = 1, j = 2, k = 1, 2$  donne :

$$\Delta K = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} K_T \int_{-2l}^0 \sqrt{2L+x_1} / -x_1 \cdot dx_1 \int_{\Omega} \{ \mu (\phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))) \} \rho_0 b_0 \phi_{YY}[\theta(\zeta)] / E \sqrt{2\pi} r(\mathbf{x}) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (14.3)$$

Pour chaque équation (14.1), (14.2), (14.3), on prendra une partie de l'intégrale qu'on dénote  $H(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))$ , on aura alors :

$$\begin{aligned}
& \text{la } \Gamma(\mathbf{x}_1) \\
(14.1) \text{ donne : } H(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) &= \int_{-2L}^{-\Gamma(\mathbf{x}_1)} d\zeta_1 \int \left\{ (2\mu + \lambda) (\phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \lambda \phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))) \right\} \\
& \frac{K_{\text{TOT}} b_0 \rho_0 \varphi_{yy} [\text{tg}^{-1} \zeta_2 / \zeta_1] / E \sqrt{2\pi} \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \cdot d\zeta_2}{\Gamma(\mathbf{x}_1)}
\end{aligned} \tag{15.1}$$

$$\begin{aligned}
& \text{la } \Gamma(\mathbf{x}_1) \\
(14.2) \text{ donne : } H(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) &= \int_{-2L}^{-\Gamma(\mathbf{x}_1)} d\zeta_1 \int \left\{ (2\mu + \lambda) (\phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \lambda \phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))) \right\} \\
& \frac{K_{\text{TOT}} b_0 \rho_0 \varphi_{yy} [\text{tg}^{-1} \zeta_2 / \zeta_1] / E \sqrt{2\pi} \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \cdot d\zeta_2}{\Gamma(\mathbf{x}_1)}
\end{aligned} \tag{15.2}$$

$$\begin{aligned}
& \text{la } \Gamma(\mathbf{x}_1) \\
(14.3) \text{ donne : } H(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) &= \int_{-2L}^{-\Gamma(\mathbf{x}_1)} d\zeta_1 \int [\mu (\phi_{21,1}(\mathbf{x}, \zeta, n(\zeta)) + \phi_{22,1}(\mathbf{x}, \zeta, n(\zeta))) \\
& \frac{K_{\text{TOT}} b_0 \rho_0 \varphi_{yy} [\text{tg}^{-1} \zeta_2 / \zeta_1] / E \sqrt{2\pi} \sqrt{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \cdot d\zeta_2}{\Gamma(\mathbf{x}_1)}
\end{aligned} \tag{15.3}$$

Prenons une deuxième fois une partie des intégrales des équations (15.1), (15.2), (15.3), qu'on va dénoter  $\psi_{11}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))$  on aura donc:

$$(15.1) \text{ donne : } \psi_{11}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = (2\mu + \lambda) \phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \lambda \phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) \tag{16.1}$$

$$(15.2) \text{ donne : } \psi_{11}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = (2\mu + \lambda) \phi_{21,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \lambda \phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) \tag{16.2}$$

$$(15.3) \text{ donne : } \psi_{12}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = \mu (\phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \phi_{22,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))) \tag{16.3}$$

Avec  $\mu, \lambda$  constantes de LAME.

En fonction du coefficient de POISSON  $\nu$  et le module de YOUNG  $E$ ,  $\mu$  et  $\lambda$  auront les expressions suivantes:

$$\lambda = \nu E / (1+\nu)(1-2\nu) \quad (17)$$

$$\mu = E / 2 (1+\nu) \quad (18)$$

La substitution des expressions (17), (18) dans les équations (16.1), (16.2), (16.3) donne:

$$(1/E)\psi_{22}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = [1/(1+\nu)(1-2\nu)] [\nu\phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + (1-\nu)\phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))]$$

$$(1/E)\psi_{11}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = [1/(1+\nu)(1-2\nu)] [\nu\phi_{22,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + (1-\nu)\phi_{21,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))]$$

$$(1/E)\psi_{12}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = [1/2(1+\nu)] [\phi_{21,2}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) + \phi_{22,1}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta))]$$

### Composantes du tenseur de Green :

$$R = \zeta - \mathbf{x} \quad (19)$$

$$R^2 = (\zeta_1 - x_1)^2 + (\zeta_2 - x_2)^2$$

$$\begin{aligned} \phi_{21}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = (1+\nu) \{ & [(1-\nu)/(1+\nu)] [n_2 R_1 - R_2 n_1 - (n_1 R_1 + n_2 R_2)] \\ & - 2(n_1 R_1 + n_2 R_2) / R^2 \cdot R_1 R_2 \} / 4\pi R^2 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\phi_{22}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = (1+\nu) \{ [(1-\nu)/(1+\nu)] (n_1 R_1 + n_2 R_2) - 2(n_1 R_1 + n_2 R_2) / R^2 \cdot R_2^2 \} / 4\pi R^2$$

(21)

On prend  $x_1 = x_2 = 0$  alors on obtient (front de la fissure):

$$R = \zeta$$

$$R^2 = R_1^2 + R_2^2 = \zeta_1^2 + \zeta_2^2$$

$$\begin{aligned} \phi_{21}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = & -(1+\nu) \left\{ \left[ \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] \left[ n_2 \zeta_1 - n_1 \zeta_2 \right] - 2n_1 \left( \frac{\zeta_1^2 \zeta_2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \right) \right. \\ & \left. - 2n_2 \frac{\zeta_1 \zeta_2^2}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \right\} / 4\pi [\zeta_1^2 + \zeta_2^2] \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \phi_{22}(\zeta, \mathbf{x}, n(\zeta)) = & -(1+\nu) \left\{ \left[ \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] \left[ n_1 \zeta_1 + n_2 \zeta_2 \right] + 2n_1 \left( \frac{\zeta_2^2 \zeta_1}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \right) \right. \\ & \left. + 2n_2 \frac{\zeta_2^3}{\zeta_1^2 + \zeta_2^2} \right\} / 4\pi [\zeta_1^2 + \zeta_2^2] \end{aligned} \quad (23)$$

Leurs dérivées sont telles suit:

$$\begin{aligned} \phi_{21,1}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2)) = & (1+\nu) \left\{ \left[ \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] \left[ n_2 (\zeta_1^4 - \zeta_2^4) - 2n_1 (\zeta_1^3 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2^3) \right] \right. \\ & \left. - 4n_1 (\zeta_1^3 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2^3) + 2n_2 (\zeta_2^4 - 3n_2 \zeta_1^2 \zeta_2^2) \right\} / 4\pi (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} \phi_{21,2}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2)) = & (1+\nu) \left\{ \left[ \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] (2n_2 \zeta_1^3 \zeta_2 + 2n_2 \zeta_1 \zeta_2^3 + n_1 \zeta_1^4 - n_1 \zeta_2^4) + 4n_2 \zeta_2 \zeta_1^3 - \right. \\ & \left. 4n_2 \zeta_2^3 \zeta_1 \right\} + 2n_1 \zeta_1^4 + 6n_1 \zeta_1^2 \zeta_2^2 \} / 4\pi (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} \phi_{22,1}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2)) = & (1+\nu) \left\{ \left[ \frac{(1-\nu)}{(1+\nu)} \right] (-2n_2 \zeta_1^3 \zeta_2 - 2n_2 \zeta_4 \zeta_2^3 + n_1 \zeta_1^4 + n_1 \zeta_2^4) - \right. \\ & \left. 8n_2 \zeta_1 \zeta_2^3 \right. \\ & \left. + 2n_1 \zeta_2^4 - 6n_1 \zeta_1^2 \zeta_2^2 \right\} / 4\pi (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\phi_{22,2}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta_1, \zeta_2)) = (1+\nu) \{ [(1-\nu)/(1+\nu)] [n_2 \zeta_1^4 - n_2 \zeta_2^4 - 2n_1 \zeta_1^3 \zeta_2 - 2n_1 \zeta_1 \zeta_2^3] + 4n_1 \zeta_1^3 \zeta_2 - 4n_1 \zeta_1 \zeta_2^3 - 2n_2 \zeta_2^4 + 6n_2 \zeta_1^2 \zeta_2^2 \eta_1 \} / 4\pi(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \quad (27)$$

Les Fonctions d'influence sont données sans dimensions comme ce qui suit :

$$\psi_{11}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) = 1 / (1+\nu)(1+\nu) [(1-\nu)\phi_{21,1}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) + \nu\phi_{22,2}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2)] \quad (28)$$

$$\psi_{22}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) = [(1-\nu)\phi_{22,2}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) + \nu\phi_{21,1}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2)] / (1+\nu)(1-2\nu) \quad (29)$$

$$\psi_{12}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) = (\phi_{21,2}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) + \phi_{22,1}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2)) / 2(1+\nu) \quad (30)$$

La substitution des expressions (24) à (27) dans les expressions (28) à (30) donne :

$$\psi_{22}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) = \{ [(1-\nu)(1+\nu)] [n_2(\zeta_1^4 - \zeta_2^4) - 2n_1(\zeta_1^3 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2^3)] - 2(1-2\nu)n_2(\zeta_2^4 - 3\zeta_1^2 \zeta_2^2) + 4(1-2\nu)n_1(\zeta_1^3 \zeta_2 - \zeta_1 \zeta_2^3) \} / (\zeta_2^2 + \zeta_1^2)^3 (1-2\nu) \quad (31)$$

$$\psi_{11}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) = \{ [(1-\nu)(1+\nu)] [n_2(\zeta_1^4 - \zeta_2^4) - 2n_1(\zeta_1^3 \zeta_2 + \zeta_1 \zeta_2^3)] + 2n_2(1-2\nu)(\zeta_2^4 - 3\zeta_1^2 \zeta_2^2) - 4n_1(1-2\nu)(\zeta_1^3 \zeta_2 - \zeta_1 \zeta_2^3) \} / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 (1-2\nu) \quad (32)$$

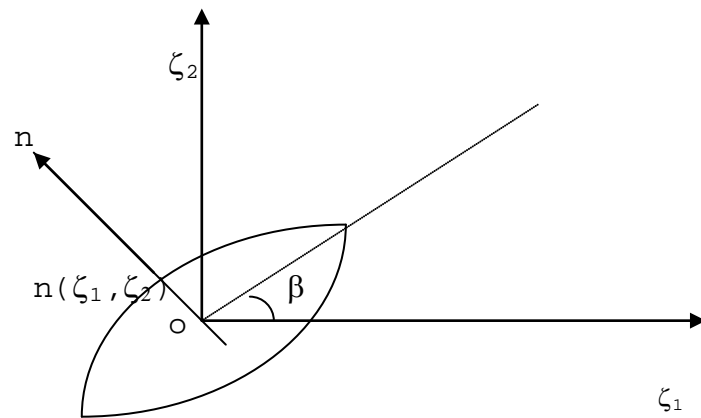
$$\psi_{12}(\zeta_1, \zeta_2, n\zeta_1, \zeta_2) = \{ 2n_2 \zeta_1^3 \zeta_2 - 6n_2 \zeta_2^3 \zeta_1 + n_1 \zeta_1^4 + n_1 \zeta_2^4 - 6n_1 \zeta_1^2 \zeta_2^2 \} / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \quad (33)$$

Où le vecteur normal  $n(\zeta_1, \zeta_2)$  de la microfissure est donné suivant la Fig.B.1 par la formule suivante :

$$n_1(\zeta_1, \zeta_2) = \cos(\beta + \pi/2)$$

$$n_2(\zeta_1, \zeta_2) = \sin(\beta + \pi/2)$$

Avec  $\beta$  est l'angle que forme la microfissure par rapport à la fissure principale.



**Fig.B.2**

**ANNEXE**

**B**

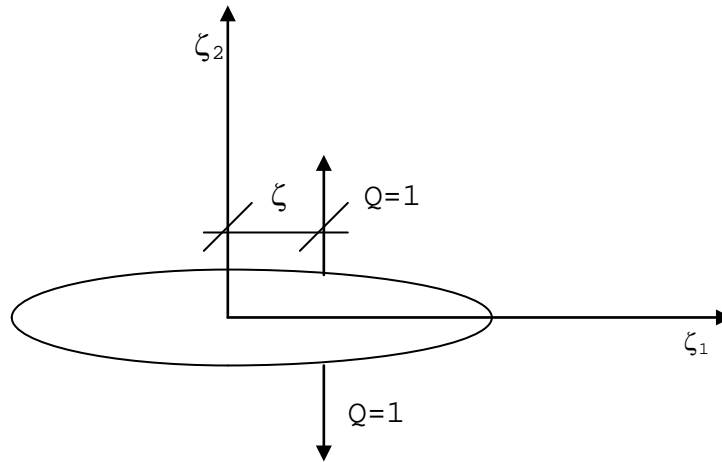
**1) Calcul du facteur d'intensité  $k_0$  :**

La méthode utilisée est celle de la fonction de GREEN.

Considérons une fissure centrale, la contrainte est donnée comme suit:

$$\sigma(x) = G(x, \zeta) Q(\zeta) \quad (1)$$

Où  $G(x, \zeta)$  est la fonction de GREEN et  $Q(\zeta)$  est l'effort appliqué à la fissure et situé à une distance  $\zeta$  comme indiqué sur la fig.B.1.



**Fig.B.1**

$$\sigma(x) = (K_I / \sqrt{\pi r}) \varphi(\theta) \quad (2)$$

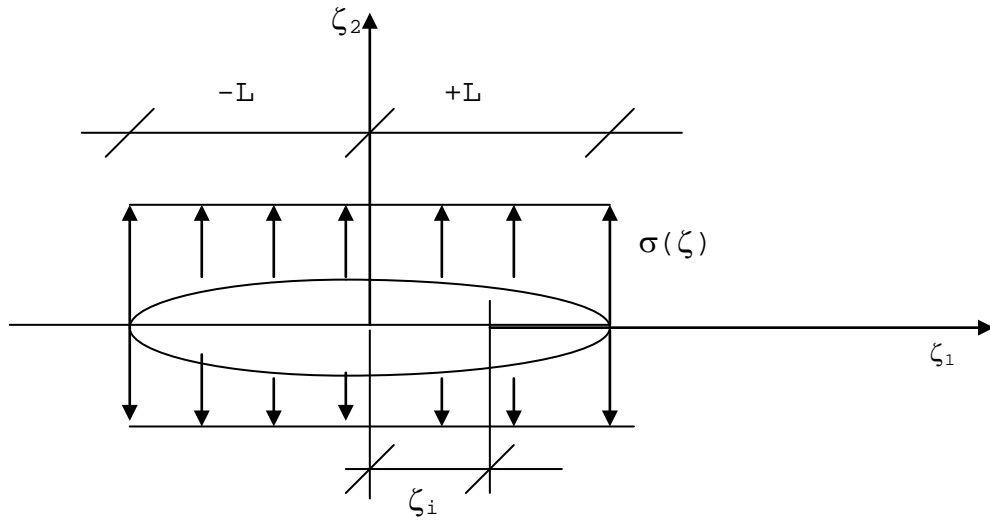
De l'équation (1) et (2) on obtient:

$$K_I = (Q(\zeta) / \sqrt{\pi L}) \sqrt{(L+\zeta)/(L-\zeta)} \quad (3)$$

Cette dernière vérifie les conditions de la singularité de la fissure.

Avec  $G(x, \zeta) = (L / \sqrt{\pi L}) \sqrt{(L+\zeta)/(L-\zeta)}$

Puisque,  $\sigma(\zeta) \cdot \Delta(\zeta) = Q(\zeta)$  (Fig.B.2) (4)



**Fig.B.2**

Alors; 
$$k_I = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \sum_{i=1}^n \sqrt{(1+\zeta_i)/(1-\zeta_i)} \sigma(\zeta_i) \Delta(\zeta_i) \quad (5)$$

Pour le cas d'une charge distribuée

$$K_I = \frac{1}{\sqrt{\pi L}} \int_{-L}^{+L} \sqrt{(L+\zeta)/(L-\zeta)} \sigma(\zeta) d\zeta \quad (6)$$

En prenant:  $\sigma(\zeta) = \sigma^\infty$  (7)

et en remplaçant l'expression (7) dans l'expression (6), on obtient:

$$K_I = \left( \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{\pi L}} \right) \int_{-L}^{+L} \sqrt{(L+\zeta)(L-\zeta)} d\zeta \quad (8)$$

En multipliant l'expression (8) par ( L + ζ ), on obtient :

$$K_I = \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{\pi L}} \int_{-L}^{+L} \frac{(L+\zeta)}{\sqrt{L^2-\zeta^2}} d\zeta \quad (9)$$

On pose :  $\zeta = L \sin t \Rightarrow d\zeta = L \cos t dt$ , et on replace dans l'expression (9) on obtient :

$$K_I = \frac{\sigma^\infty}{\sqrt{\pi L}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(L+L\sin t)}{\sqrt{(L^2-L^2\sin^2 t)}} L \cos t dt$$

$$k_I = \frac{\sigma^\infty L}{\sqrt{\pi L}} \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} \frac{(1+\sin t)}{\sqrt{\cos^2 t}} \cos t dt = \sigma^\infty \left( \frac{\sqrt{L}}{\sqrt{\pi}} \right) \int_{-\pi/2}^{+\pi/2} (1-\sin t) dt$$

Ce qui nous amène à la relation universelle :

$$k_I = \sigma^\infty \sqrt{\pi L} \quad (10)$$

## 2) Facteurs d'intensité de contraintes Δk:

Les bornes des intégrales du facteurs d'intensité de contraintes sont représentés sur la Fig.B.3 comme suit :

$$\text{Avec ;} \quad \Delta k = \int_{\Gamma} \psi_{ij} (\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta)) d\Gamma \quad (11)$$

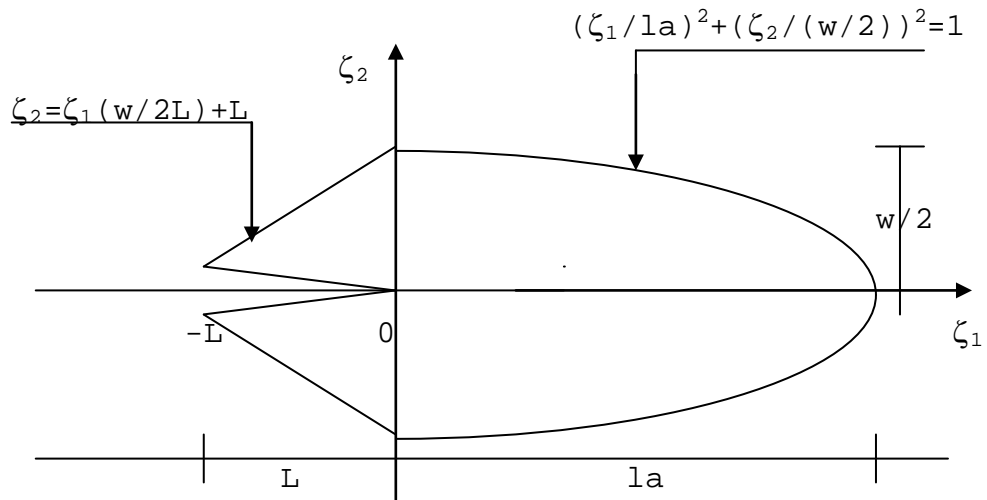


Fig.B.3

Schéma représentant les bornes limites des intégrales

- Equation de l'ellipse :  $(\zeta_1 / la)^2 + (\zeta_2 / w/2)^2 = 1$  (12)

- Equation de la droite :  $\zeta_2 = \zeta_1 (w / 2L) + L$

D'après le tableau 1, les fonctions de contraintes peuvent s'écrire sous la forme suivante:

$$\Psi_{i,j}(\zeta_1, \zeta_2, n(\zeta)) = [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2 + e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 \quad (13)$$

Où , a, b, c, d, e, f sont des constantes dépendant directement de l'orientation de la microfissure  $\beta$  .

En substituant les expressions (12), (13) dans l'expression de  $\Delta K$  (11), on obtient :

$$\Delta K = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} [ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2 + e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1 \quad (14)$$

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} [ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2 + e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

Sachant qu'on est dans un cas d'un solide linéairement élastique on peut ainsi écrire l'expression (14) sous la forme suivante:

$$\Delta K = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} [ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} [ [e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

(15)

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} [ [a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

$$+ \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} [ [e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

Pour des raisons de simplification, l'expression (15) peut s'écrire comme suit :

$$I_1 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (15.1)$$

$$I_2 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{[e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (15.2)$$

$$I_3 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (15.3)$$

$$I_4 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{(2L/w)\zeta_2^2 - L}^{-L} \frac{[e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (15.4)$$

1- **Calcul de  $I_1$  :**

$$I_1 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1$$

Posant :

$$I_1(\zeta_2) = \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} d\zeta_1 \quad (15.1.1)$$

pour les mêmes raisons que précédemment on peut écrire:

$$I_1(\zeta_2) = I_{11}(\zeta_2) + I_{12}(\zeta_2) + I_{13}(\zeta_2) \quad (15.1.2)$$

Soit:

$$I_{11}(\zeta_2) = \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{a\zeta_1^4}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1 \quad (15.1.3)$$

0.005

$$I_{12}(\zeta_2) = \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{b\zeta_2^4}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1 \quad (15.1.4)$$

0.005

$$I_{13}(\zeta_2) = \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{c\zeta_1^2 \zeta_2^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1 \quad (15.1.5)$$

0.005

$$- I_{11}(\zeta_2) = \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{a\zeta_1^4}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1 = a \left\{ \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right\}$$

0.005

0.005

$$- \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{-2\zeta_2^2}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2} \right] d\zeta_1 + \int_0^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{\zeta_2^4}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1$$

0.005

0.005

L'intégrale (15.1.1) à la forme suivante:

$I_n = \int dx / (x^2+h)^n$  elle se calcule de la manière suivante :

Pour  $n > 1$ :  $I_{n+1} = 1/[h(1-1/2n)I_n] + x/[2n(x^2+h)^nh]$

Soit:

$$*) \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \frac{d\zeta_1}{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)} = \left. \frac{1}{\zeta_2} \operatorname{arctg}(\zeta_1/\zeta_2) \right|_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \quad (15.1.6)$$

$$*) \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \left[ \frac{-2\zeta_2^2}{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)^2} \right] d\zeta_1 = -2\zeta_2^2 \left\{ \left. \frac{1}{\zeta_2^2} (1-1/2) \left( \frac{1}{\zeta_2} \operatorname{arctg}(\zeta_1/\zeta_2) + \zeta_1 / 2(\zeta_1^2+\zeta_2^2)\zeta_2^2 \right) \right|_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \right.$$

$$\left. = \left[ -\frac{1}{\zeta_2} \operatorname{arctg}(\zeta_1/\zeta_2) - \frac{\zeta_1}{(\zeta_1^2+\zeta_2^2)} \right] \right|_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \quad (15.1.7)$$





En développant l'intégrale on trouve:

$$\begin{aligned}
 I_1(\zeta_2) = & A_1/\zeta_2 \operatorname{arctg}(la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2} + A_2(la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}) / (\zeta_2^2 + l^2a\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}) \\
 & + A_3\zeta_2^2 la\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2} / (\zeta_2^2 + l^2a(1-(2\zeta_2/w)^2)^2 - \\
 & (A_1/\zeta_2)\operatorname{arctg}(0.005/\zeta_2) \\
 & - A_2 0.005 / ((0.005)^2 + \zeta_2^2) - A_3\zeta_2(0.005) / ((0.005)^2 + \zeta_2^2)^2 \quad (15.1.13)
 \end{aligned}$$

Avec:  $A_1 = 1/8(3a+3b+c)$  (15.1.14)

$$A_2 = 1/8(-5a+3b+c) \quad (15.1.15)$$

$$A_3 = 1/4(a+b+c) \quad (15.1.16)$$

2- Calcul de  $I_2$  :

$$I_2 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{0.005}^{la\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} [ [e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

On pose:

$$I_2(\zeta_2) = \int [ [e\zeta_1^3\zeta_2 + f\zeta_1\zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1 \quad (15.2.1)$$



0.005

$$\begin{aligned}
 & \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} \zeta_1 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 d\zeta_1 = - (e\zeta_2^3/2) \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} [2\zeta_1 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3] d\zeta_1 \\
 & = e\zeta_2^3/4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 \Big|_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} \quad (15.2.7)
 \end{aligned}$$

La substitution des expressions (15.2.6) et (15.2.7) dans l'expression (15.2.5) donne:

$$\begin{aligned}
 I_{21}(\zeta_2) = & -e\zeta_2/2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + e\zeta_2^3/4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 \Big|_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}} \quad (15.2.9)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 I_{22}(\zeta_2) = & \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} [f\zeta_1\zeta_2^3 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3] d\zeta_1 = f\zeta_2^3 \left\{ \int_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} [\zeta_1 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3] d\zeta_1 \right. \\
 & \left. = - f\zeta_2^3/4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 \Big|_{0.005}^{\sqrt{1-(2\zeta/w)^2}} \right. \quad (15.2.10)
 \end{aligned}$$

Finalemment en remplaçant les expressions trouvées (15.2.9) et (15.2.10) dans l'expression (15.2.4) on trouve:

$$I_2(\zeta_2) = -e\zeta_2 / 2(\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + (e-f) \zeta_2^3 / 4(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 \left| \frac{1a\sqrt{1-(2\zeta_2/w)^2}}{0.005} \right| \quad (15.2.11)$$

En développant l'intégrale, on trouve:

$$I_2(\zeta_2) = -e\zeta_2/2(\zeta_2^2 + 1^2a(1-(2\zeta_2/w)^2)) + e\zeta_2/2((0.005)^2 + \zeta_2^2) + (e-f) \zeta_2^3/4(\zeta_2^2 + 1^2a(1-(2\zeta_2/w)^2))^2 - (e-f) \zeta_2^3/4((0.005)^2 + \zeta_2^2))^2 \quad (15.2.12)$$

### 3- Calcul de I<sub>3</sub> :

$$I_3 = \int_{w/2}^{-L} \int_{0.005(2L/w)}^{\zeta_2-L} \left[ \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1$$

En posant :

$$I_3(\zeta_2) = \int_{(2L/w)\zeta_2-L}^{-L} \left[ \frac{[a\zeta_1^4 + b\zeta_2^4 + c\zeta_1^2\zeta_2^2]}{(\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3} \right] d\zeta_1 \quad (15.3.1)$$

La forme de cette intégrale a été déjà calculé, ce qui donne:

$$I_3(\zeta_2) = A_1 / \zeta_2 \arctg(\zeta_1 / \zeta_2) + A_2 \zeta_1 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2) + A_3 \zeta_1 \zeta_2^2 / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^2 \Big|_{-L}^{w/2} \\ (2L/w)\zeta_2 - L \quad (15.3.2)$$

En développant, on trouve:

$$I_3(\zeta_2) = A_1 / \zeta_2 \arctg(-L / \zeta_2) + A_2 (-L) / (L^2 + \zeta_2^2) + A_3 (-L) \zeta_2^2 / (L^2 + \zeta_2^2)^2 \\ - A_1 / \zeta_2 \arctg((2L/w)\zeta_2 - L) / \zeta_2 - A_2 ((2L/w)\zeta_2 - L) / (\zeta_2^2 + ((2L/w)\zeta_2 - L)^2) \\ - A_3 (\zeta_2^2 ((2L/w)\zeta_2 - L)^2) / (\zeta_2^2 + ((2L/w)\zeta_2 - L)^2)^2 \quad (15.3.3)$$

#### 4 - Calcul de I<sub>4</sub> :

$$I_4 = \int_{0.005}^{w/2} d\zeta_2 \int_{2L/w)\zeta_2 - L}^{-L} [ [e\zeta_1^3 \zeta_2 - f\zeta_1 \zeta_2^3] / (\zeta_1^2 + \zeta_2^2)^3 ] d\zeta_1$$

De la même façon que précédemment, on remarque qu'une partie de cette intégrale qu'on va nommer I<sub>4</sub>(ζ<sub>2</sub>) a été déjà calculé ( même type que I<sub>2</sub>(ζ<sub>2</sub>) ) en prenant les bornes de cette intégrale, on aura la forme suivante:

$$I_4(\zeta_2) = -e\zeta_2 / 2(L^2 + \zeta_2^2) + (e-f)\zeta_2^3 / 4(L^2 + \zeta_2^2)^2 + e\zeta_2 / 2 [ ((2L/w)\zeta_2 - L)^2 + \zeta_2^2 ] \\ + (e-f)\zeta_2^3 / 4(\zeta_2^2 + ((2L/w)\zeta_2 - L)^2)^2 \quad (15.4.1)$$

Finalement on remplaçant les expressions trouvées (15.1.12), (15.2.12), (15.3.3) et (15.4.1) dans l'expression (15) on obtient

l'expression du facteur d'intensité de contrainte de la forme suivante :

$$\Delta k = \int_{0.005}^{W/2} \{ I_1(\zeta_2) + I_2(\zeta_2) + I_2(\zeta_2) + I_4(\zeta_2) \} d\zeta_1 \quad (16)$$

**ANNEXE**

**C**

## Energie de restitution

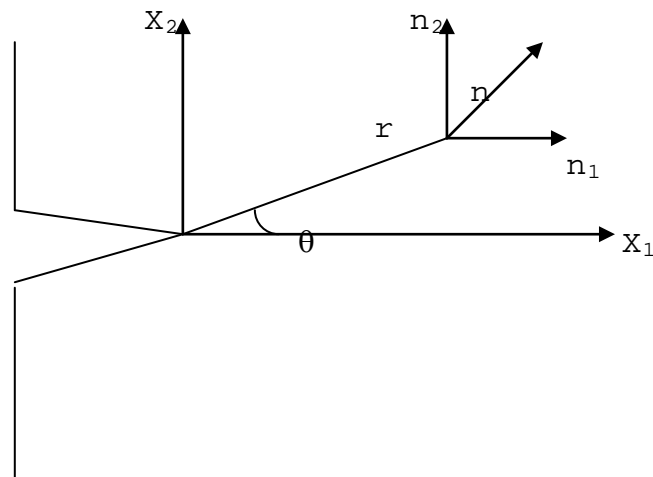
Cette énergie est définie comme étant l'énergie libérée lors de la propagation de la fissure.

Le taux d'énergie libérée est donné comme suit :

$$J = \int_{\Gamma} [fn_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}] d\Gamma \quad (1)$$

Où,  $\Gamma$  est le contour fermé, englobant la fissure principale et la zone d'endommagement (voir Fig.C.1) ;  $f$  la densité d'énergie de déformation ;  $\sigma_{ij}$  est le tenseur de contraintes de Cauchy ;  $u_{i,1}$  le tenseur de déformation infinitésimale (dans la direction de l'ouverture de la fissure principale) et  $n_1$  la normale extérieure au contour  $\Gamma$ .

Le contour choisi représentant la zone d'endommagement est un cercle comme représenté sur la fig.c.1.



**Fig.c.1 Contour de Griffith**

Soit,  $f = 1/2\sigma_{ij}\varepsilon_{ij}$  (2)

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i1}n_1 + \sigma_{i2}n_2 \quad (3)$$

Puisque, l'ouverture se fait suivant y alors  $n_2 = 0$ ; (4) Ce qui donne :

$$\sigma_{ij} = \sigma_{i1}n_1 \quad (5)$$

En remplaçant (2), (4) et (5) dans l'expression (1) on obtient ce qui suit :

$$J_1 = \int_{\Gamma} [(1/2)\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} n_1 - \sigma_{ij}n_j u_{i,1}] d\Gamma$$

$$J_1 = \int_{\Gamma} [(1/2)(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + \sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{21} \varepsilon_{21} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) n_1 - (\sigma_{11}u_{1,1} + \sigma_{21}u_{2,1}) n_1] d\Gamma \quad (6)$$

Sachant que  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = \sigma_{ji} \varepsilon_{ji}$  alors l'équation (2.16) devient :

$$J_1 = \int_{\Gamma} [(1/2)(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) n_1 - (\sigma_{11}u_{1,1} + \sigma_{21}u_{2,1}) n_1] d\Gamma \quad (7)$$

Posant :

$$A = (1/2)(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) \quad (8)$$

$$B = \sigma_{11}u_{1,1} + \sigma_{21}u_{2,1}$$

le champs de contraintes devient:

$$(9) \left\{ \begin{array}{l} \sigma_{11} = (K_I / \sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) (1 - \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)) \\ \sigma_{22} = (K_I / \sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) (1 + \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)) \end{array} \right.$$

$$\sigma_{12} = (\kappa_I / \sqrt{2\pi r}) \cos(\theta/2) \cdot \sin(\theta/2) \cdot \cos(3\theta/2)$$

On pose ;  $\xi = \kappa_I / \sqrt{2\pi r}$  (9.1)

$$F_{ij} = \cos(\theta/2) \begin{cases} (1 - \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)) \\ (1 + \sin(\theta/2) \cdot \sin(3\theta/2)) \\ \sin(\theta/2) \cdot \cos(3\theta/2) \end{cases} \quad (9.2)$$

Le champs de déplacements est :

$$\begin{Bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{Bmatrix} = (\kappa_I / 2E) (\sqrt{r} / 2\pi) \begin{cases} [1+\nu] [(2k-1) \cos[\theta/2] + \cos[3\theta/2]] \\ [1+\nu] [(2k+1) \sin[\theta/2] + \sin[3\theta/2]] \end{cases} \quad (10)$$

$$n_1 = n \cos\theta = \cos\theta \quad d\Gamma = r \, d\theta \quad \text{ce qui donne:}$$

$$J = \int_{-\pi}^{\pi} (A - B) r \cos\theta \, d\theta = 2 \int_0^{\pi} (A - B) r \cos\theta \, d\theta \quad (11)$$

1- Calcul de l'intégrale  $2 \int_0^{\pi} (A - B) r \cos\theta \, d\theta$

$$\begin{aligned} 2 \int_0^{\pi} (A - B) r \cos\theta \, d\theta &= 2(1/2) \int_0^{\pi} (\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) r \cos\theta \, d\theta \\ &= \int_0^{\pi} \sigma_{11} \varepsilon_{11} r \cos\theta \, d\theta + \int_0^{\pi} 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} r \cos\theta \, d\theta + \int_0^{\pi} \sigma_{22} \varepsilon_{22} r \cos\theta \, d\theta \end{aligned}$$

$$0 \qquad 0 \qquad 0 \qquad (12)$$

$$\text{Posant:} \quad (1) = \int_0^{\pi} \sigma_{11} \varepsilon_{11} r \cos\theta d\theta \qquad (13)$$

$$(2) = \int_0^{\pi} 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} r \cos\theta d\theta \qquad (14)$$

$$(3) = \int_0^{\pi} \sigma_{22} \varepsilon_{22} r \cos\theta d\theta \qquad (15)$$

$$\bullet \quad (1) = \int_0^{\pi} \sigma_{11} \varepsilon_{11} r \cos\theta d\theta$$

$$\varepsilon_{11} = (1/E) [ \sigma_{11} \quad -\nu \quad \sigma_{22} ] = (\xi/E) [ F_{11} \quad -\nu F_{22} ] \qquad (16)$$

En remplaçant l'expression (16) dans l'expression (13) on obtient ce qui suit:

$$(1) = (\xi^2/E) \int_0^{\pi} [ F_{11} \quad -\nu F_{22} ] F_{11} r \cos\theta d\theta$$

$$(1) = (\xi^2/E)r \int_0^{\pi} [1 - \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]^2 - \nu[1 - (\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2))^2] \cos^2(\theta/2) \cos\theta d\theta \qquad (17)$$

Ce qui donne:

$$\pi$$

$$(1) = (\xi^2/E)r \int_0^\pi [1 + \sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2) - 2\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) - \nu(1 - \sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2))] \cos^2(\theta/2) \cos\theta d\theta \quad (17.1)$$

$$\bullet (2) = \int_0^\pi 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} r \cos\theta d\theta \quad (18)$$

Soit;  $\varepsilon_{12} = [(1+\nu)/E]\sigma_{12} = [(1+\nu)/E]\xi F_{12}$

(19)

En remplaçant (9) et (19) dans (18) on obtient:

$$(2) = 2 \int_0^\pi [(1+\nu)/E] \xi F_{12} \xi F_{12} r \cos\theta d\theta$$

$$(2) = 2(\xi^2/E)r \int_0^\pi (1+\nu) \cos^2(\theta/2) \sin^2(\theta/2) \cos^2(3\theta/2) \cos\theta d\theta \quad (20)$$

$$\bullet (3) = \int_0^\pi \sigma_{22} \varepsilon_{22} r \cos\theta d\theta \quad (21)$$

Soit;  $\varepsilon_{22} = (1/E)[\sigma_{22} - \nu \sigma_{11}] = (\xi/E)[F_{22} - \nu F_{11}]$

(22)

La substitution de (9) et (22) dans l'équation (21) donne:

$$(3) = (\xi^2/E) \int_0^\pi [F_{22} - \nu F_{11}] F_{22} r \cos\theta d\theta$$

$$(3) = (\xi^2/E)r \int_0^\pi [1 + \sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)]^2 - \nu[1 - (\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2))]^2] \cos^2(\theta/2) \cos\theta d\theta$$

Ce qui donne:

$$(3) = \int_0^{\pi} (\xi^2/E)r \int [1+\sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2)+2\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) - v(1-\sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2))] \cos^2(\theta/2) \cos\theta d\theta \quad (23)$$

Finalemment, en remplaçant (17), (20), (23) dans l'expression (12) ; on obtient :

$$2 \int_0^{\pi} A r \cos\theta d\theta = (\xi^2/E)r \int [1+\sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2)-2\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2) -v(1-\sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2))+1+\sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2) +2\sin(\theta/2)\sin(3\theta/2)-v(1-\sin^2(\theta/2)\sin^2(3\theta/2))] \cos^2(\theta/2) \cos\theta d\theta$$

Après tous le calcul, on obtient :

$$2 \int_0^{\pi} A r \cos\theta d\theta = 2(\xi^2/E)r (\pi/4) (1-v) = (\xi^2/2E)r\pi(1-v)$$

Sachant que  $\xi = K_I / \sqrt{2\pi r}$  alors :

$$2 \int_0^{\pi} A r \cos\theta d\theta = K_I^2 / 2\pi r (r/2E)\pi(1-v) = (K_I^2/4E)(1-v) \quad (24)$$

Finalemment :

$$\int_{\Gamma} [(1/2)(\sigma_{11} \varepsilon_{11} + 2\sigma_{12} \varepsilon_{12} + \sigma_{22} \varepsilon_{22}) n_1] d\Gamma = 2 \int_0^{\pi} A r \cos\theta d\theta = (K_I^2/4E)(1-v)$$

0

(25)

2- Calcul de l'intégrale  $2 \int_0^\pi B \cos\theta r d\theta$

$$2 \int_0^\pi B \cos\theta r d\theta = 2 \int_0^\pi (\sigma_{11}u_{1,1} + \sigma_{12}u_{2,1}) \cos\theta r d\theta \quad (26)$$

On pose (4) =  $2 \int_0^\pi (\sigma_{11}u_{1,1} \cos\theta r d\theta$  (27)

$$(5) = 2 \int_0^\pi \sigma_{12}u_{2,1} \cos\theta r d\theta \quad (28)$$

Où  $U_1 = \eta(1 + \nu) [(2k - 1) \cos[\theta] - \cos[3\theta/2]]$   
 $U_2 = \eta(1 + \nu) [(2k - 1) \sin[\theta] - \sin[3\theta/2]]$  (29)

Avec  $\eta = (K_I / 2 E) \sqrt{r/2\pi}$   
 $k = [3 - \nu] / [1 + \nu]$  (contrainte plane)

$$\bullet (4) = 2 \int_0^\pi (\sigma_{11}u_{1,1} \cos\theta r d\theta$$

$$U_{1,1} = dU_1/dx = (dU_1/d\theta)(d\theta/dx) + (dU_1/dr)(dr/dx) \quad r=c^{te} \quad (30)$$

$$dU_1/d\theta = (\eta/2)(1 + \nu) [-(2k - 1) \sin[\theta/2] + 3\sin[3\theta/2]] \quad (31)$$

$$x = r \cos\theta \Rightarrow dx/d\theta = -r \sin\theta \Rightarrow d\theta/dx = -1/r \sin\theta \quad (32)$$

En remplaçant (31), (32) dans l'expression (30) on obtient:

$$U_{1,1} = (dU_1/d\theta)(d\theta/dx) = -(\eta(1+\nu)/2r\sin\theta)[-(2k-1)\sin[\theta/2] + 3\sin[3\theta/2]] \quad (33)$$

Après les calculs on obtient :

$$(4) = -(\eta(1+\nu)/2)[(2k-1)\pi/4 + 3\pi] \xi$$

Sachant :  $\xi = K_I / \sqrt{2\pi r}$        $\eta = (K_I / 2 E) \sqrt{r/2\pi}$

Alors :  $(4) = (K_I^2/32\pi)(1+\nu)[(2k-1)+12]$

$$\bullet \quad (5) = 2 \int_0^\pi \sigma_{12} u_{2,1} \cos\theta r d\theta$$

$$U_{2,1} = dU_2/dx = (dU_2/d\theta)(d\theta/dx) + (dU_2/dr)(dr/dx) \quad r=c^{te} \quad (35)$$

$$x = r \cos\theta \Rightarrow dx/d\theta = -r \sin\theta \Rightarrow d\theta/dx = -1/r \sin\theta$$

$$dU_2/d\theta = (\eta/2)(1+\nu)[(2k+1)\cos[\theta/2] - 3\cos[3\theta/2]] \quad (36)$$

$$d\theta/dx = -1/r \sin\theta \quad (37)$$

La substitution de (36) et (37) dans l'expression (35) donne :

$$U_{2,1} = dU_2/dx = -(\eta(1+\nu)/2r\sin\theta)[(2k+1)\cos[\theta/2] - 12\cos[\theta/2] + 9\cos[3\theta/2]]$$

Après les calculs on obtient :

$$(5) = -(\eta(1+\nu)/2)[(2k+1)/4]\pi\xi$$

Sachant :  $\xi = K_I / \sqrt{2\pi r}$        $\eta = (K_I / 2 E) \sqrt{r/2\pi}$

Alors :  $(5) = (K_I^2/32\pi)(1+\nu)(2k-1) \quad (38)$

La substitution de (34) et (38) dans l'équation (26) donne:

$$2 \int_0^{\pi} B \cos\theta r d\theta = (K_I^2/8\pi)(1+\nu)(k+3) \quad (39)$$

Finalement en remplaçant (25) et (39) dans l'équation (11) on obtient:

$$J_1 = \int_0^{\pi} (A - B) r \cos\theta d\theta = 2 \int_0^{\pi} A r \cos\theta d\theta - 2 \int_0^{\pi} B r \cos\theta d\theta$$

$$J_1 = (K_I^2/4E)(1-\nu) - (K_I^2/8\pi)(1+\nu)(k+3)$$

Sachant que  $k = (3-\nu)/(1+\nu)$

On obtient finalement le taux de restitution d'énergie se référant à celui de Griffith.

$$J_1 = K_I^2 / E = G$$



## Références:

- [1] Introduction à la Mécanique de la Rupture. René Labbens. Préface du Professeur G. R. IRWIN, Editions Pluralis, 1980.
- [2] Mécanique des Structures, J.BARBE, Tome III, plasticité mécanique de la fracture Fluage de Métaux, 1983
- [3] Introduction to Continuum Damage Mechanics by L. M. KACHANOV. Brookline, Ma 02146, 1986, USA.
- [4] Notions Pratiques de Mécanique de la Rupture. Editions EYROLLES, LEHIGH University, Bethlehem, Pennsylvanie USA, 1980.
- [5] Mécanique des Structures, Ecole Nationale Supérieure de l'Aéronautique et de l'Espace, 1983
- [6] On the Fondamental Basis of Fracture Mechanics, Department of Chemical Engineering and Materiels Science. H.W.LUIT, Syracuse University. Syracuse. NY 13210.
- [7] C.E.INGLIS, Stress in Cracked Plate due to the Presence of Crackes and Sharp Corners. Transaction of Noval Architects (LONDON) 60, 213 (1913).
- [8] A.A.GRIFFITH, the Phenomena of Rupture and Flow in Solids. Philosophical Trans. Royal Soc; LONDON series A.221, 163-198 (1921).
- [9] G.R. IRWIN, Fracture Dynamics. Fracturing of Metals, 147-166.Am. Society for metals. Glereland (1948).
- [10] P. CHARALAMBIDES and R. M. MCMEEKING, Finite Element Method Simulation of Crack Propagation in a Brittle Microcracking Solid. Mech. Mater. 6, 71-87, 1987.

- [11] J. Avril. Encyclopédie. Analyse des Contraintes. Micromesures VISHAY. 1984.
- [12] D. POST, Photoelastic Stress Analysis for an Edge Crack in a Tensile Field. Naval Research Laboratory, Washington, D. C. Society's Proceedings. Vol. XII N°1. May, 1953.
- [13] M. ANDRIEUX, A. VIGOUROUX et P. SIXOU, Etude par Photoélasticité d'un Composite Modèle Monofilamentaire en Traction et en Compression. Journal de Physique France 6, 449-473. 1996.
- [14] A. VIGOUROUX, M. ANDRIEUX, et P. SIXOU, Comportement en Compression d'une fibre de Carbone dans un Composite Monofilamentaire : Simulation des Images Observées en Photoélasticité. Journal de Physique III France 6, 543-570. 1996.
- [15] Thèse de Magister N° 02/95/GC , Interaction Fissure Microfissure par les Potentiels. H.Hadjab, IGC/USTHB, 1995.
- [16] M. ORTIZ, Continuum Theory of Crack Shielding in Ceramics. J. appl. Mech. 54, 54-58, 1987.
- [17] J. W. HUTCHINSON, Crack-Tip Shielding by Micro-cracking in Brittle Solids. Acta Metall.35, 1605-1619, 1987.
- [18] A.CHUDNOVSKY and M. KACHANOV, Interaction of a Crack with a Field of Microcracks. Int. J. Engng Sci. 21,1009-1018, 1983.
- [19] L. R. ROSE, Microcrack Interaction with a Main Crack. Int. J. Fracture 31, 233-242, 1986.
- [20] A. CHUDNOVSKY, A. DOLGOPOLSKY and M. KACHANOV, Elastic Interaction of a Crack with a Microcrack Array. Int. J. Solids Structure, 23, 1-21, 1987.

- [21] M. CHABAAT, Comparisons of Minimal Principal Stress with Craze Trajectories in a Brittle Material. Intern. Journ. of Fracture, 1988.
- [22] D. HULL, Effect of Crazes on the Propagation of Cracks in Polystyrene. Jour. Of Materials Science 5 (1970) 357-363.
- [23] S., K., Kaman, Random Field of Cracks in Elastic Continuum, in Issledovania po Uprugosti i Plastichnosti (Papers on Elasticity and Plasticity), ed.1.Kachanov, 10, 66(1974).
- [24] A. A. Rubinstein, Macrocrack-Microdefect Interaction. Jour. Appl. Mech, Vol. 53, PP. 505-510, 1983.
- [25] C. H., Wu, A Semi-Infinity Crack Partially Penetrating Inclusion. Journ. of Appl. Mech. Vol.55, PP. 736-738, 1988.
- [26] R. G., Hoagland, G. T., Hahn and A. R., Rosenfield, Influence of Microstructure on Fracture Propagation in Rocks. Rock Mechanics, 5, 77 (1973).
- [27] A. CHUDNOVSKY, Crack Layer Theory. NASA Contractor's Report, N°174634, 1984.
- [28] A. CHUDNOVSKY, S. WU, Elastic Interaction of Crack With a Random Array of Fracture. Int. Journ. of Fracture Vol.49, pp. 123-140, 1991.
- [29] I.S.TUBA, A Method of Elastic-Plastic Plane Stress and Strain Analysis. journal of strain analysis, 1, 1966.

[30] J.R.RICE, G.F.ROSENGREN, Plane Strain Deformation near a Crack Tip in a Power - Law Hardening Material. Journal Mech. Sol., 16, 1968.

[31] M. CHABAAT, H. HADJAB, Analyse des Zones de Concentrations de Contraintes entre Fissure et Microfissure. 2<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, 10-13 Avril 1995. Faculté des Sciences Ain Chok, Casablanca. Société Marocaine des Sciences Mécaniques.

[32] M. CHABAAT, S. DJOUDER, Interaction entre Fissure et Microfissure par une Approche Semi-Empirique, 2<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique. 10-13 Avril 1995. Faculté des Sciences Ain Chok. Casablanca. Société Marocaine des Sciences Mécanique.

[33] N.I.MUSHKELISHVILI some basic problems of mathematical theory of elasticity, Noordhoff, Holland, 1953.

[34] G.C.SIH Handbook of stress-intensity factors for researchers and Engineers, institute of fracture and solid mechanics, Lehigh Univ., Bethlehem, Pa., USA, 1973.

[35] D.P.ROOKE, D.J.CARTWRIGHT COMPENDIUM OF STRESS intensity factors procurement executive, Ministry of defense, LONDON, 1974.

[36] R.LABBENS, A.PELLISSIER-TANON et J.HELIOU-Méthodes pratiques de calcul des facteurs d'intensité de contrainte- Revue de physique Appliquée, 1974, pp.587,598.

[37] F.ERDOGAN, P.D.HILTON, R.LABBENS, Principles and analytical procedures of Fracture Mechanics, I.P.S.I., Paris, 1979.

- [38] M.CHABAAT. Crack Damage Interactions in Brittle Material, International Symposia in Mechanics, Dublin, 1996.
- [39] NGUYEN QUOC SON. Méthodes énergétiques en mécanique de la rupture ,Jour. de Mécanique, Vol. 19, N°2, 1980.
- [40] M.CHABAAT, Stress and Energy Analysis of Brittle Material in a Vicinity of a Stress Concentrator, Phd Dissertation, CWRU (USA), 1987.
- [41] J.AOKI ,K.Kishimoto and,M.Sakata, Energy Release Rate in Elasto-Plastic Fracture Problemes. Journal of applied MechanicsDecember 1981, Vol. 48/828.
- [42] Kishimoto,K.,Aoki,S.,and sakata,M., Dynamic Stress-intensity Factors Using J-Integral and Finite Element Method,Engineering Fracture Mechanics,1980, Vol.13, n°2, pp.387-394.
- [43] Eshelby,J.D., The Calculation of Energy Release Rate, Prospects of Fracture Mechanics,ed.SihG.C.,Van Elst,H.C.,and Broek,D.,Noordhoff,1974,pp.69-84.
- [44] R. BALLARINI, A Semi-Empirical Analysis of Micro-Cracking in Concrete. Engineering Fracture Mechanics, Vol.20, N° 3, pp.433-445, 1986.
- [45] Y.LAM,B.COTTERELL, Statics of Flaw Interaction in Brittle Materials. Departement of Mechanical and Production Engineering. National University of Singapore. Singapore 0511, Republic of Singapor.
- [46] S.GONG H.HORII, General Solution to the Problem of Microcracks Near the Tip of a Main Crack. Journ. Mech. Phys. Solids. Vol.37, N°.1, pp. 27-46, 1989.

[47] A. CHUDNOVSKY, M. CHABAAT, Stress and Energy Analysis of Brittle Material in a Vicinity of a Stress Concentrator PHD Dissertation, CWRU (USA) 1987.

[48] M. CHABAAT, H. HADJAB, Analyse des Zones de Concentrations de Contraintes entre Fissure et Microfissure. 2<sup>ème</sup> Congrès de Mécanique, 10-13 Avril 1995. Faculté des Sciences Ain Chok, Casablanca. Société Marocaine des Sciences Mécanique.