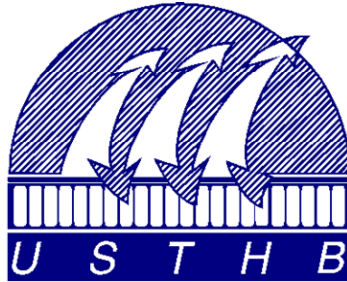


N° d'ordre : 02/2015-M/PH  
**REPUBLIQUE ALGERIENNE DEMOCRATIQUE ET POPULAIRE**  
**MINISTERE DE L'ENSEIGNEMENT SUPERIEUR**  
**ET DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE**  
**UNIVERSITE DES SCIENCES ET DE LA TECHNOLOGIE**  
**HOUARI BOUMEDIENNE. ALGER**

**FACULTE DE PHYSIQUE**



# MÉMOIRE

En vue de l'obtention du diplôme de :  
**MAGISTER EN PHYSIQUE**  
Spécialité : Energétique et Mécanique des fluides

Présentée par Mr **Ali DJEBBOUR**

---

***Sujet : " Prédiction du phénomène d'apparition de l'instabilité de corrosion par striations dans une cavité de type Poiseuille à section rectangulaire. Application au refroidissement du réacteur fusion ITER "***

---

Soutenue publiquement Le 15/01/2015, devant le jury composé de :

Mr M.S MOULAY	Professeur à l'USTHB	Président
Mr A. BOUABDALLAH	Professeur à l'USTHB	Directeur de Mémoire
Mr A. BENDIB	Professeur à l'USTHB	Examineur
Mr A. BENZAOUI	Professeur à l'USTHB	Examineur
Mr H. OUALLI	Professeur à l'EMP	Examineur

## Remerciements

*Chaque personne doit ses progrès à son entourage, qui intervient pour la soutenir au cours d'étapes cruciales dans sa vie. Ce travail n'aurait pas abouti sans l'aide de nombreuses personnes, même si cette aide a été quelquefois ponctuelle. Les actions ne valent que par les intentions et chacun n'a pour lui que ce qu'il a eu réellement l'intention de faire... L'espace ne permet pas de nommer toutes les personnes que j'ai eu le plaisir de connaître. Il se peut que certaines ne figurent pas ici ; je n'en oublie cependant aucune dans ma pensée et ma reconnaissance va à toutes ainsi que mes remerciements.*

*D'abord, J'exprime ma reconnaissance à Monsieur A.BOUABDALLAH, Directeur de Laboratoire Thermodynamique et des Systèmes Energétiques de Faculté Physique à L'USTHB, a toute ma gratitude et mon respect pour l'encadrement de ma thèse malgré ses nombreuses obligations. Il a su simultanément me guider et me donner la possibilité d'avoir une autonomie grandissante au fil de la thèse. Je lui voue également une estime sans mesure pour sa rigueur scientifique et également pour sa confiance et son soutien.*

*J'exprime mes plus sincères remerciements à Monsieur M.S.MOULAY, Professeur au Faculté de Math à l'USTHB, qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence de jury, qu'il veuille trouver ici, l'expression de ma sincère reconnaissance.*

*Je suis très reconnaissant à Monsieur A. BENDIB, Professeur à l'USTHB, Monsieur A.BEN ZAOUÏ, Professeur à l'USTHB et Monsieur H. OUALLI Professeur à l'EMP, qui m'ont fait l'honneur de faire partie de ce jury. Qu'ils en soient remerciés.*

*Je tiens à remercier aussi vivement mes collègues du laboratoire pour leur contribution de près ou de loin pour mener ce travail à sa fin.*

*Mes chaleureux remerciements vont à toute ma famille pour son soutien moral indéfectible, à tous mes amis Mrs. BAH M., HOUARI M., DOUCHA M.*

## SOMMAIRE

REMERCIEMENTS.....	i
SOMMAIRE.....	ii
NOMENCLATURE.....	vi
INTRODUCTION GENERALE.....	viii

**CHAPITRE 1 : POINT DE SITUATION SUR LA FUSION CONTROLE :  
PROJET ITER**

1. Introduction .....	1
1.1. La fusion contrôlée .....	1
1.1.1 La réaction de fusion .....	1
1.1.2 Bilan énergétique.....	3
1.1.3 Critère de Lawson .....	4
1.2. La configuration tokamak .....	5
1.2.1 Problématique du confinement magnétique .....	6
1.2.2 Configuration magnétique du tokamak .....	7
1.2.3 Technologie du Tokamak on réalisation du Tokamak .....	10
1.2.4 Les tokamaks actuels.....	13
1.2.4.1 Tore Supra .....	13
1.2.4.2 JET.....	15
1.2.5 ITER .....	17
Conclusion.....	19

**CHAPITRE 2 : PROBLEMATIQUE DU REFROIDISSEMENT DU  
REACTEUR FUSION**

2.1 Introduction .....	20
2.2 Boucle de refroidissement .....	21
2.3 Le phénomène de corrosion .....	23
2.4 Analyse de phénomène de Corrosion.....	25
2.4.1 Analyse physique .....	25
2.4.2 Analyse chimique .....	27
Conclusion.....	28

### CHAPITRE 3 : LES PHENOMENES D'INSTABILITE PARIETALE.

3.1 Introduction .....	30
3.2. couche limite laminaire .....	30
3.3. Bibliographie .....	32
3.3.1 Approche théorique .....	33
3.3.2 Approche expérimentale .....	35
3.3.3 Approche numérique .....	39
3.4 Instabilité temporelle d'écoulements parallèles .....	46
3.4.1 Généralités.....	46
3.4.2 Stabilité temporelle linéaire de fluides parfaits .....	52
3.4.3 Critères nécessaires d'instabilités en fluides parfaits .....	54
3.4.4 Profils linéaires par morceaux, modèle de couche de mélange.....	55
3.5. Evolution spatio-temporelle d'une perturbation linéaire .....	58
3.5.1 Transformée de Fourier et de Laplace.....	59
3.5.1.1 Fonction de Green .....	59
3.5.1.2 Spectre continu et spectre discret .....	62
3.5.1.3 Instabilité convective et absolue .....	63
3.5.3.1 Instabilité spatiale.....	67
3.6. Instabilité visqueuse d'écoulements cisailés.....	69
3.6.1 Equation d'Orr-Sommerfeld et de Squire .....	70
3.6.2 Non normalité et croissance transitoire .....	73
3.7. Classification des transitions laminaire-turbulent .....	73
3.7.1 Transition by-pass .....	73
3.7.2 Transition oblique .....	75
3.7.3 Transition par mode de Göertler .....	75
3.8. Synthèse des processus de transition : chemin de bifurcation .....	76
3.9. Explication du processus de stabilisation par les stries et conclusion.....	79
3.9.1. Explication physique: l'effet "lift up" .....	79
3.9.2. Explication mathématique : non-normalité de l'opérateur.....	79
Conclusion.....	81

## CHAPITRE 4 : FORMULATION DU PROBLEME DE L'INSTABILITE DE STRIATION.

4.1- Introduction .....	82
4.2. Définition du problème .....	82
4.3.Géométrie du problème .....	82
4.4. Bases théoriques .....	83
4.4.1. Equations .....	83
4.4.2. Equations en coordonnées curvilignes. ....	86
4.4.3. Equation de continuité.....	87
4.4.4. Equation de Navier-Stokes.....	87
4.4.5. Equation de continuité.....	88
4.4.6. Equation de Navier-Stokes.....	88
4.5. Traitement du problème .....	88
4.5.1. Mise en œuvre de la méthode.....	89
4.5.2. Hypothèse Simplificatrices .....	90
4.5.3. Equation du mouvement principale ou champ moyen de vitesse .....	91
4.5.1. Equation du mouvement secondaire .....	93
4.6. Equations adimensionnelles .....	93
4.6.1. Equations du mouvement principal.....	93
4.6.2. Equation du mouvement secondaire .....	94
Conclusion.....	94

## CHAPITRE 5 : RESOLUTION DE L'EQUATION DU MOUVEMENT LIES AU CHAMP MOYEN.

5.1. Introduction .....	95
5.2. Propriétés du mouvement.....	95
5.3. Analyse du mouvement principal.....	96
5.3.1. Solutions approchées.....	96
5.3.2. Solution générale.....	105
5.4. Résultats et discussion.....	107
5.4.1. Sans champ magnétique .....	108
5.4.2 Avec champ magnétique .....	108
Conclusion.....	109

**CHAPITRE 6 : ETUDE DE LA STABILITE DU MOUVEMENT PAR  
LA METHODE DE GALERKIN**

6.1. Introduction .....	110
6.2. La méthode de GALERKIN.....	110
6. 2.1. Principe de la méthode .....	110
6. 2.2. Mise en œuvre de la méthode.....	110
6.3. Problème aux valeurs critiques .....	113
6.4. Résultats et discussion.....	114
6.4.1. Cas sans champ magnétique.....	116
6.4.2. Cas avec champ magnétique. ....	117
6.5. Conclusion.....	118
<b>CONCLUSION GENERALE .....</b>	<b>119</b>
<b>REFERENCES .....</b>	<b>121</b>

## NOMENCLATURE

## Symboles

$\mathbf{B}, B$  : Champ magnétique, amplitude du champ magnétique

$B_0, B'_y$  : développement limité du champ magnétique pour le calcul des vitesses de dérive

$B_\phi$  : champ toroïdal

$B_\theta$  : champ poloïdal

$D$ : deutérium

$c_r$  : vitesse de déplacement de l'onde

$c_i$  : vitesse d'amplification de l'onde

$\mathbf{E}, E$  : Champ électrique, amplitude du champ électrique

$\mathbf{H}$  : Facteur de forme

$He$ : helium

$I_p$  : courant plasma

$\mathbf{j}$  : vecteur densité de courant

$L$  : longueur caractéristique

$m$  : masse d'une particule

$\bar{n}, \bar{T}$  : densité et température moyennes

$n_D$  : densité de deutérium

$n_T$  : densité de tritium

$p$  : pression

$P_{alpha}$  : puissance de chauffage due aux particules alpha

$P_{chauff}$  : puissance de chauffage additionnel

$p_{fus}$  : densité de puissance de fusion

$P_{pertes}$  : puissance d'énergie perdue

$q$  : facteur de sécurité

$R, R_0$  : grand rayon local, grand rayon du plasma

$T$ : tritium

$T, T_e, T_i$  : température du plasma, température électronique, température ionique

$T_f$  : température du fluide  $Pb^{17}Li$

$U$  : vitesse longitudinale

$v_{\perp}, v_{\parallel}$  : composantes perpendiculaire et parallèle de la vitesse d'une particule

$v_d$  : vitesse de dérive

$u$  : vitesse longitudinale

$v$  : vitesse transversale

V: Composantes normale du vecteur vitesse  $\vec{V}$

$V'$  : volume du plasma

W : Composantes radiale du vecteur vitesse  $\vec{V}$

$W'$  : quantité totale d'énergie dans le plasma

### Lettres grecques

$\varepsilon$  : rapport d'aspect du plasma

$\theta'$  : angle poloïdal

$\theta$  : épaisseur de quantité de mouvement

$\xi$ : densité d'énergie libérée par réaction de fusion

$\xi_{\alpha}$  : fraction d'énergie portée par les particules alpha

$\rho^*$  : rayon de Larmor

$\rho$  : densité du fluide (kg/m<sup>3</sup>).

$\mu$  : Perméabilité magnétique [H/m], ( $\mu = \mu_0 \cdot \mu_r$ )

$\delta$  : hauteur de couche limite dynamique

$\delta^*$  : épaisseur de déplacement

$\nu$  : viscosité cinématique

$\lambda$  : longueur d'onde de la perturbation ( $\lambda = 2\pi/\alpha$ )

$\langle \sigma'v \rangle$  : section efficace de la réaction de fusion

$\tau_e$  : temps de confinement de l'énergie

$\phi$ : angle toroïdal

$\omega_c$  : pulsation de Larmor

$\delta$  : hauteur de couche limite dynamique

$\alpha$  : nombre d'onde ; ouverture azimutale

$\sigma$  : nombre d'onde adimensionnelles

$\beta$  : le coefficient l'amplification de perturbation ou l'amortissement de la perturbation

$\eta, \eta_0$  : variable adimensionnelles

$R_e = \frac{U_{\infty}\delta}{\nu}$  : nombre de Reynolds

$H_a = B_0\delta\sqrt{\frac{\sigma}{\rho\nu}}$  : nombre de Hartmann

## Abréviations

CFC : composite à fibres de carbone

D-T : Deutérium-tritium

FCE : Fréquence Cyclotronique Electronique

FCI : Fréquence Cyclotronique Ionique

HF : chauffage par ondes à Haute Fréquence

HFS : *High Field Side*, côté fort champ du plasma

LFS : *Low Field Side*, côté faible champ du plasma

LH : Lower Hybrid, fréquence hybride basse

LPT : limiteur pompé toroïdal

JET: *Joint European Torus*

TFR: le Tokamak de Fontenay-aux-Roses

CCFE: Culham Center For Fusion Energy

EFDA: European Fusion Development Agreement

ITER : *International Thermonuclear Experimental Reactor*

CEA: Commissariat à l'Énergie Atomique

KH : L'instabilité de Kelvin –Helmholtz

TS : L'instabilité de Tollmien-Schlichting

## Introduction générale

Le début du XXe siècle a vu l'Humanité entrer dans un âge où elle a commencé à exploiter pleinement les ressources énergétiques de son environnement grâce à la révolution industrielle. Le début du XXIe voit cette humanité prendre conscience que ces ressources sont limitées. A l'heure où l'augmentation des besoins en énergie de la population mondiale s'accélère et où les problématiques liées à l'impact de l'activité humaine sur l'environnement se font de plus en plus présentes, il devient urgent de trouver une alternative au trio des énergies fossiles : charbon, gaz, pétrole. C'est dans ce contexte que s'inscrivent les recherches sur la fusion thermonucléaire contrôlée. N'émettant pas de gaz à effets de serre, ne générant pas de déchets nucléaires à haute activité et à vie longue et étant intrinsèquement sûre, elle pourrait prendre une place prépondérante dans le panel énergétique des décennies à venir.

La fusion contrôlée, souvent résumée par l'expression « mettre le soleil en boîte » consiste à faire fusionner des atomes légers de telle sorte à produire de l'énergie, reproduisant ainsi les processus à l'oeuvre dans le coeur des étoiles tel que le soleil. Placer la matière dans des conditions adéquates pour déclencher des réactions de fusion constitue néanmoins un défi scientifique et technologique colossal. Portés à des centaines de millions de degrés, les atomes sont à l'état de plasma, rendant leur manipulation des plus difficiles. Depuis les années 1950, date des premières expériences sur le sujet en ex-Union Soviétique, de nombreux dispositifs visant à contrôler ce plasma ont vu le jour. Le plus prometteur d'entre eux est aujourd'hui le "Tokamak", acronyme russe signifiant TOroidalnaia KAmera MAgnitnaïa Katouchka, chambre toroïdale à bobines magnétiques. Afin d'obtenir les conditions nécessaires à la réalisation de réactions de fusion, la taille de ces machines n'a cessé d'augmenter, de même que la taille des collaborations s'intéressant au sujet. La prochaine étape de ces recherches est le réacteur expérimental ITER, dont la construction a commencé sur le site de Cadarache, en France. ITER représente la dernière étape avant la construction d'un réacteur de démonstration justifiant la possibilité de produire de l'électricité de façon industrielle à l'aide de la fusion nucléaire.

# ***CHAPITRE 1***

***Point de situation sur la fusion contrôlée :  
Projet ITER***

## Chapitre 1 Point de situation sur la fusion contrôlée : Projet ITER

### 1. Introduction

L'augmentation des besoins en énergie de la population mondiale, la pénurie à terme des énergies fossiles et les problématiques climatiques associées à leur utilisation rendent indispensable le développement de moyens d'exploiter des nouvelles sources d'énergie. La fusion thermonucléaire contrôlée est une de ces alternatives. Ce premier chapitre présente les bases de la fusion et les moyens mis en œuvre pour la maîtriser. Dans une première étape, on aborde d'abord le principe de la fusion contrôlée, les caractéristiques et les méthodes de confinement utilisées pour maintenir le mélange de combustibles dans un état susceptible, entretenir la réaction. Dans une seconde étape, on présente une étude comparative de différents réacteurs expérimentés actuellement.

### 1.1. La fusion contrôlée

#### 1.1.1 La réaction de fusion

La fusion nucléaire a pour but de faire réagir des noyaux légers pour les combiner en un noyau plus lourd, contrairement à la fission nucléaire qui casse des noyaux lourds (uranium, thorium) en des constituants plus légers. En effet, l'énergie de liaison par nucléon croît en fonction du nombre de nucléons pour les éléments légers comme le deutérium ou le tritium et décroît pour les éléments plus lourds. Comme le montre la courbe d'Aston (fig.1.1) qui découle de la relation de Bethe-Weizsäcker, donnant l'énergie de liaison par nucléon, le maximum de stabilité est obtenu au niveau du fer.

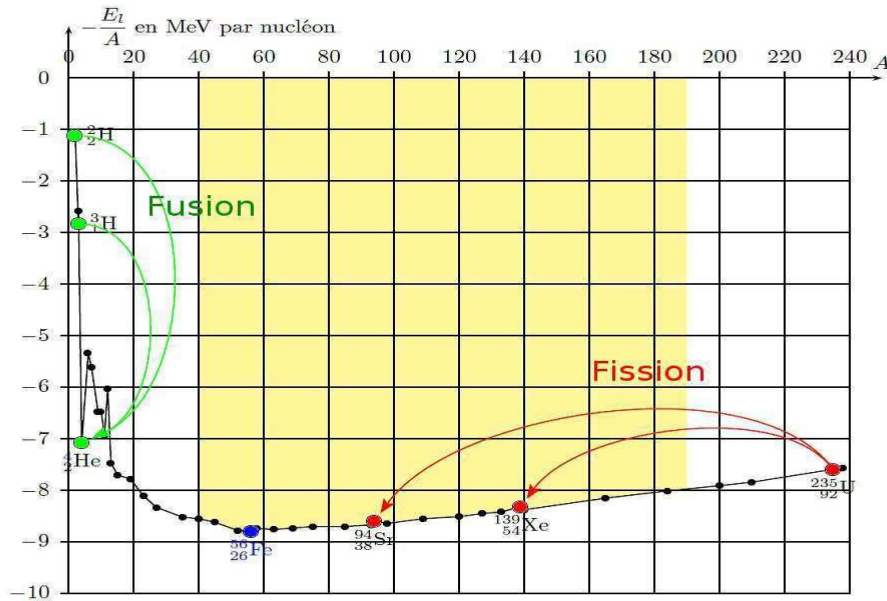
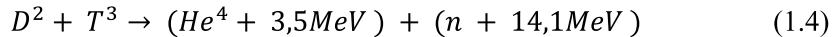
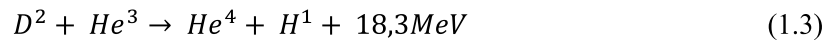
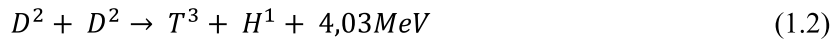
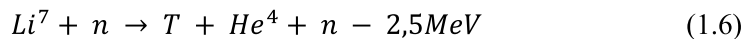


Figure 1.1 – Courbe d'Aston - Energie de liaison par nucléon

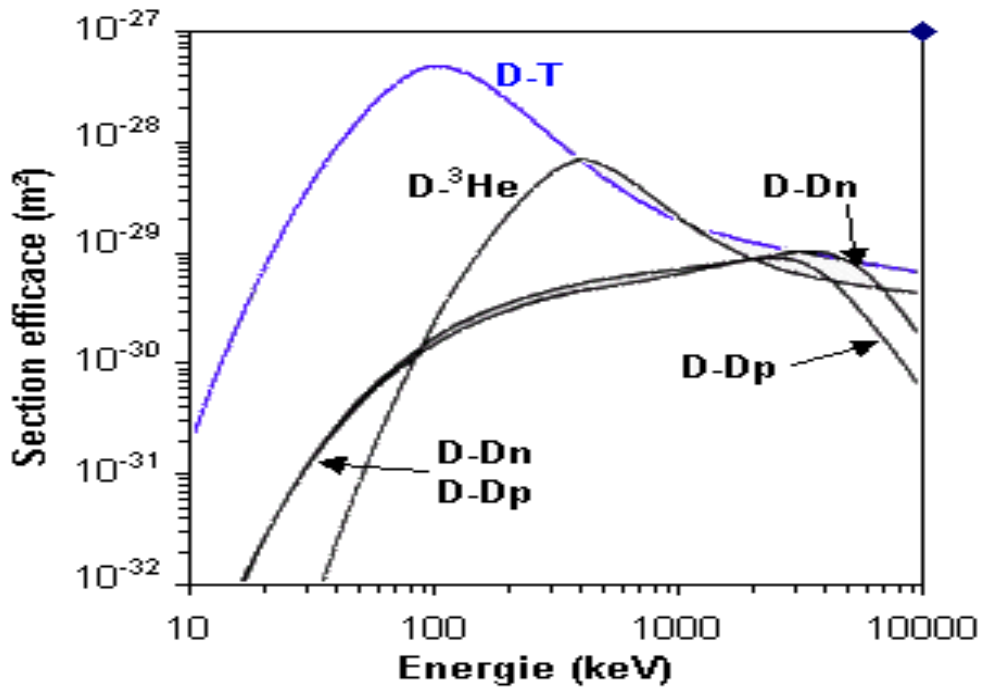
Plusieurs réactions de fusion peuvent être envisagées :



La plus avantageuse en termes de section efficace, de rendement et de disponibilité des combustibles est à l'heure actuelle la réaction impliquant le deutérium et le tritium. En effet, le deutérium est extrait de l'eau de mer à un coût relativement modeste (1\$/g [Wesson (1)]) comparé à la quantité d'énergie potentiellement récupérable. En revanche, le tritium n'est pas présent à l'état naturel sur Terre, et a une durée de demi-vie de 12,3 ans. Il peut être produit à partir de l'élément lithium Li bombardé par les neutrons issus de la réaction de fusion dans des éléments de paroi spéciaux appelés couvertures tritigènes selon les réactions suivantes :



Les autres réactions de fusion sont plus difficiles à mettre en œuvre, soit par absence de combustible en quantité suffisante, soit à cause d'une section efficace trop faible. Bien que la réaction envisagée à l'étape industrielle soit celle impliquant le deutérium et le tritium, la plupart des Tokamaks actuels n'utilisent que du deutérium. Introduire du tritium, élément radioactif, dans le réacteur implique en effet des mesures de radioprotection strictes. Cependant un simple plasma de deutérium est suffisant pour mener les études actuelles.



**Figure 1.2** – Evolution des sections efficaces de trois réactions de fusion nucléaire courantes.

La plus grande difficulté liée à l'utilisation de ces réactions de fusion est de vaincre l'interaction coulombienne entre les noyaux. En effet, il convient pour les faire fusionner de leur conférer une énergie cinétique suffisante pour traverser la barrière de potentiel électrostatique. En pratique, l'énergie nécessaire est plus faible que celle donnée par un calcul classique de potentiel coulombien grâce à l'effet tunnel. La section efficace d'interaction D-T est donnée par la figure 1.2. Son maximum est atteint autour de 100 keV. Dans les réacteurs actuels, on cherche à atteindre des températures d'une dizaine de keV, ce qui est suffisant pour provoquer des réactions de fusion.

### 1.1.2 Bilan énergétique

Le but de l'utilisation industrielle de la fusion nucléaire étant de dégager plus d'énergie que le fonctionnement de la machine n'en consomme. Pour cela, il convient de réaliser un bilan énergétique du procédé.

Pour un mélange de deutérium et de tritium, la densité de puissance par unité de volume obtenue par les réactions de fusion est donnée par :

$$P_{fus} = n_D * n_T * \langle \sigma v \rangle \xi$$

où  $n_D$  et  $n_T$  sont les densités de deutérium et de tritium,  $\langle \sigma v \rangle$  la section efficace de réaction de fusion et  $\xi$  la quantité d'énergie libérée par réaction. Le maximum de puissance fusion est obtenu pour  $n_T = n_D = \frac{n_{tot}}{2}$ , ce qui donne :

$$P_{fus} = \frac{1}{4} n_{tot}^2 \langle \sigma v \rangle \xi$$

Seule une partie de cette énergie (environ 1/5 d'après l'équation 1.4) contribue au chauffage du plasma de fusion. Cette fraction est en effet portée par les particules alpha qui, du fait de leur charge,

restent confinées dans les champs magnétiques. Le reste de l'énergie issue de la réaction de fusion est porté par les neutrons, qui ne sont pas soumis aux champs de confinement. La puissance de chauffage dû aux particules alpha est donc donnée par :

$$P_{\alpha} = \int P_{\alpha} dV = \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle \xi_{\alpha} V$$

Où  $\xi_{\alpha}$  est la fraction d'énergie de la réaction de fusion portée par les particules alpha et  $V$  le volume du plasma. Les pertes d'énergie dans un plasma de fusion sont représentées par un temps caractéristique de décroissance de l'énergie, appelé temps de confinement de l'énergie  $\tau_e$  défini par :

$$P_{pertes} = \frac{W}{\tau_e}$$

$W$  est la quantité totale d'énergie contenue dans le plasma, et évaluée par :

$$W = \int 3nT dV \approx 3\bar{nT}V$$

On a donc

$$P_{pertes} = \frac{3\bar{nT}V}{\tau_e}$$

où  $T$  est la température moyenne

A l'état stationnaire, les pertes sont contrebalancées par le chauffage des particules alpha et le chauffage additionnel externe  $P_{add}$ . Le bilan d'énergie global peut donc s'écrire :

$$P_{chauff} + P_{\alpha} = P_{pertes} \quad (1.7)$$

$$P_{chauff} + \frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle \xi_{\alpha} V = \frac{3\bar{nT}V}{\tau_e}$$

### 1.1.3 Critère de Lawson

Lorsque le confinement s'améliore, et donc que la température et la densité du plasma augmentent, les réactions de fusion se font plus nombreuses, et la part de la puissance de chauffage provenant des particules alpha croît. Dans de bonnes conditions, cette puissance peut contrebalancer les pertes, permettant ainsi de couper le chauffage externe du plasma. Cet état est appelé l'ignition, par analogie avec les combustibles fossiles. D'après l'équation (1.7), il est atteint lorsque on pose.

$$P_{pertes} = P_{\alpha}$$

c'est à dire,

$$\frac{1}{4} n^2 \langle \sigma v \rangle \xi_{\alpha} V = \frac{3\bar{nT}V}{\tau_e}$$

En considérant la température uniforme sur tout le plasma, on obtient la condition suivante, dont le membre de droite ne dépend que de la température.

$$n\tau_e > \frac{12T}{\langle \sigma v \rangle \xi_{\alpha}}$$

Le minimum du membre de droite est atteint vers 30 keV, ce qui permet d'obtenir le critère dit de Lawson (ou double produit de Lawson), du nom du physicien qui l'a énoncé, en premier, en 1957 [Lawson (2)]

$$n\tau_e > 1,5 \times 10^{20} m^{-3}s$$

Ce critère n'est cependant pas optimal, sachant que le temps de confinement dépend lui-même de la température atteinte. On peut donc chercher à l'affiner en considérant la température comme un troisième paramètre du produit. Dans les gammes de température considérées dans un Tokamak, la section efficace peut être approchée par la relation suivante :

$$\langle \sigma v \rangle = 1,1 \times 10^{-24} T^2 m^3 s^{-1}$$

On obtient donc le critère suivant pour atteindre l'ignition, parfois appelé à tort critère de Lawson, ou triple produit de fusion en imposant :

$$n T \tau_e > 3 \times 10^{21} m^{-3} \cdot keV \cdot s$$

Pour des profils de température et de densité réalistes (paraboliques, par exemple), le critère, appliqué à la température et à la densité centrale devient :

$$\hat{n} \hat{T} \tau_e > 3 \times 10^{21} m^{-3} \cdot keV \cdot s$$

Notons que ce critère n'est basé que sur l'ignition, qui n'est pas forcément le scénario envisagé pour de futurs réacteurs industriels. En effet, le chauffage additionnel externe du plasma constitue un moyen de contrôle de celui-ci, en particulier en cas d'événements imprévus dans la réaction. Par ailleurs, on peut obtenir un bon bilan d'énergie sans aller jusqu'à l'ignition. On s'intéresse dans ce cas au rapport des puissances injectées sur la puissance de fusion obtenue (alpha et neutrons confondus), souvent noté  $Q$ , d'après la relation:

$$Q = \frac{P_{fusion}}{P_{chauff}}$$

La condition  $Q = 1$  est appelée breakeven a été approchée par le Tokamak européen JET pendant la campagne D-T de 1997 [Keilhacker (3)]. Même si l'ignition n'est pas le scénario privilégié pour un réacteur industriel, le triple produit de Lawson est toujours utilisé pour évaluer les performances générales des réacteurs à l'aide de la valeur de  $Q$ .

## 1.2 La configuration tokamak

Afin de satisfaire aux conditions énoncées par le critère de Lawson précédemment exprimé, différentes voies peuvent être employées. Le triple produit faisant intervenir trois facteurs  $\tau_e$  le temps de confinement,  $n$  la densité et  $T$  la température sur lesquels on peut jouer pour atteindre le critère. Par exemple, la fusion par confinement inertiel obtenue à l'aide de lasers de forte puissance privilégie une densité extrême, au prix d'un temps de confinement très court. A contrario, la fusion par confinement magnétique cherche à obtenir une densité

modeste, mais sur des temps de confinement plus longs, de l'ordre de la seconde. Les grandeurs caractéristiques des différents procédés de confinement sont résumées dans la table 1.1. Le procédé "naturel", à savoir, le confinement gravitationnel réalisé dans les étoiles est pris pour référence.

t	Soleil	Confinement inertiel	Confinement magnétique
Température [ $10^6 K$ ]	15	100	100
Densité [ $m^{-3}$ ]	$10^{32}$	$10^{30}$	$10^{20}$
Temps de confinement [s]	-	$10^{-9}$	1

**Tableau 1.1** – Grandeurs caractéristiques associées aux méthodes de confinement les plus courantes

### 1.2.1 Problématique du confinement magnétique

Un plasma est un gaz ionisé dont les ions et électrons sont séparés. Dans un plasma de fusion thermonucléaire dont la température est de l'ordre du  $keV$ , la vitesse moyenne des ions est de l'ordre de la centaine de kilomètres par seconde. Cette vitesse due à l'agitation thermique est isotrope : les ions et électrons se déplacent sans direction privilégiée, et vont donc avoir tendance à se déplacer vers les zones de pression et de température plus faibles détruisant ainsi le confinement du plasma. Afin d'empêcher ceci et de maintenir le confinement, il faut contraindre le déplacement de ces particules. On cherche donc à faire en sorte qu'elles parcourent le plus de distance possible dans le volume de l'enceinte à vide avant de rencontrer un objet matériel, ce qui revient à augmenter leur temps de confinement tel que défini précédemment. Pour ce faire, on les piège dans des champs magnétiques. En effet, l'équation du mouvement d'une particule de charge  $q$  et de masse  $m$  dans un champ magnétique s'écrit :

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

Dans le cas où le champ magnétique est uniforme, orienté suivant la direction  $z$ , les équations de la vitesse des particules dans les trois directions sont les suivantes :

$$\frac{d^2 v_x}{dt^2} = -\omega_c^2 v_x \quad \frac{d^2 v_y}{dt^2} = -\omega_c^2 v_y \quad \frac{d^2 v_z}{dt^2} = 0 \quad (1.8)$$

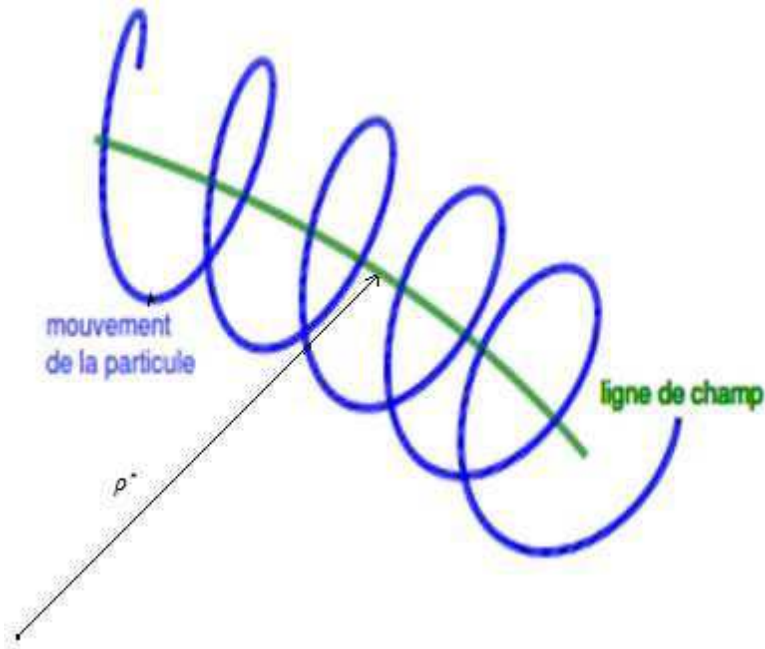
avec

$$\omega_c = \frac{qB}{m}$$

D'où les trois composantes de la vitesse et de la position qui sont :

$$v_x = v_{\perp} \sin \omega_c t \quad v_y = v_{\perp} \cos \omega_c t \quad v_z = Cte \quad (1.9)$$

$$x = -\rho \cos \omega_c t \quad y = \rho \sin \omega_c t \quad z = Cte.t \quad (1.10)$$



**Figure 1.3** – Mouvement d'une particule chargée autour de la ligne de champ

Avec

$$\rho^* = \frac{mv_{\perp}}{qB}$$

où  $\rho^*$  : Le rayon de Larmor. La particule suit donc un mouvement circulaire dans le plan perpendiculaire au champ magnétique et a une vitesse constante dans la direction du champ. Elle est donc contrainte à suivre une trajectoire hélicoïdale le long de la ligne de champ, comme cela est illustré par la figure 1.3.

C'est sur ce principe que se base le confinement magnétique. En enroulant les lignes de champ magnétique sur elles-mêmes dans une structure de forme torique, on maintient les particules du plasma à distance des objets matériels : C'est le procédé de confinement.

### 1.2.2 Configuration magnétique du Tokamak

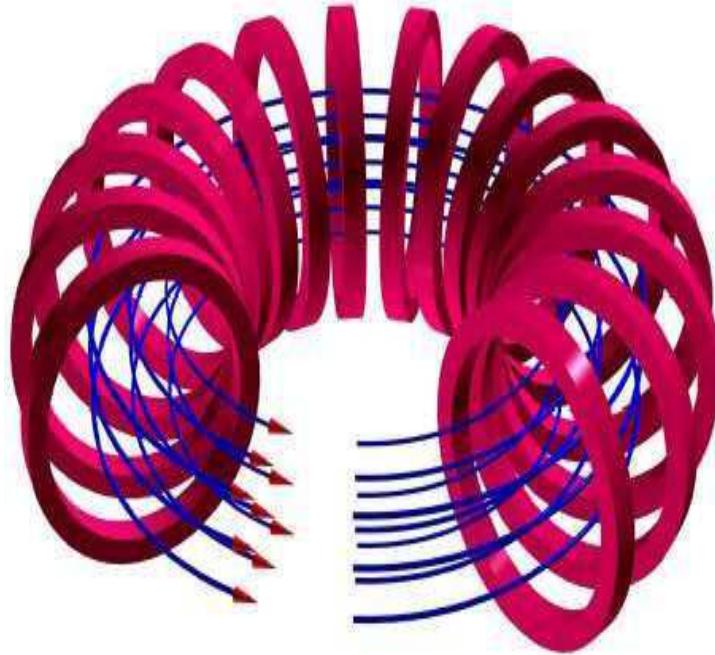
Un Tokamak se présente sous la forme d'une chambre à vide de forme torique contenant le plasma de fusion. Comme on l'a vu précédemment, l'enroulement des lignes de champ sur elles-mêmes dans un tore permet en théorie de confiner les particules : elles sont contraintes à se déplacer le long des lignes de champ (figure 1.4), et ne sortent pas du volume défini par l'ensemble de ces lignes. La distance parcourue par les ions et les électrons avant de rencontrer un objet matériel correspond à une centaine de fois plus grande que sans confinement. Cela revient, en fait, à compenser les forces de pression par une force magnétique qui s'exprime par l'équation:

$$j \times B = \nabla p$$

Cependant, le champ produit de cette façon, dit toroïdal et noté  $B_T$  ou  $B_{\theta}$  qui présente un gradient dans la direction du grand rayon du tore. Il décroît approximativement en  $1/R$ . Ce qui peut conduire à

une dérive des particules. En effet, pendant une giration de Larmor, la force magnétique subie par la particule est plus faible du côté extérieur du Tore que du côté interne. Le rayon de Larmor aura donc tendance à être plus faible du côté interne et plus grand du côté externe, où le champ magnétique est plus faible. La particule va donc dévier. Plus formellement, si le champ magnétique a pour direction  $z$  et son gradient dans la direction  $x$ , l'équation du mouvement de la particule dans la direction  $y$  s'écrit :

$$m \frac{dv_t}{dt} = -ev_x B$$



**Figure 1.4** – Lignes de champ en présence d'un champ toroïdal seul

En considérant que le gradient de champ magnétique est faible, on peut développer  $B$  en se limitant au premier ordre de la forme :

$$B = B_0 + B'x$$

De même, la vitesse peut s'exprimer sous la forme de la somme de la vitesse sans gradient de champ  $v_{x0}$  et de la vitesse de dérive recherchée  $v_d \ll v_{x0}$ , dans l'hypothèse des petites perturbations on a :

$$v = v_{x0} + v_d$$

Ceci conduit à l'équation suivante, en négligeant les termes du second ordre :

$$\frac{m}{e} \frac{dv_t}{dt} = -(v_{x0} + v_d)(B_0 + B'x) = -v_{x0}B_0 - v_{x0}B'x - v_dB_0 \quad (1.11)$$

Or, on a vu précédemment que la vitesse et la position de la particule dans un champ magnétique uniforme sont données par :

$$v_{x0} = v_1 \sin \omega_c t \quad x = \rho \sin \omega_c t$$

L'équation précédente devient :

$$\frac{m}{e} \frac{dv_t}{dt} = -B_0 v_{\perp} \sin \omega_c t - B' \rho^* v_{\perp} \sin^2 \omega_c t - v_d B_0$$

En prenant la moyenne temporelle de cette équation, on obtient l'expression de la vitesse de dérive  $v_d$ :

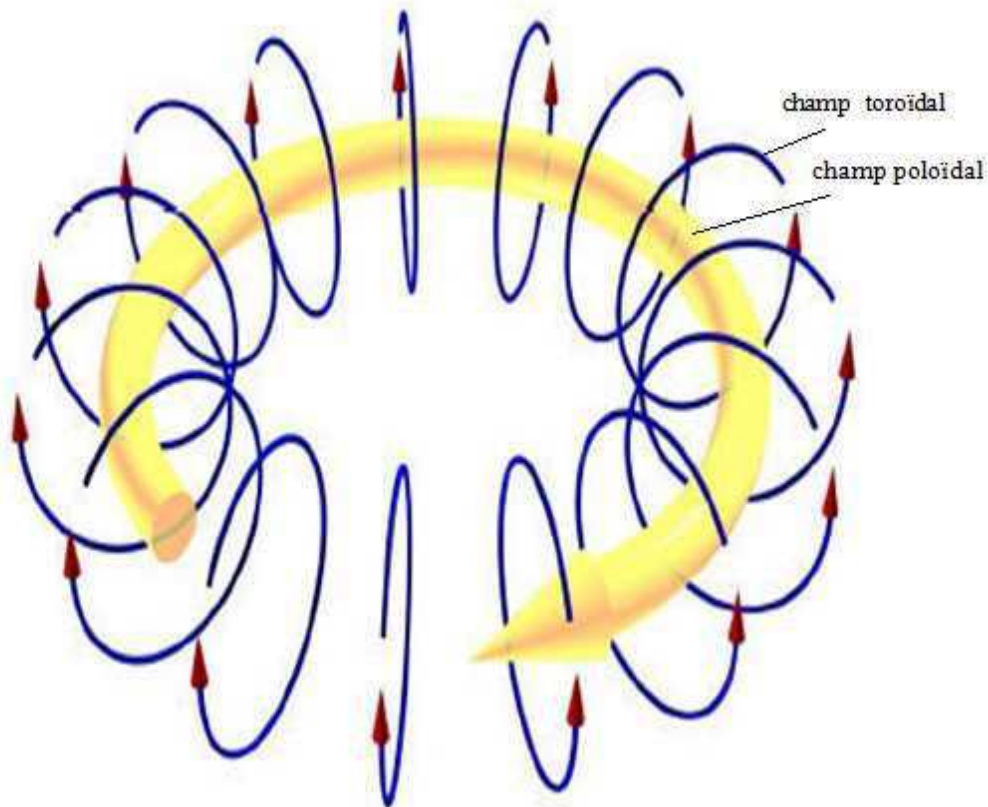
$$v_d = -\frac{\rho^* \mathcal{V}_{\perp} B'}{B} = \frac{1}{2} \frac{\rho^* \mathcal{V}_{\perp} B \times \nabla B}{B^2}$$

Sachant que  $\rho^* = \frac{mv_{\perp}}{qB}$ , cette vitesse de dérive se projette dans un sens opposé correspondants aux ions et les électrons.

La vitesse de dérive de courbure se calcule de la même manière en remplaçant le terme induit par le gradient de champ magnétique par un terme issu de la courbure. La vitesse de dérive totale est alors donnée par :

$$v_{d,tot} = \frac{v_{\parallel}^2 + \frac{1}{2} v_{\perp}^2}{\omega_c R}$$

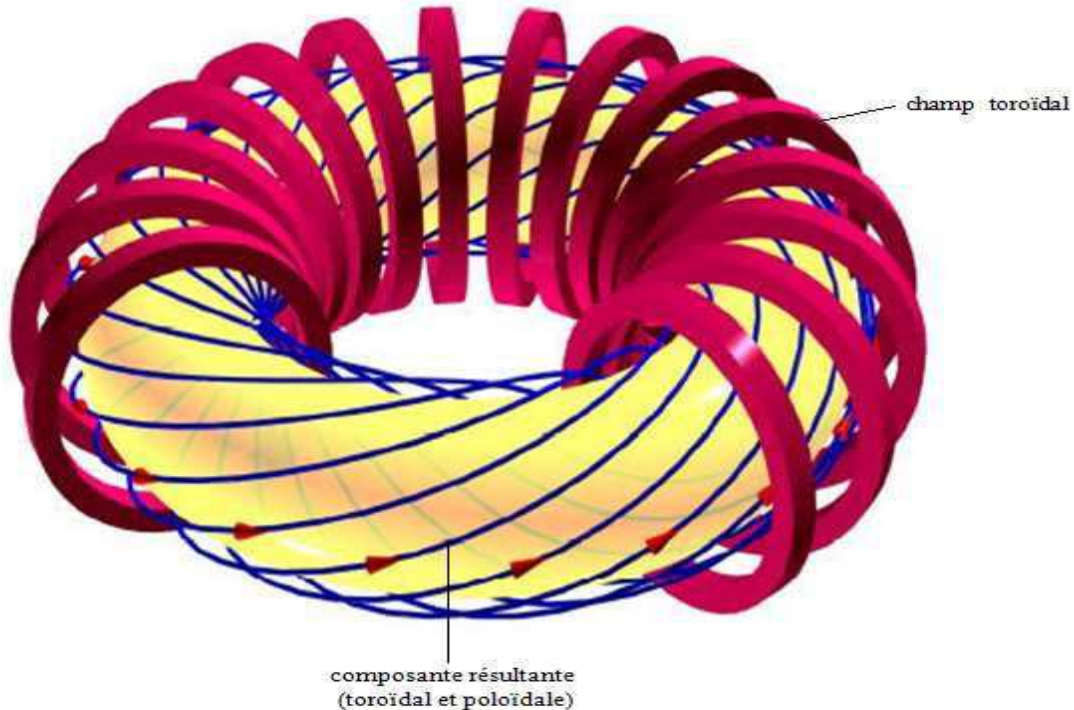
où  $R$  est le rayon de courbure de la ligne de champ.



**Figure 1.5** – Lignes de champ en présence d'un champ poloïdal seul (en bleu)

Pour compenser cette dérive qui peut conduire à un déconfinement du plasma, une solution consiste à ajouter une composante au champ magnétique : la composante dite poloïdale est notée  $B_p$  ou  $B_{\theta}$ , normale au champ toroïdal (figure 1.5). La somme des deux champs forme des lignes hélicoïdales

(figure 1.6). Dans ce cas, les particules passent alternativement au-dessus et en-dessous du plan équatorial, et elles dérivent tantôt vers l'extérieur et tantôt vers l'intérieur du plasma. Le champ poloïdal est généré par le plasma lui-même, dans lequel on fait circuler un courant dans la direction toroïdale. Il est d'un ordre de grandeur plus faible que le champ toroïdal :  $B_p/B_T \approx 1/10$ .



**Figure 1.6** – Lignes de champ en présence d'un champ toroïdal et d'un champ poloïdal

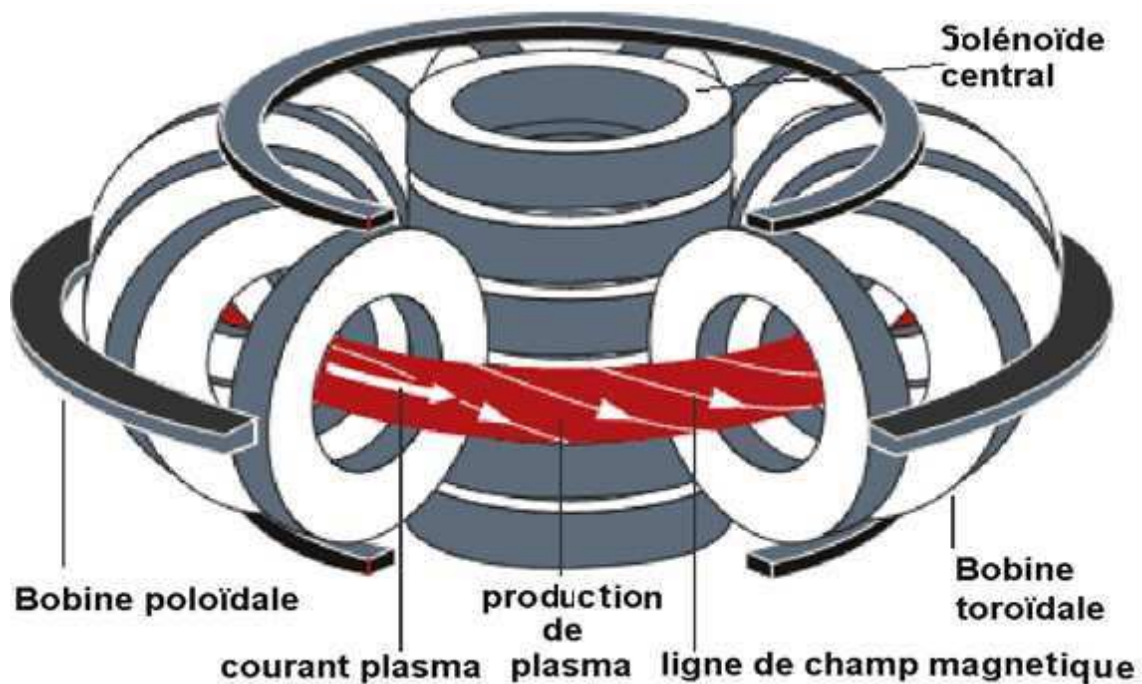
Cette configuration magnétique à deux champs constitue le principe de base du Tokamak. L'étude de l'équilibre du plasma est l'objet de la Magnétohydrodynamique qui assimile ce dernier à un fluide conducteur. Elle permet, en particulier, de montrer que les surfaces sur lesquelles s'appuient les lignes de champ hélicoïdales sont fermées et emboîtées. On les appelle communément des surfaces magnétiques.

Enfin, d'autres sources d'instabilités existent. L'asymétrie de surface du tore engendre un déplacement vers l'extérieur du plasma lorsque sa pression cinétique augmente. Afin de compenser cet effet déformant le plasma et de contrôler sa forme et sa position, il est nécessaire d'ajouter un champ magnétique vertical.

#### 1.2.4 Technologie du Tokamak et réalisation du Tokamak

Un Tokamak est composé de trois éléments principaux : la chambre à vide, les bobines toroïdales et les bobines poloïdales (figure 1.8). La chambre à vide torique maintient les conditions de vide adéquates pour créer le plasma. Les bobines toroïdales créent la composante du champ magnétique du même nom. Les bobines poloïdales ont plusieurs rôles. D'une part, le courant est généré par induction

à partir d'un solénoïde situé au centre du tore. Ce solénoïde est en fait le circuit primaire d'un transformateur dont le secondaire est le plasma lui-même. Puisque le courant dans le solénoïde ne peut pas varier indéfiniment, les plasmas créés dans les tokamaks actuels sont le plus souvent de durée brève : une fois que le courant du solénoïde est « épuisé », la décharge s'arrête. Ceci justifie les dénominations choc, de pulse ou de manière plus générale de décharge qui sont souvent employées pour qualifier un plasma de tokamak. Les bobines poloïdales permettent également de contrôler la position et la forme du plasma en créant un faible champ magnétique vertical. Il faut ajouter à ceci des moyens de chauffage additionnels du plasma. Ces systèmes peuvent être soit des injecteurs de particules neutres à haute énergie, transférant de la chaleur et/ou de la quantité de mouvement au plasma, soit des chauffages par ondes. Ces ondes permettent de chauffer les ions (chauffage à la fréquence cyclotronique ionique, FCI), les électrons tel que le chauffage à la fréquence cyclotronique électronique, FCE et le chauffage à la fréquence hybride basse, LH. Certains de ces systèmes de chauffage peuvent également générer du courant, suppléant ainsi au fonctionnement pulsé du solénoïde central. A l'avenir, de tels systèmes seront indispensables pour assurer un fonctionnement continu d'un réacteur commercial.



**Figure 1.8** – Schéma de principe d'un Tokamak

Un autre système indispensable du Tokamak est l'élément de paroi en contact avec le plasma. Les matériaux constituant l'élément de paroi en contact avec le plasma doivent satisfaire à plusieurs exigences :

- Résister à des flux de chaleur élevés allant jusqu'à  $15 \text{ MW/m}^2$ ;
- Evacuer le flux de chaleur sortant du plasma ;

- Ne polluer le plasma que faiblement. En effet, sous le flux de chaleur du plasma, des particules se détachent de l'élément en contact avec le plasma. Ces dernières rentrent dans la zone confinée et la refroidissent ;

Les matériaux utilisés, constituant les éléments de première paroi, sont le plus souvent les composites de carbone ou des matériaux métalliques à forte tenue aux flux thermiques comme le tungstène, le béryllium ou plus rarement le molybdène. Le carbone présente l'avantage de ne polluer que faiblement le plasma grâce à son numéro atomique faible ( $Z = 6$ ). En effet, plus l'élément est lourd, plus il est susceptible de rayonner une fois ionisé, et donc de refroidir le plasma. Les composites à fibre de carbone ont également d'excellentes propriétés thermiques. En revanche, ils ont tendance à piéger le deutérium et le tritium [Tsitrone (4)]. Dès lors, on parle de *rétenion*, ce qui pose des problèmes de sûreté nucléaire en cas de rupture de l'enveloppe à vide. Les matériaux métalliques ne présentent pas cet inconvénient, et sont donc actuellement testés en remplacement du carbone pour certains éléments de paroi. Le tungstène a ainsi de bonnes propriétés thermiques, mais présente le risque de polluer le plasma du fait de son numéro atomique élevé (74) [Naujoks (5)]. A contrario, le béryllium est plus léger ( $Z=4$ ), mais a de moins bonnes propriétés thermiques : il supporte mal les flux de chaleur élevés. Sa toxicité le rend par ailleurs difficile à manipuler.

Le plasma a également besoin d'être alimenté en particules pendant la décharge. En effet, une partie du contenu ionisé du plasma est neutralisé en arrivant au contact du limiteur, et une partie du combustible est consommée par les réactions de fusion. Il est donc nécessaire de réalimenter régulièrement le plasma. Trois moyens principaux sont utilisés dans cet objectif :

- L'injection de gaz standard. Elle utilise des vannes piézo-électriques et présente un débit faible mais continu de l'ordre de quelques  $Pa \cdot m^3 \cdot s^{-1}$  [Pitcher (6)].
- L'injection supersonique pulsée. Le jet de gaz est plus rapide, mais fonctionne de façon intermittente. Le débit instantané est plus important (de l'ordre de la dizaine de  $Pa \cdot m^3 \cdot s^{-1}$ ) [Bucalossi (7)]
- L'injection de glaçon. Elle consiste à injecter une particule solide de combustible (deutérium ou deutérium-tritium) dans le plasma. Cette technique permet de déposer de la matière plus profondément dans le plasma, mais elle semble plus difficile à mettre en œuvre techniquement [Milora (8)].

En plus de ces éléments, un Tokamak est également équipé d'un ensemble de systèmes de mesure appelés diagnostics. Ces derniers sont utiles pour conduire la décharge plasma : on parle, dans ce cas, de diagnostics en temps réel.

### 1.2.5 Les tokamaks actuels

L'histoire de la recherche sur la fusion a été jalonnée par l'augmentation de la taille des Tokamaks. En effet, le temps de confinement défini dans la section 1.1.2 suit des lois empiriques de dépendance est la taille du plasma. Une de ces lois les plus utilisées est la suivante :

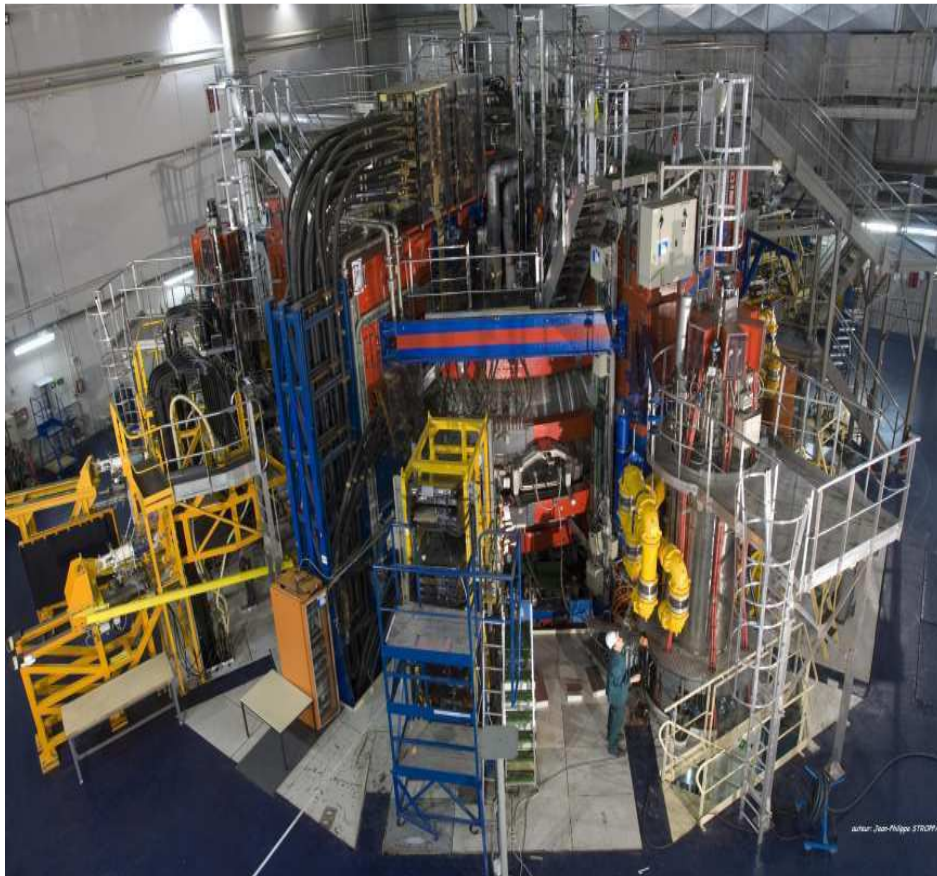
$$\tau_e^{89} \propto R^{1,5} I_p^{0,85} n^{0,1} B^{0,2} P^{-0,5}$$

où  $\tau_e$  le temps de confinement,  $R$  le grand rayon du tore,

$I_p$  courant du plasma,  $n$  la densité,  $B$  champ magnétique et  $P$  la pression.

Depuis les années 50, des Tokamaks, de plus en plus grands, ont donc été construits. Des innovations techniques comme les bobines supraconductrices ont également permis de faire progresser les performances des Tokamaks tant en durée de la décharge qu'en performance de fusion. Nous allons, ici, détailler les caractéristiques des deux machines: le Tokamak français *Tore Supra* et le Tokamak européen *JET*

### 1.2.5.1 Tore Supra



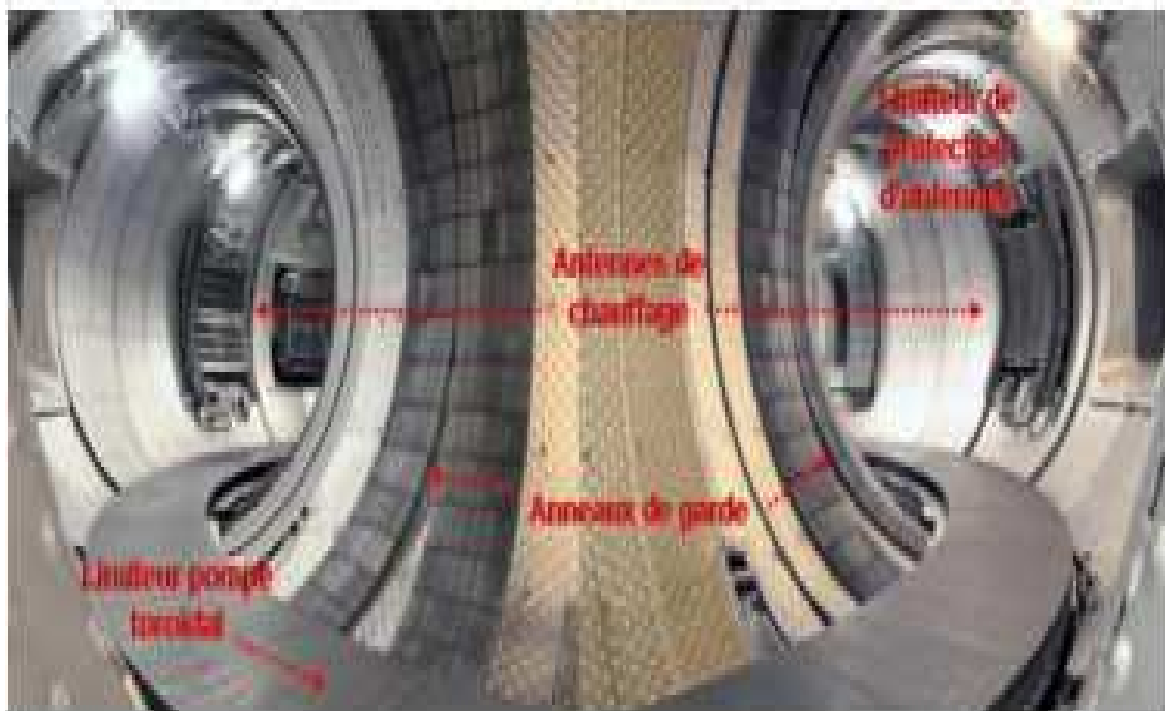
**Figure 1.10** – Vue extérieure du réacteur Tore Supra (Source : CEA/IRFM)

Tore Supra a été mis en service le 1<sup>er</sup> avril 1988 au centre du Commissariat à l'Énergie Atomique de Cadarache. Il est le successeur de TFR, le Tokamak de Fontenay-aux-Roses. Ses principales caractéristiques sont résumées dans le tableau ci-dessous 1.2 [9].

Les principales particularités de Tore Supra sont les 18 bobines toroïdales supraconductrices refroidies par de l'hélium superfluide à 1,8 K et ses composants face au plasma actif

Grand rayon	2,40 m
Petit rayon	0,72 m
Forme du plasma	<i>circulaire</i>
Champ toroïdal	3,85 T
Courant plasma	1,5 MA
Chauffage FCI	9 MW
Chauffage LH	4 MW
Chauffage FCE	500 kW
Volume du plasma	25 m <sup>3</sup>
Durée de la décharge	<i>Entre 10 s et 400 s</i>
Energie thermique du plasma	600 kJ
Energie magnétique du plasma	4.5 MJ

**Tableau 1.2** – Caractéristiques principales de Tore Supra



**Figure 1.11** – Vue intérieure du réacteur Tore Supra (Source : CEA/IRFM)

refroidis par une boucle d'eau pressurisée à 120°C (voir figure 1.10). Le chauffage additionnel du plasma est réalisé à l'aide d'antennes HF (FCI, LH et FCE). Les antennes hybrides, en particulier, peuvent être utilisées pour générer du courant plasma de façon non-inductive, et donc de réaliser des chocs de très longue durée. Un record dans ce domaine a été établi en 2003 avec plus de 1,1 GJ d'énergie injectée puis extraite du plasma, pendant une décharge de 6 minutes [van Houtte (10)]. Le dispositif Tore Supra dispose de trois types d'éléments à paroi différente (voir figure 1.11) :

un Limiteur Pompé à symétrie Toroïdal (LPT) activement refroidi, un limiteur de protection d'antennes sur le côté de champ faible et des anneaux de garde sur le côté à champ fort. Ceux-ci ont, entre autres, pour but d'arrêter les électrons découplés parfois produits durant les décharges. Tous ces limiteurs sont composés de briquettes de composites de carbone (CFC), les autres éléments de paroi sans contact direct avec le plasma sont en inox. Tore Supra dispose également de plusieurs injecteurs supersoniques pulsés (ISPI).

### 1.2.5.2 JET

Le *Joint European Torus* est aujourd'hui le plus grand Tokamak du monde. Construit par l'Europe entre 1979 et 1983, il est basé au "Culham Center For Fusion Energy" (CCFE), près d'Oxford (U-K) et est géré par "(European Fusion Development Agreement)"(EFDA).



**Figure 1.12** – Vue extérieure du réacteur fusion JET (Source : EFDA-JET)

Ses caractéristiques principales sont résumées dans le tableau 1.3.

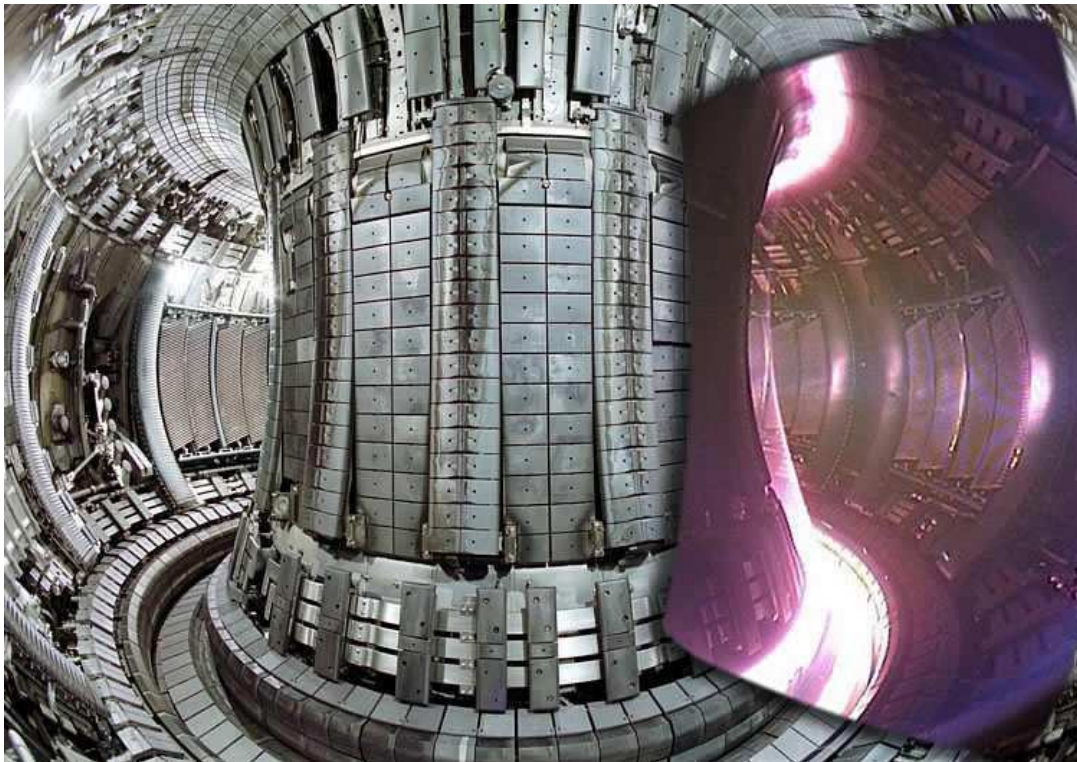
Grand rayon	2,96 m
Petit rayon horizontal	1,25 m
Petit rayon vertical	2,1 m
Forme du plasma	<i>Point X</i>
Champ toroïdal	3.85 T
Courant plasma	<i>max 4,8 MA</i>
Chauffage FCI et LH	15 MW
Chauffage par injection de neutres	23 MW
Volume du plasma	100 m <sup>3</sup>
Durée de la décharge	<i>Jusqu'à 60 secondes</i>
Energie thermique du plasma	10 MJ
Energie magnétique du plasma	10 MJ

**Tableau 1.3** – Caractéristiques principales du JET

JET dispose de 32 bobines toroïdales en cuivre refroidies par eau et d'un système de bobines poloïdales permettant la formation d'un plasma à point X. Son divertor a changé plusieurs fois de configuration depuis son installation, et est actuellement composé de briquettes de composites de carbone. Les autres éléments de paroi sont en acier. Le chauffage du plasma est réalisé principalement à l'aide d'injecteurs de particules neutres, de façon normale ou tangentielle, et d'ondes HF, principalement FCI et LH. La puissance disponible sur JET et la forme du plasma lui permettent d'accéder au mode H, régime de confinement amélioré, ainsi qu'aux barrières internes de transport.

JET détient actuellement le record du monde de la puissance fusion obtenue. Lors de la campagne Deutérium-Tritium menée en 1997, 16 MW ont été fournis par les réactions de fusion, pour un total de 22 MJ d'énergie produite grâce à ces mêmes réactions. Le facteur d'amplification  $Q = 0,65$  a été atteint pendant ces expériences.

JET est actuellement en cours d'amélioration dans le but d'augmenter ses performances. Les éléments face au plasma sont également remplacés par des composants proches de ceux prévus pour ITER : divertor en tungstène, limiteurs en tungstène et première paroi en béryllium.



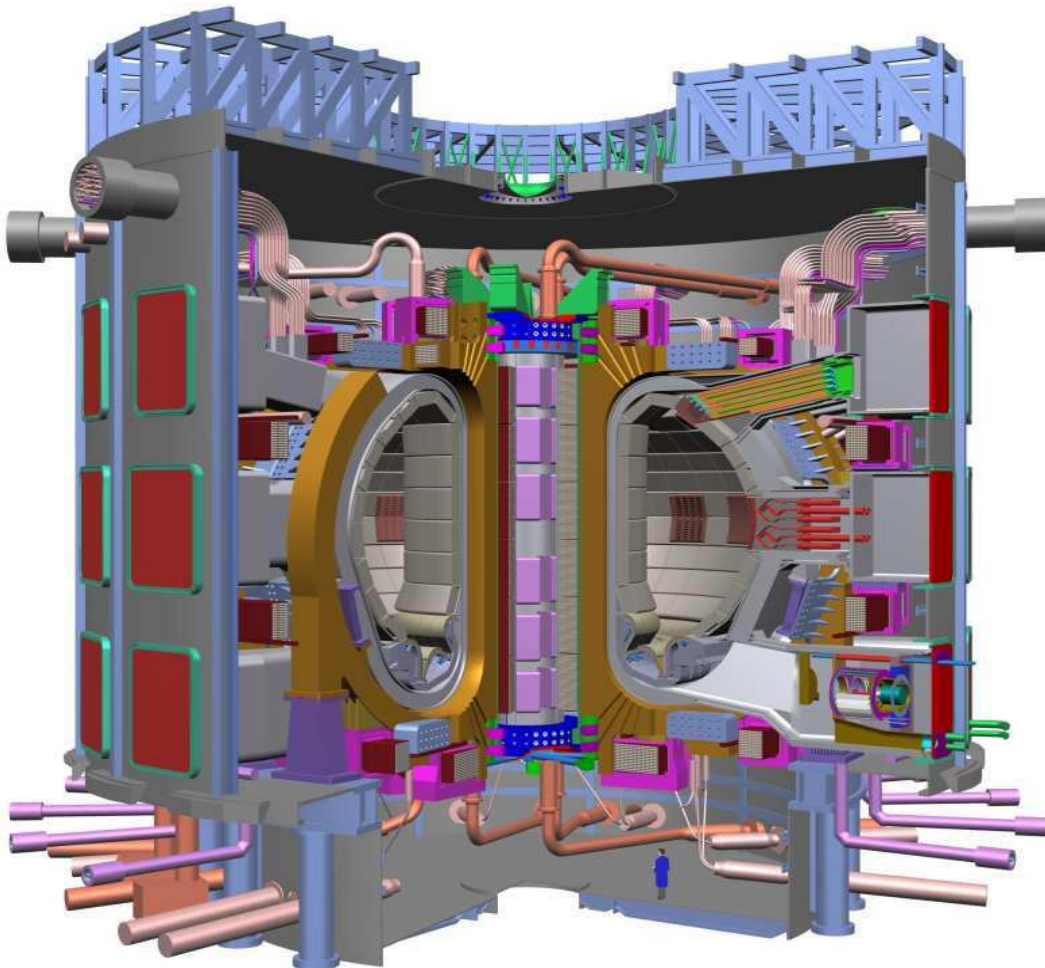
**Figure 1.13** – Vue intérieure du JET (Source : EFDA-JET)

### 1.2.6 ITER

ITER (*International Thermonuclear Experimental Reactor*) est le futur Tokamak international en cours de construction sur le site de Cadarache au sud de la France. Fruit de dizaines d'années d'étude et de collaborations internationales, son premier plasma est prévu en 2019. ITER sera le plus grand

tokamak jamais construit, et une des plus vastes collaborations scientifiques du monde. Son but est de démontrer la faisabilité technique de la fusion nucléaire par confinement magnétique. Les principales caractéristiques du dispositif sont résumés dans le tableau 1.4 [Shimada (11)].

ITER disposera de bobines supraconductrices à la fois pour le système poloïdal et pour le système toroïdal. Ces bobines seront refroidies avec de l'hélium à 4K. Celui-ci ne sera donc pas superfluide, mais permettra de diminuer les coûts liés à l'installation cryogénique. Il devra être capable d'atteindre un facteur d'amplification  $Q = 10$  pour les scénarios deutérium/tritium à haute performance, et  $Q = 5$  pour les scénarios de longue durée. Le projet a également pour but d'explorer la physique des plasmas majoritairement chauffés par les particules alpha produites par les réactions nucléaires (*burning plasmas*), et de tester des modules de couvertures tritigènes qui, à partir des neutrons produits par les réactions de fusion et de lithium, produiront le tritium nécessaire à l'alimentation en combustible



**Figure 1.14** – Schéma en coupe d'ITER (Source : ITER Organization)

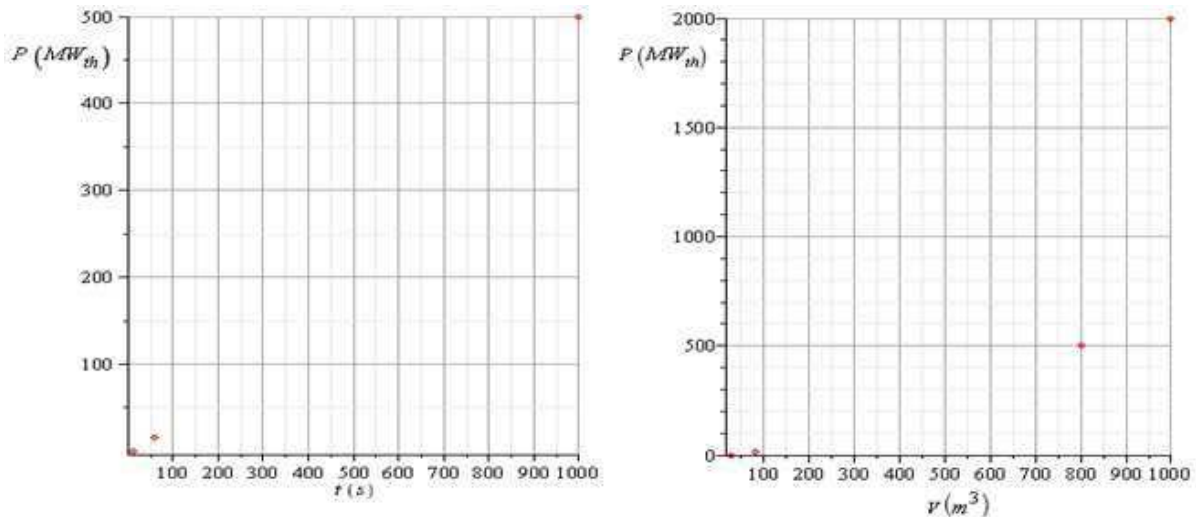
Grand rayon	6,20 m
Petit rayon horizontal	2 m
Petit rayon vertical	3,40 m
Forme du plasma	Point X
Champ toroïdal	5,3 T
Courant plasma	max 15 MA
Chauffage FCI	20 MW
Chauffage FCE	20 MW
Chauffage par injection de neutres	33 MW
Volume du plasma	830 m
Durée de la décharge	Jusqu'à 1000 s
Puissance fusion attendue	500 MW
Energie thermique du plasma	353 MJ
Energie magnétique du plasma	395 MJ

**Tableau 1.4** – Caractéristiques principales d'ITER

de la décharge. Dans la phase deutérium/tritium, ITER sera pourvu d'un divertor en tungstène afin d'éviter la rétention de combustible. Le reste des éléments de paroi sera en béryllium.

Le successeur d'ITER sera DEMO, un réacteur de démonstration préfigurant les premiers prototypes industriels.





*Figure 1.15 – Evolution technologique du procédé ITER en phase d'industrialisation à Cadarache*

### 1.3 Conclusion

La maîtrise de la fusion nucléaire contrôlée est un enjeu majeur pour le développement énergétique de l'humanité pour les décennies à venir. Elle va donner accès à une source d'énergie abondante, peu polluante, intrinsèquement sûre et pour un coût raisonnable. Différentes voies de recherche sont actuellement suivies, la principale étant la fusion par confinement magnétique et sa filière le Tokamak. Celle-ci, après plus de 60 ans de recherches et d'améliorations successives des machines, va franchir une nouvelle étape avec le projet ITER, une des plus grandes collaborations scientifiques de l'histoire de l'humanité. Néanmoins, de nombreuses questions restent encore à résoudre, tant du point de vue physique que technologique, avant de pouvoir concevoir un réacteur industriel à même de fournir de l'électricité. Parmi ces questions, celle de la corrosion des parois de refroidissements qui pose un problème majeur de par les menaces qu'elles font peser sur un fonctionnement sûr et fiable d'un réacteur industriel. Il est donc nécessaire de comprendre les phénomènes physiques qui en sont à la base du processus afin de garantir une durée de vie suffisante au réacteur. C'est dans le cadre d'une prédiction du phénomène de corrosion qu'est envisagée la présente contribution.

# ***CHAPITRE 2***

***Problématique du refroidissement d'un réacteur à fusion***

## Chapitre 2 Problématique du refroidissement d'un réacteur à fusion

### 1. Introduction

L'équilibre de Tokamak est gouverné par les équations de la magnétohydrodynamique. Un plasma est sujet à des perturbations pouvant détériorer cet équilibre et déclencher des instabilités menant à la perte complète de l'équilibre. L'apparition du phénomène de corrosion généré des instabilités de striation qu'est de nature complexe constitue un des facteurs limitant le domaine opérationnel des Tokamaks. Il apparaît donc important d'en comprendre la nature et les conditions de déclenchement. En outre, une corrosion entraîne la perte de matière en paroi de la Boucle de refroidissement sur un temps caractéristique de quelques mois. Ceci représente un risque majeur pour le fonctionnement de la machine dans des conditions de sécurité et de sûreté adéquates.

Pour les futurs Tokamaks, il devient de plus en plus nécessaire ou impératif d'éviter la corrosion ou d'en amoindrir les conséquences. L'objet du présent chapitre est donc de présenter les analyses physiques de la corrosion, et de poser la problématique principale de la notre recherche. Dans une première partie, on présente de façon générale la boucle de refroidissement et dans une seconde partie le phénomène de corrosion avec et sans champ magnétique.

## 2.2 Boucle de refroidissement

La couverture tapisse les surfaces internes de la chambre à vide, protégeant la chambre et les aimants supraconducteurs de la chaleur et des flux de neutrons issus de la réaction de fusion. Elle ralentit les neutrons, transformant leur énergie cinétique en énergie thermique qui sera dissipée par les fluides de refroidissement. Dans les centrales de fusion, cette énergie sera utilisée pour produire de l'électricité.

La couverture a été conçue de manière modulaire afin de faciliter les interventions de maintenance à l'intérieur de la chambre à vide. Chacun de ses 440 modules mesure 1 x 1,5 mètre et pèse jusqu'à 4,6 tonnes. Chaque module se compose d'une première paroi démontable positionnée directement face au plasma et chargée d'évacuer la charge thermique du plasma, ainsi que d'un bouclier semi-permanent qui assurera une protection contre les neutrons.

La couverture est l'un des composants d'ITER les plus critiques et les plus délicats à réaliser du point de vue technique car elle se trouve, directement positionnée face au plasma chaud. À un stade ultérieur du programme ITER, des modules tritigènes figure (2.1) pour générer par elles-mêmes la totalité du tritium dont elles auront besoin, les futures centrales de fusion devront produire de grandes quantités d'énergie. ITER expérimentera ce concept fondamental d'autosuffisance en tritium.

Les matériaux liquides envisagés pour ces dernières couvertures sont l'eutectique liquide  $Pb17Li$  ( $T_f = 235\text{ }^\circ\text{C}$ ) : eutectique avec 17 atomes de Lithium pour 83 atomes de Plomb, soit une concentration de 0.63 % en masse. La communauté européenne a retenu l'alliage Plomb-Lithium pour une raison essentielle liée à sa faible réactivité vis à vis de l'oxygène et de l'eau, risque d'explosion en comparaison avec le Lithium pur. En outre, le plomb présent dans l'eutectique est un multiplicateur de neutron, propriété intéressante pour le type de réaction nécessaire à la production de tritium.

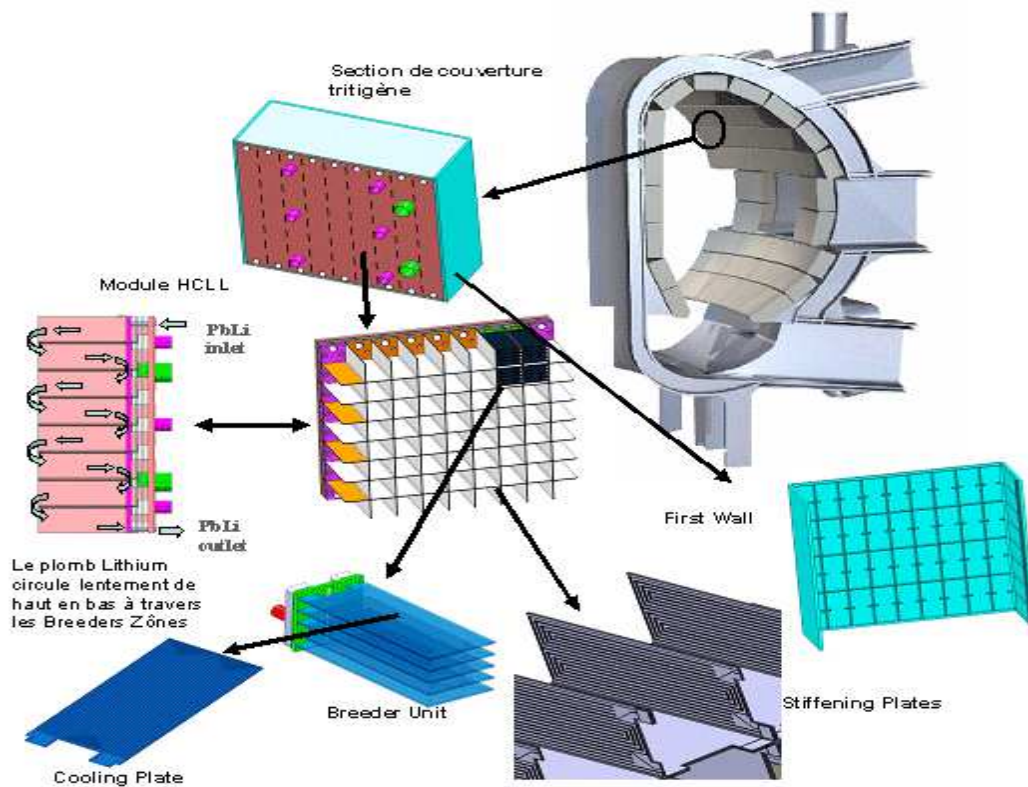
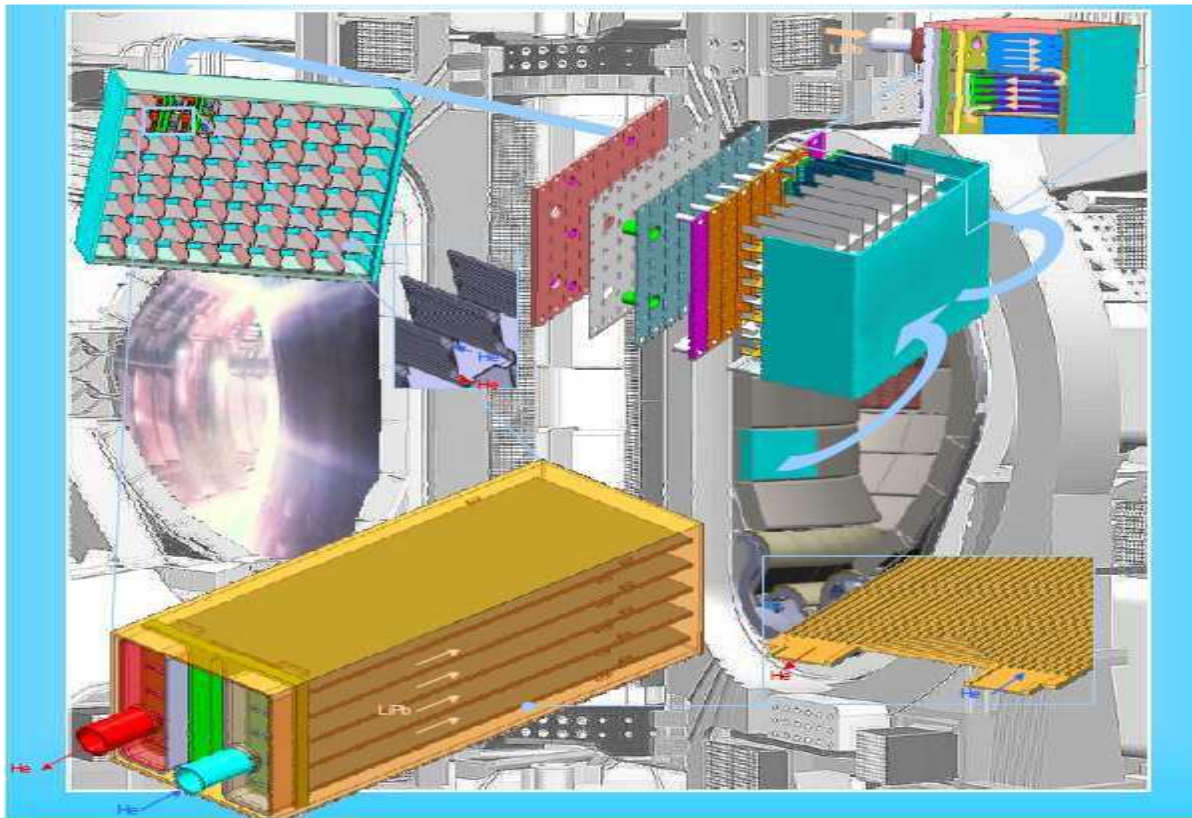


Figure 2.1 : Schéma de conception du refroidissement ITER.

Toutefois, l'alliage Plomb-Lithium est très agressif envers les matériaux de structure, de la boucle de refroidissement qui constitue un inconvénient majeur par rapport au Lithium pur. En conséquence, la compatibilité de l'alliage tritigène liquide Pb-17Li vis à vis des matériaux de structure usuels tels l'acier austénitique 316L et l'acier martensitique 1.4914, envisagés pour les réacteurs à fusion thermonucléaire, a déjà fait l'objet d'un important programme de recherche au sein de la CEE. Ce programme de recherche a pour objectif une meilleure compréhension de l'influence du champ magnétique sur les types d'interactions telles que la corrosion qui interviennent entre l'alliage liquide Pb-17Li, métal de refroidissement et les parois constituant la boucle de transport de LiPb.

### **2.3. Le phénomène de corrosion**

Depuis le début des recherches sur la mise au point d'un métal liquide de refroidissement pour les couvertures de réacteurs de fusion, comme ITER et DEMO, un certain nombre d'expériences ont été effectuées [12], [13], [14] et [15]. Ils ont démontré que la paroi du conduit, faite d'acier martensitique Eurofer 97 sélectionnés pour la couverture ITER, peut être corrodé de façon significative par le métal liquide. Des résultats similaires ont été obtenus pour l'acier austénitique [16]. En particulier, il a été démontré que la présence d'un champ magnétique est responsable d'augmentation de la vitesse de corrosion. Récemment, des nouvelles expériences effectuées à Riga [17], [18] et [19], dans des conditions très voisines des couvertures de fusion, ont fourni de nombreux renseignements et ont donné une base quantitative de mesure du phénomène de corrosion. Ils ont été faits dans les conduits rectangulaires de type Poiseuille, le fluide de travail étant l'alliage eutectique Pb-17Li porté à une température de l'ordre de 550 ° C.

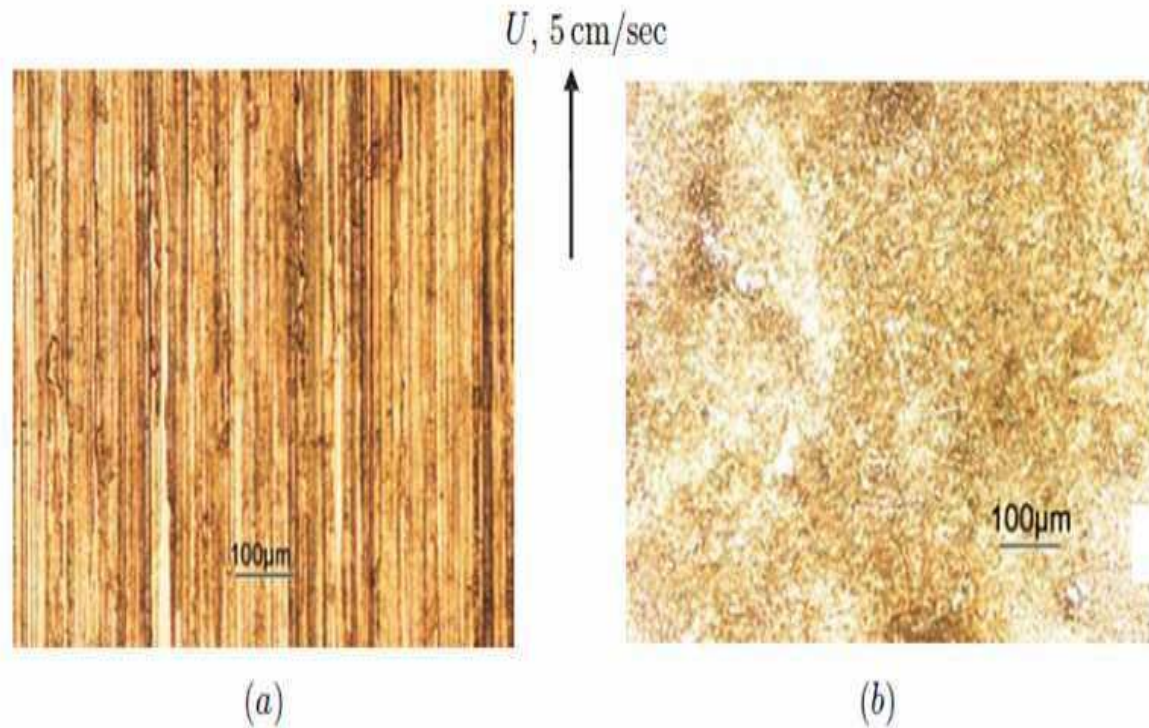
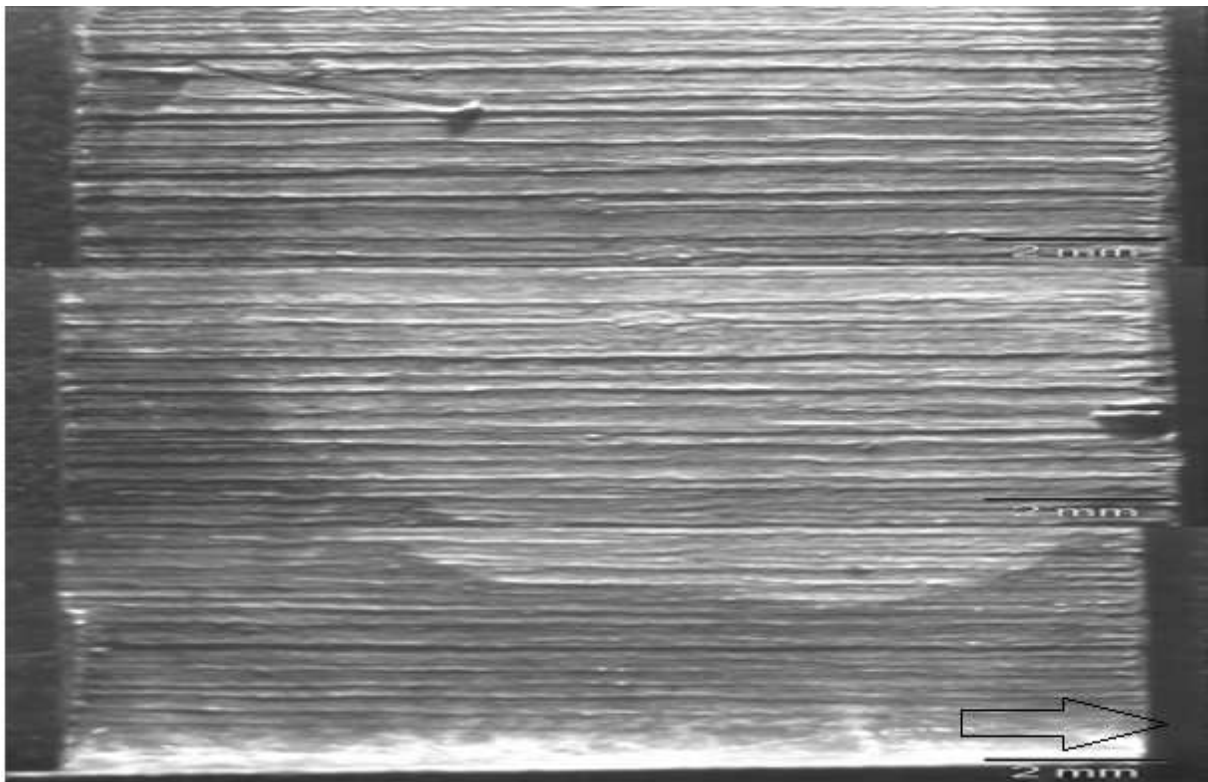


Figure.2.3. Surface de l'échantillon EUROFER corrodé par le métal liquide Pb-17Li pendant 2000 heures. (a)  $B = 1,7 T, T = 550 ^\circ C$ , (b)  $B = 0, T = 570 ^\circ c$  d'après I. BUCENIEKS[18]



**Figure 2. 3.** Observation en microscopie optique de la surface: pariétale. Le fluide s'écoule de gauche à droite. Source d'après R .Moreau et al [17]

Bien que l'intensité du champ magnétique appliquée ne soit pas aussi forte que dans les couvertures réelles, il est assez grand pour fournir le flux typique de Hartmann dont les propriétés sont bien connues [20] et [21]. Un échantillon corrodé de la paroi a été analysé par R. Moreau et al [17] qui confirme la première observation faite à Riga sur les autres échantillons, à savoir, que l'interface corrodée, donne lieu à des rainures spectaculaires alignées dans la direction principale avec la vitesse du fluide et possédant une périodicité claire, (mais pas parfait) dans la direction de l'envergure (voir Figure 2.3).

Il semble donc indispensable de s'intéresser à l'effet du champ magnétique sur l'hydrodynamique pariétale, puisque la corrosion de la paroi en interaction pourrait en dépendre fortement.

L'objectif consiste donc à analyser l'influence de l'hydrodynamique sur les processus de corrosion, et ainsi à identifier le rôle du champ magnétique.

## 2.4. Analyse de phénomène de Corrosion

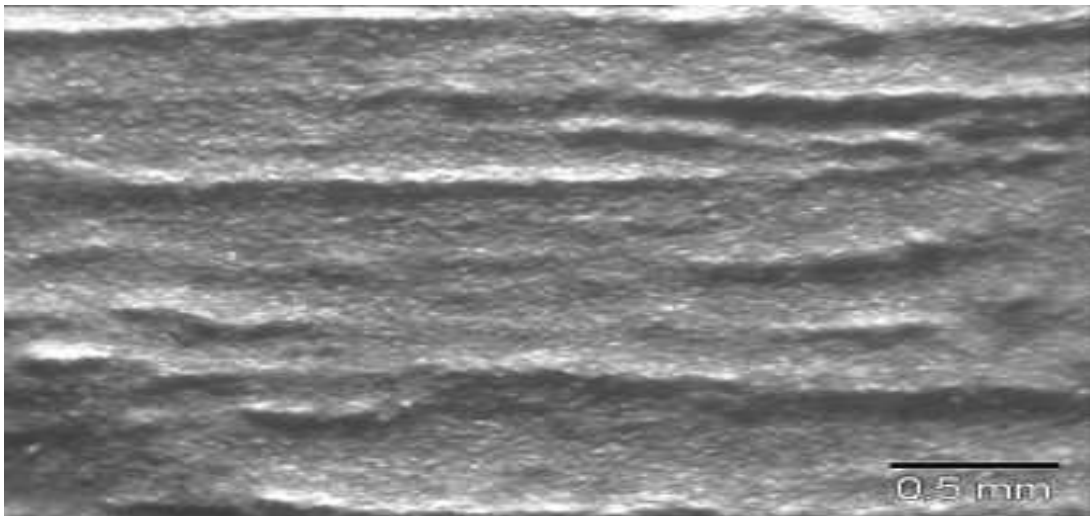
Il s'agit de rapporter brièvement certaines propriétés que l'on dégage des observations de l'état de surface de l'Eurofer par voie d'analyse SEM et de microscopie optique (Travaux de R. Moreau [17]).

### 2.4.1. Analyse physique

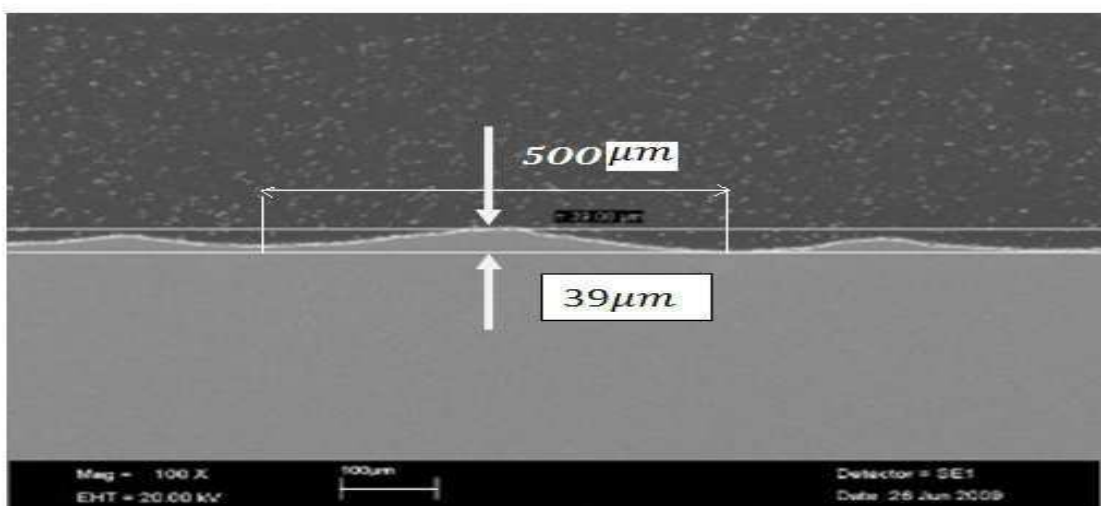
L'interaction entre Eurofer et liquide de plomb-lithium est un processus complexe. Plusieurs auteurs ont déjà étudié [12], [13] et [22] les taux de dissolution global, avec et sans champ magnétique appliqué extérieurement. Parmi les échantillons de paroi d'Eurofer, qui ont été transmis pendant 2000 heures à Pb-Li, à  $T = 550^\circ\text{C}$  en présence d'un champ magnétique de 1,7 T, avec une vitesse moyenne d'écoulement de 5 cm / s. Des informations précises sur cet échantillon corrodé ont été fournies à M.A. BOUABDALLAH par M.R. MOREAU [17] (pour une description détaillée de l'expérience, voir [18]). Au niveau macroscopique, il a été observé que l'épaisseur échantillon a été réduite de 1,5 mm à 1,4 mm, ce qui équivaut à une vitesse moyenne de corrosion de  $1,4 \times 10^{-5} \mu\text{m}/\text{s}$ . L'échantillon après l'exposition apparaît comme des rainures alignées avec la vitesse du fluide, qui peut être estimée par simple contact avec l'échantillon, et qui peut être clairement observée au microscope optique (Figure 2.4). La longueur d'onde dans le sens de l'envergure est de l'ordre de  $500 \mu\text{m}$ , Cela implique que le développement de ce modèle est nécessairement lié au processus d'érosion à l'interface.

Une vue agrandie des crêtes d'onde présente des fluctuations de hauteur, ce qui indique que le mode sélectionné est caractérisé par un vecteur d'onde presque alignés avec la vitesse mais pas exactement ( Figure 2.4 ), et que l'analyse de l'instabilité ne doit pas supposer a priori que la perturbation a une longueur d'onde simple dans le sens de l'envergure.

La section transversale de l'échantillon, observée par SEM, fournit une vue proche : l'amplitude de la fluctuation est de l'ordre de  $20 \mu\text{m}$  et la forme de la fluctuation s'écarte légèrement de forme sinusoïdale, figure 2.5. Ces caractéristiques sont confirmées par profilométrie optique.



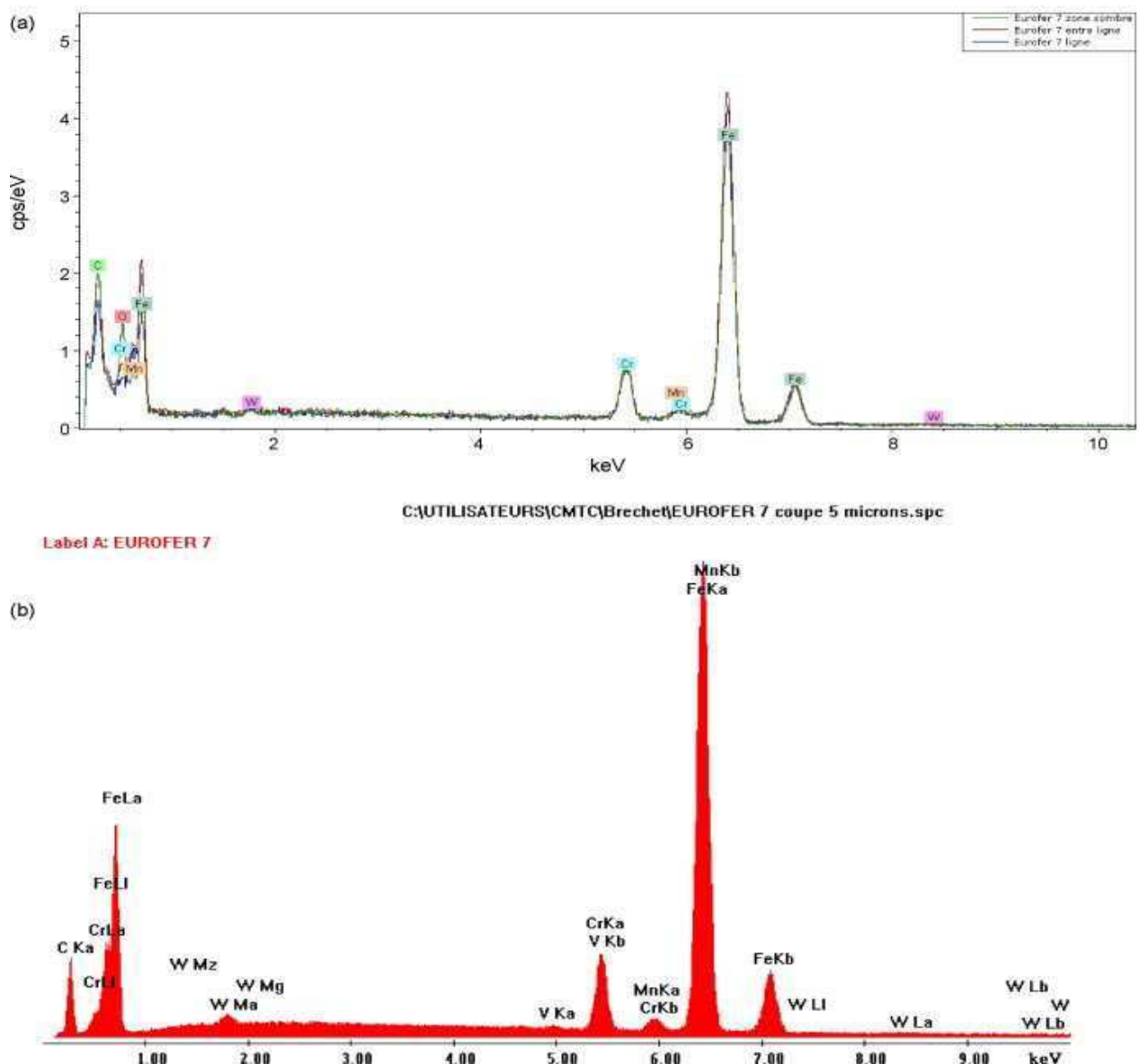
**Figure 2. 4.** Vue agrandie en microscopie optique montrant les caractéristiques le long de la "vague de crête".



**Figure 2.5.** Observation au MEB d'une section transversale présentant la forme des fluctuations de l'épaisseur.

### 2.4.2. Analyse chimique

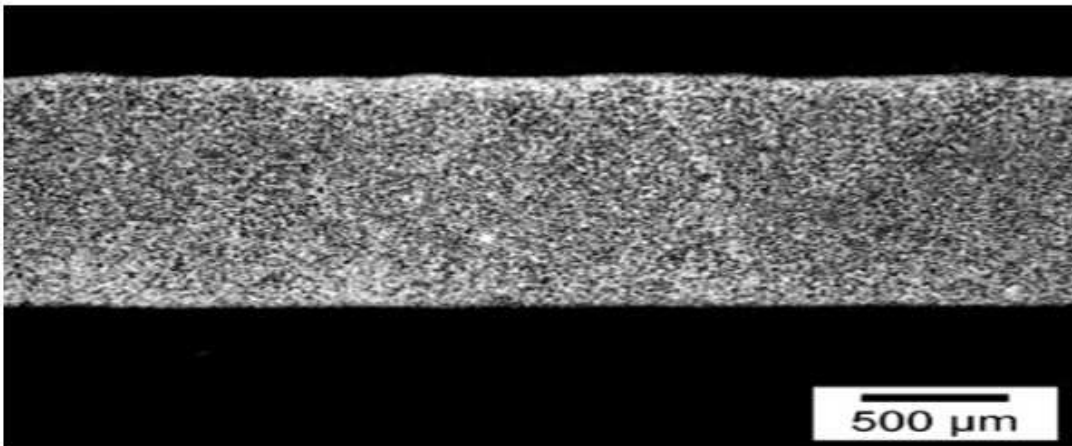
Une analyse chimique de l'échantillon n'a montré aucun signe de diffusion de Pb dans Eurofer: le processus est une dissolution des constituants Eurofer en plomb liquide. (Figure. 2.6) . Des observations supplémentaires après attaque chimique (Figure 2.7), ainsi que les mesures de dureté locales à différents postes dans les vagues montrent une structure uniforme martensitique avec une dureté constante (180 Hv):



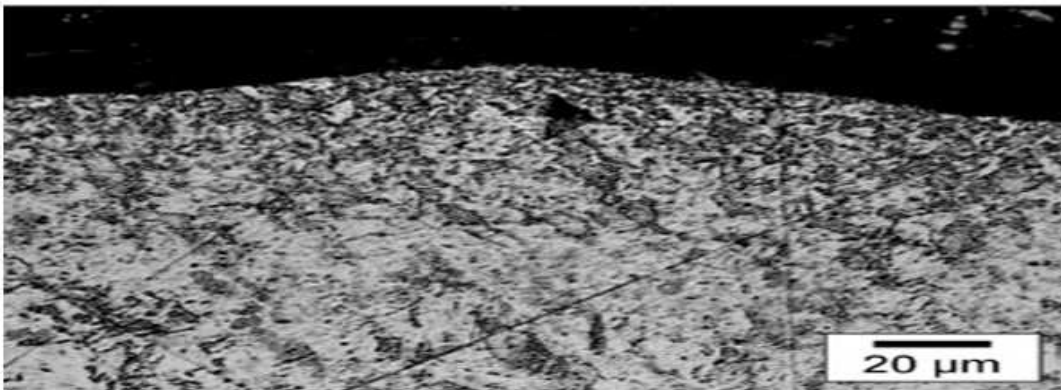
**Figure. 2.6.** (a) EDS-analyse aux rayons X effectué dans SEM à des positions différentes par rapport à la crête de la vague: pas de ségrégation spatiale de l'élément d'alliage est observée. L'analyse chimique (b) à la pointe de la vague de crête.

(M.R.MOREAU [17])

(a)



(b)



**Figure. 2.7.** Gravure chimique révélant la structure martensitique, (a) dans la masse (b) à proximité d'une onde. ( M.R.MOREAU [17])

## 2.5 Conclusion

Ces simples observations conduisent aux conclusions suivantes : Il s'agit d'un processus global à la corrosion d'Eurofer en plomb-lithium, qui est renforcée par la présence d'un champ magnétique. Ce processus global de corrosion semble être, en première approximation, à l'instar de tous les éléments présents dans Eurofer, et il n'y a aucun signe de l'intégration de plomb dans l'acier. La corrosion est spatialement structurée avec une longueur d'onde dominante qui est de l'ordre de  $500\mu m$ , beaucoup plus grande que n'importe quelle fonction de la microstructure de l'alliage: l'origine de cette instabilité se trouve dans le liquide. Cette instabilité est liée à une dissolution renforcement local, et pas à un processus de dissolution / redéposition.

L'objectif consiste donc à analyser l'influence de l'hydrodynamique sur les processus de corrosion, et ainsi à identifier le rôle du champ magnétique. Dans ce but en visant à clarifier et à expliquer théoriquement le processus de la corrosion spatialement structurée.

# ***CHAPITRE 3***

***Les phénomènes d'instabilité pariétale***

## Chapitre 3

## Les phénomènes d'instabilité pariétale

### 3.1. Introduction

L'étude des écoulements pariétaux a toujours été au centre du domaine de la mécanique des fluides. Les premières études s'intéressant en détail à ce phénomène sont généralement attribuées à Prandtl[23]. Son examen des écoulements de proche paroi l'a en effet conduit à négliger les termes inertiels près d'un mur, pour analyser le mouvement des fluides dans ce qu'il nomma alors la "couche de transition". Cette approximation est désormais courante pour faciliter la compréhension, et la modélisation, des écoulements pariétaux. Depuis, de nombreux scientifiques se sont intéressés à cette problématique et le terme "couche limite" est désormais employé dans l'ensemble de la communauté. Il existe de nombreux ouvrages spécifiques à ce sujet (Schlichting[24], Cousteix[25]). La plupart des livres théoriques sur la turbulence contiennent également une section propre aux écoulements de couche limite car l'interaction entre un fluide et une paroi mène à une déstabilisation de l'écoulement, source de turbulence.

L'amélioration du rendement des machines est un enjeu majeur, c'est pourquoi il est nécessaire de progresser dans la compréhension du phénomène de transition du régime laminaire au régime turbulent des écoulements de fluide.

### 3.2 Couche limite laminaire

Le concept de couche limite a été introduit pour la première fois par Prandtl en 1904 pour décrire la région proche de la paroi dans laquelle des effets combinés de la viscosité et de la convection par l'écoulement moyen dominant sur le transport de la quantité de mouvement. La mise en mouvement d'un écoulement autour d'une plaque plane infinie conduit à une diffusion de la quantité de mouvement vers l'intérieur du fluide, la figure 3.1 illustre ce principe. La viscosité est également responsable de la diffusion de la vorticité dans l'écoulement. A l'instant initial, le fluide est au repos et, évidemment, la vorticité est nulle partout, après la mise en mouvement brusque de l'écoulement autour de la plaque il va y avoir la création de la vorticité qui va diffuser par la suite dans la couche limite. En revanche, à l'extérieur de l'écoulement la vorticité n'a pas eu le temps de diffuser et l'écoulement est resté irrotationnel.

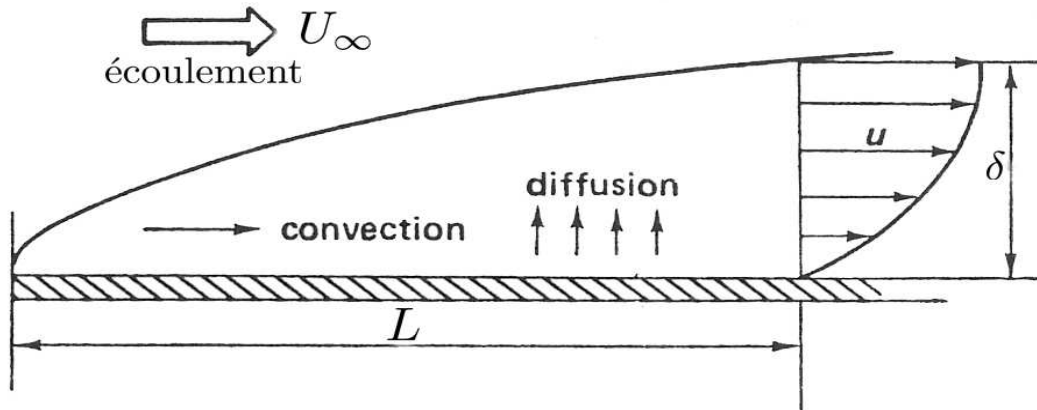


Figure 3.1 : Diffusion et convection dans une couche limite sur plaque plane.

L'enjeu réside alors dans la détermination statistique de ces structures : forme et organisation, classification de la population des tourbillons, orientation des structures, comportement moyen et agitation turbulente de l'écoulement, ou encore mécanismes et lieu de la production de turbulence.

Les premières études qui ont permis de répondre à ces questions sont expérimentales. Diverses méthodes ont été utilisées, comme l'ensemencement de l'écoulement par de la fumée, ou un brouillard de bulles d'hydrogène ou de gouttes d'huile injectées dans la couche limite par des rangées de trous microscopiques. De nos jours, les expérimentateurs préfèrent utiliser des mesures par fil chaud ou des méthodes PIV (Particule Image Velocimetry). Ces études ont notamment permis de mettre en évidence l'existence de structures tourbillonnaires caractéristiques.



Figure 3.2 : Visualisation des "streaks" : écoulement à très basse vitesse formant des structures cohérentes étirées le long de la paroi. Visualisation par méthode LIF (Laser-Induced Fluorescence), réalisée par Gad-el-Hak [[www.efluids.com/efluids/gallery/](http://www.efluids.com/efluids/gallery/)].

### 3.3 Analyse des travaux

On distingue deux types de transition vers la turbulence selon le niveau imposé du taux de perturbation de l'écoulement, comme on peut le voir sur les photos Figure (3.3). Ces photos représentent des visualisations en coupe horizontale d'une couche limite sur plaque

plane, l'écoulement évolue de la gauche vers la droite. On s'intéresse, ici, au début du processus de transition, c'est-à-dire au niveau de la zone où des structures commencent à apparaître. Sur la figure de gauche, où les perturbations extérieures sont minimisées, on observe une instabilité qui se développe sous forme d'une onde se propageant selon l'écoulement principal de façon invariante dans la direction de l'envergure.

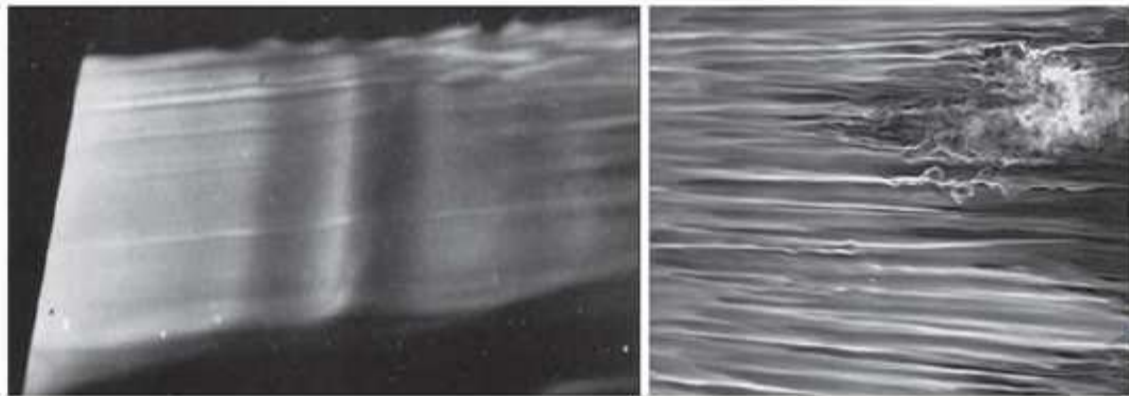


Figure (3.3). A gauche : transition classique par instabilité TS (Tollmien- Schlichting) pour un taux de turbulence extérieure quasi-négligeable (Werlé, ONERA).

A droite : Transition de type by-pass pour un taux de turbulence extérieure de 6% (Matsubara et Alfredsson, KTH[26]).

Sur la figure de droite, où les perturbations extérieures sont imposées par une turbulence de grille, en amont, la topologie semble complètement différente. On observe des striations de vitesse, quasi-stationnaires et invariantes dans la direction de l'écoulement mais alternées dans la direction de l'envergure.

D'autres expériences nous révèlent que, dans la plupart des écoulements sur paroi, on observe que les nombres de Reynolds de transition sont bien inférieurs à ceux prédits par une étude de stabilité linéaire classique. Par exemple, dans le cas de l'expérience de Reynolds, la théorie linéaire prévoit que l'écoulement est inconditionnellement stable jusqu'à  $Re = 5772$  (Orszag 1971), mais les expériences montrent la transition à des nombres de Reynolds près de  $Re = 1300$  (Carlson, Widnall & Peeters 1982; Klingmann 1992; Lemoult, Aider et Wesfreid 2012), sous la forme de spots turbulents isolés.

L'étude qui suit concerne une analyse comparative des approches théoriques, expérimentales et numériques (DNS) de la transition.

### 3.3.1 Approche théorique

Les expériences montrent que les caractéristiques de stabilité d'un écoulement dépendent fortement des conditions initiales et du forçage continu par des perturbations ambiantes. La solution a été cherchée par des approches non-linéaires, le scénario classique étant largement valide des cas faiblement bruités comme ceux rencontrés sur les voilures d'avion.

Cependant l'équation pour l'énergie des perturbations montre que ces termes non-linéaires redistribuent l'énergie entre les modes, ce qui implique qu'initialement, il existe certainement un mécanisme linéaire de croissance des perturbations. A ce sujet on pourra lire entre autre, Waleffe[27] et Henningson [28]. Ce constat amène à l'étude des phénomènes transitoires dans la théorie de stabilité linéaire.

En 1975, Ellingsen et Palm [29] ont montré, avec un modèle non visqueux, qu'une perturbation peut croître linéairement au cours du temps. Landhal en 1975 proposa une explication à partir de l'effet 'lift up' : un tourbillon longitudinal interagit avec le gradient de vitesse de l'écoulement de base pour donner des stries de hautes et basses vitesses.

En prenant en compte la viscosité, Hultgren et Gustavsson ont montré en 1981 que cette croissance algébrique est transitoire puisque suivie d'une décroissance visqueuse. Cependant si les amplitudes atteintes sont trop importantes, les effets non-linéaires peuvent provoquer une transition by-pass. On est alors amené à rechercher la perturbation initiale qui maximise le facteur d'amplification de l'énergie des perturbations. Les premières études de perturbations optimales ont été réalisées par Farrell [30] avec une approche multimodale : les perturbations sont projetées sur la base des fonctions propres des équations de stabilité linéaire. Les comportements asymptotique, amplifié ou amorti, est donné par l'étude modale. Cette limitation au comportement asymptotique pour définir un critère de stabilité est pleinement justifiée pour des opérateurs normaux, c'est-à-dire dont les fonctions propres sont orthogonales, comme c'est le cas pour l'instabilité de Rayleigh-Bénard. Cependant, en général, les opérateurs en hydrodynamique ne sont pas normaux (exemple : Orr-Sommerfeld). Dans ce cas, l'énergie totale des perturbations n'est pas égale à la somme des énergies de chaque mode. On a une interférence constructive ou destructive de plusieurs modes. De ce point de vue, les stries peuvent s'interpréter comme le résultat d'un couplage fort entre les modes Orr-Sommerfeld amortis et les modes de Squire (Hultgren et Gustavsson [31]). C'est ainsi qu'on peut observer une étape de croissance algébrique de l'énergie des perturbations. Butler et Farrell [32] ont ajouté que les plus fortes croissances transitoires correspondent à des perturbations tridimensionnelles.

En 1993, Trefethen et al. ont publié dans la revue Science [33] un article de synthèse sur les conséquences de la non-normalité d'un opérateur sur les critères de stabilité. En plus de la croissance algébrique, ils ont démontré la forte sensibilité de ces opérateurs décrivant la dynamique des perturbations. Ils ont défini un pseudo-spectre comme étant la réunion des spectres de l'opérateur soumis à une perturbation de norme inférieure à un certain paramètre  $\varepsilon$ . Dans le cas d'un opérateur normal, le pseudo-spectre est l'ensemble de tous les points situés à une distance inférieure à  $\varepsilon$  du spectre, mais dans le cas d'un opérateur non-normal cet ensemble est beaucoup plus grand. L'étude spatiale de perturbations optimales pour l'écoulement de Blasius parallèle a été réalisée par Tumin et Reshtho [34] en 2001, à l'aide d'une méthode multimodale.

La prise en compte du non-parallélisme de la couche limite a nécessité de nouvelles méthodes numériques puisque les équations de stabilité deviennent des équations aux dérivées partielles, dépendant de la coordonnée longitudinale, ce qui pose des problèmes techniques pour le calcul des modes propres. Luchini [35] ou Andersson et al. [36] ont alors utilisé une technique d'optimisation basée sur les multiplicateurs de Lagrange. Les valeurs relativement importantes des nombres de Reynolds de transition, ainsi que la forme quasi-stationnaire des perturbations mises en jeu dans une étude de croissance transitoire ont amené Luchini [37][35] à modéliser l'évolution des perturbations dans la limite des approximations de Prandtl. L'instabilité se développe donc indépendamment du nombre de Reynolds, en net contraste avec les prévisions classiques sur les modes TS qui font apparaître une valeur critique. Ce type d'adimensionnalisation s'est avéré efficace pour modéliser les phénomènes de croissance transitoire. Goldstein et Wundrow [38] obtiennent des résultats similaires sur l'interaction entre des tourbillons longitudinaux extérieurs et la couche limite par une méthode de développement asymptotiques. Récemment les calculs de perturbations optimales ont été étendus aux régimes non linéaires, toujours dans le cadre des approximations de Prandtl, par Zuccher et al. [39].

Ces travaux décrivent la première étape de la transition du laminaire vers le turbulent. On peut analyser le chemin inverse : comment un écoulement turbulent se laminarise. Cette nouvelle approche consiste à étudier la formation, l'évolution et les interactions de structures cohérentes métastables.

Ces structures sont des solutions non-triviales des équations de Navier-Stokes. Elles peuvent être calculées par une méthode de déformation continue par exemple. Nagata en 1990 suit la branche de solution des tourbillons de Taylor-Couette, en se plaçant dans la limite de courbure infinie des cylindres pour atteindre un écoulement de type Couette plan. Il obtient un

état stationnaire d'amplitude finie tridimensionnel qui apparaît à  $Re=125$  selon une bifurcation sous-critique. Dans le même esprit, Clever et Busse ont étudié l'écoulement dans un canal qu'ils superposent à une instabilité de type Rayleigh-Bénard. Par un passage à la limite, en faisant tendre le nombre de Rayleigh vers zéro, ils obtiennent un état 3D stationnaire pour  $Re \leq 145$ . Une analyse de la stabilité linéaire de ces solutions (1997) montre qu'une bifurcation sous-critique de ces solutions conduit à de nouvelles solutions 3D sous la forme de rouleaux oscillants.

Cherhabili et Ehrenstein (1995) [40] sont partis de solutions 2D de l'écoulement de Poiseuille à  $Re=2200$  et ils ont étudié la déstabilisation du mouvement secondaire. Ils établissent, dans ces conditions, des solutions 2D sous forme d'ondes progressives d'amplitudes finies. Lors du passage à la limite de l'écoulement de Couette plan, ces solutions deviennent des ondes stationnaires. L'étude de la stabilité de ces solutions faites par les mêmes auteurs en 1997 [41] montre que les perturbations les plus instables sont 3D, périodiques en envergure et localisées dans la direction de l'écoulement, cet état pouvant être assimilé à un point fixe instable d'amplitude finie.

Hamilton, Kim et Waleffe (1995) [42] ont étudié par la technique de simulation DNS l'écoulement de Couette plan dans une boîte de taille minimale pour que la turbulence puisse être soutenue. En réduisant la taille du système, ils observent un processus quasi-cyclique et spatialement organisé de régénération de structures. Ils en déduisent un nombre de Reynolds critique basé sur l'espacement transversal minimum pour le processus d'auto-sustentation de ces structures (ssp). Waleffe [42] par la suite propose un modèle conceptuel de ce processus en trois phases : formation des stries par des tourbillons longitudinaux, déstabilisation des stries, régénération des tourbillons longitudinaux. C'est le cycle de paroi d'un écoulement turbulent pariétal. Il reste cependant assez vague sur la détermination des conditions de fermeture du cycle, c'est-à-dire sur la régénération des tourbillons.

Récemment on a enregistré une synthèse des travaux à caractère théorique et expérimental de ces structures cohérentes pour l'écoulement dans une configuration de type pipe on tube qui a été publiée par Hof et al dans la revue Science [43].

### 3.3.2 Approche expérimentale

Récemment plusieurs expériences ont été réalisées sur l'influence de la turbulence extérieure qui ont été passées en revue par Kendall [44] (1998). Les premiers travaux sont attribués à Taylor (1939), Dryden (1937) et Klebanoff [45] (1971) qui ont observé effectivement des structures tridimensionnelles allongées dans la direction de l'écoulement.

En 1978 Arnal et Juillen [46], ont réalisé les premières expériences détaillées concernant le développement d'une couche limite laminaire soumise à une turbulence extérieure. Pour le cas sans grille, on observe une transition naturelle, le signal fréquentiel montre des fluctuations sinusoïdales (mode TS) à 500 Hz dont le maximum d'amplitude se situe aux environs du quart de la couche limite. Pour le cas avec grille, on observe des fluctuations de vitesse longitudinale  $u_{rms}$  pouvant atteindre un niveau suffisant de la vitesse extérieure avant le début de la transition. Ces fortes amplitudes des valeurs rms contrastent avec les valeurs obtenues dans le cas sans grille puisque les ondes TS avec des amplitudes de niveau de 1% peuvent déclencher la transition. Dans le cas avec grille, pour des niveaux de turbulence extérieure importants ( $Tu = 0.1 - 1\%$ ), les fluctuations dominantes dans la couche limite ne sont plus des ondes TS. L'énergie associée aux perturbations dominantes est concentrée dans les basses fréquences et le maximum de fluctuation se situe vers le milieu de la couche limite. Ces expériences ont également montré que le spectre d'énergie dans la couche limite est dominé par de basses fréquences contrairement à l'écoulement extérieur où le spectre est caractéristique d'une turbulence de grille. Ce phénomène est le résultat d'une combinaison entre un filtrage des perturbations extérieures ou 'shear sheltering' [47], et l'amplification de stries quasi-stationnaires. Plus la couche limite s'épaissit et plus le filtrage est opérant. Ainsi, près du bord d'attaque, une large partie du spectre de la turbulence extérieure se retrouve dans la couche limite, alors que les structures cohérentes émergent plus en aval. Par ailleurs, on note que les fluctuations de vitesse longitudinales à l'intérieur de la couche limite sont décorréelées de l'extérieur. Le mécanisme de production des stries est donc intrinsèque à la couche limite indépendamment de la fluctuation de vitesse longitudinale extérieure ( $u'$ ). Toutefois, les études théoriques indiquent qu'il dépend également de la fluctuation normale ( $v'$ ).

Le facteur de forme H de la couche limite décroît légèrement en présence de stries. On peut en déduire qu'une couche limite perturbée est plus stable vis-à-vis des ondes TS. En effet, Arnal et Juillen [46] ont constaté que les ondes TS sont d'autant moins visibles que les stries sont développées. Il est cependant difficile de mesurer les ondes TS de faibles amplitudes dans un écoulement perturbé. En imposant des oscillations par ruban vibrant, Boiko et al. [48] ont pu étudier le cas des ondes d'amplitude finie en utilisant une technique de filtrage correspondant à la sélection de phase. Ils ont démontré que les ondes TS peuvent exister et se développer. En outre, les effets non linéaires génèrent des ondes sur toute la gamme de fréquences instables. Il en résulte une augmentation significative du nombre de spots turbulents, favorisant le processus de transition. Cependant, en l'absence de forçage

harmonique, il semblerait que le rôle des ondes TS dans le processus de transition en présence de stries n'est pas important. De plus, en présence de perturbations extérieures la transition peut se produire dans des régions où les ondes TS sont stables, par exemple, dans le cas d'écoulements accélérés. C'est pourquoi, ce genre de transition a été qualifié de 'bypass' par Morkovin [49].

Bakchinov et al. [50] (1995), ont abordé la stabilité d'une couche limite perturbée par des tourbillons longitudinaux. Les tourbillons sont créés directement dans la couche limite par des rugosités arrangées régulièrement en envergure. La transition n'est pas la conséquence directe des structures de sillage, mais par la croissance d'ondes instables situées au dessus des tourbillons stationnaires. Cette situation est analogue à celle rencontrée dans le cas de l'instabilités Göertler ou cross-flow. Les ondes instables croissent linéairement jusqu'à ce que les effets non-linéaires fassent apparaître des harmoniques pour déclencher la turbulence selon un scénario modal classique. Même si cette instabilité est observable au travers d'un processus de réceptivité naturelle, Bakchinov et al. [50] ont également étudié les caractéristiques de cette instabilité soumise à un forçage donné (ruban vibrant). L'instabilité semble être liée au cisaillement transversal. L'amplitude maximale est localisée au niveau de la distance de la paroi où la vitesse moyenne est égale à la vitesse de phase, c'est-à-dire au niveau de la couche critique. Les fréquences observées sont bien au-dessus des fréquences caractéristiques des ondes TS. Cependant le forçage des ondes TS montre que celles-ci s'amplifient plus rapidement en présence de tourbillons par des effets d'interactions non-linéaires. Ils ont ajouté, en perspectives, qu'il restait à comparer ces analyses au cas d'une couche limite perturbée par une turbulence de grille.

Les stries sont également présentes en excitant localement, de manière impulsionnelle, un écoulement cisailé. Ces structures finissent alors par s'amortir et sont parfois appelées 'puffs'. Westin et al.[51] (1998) ont à ce sujet étudié la réponse d'une couche limite à un jet impulsionnel situé en amont du bord d'attaque et au-dessus de la ligne de séparation. Le jet (négatif) génère deux tourbillons contra-rotatifs, leur vitesse inter-tourbillons étant dirigé vers la plaque. Au fur et à mesure que la couche limite s'épaissit, une strie de haute vitesse associée à deux stries de basse vitesse se développent et finissent par décroître. La nature à caractère impulsionnelle de cette expérience permet de comparer les différentes vitesses de propagation du front et de l'arrière du 'puff'. Une évaluation montre que le front se déplace légèrement plus vite que l'arrière ce qui donne un étirement longitudinal.

Des expériences plus récentes, confirment les résultats de base évoqués précédemment et, qui ont été réalisées par Matsubara et al. (2001) [52]. Ils ont effectué des mesures dans une

couche limite soumise à une turbulence de grille pour des taux variant de 1 à 6%. Leur étude, très complète, est basée sur différentes vitesses et différentes grilles. Leurs moyens de mesures sont le fil chaud et les visualisations par injection de fumée. Ils retrouvent les caractéristiques classiques des stries mentionnées précédemment. La fumée est un bon traceur pour les stries car elle se comporte comme la quantité de mouvement. [Les fluctuations de vitesse normale dirigées vers le haut, et réciproquement une fluctuation vers le bas amène de l'air sans fumée près de la paroi. En éclairant par une nappe de lumière, on distingue ainsi des zones claires (stries négatives), et des zones sombres (stries positives)]. A partir de ces visualisations, qui peuvent s'interpréter comme la distance caractéristique entre deux stries, celle-ci converge en aval vers la valeur  $3\delta_1$ , où  $\delta_1$  désigne l'épaisseur de déplacement. Cette valeur correspond approximativement à l'épaisseur de la couche limite. Avant d'atteindre cette valeur asymptotique, la distance inter-stries dépend de la grille utilisée. Ce résultat est confirmé par des mesures au fil chaud. Il faut ajouter qu'à l'extérieur de la couche limite, la corrélation est strictement décroissante, en accord avec les caractéristiques d'une turbulence de grille. Ainsi, les corrélations mesurées dans la couche limite sont bien le résultat d'un mécanisme intrinsèque. Matsubara et al, ont également réalisé une analyse spectrale. En convertissant le signal temporel du fil chaud, par la transformée de Taylor ( $U_\infty \rightarrow x$ ), ils obtiennent que le spectre adimensionnel, selon la direction longitudinale,  $E^*(\alpha^*) = E(\alpha)/U_\infty^2 Re_x$ , est constant quel que soit  $x$ . En d'autres termes, ils observent des oscillations longitudinales avec un nombre d'onde proportionnel à l'épaisseur de couche limite, malgré le filtrage.

Jonas et al. [53] ont évalué expérimentalement l'effet des échelles spatiales de la turbulence extérieure sur la transition by-pass. Une turbulence à petite échelle fait transitionner plus tard la turbulence de même intensité qu'avec une échelle plus grande.

Les caractéristiques générales des stries qui se dégagent des expériences sont les suivantes :

- très basses fréquences comparées à celles des ondes TS ;
- sélection d'échelles transversales ;
- croissance de l'amplitude des stries en  $\sqrt{x}$  ;
- grandes amplitudes  $O(10\%U_e)$  ;

Il existe un parallèle avec les instabilités centrifuges (Göertler ou Dean). Ces écoulements font naturellement apparaître des tourbillons et des stries qui correspondent, ici, à une instabilité modale. Cependant pour les écoulements plans, en l'absence de courbure, l'écoulement n'est plus linéairement instable et devient non-linéairement instable : instabilité

d'amplitude finie. Pour plus de détails, on suggère de se référer à Swearingen et Blackwelder [54] qui donne une interprétation de l'instabilité de Göertler. On peut distinguer les différentes instabilités qui se superposent aux stries selon leurs symétries :

-mode variqueux :  $u, v$  symétriques par rapport au milieu de la strie,  $w$  antisymétrique. Ce mode, situé sur le haut des stries, correspond à des stries très espacées, de grandes longueurs d'onde.

-mode sinueux :  $u, v$  antisymétriques par rapport au milieu de la strie,  $w$  symétrique. Ce mode, situé sur les flancs des stries, correspond à des stries très rapprochées, de faibles longueurs d'onde.

Le mode variqueux est le résultat d'une instabilité de type Kelvin-Helmholtz sur une inflexion du profil dans la direction normale à la paroi. La transition est caractérisée par des structures  $\Lambda$  ou en 'fer à cheval' (voir figure 3.4), avant que les interactions fortement non-linéaires provoquent la transition vers la turbulence. On appelle cette transition une transition de type K (ou transition harmonique car l'instabilité secondaire est de même fréquence que le mode TS).

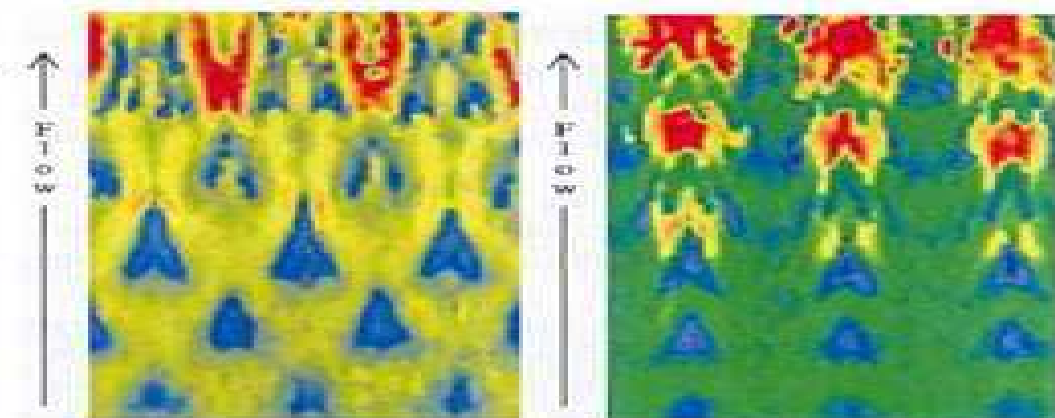


Figure (3.4). Champ de vitesse longitudinale instantanée mesurée par PIV pour une transition de type H (à gauche) et de type K (à droite), d'après Belin et al [55].

Un scénario similaire, dit de type H (ou sub-harmonique) a, par la suite, été observé par Kachanov, Kozlov et Levchenko [56]. Dans ce cas, les ondes TS interagissent avec des ondes obliques dont la fréquence est la moitié de celle du mode TS. Les rangées de tourbillons  $\Lambda$  qui se forment suite à cette interaction sont en quinconce (voir figure 3.4). Herbert (1983) a montré, par analyse de Floquet, que ces structures 3D résultent d'une instabilité secondaire de l'écoulement moyen perturbé par le mode TS [57].

### 3.3.3 Approche numérique

Fasel [58] a étudié l'interaction entre les stries et les ondes TS par DNS. Pour modéliser la turbulence extérieure il a utilisé une force de volume concentrée près du bord d'attaque, qui génère des tourbillons longitudinaux de basses fréquences à l'extérieur de la couche limite. Le forçage est choisi comme une somme de modes de Fourier en  $z$  et  $t$ , avec des amplitudes gaussiennes en  $x$  et  $y$ . Les instabilités TS sont générées par soufflage/aspiration à la paroi. L'interaction génère un paquet d'ondes tridimensionnel d'amplitude croissante. Pour une certaine amplitude, des instabilités secondaires, par résonance fondamentale, causent la rupture vers un spot turbulent. Cependant l'amplitude des stries croît comme  $x^{0.75}$  en linéaire et  $x^{0.6}$  en non linéaire. Pour Fasel [58] la route vers la turbulence est le résultat d'une résonance fondamentale avec une instabilité décrite par la théorie de Floquet. La transition by-pass ne serait d'après lui qu'une transition classique déformée par les variations transverses de l'écoulement de base.

Anderson et al. [59] ont étudié numériquement la déstabilisation des stries dans une couche limite. Les stries sont générées en injectant, en entrée, les tourbillons issus de la théorie linéaire des perturbations optimales. Ces tourbillons sont sinusoïdaux dans la direction transversale. Ensuite, Anderson et al. ont calculé l'évolution non-linéaire des stries et leurs instabilités par une simulation numérique directe (DNS). En parallèle, ils ont étudié la stabilité linéaire basée sur la théorie de Floquet avec une approche temporelle et non visqueuse. Le mode sinueux est excité pour une amplitude de strie de 26% de  $U_e$  alors que le mode variqueux, plus stable dans ce cas, est amplifié à partir de 37% de  $U_e$ . Dans chaque cas le mode le plus amplifié est un mode fondamental, c'est-à-dire qu'il présente la même périodicité que l'écoulement de base.

Anderson et al. ont généré les instabilités secondaires dans leurs DNS par un forçage localisé en  $(x, y)$  et oscillant en  $(z, t)$ . Le maximum de l'instabilité se situe sur la ligne critique  $U = 80\%$  de  $U_e$ . Leur premier constat est que les caractéristiques de stabilité de l'écoulement modifié dépendent fortement de la non-linéarité des simulations pour le calcul des stries. Par exemple un profil de strie obtenu par calcul linéaire surestimera l'amplification variqueuse. De plus la déformation non-linéaire modifie la ligne critique et, ainsi, modifie également l'allure des instabilités. Anderson et al ; proposent en perspective d'aborder des stries irrégulières dans la direction transversale avec des points de transition localisés. Mais pour aborder rigoureusement ce problème, on en revient toujours à l'étape de réceptivité.

Après l'étude de stabilité linéaire des stries optimales, Brandt et Henningson [60] ont abordé en 2002 l'étude complète de la transition. L'étape de réceptivité n'est pas modélisée, les stries sont imposées comme condition d'entrée et les instabilités sont introduites par une force de volume. Leur coefficient de frottement laminaire est surestimé à cause des stries de grande amplitude. Pour vérifier la convergence numérique de leur écoulement turbulent, ils utilisent une mesure de l'apériodicité temporelle. Sur la fin de la transition, les modes bidimensionnel  $\beta = 0$ , avec  $\beta$  est le nombre d'onde transverse, et fondamental ( $\beta_0$ ) décroissent pendant que l'harmonique ( $2\beta_0$ ) émerge. Les auteurs ont cherché à identifier les mécanismes de formation de la vorticité longitudinale ( $w_x$ ) qui ferme le cycle de paroi, signature d'une turbulence auto-entretenu. L'amplitude des stries atteint 19% de  $U_e$  au moment de la transition, soit environ le double de la valeur (moyenn e) observée expérimentalement. Les profils de vitesse moyenne présentent un point d'inflexion au niveau de la frontière de la couche limite. Selon Brandt et Henningson[60], la moyenne temporelle des expériences peut masquer ces pics d'amplitudes. Après la transition les profils moyens, et rms, sont en accord avec ceux d'une couche limite turbulente développée. Les structures principales observées ont la forme de tourbillons quasi-longitudinaux situés sur les flancs des stries de basse vitesse. D'après leurs calculs, il n'y a pas de continuité entre les stries laminaires et les stries turbulentes. Dans cet article Brandt et Henningson[60] ont utilisé une approche simplifiée en imposant des stries stationnaires symétriques, sans modéliser la réceptivité, ce qui limite les conclusions possibles sur la stabilité des stries.

Dans le dernier article sur la DNS du groupe de KTH, Brandt, Schlatter et Henningson (2004) [61] ont réalisé des simulations en modélisant la turbulence extérieure comme Jacobs et Durbin [62] (nous y reviendrons dans le paragraphe suivant). Ils sont partis du constat que de nombreux paramètres affectent la transition, pas seulement le taux de turbulence, mais aussi ses échelles spatiales, son spectre, et son degré d'isotropie et d'homog nit . Ils ont étudié les effets de l'échelle de longueur intégrale de la turbulence extérieure ( $l$ ). Quand  $l$  augmente, le taux de turbulence extérieur décroit moins vite et la transition se produit plus tôt. Ceci est en accord avec les expériences de Jonas et al. [53]. la turbulence à petite échelle pénètre plus facilement dans la couche limite, en contrepartie elle décroit plus vite à l'extérieur. En d'autres termes, les courtes échelles sont efficaces pour un forçage continu vers l'aval. L'évolution du minimum de corrélation des stries dans la couche limite dépend faiblement des caractéristiques de la turbulence. Les valeurs obtenues sont en accord avec celles de Matsubara et Alfredsson [52] et sont inférieures à celles obtenues par la théorie des perturbations optimales.

Les mécanismes de réceptivité liées aux stries vis-à-vis des perturbations extérieures sont de deux types :

- Linéaire : des fluctuations de vitesse normale de basse fréquence diffusent, ou pénètrent, dans la couche limite probablement depuis le bord d'attaque. Dans ces conditions, les stries sont générées selon le scénario 'lift-up' classique.
- Non-linéaire : Si les perturbations sont situées au-dessus de la couche limite, alors les tourbillons longitudinaux sont créés dans la couche limite via des interactions quadratiques [61]. C'est le scénario correspondant à la transition oblique : une paire d'ondes obliques génère un tourbillon longitudinal qui donne naissance à des stries.

D'après Brandt et al [61], le mécanisme linéaire domine nettement quand des perturbations de basse fréquence peuvent impacter directement la couche limite. C'est ce mécanisme qui est observé dans les cas expérimentaux. Comme dans leurs articles précédents, ils trouvent à la naissance des spots caractérisés par des instabilités sinueuses ou variqueuses évoluant sous la forme de paquet d'ondes.

Dans leur DNS, Brandt et al [61] observent également des oscillations des stries qui peuvent être liées soit à une onde instable, soit induites par des fluctuations extérieures. Ils n'ont pas observé d'ondes TS, mais en l'absence de forçage elles ne peuvent probablement pas se développer assez vite.

Brandt et al [63] se sont intéressées à la possibilité d'instabilité absolue et aux liens possibles entre un mécanisme d'instabilité auto-entretenu et la naissance de spots turbulents. En regardant la réponse impulsionnelle des stries, l'instabilité est sans ambiguïté convective, la vitesse arrière du paquet d'ondes est de  $0.7 de U_e$ , soit le double d'un paquet d'ondes TS. La réponse impulsionnelle des stries consiste en un mode instable sinueux et présente des analogies avec les écoulements de type sillages. La nature convective de l'instabilité des stries implique que, dans une transition by-pass, les stries se comportent comme un amplificateur de bruit.

Jacobs et Durbin [62] ont également réalisé des DNS. Ils n'ont pas obtenu d'instabilité sinueuse préliminaire sur les stries. Selon leur scénario, les stries de basse vitesse modifient les propriétés de réceptivité aux hautes fréquences. Ainsi la transition serait initiée sur des stries isolées, l'alternance transversale des stries n'est donc pas essentielles dans ce processus.

La première difficulté dans la simulation numérique d'une transition by-pass, c'est la génération du bruit ambiant, ici la turbulence extérieure générée par une grille. Jacobs et Durbin[62] ont appliqué une méthode proposée par Grosh et Salven (1978) [64] et utilisée

par Jacobs et Durbin [47] pour l'interaction entre des perturbations extérieures et la couche limite. Cette méthode a également été utilisée par Rogallo [65]. La turbulence extérieure se développant au-dessus d'une couche limite est décomposée sur une somme de modes de Fourier en temps et envergure que multiplie le mode de Orr-Sommerfeld correspondant. Seule la partie continue du spectre, correspondant à l'extérieur de la couche limite, est sélectionnée. Loin de la couche limite, un mode continu se comporte comme un mode de Fourier (sinusoidal). Jacobs et Durbin [47] ont ainsi été les premiers à utiliser le spectre continu pour créer une turbulence extérieure synthétique. Cette approche permet de simuler des écoulements en aval du bord d'attaque pour un gain de calcul évident. L'écoulement est supposé de type plaque plane idéale (Blasius). Les auteurs ont rejeté les modes discrets, arguant qu'ils n'interviennent pas dans la transition, ce n'est vrai que dans le cas de nombres de Reynolds sous-critiques. La dépendance longitudinale est remplacée par une dépendance temporelle selon l'hypothèse de Taylor. Ils ont ainsi forcé en condition d'entrée de leur simulation. La difficulté est maintenant de déterminer le poids de chaque mode. Jacobs et Durbin [47] se sont basés sur des arguments statistiques : en fixant le taux de turbulence extérieure d'une part, en vérifiant son évolution le long de la plaque et enfin, en vérifiant que l'échelle intégrale correspond bien aux mesures.

Jacobs et Durbin [62] présentent leurs résultats selon trois axes : moyenné au sens de Reynolds, instantané et spectral en espace-temps. Cependant, les deux derniers étant inaccessibles par l'expérience. Les paramètres intégraux correspondent bien, à la réalité excepté le facteur de forme ( $H$ ) qui est sous-estimé. Le début et la fin de la transition sont bien capturés. D'autre part, les taux de fluctuations forts sont très proches de l'expérience, notamment dans la phase non-linéaire. Un point de leurs simulations a été de montrer que, dans la zone laminaire, les mesures par fils chauds croisés donnent un pic de  $v_{rms}$  absent de leurs simulations. Le pic mesuré correspond, en fait, à une erreur sur l'utilisation des fils chauds croisés (Inasawa et al [65]).

Le terme de production, intégré verticalement dans la couche limite, augmente dans la zone laminaire et pré-transitionnelle pour décroître ensuite et se stabiliser dans la zone pleinement turbulente. Le rapport production/ dissipation apparaît supérieur à un dans la zone transitionnelle et se stabilise autour de l'unité dans la zone turbulente.

Jacobs et Durbin [62] proposent une approche instantanée du processus de transition qui ne peut pas rendre compte des profils moyennés mesurés. C'est l'une des difficultés majeures générées par la turbulence extérieure à fortes variations temporelles. Leur première analyse des champs instantanés concerne l'existence de stries de hautes et basses vitesses qui

persistent dans la zone intermittente jusqu'au point où la couche limite est turbulente sur toute l'envergure. La corrélation transversale de  $u'$  à mi-hauteur de la couche limite donne une corrélation à grande échelle ou  $R_{uu}$  oscille autour de zéro comme la signature de stries en signes alternés. (A noter qu'à l'extérieur de la couche limite l'auto-corrélation décroît de façon monotone). Dans leurs simulations, la transition provient de la partie supérieure de la couche limite. Ils ont étudié la répartition transversale des échelles à travers le spectre spatial transverse. Le spectre d'entrée est large, sans sélection partie supérieure de la couche limite. Ils ont étudié la répartition transversale des échelles à travers le spectre spatial transverse. Le spectre d'entrée est large, sans sélection particulière, vers l'aval le spectre se concentre rapidement vers les petits nombres d'ondes. Un pic est observé près de  $\beta\delta \approx 1.4$  et  $\approx Re_\theta = 360$ . Ce mode dominant est consistant, en ordre de grandeur, avec le résultat des perturbations optimales. Les simulations semblent indiquer que ce mode est le résultat d'une sélection de la couche limite et n'est pas sensible aux détails du spectre extérieur, pourvu que celui-ci soit suffisamment large bande. Jacobs et Durbin insistent sur le fait que cette distance inter-stries moyenne ne joue pas de rôle dans la transition. Selon eux la transition se produit localement sur un jet arrière isolé et instantané. Les stries proches de la paroi restent stables, du moins dans la zone laminaire. Cependant près de la frontière de la couche limite, les stries deviennent un site réceptif aux courtes échelles de la turbulence extérieure, ce qui initie une instabilité de cisaillement. Cette instabilité croît rapidement, remplissant la couche limite pour donner un spot qui se développe et se fond dans la région de turbulence développée.

A propos du lien qui pourrait exister entre les stries laminaire et turbulentes, il semblerait que les premières disparaissent après la transition, elles ne se prolongeraient pas vers les secondes.

Zaki et Jacobs [67] ont fait une analyse simplifiée du processus de transition proposé. Comme pour l'article précédent [62] ils ont utilisé le spectre continu de Orr-Sommerfeld. Partant de l'idée que la formation des stries pouvait s'interpréter comme le résultat d'un couplage fort entre un mode d'Orr-Sommerfeld amorti et un mode de Squire, ces auteurs ont montré qu'en superposant une paire de modes basse fréquence (fortement couplés) et une paire de modes haute fréquence (faiblement couplés), le processus complet de transition est qualitativement simulé. Des modes tridimensionnels de Orr-Sommerfeld forcent l'équation de Squire par résonance (Hultgren et Gustavsson 1981 [31]). Ce forçage peut être caractérisé par un coefficient de couplage, comme le produit scalaire entre l'adjoint du mode de Squire et le terme de forçage. Ce coefficient peut s'interpréter comme la mesure de la propension du

spectre continu à générer des stries. Pour prendre en compte les effets visqueux dissipatifs, le coefficient est normalisé par le taux de décroissance modale. En injectant deux modes dans des simulations numériques directes, Zaki et Jacobs ont montré qu'il faut combiner un mode fortement couplé avec un mode faiblement couplé pour déclencher la transition. Ce résultat est en faveur de leur scénario sur la transition by-pass. Il faut ajouter que c'est une reproduction qualitative du processus de transition. L'amplitude des stries de basse vitesse (backward jets) est très importante, de l'ordre de 40% de  $U_e$ , suffisamment importante pour créer un point d'inflexion sur la frontière de la couche limite. Ainsi, le mode haute fréquence, faiblement couplé initie une instabilité à courte longueur d'onde de type Kelvin-Helmholtz. Cette instabilité s'intensifie vers l'aval et se dégenère en spot.

Jacobs et Durbin [68] ont également étudié par DNS la déstabilisation des modes de Klebanoff. Les stries résultent de la réponse de la couche limite à une turbulence extérieure simulée numériquement par une superposition de modes de Orr-Sommerfeld et de Squire. Ils n'ont pas obtenu d'instabilités sinueuses préliminaires sur les stries, le déclenchement brutal de la transition suggérant une instabilité de type Kelvin-Helmholtz. Selon eux, la transition se produit sur une strie basse vitesse isolée et serait provoquée par les courtes échelles de la turbulence extérieure. Zaki et Durbin [69] ont repris ce scénario en ne considérant que deux modes, basse et haute fréquence, pour représenter les perturbations extérieures. Le mode de faible fréquence pénètre la couche limite dans la région proche du bord d'attaque et entraîne la formation de modes de Klebanoff. Les stries basse vitesse, associées à des fluctuations de vitesse normale positives, remonte vers la frontière de la couche limite où elles créent un point d'inflexion. Les stries basse vitesse deviennent donc des sites de réceptivité privilégiés : elles interagissent alors avec le mode de haute fréquence, illustrée par la figure (3.5).



Figure. 3 .5.a : Visualisation de l'instabilité sinueuse des streaks et de la déstabilisation de la couche limite laminaire.



Figure 3.5.b- Vue de face de la transition des deux couches limites (les parois sont en haut et en bas)

### 3.4 Instabilité temporelle d'écoulements parallèles

#### 3.4.1 Généralités

Nous considérons des écoulements dont l'évolution spatio-temporelle est régie par l'équation de continuité et les équations de Navier-Stokes d'un fluide incompressible comme suit :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\frac{1}{\rho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} \quad (3.1)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.2)$$

Dans l'équation, ci-dessus,  $p$ ,  $\rho$  et  $\nu$  désignent respectivement le champ de pression et la masse volumique du fluide et la viscosité cinématique qui sont supposées constantes,  $\mathbf{u} = (u, v, w)$  le champ de vitesse. En général, on rend sous dimension le système de Navier-Stokes en introduisant une vitesse de référence  $U_0$  et une longueur caractéristique  $L$ . On note encore  $(x, y, z)$ ,  $(u, v, w)$  et  $p$  les variables sans dimensions  $(x/L, y/L, z/L)$ ,  $(u/U_0, v/U_0, w/U_0)$  ainsi que  $p/(\rho U_0^2)$  respectivement, le temps adimensionné étant  $tU_0/L$ , et les équations de Navier-Stokes sans dimensions deviennent alors :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta \mathbf{u} \quad (3.3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.4)$$

avec  $Re$  le nombre de Reynolds qui est défini par :

$$Re = \frac{U_0 L}{\nu} .$$

Ce qui suit est une discussion qualitative de couches cisailées parallèles, dans le but de justifier les développements ultérieurs.

Le premier exemple est l'écoulement entre deux plaques parallèles qui évolue dans un domaine  $-L \leq y \leq L$ , ou encore  $-1 \leq y \leq 1$  en variables sans dimensions avec  $L$  la longueur de référence. On peut déterminer un état stationnaire simple correspondant à une solution des équations de Navier-Stokes pour cette géométrie, qu'on appellera l'écoulement *de base*, sous la forme

$$\mathbf{U} = (U(y), 0, 0).$$

En effet, (3.3) se réduit alors à

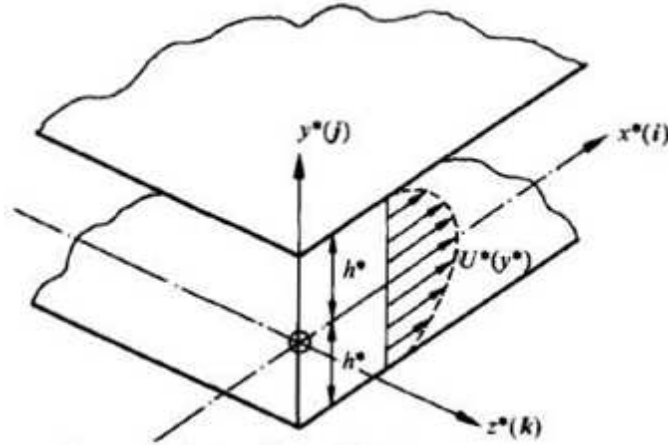


FIG. 3.6 – Géométrie de l'écoulement de Poiseuille plan.

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0, \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \frac{\partial p}{\partial z} = 0.$$

On en déduit que la pression  $P$  ne dépend que de  $x$  dont la solution est la suivante :

$$\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} = 0 \text{ et } p = bx + a.$$

Par conséquent, on en déduit alors :

$$bRe = \frac{d^2 U}{dy^2}$$

dont la solution vérifie les conditions d'adhérence aux parois  $U(\pm 1) = 0$  et après intégration on trouve :

$$U = -\frac{1}{2} bRe(1 - y^2) = (1 - y^2)$$

avec

$$b = \frac{dp}{dx} = \frac{2}{-Re} = -\frac{2\nu}{U_0 L}$$

(et dans ce cas la vitesse de référence  $U_0 = U_{max}$  est correspondant à la vitesse maximale localisée au niveau du canal.

Dans le cas précédant l'écoulement de base est strictement parallèle. Cependant dans d'autres configurations les écoulements sont faiblement non parallèles. Bien que dans ce cas l'écoulement de base soit plutôt de la forme (dans une géométrie bidimensionnelle)  $(U(x, y), V(x, y))$ , on admet que l'évolution de ces profils de vitesse est lente dans la direction longitudinale et

$$\left| \frac{\partial U}{\partial x} \right| \ll \left| \frac{\partial U}{\partial y} \right|, \text{ ainsi que } |V| \ll |U|,$$

ce qui est notamment le cas pour la couche limite le long d'une plaque plane qui coïncide avec la direction  $x$ . L'écoulement atteint une vitesse  $U_0$  loin de la plaque pour  $y \rightarrow \infty$  et tend vers zéro vers la plaque à  $y = 0$  la viscosité entraîne l'adhérence de l'écoulement à la paroi.

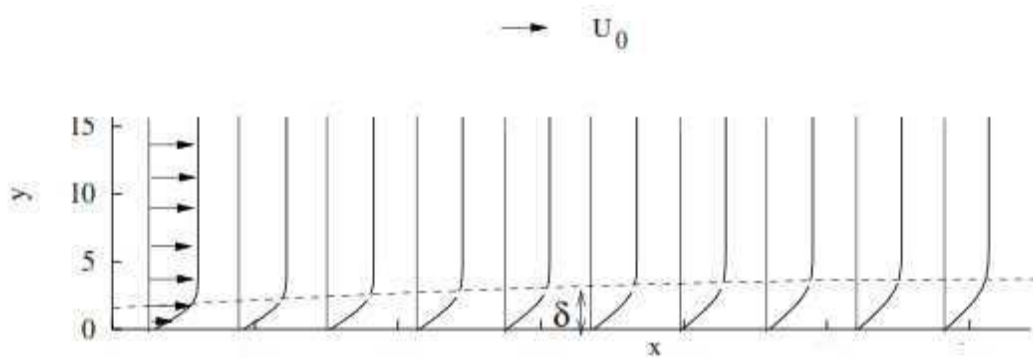


FIG. 3.7 – Evolution de la couche limite le long d'une plaque plane.

Si l'on note  $L$  une longueur typique par rapport à la plaque, alors on suppose que les profils de vitesse varient sur une distance  $\delta^*$  avec  $\delta = \delta^* / L \ll 1$ . En considérant le cas stationnaire et bidimensionnelle de (3.3) tel que le nombre de Reynolds  $Re = U_0 L / \nu$  supposé grand, on établit le système d'équations suivant :

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (3.5)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.7)$$

La composante suivant  $x$  du champ de vitesse atteint sa valeur (sans dimension) maximale égale à l'unité sur une distance de l'ordre de grandeur  $\delta \ll 1$  et l'on peut donc supposer que  $\partial u / \partial y \sim 1 / \delta$ ,  $\partial^2 u / \partial y^2 \sim 1 / \delta^2$  ainsi que  $v \sim \delta$ . Le choix des grandeurs de référence implique aussi que  $\partial u / \partial x \sim 1$  et par l'équation de continuité  $\partial v / \partial y \sim 1$ . Tandis que  $\partial v / \partial x$  et  $\partial^2 v /$

$\partial y^2$  sont de l'ordre et  $\partial^2 v / \partial y^2 \sim 1/\delta$ . On peut que si l'on suppose que  $\delta \sim 1/\sqrt{Re}$  et en ne gardant que les termes dominants dans les équations précédentes on obtient enfin le système simplifié appelé les équations de la couche limite de Prandtl telles que :

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (3.8)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0 \quad (3.10)$$

La pression est donc constante à l'intérieur de la couche limite et est égale à la pression pour  $y \gg 1$ , elle peut être considérée comme étant constante dans la couche limite le long d'une plaque plane. Les coordonnées  $(x, y)$  sont ici adimensionnées par  $L$  choisi comme une longueur caractéristique de la plaque. Il existe alors une solution dite de similitude pour ces équations. On peut montrer, en effet, que si l'on introduit la variable  $\eta = y \sqrt{Re}/\sqrt{x}$  et en utilisant la fonction de courant  $\Psi$  (telle que  $u = \partial\Psi/\partial y, v = -\partial\Psi/\partial x$ ), sous la forme  $\Psi = \sqrt{x/Re} F(\eta)$ , alors  $F$  est solution de l'équation différentielle :

$$F'''(\eta) + \frac{1}{2} F(\eta) F''(\eta) = 0, \text{ avec } F(0) = F'(0) = 0, \eta \rightarrow 1, \eta \rightarrow \infty.$$

La composante de la vitesse est alors :

$$U(\eta) = F'(\eta)$$

Dans cette approximation localement parallèle, on a négligé la composante  $V$  normale à la paroi. Nous obtenons alors une solution de similitude dont la variable  $\eta$  dépend de  $x$  et donc de la position le long de la plaque. On note les coordonnées physiques avec une étoile, alors

$$\eta = \frac{y^* \sqrt{U_0 L / \nu}}{L \sqrt{x^* / L}} = \frac{y^*}{\delta^*}$$

avec la variable de similitude

$$\delta^* = \sqrt{\frac{\nu x^*}{U_0}}$$

La mesure de l'épaisseur de la couche limite est précisément  $\delta^*$ . Sur la figure 3.1 l'épaississement de la couche limite est illustré par des profils le long de la plaque.

La coordonnée  $y$  est ici adimensionnée avec  $1.72 \delta^*$  (ce qu'on appelle l'épaisseur de déplacement) du premier profil à gauche.

On suppose être en présence d'un écoulement de base stationnaire (solution des équations de Navier-Stokes, pas nécessairement parallèle)  $U$  et d'une pression  $P$  et on superpose une

perturbation  $u'$  de façon à ce que  $u = \bar{U} + u'$  avec  $p = \bar{P} + p'$  soient solutions des équations de Navier-Stokes, ce qui donne le système d'équations pour la perturbation

$$\frac{\partial u'}{\partial t} + (U \cdot \nabla)u' + (u' \cdot \nabla)U + (u' \cdot \nabla)u' = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u' \quad (3.11)$$

$$\nabla \cdot u' = 0 \quad (3.12)$$

La théorie de stabilité linéaire suppose que la perturbation est infinitésimale. On écrit formellement  $u' = \varepsilon \bar{u}, p' = \varepsilon \bar{p}$ , et injectant cette expression dans l'équation ci-dessus, on obtient à l'ordre dominant (en faisant tendre  $\varepsilon$  vers zéro les termes non linéaires  $(u' \cdot \nabla)u'$  disparaissent) alors, le système s'écrit comme suit :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (U \cdot \nabla)u + (u \cdot \nabla)U = -\nabla p + \frac{1}{Re} \Delta u \quad (3.13)$$

$$\nabla \cdot u = 0 \quad (3.14)$$

Dans le cas d'un écoulement parallèle  $U = (U(y), 0, 0)$ , il est naturel de chercher la perturbation sous forme de modes normaux, ce qui se justifie, par exemple, par une transformation de Fourier par rapport à  $x$  et  $z$ , les directions *homogènes* de l'écoulement, et l'on obtient :

$$u = \tilde{u}(y, t)e^{i(\alpha x + \beta z)}, \quad p = \tilde{p}(y, t)e^{i(\alpha x + \beta z)} \quad (3.15)$$

ce qui transforme le système en

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial t} = L_y(\alpha, \beta, Re, U(y))\tilde{u} - \nabla(\alpha, \beta)\tilde{p} \quad (3.16)$$

$$\text{et} \quad 0 = \nabla(\alpha, \beta) \cdot \tilde{u} \quad (3.17)$$

avec  $\nabla(\alpha, \beta) = (i\alpha, \partial/\partial y, i\beta)$  et  $L_y(\alpha, \beta, Re, U(y))$  un opérateur différentiel en  $y$  qui dépend des nombres d'ondes  $\alpha$  et  $\beta$ , du nombre de Reynolds  $Re$  et également du profil de l'écoulement de base  $U(y)$ . Evidemment,  $\tilde{u}$  doit satisfaire des conditions aux bords dans la direction non homogène  $y$  et la stabilité (temporelle) est déterminée en cherchant la solution sous la forme

$$\tilde{u} = \hat{u}(y)e^{-i\omega t}, \quad \tilde{p} = \hat{p}(y)e^{-i\omega t} \quad (3.18)$$

Dés lors, il en résulte un problème aux valeurs propres pour un système d'équations différentielles en  $y$ . Il est de coutume en hydrodynamique d'écrire l'exponentiel sous la forme  $-i\omega$  avec  $\omega = \omega_r + i\omega_i$  complexe. L'écoulement de base est alors instable, s'il existe des paramètres  $(\alpha, \beta)$  et  $Re$  tels  $\omega_i > 0$ .

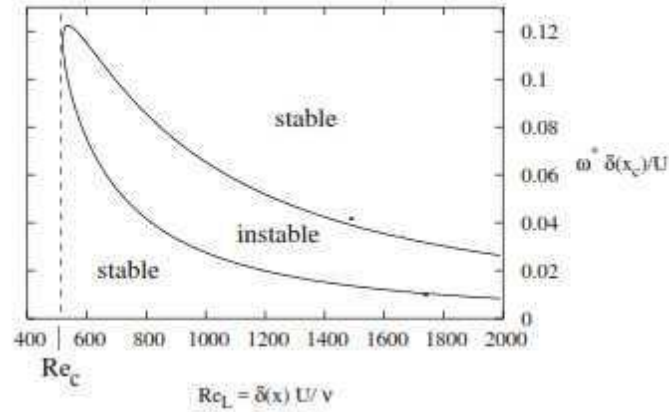


FIG. 3.8 – Courbe de stabilité linéaire pour la couche limite de Blasius.

La figure 3.8 montre un exemple de diagramme de stabilité pour la couche limite valable pour des perturbations bidimensionnelles (avec  $\beta = 0$ ). En général, de telles courbes ne peuvent être obtenues que numériquement, en discrétisant la variable d'espace  $y$ . Les résultats sont obtenus pour un nombre de Reynolds  $Re$  local formé avec une quantité appelée épaisseur de déplacement  $\delta^*$  et qui fait intervenir la longueur de similitude discutée plus haut :

$$\delta^*(x^*) = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x^*}{U_0}}$$

On observe un début d'instabilité pour un nombre de Reynolds critique  $Re_c \approx 500$ . Or,  $Re_L = \delta^*(x^*)U_0/\nu = 1.72 \sqrt{\frac{\nu x^*}{U_0}}$  et il est bon d'avoir une idée de l'ordre de grandeur.

Supposons que l'on ait un écoulement d'air, disons à une vitesse de  $1\text{ m/s}$ , le long d'une plaque. En supposant que la théorie est valable à une faible distance de l'origine  $x^* = 0$  de la plaque (l'origine est en effet un point singulier pour la théorie), on notera un début d'instabilité à  $x_c^* \approx 8.510^4 \nu / U_0 \approx 30\text{ cm}$  (en prenant  $\nu = 1.510^{-5}\text{ m}^2/\text{s}$ ). Si l'on prenait de l'eau à cette même vitesse, alors  $x_c \approx 8.5\text{ cm}$  étant donné que la viscosité cinématique est dans ce cas  $\nu \approx 10^{-6}\text{ m}^2/\text{s}$ . Bien entendu, l'instabilité apparaît d'autant plus vite que  $U_0$  sera grande. Sur l'ordonnée de la figure 3.8 sont reportées les fréquences des perturbations temporelles, adimensionnées avec  $\delta(x_c^*)/U_0 = 500\nu/U_0^2$  ce qui permet d'en déduire les fréquences en Hertz pour des paramètres particuliers.

La question est alors de savoir, si la théorie linéaire prédit en effet le début de l'instabilité, cependant elle ne peut fournir qu'une condition suffisante d'instabilité, à savoir, que si l'écoulement est linéairement instable, alors il est réellement instable.

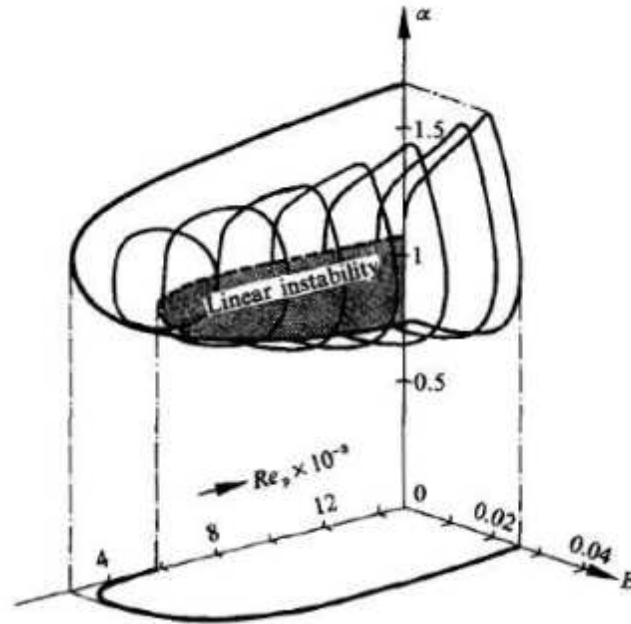


FIG. 3.9 – Esquisse du domaine d'existence d'ondes progressives non linéaires et bidimensionnelles pour l'écoulement de Poiseuille ( $E$  = énergie de l'instabilité).

Un écoulement peut cependant être linéairement stable, c-à-d stable par rapport à des perturbations infinitésimales, mais instable par rapport à des perturbations d'amplitude finie. Ou alors il peut être instable transitoirement, car il faut être conscient que la stabilité comme prédite par l'analyse en modes normaux est un résultat asymptotique pour des temps  $t$  grands. Prenons l'exemple de l'écoulement de Poiseuille plan. Il est bien connu que l'instabilité linéaire n'apparaît qu'au-delà du nombre de Reynolds critique  $Re_c \approx 5772$ . Or, on observe des instabilités, et l'apparition de la turbulence, pour cet écoulement à des nombres de Reynolds bien plus faibles. On peut, par exemple, déterminer des solutions de type ondes progressives (bidimensionnelles) pour des nombres de Reynolds inférieurs à  $Re_c$ , on parle alors d'un comportement sous-critique, ce qui est esquissé sur la figure 3.9 donnant le nombre de Reynolds en fonction de nombre d'onde  $\alpha$  et de l'énergie nécessaire associée à l'instabilité considérée.

### 3.4.2 Stabilité temporelle linéaire de fluides parfaits

On suppose maintenant que l'écoulement est celui d'un fluide parfait, c'est à dire on suppose que la viscosité  $\nu$  est négligeable ce qui correspond à faire tendre dans (3.13) le nombre de Reynolds vers l'infini et les équations régissant la stabilité linéaire deviennent

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + (\mathbf{U} \cdot \nabla) \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{U} = -\nabla p \quad (3.19)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.20)$$

Pour un écoulement de base parallèle de la forme  $U = (U(y), 0, 0)$  les équations se simplifient considérablement:

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right)u + v \frac{dU}{dy}(y)i = -\nabla p, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (3.21)$$

(on note  $\{i, j, k\}$  les 3 vecteurs directeurs du système de coordonnées  $(x, y, z)$ ). En cherchant la perturbation sous la forme

$$u = \hat{u}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}, \quad p = \hat{p}(y)e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$$

on obtient pour les trois composantes du mode  $\hat{u} = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{w})$  le système

$$i\alpha(U - c)\hat{u} + \frac{dU}{dy}\hat{v} + i\alpha\hat{p} = 0, \quad (3.22)$$

$$i\alpha(U - c)\hat{v} + \frac{d\hat{p}}{dy} = 0, \quad (3.23)$$

$$i\alpha(U - c)\hat{w} + i\beta\hat{p} = 0, \quad (3.24)$$

$$i\alpha\hat{u} + \frac{d\hat{v}}{dy} + i\alpha\hat{w} = 0, \quad (3.25)$$

avec  $c = \omega/\alpha$ . Si l'on multiplie l'équation (3.22) par  $\alpha$  et (3.24) par  $\beta$  et si on les additionne on obtient le système suivant :

$$i\tilde{\alpha}(U - \tilde{c})\tilde{u} + \frac{dU}{dy}\tilde{v} + i\tilde{\alpha}\tilde{p} = 0, \quad (3.26)$$

$$i\tilde{\alpha}(U - \tilde{c})\tilde{v} + \frac{d\tilde{p}}{dy} = 0, \quad (3.27)$$

$$i\tilde{\alpha}\tilde{u} + \frac{d\tilde{v}}{dy} = 0, \quad (3.28)$$

En posant  $\tilde{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$ ,  $\tilde{p} = \frac{\tilde{\alpha}}{\alpha}\hat{p}$ ,  $\tilde{\alpha}\tilde{u} + \alpha\hat{u} + \beta\hat{w}$  (et  $\tilde{v} = v$ ,  $\tilde{c} = c$ ). Si une perturbation est solution de (3.22)-(3.25), elle est aussi solution de (3.26)-(3.28), ce système étant celui qui régit des perturbations bidimensionnelles de nombre d'ondes  $\tilde{\alpha}$  et de champ de vitesse  $(\tilde{u}, \tilde{v})$ . On peut donc énoncer une conséquence importante, connue sous le nom de théorème de Squire, le système d'équations pour des perturbations tridimensionnelles est équivalent à un système d'équations pour des perturbations bidimensionnelles. Donc, on peut considérer le système (3.26)-(3.28) (on omet le  $\tilde{\cdot}$  pour les variables), en introduisant la fonction de courant qui décrit le processus dans le plan bidimensionnel  $(x, y)$ :

$$\Psi = \hat{\Psi}(y)e^{i\alpha(x-ct)}$$

telle que  $\hat{u} = \frac{d\hat{\Psi}}{dy}$ ,  $\hat{v} = -i\alpha\hat{\Psi}$  ce qui donne en injectant l'expression dans (3.26)

$$(U - c)\frac{d\hat{\Psi}}{dy} - \frac{dU}{dy}\hat{\Psi} + \hat{p} = 0. \quad (3.29)$$

Dérivant cette expression par rapport à  $y$  et en injectant le résultat dans (3.27) on établit l'équation de Rayleigh :

$$(U - c) \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{\Psi} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \hat{\Psi} = 0. \quad (3.30)$$

### 3.4.3 Critères nécessaires d'instabilités en fluide parfait

On a vu précédemment que l'équation de Rayleigh se réduit à :

$$(U - c) \left( \frac{d^2 \hat{\Psi}}{dy^2} - \alpha^2 \hat{\Psi} \right) - \frac{d^2 U}{dy^2} \hat{\Psi} = 0. \quad y_1 < y < y_2 \quad (3.31)$$

dans laquelle la fonction de courant  $\hat{\Psi}$  décrit l'évolution de la stabilité temporelle d'un fluide parfait et incompressible.

Cette équation est à résoudre dans le domaine du fluide  $y_1 < y < y_2$  ; avec les conditions aux limites éventuellement à l'infini. Pour un domaine fini,  $\hat{\Psi}(y_1) = \hat{\Psi}(y_2) = 0$  car la composante  $v$  du champ de vitesse suivant  $y$  vérifie  $v = -\partial \Psi / \partial x$  (alors  $\hat{v} = -i\alpha \hat{\Psi}$ ) et car le fluide ne traverse pas le bord. Pour un domaine infini, on supposera que la perturbation tend vers zéro à l'infini et peut être décrit à l'aide de (3.30)

$$\hat{\Psi}'' - \alpha^2 \hat{\Psi} - \frac{U''}{U - c} \hat{\Psi} = 0.$$

Multiplions alors l'équation par  $\hat{\Psi}$  et l'on intègre par parties ; tenant compte des conditions aux limites on peut obtenir les résultats :

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\hat{\Psi}'|^2 + \alpha^2 |\hat{\Psi}|^2) dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''}{U - c} |\hat{\Psi}|^2 dy = 0. \quad (3.32)$$

On suppose que l'écoulement est instable, de sorte que l'on peut poser  $c = c_r + ic_i$  avec  $c_i > 0$ . La partie imaginaire de l'équation ci-dessus est regroupée comme suit :

$$c_i \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''}{|U - c|^2} |\hat{\Psi}|^2 dy. \quad (3.33)$$

qui doit s'annuler. En regroupant également la partie réelle on a :

$$\int_{y_1}^{y_2} (|\hat{\Psi}'|^2 + \alpha^2 |\hat{\Psi}|^2) dy + \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''(U - c_r)}{|U - c|^2} |\hat{\Psi}|^2 dy = 0. \quad (3.34)$$

Considérons d'abord la partie imaginaire (3.33) : pour qu'elle s'annule il faut, au moins, un point où la dérivée seconde de  $U(y)$  s'annule correspondant à  $U'' = 0$ .

Dans ces conditions, on peut énoncer le théorème connu sous le nom de critère de Rayleigh qui est le suivant :

“ Une condition nécessaire d'instabilité est que le profil de vitesse de l'écoulement de base possède au moins un point d'inflexion, autrement dit qu'il existe  $y_s$  tel que  $U''(y_s) = 0$  “. Si l'écoulement est instable  $c_i > 0$  et (3.33) étant vérifiée, on peut écrire :

$$(c_r - U_s) \int_{y_1}^{y_2} \frac{U''}{|U - c|^2} |\hat{\Psi}|^2 dy.$$

avec  $U_s = U(y_s)$  pour  $y_s$  t. q.  $U''(y_s) = 0$ . On rajoute cette équation à (3.34) pour obtenir

$$\int_{y_1}^{y_2} \frac{U''(U - U_s)}{|U - c|^2} |\hat{\Psi}|^2 dy = - \int_{y_1}^{y_2} (|\hat{\Psi}'|^2 + \alpha^2 |\hat{\Psi}|^2) dy. \quad (3.35)$$

Donc, le membre de gauche doit être négatif et on peut l'en déduire le critère de Fjørtoft :

“Si l'écoulement est instable, alors il existe un point  $y_s$  tel que  $U''(y_s) = 0$  ; si l'on note  $U_s = U(y_s)$ , alors il existe en plus, au moins, un point  $y \neq y_s$ ,  $y_1 < y < y_2$ , tel que  $U''(y)(U(y) - U_s) < 0$ ”.

Une interprétation plus parlante de ce dernier critère peut être donnée si l'on suppose qu'il n'y a qu'un seul point  $y_s$  tel que  $U''(y) = 0$  et si on suppose que  $U(y)$  est croissant, alors  $U(y) - U_s < 0$ , si  $y < y_s$  et  $U(y) - U_s > 0$  si  $y > y_s$ . Donc, si  $U''(y) < 0$  pour  $y < y_s$  et  $U''(y) > 0$  pour  $y > y_s$ , alors le critère n'est pas vérifié. Or, la vorticité pour l'écoulement de base parallèle est  $\Omega(y) = -U'(y)$  et donc dans ce cas, si l'écoulement est instable :  $|\Omega(y)| = U'(y)$  possède un *maximum* au point  $y_s$ , (On trouve ce même résultat si on suppose que  $U(y)$  est décroissant.) L'évolution esquissée précédemment montre l'existence de quelques profils types qui sont stables en fluide parfait et d'autres qui peuvent être instables. Dans tous les cas, on rappelle que les critères précédents correspondent à des conditions nécessaires d'instabilité.

### 3.4.4 Profils linéaires par morceaux, modèle de couche de mélange

Un modèle plus réaliste d'une couche de mélange que celui illustré par la figure 3.11 consiste à considérer le profil linéaire par morceaux donné par la figure 3.9, et dont l'expression est de la forme :

$$U(y) = \begin{cases} U_1, & y > \delta \\ \frac{U_1 + U_2}{2} + \frac{(U_1 - U_2)y}{2\delta}, & -\delta < y < \delta \\ U_2, & y < -\delta \end{cases} \quad (3.36)$$

Cette fois-ci il y a une échelle de longueur  $\delta$ , car  $2\delta$  est l'épaisseur de la couche de mélange. On remarque, ici, que la vorticité entre  $-\delta < y < \delta$  est  $-(U_1 - U_2)/(2\delta)$ . Il semble naturel de considérer, ici, comme vitesse de référence :

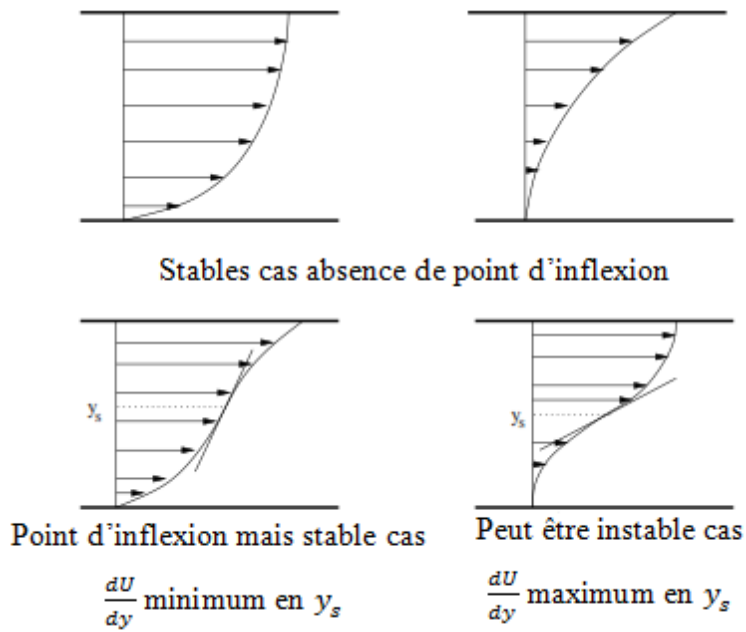


FIG. 3.10 – Déformations du profil de vitesse, illustrant le critère de Rayleigh et Førtoft ( Existence d'un point d'inflexion).

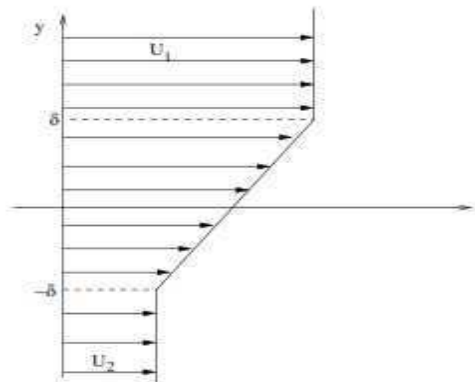


FIG. 3.11 – Profil de vitesse du modèle de couche de mélange.

$U_0 = (U_1 + U_2)/2$  ainsi que  $\delta$  comme longueur de référence et alors le profil sans dimension, noté encore  $U(y)$  devient

$$U(y) = \begin{cases} 1 + R, & y > 1 \\ 1 + Ry & -1 < y < 1 \\ 1 - R & y < -1 \end{cases} \quad (3.37)$$

avec la détermination du paramètre  $R$  comme suit :

$$R = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$$

La stabilité est régie par l'équation de Rayleigh (3.30) qui se réduit à :

$$\hat{\psi}''' - \alpha^2 \hat{\psi} = 0$$

correspondant aux solutions suivantes :

$$\widehat{\Psi}(y) = \begin{cases} Ae^{-\alpha(y-1)} & y > 1 \\ Be^{-\alpha(y-1)} + Ce^{\alpha(y+1)} & -1 < y < 1 \\ De^{\alpha(y+1)} & y < -1 \end{cases} \quad (3.38)$$

Ensuite, il y a les raccords à faire en  $y = 1$  et  $y = -1$  du type (3.31) qui deviennent ici

$$\frac{A}{1+R-c} = \frac{B+Ce^{2\alpha}}{1+R-c} \quad \text{en } y = 1 \quad (3.39)$$

$$\frac{Be^{2\alpha}+C}{1+R-c} = \frac{D}{1+R-c} \quad \text{en } y = -1 \quad (3.40)$$

Tandis que les raccords au voisinage de  $\delta y$  donnent lieu à

$$(1+R-c)(-\alpha)A = (1+R-c)(B(-\alpha) + \alpha Ce^{2\alpha}) - R(B+Ce^{2\alpha}), \quad y = 1 \quad (3.41)$$

$$(1-R-c)(B(-\alpha)e^{2\alpha} + C\alpha) - R(Be^{2\alpha} + C) = (1+R-c)\alpha D, \quad y = -1 \quad (3.42)$$

De (3.38) on en déduit que  $A = B + Ce^{2\alpha}$  et de (3.41) que  $D = Be^{2\alpha} + C$  et en injectant ces expressions dans (3.40) et (3.41) respectivement, on trouve :

$$RB + (Re^{2\alpha} - 2\alpha(1+R-c)e^{2\alpha})C = 0 \quad (3.43)$$

$$(-Re^{2\alpha} - 2\alpha(1-R-c)e^{2\alpha})B - RC = 0 \quad (3.44)$$

et ce système possède une solution non nulle si et seulement si l'on a :

$$-R^2 + e^{4\alpha}(R^2 - 4\alpha R^2 - 4\alpha^2(1-2c+c^2-R^2)) = 0.$$

L'équation correspond à un polynôme du second degré pour  $c$  qui admet pour racines:

$$c = 1 \pm \frac{R}{2\alpha} \sqrt{(1-2\alpha)^2 - e^{-4\alpha}}. \quad (3.45)$$

On note, ici, que si  $\alpha > \alpha_c$  avec  $\alpha_c$  solution de  $2\alpha_c - 1 = e^{-2\alpha_c}$  ( $\alpha_c \approx 0.64$ ) alors les racines  $c$  sont réelles et l'écoulement est stable, ou plutôt marginalement stable. On peut

Par contre, pour  $0 < \alpha < \alpha_c$  les racines sont complexes avec

$$c = 1 \pm i \frac{R}{2\alpha} \sqrt{e^{-4\alpha} - (1-2\alpha)^2}. \quad (3.46)$$

L'écoulement est alors instable car une racine a sa partie imaginaire positive qui correspond à valeur propre temporelle telle que :

$$\omega_i = \frac{R}{2} \sqrt{e^{-4\alpha} - (1-2\alpha)^2}. \quad \text{si } 0 < \alpha < \alpha_c; \quad \omega_i = 0, \quad \text{si } \alpha < \alpha_c. \quad (3.47)$$

Le facteur d'amplification normalisé  $\omega_i/R$  est tracé sur la figure 3.12. On observe que pour  $\alpha \ll 1$  on a :

$$e^{-4\alpha} - (1-2\alpha)^2 = 4\alpha^2 + o(\alpha^3)$$

et, donc que pour  $\alpha \ll 1$  le facteur d'amplification devient  $\omega_i/R \approx \alpha$ ; dans ce cas, on retrouve le résultat pour la feuille de vorticité de la figure 3.12. Le facteur d'amplification maximale est obtenu pour  $\alpha \approx 0.4$  et sa valeur physique est

$$\omega_i^* \approx 0.2 \frac{RU_0}{\delta} = 0.2 \frac{U_1 - U_2}{2\delta}$$

étant donné que les grandeurs de référence sont  $U_0 = (U_1 + U_2)/2$  et  $\delta$ , ce qui illustre l'influence de l'épaisseur de la couche de mélange  $2\delta$  sur le taux d'amplification de l'instabilité.

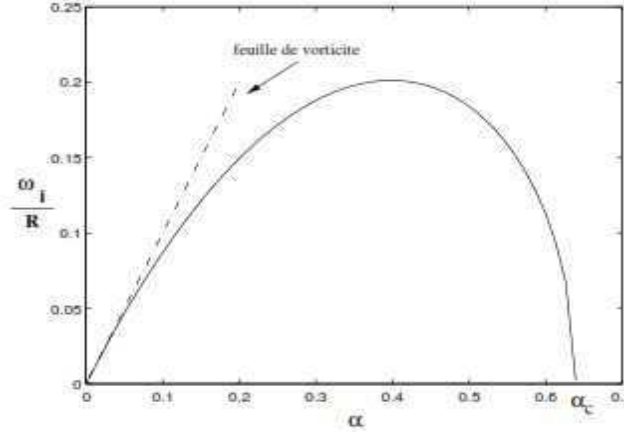


FIG. 3.12 – Facteur d'amplification normalisé  $\omega_i/R$  pour la couche de mélange.

### 3.5 Evolution spatio-temporelle d'une perturbation linéaire

Dans la partie précédente les perturbations d'écoulements parallèles ont été déterminées sous forme de modes normaux dépendant d'un nombre d'onde  $\alpha$  réel et le calcul de la fréquence temporelle complexe  $\omega$  permet de juger de l'instabilité de l'écoulement. La perturbation (bidimensionnelle) est cependant solution d'une équation aux dérivées partielles

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \mathbf{u} + v \frac{dU}{dy}(y) \mathbf{i} = -\nabla p \quad (3.48)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (3.49)$$

pour un écoulement parallèle, de fluide parfait, avec  $\mathbf{u} = (u, v)$  le champ de vitesse de la perturbation. Il est commode d'introduire la vorticité qui dans le cas d'un écoulement bidimensionnel n'a qu'une composante dans la direction  $\mathbf{k}$  normale au plan  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}\}$  et qui s'écrit  $\omega = \partial v / \partial x - \partial u / \partial y$ . Il s'ensuit l'équation pour la perturbation de la vorticité

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \omega - v \frac{d^2 U}{dy^2}(y) = 0$$

Cette dernière équation est obtenue en dérivant la deuxième équation de (3.1) par rapport à  $x$  et la première par rapport à  $y$  en faisant la soustraction (tenant compte de  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ). La fonction de courant est reliée à la vorticité par  $\Delta \Psi = -\omega$  et tenant compte de  $v = -\partial \Psi / \partial x$ , on obtient l'équation pour la perturbation de la fonction de courant

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x}\right) \Delta \Psi - U''(y) \frac{\partial \Psi}{\partial x} = 0, \quad t > 0, y_1 < y < y_2, \quad (3.50)$$

avec les conditions aux bords et une perturbation initiale, à savoir

$$\Psi(x, y_i, t) = 0, \quad i = 1, 2, \quad \Psi(x, y, 0) = f(x, y). \quad (3.51)$$

### 3.5.1 Transformée de Fourier et de Laplace

On opère d'abord une transformation de Fourier en  $x$  de l'équation (3.50) ce qui donne

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - i\alpha U\right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) \hat{\Psi}(\alpha, y, t) - U'' i\alpha \hat{\Psi}(\alpha, y, t) = 0, \quad \hat{\Psi}(\alpha, y, 0) = \hat{f}(\alpha, y), \quad (3.52)$$

avec la transformée de Fourier

$$\hat{\Psi}(\alpha, y, t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Psi(x, y, t) e^{-i\alpha x} dx$$

et  $\hat{f}(\alpha, y)$  la transformée de Fourier de la condition initiale. Par  $\hat{\Psi}(\alpha, y, t) = 0, t < 0$ , on opère une transformation de Laplace de (3.52) en temps avec

$$\tilde{\Psi}(\alpha, y, \omega) = \int_0^{+\infty} \hat{\Psi}(\alpha, y, t) e^{-i\omega t} dt, \quad \omega \in \mathbb{C}$$

et on obtient

$$(-i\omega + i\alpha U) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) \tilde{\Psi}(\alpha, y, \omega) - U'' i\alpha \tilde{\Psi}(\alpha, y, \omega) = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) \hat{f}(\alpha, y)$$

ou encore

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \frac{U''\alpha}{\alpha U - \omega}\right) \tilde{\Psi} = \frac{\hat{g}}{i(\alpha U - \omega)} \quad (3.53)$$

avec  $\hat{g} = \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2\right) \hat{f}(\alpha, y)$ . On remarque ici que l'équation de Rayleigh correspond à l'équation ci-dessus mais en l'absence du second membre.

#### 3.5.1.1 Fonction de Green

On omet pour l'instant la dépendance par rapport à  $\alpha, \omega, U(y)$  dans (3.53) et on l'écrit simplement

$$L \varphi = h, \quad -y_1 < y < y_2, \quad (3.54)$$

(ici  $L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2 - \frac{U''\alpha}{\alpha U - \omega}$ ) avec les conditions aux bords  $\varphi(y_1) = \varphi(y_2) = 0$

Il est commode d'introduire la fonction (distribution) de Dirac  $\delta(y)$  comme limite de fonctions  $f_\varepsilon$  non nulle, valable seulement dans l'intervalle  $] -\varepsilon, \varepsilon[$  et telles que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_\varepsilon dy = \int_{-\varepsilon}^{+\varepsilon} f_\varepsilon dy = 1$ . On peut alors donner un sens à la représentation suivante.

$$h(y) = \int_{y_1}^{y_2} h(\bar{y}) \delta(y - \bar{y}) d\bar{y}$$

et si on calcule  $G(y, \bar{y})$  (cette fonction s'appelle la fonction de Green) telle que

$$L G(y, \bar{y}) = \delta(y - \bar{y}), \quad G(y_1, \bar{y}) = G(y_2, \bar{y}) = 0, \quad (3.55)$$

alors la solution de (3.54) est

$$\varphi(y) = \int_{y_1}^{y_2} G(y, \bar{y}) h(\bar{y}) d\bar{y} \quad (3.56)$$

Donnons brièvement les différentes étapes du calcul de la fonction de Green. Si on impose la continuité de  $G(y, \bar{y})$  en  $\bar{y}$  et en intégrant formellement (3.55) dans l'intervalle  $]\bar{y} - \varepsilon, \bar{y} + \varepsilon[$  en faisant tendre  $\varepsilon \rightarrow 0$ , on établit la relation de saut liée à la continuité de la fonction de Green  $G$  :

$$\frac{\partial G}{\partial x}(\bar{y}_+, \bar{y}) - \frac{\partial G}{\partial x}(\bar{y}_-, \bar{y}) = 1$$

avec  $\bar{y}_\pm$  respectivement la limite à droite et la limite à gauche en  $\bar{y}$ . Nous sommes alors en mesure de déterminer la fonction de Green. En effet, il existe  $u_1(y)$  t. q.  $Lu_1 = 0$  avec  $u_1(y_1) = 0$  et  $u_2(y)$  t. q.  $Lu_2 = 0$  avec  $u_2(y_2) = 0$  et on cherche la fonction de Green sous la forme

$$G(y, \bar{y}) = \begin{cases} c_1 u_1(y), & y_1 \leq y < \bar{y} \\ c_2 u_2(y), & \bar{y} \leq y < y_2 \end{cases} \quad (3.57)$$

La continuité et la relation de saut permettent de déterminer  $c_1, c_2$ , comme solution du système

$$\begin{aligned} c_1 u_1(\bar{y}) - c_2 u_2(\bar{y}) &= 0 \\ -c_1 u_1'(\bar{y}) + c_2 u_2'(\bar{y}) &= 1 \end{aligned}$$

On note

$$D(\bar{y}) = u_1(\bar{y}) u_2'(\bar{y}) - u_2(\bar{y}) u_1'(\bar{y}) \quad (3.58)$$

le déterminant du système et la fonction de Green peut s'écrire

$$G(y, \bar{y}) = \frac{\vartheta(y, \bar{y})}{D(\bar{y})}$$

avec

$$\vartheta(y, \bar{y}) = \begin{cases} u_2(\bar{y}) u_1(y), & y_1 \leq y < \bar{y} \\ u_1(\bar{y}) u_2(y), & \bar{y} \leq y < y_2 \end{cases}$$

Etude de l'écoulement de Couette plan

Il s'agit d'un écoulement parallèle entre deux parois situées à  $y = h$  et  $y = -h$  respectivement, la paroi supérieure étant en translation uniforme de vitesse  $V$  et la paroi

inférieure en translation de vitesse  $-V$ . Si l'on adimensionne par  $h$  et  $V$ , il est facile de voir que l'écoulement de base est donné par le profil de vitesse

$$U(y) = y, \quad -1 \leq y \leq 1.$$

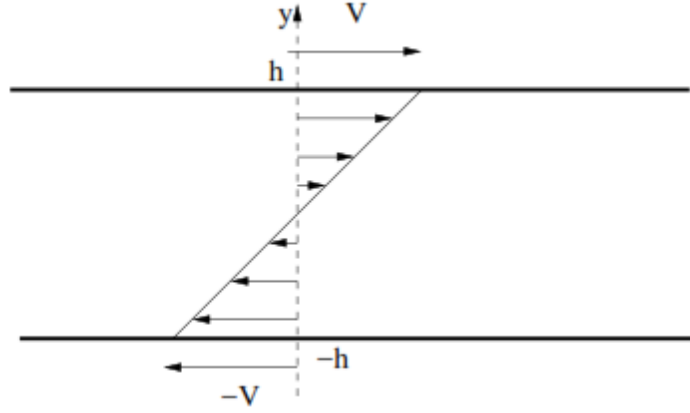


FIG. 3.13 – Géométrie de l'écoulement de Couette plan.

L'opérateur  $L$  prend ici la forme

$$L = \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \alpha^2$$

et par conséquent

$$u_1 = \sinh(\alpha(y + 1)), \quad u_2 = \sinh(\alpha(y - 1)) \quad \text{et} \quad D(\alpha) = \sinh(2\alpha),$$

La fonction de Green est dans ce cas

$$G(y, \bar{y}) = \begin{cases} \frac{\sinh(\alpha(y + 1)) \sinh(\alpha(\bar{y} - 1))}{\alpha \sinh(2\alpha)}, & -1 \leq y < \bar{y} \\ \frac{\sinh(\alpha(y - 1)) \sinh(\alpha(\bar{y} + 1))}{\alpha \sinh(2\alpha)}, & \bar{y} \leq y < 1 \end{cases} \quad (3.59)$$

Revenons maintenant à l'équation (3.53) et tenant compte de la dépendance par rapport à  $\alpha$ ,  $\omega$  et  $U(y)$ , on peut écrire

$$\tilde{\Psi}(\alpha, y, \omega) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Phi(\alpha, \omega, y, \bar{y}) \hat{g}(\alpha, \bar{y})}{iD(\alpha, \omega)(\alpha U(\bar{y}) - \omega)} d\bar{y} \quad (3.60)$$

La théorie des équations différentielles montre qu'étant donné que  $L$  ne contient pas de dérivée première par rapport à  $y$ , le déterminant (3.58) (appelé aussi Wronskien) ne dépend en fait, de  $\bar{y}$  mais uniquement de  $\alpha$  et  $\omega$ .

### 3.5.2 Spectre continu et spectre discret

Il convient de faire, ici, quelques rappels quant à la transformation de Laplace d'une fonction  $f(t)$  : si l'on note  $\omega = \omega_r + ia$  alors la transformation de Laplace  $\tilde{f}(\omega)$  de  $f(t)$  n'est rien d'autre que la transformée de Fourier *en temps* de la fonction nulle pour  $t < 0$  et égale à  $f(t)e^{-at}$  pour  $t > 0$  car  $\tilde{f}(\omega) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-at}e^{i\omega_r t} dt$  et par la formule de la transformée de Fourier inverse

$$f(t)e^{-at} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} e^{-i\omega_r t} d\omega_r$$

et par conséquent

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{f} e^{-i(\omega_r + ia)t} d\omega_r = \frac{1}{2\pi} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \tilde{f} e^{-i\omega t} d\omega$$

Donc, la transformation inverse de Laplace de (3.13) donne

$$\hat{\Psi}(\alpha, y, t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{y_1}^{y_2} \int_{ia-\infty}^{ia+\infty} \frac{\phi(\alpha, \omega, y, \bar{y}) \hat{g}(\alpha, \bar{y}) e^{-i\omega t}}{iD(\alpha, \omega)(\alpha U(\bar{y}) - \omega)} d\bar{y} d\omega. \quad (3.61)$$

L'intégrant est une fonction de la variable complexe  $\omega$  et elle a des pôles lorsque le dénominateur s'annule. Les valeurs  $\omega = \alpha U(y)$  sont des pôles sur l'axe réel directement en relation avec le profil de vitesse  $U(y)$ . On désigne ces fréquences réelles comme le *spectre continu* qui n'induit cependant pas une amplification temporelle de la solution. Pour l'écoulement de Couette plan par exemple seul ce spectre continu apparaît avec  $\omega = \alpha \bar{y}$ ,  $-1 \leq \bar{y} \leq 1$ , car dans ce cas  $D(\alpha)$  ne dépend pas de  $\omega$ . Pour l'écoulement de Couette plan on peut donc écrire, par le théorème des résidus,

$$\hat{\Psi}(\alpha, y, t) = \int_{y_1}^{y_2} G(y, \bar{y}) \hat{g}(\alpha, \bar{y}) e^{-i\omega \bar{y} t} d\bar{y} \quad (3.62)$$

avec la fonction de Green  $G(y, \bar{y})$  donnée par (3.59). Cette perturbation est purement oscillatoire en temps et ne s'amplifie pas : l'écoulement de Couette est ainsi stable en fluide parfait.

Dans le cas général, ce sont les fréquences  $\omega$  telles que

$$D(\omega, \alpha) = 0 \quad (3.63)$$

qui peuvent donner lieu à une instabilité. La relation ci dessus est appelée la relation de dispersion : pour ces valeurs la construction par la fonction de Green tombe en défaut. Mais cela signifie que l'équation (3.53) sans second membre possède une solution non nulle ce qui, d'après la théorie des problèmes aux valeurs propres dans des équations différentielles, n'est possible que pour des valeurs discrètes de  $\omega_j(\alpha)$  telles que  $D(\omega_j(\alpha), \alpha) = 0$ . Ces valeurs sont précisément déterminées en résolvant l'équation de Rayleigh. En plaçant le

contour d'intégration le long de  $i\alpha$  au-dessus de toutes les parties imaginaires de tous les pôles  $\omega_j$  (voir figure 3.13), on trouve par le théorème des résidus (on écarte la contribution du spectre continu qui ne donne pas lieu à une amplification)

$$\widehat{\Psi}(\alpha, y, t) = \sum_j \frac{e^{-i\omega_j(\alpha)t}}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha, \omega_j(\alpha))} h(y, \alpha, \omega_j(\alpha)) \quad (3.64)$$

avec

$$h(y, \alpha, \omega_j(\alpha)) = \int_{y_1}^{y_2} \frac{\Phi(\alpha, \omega_j(\alpha), y, \bar{y}) \hat{g}(\alpha, \bar{y})}{(\alpha U(\bar{y}) - \omega_j(\alpha))} d\bar{y}.$$

On note  $\omega_j(\alpha) = \omega_{j,r}(\alpha) + i\omega_{j,i}(\alpha)$  et

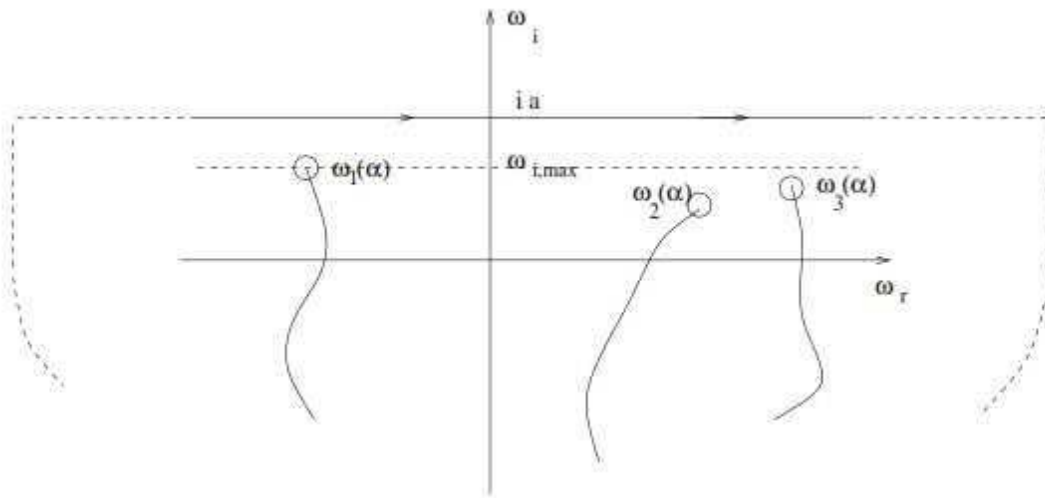


FIG. 3.14 – Transformation de Laplace inverse : intégration dans le plan complexe.

$$\omega_{i,max} = \max\{\omega_{j,i}(\alpha), \text{ pour tout } \alpha \in \mathbb{R} \text{ et tout indice } j\}.$$

Si  $\omega_{i,max} > 0$  alors l'écoulement est instable et il est stable si cette valeur est négative.

### 3.5.3 Instabilité convective et absolue

La transformation de Fourier inverse donne la perturbation

$$\Psi(x, y, t) = - \sum_j \int_{-\infty}^{\infty} \frac{h(y, \alpha, \omega_j(\alpha))}{\frac{\partial D}{\partial \omega}(\alpha, \omega_j(\alpha))} e^{-i(\alpha x - \omega_j(\alpha)t)} d\alpha \quad (3.65)$$

et elle est donc une somme de termes de la forme

$$I = \int_{F_\alpha} f(\alpha, y) e^{i(\alpha x - \omega(\alpha)t)} d\alpha. \quad (3.66)$$

Dans cette intégrale  $F_\alpha$  est l'axe de réels : cependant on peut déformer  $F_\alpha$  afin de chercher le comportement asymptotique pour  $t \rightarrow \infty$  de l'intégrale ci-dessus dans un repère  $x = vt$ .

L'intégrale devient alors :

$$I(t) = \int_{F\alpha} f(\alpha, y) e^{i\rho(\alpha)t} d\alpha. \quad \text{avec } \rho(\alpha) = \alpha v - \omega(\alpha) \quad (3.67)$$

On peut alors montrer (par la méthode dite du col, cf. Bender & Orszag "Advanced mathematical methods for scientists and engineers", Mac Graw Hill) que le comportement asymptotique de cette intégrale pour  $t \rightarrow \infty$  est donné par

$$I(t) \sim f(\alpha_0, y) \sqrt{\frac{2}{t|\rho''(\alpha_0)|}} \frac{e^{\frac{i\pi}{4}\sqrt{\pi}}}{2} e^{i\rho(\alpha_0)t} \quad (3.68)$$

$$\text{avec } \alpha_0 \in \mathbb{C} \text{ tel que } \frac{d\rho}{d\alpha}(\alpha_0) = 0, \quad (3.69)$$

$$\text{d'où } v = \frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha_0),$$

ou encore

$$\frac{d\omega_i}{d\alpha}(\alpha_0) = 0 \quad \text{et} \quad \frac{d\omega_r}{d\alpha}(\alpha_0) = v. \quad (3.70)$$

On note  $\omega_v = \omega(\alpha_0)$  et l'amplification est alors donnée par

$$\gamma_v = -\rho_i = -v\alpha_{0,i} + \omega_{v,i}. \quad (3.71)$$

L'amplification maximale est obtenue lorsqu'on a :

$$-\frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_i} = -v + \frac{\partial \omega_{v,i}}{\partial \alpha_i} = 0 \quad \text{et} \quad -\frac{\partial \rho_i}{\partial \alpha_r} = \frac{\partial \omega_{v,i}}{\partial \alpha_r}$$

En supposons que  $\omega(\alpha)$  est une fonction analytique ; on aura  $\partial \omega_{v,i} / \partial \alpha_i = \partial \omega_{v,r} / \partial \alpha_r$  et on en déduit que l'amplification maximale est donnée par

$$\frac{\partial \omega_{v,r}}{\partial \alpha_r} = v, \quad \frac{\partial \omega_{v,i}}{\partial \alpha_r} = 0 \quad (3.72)$$

On peut en déduire qu'il suffit de chercher l'amplification maximale pour  $\alpha_r = \alpha \in \mathbb{R}$  et  $\alpha_{max}$  est tel que

$$v_g = \frac{d\omega_r}{d\alpha}(\alpha_{max}), \quad \frac{d\omega_i}{d\alpha}(\alpha_{max}) = 0,$$

avec  $v_g$  la vitesse de groupe (qu'on supposera positive, ce qui sera toujours le cas pour des écoulements de base évoluant de la gauche vers la droite). C'est la raie  $x = v_g t$  (en supposant une perturbation initiale concentrée à l'origine  $x = 0$  ; le long de laquelle s'opère l'amplification maximale de la perturbation. Le nombre d'onde étant réel pour la direction d'amplification maximale, il semble alors naturel de transformer le facteur d'amplification temporel  $\omega_g$  en un facteur d'amplification spatiale à partir de  $\omega_i / v_g$ . Il s'agit là de la célèbre transformation de Gaster qui est justifiée pour  $v_g \neq 0$  qui est variable pour des faibles

instabilités. Cependant la perturbation peut croître le long d'autres directions  $x = vt$  de sorte que pour satisfaire alors la condition  $d\omega/d\alpha = 0$ , il faut chercher  $\alpha \in \mathbb{C}$  tel que  $\frac{d\omega}{d\alpha} = v$ . Pour  $v = 0$ , on obtient donc :

$$\frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha_0) = 0 \quad \text{et on note } \omega_0 = \omega(\alpha_0) \quad (3.73)$$

La fréquence complexe  $\omega_0$  est appelée la fréquence absolue et si  $\omega_{0,i} > 0$  alors la direction  $x = 0$  est instable. On parle alors d'une instabilité absolue : la perturbation croît dans ce cas pour tout temps  $t > 0$  là où elle est injectée (ici en  $x = 0$ ). Par contre, si  $\omega_{0,i} < 0$  alors la perturbation est convectée. Si on se place en  $x > 0$ , alors on voit apparaître la perturbation à partir d'un temps  $t_1$  et disparaître à partir de  $t_2$ . On parle alors d'une instabilité convective. Le facteur d'amplification le long de  $x = vt$  est donné par (3.71) qui permet d'établir :

$$v_- = \min\{v \text{ pour } \gamma_v \geq 0\}, \quad v_+ = \max\{v \text{ pour } \gamma_v \geq 0\} \quad (3.74)$$

l'écoulement devient convectivement instable si  $v_- > 0$  tandis que nous sommes en présence d'une instabilité absolue si  $v_- \leq 0$ . Ces comportements sont illustrés sur la figure 3.14.

### Etude de l'instabilité de couche de mélange

On reprend le modèle de la couche de mélange de la figure 3.11 avec le profil donné par les équations (3.37). Par (3.45) la relation de dispersion fournit la solution suivante :

$$\omega(\alpha) = \alpha \pm i \frac{R}{2} \sqrt{e^{-4\alpha} - (1 - 2\alpha)^2}. \quad (3.75)$$

avec 
$$R = \frac{U_1 - U_2}{U_1 + U_2}$$

Par conséquent, on peut en déduire la dérivée ci-après :

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = 1 \pm iR \frac{1 - 2\alpha - e^{-4\alpha}}{\sqrt{e^{-4\alpha} - (1 - 2\alpha)^2}} \quad (3.76)$$

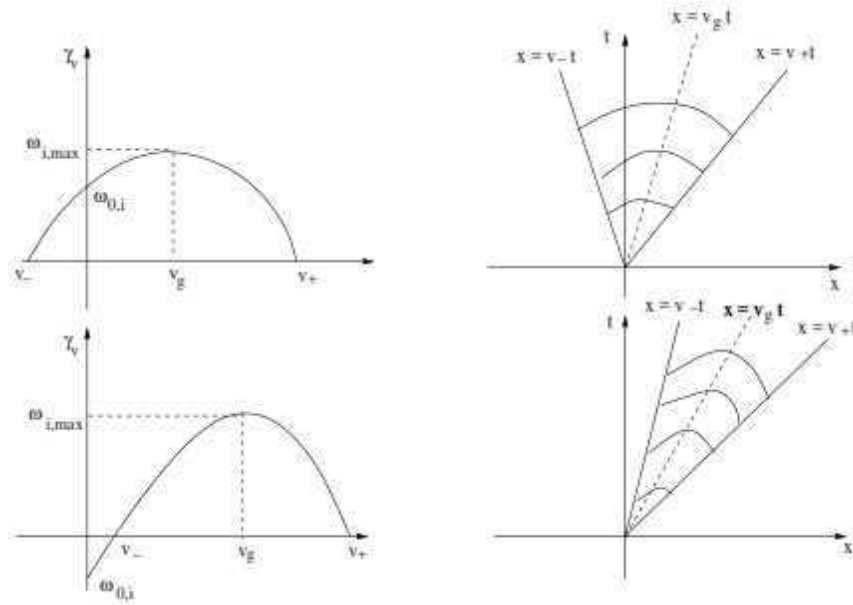


FIG. 3.14 – Diagramme de stabilité illustrant le comportement de l'instabilité absolue (haut) et de l'instabilité convective (bas).

Pour  $\alpha \in \mathbb{R}$ , on obtient l'amplification maximale pour  $1 - 2\alpha_{max} - e^{-4\alpha_{max}} = 0$  ce qui donne  $\alpha_{max} \approx 0.4$  avec  $\omega_{i,max} \approx R 0.2$  la vitesse de groupe  $v_g = 1$  (cf. figure 3.12). Ensuite, on fait varier  $v$  et pour  $v = 0$ , on obtient la fréquence absolue pour  $\alpha_0$  tel que

$$\frac{d\omega}{d\alpha}(\alpha_0) = 0. \quad (3.77)$$

D'une manière générale, on peut résoudre la relation de dispersion pour  $\alpha \in \mathbb{C}$  et la condition (3.77) doit se traduire par une singularité dans le plan  $(\omega_r, \omega_i)$ . Si cette singularité apparaît pour une partie imaginaire  $\omega_{0,i} > 0$  alors l'écoulement est absolument instable. On peut ici procéder comme suit : on commence avec  $\alpha = \alpha_r$  réel et ensuite on calcule les fréquences pour des parties imaginaires  $\alpha_i < 0$  successives décroissantes en faisant varier la partie réelle, jusqu'à ce qu'une singularité apparaisse. Le résultat pour la couche de mélange est donné en figure 3.15. On voit que pour  $R = 1.1$  la singularité apparaît dans le demi-plan instable et l'écoulement est donc absolument instable, tandis qu'il est convectivement instable pour  $R = 0.9$ . En effet, l'instabilité absolue apparaît pour  $R \geq 1$  ce qui implique que  $U_2 < 0$ . C'est la présence de cette vitesse opposée dans la direction des  $x$  décroissantes qui fait que la perturbation n'est plus seulement convectée.

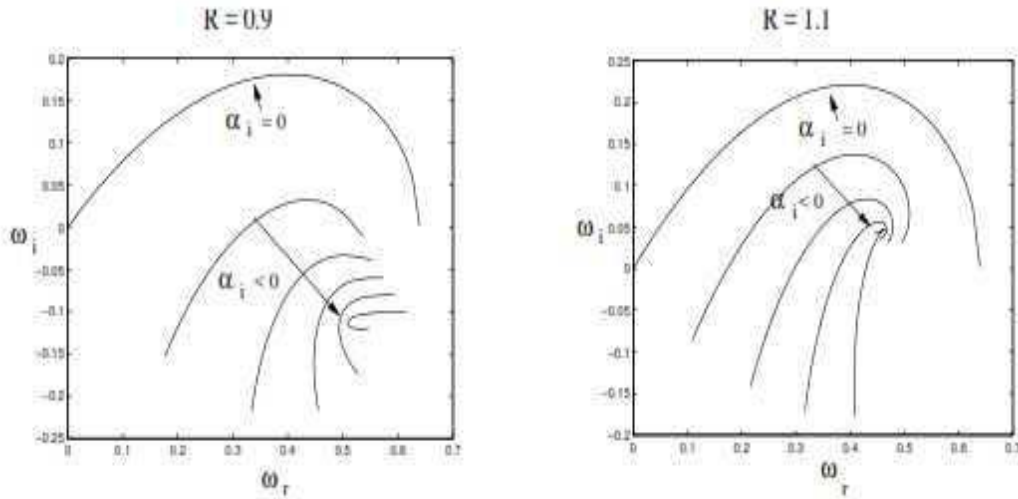


FIG. 3.15 – Courbes  $\omega(\alpha)$  pour des parties imaginaires  $\alpha_i$  décroissantes avec l'apparition du 'cusp' pour le modèle de la couche de mélange.

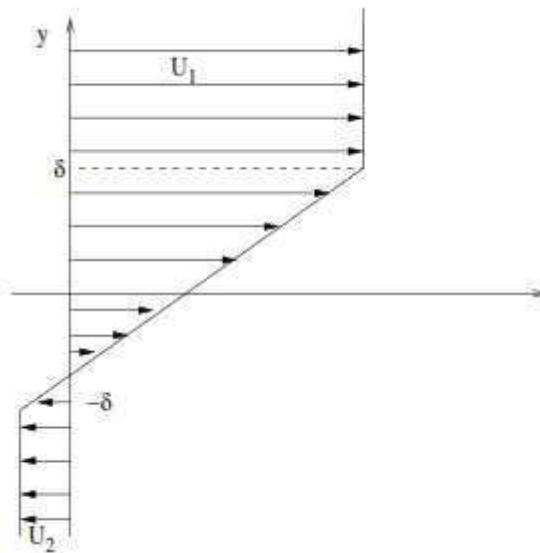


FIG. 3.16 – Profil de vitesse relatif à une couche de mélange absolument instable.

### 3.5.3.1 Instabilité spatiale

Si l'écoulement est convectivement instable, alors les perturbations se propagent dans des directions  $x = vt$  (en supposant qu'elles se situent en  $x = 0$  pour  $t = 0$ ). Il n'y a alors aucune raison de considérer le problème de stabilité temporelle. Reprenons la transformée de Fourier et de Laplace (3.60) de la perturbation et considérons maintenant à la fois  $\omega \in \mathbb{C}$  et  $\alpha \in \mathbb{C}$ . La relation de dispersion

$$D(\alpha, \omega) = 0$$

permet toujours de trouver  $\omega(\alpha)$  car  $\partial D/\partial\omega \neq 0$  en  $(\alpha, \omega)$ . Par le théorème des fonctions implicites,  $\alpha$  est fonction de  $\omega$  à partir de la relation de dispersion si  $\partial D/\partial\alpha \neq 0$ . Quand cette dernière relation tombe-t-elle en défaut ? L'équation

$$\frac{\partial D}{\partial\alpha}(\alpha, \omega(\alpha)) + \frac{\partial D}{\partial\omega}(\alpha, \omega(\alpha)) \frac{d\omega}{d\alpha} = 0$$

Indique que si  $\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} \neq 0$ , c.-à-d. si l'écoulement est convectivement instable d'après la discussion qui précède, alors on pourra déterminer  $\alpha(\omega)$ . Dans des problèmes d'instabilités hydrodynamiques il y a des dérivées d'ordres supérieurs en  $x$  et il est donc clair qu'il y a plusieurs branches solutions de  $\alpha(\omega) = 0$ . Il ne s'agit pas ici de faire un exposé parfaitement rigoureux de la théorie spatio-temporelle mais on peut se convaincre que pour  $\omega = \omega_r + ia$  avec  $a > \omega_{i,max}$  (cf. figure 3.14), alors il y a une branche  $\alpha_+(\omega)$  avec  $\alpha_i > 0$  : en effet, pour ces valeurs de  $\omega$  avec une partie imaginaire au-dessus du facteur d'amplification maximale il ne peut pas y avoir  $\alpha \in \mathbb{R}$  solution de la relation de dispersion.

Sans trop entrer dans des détails techniques et sans vouloir justifier tout à fait rigoureusement l'approche, la théorie spatiale peut être mise en œuvre comme suit. Supposons que l'on cherche une perturbation censée croître dans la direction  $x > 0$ , alors dans la transformation de Fourier (en supposant la perturbation  $\Psi = 0$  pour  $x < 0$ ) on pourra considérer des nombres d'onde  $\alpha \in \mathbb{C}$  et permutant en quelque sorte les rôles de  $\omega$  et  $\alpha$ , on pourra écrire par analogie avec (3.65)

$$\Psi(x, y, t) = - \sum_j \int_{L_\omega} \frac{h(y, \alpha_+(\omega), \omega)}{\frac{\partial D}{\partial\omega}(\alpha_+(\omega), \omega)} e^{-i(\alpha_+(\omega)x - \omega t)} d\omega \quad (3.78)$$

avec  $L_\omega$  le contour d'intégration dans le plan des fréquences approprié, parallèle à l'axe des  $x$  et paramétrés par  $ia$  le point d'intersection avec l'axe imaginaire.

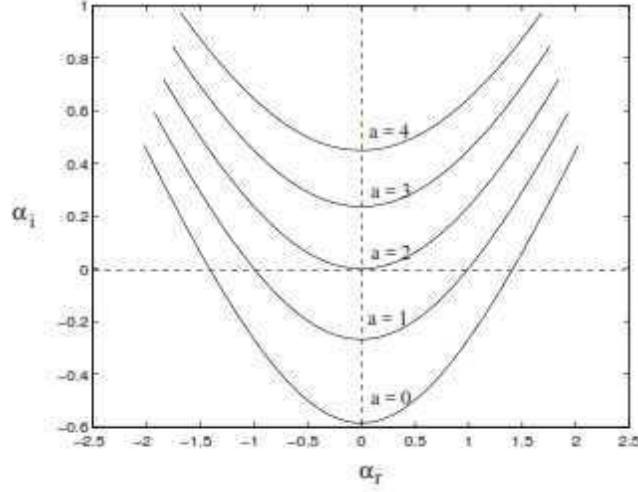


FIG. 3.16 – Courbes  $\alpha_+(\omega)$  paramétrées par  $a$  avec  $\omega = \omega_r + ia$ ,  $-10 \leq \omega_r \leq 10$ .

Pour  $a > \omega_{i,max}$ , on obtient  $\alpha_+(\omega)$  dans le demi-plan des parties imaginaires positives. Abaisant  $a$  la branche  $\alpha_+(\omega)$  touche d'abord l'axe des réels pour  $a = \omega_{i,max}$  et en descendant jusqu'à l'axe réel  $a = 0$  on obtient des parties imaginaires  $\alpha_i(\omega) < 0$  pour  $\omega \in \mathbb{R}$ . Mais par l'exposant  $e^{i\alpha_+(\omega)x}$  c'est précisément la partie imaginaire négative qui traduit l'instabilité spatiale pour  $x > 0$ .

### 3.6 Instabilité visqueuse d'écoulements cisailés

On peut écrire le système (3.3), (3.4) en termes de la vorticité  $\omega = \text{rot} \mathbf{u}$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + (\mathbf{u} \cdot \nabla) \omega - (\omega \cdot \nabla) \mathbf{u} = \frac{1}{Re} \Delta \omega. \quad (3.79)$$

En effet, il suffit d'écrire

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \text{rot} \mathbf{u} \wedge \mathbf{u} + \frac{1}{2} \nabla |\mathbf{u}|^2$$

et d'appliquer l'opérateur rotationnel à (3.3), utilisant l'identité vectorielle

$$\text{rot} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla) \mathbf{A} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \nabla) \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A}$$

ainsi que

$$\text{rot} (\text{rot} \mathbf{A}) = \nabla (\text{div} \mathbf{A}) - \Delta \mathbf{A}$$

et en tenant compte que  $\mathbf{u}$  et  $\omega$  sont à divergence nulle. A nouveau, si l'on considère un écoulement de base parallèle

$$\mathbf{U} = (U(y), 0, 0), \text{ et donc } \Omega(y) = -U'(y) \mathbf{k}$$

et en linéarisant (notant la perturbation de la vorticité encore  $\omega$ ) l'équation pour la perturbation devient

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + U \frac{\partial \omega}{\partial x} - v U'' \mathbf{k} + U' \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} - \eta U' \mathbf{i} = \frac{1}{Re} \Delta \omega \quad (3.80)$$

avec  $\eta$  la composante suivant  $\mathbf{j}$  de la vorticité

On applique à nouveau le rotationnel à l'équation (3.80) en tenant compte des identités vectorielles

$$\text{rot}(a \mathbf{A}) = a \text{rot} \mathbf{A} + \nabla a \wedge \mathbf{A}$$

et

$$\text{rot}(\Delta \omega) = -\text{rot}(\text{rot}(\text{rot} \omega)) = \Delta(\text{rot} \omega) = -\Delta^2 \mathbf{u}$$

on trouve

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial t} \Delta \mathbf{u} - U \frac{\partial}{\partial x} \Delta \mathbf{u} + U' \frac{\partial \omega}{\partial z} + \frac{1}{Re} \Delta^2 \mathbf{u} \\ = \nabla(\eta U') \wedge \mathbf{i} + \nabla(v U'') \wedge \mathbf{k} - \nabla(U) \wedge \frac{\partial \omega}{\partial x} - \nabla(U') \wedge \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial z} \end{aligned} \quad (3.81)$$

En observant que le produit scalaire avec  $\mathbf{j}$  des deux derniers termes de (3.81) est nul et que

$$(\nabla(\eta U') \wedge \mathbf{i}) \cdot \mathbf{j} = U' \frac{\partial \eta}{\partial z}, \quad (\nabla(v U'') \wedge \mathbf{k}) \cdot \mathbf{j} = -U'' \frac{\partial v}{\partial x}$$

la composante suivant  $y$  de (3.81) devient

$$\left( \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial x} \right) \Delta v - U'' \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{1}{Re} \Delta^2 v = 0 \quad (3.82)$$

### 3.6.1 Equation d'Orr-Sommerfeld et de Squire

On observe que l'équation (3.82) ne fait intervenir que la composante  $v$  suivant la direction  $\mathbf{j}$  du champ de vitesse et cherchant la solution pour l'écoulement parallèle sous forme de modes normaux  $v = \hat{v} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$

on obtient

$$(-i\omega + i\alpha U) \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{v} - i\alpha U'' \hat{v} - \frac{1}{Re} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \hat{v} = 0, \quad k^2 = \alpha^2 + \beta^2 \quad (3.83)$$

qui est la célèbre * quation d'Orr-Sommerfeld*. Ne retenant que l'équation suivant  $y$  du système (3.80) et écrivant  $\eta = \hat{\eta} e^{i(\alpha x + \beta z - \omega t)}$

on obtient l'équation de Squire, à savoir

$$(-i\omega + i\alpha U) \hat{\eta} - \frac{1}{Re} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \hat{\eta} = -i\beta U' \hat{v} \quad (3.84)$$

Il suffit de résoudre (3.83) et (3.84) pour obtenir le champ de vitesse de la perturbation.

En effet,  $\eta = \partial u / \partial z - \partial w / \partial x$  avec  $u$  et  $w$  les composantes du champ de vitesse suivant  $x$  et  $z$  respectivement, et en écrivant ces composantes du champ de vitesse sous forme de modes normaux on, on obtient

$$\hat{\eta} = i\beta\hat{u} - i\alpha\hat{w}$$

Ajoutant l'équation d'incompressibilité

$$i\alpha\hat{u} - i\beta\hat{w} + \frac{d\hat{v}}{dy} = 0$$

on déduit

$$\hat{u} = \frac{i\alpha\frac{d\hat{v}}{dy} - i\beta\hat{\eta}}{\alpha^2 + \beta^2}, \quad \hat{w} = \frac{i\beta\frac{d\hat{v}}{dy} + i\alpha\hat{\eta}}{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Il est donc possible de ne considérer que les deux équations aux dérivées partielles (3.83) et (3.84) pour obtenir des résultats de stabilité au lieu de quatre équations si on utilisait les variables primitives ( $u, v, w$ ) et  $p$ . Ces équations sont à résoudre pour  $y_1 < y < y_2$  et il faut ajouter les conditions aux bords, résultant des conditions d'adhérence à des parois ou de décroissance des perturbations à l'infini,

$$\hat{v}(y_i) = \frac{d\hat{v}}{dy}(y_i) = \hat{\eta}(y_i) = 0, \quad i = 1, 2. \quad (3.85)$$

La composante normale de la perturbation de vitesse  $\hat{v}$  intervient dans l'équation de Squire (3.84) comme un terme source. Supposons que la résolution de l'équation d'Orr-Sommerfeld (3.83) donne lieu à une fréquence complexe  $\omega$  avec  $\omega_i > 0$ , c.-à-d. l'écoulement de base est instable. Si  $\omega$  n'est pas valeur propre de l'équation de Squire (ce qui signifie que (3.84) a la solution identiquement égale à zéro en l'absence du second membre), alors connaissant  $\hat{v}$ , la solution  $\hat{\eta}$  peut être déterminée par (3.84).

Or, on montre que si  $\omega$  est valeur propre de l'équation de Squire, alors  $\omega < 0$ . En effet, multipliant (3.84) (sans second membre) par  $\hat{\eta}$  et intégrant donne

$$i(\alpha U - \omega) \int_{y_1}^{y_2} |\hat{\eta}|^2 dy = \frac{1}{Re} \int_{y_1}^{y_2} \left( \left| \frac{d\hat{\eta}}{dy} \right|^2 + k^2 |\hat{\eta}|^2 \right) dy$$

La partie réelle du membre à gauche doit être négative, à savoir

$$\omega_i \int_{y_1}^{y_2} |\hat{\eta}|^2 dy < 0$$

et donc  $\omega_i < 0$ .

Par conséquent, la résolution de (3.83) renseigne sur l'instabilité de l'écoulement. On peut multiplier (3.83) par  $k/\alpha$  alors

$$(-i\tilde{\omega} + ikU) \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right) \hat{v} - ikU'' \hat{v} - \frac{1}{Re} \left( \frac{d^2}{dy^2} - k^2 \right)^2 \hat{v} = 0, \quad (3.86)$$

avec  $\tilde{\omega} = \frac{k}{\alpha} \omega$  et  $\tilde{Re} = \frac{\alpha}{k} Re$ . Or, l'équation (3.86) est équivalente à l'équation d'Orr-Sommerfeld pour des perturbations bidimensionnelles de nombre d'onde  $\tilde{\alpha} = k = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$

On peut donc énoncer le théorème de Squire pour les écoulements parallèles visqueux : pour toute perturbation instable tridimensionnelle de fréquence complexe  $\omega$ , aux nombres d'onde  $\alpha, \beta$  (avec  $\alpha > 0$ ) et nombre de Reynolds  $Re$ , il existe une perturbation bidimensionnelle avec le nombre d'onde  $\tilde{\alpha} = \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}$  de fréquence  $\tilde{\omega} = \frac{k}{\alpha} \omega$  et  $\tilde{Re} = \frac{\alpha}{k} Re$ . Or,  $\tilde{\omega}_i \geq \omega_i$  et  $\tilde{Re} \leq Re$  et on en déduit qu'à toute perturbation tridimensionnelle instable correspond une perturbation bidimensionnelle plus instable à un nombre de Reynolds plus faible.

Ce résultat justifie notamment de chercher le nombre de Reynolds  $Re_c$  critique, en-dessous duquel toute perturbation linéaire est stable mais au-dessus duquel il y a des perturbations linéairement instable, pour des perturbations bidimensionnelles. Pour la couche limite de plaque plane, la courbe de stabilité linéaire est donnée par la figure 3.8. Bien sûr, en pratique l'équation d'Orr-Sommerfeld doit être résolue numériquement, en approchant les opérateurs de dérivées (par rapport à  $y$ ) par des opérateurs discrets, c.-à-d. des matrices. On transforme ainsi le système en un problème matriciel de valeurs propres généralisées. Pour le profil de couche limite dans la variable de similitude discuté à la partie 3.4 le nombre de Reynolds dans l'équation (3.83) sera le nombre de Reynolds dit local formé avec l'épaisseur de déplacement. L'instabilité apparaît alors pour  $Re \approx 520$  et  $\alpha_c \approx 0.3$ . Pour ces paramètres, la figure 3.17 montre le spectre que l'on obtient en résolvant numériquement l'équation d'Orr-Sommerfeld. La vitesse de phase complexe  $c = \omega/\alpha$  est représentée et on observe 4 valeurs propres discrètes, dont une à la limite de l'instabilité avec  $c_i \approx 0$ , mais aussi une famille de valeurs propres avec  $c_r$  proche de 1 : c'est la trace d'un spectre continu stable. Nous avons mis en évidence l'existence d'un tel spectre pour l'équation de Rayleigh et il est associé à  $c$  t. q.  $c = U(y)$ . Ici ce spectre est bien sûr modifié par la présence de la viscosité mais on retrouve néanmoins des valeurs  $c \approx 1$  proche de l'axe des réel, ce qui correspond au profil constant pour  $y \gg 1$  loin de la paroi. Sur la figure 3.18 le mode propre associé à la valeur propre neutre (avec  $c_r \approx 0.4$ ) est représenté, par sa partie réelle et imaginaire.

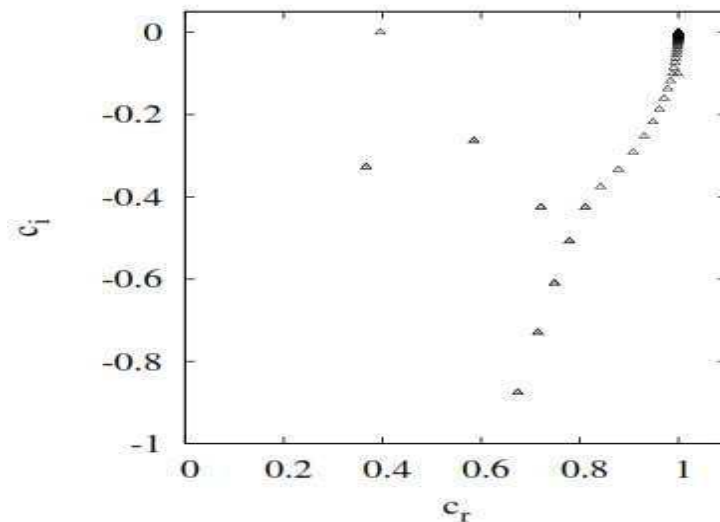


FIG. 3.17 – Spectre temporel de Blasius, à  $Re = 520$  et  $\alpha = 0.3$ .

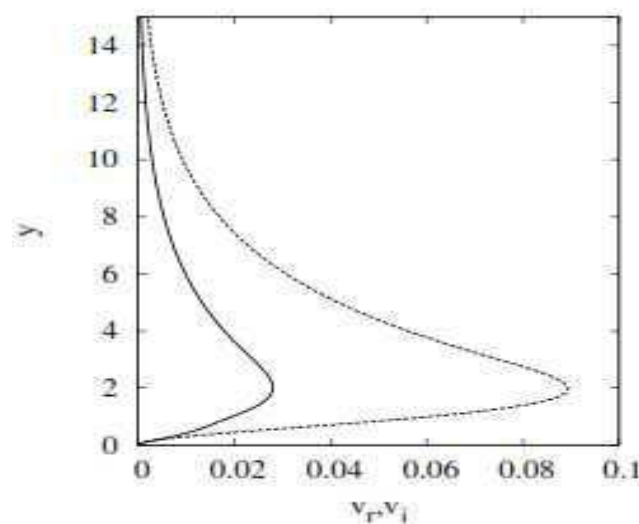


FIG. 3.18 – Profil du mode  $\hat{v}$  associé au mode neutre avec  $c_r \approx 0.4$  de la figure 3.17 (courbe continue partie réelle, courbe hachurée partie imaginaire).

### 3.6.2 Non normalité et croissance transitoire

La stabilité comme prédite par l'analyse par modes normaux est un résultat asymptotique, dans le sens que toute perturbation infinitésimale tend vers zéro lorsque  $t \rightarrow \infty$ . Dans des couches cisailées cependant des phénomènes de croissance transitoire ont une grande importance pour la transition de ces écoulements vers la turbulence. En effet, en présence d'un comportement sous-critique la croissance en temps court d'une perturbation peut faire de sorte que la dynamique s'éloigne de l'état de base et des non linéarités peuvent conduire à la transition pour lesquelles le scénario s'appuyant sur la linéarisation des équations est en

quelque sorte court-circuité. Ces phénomènes appelés en anglais by-pass transition ont fait l'objet de nombreuses études.

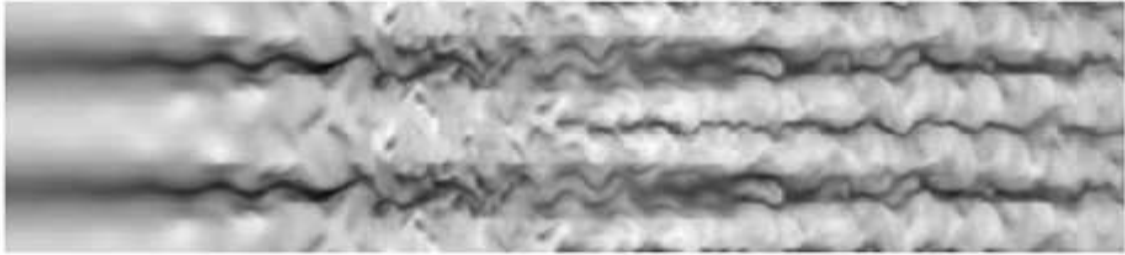
### 3.7. Classification des transitions laminaire-turbulent

#### 3.7.1. Transition by-pass

Pour des perturbations extérieures d'intensité supérieure à 1%, la croissance des modes TS peut être court-circuitée. On parle alors de transition by-pass, d'après l'expression introduite pour la première fois par Morkovin en 1969 [64]. Ainsi, selon le taux de turbulence extérieure, la transition peut avoir lieu pour un nombre de Reynolds inférieur au nombre de Reynolds critique prévu par la théorie de stabilité linéaire. On observe alors, dans le cas d'une transition by-pass, la présence de tourbillons longitudinaux quasi-stationnaires et alternés dans la direction transversale. Ces tourbillons soulèvent alternativement du fluide à faible vitesse provenant de la zone proche de la paroi et ramènent du fluide à forte vitesse de la couche externe vers la paroi. Ce mécanisme d'advection appelé 'effet lift-up' conduit à la formation de « streaks », i.e. des structures longitudinales alternant dans la direction transversale de zones à faible vitesse et de zones de forte vitesse.

La transition by-pass est due à la croissance transitoire des perturbations. En effet, certains modes peuvent suivre une phase transitoire de croissance algébrique, avant d'être amortis. Ainsi ces perturbations, bien que stables, peuvent si elles atteignent une certaine amplitude, provoquer des instabilités secondaires qui conduisent finalement à la transition. L'existence de ces perturbations à croissance transitoire est liée à la non-normalité de l'opérateur de Navier-Stokes linéarisé [20, 65]. Cette propriété fondamentale a conduit à l'étude des perturbations optimales qui consiste à rechercher les perturbations qui donnent la plus forte croissance transitoire. Après, les travaux d'Andersson et al [66] et de Luchini [67] ont montré qu'une paire de tourbillons longitudinaux contra-rotatifs correspond une forme de perturbation optimale pour la croissance des streaks. De plus, non seulement ce mécanisme de transition est bien indépendant une différent de la croissance des ondes TS, mais Brandt et al [65] ont montré que des streaks d'amplitude finie mais assez suffisante peuvent stabiliser les ondes TS [19].

Lorsqu'ils atteignent une amplitude ces streaks deviennent eux-mêmes instables. Andersson et al. [66] ont notamment étudié ces instabilités secondaires par une analyse de Floquet. Le processus de transition par déstabilisation des streaks a été analysé numériquement par Brandt & Henningson [65] (voir figure 3.7).



**Figure 3.7.** –Simulation de la transition vers la turbulence initiée par la déstabilisation de streaks, d'après Brandt et Henningson [65]

Notons que les phénomènes qui apparaissent dans ce scénario de transition sont différents des structures cohérentes d'une couche limite turbulente que l'on nomme également streaks.

Ces derniers se traduisent aussi par des allées tourbillonnaires alternées de zones de faible et de forte vitesse. Cependant les échelles de longueur et de temps caractéristiques des streaks turbulents sont différentes de celles d'une couche limite laminaire. D'après les calculs de Brandt & Henningson [65], il semble que les streaks turbulents ne résultent pas d'une évolution continue des streaks transitionnels.

### 3.7.2. Transition oblique

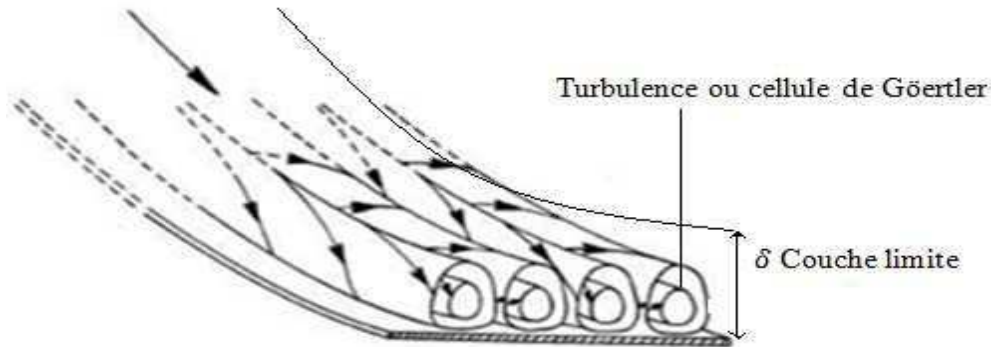
La transition oblique est un autre scénario de transition où la croissance transitoire de perturbations joue un rôle important. Ce processus de transition se divise en trois étapes successives:

D'abord, l'interaction non-linéaire d'une paire de modes obliques de même angle, mais de signe opposé, donne naissance à des paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs. Puis, ce système de tourbillons conduit, par un phénomène d'ascension par advection au voisinage de la paroi (effet lift-up), à la formation de streaks. Enfin, des mécanismes d'instabilité secondaire de ces streaks amorcent la transition.

Ce type de transition a été étudié en détail par Schmid & Henningson [68]. Ils ont simulé numériquement la transition initiée par la croissance temporelle d'une paire d'ondes oblique. Leurs résultats ont notamment montré que, pour une même énergie initiale des perturbations, ce scénario conduit plus rapidement à la transition de type K ou H. La transition oblique a également fait l'objet d'études expérimentales comme celle de King & Breuer [69].

### 3.7.3. Transition par modes de Göertler

En présence de parois concaves ou de courbures de lignes de courant, on observe la croissance de paires de tourbillons longitudinaux contrarotatifs, appelés onde stationnaires ou tourbillons de Göertler [70] représentés sur la figure(3.8). Ce sont des ondes périodiques et dont le vecteur d'onde est perpendiculaire à la direction principale de l'écoulement.



**Figure(3.8)** Schéma de propagation longitudinale de l'instabilité de type Göertler sur une paroi concave (d'après Göertler [70]).

Tout comme les ondes de TS ou KH, ces tourbillons correspondent à un mode normal de l'écoulement de base. Celui-ci ne résulte ni d'un mécanisme infléxionnel, ni d'un mécanisme visqueux, mais est dû à des effets centrifuges. Bien que la structure de ce mode soit fort semblable à celle des tourbillons longitudinaux observés précédemment pour la transition oblique, les tourbillons de Göertler se différencient de ces derniers par le mécanisme de leur formation.

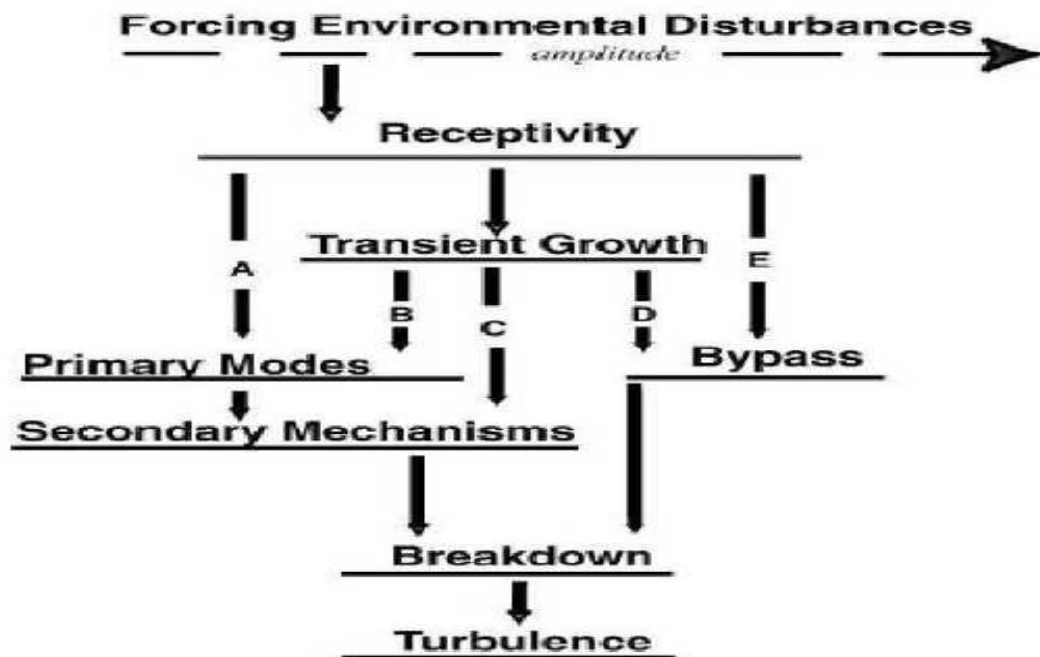
Néanmoins, comme le font remarquer Brandt & Henningson [65], le mécanisme d'instabilité secondaire des tourbillons de Göertler est assez analogue à celui de la transition oblique décrit précédemment. Les tourbillons de Göertler conduisent également par effet lift-up à la croissance de streaks qui se déstabilisent et provoquent la transition vers la turbulence.

## 3.8 Synthèse des processus de transition : chemin de bifurcation

Ainsi, la connaissance des différents phénomènes d'amplification apparaît comme l'une des clés essentielles dans l'analyse de la transition et sa prévision. Reshotko [71] propose le schéma (3.9) pour présenter les différentes routes possibles ou chemin de bifurcation menant du régime laminaire au régime turbulent. La flèche indique le sens croissant de l'amplitude

des perturbations extérieures. Au cours de l'étape de réceptivité, les perturbations extérieures vont être "digérées", puis, filtrées par la couche limite pour générer au sein de celle-ci de nouvelles instabilités. En fonction des propriétés liées aux perturbations extérieures, le processus de transition peut alors emprunter plusieurs chemins de bifurcations pour évoluer vers la turbulence

- 1) Chemin A : Cette route A correspond au mécanisme classique de transition par amplification du mode de Tollmien- Schlichting, ou par des ondes dites "crossflow" pour les couches limites tridimensionnelles comme c'est le cas, par exemple, pour des ailes en flèche. Une autre instabilité pour ce type de scénario est le mécanisme de transition par instabilité de type Göertler induite par les surfaces concaves. Pour ce type de mécanisme, l'instabilité est de type modal, il s'agit d'étudier l'évolution du mode le moins stable, lui seul étant responsable de la stabilité de la couche limite et du déclenchement de la transition. En général, ce chemin de bifurcation correspond à un processus de transition caractérisé par de perturbation infinitésimal de faible amplitude se produisant dans des configurations de dimension infinie.



**Figure (3.9)** Chemins de bifurcations : Différents scénarios possibles de transitions menant à la turbulence. La flèche horizontale indique des perturbations extérieures croissantes en amplitude. La flèche verticale indique le processus de transition choisi vers la turbulence. d'après M.V.Morkovin[71].

- 2) Chemin B : Lorsque l'amplitude des perturbations extérieures augmente, le phénomène de croissance transitoire (multi-modal) commence à apparaître. Pour le scénario B, l'amplitude des perturbations extérieures reste relativement faible de telle sorte que les phénomènes d'amplification modale et de croissance transitoire cohabitent. Kosorygin et Polyakov [72] ont noté que pour des taux de turbulence extérieure compris entre :  $0.1\% \leq Tu \leq 0.7\%$  les ondes TS et les modes de Klebanoff étaient tous deux présents dans la zone laminaire et que la transition était déterminée par l'interaction entre ces deux types d'instabilités.
- 3) Chemin C : Le taux de turbulence est assez conséquent pour que le phénomène de croissance transitoire masque totalement l'instabilité modale : ce cas correspond à  $Tu > 0.7\%$  dans les expériences de Kosorygin et Polyakov [71]. La théorie des perturbations optimales montre que les perturbations initiales, correspondant à des tourbillons longitudinaux, entraînent la formation stries dans la couche limite. Ces stries peuvent être amplifiées transitoirement de façon importante.
- 4) Chemin D : Ce processus est régi par une transition dite algébrique qui est pleinement pilotée par l'amplification dans la couche limite des modes de Klebanoff : ce scénario intervient, par exemple, lorsque la couche limite est soumise à des taux de turbulence extérieure élevés
- 5) distinction entre les scénarios C et D est délicate. Dans les deux cas, la turbulence extérieure pénètre la couche limite au niveau du bord d'attaque et entraîne la formation de stries. Dans le cas C, les stries croissent suffisamment lentement pour que la couche limite effectue un filtrage des hautes fréquences de la turbulence extérieure. Ainsi, quand la strie atteint une amplitude critique de transition, les hautes fréquences ont disparu et la transition est déclenchée par une instabilité secondaire intrinsèque à la propagation du mode de Klebanoff. Pour le scénario D, les stries atteignent l'amplitude critique de transition dans une région proche du bord d'attaque avant que le filtrage des hautes fréquences de la turbulence extérieure (par la couche limite) ait pu avoir lieu : ces hautes fréquences interagissent alors avec le mode de Klebanoff pour précipiter ou accélérer le processus de transition .
- 6) Chemin E : Il représente des cas de couches limites qui possèdent un environnement très perturbé. Le forçage de la couche limite par les perturbations extérieures est tel qu'il n'y a plus de régime linéaire dans la couche limite. Pour de tels cas, la notion même de région

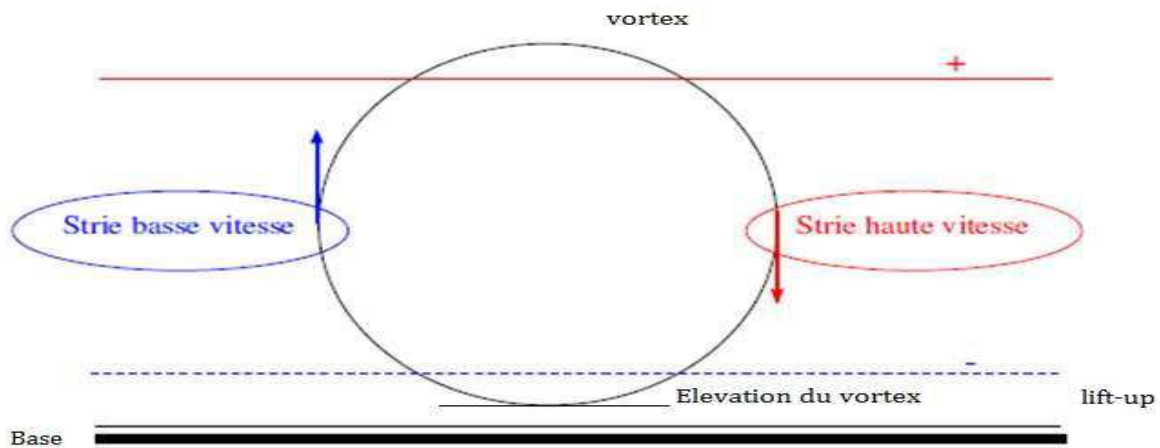
laminaire et donc de transition est discutable : la couche limite apparaît comme étant pleinement turbulente dès le début de sa formation.

Dans ces conditions, étant donné le chemin choisi, Comment expliquer le mécanisme qui est à l'origine de l'apparition de l'instabilité correspondante ?

### 3.9 Explication du processus de stabilisation par les stries.

#### 3.9.1 Explication physique: l'effet "lift up"

La première analyse multimodale a été réalisée dans le cadre d'un écoulement non visqueux. En 1975, Ellingsen et Palm [73] ont montré qu'en introduisant une perturbation purement transversale dans un écoulement cisailé, des fluctuations de vitesse longitudinale apparaissent et pouvaient croître linéairement donnant ainsi naissance à des structures de haute et basse vitesse alternées dans la direction transverse de l'écoulement. Ce mécanisme de croissance a été baptisé "Effet Lift-up" par Landahl [74] (1980). Il est illustré sur la figure (3.10) :



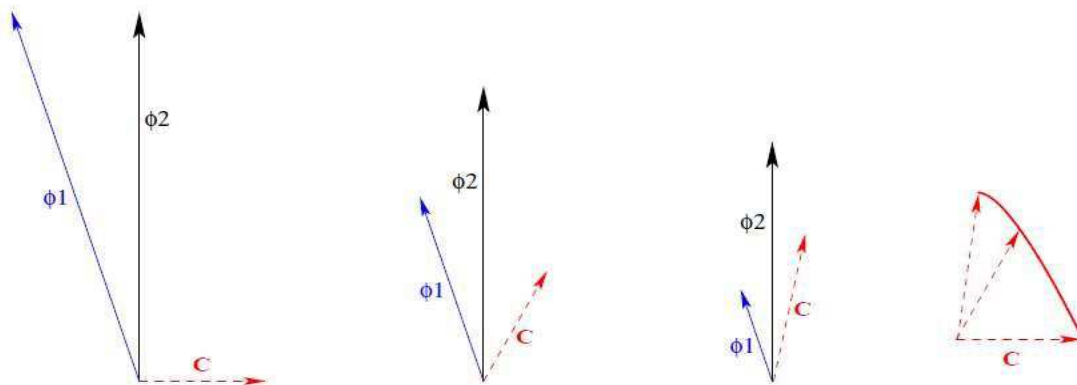
**Figure 3.10**— Effet "Lift-up" : Interaction d'un tourbillon an vortex par effet de cisaillement de la couche limite.

un tourbillon longitudinal, en interagissant avec le cisaillement de l'écoulement de base, remonte les particules de faible vitesse vers la frontière de la couche limite et abaisse les particules de vitesse élevée vers la paroi, conduisant à la formation de stries haute et basse vitesse, également appelées modes de Klebanoff [40]. Si l'énergie de ces instabilités est suffisamment amplifiée la transition est déclenchée : on parlera dans ce cas de transition Bypass, terme introduit par Morkovin (1969) [75], signifiant Littéralement que la transition dite naturelle induite par les ondes TS, est court-circuitée.

### 3.9.2 Explication mathématique : non-normalité de l'opérateur

L'origine des écarts entre théorie et expérience a d'abord été recherchée dans les termes non linéaires des équations de Navier-Stokes. Néanmoins, dans l'équation de l'énergie de Reynolds- Orr, les termes non linéaires ne font que redistribuer l'énergie entre les modes (Henningson [76]). Ceci semble indiquer qu'il existe un mécanisme de croissance linéaire des perturbations conduisant à réétudier la théorie de stabilité modale. Comme l'ont démontré Trefethen [77] ainsi que Schmid et Henningson [68], ce processus d'amplification linéaire, appelé croissance transitoire ou croissance algébrique, est attribué à la non-normalité des opérateurs. L'énergie des perturbations n'est plus égale à la somme des énergies de chaque mode : la non orthogonalité des fonctions propres autorise des interactions constructives entre plusieurs modes entraînant une augmentation significative de l'énergie des perturbations. Ce phénomène est illustré de façon très schématique par la figure (3.11) : on considère deux modes propres  $\phi_1$  et  $\phi_2$  tous deux strictement décroissants, dans le sens des abscisses croissantes (ou pour des temps croissants), tels que  $\phi_1$  et  $\phi_2$  diminuent respectivement de 50% et 20% à chaque pas.

On considère également le vecteur  $C = \phi_2 - \phi_1$ . Même si les deux modes considérés ici sont purement décroissants, leur interaction  $C$  est amplifiée de façon transitoire avant de tendre vers  $\phi_2$ . On parlera donc de croissance transitoire lorsque des perturbations qui sont individuellement amorties exponentiellement selon la théorie modale génèrent, lorsqu'elles sont sommées, une perturbation non-modale qui, elle, croît algébriquement, avant d'être amortie lorsque le comportement exponentiel reprend le dessus aux distances longues (ou aux temps longs si l'on s'intéresse à la stabilité temporelle de l'écoulement).



**Figure 3.11** — Exemple de croissance transitoire : interaction entre deux modes non normaux  $\phi_1$  qui décroît de 50% et  $\phi_2$  qui décroît de 20%. Le vecteur  $C$  est formé de la différence  $C = \phi_2 - \phi_1$ . Cet exemple est issu de la revue de Schmid sur les stabilités non-modal [40].

**Conclusion**

Comme nous l'avons vu, la transition est un enchaînement complexe de mécanismes de réceptivité et d'instabilité, et que les perturbations initiales dans les écoulements cisailés et peut être déclenchée par une inhomogénéité instationnaire harmonique à la paroi (soufflage/aspiration, vibration) ou à l'intérieur même de la couche limite (ruban vibrant, force électromagnétique) sous la forme de tourbillons longitudinaux qui peuvent interagir avec l'écoulement de basse vitesse, Ce mécanisme, dit de lift-up peut donner lieu à la croissance de petites perturbations qui à leur tour peuvent mener l'écoulement vers le régime chaotique pour des nombres de Reynolds bien en dessous du Reynolds critique pour l'instabilité de Tollmien-Schlichting. Alors dans ces conditions de travail que l'on se place pour réaliser la prédiction de l'écoulement instable dans une cavité rectangulaire de type Poiseuille.

# ***CHAPITRE 4***

***Formulation du problème de l'instabilité  
de striation***

## Chapitre 4 Formulation du problème de l'instabilité de striation

### 4.1 Introduction

Dans ce chapitre, On définit le problème ainsi que la configuration de l'écoulement associé au système de coordonnées choisi. On introduit ensuite les équations régissant le comportement du fluide conducteur de l'électricité. Ces équations sont fondées selon les lois physiques de conservation de masse (continuité), de quantité de mouvement (Navier-Stokes) et l'écoulement est soumis à l'influence d'un champ magnétique qui développe une force de Lorentz agissant sur le métal liquide lequel obéit aux équations de Maxwell, satisfaisant les conditions initiales et aux limites.

### 4.2 Définition du problème

Le concept de couverture liquide envisagée pour refroidir les réacteurs à fusion thermonucléaire est basé sur l'utilisation de l'alliage Pb-17Li. L'écoulement du métal liquide peut être affecté par la présence d'un champ magnétique intense afin de confiner le plasma. L'action du champ magnétique sur les caractéristiques de l'écoulement en conduite mérite d'être précisée au niveau des champs moyen et perturbé.

### 4.3. Géométrie du problème

Le système physique considéré (Figure.4.1) consiste en un canal de section rectangulaire de hauteur  $2a = 10\text{mm}$  et largeur  $2d = 27\text{mm}$ , et longueur  $L = 31,5\text{mm}$ . Un métal liquide Pb17Li est caractérisé par un faible nombre de Prandtl, il est électriquement conducteur de conductivité  $\sigma = 0,9 \cdot 10^5 \Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ , une vitesse moyenne d'écoulement de  $5\text{ cm/s}$ , à la température  $T_c = 550^\circ\text{C}$ . Un champ magnétique  $B_0 = 1,7\text{T}$  externe dont la direction est parallèle aux deux parois latérales telles que celle-ci sont électriquement isolantes.

Le champ magnétique induit un champ électrique  $E = V \times B$  dans le fluide, et une différence de potentiel entre les deux parois latérales, indiquée sur la figure 4.1 par les symboles  $\oplus$  et  $\ominus$ . La différence de potentiel engendre un courant dans le fluide et dans les

parois et peut être caractérisé localement par la densité de courant  $j$ . Le courant qui circule perpendiculairement aux lignes de champ magnétique, induit une force de Lorentz  $F_L = j \times B$  qui agit à l'opposé de la direction d'écoulement dans la section transversale du canal, sauf près des parois parce que les conductivités électriques peuvent être différentes de celle du fluide. Par conséquent, la force de Lorentz dans la majeure partie de l'écoulement agit contre la pression d'entraînement. En outre, l'action de la force de Lorentz dans le noyau de l'écoulement a pour effet d'aplatir la distribution de vitesse moyenne en forme de parabole (écoulement de Poiseuille) voir la figure 4.1b.

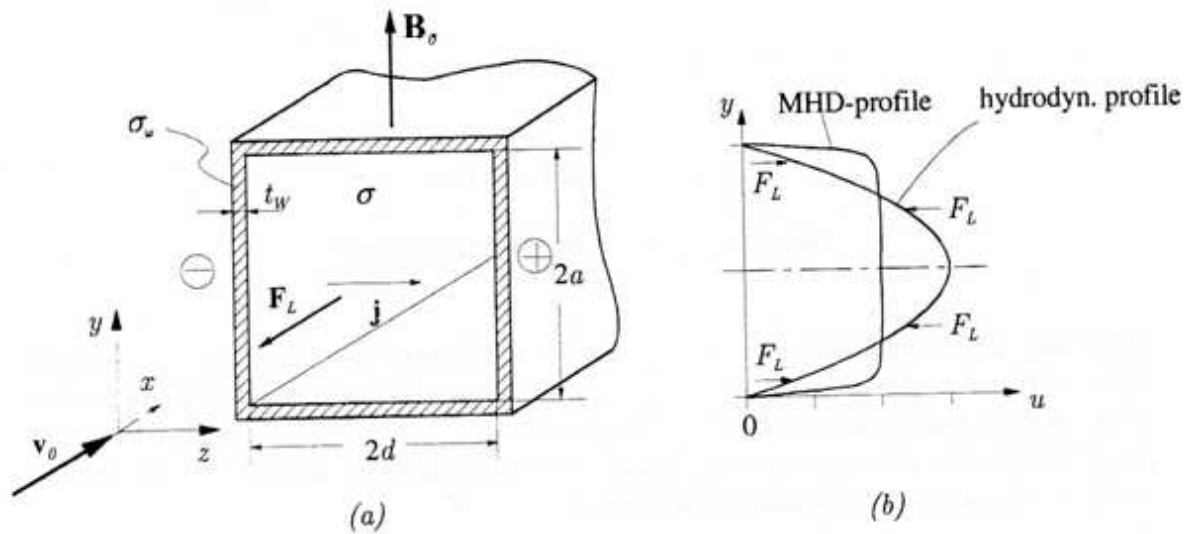


Figure 4.1 : a) Géométrie de l'enceinte et associée au système de coordonnées.

b) L'influence de la force de Lorentz  $F_L$  sur le profil de vitesse.

## 4.4 Bases théoriques

### 4.4.1 Equations

Les phénomènes relevant de la magnétohydrodynamique sont décrits par un système d'équations constitué de la réunion des équations de l'hydrodynamique (équations de Navier-Stokes) et des équations de l'électromagnétique (équations de Maxwell).

La première de ces équations hydrodynamique, exprime la conservation de la masse :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho = -\rho \nabla \cdot \vec{V} \quad (4.1)$$

la deuxième traduit la conservation de la quantité de mouvement

$$\rho \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] = -\nabla p + \rho \vec{g} + \rho \nu \left[ \Delta \vec{V} + \frac{1}{2} \nabla (\nabla \cdot \vec{V}) \right] + \vec{j} \wedge \vec{B} \quad (4.2)$$

la troisième correspond à la conservation de l'énergie

$$\rho \left( \frac{\partial h}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla h \right) = -p \nabla \cdot \vec{V} - \rho \nu \left[ \frac{2}{3} (\Delta \vec{V})^2 - \Delta V^2 + (\nabla \wedge \vec{V})^2 + 2 \vec{V} \cdot \Delta \vec{V} \right] + \nabla \cdot (\rho k \nabla h) + \frac{j^2}{\sigma} + Q \quad (4.3)$$

et la quatrième est une équation d'état :

$$\rho = f(p, h) \quad (4.4)$$

La cinquième de ces équations (magnétique) exprime la conservation du flux d'induction magnétique

$$\nabla \vec{B} = 0 \quad (4.5)$$

la sixième traduit la loi de Faraday

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = -\nabla \wedge \vec{E} \quad (4.6)$$

la septième correspond à la loi d'Ampère :

$$\mu_0 \vec{J} = \nabla \wedge \vec{B} \quad (4.7)$$

et la huitième à la loi d'Ohm :

$$\vec{J} = \vec{\sigma}(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (4.8)$$

Ce système est non linéaire. La loi d'Ohm énoncée, ici, est une forme réduite de l'expression (4.8) plus générale établie en physique des plasmas dans le cadre d'un modèle simplifié.

(voir Annexe 1)

$$\vec{J} = \sigma(\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \quad (4.9)$$

Enfin, il est important de savoir que les autres équations de la MHD résultent aussi d'approximations. On a en effet négligé :

-la force électrique ( $\rho_e \vec{E}$ ,  $\rho_e$  charge électrique volumique) devant la force magnétique ( $\vec{J} \wedge \vec{B}$ ) dans l'équation de Navier-Stokes, ainsi que les forces de gravité.

-les courants de déplacement ( $\frac{1}{c^2} \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}$ ) devant les courants de conduction ( $\nabla \wedge \frac{\vec{B}}{\mu}$ ) dans l'équation d'Ampère.

Ces deux approximations peuvent se résumer par une seule inégalité :

$$\frac{V}{c} \ll R_m^{\frac{1}{2}}$$

où

$\nu$  est la viscosité cinématique

$c = (\epsilon_0 \mu_0)^{-1/2}$  est la vitesse de la lumière

$R_m = \mu_0 \sigma V L$  est le nombre de Reynolds magnétique

$V, L$  vitesse, dimension caractéristique.

En pratique, en MHD on vérifie toujours la condition :  $V/c < 10^{-5}$  et  $R_m \geq 10^{-5}$

Le nombre de Reynolds magnétique  $R_m = \mu\sigma V_0 B_0$  qui caractérise l'importance relative de la convection magnétique par rapport à la diffusion magnétique. Lorsque  $R_m \ll 1$  l'équation de l'induction se réduit à  $\vec{\nabla}^2 \vec{B}^* = 0$ . Dans ces conditions, les perturbations du champ magnétique par les courants induits peuvent être négligées et le champ magnétique ne dépend pas du champ de vitesse. Dans la plupart des installations  $R_m$  est faible ou modéré. Dans le réacteur à fusion caractérisé par des vitesses typiques de l'ordre de  $U \sim 10^{-2} m/s$ ,  $\mu\sigma \sim 10^{-1}$  et  $L \sim 10^{-2}$  donc  $R_m \sim 10^{-5} \ll 1$ .

Dans le cas de la fusion, les nombres de Hartmann et le paramètre d'interaction prenant des valeurs asymptotiques pour les écoulements de Pb-17Li, sont typiquement de l'ordre de  $10^4$  à  $10^5$ . Ils sont généralement grands en ce qui concerne les écoulements de métaux liquides et atteignent facilement  $10^3$  pour des champs magnétiques de l'ordre de 1 tesla. L'épaisseur des couches (figure 4.2) dépend en fait de leur orientation vis-à-vis du champ magnétique. Les couches perpendiculaires au champ, d'épaisseur  $\delta_{\perp} \approx 1/H_a$ , sont beaucoup plus minces que les couches parallèles au champ, d'épaisseur  $\delta_{\parallel} \approx 1/H_a^{1/2}$ .

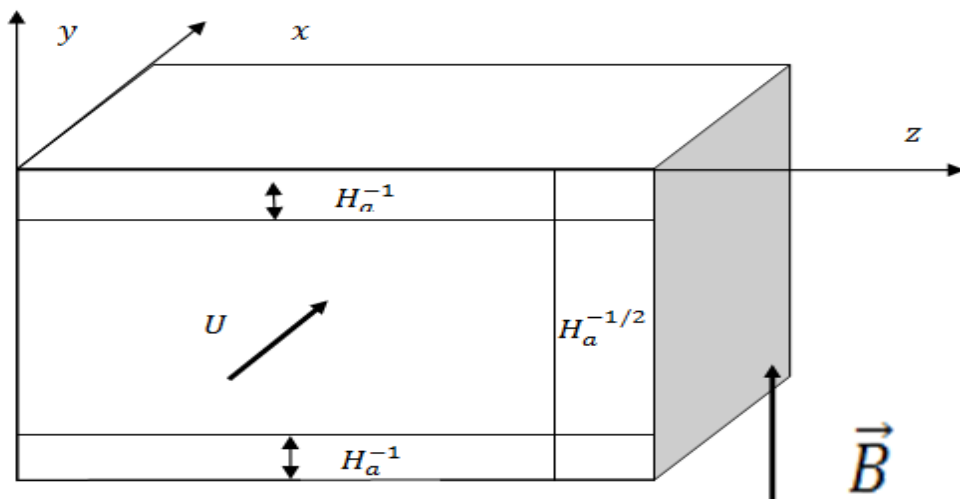


Figure 4.2 : Régions caractéristiques d'un écoulement MHD à grand nombre de Hartmann.

Dans ces conditions, l'écoulement s'organise en cœur et couches. Dans la partie centrale, le cœur est presque bloqué alors qu'une partie du débit transite dans des couches très minces proches des parois qu'on appelle couche de Hartmann.[ 72 ]

#### 4.4.2 Equations en coordonnées curvilignes.

En raison de l'organisation de l'écoulement telle que dans la partie centrale le cœur est presque bloqué alors qu'une partie du débit transite dans des couches très minces proches des parois (couche limite magnétique)(figure. 4.3).

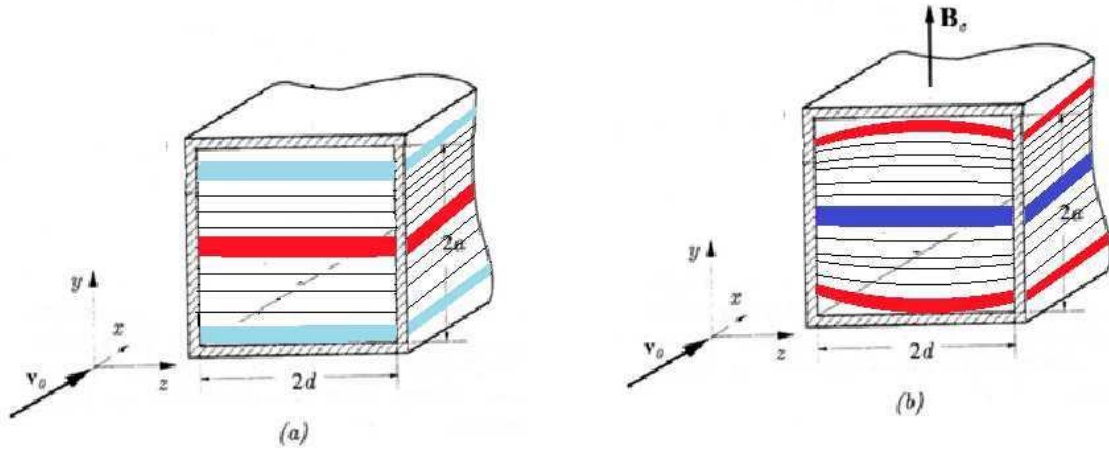


Figure. 4.3. Lignes de courant au sein de l'écoulement avec et sans champ magnétique

Il est avantageux d'utiliser les coordonnées curvilignes orthogonales au lieu des coordonnées cartésiennes. De ce fait le choix du système de coordonnées curvilignes orthogonales est bien adapté à la description de l'écoulement considéré.

Soit  $\vec{V}$  le vecteur vitesse de composantes  $(V_1, V_2 \text{ et } V_3)$ , sa projection dans les directions respectives  $x_1, x_2 \text{ et } x_3$ , permet d'établir les équations du mouvement pour un fluide dont les propriétés physiques sont constantes (masse volumique et viscosité dynamique constantes). (voir Annexe 2)

#### 4.4.3. Equation de continuité

Celle-ci se déduit de l'équation de la divergence :

$$\frac{\partial}{\partial x_1} (h_2 h_3 V_1) + \frac{\partial}{\partial x_2} (h_3 h_1 V_2) + \frac{\partial}{\partial x_3} (h_1 h_2 V_3) = 0 \quad (4.10)$$

#### 4.4.4. Equation de Navier-Stokes

On peut donner une idée de la projection des équations du mouvement dans une configuration arbitraire telle que la composante selon la direction  $x_1$  qui est la suivante :

$$\begin{aligned} & \rho \left( \frac{\partial v_1}{\partial t} + \frac{v_1}{h_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_2} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - V_2 \left( \frac{v_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} - \frac{v_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} \right) + V_3 \left( \frac{v_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} - \frac{v_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right) \right) = \\ & \left. \frac{\mu}{h_1 h_2 h_3} \left\{ \begin{aligned} & 2 \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ h_1 h_3 \left( \frac{1}{h_1} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_1}{\partial x_2} + \frac{v_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right) \right] + \right. \\ & \frac{\partial}{\partial x_2} \left[ h_1 h_3 \left( \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{v_2}{h_2} \right) + \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{v_1}{h_1} \right) \right) \right] + \\ & \left. \frac{\partial}{\partial x_1} \left[ h_2 h_3 \left( \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{v_1}{h_1} \right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{v_3}{h_3} \right) \right) \right] \right\} + \frac{\mu}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_1} \right) \left[ \frac{h_2}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{v_2}{h_1} \right) + \right. \\ & \left. \frac{h_1}{h_2} \frac{\partial}{\partial x_2} \left( \frac{v_1}{h_2} \right) \right] + \frac{\mu}{h_1 h_3} \left( \frac{\partial h_1}{\partial x_3} \right) \left[ \frac{h_1}{h_3} \frac{\partial}{\partial x_3} \left( \frac{v_1}{h_3} \right) + \frac{h_3}{h_1} \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{v_3}{h_3} \right) \right] - \frac{2\mu}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right) \left[ \frac{1}{h_1} \frac{\partial v_2}{\partial x_2} - \frac{v_3}{h_1 h_3} \frac{\partial h_2}{\partial x_3} + \right. \\ & \left. \frac{v_1}{h_1 h_2} \frac{\partial h_2}{\partial x_1} \right] - \frac{2\mu}{h_1 h_2} \left( \frac{\partial h_3}{\partial x_1} \right) \left[ \frac{1}{h_3} \frac{\partial v_3}{\partial x_3} - \frac{v_1}{h_1 h_3} \frac{\partial h_3}{\partial x_1} + \frac{v_2}{h_1 h_2} \frac{\partial h_3}{\partial x_2} \right] \end{aligned} \right. \quad (4.11) \end{aligned}$$

Afin de simplifier l'expression des équations de Navier-Stokes on adopte la métrique spécifique à la zone cœur d'écoulement et couches limites concave, celles-ci imposent les relations suivantes :

$$h_1 = 1 - \frac{x_2}{R(x_2)}, \quad h_2 = 1 \quad \text{et} \quad h_3 = 1$$

où  $R(x_2)$  étant le rayon de courbure locale de sorte que  $R(x_2)$  soit positif pour un écoulement concave si l'orientation de  $x, y$  et  $z$  et  $V_2, V_2, V_3$  au champ de vitesse  $U, V, \text{et } W$  nous obtenons alors les coefficients liés à la géométrie adoptée soit :

$$h_1 = 1 - \frac{y}{R(y)} \quad \text{ou} \quad h_1 = 1 - y.K(y) \quad \text{avec} \quad K(y) = \frac{1}{R(y)}$$

avec  $h_2 = h_3 = 1$

L'utilisation de ces propriétés permet d'établir :

#### 4.4.5. Equation de continuité

$$(1 - Ky)^{-1} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - K(1 - Ky)^{-1} V + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (4.12)$$

#### 4.4.6. Equation de Navier-Stokes

Celles-ci sont explicitées suivant chaque direction par :

-Suivant la direction  $x$  on a :

$$\rho \left\{ \frac{\partial U}{\partial t} + (1 - Ky)^{-1} U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} - K(1 - Ky)^{-1} UV \right\} = -(1 - Ky)^{-1} \frac{\partial P}{\partial x} + \mu [\nabla^2 U - 2K(1 - Ky)^{-2} \frac{\partial V}{\partial x} - 2KU(1 - Ky)^{-2} - K(1 - Ky)^{-1} \frac{\partial U}{\partial y} - V(1 - Ky)^{-3} + J_z B_0] \quad (4.13)$$

-Suivant la direction  $y$  on a :

$$\rho \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + (1 - Ky)^{-1} U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + W \frac{\partial V}{\partial z} + K(1 - Ky)^{-1} U^2 \right\} = -\frac{\partial P}{\partial y} + \mu [\nabla^2 V - 2K(1 - Ky)^{-2} \frac{\partial U}{\partial x} - 2KV(1 - Ky)^{-2} - K(1 - Ky)^{-1} \frac{\partial V}{\partial y} - U(1 - Ky)^{-3} \frac{\partial K}{\partial x} + bJ_z] \quad (4.14)$$

-Suivant la direction  $z$  on a :

$$\rho \left\{ \frac{\partial W}{\partial t} + (1 - Ky)^{-1} U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} \right\} = -\frac{\partial P}{\partial z} + \mu \left[ \nabla^2 W - K(1 - Ky)^{-1} \frac{\partial W}{\partial y} \right] + bJ_y \quad (4.15)$$

$$\text{ou } \nabla^2 = (1 - Ky)^{-2} \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - y(1 - Ky)^{-3} \frac{\partial K}{\partial x}$$

En outre, la conservation du flux magnétique  $\nabla \cdot B = 0$ , seulement une composante est induite  $b(y, z)$  tel que  $[b(y, z), B_0, 0]$ . En utilisant la loi d'Ampère nous obtenons.

$$j_x = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial B_0}{\partial y} = 0, \quad j_y = \frac{1}{\mu} \frac{\partial b}{\partial z}, \quad j_z = -\frac{1}{\mu} \frac{\partial b}{\partial y}$$

L'équation de conservation de la charge s'écrit :

$$\frac{\partial j_y}{\partial y} + \frac{\partial j_z}{\partial z} = 0 \quad (4.16)$$

Le courant est en relation avec le champ électrique par la loi d'Ohm

$$j_z = \sigma(E_z + uB_0), \quad j_y = \sigma E_y$$

Le débit du canal est caractérisé par l'équation (4.4), (4.5) et (4.6) avec les variables inconnues  $U, b, j_y, j_z, E_z$ .

On réduit le nombre de variable en appliquant l'opérateur  $\nabla$ . à la densité de courant. On obtient alors :

$$\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} = -\frac{1}{\mu} \left( \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} \right) \quad (4.17)$$

et en outre a la relation d'Ohm

$$\frac{\partial j_z}{\partial y} - \frac{\partial j_y}{\partial z} = \sigma \left[ \left( \frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) + B_0 \frac{\partial U}{\partial y} \right] \quad (4.18)$$

En combinant les équations (4.28) et (4.29) on obtient :

$$\mu \sigma B_0 \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0 \quad (4.19)$$

Compte tenue de la complexité des équations (4.12), (4.13), (4.14) et (4.19), il s'avère indispensable de poser les hypothèses nécessaires à la résolution du problème considéré. Cependant l'étude de la stabilité du mouvement requiert une bonne connaissance des propriétés physiques, liées au champ des vitesses, notamment, l'évolution de la configuration des lignes de courant au sein de l'écoulement. Il apparait que ce dernier point pose de sérieuses difficultés. Pour nous permettre l'analyse de la stabilité du mouvement dans le cadre de la théorie linéaire, quelques hypothèses simplificatrices sont nécessaires.

#### 4.5. Traitement du problème

L'étude de la stabilité du mouvement de base vis à vis d'une perturbation infinitésimale est analysée suivant la méthode classique de Rayleigh. La décomposition de l'ensemble de l'écoulement en champ moyen et perturbé permet la résolution dans le cadre de la théorie linéaire des fluides parfaits. Dans ce travail, il s'agit de généraliser cette méthode aux fluides réels, donc visqueux, pour énoncer un critère réaliste des conditions d'apparition de l'instabilité de type Göertler.

##### 4.5.1 Mise en œuvre de la méthode

On décompose l'écoulement global en deux mouvements.

\*- Mouvement principal, ou écoulement laminaire de base, celui-ci est choisi de manière à

vérifier les équations de la couche limite telle que :

$$U = U_0, \quad V_0 = W_0 = 0, \quad P = P_0 \quad \text{et} \quad b = b_0 \quad (4.20)$$

\*- Mouvement secondaire qui traduit le comportement et l'évolution de la perturbation au sein du fluide (écoulement perturbé).

Cette décomposition représente un écoulement au cours duquel deux couches d'un fluide glisseraient l'une sur l'autre (mouvement d'un fluide parfait sur un fluide incompressible instable). De ce fait, la surface de séparation de ces deux couches subirait des perturbations dues aux discontinuités tangentielles de la vitesse contenue dans le plan de séparation des deux couches.

Supposons que la surface de discontinuité subisse une petite perturbation au de laquelle telle que toutes les quantités (vitesse, pression) sont des fonctions périodique et si l'on se limite au mode fondamental de la décomposition de Fourier, on obtient la représentation suivante :

$$\begin{aligned} U &= U_0 + u_1 \cos(\alpha z) \cdot \exp(\beta t) \\ V &= 0 + v_1 \cos(\alpha z) \cdot \exp(\beta t) \\ W &= 0 + w_1 \sin(\alpha z) \cdot \exp(\beta t) \\ P &= P_0 + p_1 \cos(\alpha z) \cdot \exp(\beta t) \\ b &= b_0 + b_1 \cos(\alpha z) \cdot \exp(\beta t) \end{aligned} \quad (4.21)$$

Cette formulation est relative à la description d'une onde stationnaire se propageant dans la direction  $z$ .

Le terme  $\cos(\alpha z)$  désigne le développement de la perturbation dans la direction azimutale.

Le coefficient  $\beta$  désigne l'amplification de perturbation ou l'amortissement de la perturbation selon son signe.

C'est dans ces conditions que l'on cherche à résoudre les équations de la stabilité avec un certain nombre d'hypothèses simplificatrices telles que :

-L'hypothèse de confinement des tourbillons qui suppose que ces tourbillons sont maintenus confinés à l'intérieur de la couche limite. Cette hypothèse restrictive n'est pas toujours justifiée et peut exclure ainsi le cas du phénomène de perturbations qui peuvent se propager dans la région globalement stable située à l'extérieur de la couche limite. Ce dernier phénomène est comparable à la situation d'un écoulement instable que l'on enregistre dans le cas de l'écoulement de Taylor-Couette entre deux cylindres tournants contrarotatifs.

-L'hypothèse de l'effet de courbure sur l'écoulement : Göertler a admis que la contribution des termes en  $\frac{1}{R}$  au mouvement sont négligeables au sein de la couche limite à l'exception des expressions relatives à la force centrifuge. Cette hypothèse est donc équivalente à l'approximation de Boussinesq [73], formulée pour simplifier les équations du mouvement régissant l'instabilité de Rayleigh-Benard. Dans le cas de l'écoulement de Taylor-Couette, elle est voisine de l'approximation d'un petit espace annulaire ( $\frac{d}{R} \ll 1$ ).

Cette hypothèse ne peut se justifier que si les équations sont liées à l'écoulement principal, mais elle ne convient que si l'on considère les équations correspondantes à des perturbations susceptibles de se propager à l'extérieur de la couche limite.

Néanmoins l'analyse de la stabilité du mouvement exige la formulation de quelques hypothèses simplificatrices en raison de la complexité des équations de Navier-Stokes à résoudre.

#### 4.5.2. Hypothèse Simplificatrices

Tenant compte de la nature de l'écoulement et de la structure des équations à résoudre on est conduit à procéder aux simplifications suivantes :

\*-Hypothèse de l'écoulement parallèle, on admet que la couche limite définit un écoulement parallèle dans la direction principale satisfaisant au principe de conservation de la masse (traduite par le fait que la vitesse transversale  $V$  et radiale  $W$  sont petites comparées à la vitesse longitudinale  $U$ ).

\*-On admet qu'à l'intérieur de la couche limite, le terme  $KU$  peut être négligé devant  $\frac{\partial U}{\partial y}$ .

\*-On suppose que les quantités  $u_1, v_1, w_1$  et  $p_1$  sont petites par rapport aux composantes de vitesse et de la pression de l'écoulement de base,  $b_1$  est petite par rapport au composante de champ magnétique induite. De sorte que l'on puisse négliger les termes d'ordre supérieur à 1. En d'autres termes ceci revient à négliger les produits et les carrés de ces quantités.

\*-On suppose que la contribution de la force de pesanteur dans un conduit horizontal peut être négligée.

\*-Nous ne prendrons en compte que les premiers termes du développement limité de l'expression  $\frac{1}{(1-K_y)}$  dans les équations de Navier-Stokes.

\*-Nous ne prendrons pas en compte l'effet Hall ce qui implique que la conductivité perd son caractère tensoriel.

\*-la Conservation du flux magnétique  $\nabla \cdot B = 0$ , il y a seulement une composante qui induite  $b(y, z)$  telle que  $B(b, B_0, 0)$ .

- Il n'y a pas de courant électrique dans la direction de l'écoulement ( $J_x = 0$ ).

Sous ces conditions les équations qui régissent le mouvement général peuvent s'écrire comme suit :

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} - KV + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (4.22)$$

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + V \frac{\partial U}{\partial y} + W \frac{\partial U}{\partial z} - KUV = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[ \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} + K \frac{\partial U}{\partial y} \right] - J_z B_0 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial V}{\partial t} + U \frac{\partial V}{\partial x} + V \frac{\partial V}{\partial y} + KU^2 + W \frac{\partial V}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left[ \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} - K \frac{\partial V}{\partial y} + 2K \frac{\partial U}{\partial x} \right] + bj_z \quad (4.24)$$

$$\frac{\partial W}{\partial t} + U \frac{\partial W}{\partial x} + V \frac{\partial W}{\partial y} + W \frac{\partial W}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \nu \left[ \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} - K \frac{\partial W}{\partial y} \right] + bj_y \quad (4.25)$$

$$\mu \sigma B_0 \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial^2 b}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 b}{\partial z^2} = 0 \quad (4.26)$$

L'examen de ces équations met en évidence les différentes contributions dues à l'écoulement courbure par rapport à l'écoulement plan. Ainsi, tous les termes figurant dans chaque équation caractérisent la contribution spécifique de la courbure au niveau des forces liées à l'accélération convective et des efforts visqueux. Celle-ci fait apparaître au niveau de l'équation (4.22) la correction apportée par la courbure caractérisant la conservation de la masse.

Dans l'équation (4.23) du système le terme  $(-KUV)$  correspond à la force de Coriolis.

Le terme  $(J_z B_0)$  correspond à la contribution de la force de Lorentz.

Dans l'équation (4.24) le terme  $(KU^2)$  est lié à la force centrifuge.

#### 4.5.3. Équation du mouvement principal ou champ moyen de vitesse

Le champ hydrodynamique correspondant au mouvement principal caractérisé par la vitesse ( $U_0, V_0 = W_0 = 0$ ), la pression  $P = P_0$  et le champ magnétique induit  $b = b_0$ , ainsi que l'application des hypothèses et des simplifications conduisent aux équations suivantes :

Equation de continuité (conservation de la masse)

$$\frac{\partial U_0}{\partial x} = 0 \quad (4.27)$$

Equation de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement)

$$\frac{\partial U_0}{\partial t} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 U_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U_0}{\partial z^2} - K \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) - J_z B_0 \quad (4.27)$$

$$KU_0^2 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial y} - \frac{b}{\mu} \frac{\partial b}{\partial y} \quad (4.28)$$

$$0 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P_0}{\partial z} + \frac{b_0}{\mu} \frac{\partial b_0}{\partial z} \quad (4.29)$$

$$\mu \sigma B_0 \frac{\partial U_0}{\partial y} + \frac{\partial^2 b_0}{\partial y^2} = 0 \quad (4.30)$$

D'après les équations (4.27) et (4.29) il vient les considérations suivantes :

1-  $U_0$  est indépendante de  $x$ , par conséquent l'écoulement est uniforme suivant cette direction.

En tenant compte de ces résultats, en dérivant l'équation (4.28) par rapport à la variable  $z$ , et en dérivant l'équation (4.29) par rapport à la variable  $y$  puis on additionne, en appliquant la condition de Cauchy-Schwartz :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial}{\partial y} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial}{\partial z} \right) \quad (4.31)$$

d'où l'on a :

$$\frac{\partial U_0}{\partial z} = 0 \quad (4.32)$$

d'après cette relation on en déduit que  $U_0$  est indépendante de  $z$ .

Les équations (4.27), (4.30) sont les équations de base pour déterminer la distribution de la vitesse et le champ magnétique induit.

A celles-ci, on impose les conditions aux limites suivantes:

$$y = \pm a, \quad U_0 = 0, \quad b_0 = 0$$

#### 4.5.4 Equation du mouvement secondaire

Le mouvement secondaire correspondant à l'instabilité de type Göertler, est régi par les équations suivantes :

$$\frac{\partial v_1}{\partial y} + \alpha w_1 = 0 \quad (4.33)$$

$$\beta u_1 + v_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial x} + \nu \left( \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - \alpha^2 u_1 \right) + \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial b_1}{\partial y} \quad (4.34)$$

$$\beta v_1 + 2KU_0 u_1 = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p_1}{\partial y} + \nu \left( \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} - \alpha^2 v_1 \right) \quad (4.35)$$

$$\beta w_1 = \frac{\alpha}{\rho} p_1 + \nu \left( \frac{\partial^2 w_1}{\partial y^2} - \alpha^2 w_1 \right) \quad (4.36)$$

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2} - \alpha^2 b_1 + \mu \sigma B_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad (4.37)$$

Avec les conditions aux limites

$$y = \pm a, \quad u_1 = v_1 = w_1 = 0 \quad \text{traduit l'adhérence du fluide à la paroi.}$$

$$y = \pm a, \quad b = 0 \quad \text{traduit l'isolation électrique des parois.}$$

En remplaçant  $w_1$  et  $p_1$  par leur expression en fonction de  $v_1$  et  $\alpha$  dans (4.33) et (4.34) nous obtenons les équations suivantes :

$$\nu \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} - (\beta + \nu \alpha^2) u_1 + \frac{B_0}{\mu} \frac{\partial b_1}{\partial y} = v_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} \quad (4.38)$$

$$\nu \frac{\partial^4 v_1}{\partial y^4} - (\beta + 2\nu \alpha^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \alpha^2 (\beta + \nu \alpha^2) v_1 = -2\alpha^2 KU_0 u_1 \quad (4.39)$$

$$\frac{\partial^2 b_1}{\partial y^2} - \alpha^2 b_1 + \mu \sigma B_0 \frac{\partial u_1}{\partial y} = 0 \quad (4.40)$$

En remplaçant  $b_1$  par leur expression en fonction de  $u_1$  dans (4.36) nous obtenons les équations suivantes :

$$\frac{\partial^4 u_1}{\partial y^4} - \frac{1}{\nu} (\beta + 2\nu\alpha^2 + \sigma B_0^2) \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} + \frac{\alpha^2}{\nu} (\beta + \nu\alpha^2) u_1 = \frac{1}{\nu} \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left( v_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) - \frac{\alpha^2}{\nu} \left( v_1 \frac{\partial U_0}{\partial y} \right) \quad (4.41)$$

$$\frac{\partial^4 v_1}{\partial y^4} - \frac{1}{\nu} (\beta + 2\nu\alpha^2) \frac{\partial^2 v_1}{\partial y^2} + \frac{\alpha^2}{\nu} (\beta + \nu\alpha^2) v_1 = -\frac{2\alpha^2}{\nu} K U_0 u_1 \quad (4.42)$$

Ces équations restent valables tant que les composantes des perturbations de vitesse sont petites par rapport à la vitesse de base.

#### 4.6. Équations adimensionnelles

En pratique, il convient de rendre sans dimensions les variables du problème, de façon à faire apparaître les paramètres adimensionnels qui caractérisent le phénomène considéré.

##### 4.6.1. Equations du mouvement principal

Pour rendre le problème adimensionnel on utilise les variables suivantes :

$$y = a\eta, \quad t = t' \left( \frac{a^2}{\nu} \right), \quad U_0 = U' U_\infty, \quad j = j_0 j', \quad b = b_0 b'$$

$$\text{avec } U_\infty = \frac{a^2}{\rho\nu} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} \right), \quad j_0 = \sigma U_\infty B_0, \quad b_0 = \mu \sqrt{\sigma \rho \nu} U_\infty,$$

$$R_e = \frac{U_\infty a}{\nu}, \quad H_a = B_0 a \sqrt{\frac{\sigma}{\rho \nu}}$$

En remplaçant  $y, z, t, U_0, b$  par leur expression adimensionnelle et en supprimant les (' Les équations (4.27) et (4.30) deviennent :

$$\frac{\partial U}{\partial t} = 1 - K a \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + H_a \frac{\partial b}{\partial \eta} \quad (4.43)$$

$$H_a \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} = 0 \quad (4.44)$$

Les conditions aux limites liées à l'équation (4.41) et (4.42) sont les suivantes :

$$\eta = \pm 1, \quad U = 0, \quad b = 0$$

##### 4.6.2. Equation du mouvement secondaire

Le changement de variable que nous avons adopté pour rendre les équations du mouvement secondaire adimensionnelles est le suivant :

$$u = \frac{u_1}{R_e U_\infty}, \quad v = \frac{v_1}{U_\infty}$$

Les équations (4.39) et (4.40) deviennent :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} - \left( \frac{\beta a^2}{\nu} + 2\alpha^2 a^2 + H_a^2 \right) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \alpha^2 a^2 \left( \frac{\beta a^2}{\nu} + \alpha^2 a^2 \right) u = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( v \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - \alpha^2 a^2 \left( v \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (4.45)$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - \left( \frac{\beta a^2}{\nu} + 2\alpha^2 a^2 \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \alpha^2 a^2 \left( \frac{\beta a^2}{\nu} + \alpha^2 a^2 \right) v = -2\alpha^2 a^3 R_e^2 K U u \quad (4.46)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\eta = \pm 1, \quad u = 0, \quad v = 0 \text{ et } \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (4.47)$$

En utilisant les notations suivantes :

$$\sigma = \alpha a, \quad \tau = \sqrt{\frac{\beta a^2}{\nu} + \alpha^2 a^2}, \quad G_0 = R_e \sqrt{\frac{a}{R_0}}, \quad K(\eta) = \frac{1}{R(\eta)}, \quad R(\eta) = R_0 \exp(-c\eta)$$

En obtient le système suivant :

$$\frac{\partial^4 u}{\partial \eta^4} - (\tau^2 + \sigma^2 + H_a^2) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tau^2 \sigma^2 u = \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} \left( v \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) - \sigma^2 \left( v \frac{\partial U}{\partial \eta} \right) \quad (4.48)$$

$$\frac{\partial^4 v}{\partial \eta^4} - (\tau^2 + \sigma^2) \frac{\partial^2 v}{\partial \eta^2} + \tau^2 \sigma^2 v = -2G_0^2 \sigma^2 U u \exp(c\eta) \quad (4.49)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\eta = \pm 1, \quad u = 0, \quad v = 0 \text{ et } \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad \frac{\partial v}{\partial \eta} = 0 \quad (4.50)$$

### Conclusion

Les hypothèses de travail ayant été fixées et le choix des variables adoptées celles-ci conduisent à la résolution de l'équation régissant l'écoulement laminaire de base (équation du mouvement moyen ou mouvement principal). La donnée du champ de vitesse moyen permet d'aborder la question de la stabilité de ce profil vis-à-vis de la perturbation considérée en vue de prévoir son apparition et d'étudier son comportement sous l'influence de différents paramètres (effet de champ magnétique, etc...).

# ***CHAPITRE 5***

***Etude du champ moyen***

## Chapitre 5

## Etude du champ moyen

### 1. Introduction

Les méthodes de résolution des équations régissant les phénomènes hydrodynamiques, ont connu ces dernières années un développement considérable. Dans le cas qui nous intéresse, on recense principalement deux méthodes qui débouchent sur des traitements différents.

-La première approche consiste, à traiter globalement par simulation numérique l'écoulement du fluide, par conséquent à considérer les équations de Navier-Stokes dans leur ensemble.

-La deuxième approche s'intéresse, par une analytique ou numérique aux différents types de mouvement au sein de l'écoulement général. Le passage d'un type de mouvement à l'autre dépend des conditions aux limites et des paramètres de contrôle de l'écoulement. Cette dernière approche cadre bien avec notre objectif car elle présente l'avantage de mettre en relief les propriétés caractéristiques de l'écoulement, associées aux différents régimes de l'écoulement considéré.

C'est précisément dans ces régimes que les équations de Navier-Stokes peuvent être simplifiées et traitées dans le cadre d'une modélisation du problème par la technique de la couche limite. Préalablement, la détermination du mouvement principal s'avère indispensable pour préciser la distribution des vitesses moyennes et les caractéristiques de la couche limite, dans les différents régimes d'écoulement les plus significatifs.

### 5.2 Propriétés du mouvement

D'une façon générale, les deux régions physiquement significatives sont :

#### ***-Zone d'écoulement potentiel***

Région où l'influence de la viscosité est négligeable, le fluide se comporte comme un fluide parfait  $\nu = 0$ . Dans ce régime, le mouvement est généralement dit potentiel et la vitesse de l'écoulement est ici supposée constante  $= U_\infty$ .

#### ***-Zone de couche limite***

Région de faible épaisseur où l'influence des forces de viscosité est importante et ne peut être négligée devant les autres forces.

### 5.3 Analyse du mouvement principal

on se place dans les conditions suivantes :

- Ecoulement réel (fluide visqueux  $\nu \neq 0$ ).
- Régime laminaire sans perturbation soit :  $u, v, w = 0$  et  $p = 0$
- Ecoulement permanent ou régime stationnaire caractérisé par  $\frac{\partial U}{\partial t} = 0$ .

Le changement de variable effectué ainsi que les hypothèses adoptées nous ont permis de rendre le problème unidimensionnel. L'équation (4.43) devient :

$$-Ka \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + Ha \frac{\partial b}{\partial \eta} = -1 \quad (5.1)$$

$$Ha \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5.2)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$\eta = \pm 1, \quad U = 0, \quad b = 0 \quad (5.3)$$

#### 5.3.1 Solutions approchées

En supposant que le rayon de courbure de l'écoulement obéit à une loi de type exponentielle telle que  $R = R_0 \exp(-c\eta)$  avec  $\exp(-c\eta)$  terme qui caractérise l'ouverture azimutale de l'écoulement.

avec  $R_0$  : le rayon de courbure circulaire du conduit.

et  $c$  : la concavité de l'écoulement ( $c > 0$ ).

Sachant que la fonction  $\exp(-c\eta)$  est majorée par 1 pour tout  $\eta > 0$  et en tenant compte de la définition de la couche limite on a :

$$Ka = \left(\frac{a}{R_0}\right) \exp(-c\eta), \quad R_0 \gg a \quad \text{donc} \quad \frac{a}{R_0} \ll 1 \quad (5.4)$$

Remarquons que si  $Ka \frac{dU}{d\eta}$  est petit devant  $\frac{d^2U}{d\eta^2}$ , le terme  $Ka \frac{dU}{d\eta}$  est négligeable devant  $\frac{d^2U}{d\eta^2}$ .

Tenant compte de ces approximations, les équations (5.1) et (5.2) deviennent :

$$Ha \frac{\partial b}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = -1 \quad (5.5)$$

$$Ha \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5.6)$$

à laquelle on associe les conditions aux limites suivantes :

$$\eta = \pm 1, \quad U = 0, \quad b = 0 \quad (5.7)$$

C'est un système couplé en  $U$  et  $b$  non homogène, les solutions sont de la forme générale

$$U(\eta) = A[\cosh(H_a\eta) - \cosh(H_a)] \quad (5.8)$$

$$b(\eta) = -\frac{\eta}{H_a} + B_1 \sinh(H_a\eta) + B_2 \quad (5.9)$$

A partir des conditions aux limites pour  $b$  à  $\eta = \pm 1$ , on obtient les valeurs des constantes d'intégration  $B_1$  et  $B_2$ . Enfin, en insérant les solutions pour  $U$  et  $b$  dans l'équation (5.5) nous fixons  $A$  on obtient alors:

$$U(\eta) = \frac{1}{H_a \tanh(H_a)} \left[ 1 - \frac{\cosh(H_a\eta)}{\cosh(H_a)} \right] \quad (5.10)$$

$$b(\eta) = -\frac{\eta}{H_a} + \frac{\sinh(H_a\eta)}{H_a \sinh(H_a)} \quad (5.11)$$

Ce profil est analogue au profil analytique de Chang et Lungren[74]

Le profil de vitesse est présenté sur la figure 5.1 pour différentes valeurs de nombre de Hartmann.

Nous allons discuter les deux cas limites de champ magnétique externe. Le cas  $B_0 = 0$ , c'est-à-dire  $H_a = 0$  et le cas de très fort champ magnétique externe  $H_a \gg 1$

Pour  $H_a \rightarrow 0$ , nous élargissons les fonctions hyperboliques dans la section pour  $U$  dans une série de puissance.

$$\cosh(H_a\eta) = 1 + \frac{1}{2}(H_a\eta)^2 + \frac{1}{24}(H_a\eta)^4 + O((H_a\eta)^6)$$

$$\tanh(H_a) = H_a - \frac{1}{3}H_a^3 + \frac{2}{15}H_a^5 + O((H_a)^7)$$

On obtient la solution suivante:

$$U(\eta) = \frac{1}{2}(1 - \eta^2) \quad (5.12)$$

Ce profil est analogue au profil analytique pour l'écoulement de Poiseuille.

Pour  $H_a \gg 1$ , les fonctions hyperboliques asymptote a

$$\cosh(H_a\eta) \rightarrow \frac{1}{2}\exp(H_a\eta), \quad \cosh(H_a) \rightarrow \frac{1}{2}\exp(H_a), \quad \tanh(H_a) \rightarrow 1$$

L'introduction de ces expressions dans les équations (5.10) et (5.11), nous obtenons

$$U(\eta) = \frac{1}{H_a} \{1 - \exp[H_a(|\eta| - 1)]\} \quad (5.13)$$

$$b(\eta) = -\frac{\eta}{H_a} + \frac{1}{H_a} \exp[H_a(|\eta| - 1)] \quad (5.14)$$

Ces relations montrent une décroissance exponentielle de la vitesse et du champ magnétique induit au voisinage des parois. Cela donne lieu à des couches minces  $\delta_H$  est de l'ordre  $\delta_H = O(H_a^{-1})$  (voir figure 4.2) est appelé couche de Hartmann.

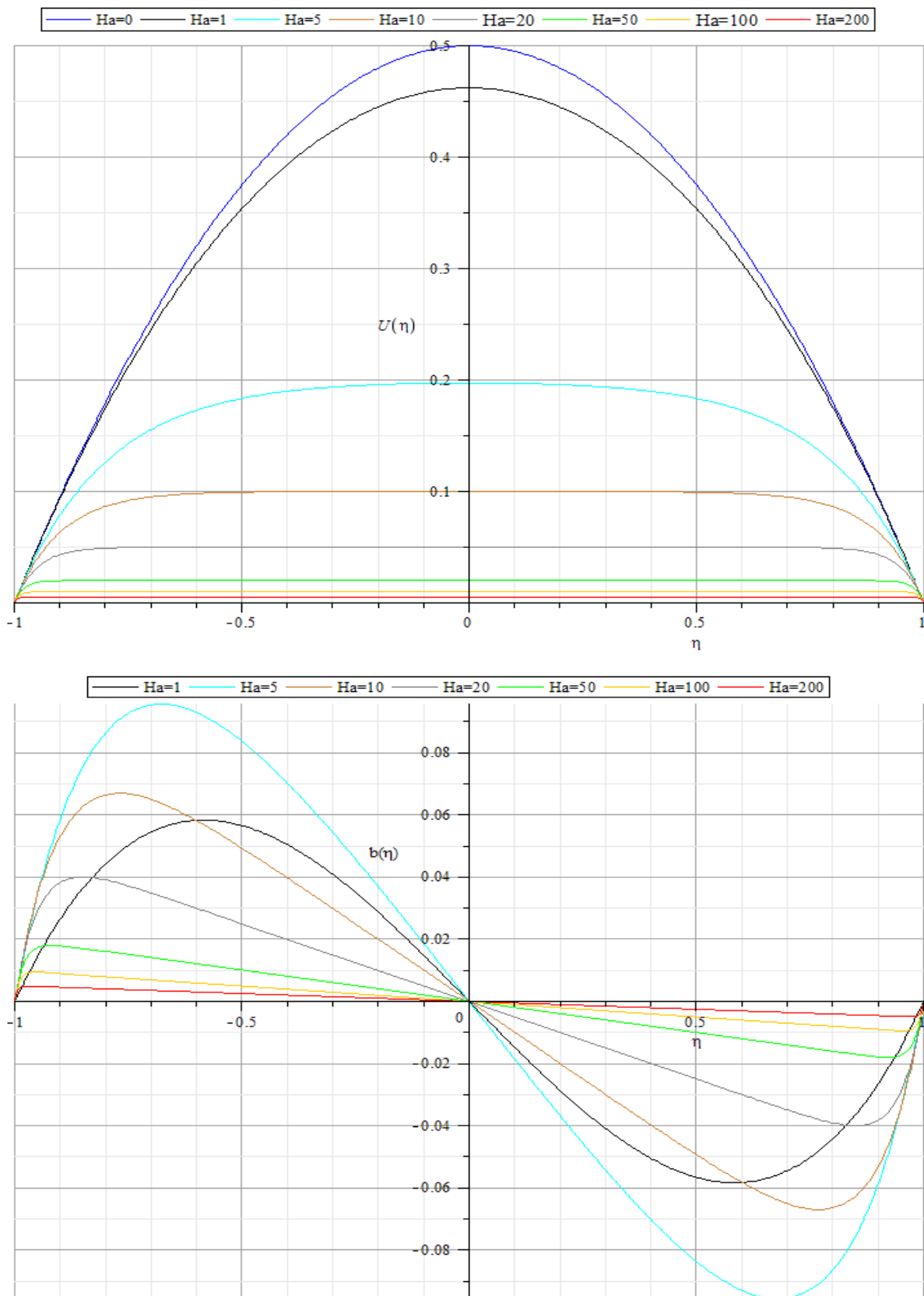


Figure 5.1 :a) Les profils de vitesses pour différents nombres de Hartmann, b) Les champs magnétiques induits pour différents nombres de Hartmann.

**Remarques :**

Dans le deux cas de champ magnétique, on obtient la solution approchée utilisée par Göertler [5] qui correspond au profil linéaire du mouvement moyen :

$$U(\eta) = \frac{1}{Ha+1} \eta \quad \text{pour} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5.15)$$

La connaissance de la distribution de la vitesse à travers le canal, le débit volumique peut être calculée par l'intégration de vitesse

$$Q = \int_{-1}^1 U(\eta) d\eta = 2 \frac{Ha - \tanh(Ha)}{Ha^2 \tanh(Ha)} \quad (5.16)$$

Pour discuter les pertes de pression hydromagnétiques pour un débit fixe par rapport à la hydraulique, nous formons le rapport  $Q(Ha \neq 0)/Q(Ha = 0)$ , nous obtenons

$$\frac{Q(Ha \neq 0)}{Q(Ha = 0)} = \frac{\frac{\partial p}{\partial x}(Ha = 0)}{\frac{\partial p}{\partial x}(Ha \neq 0)} = \frac{Ha - \tanh(Ha)}{Ha^2 \tanh(Ha)}$$

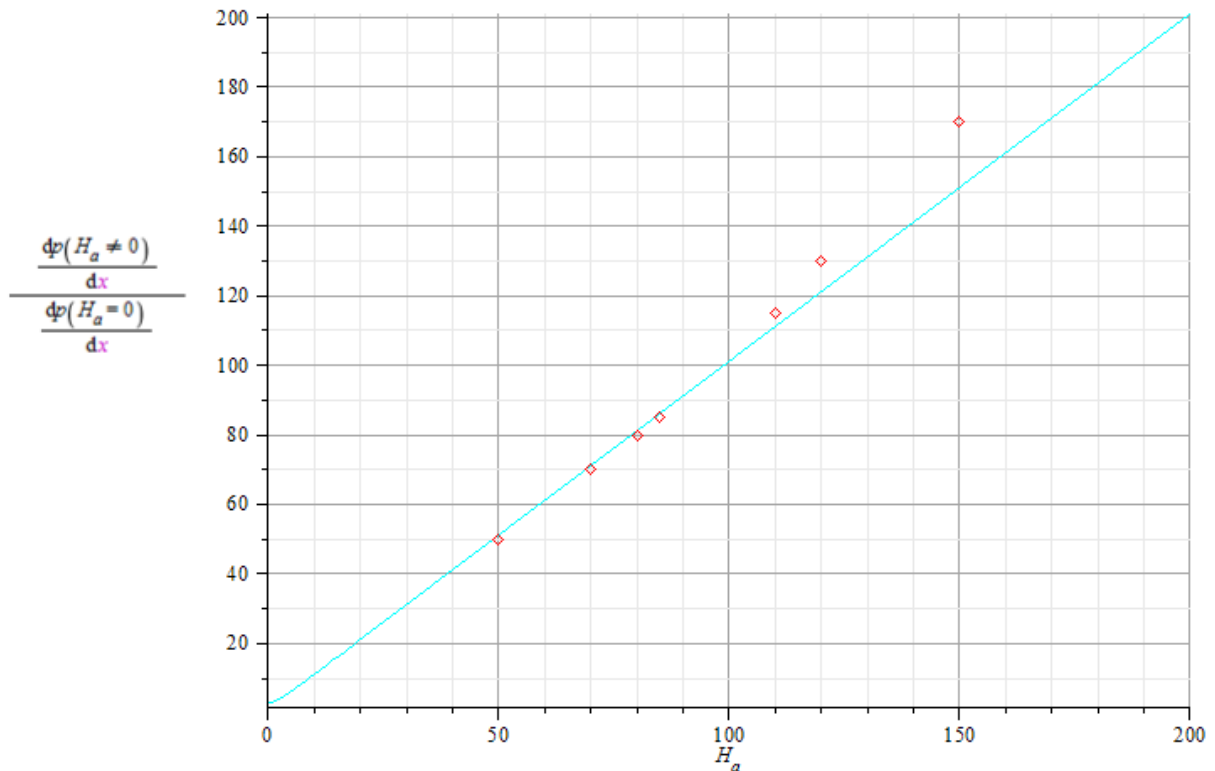


Figure 5.2 : Les résultats expérimentaux pour la chute de pression ( $\diamond$ ) dans un canal de section rectangulaire par rapport à la solution analytique pour l'écoulement de Hartmann  $Re = 1480$  (Branover et al, (1967)[75]).

L'accord entre les points de données mesurées et les valeurs théoriques est particulièrement bon pour les petites nombres de Hartmann, un certain écart des valeurs en  $Ha$  plus

grands peut être attribué à l'effet des parois latérales qui font peser sur les pertes de pression par la formation de survitesses dans leur voisinage.

\*Si le terme  $Ka \frac{dU}{d\eta}$  n'est pas négligeable et pour un rayon de courbure constant

$R = R_0 (c = 0)$  l'équation qui régit le mouvement principal (5.1) devient la suivante :

$$-\frac{a}{R_0} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + H_a \frac{\partial b}{\partial \eta} = -1 \quad (5.17)$$

$$H_a \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5.18)$$

les conditions aux limites (5.3) restent inchangées on pose :  $\beta = \frac{a}{R_0}$ , il vient alors :

$$-\beta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + H_a \frac{\partial b}{\partial \eta} = -1 \quad (5.19)$$

$$H_a \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5.20)$$

C'est un système couplé en  $U$  et  $b$  non homogène, ce système d'équations différentielles peut être ramené à une équation linéaire non homogène d'ordre supérieur, du 3<sup>ème</sup> ordre, on éliminant  $U(\eta)$  ou  $(\eta)$ , par exemple pour  $b(\eta)$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^3 b}{\partial \eta^3} - \beta \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} - H_a^2 \frac{\partial b}{\partial \eta} = H_a \quad (5.21)$$

Posons :  $\frac{\partial b}{\partial \eta} = N(\eta)$

on obtient une équation de 2<sup>ème</sup> ordre à coefficient constant avec 2<sup>ème</sup> membre :

$$\frac{\partial^2 N}{\partial \eta^2} - \beta \frac{\partial N}{\partial \eta} - H_a^2 N = H_a \quad (5.22)$$

Cette équation a des solutions générales de forme  $N = N_h + N_p$

1°) Solutions de l'équation homogène, on pose une solution sous forme exponentielle

$N(\eta) = \exp(P\eta)$ , où  $P$  est une racine de l'équation algébrique suivante

$$P^2 - \beta P - H_a^2 = 0$$

En général deux solutions de cette équation et par conséquent il existe deux solutions indépendantes de l'équation homogène peut être comme

$$N_h(\eta) = A \exp(P_1 \eta) + B \exp(P_2 \eta)$$

$$\text{avec } P_1 = \frac{\sqrt{4H_a^2 + \beta^2} + \beta}{2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{-\sqrt{4H_a^2 + \beta^2} + \beta}{2}$$

Les constantes encore inconnues  $A$  et  $B$  doivent être à déterminer suivant les conditions aux limites pour  $b(\eta)$  à la position de la paroi  $\eta = \pm 1$ .

2°) Solution de l'équation particulière  $N_p = -\frac{1}{Ha}$

La solution générale de l'équation (5.21) est la suivante :

$$N(\eta) = -\frac{1}{Ha} + A \exp(P_1 \eta) + B \exp(P_2 \eta)$$

$$\text{avec } P_1 = \frac{b + \sqrt{4H^2 - b^2}}{2} \quad \text{et} \quad P_2 = \frac{b - \sqrt{4H^2 - b^2}}{2}$$

A partir de ce résultat on détermine la solution générale du problème à résoudre (5.19), (5.20) d'où :

$$U(\eta) = -\frac{1}{Ha} + \frac{A}{Ha} \exp(P_1 \eta) + \frac{B}{Ha} \exp(P_2 \eta) + C_1$$

$$b(\eta) = -\frac{\eta}{Ha} + \frac{A}{P_1} \exp(P_1 \eta) + \frac{B}{P_2} \exp(P_2 \eta) + C_2$$

A partir des conditions aux limites pour  $U$  et  $b$  à  $\eta = \pm 1$ , on obtient les valeurs des constantes d'intégration  $A, B, C_1$  et  $C_4$ . Enfin en insérant les solutions pour  $U$  et  $b$ , on obtient alors:

$$U(\eta) = \frac{1}{Ha^2} \left( \frac{2Ha^2 e^{\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2})\eta}}{\left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} + \frac{2Ha^2 e^{\frac{1}{2}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2})\eta}}{\left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - 1 + \right.$$

$$\left. \frac{\left( -2Ha^2 e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}\right)^2} \right) + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \left( e^{\frac{1}{2}\beta} \right)^2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2} + \left( 2Ha^2 e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}\right)^2} \right) \right)}{\left( -e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} + e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right.$$

$$\left. \frac{e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \left( e^{-\frac{1}{2}\beta} \right)^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2} - e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right)^2 \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2} + e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right)^2 \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}}{\left( -e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} + e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right)$$

$$b(\eta) = -\frac{\eta}{Ha} + \frac{2Ha e^{\frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2})\eta}}{\left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \left( \frac{1}{2}(\beta + \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}) \right) +$$

$$\frac{2Ha e^{-\frac{1}{2}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2})\eta}}{\left( -e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} + e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \left( \frac{1}{2}(\beta - \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}) \right) -$$

$$\frac{\left( -e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}\right)^2} \right) \beta + e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \left( e^{\frac{1}{2}\beta} \right)^2 e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}}{Ha \left( -e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} + e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} +$$

$$\frac{\left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\beta} \left( e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}\right)^2} \right) \beta - e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \left( e^{-\frac{1}{2}\beta} \right)^2 e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}}{Ha \left( -e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} + e^{\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \left( e^{\frac{1}{2}\beta} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} - e^{-\frac{1}{2}\beta} e^{-\frac{1}{2}\sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}} \right) \sqrt{\beta^2 - 4Ha^2}}$$

Nous allons discuter les deux cas limites de champ magnétique externe. Le cas  $B_0 = 0$ , c'est-à-dire  $H_a = 0$  et le cas de très fort champ magnétique externe  $H_a \gg 1$

Pour  $H_a \rightarrow 0$ , les équations (5.19) et (5.20) devient :

$$-\beta \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} = -1 \quad (5.23)$$

Cette équation a une solution générales de forme

$$U(\eta) = A \frac{e^{\beta \eta}}{\beta} + \frac{\eta}{\beta} + B \quad (5.24)$$

A partir des conditions aux limites pour  $U$  à  $\eta = \pm 1$ , on obtient

$$U(\eta) = -\frac{e^{\beta \eta}}{\beta \sinh(\beta)} + \frac{\eta}{\beta} + \frac{\cosh(\beta)}{\beta \sinh(\beta)} \quad (5.25)$$

Ce profil est analogue au profil analytique utilisé par Hammerlin[76].

Sachant que la fonction exponentielle est développable dans tout le domaine de définition, et en tenant compte du fait que  $\frac{\alpha}{R_0} \ll 1$ ,

$$\begin{aligned} e^{\beta \eta} &= 1 + \beta \eta + \frac{1}{2} \beta^2 \eta^2 + \frac{1}{6} \beta^3 \eta^3 + \frac{1}{24} \beta^4 \eta^4 + O(\beta^5 \eta^5) \\ \sinh(\beta) &= \beta + \frac{1}{6} \beta^3 + O(\beta^5) \\ \cosh(\beta) &= 1 + \frac{1}{2} (\beta)^2 + \frac{1}{24} (\beta)^4 + O((\beta)^6) \end{aligned}$$

on obtient en faisant le développement limité de l'expression (5.25) par rapport à  $\eta$ , à l'ordre un ( $n = 1$ ) l'expression du profil linéaire utilisé par Göertler [77].

$$U(\eta) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \eta^2 + O(\beta) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5.26)$$

A l'ordre deux ( $n = 2$ ) l'expression du profil devient :

$$U(\eta) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \eta^2 + \left( +\frac{1}{6} \eta - \frac{1}{6} \eta^3 \right) \beta + O(\beta^2) \quad \text{pour} \quad 0 \leq \eta \leq 1 \quad (5.27)$$

Celle-ci est du type parabolique aux coefficients près analogue à celle utilisée par

J.D.Swearingen et R.F.Blackwelder. [78].

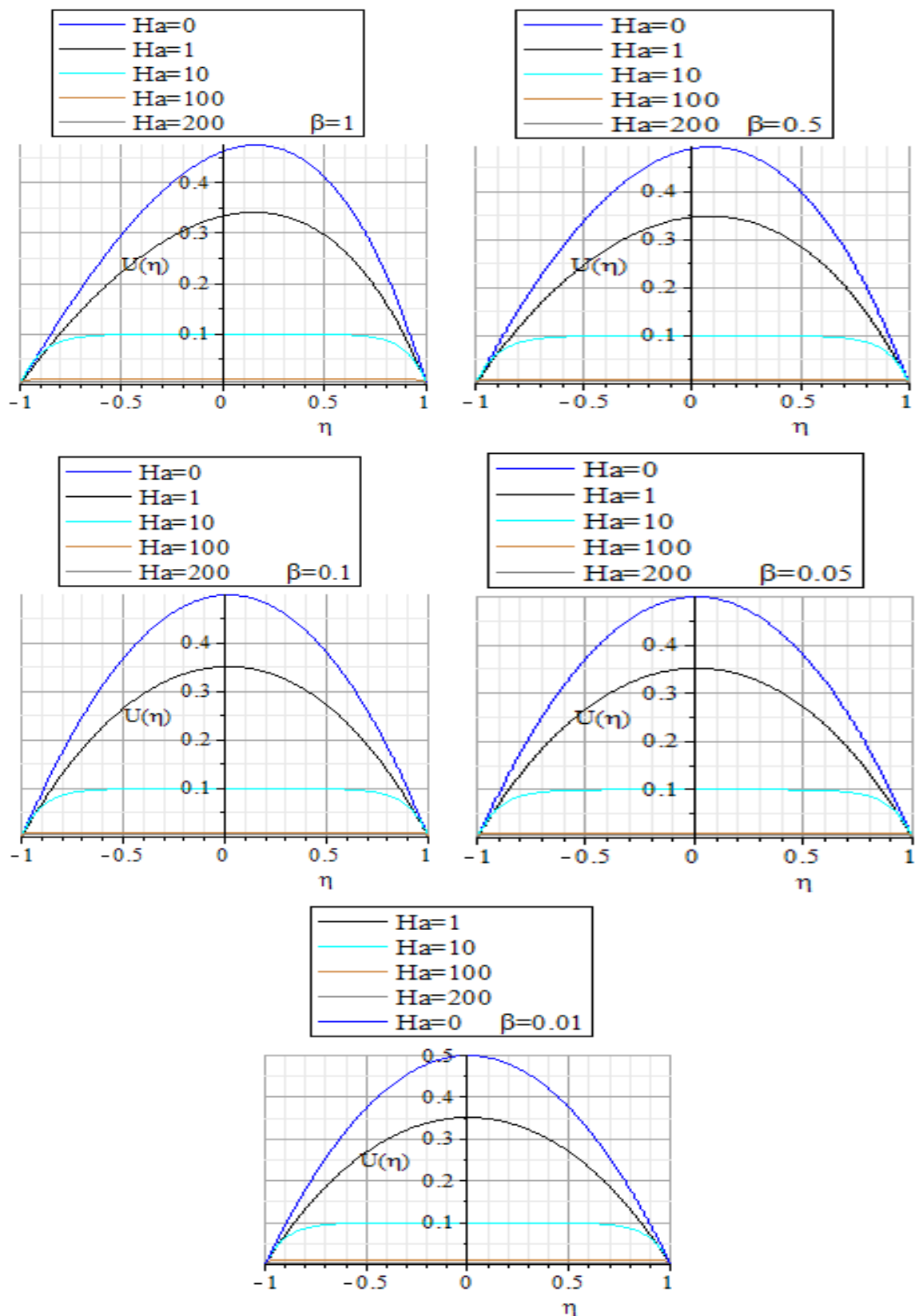


Figure 5.3 : Les profils de vitesses pour différents nombres de Hartmann et  $\beta$  fixe

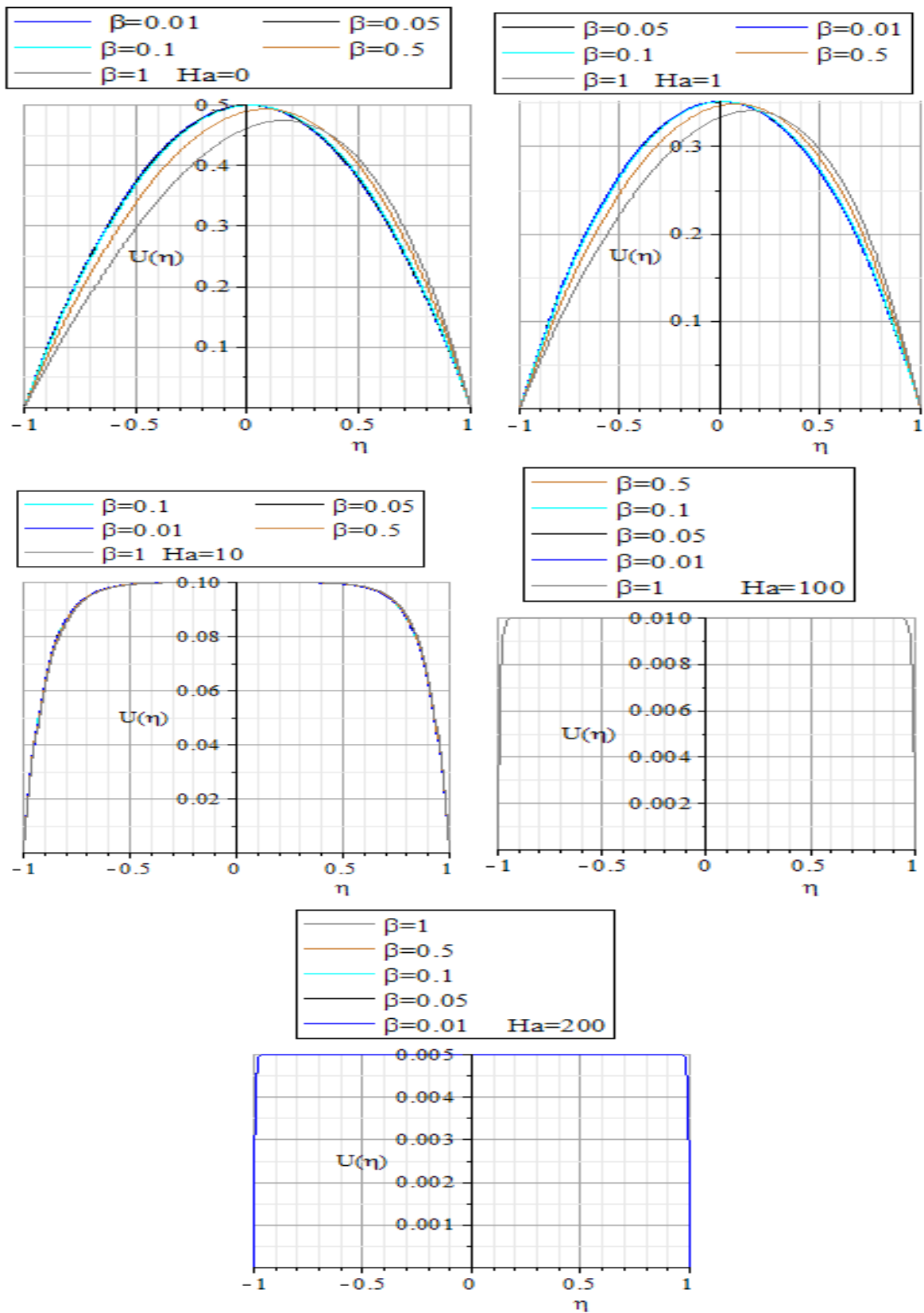


Figure 5.4 : Les profils de vitesses pour différents  $\beta$  et nombres de Hartmann *fixe*

On peut en obtenir une relation simplifiée par rapport à la précédente (5.25) en fusant le développement limité par rapport à  $\eta$  et  $\beta = 1$ :

$$U(\eta) = 0.4621 + 0.1491\eta - 0.4254\eta^2 - 0.1418\eta^3 - 0.0354\eta^4 + O(\eta^5)$$

le profil approché utilisé par les chercheurs suivants : A.M.O.Smith[79],[80], Hammerlin[76], Kobayashi[81],[82], P.Hall[83],[84],[85].

### 5.3.2 Solution générale

-\*- Dans le cas où le rayon de courbure est assez grand, de sorte qu'on puisse assimiler l'écoulement proche de la paroi à un écoulement parallèle en plaque plane et sans champ magnétique l'équation différentielle devient :

$$\frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} - \beta \cdot e^{-c\eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} = -1 \quad (5.28)$$

Celle-ci admet la solution suivante :

$$U(\eta) = \int_0^\eta \left\{ \exp\left(-\frac{\beta}{c} \exp(-cz)\right) \int_0^z \exp\left(\frac{a}{c} \exp(-c\zeta)\right) d\zeta \right\} dz + D \int_0^\eta \exp\left(-\frac{\beta}{c} \exp(-c\zeta)\right) d\zeta \quad (5.29)$$

D est une constante d'intégration évaluée à :

$$D = \frac{1 - \int_0^1 \left[ \exp\left(-\frac{\beta}{c} \exp(-cz)\right) \int_0^z \exp\left(\frac{\beta}{c} \exp(-c\xi)\right) d\xi \right] dz}{\int_0^1 \exp\left(\frac{\beta}{c} \exp(-c\xi)\right) d\xi} \quad (5.30)$$

Dans le cas où la pression longitudinale est nulle ( $\frac{\partial P}{\partial x} = 0$ ), on obtient alors:

$$U(\eta) = \frac{-\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\beta}{c} \xi\right) d\xi\right) + -\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\beta}{c} \xi \exp(-c\eta)\right) d\xi\right)}{-\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\beta}{c} \xi\right) d\xi\right) + -\left(\int_0^{\infty} \frac{1}{\xi} \exp\left(-\frac{\beta}{c} \xi\right) d\xi\right)} \quad (5.31)$$

-\*- Dans le cas où le rayon de courbure est assez grand, de sorte qu'on puisse assimiler l'écoulement près à la paroi à un écoulement parallèle en plaque plane et avec un champ magnétique. En conservant les expressions des coefficients utilisées dans l'équation(5.28) le mouvement principal est alors régi par les équations différentielles suivantes :

$$-\beta \cdot e^{-c\eta} \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} + H_a \frac{\partial b}{\partial \eta} = -1 \quad (5.32)$$

$$H_a \frac{\partial U}{\partial \eta} + \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} = 0 \quad (5.33)$$

C'est un système couplé en  $U$  et  $b$  non homogène, ce système d'équations différentielles peut être ramené à une équation linéaire non homogène d'ordre supérieur du 3<sup>ème</sup> ordre, on éliminant  $U(\eta)$  ou  $(\eta)$ , par exemple pour  $b(\eta)$ , on obtient l'équation suivante :

$$\frac{\partial^3 b}{\partial \eta^3} - \beta \cdot e^{-c\eta} \frac{\partial^2 b}{\partial \eta^2} - H_a^2 \frac{\partial b}{\partial \eta} = H_a \quad (5.34)$$

Posons :  $\frac{\partial b}{\partial \eta} = Z(\eta)$

on obtient une équation de 2<sup>ème</sup> ordre à coefficient constant avec 2<sup>ème</sup> membre :

$$\frac{\partial^2 Z}{\partial \eta^2} - \beta \cdot e^{-c\eta} \frac{\partial Z}{\partial \eta} - H_a^2 Z = H_a \quad (5.35)$$

Cette équation a de solutions générale

$$\begin{aligned} Z(\eta) = & e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta e^{-c\eta} + c^2 \eta}{c}} \left( Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) + Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right) \cdot C_2 + \\ & e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta e^{-c\eta} + c^2 \eta}{c}} \left( BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) - BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right) \cdot C_1 + \\ & \frac{1}{2} \left( Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) + Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right) \left( \int \frac{\left( BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) - BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right) e^{\frac{1}{2} \frac{\beta e^{-c\eta} + c^2 \eta}{c}}}{\left( Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \cdot BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) + BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \cdot Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right)} d\eta \right) \\ & - \left( \left( BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) - Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right) e^{-\frac{1}{2} \frac{\beta e^{-c\eta} + c^2 \eta}{c}} \left( \int \frac{\left( Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) + Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right) e^{\frac{1}{2} \frac{\beta e^{-c\eta} + c^2 \eta}{c}}}{\left( Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \cdot BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) + BessellK \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha - c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \cdot Bessell \left( \frac{1}{2}, \frac{2Ha + c}{c}, \frac{1}{2}, \frac{\beta e^{-c\eta}}{c} \right) \right)} d\eta \right) \right) \end{aligned} \quad (5.36)$$

L'expression (5.36) normalisée permet de retrouver, les différents cas de profils proposés, par les chercheurs en vue d'établir le diagramme de stabilité marginale liée à la structure d'ondes stationnaires de type Göertler.

Sachant que les fonctions de Bessel sont développable dans tout le domaine de définition, et en prend  $Ha = 1$ ,  $\beta = 1$ ,  $c = 1$ , on obtient l'équation suivante :

$$z(\eta) \sim (0.60653 - 0.15163\eta^2 + O(\eta^3))(0.68439 - 0.49148\eta + 0.26761\eta^2 + O(\eta^3))C_1 + (0.60653 - 0.15163\eta^2 + O(\eta^3))(-2.1502 - 4.3004\eta - 3.7628\eta^2 + O(\eta^3))C_2$$

A partir de ce résultat on détermine les solutions générales du problème à résoudre

$$U(\eta) = (-0.071022 + 0.20402\eta - 0.276507\eta^2 + 0.159544\eta^3 - 0.054295\eta^4)C_1 + (-0.7010400829 - 5.608320662\eta - 15.77330405\eta^2 - 19.62886149\eta^3 - 10.73439099\eta^4)C_2$$

A partir des conditions aux limites pour  $U = 0$  à  $\eta = 0$  et  $U = 1$  à  $\eta = 1$ , on obtient

$$U(\eta) = 0.1463\eta + 0.2505\eta^2 + 0.4072\eta^3 + 0.1958\eta^4 \quad \text{pour } 0 \leq \eta \leq 1$$

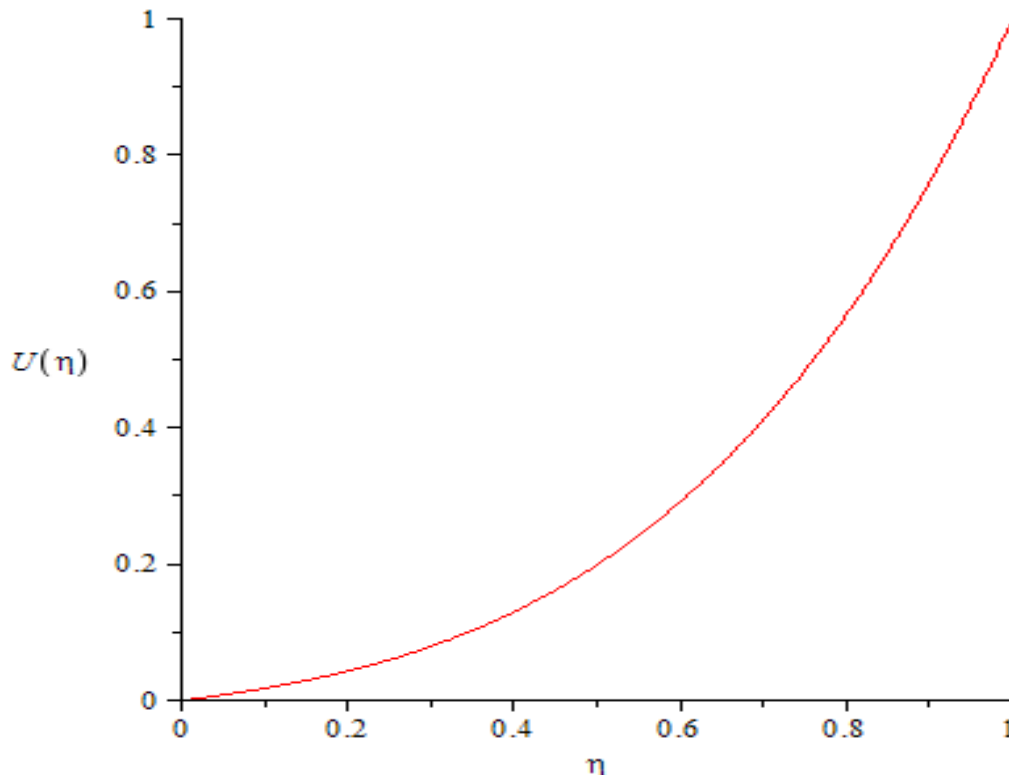


Figure 5.5 : Evolution de profil de vitesse de l'écoulement principal

## 5.4 Résultats et discussion

Etant donné la grande complexité de la relation (5.36) exprimant le profil de vitesse moyenne, les résultats sont accessibles numériquement en utilisant la méthode d'approximation de Simpson avec une précision inférieure à 1%. Dans ces conditions, nous pouvons représenter le profil de vitesse, que l'on compare aux profils qui ont été proposés par différents auteurs Göertler [77], Smith [79] [80], Hammerlin [76], Kobayashi [81]. Il est important de signaler que les profils de vitesse employés par les chercheurs qui se sont penchés sur ce problème, correspondent à des profils "phénoménologique" ou approchés ne provenant pas de la résolution de l'équation différentielle du mouvement principal.

Deux cas peuvent se présenter (selon la présence du champ magnétique ou non)

### 5.4.1 Sans champ magnétique

Lorsque le rapport entre la hauteur de conduit et le rayon de courbure de l'écoulement est très petit  $\beta = \frac{a}{R} \ll 1$ , le profil de vitesse moyenne solution de l'équation différentielle du mouvement principal, est indépendant de la nature de l'écoulement. En d'autres termes, quelle que soit la courbure le profil de vitesse du mouvement principal à l'intérieur de la couche limite celui-ci a la même allure que le profil linéaire tracé dans l'intervalle [0,1] voir figure (5.3 c), d) e))

Tandis que pour des valeurs de  $\beta = 0.5, \beta = 1$  et  $c$  allant de (0,001 à 1), la vitesse de l'écoulement principal est légèrement affectée par la courbure comme le montre la Figure (5.3 a), b))

### 5.4.2 Avec champ magnétique

Dans ce cas l'évolution du profil de vitesse dépend du paramètre d'influence  $H_a$ . On rappelle que le nombre de Hartmann ( $H_a$ ) traduit le rapport des forces électromagnétiques aux forces de viscosités.

Les résultats obtenus, dans ce cas, mettent en évidence les effets des forces électromagnétiques engendrées par le champ magnétique. L'allure du profil de vitesse de l'écoulement principal est de forme parabolique comme le montre la Figure.5.1. On remarque, lorsque le champ magnétique augmente, le maximum du profil de vitesse a tendance à se déplacer vers l'intérieur de la couche limite.

**Conclusion**

Au regard de l'ensemble des résultats obtenus sur le profil de vitesse, solution de l'équation différentielle du mouvement principal, celui-ci semble donc parfaitement adapté pour décrire le phénomène étudié.

Lorsque ( $H_a = 0$ ), le profil solution de l'équation différentielle est voisin de la courbe d'évolution linéaire proposée par Göertler.

Par contre, lorsque ( $H_a \neq 0$ ), l'allure du profil de vitesse, solution de l'équation différentielle est de forme parabolique qui s'aplatit au centre du canal avec l'augmentation de l'intensité de champ magnétique presque les force de Lorentz sont beaucoup plus petite près des parois ce qui permet des vitesses beaucoup plus élevées comme le montre la Figure.5.1.

En conséquence, le profil de vitesse moyenne ainsi calculé peut être considéré comme une généralisation de toutes les lois de distributions de vitesse recensées dans la littérature et se prête bien à l'étude des problèmes de stabilité d'écoulement dépendant de plusieurs paramètres.

# ***CHAPITRE 6***

***Etude de la stabilité du mouvement par  
la méthode de Galerkin***

## Chapitre 6 Etude de la stabilité de l'écoulement perturbé par la méthode de Galerkin

### 6.1 Introduction

On se propose d'étudier le problème de la stabilité du mouvement moyen, établi précédemment, vis à vis de l'instabilité de type Göertler dans le cadre de la théorie linéaire.

En fait, le système d'équations de la stabilité qui est proche de celui établi par Göertler a été résolu par cet auteur par la méthode des équations intégrales de type Fredholm.

Ici, on se propose de résoudre directement le système d'équations différentielles linéaire couplées à l'aide d'une méthode d'approximations qui est la méthode de Galerkin.

Dans ces conditions, on est conduit à l'établissement d'un système d'équations algébriques linéaires permettant d'en déduire une relation de dispersion qui met en évidence l'évolution du nombre de Göertler en fonction des paramètres d'influence du problème, à savoir, le nombre d'onde, le coefficient d'amplification ou d'amortissement de l'instabilité ainsi que les caractéristiques géométriques de l'écoulement considéré.

Cependant cette méthode nécessite préalablement la transformation du système d'équations différentielles en un système d'équations intégro-différentielles.

### 6.2 Méthode de GALERKIN

#### 6.2.1 Principe de la méthode

Cette méthode consiste à approcher le système d'équations différentielles à résoudre en minimisant les erreurs résiduelles associées de façon à converger vers les solutions avec la précision désirée.

#### 6.2.2 Mise en œuvre de la méthode

Considérons le système d'équations différentielles couplées en  $u$  et  $v$  établi au chapitre 4 :

$$\left. \begin{array}{l} L_1 u = L_2 v \\ L_3 v = -2G_0^2 \sigma^2 U u \exp(-c\eta) \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

$$\text{où } L_1 = \frac{d^4}{d\eta^4} - (\tau^2 + \sigma^2 + H_a^2) \frac{d^2}{d\eta^2} + \tau^2 \sigma^2, \quad L_2 = \frac{\partial U}{\partial \eta} \frac{d^2}{d\eta^2} - 2 \frac{\partial^2 U}{\partial \eta^2} \frac{d^2}{d\eta^2} + \frac{\partial^3 U}{\partial \eta^3} - \sigma^2$$

$$\text{et } L_0 = \frac{d^2}{d\eta^2} - \sigma^2, \quad L = \frac{d^2}{d\eta^2} - \tau^2$$

et les conditions aux limites associées :

$$\left. \begin{aligned} u(0) &= v(0) = 0 \\ u(1) &= v(1) = 1 \\ \frac{dv(0)}{d\eta} &= \frac{dv(1)}{d\eta} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.2)$$

Le but de la méthode consiste à définir des erreurs résiduelles correspondant aux équations du système (6.1) et de chercher à les minimiser de manière à obtenir une solution optimale satisfaisant l'approche du phénomène à étudier.

On définit les résidus comme suit:

$$R^{(1)}(u, v) = L_1 u - L_2 v \quad (6.3)$$

$$R^{(2)}(u, v) = L_0 L v + 2G_0^2 \sigma^2 U u \exp(-c\eta)$$

qui sont nuls si  $(u, v)$  correspondant à des solutions exactes du système d'équations considéré.

Pour résoudre le problème, on cherche la solution sous la forme approchée, résultant d'une combinaison linéaire de fonctions convenablement choisies. Dans ces conditions, on suppose que les perturbations radiale et tangentielle sont de la forme :

$$\left. \begin{aligned} u(\eta) &= \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 \dots + \alpha_n u_n \\ v(\eta) &= \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 \dots + \beta_n v_n \end{aligned} \right\} \quad (6.4)$$

où  $u_1, u_2 \dots, u_n$  et  $v_1, v_2 \dots, v_n$  sont des fonctions linéairement indépendantes et  $n = N$ , un entier à fixer de façon à assurer la solution approchée avec le maximum de précision.

Soit  $u_1$  et  $v_1$  les fonctions génératrices, celles-ci sont choisies de sorte qu'elles satisfassent aux conditions aux limites du problème. De ce point de vue les autres fonctions  $u_1, u_2 \dots, u_n$  et  $v_1, v_2 \dots, v_n$  apparaissent comme les corrections appliquées à  $u_1$  et  $v_1$ , on aura alors l'expression de la solution approchée ci-après :

$$\left. \begin{aligned} u(\eta) &= \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(\eta) \\ v(\eta) &= \sum_{n=1}^N \beta_n v_n(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (6.5)$$

avec les conditions aux limites suivantes :

$$u_n = v_n = D u_n = 0 \quad \text{pour } \eta = 0 \text{ et } \eta = 1$$

les constantes  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont choisies pour rendre la solution optimale sur le support d'approximation considéré  $[0, 1]$ .

Ainsi, si on remplace  $u$  et  $v$  par leurs expressions approchées (6.5), dans le système d'équations on n'obtient plus une égalité. De cette façon, on peut définir les erreurs résiduelles associées à chacune des équations comme suit :

$$\left. \begin{aligned} \xi_n^{(1)} &= \sum_{n=1}^N \alpha_n (L_1 u_n) - \sum_{n=1}^N \beta_n (L_2 v_n) \\ \xi_n^{(2)} &= \sum_{n=1}^N \beta_n (L_0 L) v_n(\eta) + 2G_0^2 \sigma^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n u_n(\eta) \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

Ces résidus  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}$  traduisent en fait l'écart entre la solution approchée que nous cherchons et la solution exacte qui est inconnue.

Les coefficients  $\alpha_n$  et  $\beta_n$  sont choisis de sorte que les erreurs résiduelles  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}$  soient respectivement orthogonales au sous-espace vectoriel  $u$  engendré par les fonctions  $\{u_n\}$  et  $v$  engendré par les fonctions  $\{v_n\}$ . Cette façon de procéder tient à la remarque suivante :

Soit l'espace hilbertien  $H = L^2 [0,1]$  muni du produit scalaire

$$\langle f|g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx \quad (6.7)$$

soit (B) une partie d'un espace de Hilbert (H), une condition nécessaire et suffisante pour qu'un élément  $f$  de (H) appartienne à l'ensemble orthogonal de (B) dans (H) est :

$$\langle f|g \rangle = 0$$

quelle que soit  $g$  appartenant à (B).

Si les fonctions de base  $\{u_n\}$  et  $\{v_n\}$  appartiennent à (H) ;  $u$  et  $v$  sont alors des sous-espaces hilbertiens de dimension finie de (H).

Rappelons le résultats : A.Bouabdallah [86], en prenant les fonctions  $\{u_n\}$  et  $\{v_n\}$  comme bases de la solution approchée  $u$  et  $v$  définie par (6.5), les erreurs résiduelles  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}$  appartiennent à (H). On peut alors exprimer l'orthogonalité de  $\xi_n^{(1)}$  avec l'espace  $u$  respectivement  $\xi_n^{(2)}$  avec  $v$  en écrivant :

$$\langle \xi_n^{(1)} | u_m \rangle = \int_0^1 (\xi_n^{(1)} u_m) d\eta \quad (6.8)$$

$$\langle \xi_n^{(2)} | v_m \rangle = \int_0^1 (\xi_n^{(2)} v_m) d\eta \quad (6.9)$$

soit :

$$\int_0^1 (\xi_n^{(1)} u_m) d\eta = 0 \quad (6.10)$$

$$\int_0^1 (\xi_n^{(2)} v_m) d\eta = 0 \quad (6.11)$$

En remplaçant  $\xi_n^{(1)}, \xi_n^{(2)}$  par leur expression, on obtient alors le système suivant :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_0^1 (L_1 u_n) u_m d\eta - \sum_{n=1}^N \beta_n \int_0^1 (L_2 v_n) u_m d\eta &= 0 \\ 2G_0^2 \sigma^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n \int_0^1 U u_n v_m d\eta + \sum_{n=1}^N \beta_n \int_0^1 (\{L_0 L\} v_n) v_m d\eta &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.12)$$

Posons :

$$\begin{aligned} [a_{mn}] &= \int_0^1 (L_1 u_n) u_m d\eta, & [b_{mn}] &= - \int_0^1 (L_2 v_n) u_m d\eta \\ [c_{mn}] &= \int_0^1 U u_n v_m d\eta, & [d_{mn}] &= \int_0^1 (L_0 L) v_m d\eta \end{aligned}$$

Le système défini par les équations (6.12) peut s'écrire sous la forme suivante :

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^N \alpha_n a_{mn} - \sum_{n=1}^N \beta_n b_{mn} &= 0 \\ 2G_0^2 \sigma^2 \sum_{n=1}^N \alpha_n c_{mn} + \sum_{n=1}^N \beta_n d_{mn} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (6.13)$$

On aboutit à un système d'équations algébriques de 2N équations à 2N inconnues à résoudre.

### 6.3 Relation de dispersion

Nous pouvons écrire le système (6.13), sous la forme d'une équation matricielle suivante :

$$[G][X] = 0 \quad (6.14)$$

Où  $[G]$  est la matrice des coefficients dépendant des paramètres physiques du problème à résoudre. Celle-ci est définie par la matrice suivante :

$$[G] = \begin{bmatrix} [a_{mn}] & [b_{mn}] \\ 2G_0^2 \sigma^2 [c_{mn}] & [d_{mn}] \end{bmatrix} \quad (6.15)$$

et  $[X]$  le vecteur colonne lié aux coefficients algébriques à 2N inconnues  $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$  et  $(\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n)$  du problème.

Pour déterminer les coefficients des matrices :  $[a_{mn}]$ ,  $[b_{mn}]$ ,  $[c_{mn}]$  et  $[d_{mn}]$ , on utilise l'expression normalisée du profil de vitesse de l'écoulement principal établi au chapitre 5.

Et on suppose que la perturbation est de la forme polynomiale telle qu'elle a été proposée par R.C.Diprima [87] et A.Bouabdallah [86], dont l'expression choisie est la suivante :

$$\begin{aligned} u_n(\eta) &= \eta(1 - \eta)\eta^{n-1} \\ v_n(\eta) &= \eta^2(1 - \eta)^2\eta^{n-1} \end{aligned} \quad (6.16)$$

les  $u_n$  et  $v_n$  doivent satisfaire les conditions aux limites du problème :

$$\begin{aligned} u_n(\eta) &= 0 \quad \text{pour } \eta = 0 \text{ et } \eta = 1 \\ v_n(\eta) &= \frac{dv_n}{d\eta} = 0 \quad \text{pour } \eta = 0 \text{ et } \eta = 1 \end{aligned} \quad (6.17)$$

La valeur critique associée au paramètre de Göertler  $G_0$  en fonction du nombre d'onde  $\sigma$  est déterminée en exprimant que le déterminant associée est nul.

$$\det \begin{bmatrix} [a_{mn}] & [b_{mn}] \\ 2G_0^2 \sigma^2 [c_{mn}] & [d_{mn}] \end{bmatrix} = 0 \quad (6.18)$$

Ceci signifie que la solution obtenue à (6.15) est non triviale (condition de Crane). Par conséquent (6.18) donne:

$$[a_{mn}] \cdot [d_{mn}] - 2G_0^2 \sigma^2 [c_{mn}] \cdot [b_{mn}] = 0$$

Cas particulier: En se limitant à un calcul effectué en première approximation, soit au premier ordre, on impose la condition nécessaire d'existence de solutions qui se traduit par :

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & b_{11} \\ 2G_0^2 \sigma^2 c_{11} & d_{11} \end{bmatrix} = 0$$

avec

$$\begin{aligned} a_{11} &= \int_0^1 (L_1 u_1) u_1 d\eta, & b_{11} &= - \int_0^1 (L_2 v_1) u_1 d\eta \\ c_{11} &= \int_0^1 U u_1 v_1 d\eta, & d_{11} &= \int_0^1 (L_0 L v_1) v_1 d\eta \end{aligned}$$

formellement, on obtient le résultat:

$$a_{11} \cdot d_{11} - 2G_0^2 \sigma^2 c_{11} \cdot b_{11} = 0 \quad (6.19)$$

il vient alors :

$$G_0^2 = \frac{a_{11} \cdot d_{11}}{2\sigma^2 c_{11} \cdot b_{11}}$$

Les expressions de  $a_{11}$  et  $d_{11}$  sont des fonctions du nombre d'onde, le calcul effectif de  $c_{11}$  et de  $b_{11}$  permet d'établir de manière précise la relation entre le nombre de Göertler et le nombre d'onde soit :

$$G_0 = f(\sigma) \quad / \sigma : \text{nombre d'onde}$$

La valeur critique est déterminée de sorte que la dérivée de la fonction  $f(\sigma)$  soit nulle :  $\frac{\partial G_0}{\partial \sigma} = 0$ . La détermination de  $G_0$  critique nous permet d'établir le diagramme de stabilité marginale.

#### 6.4 Résultats et discussion

Une étude comparative des profils de vitesse entre différents auteurs a pu mettre en évidence l'incidence du profil de distribution de vitesse moyenne sur la prévision du nombre de Göertler critique, donc sur l'apparition de l'instabilité de Göertler.

Les résultats théoriques sont regroupés sur le tableau suivant :

Auteurs	Profil Mouvement Principal	$G_{0c}$	$a_c$	Méthode de Calcul
Göertler	$U(\eta) = \begin{cases} \eta & ; 0 < \eta < 1 \\ 1 & \eta > 1 \end{cases}$	16.7	1.22	Méthode de Fredholm
Hammerlin	Profil polynomial de type Blasius	8.38	0.6	Méthode de Fredholm
A.M.O.Smith	Profil polynomial de type Blasius	8.23	0.7	Approche numérique
Meksyn	Profil polynomial de type Blasius	54	240	Méthode de Riemman
Kobayashi	Profil polynomial de type Blasius	9.40	0.6	Méthode de Fredholm
Présent Travail	Profil Solution de l'E.D.P (5.13)	13.6	2.58	Méthode de Galerkin

Les résultats expérimentaux disponibles sont les suivants :

Aihara [88]				
$R(m)$	$U(m/s)$	$\lambda(cm)$	$a_c$	$G_0$
3	7	1.8	3.48	31
5	3	3.5	1.79	27
5	7	3.5	1.79	65
5	13	3.5	1.79	120
10	11	2.1	2.99	34
10	16	2.1	2.99	49

D'après Aihara [88] on peut noter (tableau ci-dessus) que pour un rayon de courbure fixé, le nombre d'onde  $\sigma$  est indépendant de la vitesse.

Par contre lorsque la vitesse de l'écoulement est fixée et le rayon de courbure variable le nombre d'onde varie. Ceci est confirmé également par les mesures de Bipps [89] tableau ci-joint :

Bipps [89]				
$R(m)$	$U(m/s)$	$\lambda(cm)$	$a_c$	$G_0$
0.5	0.075	1.5	4.18	12.3
0.5	0.30	0.65	9.66	14.11
1	0.075	2.0	3.14	13.50

Lorsque le rayon de courbure est fixé le nombre d'onde dépend de la vitesse de l'écoulement. Il en est de même lorsque la vitesse de l'écoulement est fixée et le rayon de courbure varie, le nombre d'onde varie comme suit d'après Winoto et Crane [90].

Winoto.,Crane [90]				
$\frac{r}{a}$	$\frac{\delta}{r}$	$\lambda(cm)$	$a_c$	$G_{0c}$
3.50	0.07	1.8	3.48	15
2.75	0.05	3.2	1.96	9

avec  $r$  : rayon de courbure du conduit,  $a$  : largeur de conduit,  $\delta$  : hauteur de couche limite dynamique.

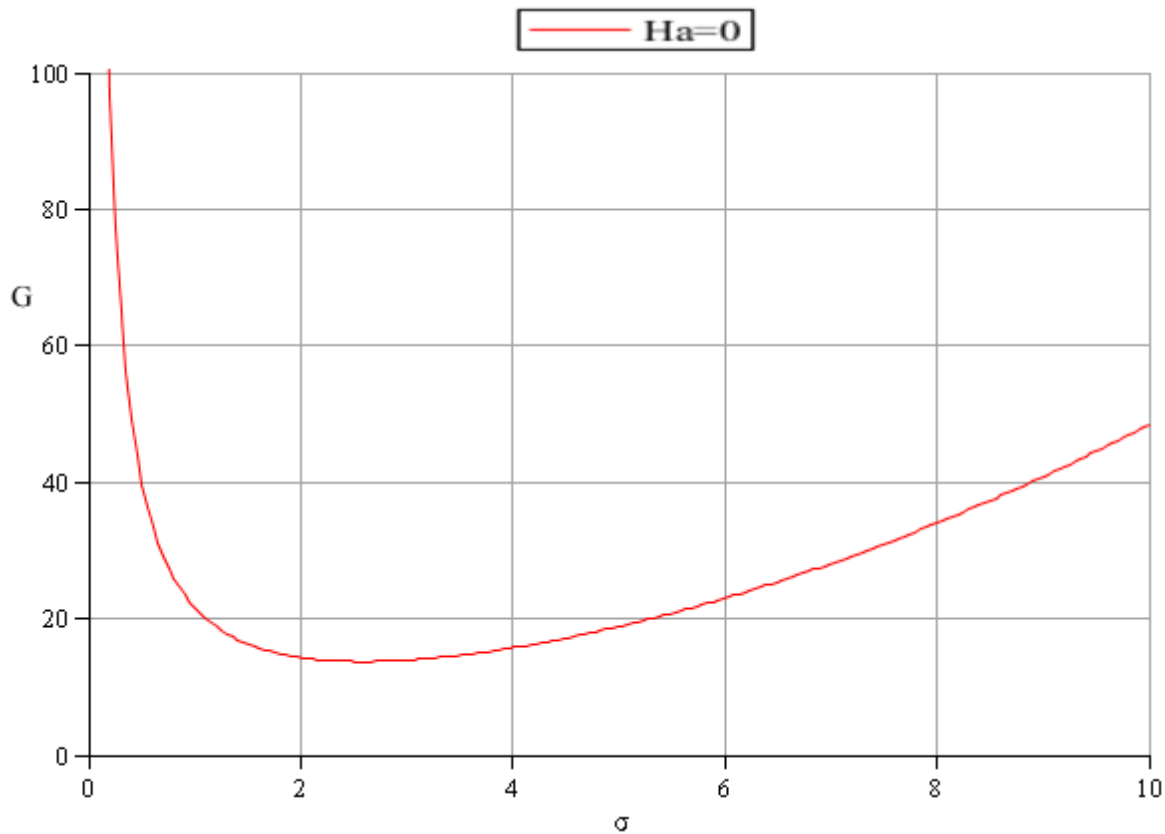
Suite à ces travaux et dans le but de pouvoir comparer nos résultats avec ceux déjà établis sur les plans théorique et expérimental, on a considéré le cas  $\beta = 0$

Dans ces conditions notre profil de vitesse du mouvement principal, se situe entre les profils utilisés par : Göertler[77], Hammerlin[76], A.M.O.Smith[79], Kobayashi[81]. Tous les profils de vitesse du mouvement principal ont la même épaisseur de perte de quantité de mouvement, d'une part, et la vitesse de l'écoulement principal est indépendante des caractéristiques géométriques du conduit, d'autre part.

Quant à l'évolution du seuil critique  $G_{0c} = 13.6$  en fonction du nombre d'onde  $a_c = 2.58$  celle-ci est proche de Bipp[89] pour le rayon de courbure le plus élevé  $R = 1$  ( $G_{0c} = 13.5$  et  $a_c = 3.14$ ) et également avec la moyenne de valeurs obtenues par Winoto et Crane[90].  $G_{0c} = \frac{15+9}{2} = 12$  et  $a_c = \frac{3.48+1.96}{2} = 2.72$ .

#### 6.4.1 Cas sans champ magnétique.

Le tracé des variations du paramètre de  $G_0$  en fonction du nombre d'onde  $\sigma$  permet d'établir le réseau de courbes délimitant les zones de stabilité et d'instabilité. En particulier, les calculs mettent en évidence systématiquement une valeur minimale du nombre de Göertler coïncidant avec la valeur critique recherchée. Le diagramme de stabilité a été établi avec le paramétrage suivants ( $\beta = 0, H_a = 0$ ) fig(6.1).



Fig(6.1) :Diagramme de stabilité marginale ( $\beta = 0, H_a = 0$ )

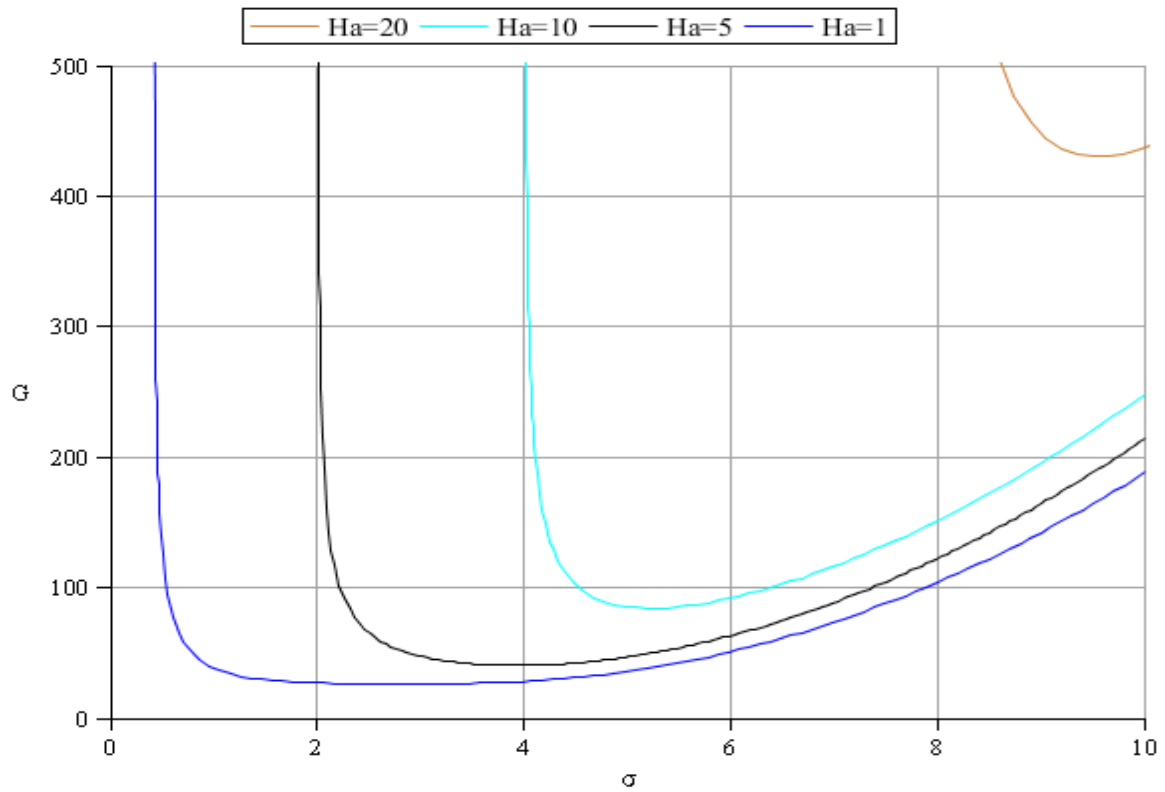
La courbe définissant le diagramme de stabilité présente la même allure dans l'ensemble et semble similaire à celle des auteurs : Göertler[77], Hammerlin[76], A.M.O.Smith[79], Kobayashi[81].

Notre résultat concernant le nombre de Goertler critique est situé entre les valeurs théoriques de Goertler et H.Witting [91].

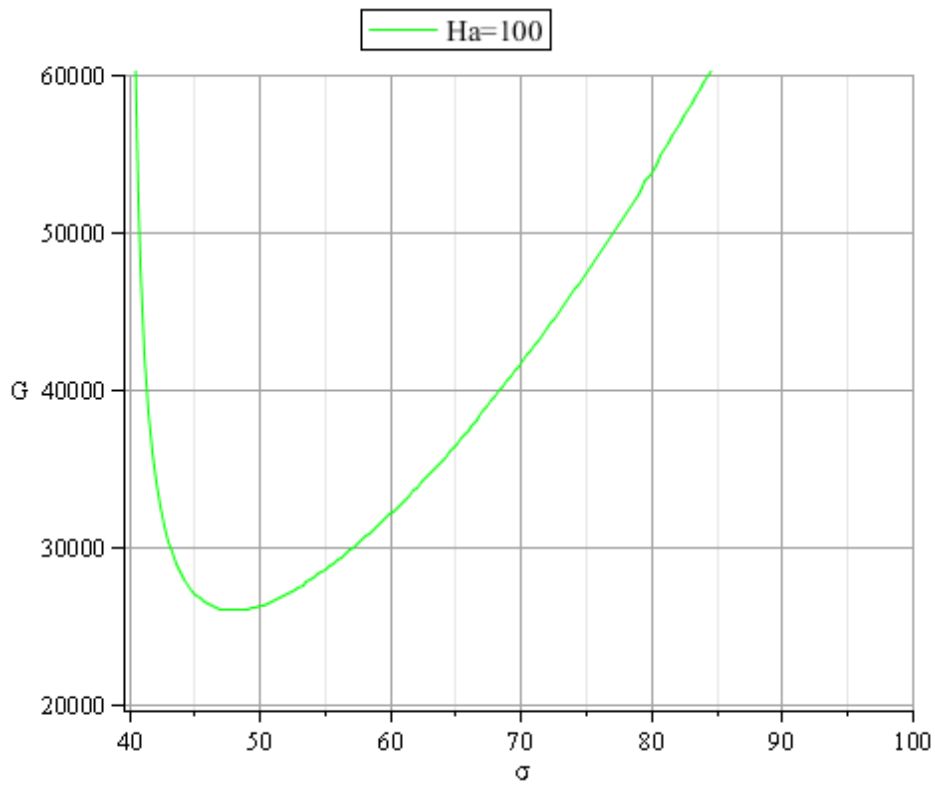
Les écarts relatifs sur  $G_{0c}$  sont respectivement 4,2% et 4,8% par rapport aux résultats expérimentaux obtenus par Bipps [89] et elles sont voisines de celles de Winoto et Crane [90]. Par contre, la différence apparaît très importante par rapport aux résultats de Aihara[88], et Wesfreid [92].

#### 6.4.2 Cas avec champ magnétique.

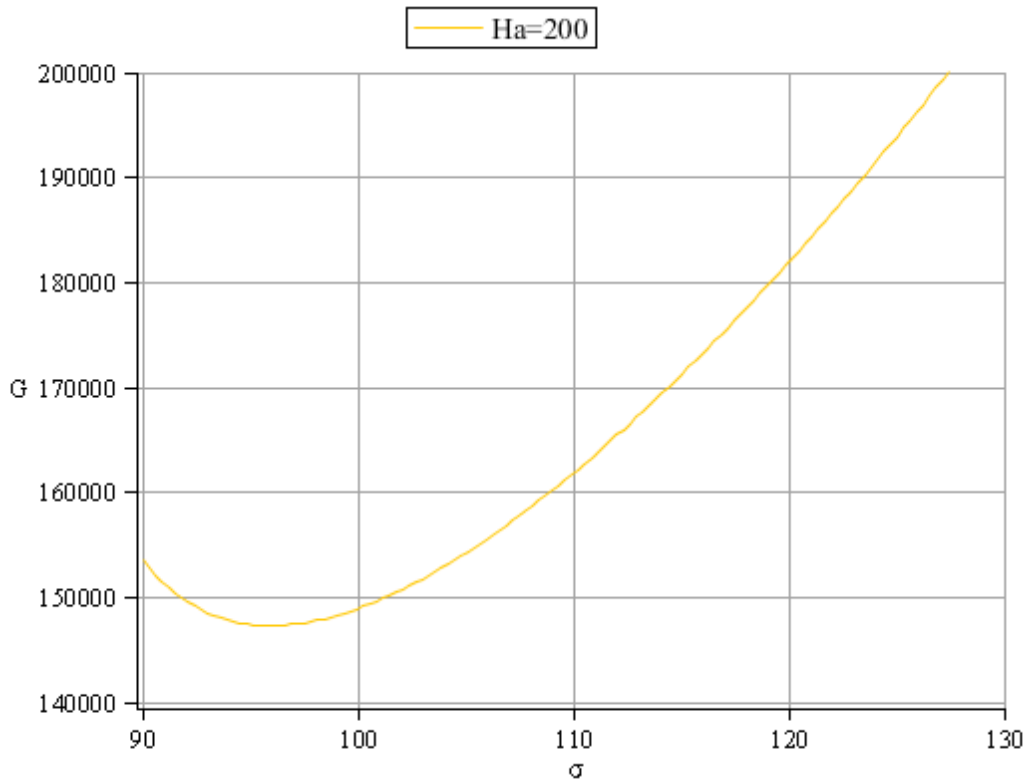
Dans ce cas, le profil de vitesse de l'écoulement principal dépend fortement du nombre de Hartmann  $H_a$ . On enregistre une très grande variation de la valeur critique du nombre de Gortler lorsque le champ magnétique est élevé et qui se fait parallèlement à l'augmentation du nombre d'onde Fig(6.2) :



Fig(6.2) :Diagramme de stabilité marginale  
 $\beta = 0, H_a = 1 - 5 - 10 - 20$ )



Fig(6.3) :Diagramme de stabilité marginale  
 $\beta = 0, H_a = 100$ )



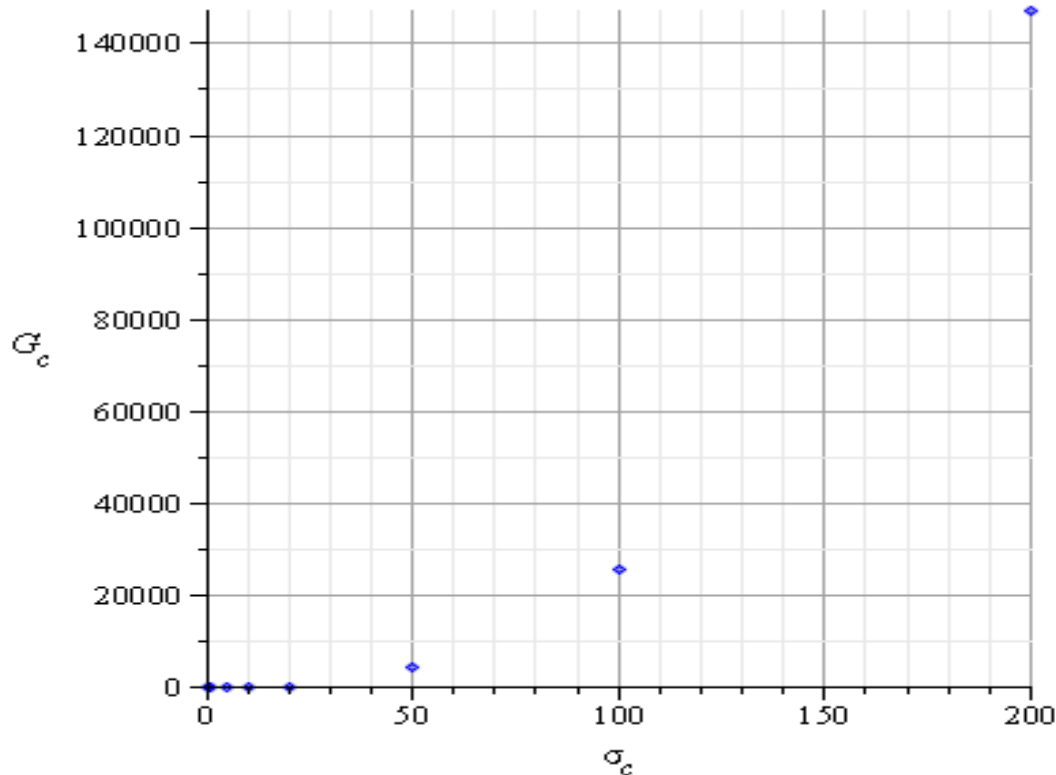
Fig(6.4) :Diagramme de stabilité marginale

$$\beta = 0, H_a = 200)$$

Au regard de ce résultat, on peut conclure, dans ce cas, que le champ magnétique a un effet sensible sur le paramètre critique de Göertler. Par conséquent, les forces de Lorentz ont une influence sur les conditions d'apparition des ondes de Göertler.

On suppose que ces différences sont attribuées probablement au profil de vitesse du mouvement principal dont l'allure est parabolique asymétrique de concavité plus importante que dans le cas sans champ magnétique.

champ magnétique	$G_{0c}$	$a_c$
$H = 0$	13.6	2.58
$H = 1$	26.25	2.82
$H = 5$	40.40	3.93
$H = 10$	84.28	5.23
$H = 20$	430.79	9.55
$H = 50$	4539.21	23.96
$H = 100$	25965.89	47.98
$H = 200$	$1.473 \cdot 10^5$	95.98



Fig(6.4) :Diagramme des valeurs critiques du nombre de Göertler en fonction nombre d'onde critique.

On constate que la valeur critique du nombre de Göertler multiple en exponentiel.

### Conclusion

Les courbes d'évolution de la stabilité marginale que nous avons obtenus présentent la même allure que celles qui sont proposées par différents chercheurs. Cependant une différence importante réside dans l'évaluation du nombre critique de Göertler[91] et celle de Witting[98], mais elle est assez proche des résultats expérimentaux récents de Bippes [89]. Par ailleurs, en présence des forces de Lorentz (présence du champ magnétique), on constate une augmentation du nombre critique de Göertler et du nombre d'onde ce qui signifie que la taille des tourbillons a tendance à diminuer considérablement dans la direction azimutale.

Finalement, il apparaît que la courbure ainsi que la force de Lorentz ont tendance à favoriser l'apparition des ondes de Göertler et à diminuer leur taille donc de démultiplier le nombre d'onde.

D'une façon général, ceci confirme notre hypothèse de travail quant à l'influence de la forme du profil de vitesse moyenne sur l'instabilité de Göertler.

### Conclusion générale et perspectives

Afin d'exploiter les futurs tokamaks dans de bonnes conditions de fiabilité, sûreté, sécurité et performance, il est indispensable de maîtriser le phénomène de corrosion, et ainsi d'identifier le rôle du champ magnétique. Pour contrôler ce processus pouvant provoquer des dégâts irréversibles sur les éléments de paroi au contact avec le métal liquide Li-Pb qui est très corrosif. D'après la revue bibliographique, il apparaît que même si les phénomènes de corrosion sont étudiés depuis longtemps, ils n'ont représenté jusqu'à une période récente qu'une contribution assez modeste qui s'intéresse aux machines de fusion. Ce problème a été découvert lorsque on a abordé le refroidissement par métal liquide de la couverture tritigène des réacteurs à fusion, tels que ITER et DEMO, qu'un certain nombre d'expériences [1], [2], [3] et [4] ont montré que la paroi du conduit, fait d'acier martensitique Eurofer 97 peut être corrodée par LiPb. C'est dans ce contexte que l'on s'est intéressé à l'apparition des phénomènes de corrosion par l'instabilité de striation au niveau de la paroi d'Eurofer. Il apparaît donc important d'en comprendre la nature et les conditions de déclenchement. Il s'agit d'un processus global de corrosion de l'Eurofer par le métal plomb-lithium qui est renforcée par la présence d'un champ magnétique. L'analyse de la stabilité a permis de mettre en évidence plusieurs mécanismes susceptibles de faire transitionner l'écoulement proche de la paroi. Cette étude permet de mettre en évidence l'analyse menée par Reshotko [71]. Le problème de la prévision des phénomènes de transition est assez délicat à aborder dans la mesure où il existe peu de corrélations entre des essais expérimentaux et des calculs de stabilité qui existent pour des instabilités de striation en régime laminaire. Les scénarios selon lesquels les perturbations qui sont amplifiées par les instabilités de la couche limite vont effectivement créer des ondes instables en régime subcritique. Seuls les chemins de bifurcation envisagés par Morkovin A, B et C sont pertinents pour des taux de perturbation extérieure compris entre :  $0.1\% \leq Tu \leq 0.7\%$ . Les chemins D et E correspondent à des taux de perturbation très élevés ( $Tu \geq 1\%$ ). Aussi, dans ce mémoire, nous ne considérerons pas le scénario A classique de la transition. Par contre, les scénarios B et C peuvent être intéressants si l'on envisage le contrôle de la transition à l'aide de rugosités. Le profil de vitesse moyen était déterminé, on peut faire la prédiction des phénomènes d'apparition de l'instabilité de striation. En régime subcritique, on réalise l'étude de la stabilité du phénomène de striations vis-à-vis du profil moyen précédent. Cette analyse conduit à résoudre un système d'équations couplées de l'instabilité par la méthode de Galerkin. En fait, le problème aux valeurs propres conduit à établir un système aux équations algébriques homogènes et si

l'on impose au déterminant d'être nul on débouche sur la relation de dispersion qui lie l'ensemble des paramètres d'influence de nature géométrique et dynamique. Cette dernière permet de trouver le diagramme de stabilité marginale de type  $G_{oc} = G_o(a_c)$ .

### Perspectives

Sur la base de résultats précédents, il est opportun de poursuivre notre travail dans les directions suivantes :

- Dans le cadre d'une théorie linéaire. Prédire l'instabilité de striation sous forme d'onde progressive en rapport avec le phénomène combiné de "lift up" générant l'advection pariétale.
- Dans le cadre d'une théorie non-linéaire de type Landau-Stuart ou de type Ginzburg-Landau il s'agit de prédire l'évolution de l'amplitude d'équilibre au voisinage de  $Re_c$  avec ou sans champ magnétique.

Enfin, ce travail pourra servir ultérieurement comme base de validation permettant d'élaborer une modélisation par simulation numérique afin de généraliser la prédiction de ce phénomène d'instabilité de corrosion.

## References Bibliographiques

- [1] J. Wesson. Tokamaks. Oxford Science Publications, Clarendon Press, 1997.
- [2] Lawson, J.D. *Some Criteria for a Power Producing Thermonuclear Reactor*. London : Proc. Phys. Soc., 1957. B70.
- [3] . M. Keilhacker, A. Gibson, C. Gormezano, P.J. Lomas, P.R. Thomas, M.L. Watkins, P. Andrew, B. Balet, D. Borba, C.D. Challis, I. Coffey, G.A. Cottrell, H.P.L. De Esch, N. Deliyanakis, A. Fasoli, C.W. Gowers, H.Y. Guo, G.T.A. Huysmans, T.T.C. Jones, W. Kerner. *High fusion performance from deuterium-tritium plasma in JET*. s.l. : Nuclear Fusion, 1999. vol 39, n° 2 page 209.
- [4] E. Tsitrone, C. Brosset, B. Pégourié, E. Gauthier, J. Bouvet, J. Bucalossi, S. Carpentier, Y. Corre, E. Delchambre, L. Desgranges, T. Dittmar, D. Douai, A. Ekedahl, A. Escarguel, Ph. Ghendrih, C. Grisolia, A. Grosman, J. Gunn, S.H. Hong, W. Jacob, F. Kazarian, M. Kocan, H. Khodja, F. Linez, T. Loarer, Y. Marandet, A. Martinez, M. Mayer, O. Meyer, P. Monier Garbet, P. Moreau, J.Y. Pascal, B. Pasquet, F. Rimini, H. Roche, I. Roure, S. Rosanvallon, P. Roubin, J. Roth, F. Saint-Laurent, F. Samaille & S. Vartanian. Deuterium inventory in Tore Supra : *reconciling particle balance and post-mortem analysis*. *Nuclear Fusion*, vol. 49, no 7, page 075011, 2009
- [5] Naujoks , D. Naujoks, K. Asmussen, M. Bessenrodt-Weberpals, S. Deschka, R. Dux, W. Engelhardt, A.R. Field, G. Fussmann, J.C. Fuchs, C. Garcia-Rosales, S. Hirsch, P. Ignacz, G. Lieder, K.F. Mast, R. Neu, R. Radtke, J. Roth & U. Wenzel. *Tungsten as target material in fusion devices*. *Nuclear Fusion*, vol. 36, no 6, page 671, 1996.
- [6] Pitcher., C.S. A Review of Particle Fuelling and Recycling Processes in Magnetic Fusion Devices. s.l. : Vacuum Technology Applications and Ion Physics, 1988. vol. 38, pages 1059–1069.
- [7] Bucalossi, J. *Particle fuelling for long pulse with standard gas puff and*. Lyon : Proceedings of 19th IAEA Fusion Energy, 2002. pages EX/P4–04.
- [8] S.L. Milora, W.A. Houlberg, L.L. Lengyel & V. Mertens. *Pellet fuelling*. s.l. : Nuclear Fusion, 1995. vol 35, n°6 page 657,.
- [9] B. Saoutic. Tore Supra : *Toward Steady State in a Superconducting Tokamak*. *Fusion Science and Technology*, vol. 56, no 3, pages 1079–1091, 2009.

- [10] D. van Houtte, G. Martin, A. Bécoulet, J. Bucalossi, G. Giruzzi, G.T. Hoang, Th. Loarer, B. Saoutic & the Tore Supra Team. *Recent fully non-inductive operation results in Tore Supra with 6 min, 1 GJ plasma discharges. Nuclear Fusion, vol. 44, no 5, page L11, 2004.*
- [11] M. Shimada, D.J. Campbell, V. Mukhovatov, M. Fujiwara, N. Kirneva, K. Lackner, M. Nagami, V.D. Pustovitov, N. Uckan, J. Wesley, N. Asakura, A.E. Costley, A.J.H. Donné, E.J. Doyle, A. Fasoli, C. Gormezano, Y. Gribov, O. Gruber, T.C. Hender, W. Houlberg, S. Ide, Y. Kamada, A. Leonard, B. Lipschultz, A. Loarte, K. Miyamoto, V. Mukhovatov, T.H. Osborne, A. Polevoi & A.C.C. Sips. *Chapter 1: Overview and summary. Nuclear Fusion, vol. 47, no 6, page S1, 2007.*  
*chapitre 2*
- [12] Barbier F., Alemany A. and Martemianov S.: *On the influence of a high magnetic field on the corrosion and deposition processes in the liquid Pb-17Li alloy, Fusion Eng. And Design, 43, pp. 199-208, 1998*
- [13] Simon N., Terlain A and Flament T: *The compatibility of austenitic materials with Pb-17Li, Corrosion science, 43, pp. 1041-1052, 2001*
- [14] Monchoux J.P. and Rabkin E.: *Microstructure evolution and interfacial properties in the Fe-Pb system, Acta Materialia, 50, pp. 3159-3174, 2002*
- [15] Martinelli L, Balbaud-Célérier F. Terlain A., Delpech S., Santarini G., Favergeon J., Moulin G., Tabarant M. and Picard G., *Oxidation mechanism of a Fe-9Cr-1Mo steel by liquid Pb-Bi eutectic alloy (Part 1), Corrosion science, 50, pp. 2523-2536, 2008.*
- [16] Deloffre Ph., Terlain A., Alemany A. and Kharicha A : *Corrosion study of an austenitic steel in Pb17-Li under magnetic field and rotating flow, J. of Fusion Energy, 69, n°1, pp. 391-395, 2003.*
- [17] A. BOUABDALLAH : *NOTE INTERNE à Pr R. Moreau, Y. Bréchet : Eurofer corrosion par l'écoulement de l'alliage eutectique plomb-Li, en présence d'un fort champ magnétique.*
- [18] I.BUCENIEKS, KRISHBERGS .R, E.PLATACIS, LIPSBERGS G, A.SHISHKO, A.ZIK, F.MUKTEPAVELA. *Etude des phénomènes de corrosion dans l'acier dans Eurofer Pb-17Li écoulement stationnaire exposé à un champ magnétique. Magnétohydrodynamique, 42 (2-3) pp 237-251 2006.*
- [19] Krishbergs R., E. ligere, F. Muktepavela, A. Shishko, A. Zik . *Les études expérimentales sur l'action du champ magnétique fort sur la corrosion des aciers RAFM en fusion s'écoule Pb-17Li Magnétohydrodynamique, 45 (2) (2009), pp 289-296*

- [20] R. Moreau Magnétohydrodynamique (1990)
- [21] U. Müller, L. Bühler Magnétodynamique des fluides dans les canaux et les conteneurs (2001)
- [22] A. KHARICHA, A.ALEMANY, D.BORNAS : *Influence du champ magnétique et le rapport de conductance sur la hydrodynamique d'un fluide entraîné par un disque tournant dans une enceinte cylindrique. Int. J. Transfert de masse thermique, 47 (2004), pp 1997-2014.*
- [23] Prandtl [186] L. Prandtl. Über Flüssigkeitsbewegung bei sehr kleiner Reibung. In Teubner, editor, Verhandlungen des dritten internationalen Mathematiker-Kongresses, pages 484–491, Leipzig, Germany, 1905. Cité p.34,73
- [24] H. Schlichting and K. Gersten. Boundary Layer Theory. Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, Germany, 8th edition, 2000. Cité p.34,153
- [25] J. Cousteix. Turbulence et Couche limite .Cépaduès-Éditions, 1989. Cité p.34
- [26] M. Matsubara and P. H. Alfredsson, “Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence,” J. Fluid Mech. **430**, 149, 2001.
- [27] F.Waleffe. Transition in shear flows. Nonlinear normality versus non-normal linearity. Phys.Fluids, 7: 3060-3066,1995.
- [28] D.S.Henningson. Comment on ‘transition in shear flow. Nonlinear normality versus non-normal linearity’. Phys Fluids, 8:2257-2258,1996.
- [29] T.Ellingsen and E.Palm. Stability of linear flow. Phys Fluids 18:487-488,1975.
- [30] B.F.Farrell. Optimal excitation of perturbations in viscous shear flow. Phys.Fluids,31:2093-2102,1988.
- [31] L.S.Hultgren and L.H.Gustarsson. Algebraic growth of disturbances in a laminar boundary layer. Phys. Fluids,24:1000-1004, 1981.
- [32] K.M.Butler and B.F.Farrell. Three-dimensional optimal perturbations in viscous shear flow. Phys. Fluids,4:1631-1650, 1992.
- [33] L.N.Trefethem, A.E.Trefethem, S.C.Reddy, and T.A.Driscoll. Hydrodynamic stability without eigenvalues. Science, 261:578-584, 1993.
- [34] A.Tumin and E.Reshotko. Spatial theory of optimal disturbances in boundary layer. Phys. Fluids, 137:2097-2104,2001.
- [35] P.Lichini and Bottaro. Gortler vortices: A backward-in-time approach to the receptivity problem.J.Fluid Mech,363:1-23,1998.
- [36] P.Andersson, M.Berggren, and D.S.Henningson. Optimal disturbances and bypass transition in boundary layer. Phys. Fluids, 11 1:134-150,1999.

- [37] P.Luchini. Reynolds-number-independent instability of the boundary layer over a flat surface. *J.Fluid Mech*,327:101-115,1996.
- [38] C.E.Grosh and H.Salven. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part1. The spectrum and eigenfunction. *J. Fluid Mech*,87:33-54,1978.
- [39] S.Zuccher, A.Bottaro, and P.Luchini. Algebraic growth in a Blasius boundary layer: nonlinear optimal disturbances. *Eur.J.B/Fluids*,25:1-17,2006.
- [40] P.Corbett and A.Bottaro. Optimal linear growth in swept boundary layers. *J.Fluid Mech*,435:1-23,2001.
- [41] A.Cherhabili and U.Ehrenstein. Finite-amplitude equilibrium states in plane Couette flow. *J.Fluid Mech*,342:159-177,1997.
- [42] J.Hamilton, J.Kim, and F.Waleffe. Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures. *J.Fluid Mech*,287:317-348,1995.
- [43] B.Hof, C.W.H.van Doorne, J.Westerwell, F.T.M.Nieuwstadt, H.Faisst, B.Eckhard, H.Wedin, R.R.Kerswell, and F.Waleffe. Experimental observation of non-linear traveling waves in turbulent pipe flow. *Science*,305:1594-1598,2004.
- [44] J.M.Kendall. Experiments on boundary-layer receptivity to freestream turbulence. *AIAA paper*,98:0530,1998.
- [45] P.S.Klebanoff. Effect of free-stream turbulence on a laminar boundary layer. *Bull Am. Phys.Soc*.16,1971.
- [46] D.Arnal and J.C.Juillen. Contribution expérimentale à l'étude de la réceptivité d'une couche limite laminaire à la turbulence de l'écoulement général. Technical Report 1/5015AYD,ONERA,1978.
- [47] R.G.Jacobs and P.A.Durbin. Shear sheltering and the continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. *Phys.Fluids*,10:2006-2011,1998.
- [48] A.V.Boiko,K.J.A.Westin,B.G.B.Klingmann,U.V.Koslov,and P.H.Alfredsson. Experiments in boundary layer subjected to free stream turbulence. Part2. the role of TS-waves in the transition process.*J.Fluid Mech*,281:219-245,1994.
- [49] M.V.Morkvin. Bypass transition to turbulence and research desiderata. *Transition in turbines*,NASA Conf. Pub.2386?pages 161-204,1984.
- [50] A.A.Bakchinov, G.R.Grek, B.G.B.Klingmann, and V.V.Kaslov. Transition experiments in a boundary layer with embedded streamwise vortices. *Phys.Fluids* 7:820-832,1995.

- [51] K.J.A.Westin, A.A.Bakchinov, V.V.Koslov, and P.H.Alfredsson. Experiments on localized disturbances in a flat plate boundary layer. Part1. The receptivity process and evolution of localized free stream disturbance. *Eur.J.B/Fluids*,17:823-846,1998.
- [52] M.Mastubara and P.H.Alfredsson. Disturbance growth in boundary layers subjected to free-stream turbulence. *J.Fluid Mech*,430:149-169,2001.
- [53] Pavel Jonas, Oton Mazur, and Vaclav Uruba. On the receptivity of the by pass transition to the length scale of the outer stream turbulence. *Eur.J.Mech.B-Fluids* 19:707-722,2000.
- [54] J.D.Swearingen and R.F.Blackwelder. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of wall. *J.Fluid Mech*,182:255,1987.
- [55] S. BELIN, M. WIEGEL, D.S.HENNINGSON : *Numerical and experimental investigation of oblique boundary layer transition, J. Fluid Mech, 39. PP. 23.1999.*
- [56] Y.S.KACHANOV, V.V.KOZLOV , V.Y.LEVCHENKO: *Nonlinear development of a wave in a boundary layer, Fluid Dyn ., 12, pp383-390.1977 .*
- [57] T.HERBERT: *Secondary instability of boundary layers, Annu, Rev. Fluid Mech., 20,pp.487-526. 1988.*
- [58] H.Fasel. Numerical investigation of the interaction of Klebanoff-mode with a Thollmien-Schlichting wave. *J.Fluid Mech*, 450:1-33,2002.
- [59] P.Andersson, L.Brandt, A.Bottaro, and D.S.Henningson. On the breakdown of boundary layer streak. *J.Fluid Mech*, 428:29-60,2001.
- [60] L.Brandt, and D.S.Henningson. Transition of streamwise streaks in zero-pressure-gradient boundary layers. *J.Fluid Mech*, 472:229-262,2002.
- [61] L.Brandt, p.Schlatter, and D.S.Henningson. Transition in boundary layers subject to free-stream turbulence. *J.Fluid Mech*, 517:167-198,2004.
- [62] R.G.Jacobs and P.A.Durbin. Simulations of bypass transition. *J.Fluid Mech*, 428:185-212.2001.
- [63] L.Brandt, C.Cossu, J.M.Chomar, P.Huerre, and D.S.Henningson. On the convectively unstable nature of optimal streaks in boundary layers. *J.Fluid Mech*, 485:221-242,2003.
- [64] C.E.Grosh and H.Salven. The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part1. The spectrum and eigenfunction. *J.Fluid Mech*, 87:33-54,1978.
- [65] R.SRogallo. Numerical experiments in homogeneous turbulence. Technical Report 81314,NASA,1981.
- [66] A.Inasawa, F.Lundell, M.Matsubara. Y.Kohama, and PH.Alfredsson. Velocity statistics and flow structures observed in bypass transition using stereo PTV. *Exp.Fluid*,34:242-252,2002.

- [67] T.A.Zaki and P.A.Durbin. Mode interaction and the bypass route to transition. *J.Fluid Mech*,531:85-111,2005.
- [68] R.G. JACOBS et P.A DURBIN: *Simulation of bypass transition. J. Fluid Mech.*, 428:185-212,2001
- [69] T.A ZAKI et P.A DURBIN: *Mode interaction and the bypass route to transition. J. Fluid Mech.*, 531:85-111, 2005
- [70] R.JANCEL. T.KAHAN. *Electrodynamique des plasmas fondée sur la mécanique statistique.* Dunod. Paris. 1963.
- [71] L.LANDAU. E.LIFSCHITZ. *Electrodynamique des milieux continus.* Editions Oxford University Press . Londres. 1969.
- [72] Hartmann J: *Theory of the laminar flow of an electrically conducting liquid in an homogeneous magnetic field. Math. Phys. Medd.* 15-6(1937) 1-28
- [73] J.Boussinesq : *Théorie de l'écoulement tourbillant. Mém-prés-Acad. Sci XXIII . paris (1877)*
- [74] Chang.C, and Lundgren.S.(1961) Duct flow in magnetohydrodynamics. *zeitschrift fur angewandte Mathematik und physic XII:100-114.*
- [75] H. Branover, H.Vasil'ev, and Y. Gelfgat (1967). Hydraulic resistance of MHD pipes. *Magnitnaya Gidrodynamica* 4(5):1.
- [76] G. HAMMERLIN: *ber das eigenwert problem der dreidimensionalen instabilität laminarer GRENZSCHICHTEN AN Konkaven Wnden Diss Freiburg 1954.J. Rat Mech Anal U 279-321. See also ZAMM 35 366-367 (1955).*
- [77] H.GOERTLER: *ber eine dreidimensionale Instabilität laminarer Grenzschichten an Konkaven wnd, Nachr. Ges.Wiss. Gttingen Math Phys, Klasse (1940) Fachgruppe I; 1-26*
- [78] J.D.SWEARINGEN and R.F.BLACKWELDER. The growth and breakdown of streamwise vortices in the presence of wall. *J. Fluid Mech.* 182:255. 1987.
- [79] A.M.O. SMITH : *Improved solution of the FALKNER and SKAN boundary layer equation. Sherman Fairschild fund paper N FF 10 Inst AERONAUT Sci (1954)*
- [80] A.M.O. SMITH : *On the growth of Taylor-Goertler vortices along highly concave walls Quart App Math 13 ; 233-262 (1955).*
- [81] R. KOBAYASHI : *Stability of laminar boundary on concave walls the presence of the magnetic field. ISMD vol 15 papers 822-829 (1972).*
- [82] R. KOBAYASHI : *Hydromagnetic Instability of laminar boundary layer on aconcave wall. Z. Angew Math Mech Bd 52 papers 337-344 (1972) See also Rep Inst High Speed Mech TOKONU Univ vol 27 (1973).*

- [83] P.HALL : *Taylor-Gortler vortices in fully developed of boundary layer flows; linear theory theory I.M.A.J. of Applied Math vol 29 papers 173-196 (1982).*
- [84] P.HALL: *The Linear Developpement of Gortler vortices in growing boundary layers.J.Fluid . Mech vol 130 papers 41-58(1983)*
- [85] P.HALL: *The Gortler vortex instability mechanism in the three dimensional boundary layers. Pro-Roy-Soc London vol A 399 papers 135-152 (1985)*
- [86] A.BOUABDALLAH: *Etude de la stabilité d'un profil de vitesse de l'écoulement moyen vis-vis des mouvements secondaires de type Taylor. Thèse 3me cycle, Université d'Alger ;chapitre3,37-59(1975).*
- [87] R.C.DIRIMA , J.T.STUART : *fluid-vol 67 page (87) ;(1975).*
- [88] Y.AIHARA : *Goertler vortices in the non linear region recent developpement in theory and exp. Fluid Mech Ed MULER, ROUNER, SCHMIDTT. Springer papers 331-338 (1979).*
- [89] H.BIPPS: *Experimental study of the laminar turbulent transition of a concave wall in a parallele flow. NASA TM 75243 (1978).*
- [90] S.H.WINOTO, R.I. CRANE: *Vortex structure in laminar boundary layers on a concave wall Int. J.Heat and fluid flow.2, papers (221-231) (1980).*
- [91] H.GOERTLER, H.WITTING: *Theorie der sekundaren instabilitat der laminaren Grenzschichten. I U T A M. Symposium "Boundary Layer Research (ed-by Goertler), BERLIN 1958 (110-126).*
- [92] H.PEERHOSSAINI and J.E.WESFREID :*Experimental study of the Taylor-Goertler instability. J.Heat and Fluid flow (1988).*

## Annexe 1

On démontre en effet que pour un mélange ternaire (neutres A d'indice a, ions A<sup>+</sup> d'indice i, électrons e d'indice e)

et isotherme, la loi d'Ohm généralisée s'écrit [70]

$$t_e \left[ \frac{\partial \vec{J}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{J} + \vec{J} \cdot \nabla \vec{V} - \frac{1}{nq_e^2} \vec{J} \cdot \nabla \vec{J} \right] + \frac{1-2f\zeta}{B} \beta \vec{J} \wedge \vec{B} + \frac{2f^2\zeta}{B^2} \beta_{en} (\nabla p_e - \vec{J} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} + \vec{J} \\ = \sigma_e (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B} + \frac{1-f\zeta}{nq_e} \nabla p_e)$$

ou  $t_e$  est le temps de collision effectif des électrons

$$\frac{1}{t_e} = \frac{1}{t_{ei}} + \frac{1}{t_{en}}$$

et  $t_{ei}$ ,  $t_{en}$ ,  $t_{in}$  les temps de collision électron-ion, électron-neutre et ion-neutre respectivement. La densité n est celle commune aux ions et aux électrons :

$n_e = n_i = n$ . La densité des neutres  $n_a$  est a priori différente, et permet de définir la fraction neutre  $f$  :

$$f = \frac{n_a}{n_a + n}$$

Les paramètres  $\zeta$ ,  $\beta_{en}$  et  $\beta$  sont tels que :

$$\zeta = \frac{1}{1 + \frac{\omega_e t_{en}}{\omega_i t_{in}}}, \quad \beta_{en} = \omega_e t_{en}, \quad \beta_e = \omega_e t_e$$

et les pulsations cyclotroniques ont pour expressions

$$\omega_e = \frac{q_e B}{m_e}, \quad \omega_i = \frac{q_e B}{m_i}.$$

Ensuite, la conductivité électrique  $\sigma_e$  en l'absence de champ magnétique est définie :

$$\sigma_e = \frac{nq_e^2 t_e}{m_e}$$

$q_e$  : charge de l'électron

$m_e$  : masse de l'électron

Pour des échelles de temps grandes devant  $t_e$  et des échelles de longueur très supérieures aux dimensions caractéristiques du milieu (longueur de Debye, rayon de Larmor

des ions), les termes entre crochets ainsi que les termes de pression sont négligeables, et il reste finalement

$$\vec{J} + \frac{1-2f\zeta}{B} \beta \vec{J} \wedge \vec{B} - \frac{f^2\zeta}{B^2} \beta_{en} \beta (\vec{J} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B} = \sigma_e (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

Par projection parallèlement ( // ) et perpendiculairement ( $\perp$ ) à  $\vec{B}$ , on obtient  $\vec{J}$  explicitement

$$\vec{J} = \sigma_e \vec{E}_{//} + \sigma_p (\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \wedge \vec{B}) - \frac{\sigma_H}{B} (\vec{E}_{\perp} + \vec{V} \wedge \vec{B}) \wedge \vec{B}$$

en définissant les conductivités de Pedersen  $\sigma_p$

$$\sigma_p = \frac{1+f^2\zeta\beta_{en}\beta}{(1+f^2\zeta\beta_{en}\beta)^2 + (1-2f\zeta)^2\beta^2} \sigma_e$$

et de Hall  $\sigma_H$

$$\sigma_H = \frac{(1-2f\zeta)\beta}{(1+f^2\zeta\beta_{en}\beta)^2 + (1-2f\zeta)^2\beta^2} \sigma_e$$

On peut alors écrire la loi d'Ohm sous la forme tensorielle

$$\vec{J} = \bar{\sigma} (\vec{E} + \vec{V} \wedge \vec{B})$$

avec le tenseur  $\bar{\sigma}$  exprimé dans des axes où z est parallèle à  $\vec{B}$  :

$$\bar{\sigma} = \begin{pmatrix} \sigma_p & -\sigma_H & 0 \\ \sigma_H & \sigma_p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_e \end{pmatrix}$$

Dans le cas limite du plasma complètement ionisé ( $f=0$ ), on retrouve les expressions

$$\text{classiques :} \quad \sigma_p = \frac{1}{1+\beta^2} \sigma_e, \quad \sigma_H = \frac{\beta}{1+\beta^2} \sigma_e$$

où  $\beta$  est le paramètre de Hall. Si de plus  $\beta \ll 1$  alors  $\sigma_p \sim \sigma_e$ ,  $\sigma_H \sim 0$  et la conductivité perd son caractère tensoriel.

## Annexe 2

**Définition d'une base dans le repère curviligne.**

On définit le vecteur :  $\vec{V} = V_1\vec{e}_1 + V_2\vec{e}_2 + V_3\vec{e}_3$

avec  $e_i = 1$  et  $\vec{e}_1 \cdot (\vec{e}_2 \times \vec{e}_3) \geq 0$  mais  $\vec{e}_1$  n'est pas forcément orthogonal à  $\vec{e}_2 \times \vec{e}_3$ .  
( $\vec{e}_i$  orthogonaux aux surfaces  $x_i$  et dirigés vers les  $x_i$  croissants).

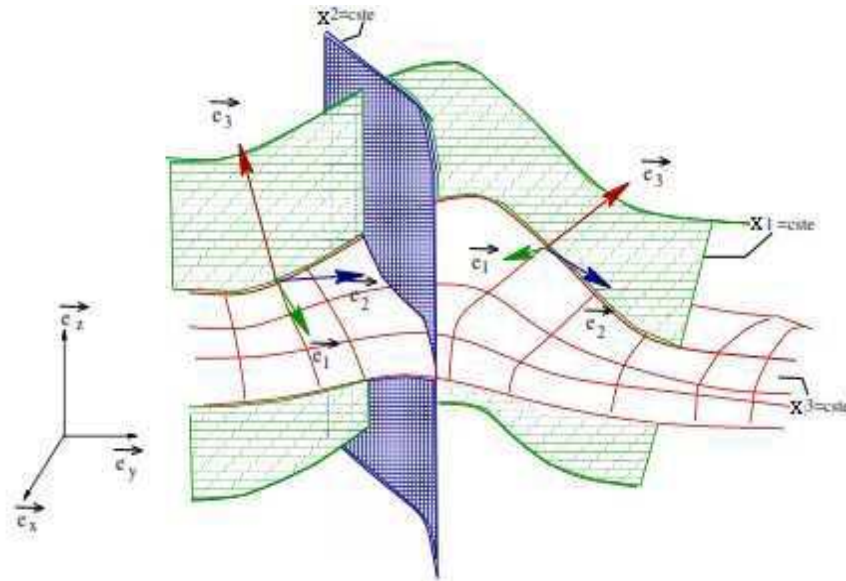


Figure : 4.4-Surfaces quelconques définissant un champ de coordonnées curvilignes

**Relations de passage****Coordonnées d'un point dans les systèmes de coordonnées**

-Généralisation : On définit dans le repère cartésien, un autre ensemble de trois surfaces non-nécessairement planes et non-nécessairement perpendiculaires entre elles. Par exemple, la surface de base est la surface de la terre.

-Chaque point peut être défini par l'intersection des plans  $(x_1, x_2, x_3) = cste$  et  $(x, y, z) = cste$

-Si on se déplace le long de l'axe des  $x$  ou le long de n'importe qu'elle autre direction parallèle, seules les valeurs de  $x$  varient dans le repère cartésien ( $y$  et  $z$  restent constantes), mais  $x_1$ ,  $x_2$  et  $x_3$  varient.

-On a donc les relations de changement de repères :

$$x = x(x_1, x_2, x_3)$$

Inversement, on a :

$$x_1 = x_1(x, y, z)$$

$$y = y(x_1, x_2, x_3)$$

$$x_2 = x_2(x, y, z)$$

$$z = z(x_1, x_2, x_3)$$

$$x_3 = x_3(x, y, z)$$

### Relations différentielles entre les systèmes de coordonnées

Par définition la différentielle associée à  $x$  qui est fonction de  $x_1, x_2, x_3$  est :

$$dx = \frac{\partial x}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial x}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial x}{\partial x_3} dx_3 \quad dx_1 = \frac{\partial x_1}{\partial x} dx + \frac{\partial x_1}{\partial y} dy + \frac{\partial x_1}{\partial z} dz$$

Inversement on calcule de la même façon. Les deux résultats précédents peuvent être écrite de façon construite comme suit :

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j \quad \text{et} \quad dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial x_j} dx_j$$

### Conservation de la distance

La longueur d'un élément de distance dans les deux repères dut être identique :

$$\begin{aligned} dl^2 &= g_{11} dx_1^2 + g_{12} dx_1 dx_2 + g_{13} dx_1 dx_3 \\ &\quad g_{21} dx_2 dx_1 + g_{22} dx_2^2 + g_{23} dx_2 dx_3 \\ &\quad g_{31} dx_3 dx_1 + g_{32} dx_3 dx_2 + g_{33} dx_3^2 \\ &= g_{ij} dx_i dx_j \end{aligned}$$

-Si on identifie l'expression de  $dl^2$  dans les deux repères, on obtient l'expression des

$g_{ij}$  :

$$g_{ij} = \frac{\partial x}{\partial x_i} \frac{\partial x}{\partial x_j} + \frac{\partial y}{\partial x_i} \frac{\partial y}{\partial x_j} + \frac{\partial z}{\partial x_i} \frac{\partial z}{\partial x_j}$$

-Les espaces dans lesquels cette équation est valable sont les espaces métriques ou de Riemann.

### Facteurs d'échelles

En considérant que les systèmes de coordonnées curvilignes où en chaque point les surfaces d'isovaleurs des coordonnées (ou bien les vecteurs directeurs) sont mutuellement orthogonales on a alors :

$$\vec{e}_i \cdot \vec{e}_j = \delta_{ij} \Rightarrow g_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j.$$

Pour simplifier, on écrira :  $g_{ij} = h_i^2 \Rightarrow dl^2 = (h_1 dx_1)^2 + (h_2 dx_2)^2 + (h_3 dx_3)^2$

- $h_i$ : facteur d'échelle ;  $h_i dx_i > 0$  et à les dimensions d'une longueur.

### Déplacement élémentaire

Dans ces conditions, l'élément différentiel  $d\vec{r}$  s'écrit :

$$d\vec{r} = h_1 dx_1 \vec{e}_1 + h_2 dx_2 \vec{e}_2 + h_3 dx_3 \vec{e}_3$$

### Expression des opérateurs différentiels

#### Gradient

Par définition, le vecteur gradient est le vecteur qui a l'intensité et la direction du plus fort taux d'évolution spatiale de la fonction à laquelle il s'applique. Les composantes de

$\nabla\phi(x_1, x_2, x_3)$  dans la direction  $\vec{e}_1$  par exemple, est donné par :

$$\vec{e}_1 \cdot \vec{\nabla}\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r_1} = \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1}$$

avec  $r_1 = h_1 \partial x_1$  : déplacement élémentaire dans la direction  $\vec{e}_1$

Par conséquent, le gradient de la fonction  $\phi$  s'écrit :

$$\vec{\nabla}\phi = \begin{pmatrix} \frac{1}{h_1} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \\ \frac{1}{h_2} \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \\ \frac{1}{h_3} \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^3 \vec{e}_i \frac{1}{h_i} \frac{\partial\phi}{\partial x_i}$$

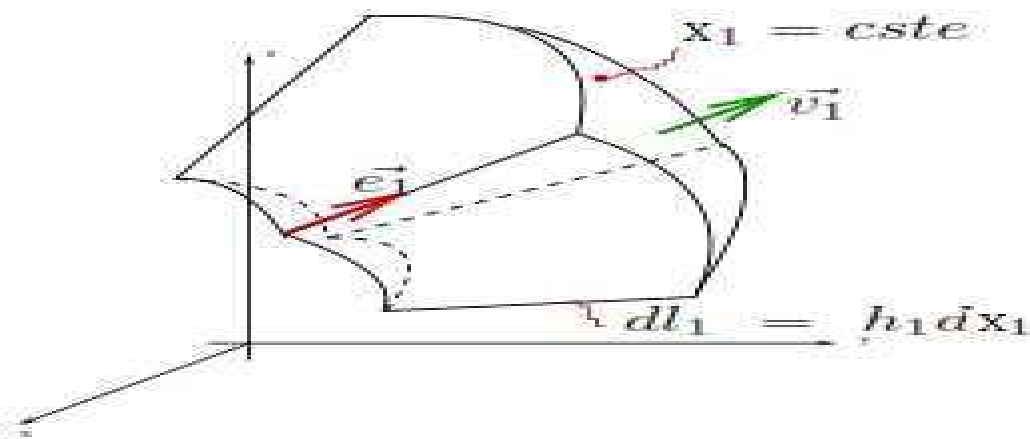
#### Divergence

Par définition, la divergence est l'opposée du flux de masse dans un élément de volume. Si un fluide est animé d'un mouvement colinéaire au vecteur  $\vec{e}_1$ , son flux à travers le volume défini par des vecteurs colinéaires à  $\vec{e}_1$  (figure 4.5) est :

$$[-v_1(x_1, x_2, x_3) + v_1(x_1 + dx_1, x_2, x_3)]h_2 dx_2 h_3 dx_3 = \frac{\partial(h_2 h_3 v_1)}{\partial x_1} dx_1 dx_2 dx_3$$

Par unité de volume et dans le cas où le flux n'a pas d'orientation particulière on a :

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \left[ \frac{\partial(h_2 h_3 v_1)}{\partial x_1} + \frac{\partial(h_1 h_3 v_2)}{\partial x_2} + \frac{\partial(h_1 h_2 v_3)}{\partial x_3} \right]$$

Figure.4.5-Position du vecteur  $\vec{v} = v_1 \vec{e}_1$  dans un volume donné.

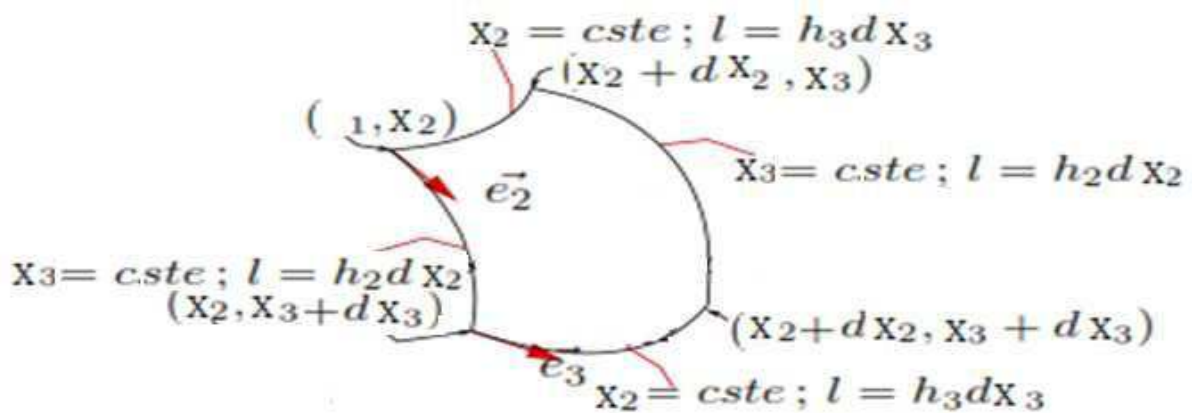
### Rotationnel

Par définition, le rotationnel est la tendance spatiale d'un vecteur à tourner sur une surface unitaire. Pour trouver l'expression du rotationnel, on calcule la circulation d'un vecteur  $\vec{v}$  le long de la courbe située sur une surface  $x_1 = cste$  (voir figure 4.6)

$$\begin{aligned} \text{circ} &= v_2(x_2, x_3)h_2 dx_2 + v_3(x_2 + dx_2, x_3)h_3 dx_3 - v_2(x_2, x_3 + dx_3)h_2 dx_2 \\ &\quad - v_3(x_2, x_3)h_3 dx_3 = \left[ \frac{\partial(h_3 v_3)}{\partial x_2} - \frac{\partial(h_2 v_2)}{\partial x_3} \right] dx_2 dx_3 \end{aligned}$$

Par unité de surface et pour une surface d'orientation quelconque :

$$\vec{\nabla} \times \vec{v}(x_1, x_2, x_3) = \frac{1}{h_1 h_2 h_3} \begin{vmatrix} h_1 \vec{e}_1 & h_2 \vec{e}_2 & h_3 \vec{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ h_1 v_1 & h_2 v_2 & h_3 v_3 \end{vmatrix}$$

Figure .4.6- Circulation d'un vecteur autour d'une courbe située sur une surface  $x_1 = cste$ .