

République Algérienne Démocratique et Populaire
Ministère de l'Enseignement Supérieur Et de la Recherche Scientifique
Université des Sciences et de la Technologie Houari Boumediene



Faculté Des Mathématiques Pures Et Appliquées
Département Recherche Opérationnelle

Mémoire pour l'obtention du magistère recherche opérationnelle
Option : mathématiques discrètes et optimisation

Thème:

**Etude Du Coefficient De Lundberg Dans Le cas
Des processus De Risque Extrême**

Présenté par M^{elle} LAOUAR AMEL
Soutenu le 11/04/07

Membres du jury :

AIDER Méziane	Professeur	USTHB	Président
BOUKHETALA Kamal	Professeur	USTHB	D. de thèse
MOULAÏ Mustapha	Maître de conférence	USTHB	Examineur
OUAFI Rachid	Maître de conférence	USTHB	Examineur
Sabre Rachid	Professeur, ESAESAD,	Dijon (France)	Examineur

Sommaire

Introduction générale	1
Chapitre I : Processus stochastiques	
I-1- Introduction :	3
I-2- Définitions :	3
I-3-Quelques exemples de processus :	4
I-3-1- Processus de comptage :	4
I-3-2- Processus de Markov	5
I-3-3-Processus poisson :	5
I-3-4- Mouvement brownien	6
I-3-5- Processus de Lévy	6
I-4- Processus de diffusion :.....	7
I-4-1-Processus Wienerien :	7
I-4-2-Introduction à la notion de martingale :.....	8
1-4-2-1-Martingale à temps discret :	8
I-4-2-2-Martingale à temps continu	9
I-4-3-Propriétés du mouvement brownien :	9
I-4-4-Variation et extension du mouvement brownien :	10
I-4-5- Processus de diffusion :	11
I-4-5-1-Equations différentielles stochastiques :	11
I-4-5-2-Approximation formelle par un bruit blanc :	12
I-4-5-3-Intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien :	13
I-4-5-4-Construction de l'intégrale stochastique :	13
I-4-5-5-Lemme d' Itô	16
I-4-5-6-L'existence d'une solution à une équation différentielle stochastique :.....	19
I-4-6-Générateur infinitésimal d'une diffusion	20
Chapitre II : Contrôle de processus de diffusion	
II-1-Introduction :.....	21
II-2-Contrôle de diffusion :	22
II-3- Problème de temps d'arrêt optimal :	24
II.4. Programmation dynamique :	24
II-5- Equations d'Hamilton-Jacobi-Bellman	25
II-5-1 Equation parabolique	25
II-5-2 Equation elliptique	26
II-5-3 Interprétation probabiliste	27
II-5-4 Inéquation variationnelle associée au problème de temps d'arrêt optimal	29
II-6- Solutions de viscosité	30
II-6-1- Introduction	30
II-6-2- Solutions de viscosité d'équations elliptiques du deuxième ordre :	30
II-7- Application à l'optimisation dynamique de portefeuille	32
Chapitre III : Assurances et réassurance.	
III-1.Les assurances	39
III-1.1. Information de base sur l'assurance :.....	39
III-1.2.Droit des assurances	40
III-1.3.Classification de l'assurance	41
III-1.4.Les formes de l'assurance	41
III-1.5.Assurance automobile	44
III-2-La Réassurance	45
III-2-1-Rôle de la réassurance :	45
III-2-2-Les formes de réassurance :	46
III-2-3-La nature de la réassurance :	47

CHAPITRE IV : Contrôle stochastique des processus de diffusion en assurance

IV-1 –Introduction	52
IV-2- Analyse du risque.....	52
IV-2.1 Présentation du modèle classique de risque	52
IV-2.2 Généralisation des modèles de risque.....	53
IV-2.3. Distribution des tailles des sinistres	54
IV-2.3.1. les distributions à queue légère	54
IV-2.3.2. les distributions à queue lourde.....	55
IV-2 .4. Résultats de base en assurance	56
IV-2.4 .1.Coefficient relatif de sécurité.....	56
IV-2.4 .2.Générateurs infinitésimaux.....	57
IV-2.5. Probabilité de ruine.....	58
IV-2.6. Majoration de la probabilité de ruine et approximation de Cramér-Lundberg.....	59
IV-3 - Contrôle stochastique et variables de contrôle	62
IV-3.1. Variables de contrôle	62
IV-3.1.1. Investissement optimal.....	62
IV-3.1.2. Réassurance proportionnelle optimale.....	63
IV-3.1.3- Réassurance XL illimitée optimale.....	63
IV-3.1.4. La réassurance XL optimale.....	64
IV-3.1.5. Contrôle optimal de prime.....	64
IV-3.1.6. Nouveaux business optimal.....	65
IV-3.2. Contrôle stochastique.....	65
IV-3.2.1 Fonctions Objectives.....	66
IV-3.2.2 Générateurs infinitésimaux.....	66
IV-3.2.3. L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman.....	67
IV-3.2.4. Théorème de vérification.....	69
IV-3.2.5 Les étapes de la solution.....	71
IV-4- Investissement Optimal pour l'assureur	71
IV-4.1. L'équation HJB	71
IV-4.2 Existence d'une solution.....	73
IV-4.3 Taille de sinistre exponentielle.....	75
IV-5-Réassurance optimale et new business optimal.....	77
IV-5.1 Réassurance proportionnelle optimale	78
IV-5.3. Réassurance XL illimitée optimale	79
IV-5.3 Optimale XL réassurance.....	80
IV-5.4 New business optimal.....	81
IV-6 –Stratégies et fonctions valeurs le cas asymptotique	81
IV-6.1 Investissement optimal : sinistres exponentielles.....	81
IV-6.3 Investissement optimal : sinistres à forte intensité.....	81
IV-6.4 Réassurance optimale.....	82
IV-7- Contrôle stochastique par l'investissement et la réassurance.....	83
IV-7-1-L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.....	85
IV-7-2- Théorème de vérification.....	88

CHAPITRE V : Théorie de contrôle par investissement optimal Et applications numériques

V-1-Introduction :.....	89
V- 2 – Contrôle par minimisation de la probabilité de ruine.....	89
V-2-1.L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman du problème de control :	90
V-2-2.Solution numérique de l'équation HJB.....	91
V-2-3.Résolution pour des sinistres exponentiels	91
V-2-4-Application numérique	93
V-2-5.Probabilité de survie optimale :	93
V-2-6-Influences des différents paramètres :	95

V-2-6-1-Influence du taux d'intérêt :	95
V-2-6-2-Influence du rendement moyen instantané μ :	96
V-2-6-3-Influence de la volatilité σ :	97
V-3- Contrôle par maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse	98
V-3-1- L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman	98
V-3-2- Stratégie d'investissement optimale :	98
V-3-3-probabilité de ruine	99
V-3-4- Coefficient d'ajustement	103
V-4-Approximation de diffusion	106
V-4-1-maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse	106
V-4-2- minimisation de la probabilité de ruine	109
V-4-2-1-théorème de vérification	110
V-4-2-2 Coefficient d'ajustement	112
V-5-comparaison des probabilités de survie	114
V-6-conclusion	115
- Conclusion générale	116
- Annexes	118

Remerciements

Tout d'abord, je tiens à remercier le professeur Boukhetala Kamel, mon directeur de thèse, pour son soutien, ses orientations et ses encouragements permanents, qui ont été précieux. Je lui suis également reconnaissante de m'avoir initié à ce domaine, et fourni les moyens techniques nécessaires à l'achèvement de cette thèse.

Je remercie particulièrement les membres du Jury, le professeur Aider Méziane. Les maîtres de conférence Moulaï Mustapha et Ouafi Rachid et le professeur Sabre Rachid, qui m'ont fait l'honneur d'assister à ma soutenance et d'avoir accepté d'examiner et de juger mon travail.

Un grand merci à Hafsa, Karima, Hamid et tout le personnel administratif de la faculté des mathématiques de l'USTHB, ainsi qu'à toutes mes amies.

Je tiens à remercier du fond du cœur, toute ma famille, ma sœur et son mari, mes frères, ma tante Kerireme Saliha.

Enfin j'exprime toute ma gratitude et ma reconnaissance à mes parents, qui m'ont soutenus tout au long de mes études et qui ont contribué à créer un environnement favorable, sans lequel ce travail n'aurait pu être mené à son terme.

Introduction générale

Depuis le début des années 1970, les formes de l'intermédiation financière connaissent de profondes mutations. L'extension du rôle des marchés financiers constitue un témoin privilégié de ces évolutions qui accompagnent le développement des technologies de l'information, la déréglementation et la globalisation de l'économie. D'abord anglo-saxonne, cette révolution financière a rapidement concerné l'Europe continentale et touche aujourd'hui l'ensemble de la planète. En substituant une logique de marché à l'intermédiation bancaire traditionnelle, elle a contraint les assurances, les entreprises et surtout les banques à évoluer et a vu de nouveaux participants, tels les investisseurs institutionnels, émerger. La « finance », ainsi que « les assurances » sont aujourd'hui les secteurs les plus dynamiques de l'économie et offrent de nombreuses et attrayantes opportunités de recherches.

La vocation première de l'assureur est d'accepter des risques. Pour ce faire, il doit gérer ses actifs. En effet, l'assureur cherche à la fois de faire fructifier les provisions techniques (capital d'emprunt), constituées avec la prime versée par ses assurés et son capital propre. Dès lors qu'il accepte de souscrire une couverture, il s'expose à un risque technique ([20]), qui peut sinon mettre en péril son entreprise, du moins compromettre sa capacité à tenir l'engagement contracté. Or, le placement des actifs comporte un risque ([24],[56]), qui lui aussi, constitue une menace pour la compagnie. Les fonds propres visent à amortir le choc d'une fluctuation inattendue des résultats. Mais cela ne suffit pas, il faut donc une bonne gestion de risque, et cela peut se faire par le contrôle optimal du bilan de la compagnie d'assurance.

La théorie du contrôle optimale repose sur la construction d'un objet assez complexe, « **un processus contrôlé** » par un second processus aléatoire, appelé « contrôle » ou « stratégie ». On cherche typiquement à obtenir la stratégie optimale, qui minimise en espérance, un certain coût (occasionné par le choix de la stratégie, représentée par une fonctionnelle de la trajectoire contrôlée), sous certaines contraintes ([35],[41], [48]).

L'objet central de la théorie du contrôle optimal stochastique est « **la fonction valeur** » qui représente le coût minimal que l'on peut espérer atteindre parmi toutes les stratégies possibles. Cette fonction contient toute l'information du problème. Elle est solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire de second ordre, appelée l'équation « **d'Hamilton-Jacobi-Bellman** » (HJB). Cette dernière n'admet pas en général une solution explicite, au sens classique. Mais grâce à la programmation dynamique dont le principe est fréquemment utilisé en théorie du contrôle, et qui est initialement dû à Bellman ([02]) dans le cas de problèmes de contrôle discrets. L'équation (HJB) permet de faciliter l'approximation numérique de la fonction valeur et du processus de contrôle optimal.

L'objectif de notre travail est d'étudier les problèmes de contrôle optimal, appliqué à l'assurance ([24],[56]). Ces problèmes sont abordés par la méthode de la programmation dynamique qui permet d'obtenir une caractérisation analytique de la fonction valeur du problème d'optimisation comme solution de l'équation HJB.

Pour commencer, nous allons introduire dans le chapitre I des généralités sur les processus aléatoires, plus précisément les processus de diffusion qui sont à la base de la modélisation des problèmes financiers et qui sont solution de certaines équations différentielles stochastiques. Nous parlerons du mouvement Brownien géométrique qui est en fait un cas particulier du processus de diffusion utilisé dans le modèle de Black et Scholes ([42],[43]).

Nous passerons dans le chapitre II à des processus de risque plus compliqués, les processus stochastique contrôlés, qui sont solutions d'équations différentielles stochastique contrôlées, et on définit un problème de contrôle optimal. On montre ensuite un principe de la programmation dynamique, qui permet de faire le lien entre le problème d'optimisation et une équation aux dérivées partielles (EDP) de type Hamilton-Jacobi-Bellman. ([35]).

Nous présenterons dans le chapitre III des concepts et des définitions de base concernant l'assurance et la réassurance. Puis, nous passerons dans chapitre IV à la modélisation mathématique en assurance, où nous commencerons par une introduction à l'analyse du risque en assurance, pour passer après au problème de contrôle stochastique optimale, où nous présenterons les étapes du contrôle pour une seule variable de contrôle, avec comme objectif la minimisation de la probabilité de ruine, i.e. notre fonction valeur sera la probabilité de ruine ou de survie, nous terminerons le chapitre par un exemple de contrôle stochastique par deux variables de contrôle à la fois, qui sont l'investissement et la réassurance, tout en suivant les mêmes étapes données dans chapitres IV.([24]).

Finalement, après avoir défini le problème de contrôle stochastique optimal en assurance, nous passerons dans le chapitre V, à un exemple numérique pour des sinistres exponentiellement distribués, où nous verrons trois approches différentes pour la détermination de la stratégie d'investissement optimale. Nous commencerons par la minimisation de la probabilité de ruine comme critère d'optimisation, dans ce cas la stratégie d'investissement optimale sera déterminée par la discrétisation de l'équation HJB du problème correspondant, ainsi que la probabilité de survie optimale du problème([67]). Puis nous passerons à un autre critère, qui est la maximisation de l'utilité de la richesse, où dans ce cas nous avons une solution exacte de la stratégie d'investissement optimale pour une utilité exponentielle (CARA)(voir [14],[18],[19]). Nous finirons par présenter l'approximation de diffusion, où le processus de Cramer Lundberg est approximé par un mouvement brownien avec dérive. Et nous terminerons par une comparaison, qui nous permettra à la fin d'avoir une stratégie qui tient compte de la maximisation de l'utilité de la richesse, ainsi que de la minimisation de la probabilité de ruine[07].

L'objectif de notre étude est de faire connaître et de reprendre la notion de contrôle stochastique à travers les modèles théoriques qui seront utilisés, ainsi que l'implémentation des algorithmes développés pour l'estimation et les calculs. L'implémentation sera faite en Maple.

CHAPITRE I

PROCESSUS STOCHASTIQUE

I-1-Introduction

La théorie de processus stochastiques est la théorie du 20^e siècle, sa première apparition fut à travers des applications en finance et en assurance, qui ont montré quelques ressemblances remarquables.

En 1900, Bachelier a écrit dans sa fameuse thèse: « Si, à l'égard de plusieurs questions traitées dans cette études, j'ai comparé les résultats de l'observation à ceux de la théorie, ce n'était pas pour vérifier des formules établies pour les méthodes mathématiques, mais pour montrer seulement que le marché à son issu obéit à une loi qui le domine, la loi des probabilités. », cette thèse est intitulée « La théorie de la spéculation », et le point le plus important de cette thèse est que Bachelier a montré que les marchés financiers sont dominés par les lois des probabilités, et plus précisément, le comportement irrégulier des données de la bourse (stockmarket) est très proche au mouvement de petites particules suspendus dans un fluide qui est associés à un des processus étudié avant par Einstein et Schmwowski, et de la le lien entre le mouvement brownien et la finance est né. Ça a prit 50 ans aux économistes pour comprendre l'importance de ce lien; cependant, aujourd'hui personne ne doute de la nature fondamentale de cette observation.

L'étude des processus aléatoires constitue l'un des objectifs les plus profonds de la théorie des probabilités. Elle soulève des problèmes mathématiques intéressants et souvent très difficiles. Ce chapitre présente quelques aspects des processus aléatoires essentiels dans les mathématiques de la finance et de l'assurance du fait de leur fréquence d'occurrence dans les applications : processus de poisson, mouvement brownien et intégrale stochastique...

I-2- Définitions :

Comme un processus déterministe, un processus aléatoire se décrit par une fonction $\xi(\theta)$ (à valeurs réelles, complexes, ou vectorielles), où θ l'argument de la fonction, parcourt un ensemble Θ , la fonction $\xi(\theta)$ observée au cours d'une expérience assujettie à certaines conditions Y s'appelle fonction échantillonnée ou réalisation du processus aléatoire.

Un processus aléatoire (processus stochastique) est donc une famille de variables aléatoires (d'aléas numériques) $\xi(\theta)$ dépendant du paramètre $\theta : \{\xi(\theta), \theta \in \Theta\}$

Si l'ensemble θ est arbitraire, il est plus commode de remplacer le terme processus aléatoire par fonction aléatoire (ou suite stochastique), réservant la dénomination processus aléatoire aux cas où Θ est continu (exemple le paramètre θ figure le temps). Si l'argument de la fonction aléatoire est une variable tridimensionnelle, cette fonction est dite champ aléatoire. Si Θ est discret on parle plus volontiers de suite aléatoire ou de processus aléatoire à temps discret quand $\theta = t$ (le temps).

Définition 1.1 : (Processus stochastique à temps continu)

Un processus stochastique à temps continu et à valeurs dans un espace muni d'une tribu F , est une famille $(X_t)_{t \in T}$ de variables aléatoires définies sur un espace de probabilité (Ω, A, P) à

valeurs dans (E, F) . Dans la pratique l'indice t représente le temps, donc $T = \mathbb{R}^+$

Un processus stochastique peut être considéré aussi comme une fonction aléatoire mesurable définie comme suit :

$$X: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathfrak{R}$$

Le processus $X(t, \omega)$ décrit l'évolution chronologique du comportement aléatoire d'un certain phénomène, abusivement, il est parfois noté $X(t)$ ou X_t .

Définition 1.2 (filtration)

Soit un espace de probabilité (Ω, A, P) . On appelle filtration, une famille $(F_t)_{t \in T}$ croissante de sous tribu de A , où F_t représente l'information dont on dispose à l'instant t .

Définition 1.3 (processus adapté) : On dit qu'un processus $(X_t)_{t \in T}$ est adapté à F_t , si pour tout t , X_t est F_t -mesurable. Autrement dit, la filtration est la description mathématique de l'ensemble d'information dont l'observateur dispose à l'instant t . Cette information permet, à cet observateur, d'attribuer des probabilités de manière cohérente aux événements

Définition 1.4 : Un processus (X_t) tel que $X_0 = 0$ est à accroissements indépendants si :

$\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$, les variables aléatoires

$$X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$$

sont indépendantes.

Définition 1.5 Un processus à accroissements indépendants est à accroissements stationnaires si la loi de l'accroissement $(X_{t+s} - X_t)$ ne dépend pas de t , pour tout $t \geq 0$.

I-3-Quelques exemples de processus :

Les processus aléatoires que nous allons citer dans ce chapitre ont un large champ d'application dans la modélisation de systèmes réels. Parmi les plus élémentaires des processus, nous trouvons les processus de comptage définis ci-après

I-3-1-Processus de comptage :

Un processus aléatoire $\{N_t; t \geq 0\}$ à valeurs entières est un processus de comptage si

i) $N_0 = 0$

ii) $\forall s \leq t ; N_s \leq N_t$.

Les trajectoires d'un tel processus sont donc des fonctions en escalier dont les marches sont de taille aléatoire. Les processus de comptage peuvent modéliser de nombreux phénomènes. Si l'on s'intéresse au nombre d'accès de clients à un serveur durant une période $(0, T)$, on observe en fait un processus de comptage sur cet intervalle de temps. De même, le nombre de particules détectées par un capteur ou le nombre de buts marqués lors d'un match de football peut être modélisé par des processus de comptage.

I-3-2- Processus de Markov :

Ce sont des processus en temps continu. Ils se caractérisent par la propriété de mémoire à court terme ; i.e. Connaissant l'état du processus au temps présent, la prédiction de l'état futur se fait indépendamment du passé du processus.

Définition 1.6 : Soit $\{X_t, t \geq 0\}$ un processus aléatoire à valeurs entières.

On dit que le processus $\{X_t, t \geq 0\}$ est un processus de Markov si, pour tout $s, t \geq 0, i, j \in \mathbb{N}$ et $x_u \in \mathbb{N}, 0 \leq u < s,$

$$P(X_{t+s} = j / X_s = i, X_u = x_u, \forall 0 \leq u < s) = P(X_{t+s} = j / X_s = i)$$

En d'autres termes, un processus de Markov est un processus ayant la propriété suivante. La loi conditionnelle de la variable future X_{t+s} sachant l'état présent X_s et toute l'histoire du processus jusqu'au temps s ne dépend que du présent et est indépendante du passé.

Un exemple de processus de Markov en temps continu est le processus de Poisson (défini ci-dessous). Si l'on pose pour état au temps t le nombre total d'arrivées à cet instant, le processus de Poisson est un processus de Markov à valeurs dans \mathbb{N} et qui n'effectue des sauts que de l'état n vers l'état $(n + 1), n \geq 0$. Un tel processus s'appelle un processus de naissance pure.

I-3-3- I-3-4-Processus poisson

Le processus stochastique de comptage $\{N_t\}$ est un processus de poisson de taux $\lambda > 0$ si :

- (a) $N(0) = 0$ p.s.,
- (b) N est à accroissements indépendants et stationnaires,
- (c) pour tout $0 \leq s < t < \infty : N(t) - N(s) \sim POIS(\lambda(t - s)),$ i.e.

$$P(N(t) - N(s) = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{(\lambda(t-s))^k}{k!}, k \in \mathbb{N}$$

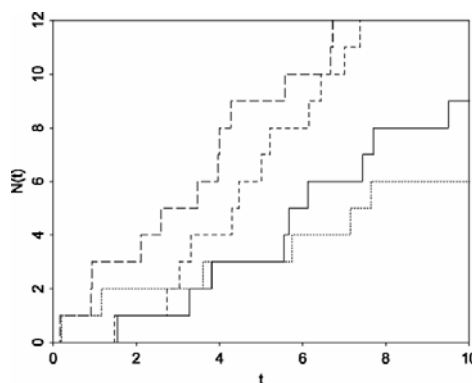


Figure 1.1 : Simulation de processus de poisson homogène d'intensité $\lambda = 1$.

Dans les application en assurance, $N(t)$ représente le nombre de sinistre dans l'intervalle de temps $[0, t]$ pour un portefeuille bien défini.

I-3-4- Mouvement brownien :

Définition 1.7 :

Soit le processus stochastique $\{W(t), t \geq 0\}$, défini sur la base $(\Omega, (a_t)_{t>0}, a, P)$, où $(a_t)_{t>0}$ est une filtration, $W(t)$ est un mouvement brownien s'il vérifie les conditions suivantes :

- a) $W(0)=0$, et $W(t)$ est continu pour $t = 0$.
- b) $W(t)$ est un processus à accroissements indépendants.
On suppose que $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, alors les accroissements $W(t_1)-W(t_0), \dots, W(t_n)-W(t_{n-1})$, sont mutuellement indépendants et stationnaires.
- c) Tous les accroissements $W(t+s)-W(s)$ sont normalement distribués, de moyenne 0, et de variance $\sigma^2 t$, avec σ paramètre fixé.
- d) Pour presque tout $\omega \in \Omega$, les fonctions $W_t = W_t(\omega)$, sont continues. Ce qui signifie aussi que W_t est un processus presque sûrement à trajectoire continues.

Cette définition permet de caractériser la loi de la variable W_t (pour la démonstration voir [57]).

Nous remarquons en premier, que la définition ci-dessous présente plein de similitude avec la définition du processus de poisson (I-3-3), les deux processus sont des processus de Lévy, et la plus importante différence se trouve dans le comportement des trajectoires, le mouvement brownien à des trajectoires continues, tandis que le processus de poisson est comme un processus de comptage, un processus de saut (voir figure 1.1).

I-3-5-Processus de Lévy :

Définition 1.8 :

Un processus $\{X(t), t \geq 0\}$ sur IR^d ($X_t(\Omega, F) \rightarrow IR^d$), est un processus de Lévy s'il satisfait les conditions suivantes :

- 1) Pour tout choix de $n \geq 1$ et $0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_n$,
Les variables aléatoires $X_{t_0}, X_{t_1} - X_{t_0}, X_{t_2} - X_{t_1}, \dots, X_{t_n} - X_{t_{n-1}}$ sont indépendantes.
 - 2) $X_0 = 0$ ps.
 - 3) La loi de $X_{s+t} - X_s$ ne dépend pas de s .
 - 4) (X_t) est continu en probabilité, c'est à dire que pour tout $t \geq 0$ et pour tout $\varepsilon > 0$

$$\lim_{s \rightarrow t} P[|X_s - X_t| > \varepsilon] = 0$$
 - 5) Il existe un ensemble $\Omega_0 \in F$ tel que $P[\Omega_0] = 1$ et pour tout $\omega \in \Omega_0$, $X_t(\omega)$ est continu à droite en tout $t \geq 0$ et a une limite à gauche en tout $t > 0$.
- Un processus aléatoire vérifiant les conditions (1) à (4) (on n'impose plus d'hypothèses de continuité) est appelé processus de Lévy en loi. Voir [74] et [75].

Remarque : Un processus de Lévy en loi décrit de la manière la plus générale une marche aléatoire à paramètre réel sur \mathbb{R}^d : le mouvement après l'instant t ne dépend que de la position à cet instant, et la loi d'évolution est invariante par translation d'espace (homogénéité spatiale) et de temps (homogénéité temporelle).
indépendantes.

I-4- Processus de diffusion :

Ce sont des processus markoviens continus définis sur un espace euclidien \mathbb{R}^m m dimensionnel. Ces processus n'ont pas été entièrement décrits à ce jour. Les processus de cette nature peuvent servir de modèle probabiliste à la diffusion.

On se propose, tout d'abord, d'étudier le processus du mouvement brownien comme modèle de diffusion en milieu homogène.

I-4-1-Processus Wienerien :

Historique :

Le wienerien s'appelle également processus du mouvement brownien, ceci pour la raison suivante : Le botaniste Robert Brown (1827) avait observé le mouvement incessant et irrégulier de petites particules de pollen (de la taille d'un micron.) Dans un liquide sous l'influence des chocs avec les molécules du liquide en agitation thermique.

On dit qu'une particule en suspension dans un fluide est en mouvement brownien lorsque le rapport entre sa masse et la masse des molécules est grand devant l'unité. L'idée selon laquelle le mouvement de la particule brownienne, serait une conséquence du mouvement des molécules du fluide s'est répandue dans la deuxième moitié du 19^e siècle. C'est Albert Einstein, en 1905 qui a donné la première explication théorique claire de ce phénomène. Il a alors construit un modèle mathématique de ce dernier, ce qui a permis d'établir les fondements de la théorie atomique de la matière. Cependant, juste avant Einstein et dans tout un autre contexte (la description de l'évolution des cours de la bourse de Paris), Bachelier (1900) avait déjà obtenu la loi du mouvement brownien dans sa thèse intitulée « la théorie de la spéculation ».

Le mouvement brownien est couramment utilisé aujourd'hui dans les modèles de mathématiques financières. Il a joué un rôle important en mathématique, puisque historiquement c'est pour représenter la position d'une particule brownienne qu'un processus stochastique a été construit pour la première fois par Wiener (1923). Voir[57].

Les phénomènes de fluctuation mis en évidence dans le mouvement brownien sont en fait universellement répandus. Les concepts et les méthodes mis en œuvre dans l'étude du mouvement brownien ne sont pas limités à ce cas, mais sont généraux et applicables à une large classe de phénomènes physiques.

Définition 1.9 (mouvement brownien standard) : Un mouvement brownien standard $\{W_t, t > 0\}$ est un processus stochastique adapté construit sur un espace probabilisé filtré $\{\Omega, F, \mathcal{IF}, P\}$ tel que : (MB1) $\forall \omega \in \Omega, W_0(\omega) = 0$.

(MB2) $\forall 0 \leq t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables aléatoires $W_{t_1} - W_{t_0}, W_{t_2} - W_{t_1}, \dots, W_{t_k} - W_{t_{k-1}}$ sont indépendantes et stationnaires.

(MB3) $\forall s, t \geq 0$ tels que $s < t$, la variable $W_t - W_s$ est de distribution normale, d'espérance 0 et de variance $t - s$ ($W_t - W_s \sim N(0, t - s)$)

(MB4) $\forall \omega \in \Omega$, la trajectoire $t \rightarrow W_t(\omega)$ est continue P.p.s.

En général, la filtration utilisée est $\mathcal{IF} = \{F_t, t \geq 0\}$ ou $F_t = \sigma\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$ est la plus petite tribu pour laquelle les variables aléatoires $\{W_s, 0 \leq s \leq t\}$ sont mesurables, contenant les ensembles de mesures nulles. voir [38]

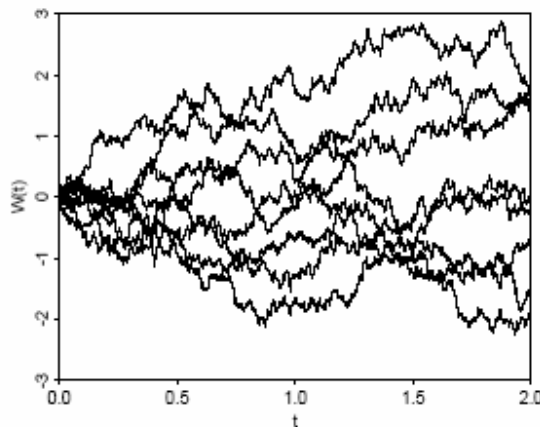


Figure 2 : simulation du mouvement brownien standard

I-4-2-Introduction à la notion de martingale :

Une martingale est un jeu de hasard. Elle représente une manière de jouer tendant à ramener, en un ou plusieurs coups et par une augmentation progressive, le montant de sa perte, plus un certain bénéfice.

I-4-2-1-Martingale à temps discret :

Définition 1.8 : Soit (Ω, F, P) un espace et $\{F_n, n \geq 0\}$ une filtration sur cet espace.

Une suite $(M_n, n \geq 0)$ de variables aléatoires réelles est une F_n -martingale si :

- $(M_n, n \geq 0)$ est F_n -adaptés, et, pour tout $n \geq 0$, $E(|M_n|) < +\infty$.
- Pour tout $n \geq 0$:

$$E(M_{n+1} / F_n) = M_n \quad (1.1)$$

Remarque 1.1 : Cette définition signifie que la meilleure prévision de M_{n+1} compte tenu de l'information disponible à l'instant n (c'est-à-dire F_n) est donnée par M_n .

Remarque 1.2 : Notons que (1.1) est équivalent à dire que pour tout $p \geq 0$:

$$E(M_{n+p} / F_n) = M_n.$$

En effet, en utilisant le fait que la suite des tribus F_n est croissante on a :

$$E(M_{n+2} / F_n) = E(E(M_{n+2} / F_{n+1}) / F_n) = E(M_{n+1} / F_n) = M_n$$

Remarque 1.3 : Si $(M_n, n \geq 0)$ est une martingale, alors :

$$E(M_{n+1}) = E(E(M_{n+1} / F_n)) = E(M_n)$$

L'espérance d'une martingale est donc constante au cours du temps.

I-4-2-2-Martingale à temps continu

Définition 1.10 : Soient Soit $\{\Omega, F, IF, P\}$ un espace filtré où $IF = \{F_t, t \geq 0\}$ une filtration sur cet espace. Soit $(M_t, t \geq 0)$ un processus adapté à cette filtration. On dit que $(M_t, t \geq 0)$ est une martingale par rapport à la filtration $\{F_t, t \geq 0\}$ si :

$$(M1) \quad \forall t \geq 0, E_p[M_t] < \infty.$$

$$(M2) \quad \forall t > 0, M_t \text{ est } F_t\text{-mesurable.}$$

$$(M3) \quad \forall s, t \geq 0 \text{ tel que } s \leq t, E_p[M_t / F_s] = M_s.$$

En particulier lorsque M_t est une martingale, on a, pour tout t , $E(M_t) = E(M_0)$.

Proposition 1.1 : Si W_t un mouvement Brownien de filtration naturelle F_t^W , alors les processus :

$$W_t, W_t^2 - t \text{ et } \exp\left(\sigma W_t - \frac{\sigma^2}{2} t\right) \text{ sont des } F_t^W\text{-martingales.}$$

I-4-3-Propriétés du mouvement brownien : voir [76]et[38]

Proposition 1.2 : Le mouvement brownien est une martingale.

Ceci implique que l'état du système n'est pas défini en fonction de l'état du système à des instants antérieurs, mais est aléatoire, et obéit à une certaine loi de probabilité, ceci peut s'exprimer avec la formule suivante :

Soit $t > t_0 > t_1 > \dots > t_n$, on alors :

$$P[W(t) \leq w / W(t_0) = w_0, W(t_1) = w_1, \dots, W(t_n) = w_n] = P[W(t) \leq w / W(t_0) = w_0]$$

Proposition 1.3 :Le mouvement brownien est un processus markovien.

Ce qui implique que l'état du système n'est pas défini en fonction de l'état du système à des instants antérieurs, mais est aléatoire, et obéit à une certaine loi de probabilité, ceci peut s'exprimer avec la formule suivante :

Soit $t > t_0 > t_1 > \dots > t_n$, on alors :

$$P[X_t \leq x / X_{t_0} = x_0, \dots, X_{t_n} = t_n] = P[X_t \leq x / X_{t_0} = x_0]$$

Proposition 1.4 :

Les trajectoires du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$ ne sont pas à variation bornée.

Intuitivement, ce dernier résultat signifie que chacune des trajectoires du mouvement brownien sur l'intervalle $[0, T]$ est de longueur infinie.

I-4-4-Variation et extension du mouvement brownien : voir [40]

Nous pouvons faire différentes modifications du mouvement brownien, qui conduisent à des processus stochastiques plus complexes, nous allons citer les plus importants, et ceux qui intéressent notre travail :

A/ Mouvement brownien avec dérive :

La généralisation la plus simple du processus de Wiener est le mouvement brownien avec dérive.

Soit $\tilde{W}(t)$ un processus du mouvement brownien standard. Le processus stochastique qui aura la distribution suivante est un mouvement brownien avec dérive :

$$Y(t) = \tilde{W}(t) + \mu t \text{ ou bien } dy = \mu dt + \sigma dw.$$

Où dw est l'accroissement du processus de Wiener, μ est une constante appelée paramètre de dérive.

B/ Processus d'Itô :

Nous avons déjà mentionné que le processus de Wiener pouvait servir à construire des modèles pour une large catégorie de variables stochastiques. Pour cela nous allons examiner des cas particuliers et importants, qui sont la généralisation du mouvement brownien avec dérive.

Soit $\{X(t), t \geq 0\}$, un processus stochastique représenté par l'équation suivante :

$$dx_t = \mu(x, t)dt + b(x, t)dw_t,$$

Où dw est l'accroissement du mouvement brownien, et $\mu(x, t)$ et $b(x, t)$ sont deux fonctions (non aléatoires).

Alors : $X(t)$ est appelé processus d'Itô.

Les nouvelles caractéristiques sont que la dérive et le coefficient de variation sont des fonctions de l'état actuel du système et du temps.

$\mu(x, t)$ et $b(x, t)$ représentent respectivement la proportion instantanée de la dérive et de la variance.

C/ Mouvement brownien géométrique :

Le cas le plus important du processus d'Itô est le mouvement brownien géométrique, qui est fréquemment utilisé pour modéliser plusieurs variables économiques et financières, et il est défini par : $\mu(x, t) = \mu x$ et $b(x, t) = \sigma x$, où μ et σ sont des constantes.

L'équation devient :

$$dx = \mu x dt + \sigma x dw$$

Définition 1.11:

Soit $\{Y(t), t \geq 0\}$ un processus du mouvement brownien avec dérive μ et de coefficient de diffusion σ^2 , alors le processus défini par :

$$X(t) = e^{Y(t)}, t \geq 0$$

est appelé mouvement brownien géométrique défini sur $[0, +\infty[$

(Pour plus de détails, voir [31] et [42]).

I-4-5- Processus de diffusion :

Ce sont des processus définis par des équations différentielles stochastiques, que nous allons définir et déterminer, pour cela on se propose d'étudier, tout d'abord un processus de diffusion sur un espace euclidien à une dimension et déterminer son équation différentielle stochastique.

I-4-5-1-Equations différentielles stochastiques :

Soit : x_t la coordonnée d'une particule assez petite en suspension dans un liquide à l'instant t .

Si l'on néglige l'inertie de la particule, on peut admettre que le déplacement de la particule est la résultante de deux composantes : un déplacement « centré » dû à la vitesse macroscopique du liquide, et les fluctuations provoquées par l'agitation thermique des molécules du liquide.

Soit : $a(t, x)$ vitesse du mouvement macroscopique du liquide au point x à l'instant t .

On supposera que la composante fluctuative est une variable aléatoire dont la répartition dépend de la position x de la particule, de l'instant t ou est considéré le déplacement de la durée Δt , de l'intervalle pendant lequel est envisagé le déplacement (On admet que la valeur moyenne de ce déplacement est nulle indépendamment des valeurs prises par $(t, x_t, \Delta t)$, le déplacement de la particule s'écrit alors approximativement.

$$x_{t+\Delta t} - x_t = a(t, x_t)\Delta t + \xi_{t, x_t, \Delta t} \quad ; \quad (1.2)$$

Si $a(t, x)$ est nulle, et la répartition de $\xi_{t, x_t, \Delta t}$ ne dépend pas de x comme nous l'avons admis en étudiant le mouvement brownien, alors $E(\xi_{t, \Delta t}^2) = \lambda \Delta t$.

Le processus est homogène puisqu'il semble naturel d'admettre que de petites variations de t et de x sont pratiquement sans effet sur les propriétés du milieu, on supposera donc que :

$$\xi_{t, x_t, \Delta t} = \sigma(t, x) \cdot \xi_{t, \Delta t}$$

Où $\sigma(t, x)$ caractérise les propriétés du milieu au point x à l'instant t , et $\xi_{t, \Delta t}$ la valeur de l'accroissement du processus du mouvement brownien : $W(t + \Delta t) - W(t)$.

On a donc l'approximation suivante pour l'accroissement : $x_{t+\Delta t} - x_t$

$$x_{t+\Delta t} - x_t \approx a(t, x_t)\Delta t + \sigma(t, x_t)[W(t + \Delta t) - W(t)] \quad ; \quad (1.3)$$

Pour que cette formule soit exacte il faut comme on le fait ordinairement en analyse, remplacer les accroissements par les différentielles, on obtient l'équation différentielle suivante :

$$dx_t = a(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dW_t \quad ; \quad (1.4)$$

Qui peut servir de point de départ à la définition du processus de diffusion.

A noter que l'équation (1.4) ne peut encore être interprétée de façon stricte. En effet, la quantité $\frac{w(t+\Delta t)-w(t)}{\Delta t}$, si $w(t)$ est processus du mouvement brownien admet une répartition normale d'espérance mathématique 0 et de variance $\frac{1}{\Delta t}$. Donc elle est continue non différentiable, comme

$w(t)$ n'a pas de dérivées, la définition usuelle de la différentielle dw_t n'a pas de sens. ([57]).

D'une manière plus générale on appelle processus de diffusion un processus défini par l'intégrale stochastique suivant :

$$x_t = x_0 + \int_0^t a(s, x_s) ds + \int_0^t \sigma(s, x_s) dw_s ;$$

Où la solution à cette intégrale est un processus de diffusion.

On écrit souvent l'équation ci dessus sous sa forme différentielle plus compacte :

$$dx_t = a(t, x_t)dt + \sigma(t, x_t)dw_t ;$$

Appelée équation différentielle stochastique.

La partie $a(t, x_t)$ est appelée Drift ou terme de tendance ou bien coefficient de transfert, et correspond à la moyenne instantanée.

La partie $\sigma(t, x_t)$ est appelée volatilité ou terme de diffusion et correspondant à l'écart type instantané.

$\sigma^2(t, x_t)$ = coefficient de diffusion.

I-4-5-2-Approximation formelle par un bruit blanc : voir [5]

Définition d'un bruit blanc :

Un processus $\{Z_t\}_{t \geq 0}$ est dit bruit blanc (White noise) d'espérance nulle et de variance σ^2 , et on note $\{Z_t\}_{t \geq 0} \rightarrow WN(0, \sigma^2)$ si et seulement si :

$$E(Z_t) = 0 \quad \forall t \in T \subset \mathfrak{R}$$

$$\gamma_z(h) = cov(Z_t, Z_{t+h}) = \begin{cases} \sigma^2 & \text{si } h = 0 \\ 0 & \text{si } h \neq 0 \end{cases}$$

Si les variables Z_t sont indépendantes et identiquement distribuées.

Par analogie avec le bruit blanc en temps discret, on cherche à définir un processus stochastique $\{B_t\}_{t \geq 0}$ vérifiant $\forall t > 0$ et $\forall h > 0$:

$$E(B_t) = 0$$

$$E(B_t, B_{t+h}) = \delta_0(h)$$

où δ_0 est la mesure de Dirac en 0.

Un tel processus n'existe pas ; son idéalisation est la dérivée d'un mouvement brownien :

Pour $\Delta t > 0$, considérons le processus :

$$C_t = \frac{W(t+\Delta t) - W(t)}{\Delta t}$$

Il est facile de montrer grâce aux propriétés du mouvement brownien de dimension 1 que :

$$E(C_t) = 0$$

$$E(C_t C_{t+h}) = \frac{1}{\Delta t} \left(1 - \frac{|h|}{\Delta t} \right) \mathbb{1}_{[0,1]} \left(\frac{|h|}{\Delta t} \right)$$

Lorsque $\Delta t \rightarrow 0$: $E(C_t C_{t+h}) \rightarrow \delta_0(h)$. Il est donc clair que la dérivée formelle $\frac{dW_t}{dt}$ a les propriétés d'un bruit blanc gaussien. On peut donc considérer l'approximation du bruit blanc en terme de covariance : $B_t = \frac{dW_t}{dt}$.

L'équation (1.4) peut s'écrire comme suit :

$$\frac{dX_t}{dt} = a(t, X_t) + \sigma(t, X_t) B_t \tag{1.6}$$

I-4-5-3-Intégrale stochastique par rapport à un mouvement brownien :

L'intégrale stochastique fut introduit en mathématique dans les années 40 par Itô, à l'époque c'était une nouvelle espèce d'intégrale, qui avait pour but de résoudre (ou détourner) les difficultés rencontrées par Bachelier dans l'application du mouvement brownien (pour la description de l'évolution des cours sur la bourse de paris en 1900).

Nous sommes à présent conduit à donner un sens à (1.6) sous forme d'intégrale. Cette intégrale est appelée intégrale stochastique par rapport au mouvement Brownien.

Nous allons voir les conditions d'existence de ce type d'intégrale et les hypothèses qui permettent d'affirmer qu'il s'agit d'une martingale.

On a :

$$X_t = X_0 + \int_0^t a(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_t, \quad t \in [0, T] \tag{1.7}$$

Si X_t est défini sur la base $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$ et si

$$P \left[\int_0^T |a(s, X_s)| ds < +\infty \right] = 1 \quad \text{et} \quad P \left[\int_0^T \sigma^2(s, X_s) ds \right] = 1$$

Alors l'équation (1.7) est appelée «équation différentielle d'Itô». Le dernier terme de celle ci s'appelle intégrale stochastique de Itô, on intégrale stochastique par rapport au mouvement brownien.

I-4-5-4-Construction de l'intégrale stochastique

Soit $(W_t)_{t \geq 0}$ un F_t -mouvement Brownien sur un espace probabilisé filtré $(\Omega, F, (F_t)_{0 \leq t \leq T}, P)$. Nous

allons donner dans ce paragraphe, un sens précis à l'intégrale stochastique $\int_0^t f(s, \omega) dW_s$ pour une

classe de processus $f(s, \omega)$ adaptés à la filtration $(F_t)_{0 \leq t \leq T}$.

On va commencer par construire l'intégrale stochastique sur un ensemble de processus dits élémentaires (ou processus en escalier). Dans toute la suite, on fixe T un réel strictement positif et fini.

Définition 1.12 : On appelle processus élémentaire $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de la forme :

$$H_t(\omega) = \sum_{i=1}^p \phi_i(\omega) \mathbf{1}_{[t_{i-1}, t_i]}(t)$$

Où $0 < t_0 < t_1 < \dots < t_p = T$ une subdivision de $[0, T]$ et $(\phi_i)_{i=0, \dots, p}$ une famille de variables aléatoires $F_{t_{i-1}}^W$ – mesurables et de carré intégrable.

L'intégrale stochastique d'un processus élémentaire H est alors, par définition, le processus continu $(I(H)_t)_{0 \leq t \leq T}$ défini par, si $t \in [t_k, t_{k+1}]$:

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(W_{t_i} - W_{t_{i-1}}) + \phi_{k+1}(W_t - W_{t_k})$$

Notons que $I(H)_t$ peut s'écrire :

$$I(H)_t = \sum_{1 \leq i \leq p} \phi_i(W_{t_i \wedge t} - W_{t_{i-1} \wedge t}) \quad (\text{avec } t_i \wedge t = \min(t_i, t))$$

Ce qui prouve la continuité de la fonction $t \rightarrow I(H)_t$. On notera $\int_0^t H_s dW_s$ pour $I(H)_t$. On a alors le résultat essentiel suivant :

Proposition 1.5 : si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus élémentaire

a) Le processus $\int_0^t (H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$ est une F_t -martingale continue.

b)
$$E \left[\int_0^T H_s dW_s \right]^2 = E \left[\int_0^T H_s^2 ds \right].$$

c)
$$E \left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2 \right) \leq 4 E \left(\int_0^T H_s^2 ds \right).$$

(voir [38],[5]).

Remarque 1.4 : On pose par définition $\int_0^T H_s dW_s \stackrel{PS}{=} \int_0^t H_s dW_s + \int_t^T H_s dW_s$ (Relation de Chasles)

On vient de définir et de donner des propriétés de l'intégrale stochastique pour les processus élémentaires, nous allons maintenant étendre cette intégrale à une classe de processus adaptés :

$$\mathcal{H} = \left\{ (H_t)_{0 \leq t \leq T}, \text{ processus adaptés à } (F_t)_{t \geq 0}, E \left(\int_0^T H_s^2 ds \right) < +\infty \right\}$$

Cet ensemble est un espace de Hilbert pour le produit scalaire $\langle X_t, Y_t \rangle = E \left(\int X_t Y_t dt \right)$.

Proposition 1.6 : Soit $(W_t)_{0 \leq t \leq T}$ un F_t -Brownien. Alors il existe une unique application J de \mathcal{H} dans l'espace des F_t -martingales continues définies sur $[0, T]$. Telle que :

- 1) Si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus élémentaire, P.p.s. pour tout $0 \leq t \leq T : J(H)_t = I(H)_t$.
- 2) Si $t \leq T : E(J(H)_t)^2 = E\left(\int_0^t H_s^2 ds\right)$.

Cette application linéaire est unique au sens suivant, si J et J' sont deux prolongements linéaires vérifiant les propriétés précédentes, alors :

$$\text{P.p.s } 0 \leq t \leq T : J(H)_t = J'(H)_t.$$

On note, si $H \in \mathcal{H}$, $\int_0^t H_s dW_s = J(H)_t$.

De plus cette intégrale stochastique vérifie la propriété suivante :

Proposition 1.7 : Si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus de \mathcal{H} , alors :

$$E\left(\sup_{t \leq T} \left| \int_0^t H_s dW_s \right|^2\right) \leq 4E\left(\int_0^T H_s^2 ds\right)$$

(Voir [38] et [5]).

Nous aurons besoin d'un résultat permettant de relaxer l'hypothèse d'intégrabilité portant sur H_s . Posons :

$$\tilde{\mathcal{H}} = \left\{ (H_s)_{0 \leq s \leq T} \text{ est un processus adapté à } (F_t)_{t \geq 0}, \int_0^T H_s^2 ds < +\infty \text{ P.p.s} \right\}$$

La proposition suivante permet de prolonger l'intégrale stochastique de \mathcal{H} à $\tilde{\mathcal{H}}$.

Proposition 1.8 : Il existe une unique application \tilde{J} de l'espace $\tilde{\mathcal{H}}$ dans l'espace vectoriel des processus continus définis sur $[0, T]$. Telle que :

- 1) Propriétés de prolongement. Si $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ est un processus élémentaire, P.p.s pour tout t tel que $0 \leq t \leq T : \tilde{J}(H)_t = I(H)_t$.
- 2) Propriétés de continuité : si $(H_t^n)_{t \geq 0}$ une suite de processus de $\tilde{\mathcal{H}}$ telle que $\int_0^T (H_s^n)^2 ds$ tend vers 0 en probabilité alors $\sup_{0 \leq t \leq T} |J(H^n)_t|$ tend vers 0 en probabilité.

On note toujours $\int_0^t H_s dW_s$ pour $\tilde{J}(H)_t$. (voir [38]).

Remarque 1.5 : Il est important de noter que dans ce cas $\left(\int_0^t H_s dW_s\right)_{0 \leq t \leq T}$ n'est pas (nécessairement) une martingale.

I-4-5-5-Lemme d' Itô : (voir [76] et [38])

Le lemme d'Itô nous donne le processus que suit toute fonction d'une variable qui suit un processus d'Itô (dont le processus brownien géométrique est un exemple). En particulier, le lemme d'Itô nous donne la façon de différentier $t \rightarrow f(W_t)$ si f est une fonction deux fois continûment différentiable. Sachant que calculer cette différentielle par le calcul usuel mène à l'échec.

La définition suivante nous précise la classe de processus pour laquelle on peut énoncer la formule d'Itô.

Définition 1.12: Soit $(\Omega, F, (F_t)_{t \geq 0}, P)$ un espace probabilisé muni d'une filtration et $(W_t)_{t \geq 0}$ un F_t -mouvement Brownien. On appelle processus d'Itô un processus $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ à valeurs dans \mathcal{R} tel que :

$$\text{P.p.s } \forall t \leq T \quad X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

- Avec :
- X_0 est F_0 -mesurable ;
 - $(K_t)_{0 \leq t \leq T}$ et $(H_t)_{0 \leq t \leq T}$ des processus adaptés à F_t ;
 - $\int_0^T |K_s| ds < +\infty$ P.p.s ;
 - $\int_0^T |H_s|^2 ds < +\infty$ P.p.s.

La proposition suivante précise l'unicité de la décomposition précédente :

Proposition 1.9: Soit $(M_t)_{0 \leq t \leq T}$ une martingale continue telle que :

$$M_t = \int_0^t K_s ds \quad \text{avec P.p.s } \int_0^T |K_s| ds < +\infty$$

Alors :

$$\text{P.p.s } \forall t \leq T, M_t = 0$$

Ceci entraîne que :

- La décomposition d'un processus d'Itô est unique. Ce qui signifie que si :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s = X'_0 + \int_0^t K'_s ds + \int_0^t H'_s dW_s$$

Alors $X_0 = X'_0$ dP.p.s, $H_s = H'_s$ ds \times dP.p.p, $K_s = K'_s$ ds \times dP.p.p

- Si $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ est une martingale de la forme $X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$, alors $K_t = 0$ dt \times dP.p.s.

La formule d'Itô prend la formule suivante (nous l'admettrons sans démonstration et nous renvoyons à [41] pour une démonstration élémentaire dans la cas du mouvement Brownien)

Lemme : (voir [76] et [38])

Soit $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ un processus d'Itô :

$$X_t = X_0 + \int_0^t K_s ds + \int_0^t H_s dW_s$$

Et f une fonction deux fois continûment différentiable, on a :

$$f(X_t) = f(X_0) + \int_0^t f'(X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''(X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Où par définition :

$$\langle X, X \rangle_t = \int_0^t H_s^2 ds \quad \text{et} \quad \int_0^t f'(X_s) dX_s = \int_0^t f'(X_s) K_s ds + \int_0^t f'(X_s) H_s dW_s$$

De même si $(t, x) \rightarrow f(t, x)$ est une fonction deux fois différentiable en x et une fois différentiable en t , ces dérivées étant continues en (t, x) (on dit dans ce cas que f est de classe $C^{1,2}$, on a :

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_s(s, X_s) dX_s + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X, X \rangle_s$$

Exemple : Le modèle de marché de Black et Scholes (voir [76] et [43])

Le processus stochastique $S = \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$ représente l'évolution du prix d'un titre risqué ou :

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

Où μ et σ sont deux constantes et W représente un mouvement brownien standard.

Comme W_t est de loi $N(0, t)$, alors

$$\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t \text{ est de loi } N\left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t, \sigma^2 t\right)$$

et S_t est de loi lognormale.

Nous allons montrer grâce au lemme d'Itô que le processus $S = \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$ est solution de l'équation différentielle stochastique :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Supposons que S_0 est indépendante du mouvement brownien,

- $E[S_t] = E[S_0] E\left[\exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}\right]$
 $= E[S_0] \exp\{\mu t\}$
- $E[S_t^2] = E[S_0^2] E\left[\exp\left\{2\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + 2\sigma W_t\right\}\right]$
 $= E[S_0^2] \exp\{2\mu t + \sigma^2 t\}$
- $Var[S_t] = E[S_0^2] \exp\{2\mu t + \sigma^2 t\} - E[S_0]^2 \exp\{2\mu t\}$

En utilisant le lemme d'Itô, il est possible de montrer que le processus stochastique S défini par

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

est une solution à l'équation intégrale

$$S_t - S_0 = \mu \int_0^t S_u du + \sigma \int_0^t S_u dW_u$$

En effet, si $f(w, t) = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma w\right\}$, alors $f(W_t, t) = S_t$ et $f(W_0, 0) = S_0$

$$\frac{\partial f}{\partial t}(w, t) = \left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) f(w, t)$$

et
$$\frac{\partial f}{\partial w}(w, t) = \sigma f(w, t) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(w, t) = \sigma^2 f(w, t)$$

Ainsi $S_t - S_0 = f(W_t, t) - f(W_0, 0)$

$$\begin{aligned} &= \int_0^t \frac{\partial f}{\partial w}(W_u, u) dW_u + \int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial t}(W_u, u) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial w^2}(W_u, u) \right) du \\ &= \int_0^t \sigma f(W_u, u) dW_u + \int_0^t \left(\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right) f(W_u, u) + \frac{1}{2} \sigma^2 f(W_u, u) \right) du \\ &= \int_0^t \sigma f(W_u, u) dW_u + \int_0^t \mu f(W_u, u) du \\ &= \int_0^t \sigma S_u dW_u + \int_0^t \mu S_u du \end{aligned}$$

Nous venons de démontrer que le processus stochastique $S = \{S_t : 0 \leq t \leq T\}$ ou

$$S_t = S_0 \exp\left\{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W_t\right\}$$

est une solution de l'équation différentielle stochastique

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t$$

Remarque 1.6 : La solution d'une équation différentielle stochastique consiste à trouver le(s) processus stochastique(s) satisfaisant l'équation donnée. Or, le lemme d'Itô permet l'inverse, c'est-à-dire qu'il permet de trouver l'EDS satisfaite par un processus stochastique donné. S'il advient que le processus stochastique choisi satisfasse l'EDS donnée, alors nous aurons trouvé une solution à cette équation.

En ce sens, le lemme d'Itô nous fournit des solutions à des EDS. Cependant, il ne s'agit pas d'une méthode systématique permettant l'obtention de solutions. Son utilisation demande de l'intuition.

I-4-5-6-L'existence d'une solution à une équation différentielle stochastique :

Il existe deux types de solutions à une équation différentielle stochastique : les solutions fortes et les solutions faibles. Considérons l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} X_0 &= c \\ dX_t &= \mu(t, X_t) dt + \sigma(t, X_t) dW_t \end{aligned} \quad (1.10)$$

ou $\{W_t : t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard définie sur l'espace $(\Omega, F, \{F_t : t \geq 0\}, P)$.

a) Solution forte : Une solution forte consiste à trouver un processus stochastique X existant sur le même espace probabilisé filtré $(\Omega, F, \{F_t : t \geq 0\}, P)$ que le mouvement brownien et satisfaisant l'équation :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s .$$

On dira que la solution forte est unique si, lorsque X et \tilde{X} représentent deux solutions fortes de la même équation différentielles stochastiques, on a

$$P[X_t = \tilde{X}_t, t \geq 0] = 1.$$

b) Solution faible : Nous sommes en présence d'une solution faible si nous pouvons construire :

- 1- Un espace probabilisé filtré $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \{\tilde{F}_t : t \geq 0\}, \tilde{P})$;
- 2- Un $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \{\tilde{F}_t : t \geq 0\}, \tilde{P})$ -mouvement brownien standard $\{\tilde{W}_t : t \geq 0\}$;
- 3- Un $(\tilde{\Omega}, \tilde{F}, \{\tilde{F}_t : t \geq 0\}, \tilde{P})$ -processus stochastique $\{\tilde{X}_t : t \geq 0\}$; tel que :

$$\tilde{X}_t = \tilde{X}_0 + \int_0^t \mu(\tilde{X}_s) ds + \int_0^t \sigma(\tilde{X}_s) d\tilde{W}_s$$

Théorème 1.2 : Soit l'équation différentielle stochastique :

$$X_t = X_0 + \int_0^t \mu(X_s, s) ds + \int_0^t \sigma(X_s, s) dW_s$$

$$X_0 = Z$$

Si μ et σ sont des fonctions continues et s'il existe une constante K telle que :

$$|\mu(t, x) - \mu(t, y)| + |\sigma(t, x) - \sigma(t, y)| \leq K|x - y| \quad (1.11)$$

$$|\mu(t, x)| + |\sigma(t, x)| \leq K(1 + |x|) \quad (1.12)$$

$$E\|Z\|^2 < +\infty \quad (1.13)$$

Alors $\forall T > 0$, il existe une solution unique de l'équation différentielle définie ci-dessus dans $[0, T]$, de plus cette solution $(X_s)_{0 \leq s \leq T}$ vérifie :

$$E\left[\sup_{0 \leq s \leq T} |X_s|^2\right] < +\infty \quad (1.14)$$

Remarque 1.7 :

Il est possible d'avoir plusieurs solutions fortes à une même équation. Si la solution forte est unique il y aura aussi une unique solution faible. Par contre, si la solution faible est unique, il se peut qu'il y ait plusieurs solutions fortes.

I-4-6-Générateur infinitésimal d'une diffusion

A une solution d'une équation différentielle stochastique est associée naturellement un opérateur du deuxième ordre qui caractérise sa loi. On le voit apparaître de la manière suivante

Théorème 1.3 :

Soit f une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ à dérivées bornées et soit X_t une solution de

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dW_s$$

Où W_s est un IF_t -mouvement Brownien p -dimensionnel. Alors :

$$M_t = f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s) ds$$

est une IF_t -martingale où

$$Af = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

$$a = \frac{1}{2} \sigma \sigma^T, \text{ i.e. } a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sigma_{ik} \sigma_{jk}$$

L'opérateur A est appelé le générateur infinitésimal de la diffusion.

Preuve : En utilisant la formule d'Itô, montrons que

$$\begin{aligned} f(X_t) - f(X_0) - \int_0^t (Af)(X_s) ds &= \int_0^t \sum_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \left(\sum_k \sigma_{jk}(X_s) dW_s^k \right) \\ &= \sum_{j,k} \int_0^t \frac{\partial f}{\partial x_j}(X_s) \sigma_{jk}(X_s) dW_s^k \end{aligned}$$

Rappelons que le processus est une martingale si $\int_0^t (H_s dW_s)_{0 \leq t \leq T}$ si $E \left[\int_0^T H_s^2 ds \right] < +\infty$.

Utilisant le fait que f est à dérivées bornées ainsi que les propriétés (1.12) et (1.14), on obtient

$$E \left[\int_0^T \left| \frac{\partial f}{\partial x_j} \sigma_{jk}(X_s) \right|^2 ds \right] < k \left(1 + E \left[\sup_{s \leq T} |X_s|^2 \right] \right) < \infty$$

Propriétés du générateur infinitésimal

a- Ellipticité : Soit A un opérateur du deuxième ordre qui à une fonction f de classe $C^2(\mathbb{R}^n, \mathbb{R})$ associe :

$$Af = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x) \frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Où les coefficients a_{ij} et b_j sont des fonctions réelles. On suppose sans perte de généralité que $a_{ij} = a_{ji}$

Définition 1.12 : On dit qu'un opérateur A est elliptique si et seulement si

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \geq 0, \forall x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n$$

ceci est équivalent à dire que la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j}$ est symétrique semi-définie positive dans \mathbb{R}^n , ou encore que les valeurs propres de la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j}$ sont positive. S'il existe $c > 0$ tel que :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \eta_i \eta_j \geq c |\eta|^2, \forall x \in \mathbb{R}^n, \eta \in \mathbb{R}^n$$

L'opérateur est dit uniformément elliptique et toutes les valeurs propres de la matrice $(a_{ij}(x))_{i,j}$ sont strictement positives. Lorsqu'une ou plusieurs valeurs propres sont nulles, la relation ci-dessus n'est pas satisfaite et l'équation est dégénérée.

Le générateur infinitésimal A d'une diffusion est elliptique (éventuellement dégénéré) puisque $a = \frac{1}{2} \sigma \sigma^T$.

b- Principe du Maximum :

On dit qu'un opérateur A satisfait au Principe du Maximum si et seulement si :

$\forall v \in D^2(\mathbb{R}^n)$, si x_0 est un point de maximum local de v , alors $Av(x_0) \leq 0$:

Le générateur infinitésimal A d'une diffusion satisfait le Principe du maximum. Voir [35].

I-5-Conclusion :

L'intérêt de notre travail est le contrôle stochastique et la gestion dynamique de portefeuille, lorsque les prix des actifs sont modélisés par des processus stochastiques.

Pour cela nous avons fournis dans ce chapitre une introduction aux méthodes numériques utiles en finance, tel que le calcul stochastique, en particulier les équations différentielles stochastiques du type Itô.

Ce chapitre a pour but d'aider le lecteur à se familiariser avec les outils mathématiques qui sont à la base de toute modélisation financières.

Chapitre II

CONTROLE DE PROCESSUS DE DIFFUSION

II-1.Introduction

Les problèmes de contrôle optimal stochastique ont de nombreuses applications en gestion, économie et finance. Ce sont des situations où l'on fait face à des systèmes dynamiques évoluant dans des conditions d'incertitude et où il s'agit de prendre des décisions à chaque date afin d'optimiser un critère économique.

L'objectif de cette partie est d'étudier les problèmes de contrôle de diffusion avec plusieurs applications en économie, finance et assurance. Ces problèmes sont abordés par la méthode de la programmation dynamique qui permet d'obtenir une caractérisation analytique de la fonction valeur du problème d'optimisation comme solution d'une inéquation ou équation aux dérivées partielles dite de Bellman. On présentera la théorie des solutions de viscosité qui donne un cadre adéquat pour étudier de façon générale et rigoureuse les problèmes de contrôle stochastique.

On illustrera cette théorie avec un exemple d'applications aux problèmes d'investissement et de consommation optimaux.

Pour décrire un problème de contrôle stochastique, il est important de préciser quelle est l'information disponible à tout instant. Plusieurs situations sont possibles :

- 1- Le contrôleur n'a aucune information pendant l'opération du système. Dans ce cas, il choisit un contrôle qui est en fonction du temps. Ces contrôles sont appelés en « boucle ouverte » ou « open-loop » en anglais.
- 2- Le contrôleur connaît l'état du système à chaque instant. C'est le cas de l'observation (ou information) complète.
- 3- Le contrôleur a une connaissance partielle de l'état du système. C'est le cas de l'observation incomplète.

Pour les problèmes de contrôle déterministe, les contrôles peuvent être indifféremment choisis en boucle ouverte ou en boucle fermée, appelés alors « *feedback* ». Les contrôles en *feedback* ne donneront pas un plus petit minimum. En effet, l'état du système à tout instant t peut être réduit des données initiales et du contrôle appliqué jusqu'à l'instant t par la résolution de l'équation différentielle satisfaite par l'état du système. Donc l'observation de l'état courant du système à tout instant t ne donne pas d'avantage d'information que les données initiales.

Par contre, pour les problèmes de contrôle stochastique, à partir d'une donnée initiale et d'un contrôle, le système peut suivre différentes trajectoires. Dans le cas stochastique la trajectoire optimale dépend de l'information disponible au contrôleur à tout instant t .

Dans le cas de l'information complète, auquel nous nous restreindrons ici, la méthode de la programmation dynamique conduit à des équations aux dérivées partielles du deuxième ordre non linéaires (équation de Hamilton-Jacobi-Bellman) dont la résolution permet d'obtenir la fonction valeur et des contrôle en boucle fermée. Dans le cas de l'observation incomplète, la méthode de la programmation dynamique conduit à des équations de dimension infinie.

II-2-Contrôle de diffusion :

Soit $T > 0$ et soit $(\Omega, \{IF_t; 0 \leq t \leq T\}, IP, \{W_t; 0 \leq t \leq T\})$ un espace de probabilité complet. W est un mouvement brownien p -dimensionnel et IF est la filtration naturelle.

Nous construirons une équation différentielle stochastique contrôlée (EDSC) à partir d'une famille d'équations différentielles stochastiques (EDS) dont les coefficients de dérive et de diffusion dépendent d'un paramètre supplémentaire, appelé contrôle.

On considère des systèmes dynamiques dont l'état X_t est modélisé par des processus stochastiques de diffusion dans IR^n . Les variables de décision, appelés variables de contrôle, sont des processus stochastiques dont la valeur peut être décidée à tout instant en fonction des informations disponibles à cet instant, et ces variables de contrôle apparaissent dans l'équation d'évolution du système. On note P_t les contrôles et l'on suppose qu'ils sont à valeurs dans une partie fermée Pa_d de IR^k (Pa_d est un compact dans un espace métrique séparable). Les contrôles P_t sont des processus adaptés à IF_t , selon la terminologie usuelle.

On suppose que l'état X_t du système dynamique est régi par une équation différentielle stochastique de la forme

$$\begin{cases} dX_t = b(X_t, P_t)dt + \sigma(X_t, P_t)dW_t \\ X_0 = x \end{cases} \quad (2.1)$$

Où W_t est un processus de Wiener p -dimensionnel. Le terme de dérive $b(X_t, P_t)$ est un vecteur de dimension n et $\sigma(X_t, P_t)$ est une matrice $n \times p$.

L'équation (2.1) peut se réécrire sous la forme d'un système de n équations

$$dX_t^i = b^i(X_t, P_t)dt + \sum_{j=1}^p \sigma_{ij}(X_t, P_t)dW_t^j, \quad X_0^i = x^i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.2)$$

On suppose que b et σ sont continues sur $IR^n \times Pa_d$, avec $b(\cdot, P)$, $\sigma(\cdot, P)$ de classe $C^1(IR^n)$ et qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$|D_x b(x, P)| \leq C, \quad |D_x \sigma(x, P)| \leq C \quad (2.3)$$

$$|b(x, P)| \leq C(1 + |x| + |P|), \quad |\sigma(x, P)| \leq C(1 + |x| + |P|) \quad (2.4)$$

D_x désigne la dérivée en x . Sous ces hypothèses, l'équation (2.1) admet une solution unique et le processus X_t est bien défini (voir [35], Théorème 3.3.1).

Définition 2.1 la solution (2.1) est un processus $(X_t; 0 \leq t \leq T)$ adapté tel que pour $t \in [0, T]$

$$X_t = x + \int_0^t b(X_u, P_u) du + \int_0^t \sigma(X_u, P_u) dW_u \quad IP - p.s..$$

X est appelé le processus stochastique contrôlé.

Exemple (Portefeuille autofinancé)

Soit un marché financier composé d'un actif sans risque S_t^0 de taux constant, et un actif risqué, de type Black et Scholes de prix, tel que

$$dS_t^0 = S_t^0(rdt) \text{ et } dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t,$$

Où r, μ et σ sont des paramètres à estimer, W est un mouvement brownien standard unidimensionnel. Si à chaque instant t , X_t est la valeur d'un portefeuille autofinancé (dans lequel il n'y a pas d'apport ni de retrait extérieur) sans vente à découvert et que $P_t \in P_{ad} = [0, 1]$ est la proportion d'actif n°1 dans le portefeuille (donc la proportion de l'actif n°2 est $1 - P_t$), alors X satisfait l'EDSC

$$dX_t = X_t(P_t(rdt) + (1 - P_t)(\mu dt + \sigma dW_t))$$

Nous nous intéressons au temps de sortie du processus X d'un ouvert $O \subset \mathbb{R}^d$. Il suffit pour cela de supposer les fonctions b et σ définies seulement sur $\bar{O} \times P_{ad}$, (nous pourrions si nécessaire prolonger les fonctions b et σ sur $\mathbb{R}^d \times P_{ad}$, ou bien considérer le processus X solution de (2.1), arrêté à son premier instant de sortie de O).

Le problème de contrôle revient à déterminer la stratégie qui optimise un certain critère sur un horizon de gestion. Supposons tout d'abord qu'il n'y a pas de contraintes sur l'état, c'est à dire que l'espace d'état est \mathbb{R}^n tout entier. Posons le problème d'optimisation.

- Dans le cas d'un horizon infini, le processus X_t est stationnaire (b et σ sont indépendants du temps t) et on définit le coût actualisé par

$$J(x, P(\cdot)) = E\left(\int_0^\infty e^{-\lambda t} u(X_t, P_t) dt / X_0 = x\right) \tag{2.5}$$

Où $\lambda > 0$ est le taux d'actualisation et la fonction $u : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^+$ est parfois appelé le coût instantané. On suppose que u satisfait une condition de croissance polynomiale, c'est à dire $\exists C$ et k tels que

$$|u(x, P)| \leq C(1 + |x|^k + |P|^k) \tag{2.6}$$

Le problème est de déterminer le processus $P(\cdot)$ qui minimise la fonctionnelle J et de calculer la fonction valeur

$$v(x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} J(x, P(\cdot)) \tag{2.7}$$

- Dans le cas d'un horizon fini T , les coefficients b et σ dans la dynamique du système peuvent dépendre du temps t . Nous supposons qu'ils sont de classe C^1 par rapport au temps et tels que :

$$\left| \frac{\partial b}{\partial t} \right|, \left| \frac{\partial \sigma}{\partial t} \right| \leq C \tag{2.8}$$

Partant d'un état x à l'instant t , on définit pour tout processus de contrôle $P(\cdot)$, le coût :

$$J(t, x, P(\cdot)) = E \left(\int_0^T u(s, X_s, P_s) ds + g(X_T) / X_t = x \right) \quad (2.9)$$

Où g est appelé le coût sur l'état final, on suppose g à croissance polynomiale. La fonction valeur dépend alors du temps

$$v(t, x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} J(t, x, P(\cdot)) \quad (2.10)$$

Remarque 2.1:

Lorsque l'on cherche à maximiser un gain (au lieu de minimiser un coût), alors on écrira que

$$v(x) = \max_{P(\cdot)} J(x, P(\cdot)) = - \min_{P(\cdot)} (-J(x, P(\cdot))) \quad (2.10)$$

Ceci pour se conformer à la littérature où les problèmes d'optimisation sont en général écrits sous forme de minimisation

II.3 Problème de temps d'arrêt optimal :

Un des problèmes de contrôle les plus simples est celui du temps d'arrêt optimal pour lequel à tout instant t , seulement deux actions sont possibles : arrêter le processus ou laisser évoluer librement.

Définition 2.2 : on dit qu'une variable aléatoire τ est un temps d'arrêt admissible si c'est un IF_t -temps d'arrêt.

Soit $k(\cdot)$ et $g(\cdot)$ des fonctions régulières. Pour un temps d'arrêt admissible $t \leq \tau \leq T$, on définit le coût :

$$J(t, x, \tau) = E \left(\int_t^\tau k(s, X_s) ds + g(\tau, X_\tau) / X_t = x \right)$$

et le coût optimal ou l'inf est considéré sur l'ensemble des temps d'arrêt admissible :

$$V(t, x) = \inf_{t \leq \tau \leq T} J(t, x, \tau) \quad (2.11)$$

II.4. Programmation dynamique:

Le principe de la programmation dynamique est initialement dû à Bellman [02] dans le cas de problèmes de contrôle discrets. Dans le cadre continu, nous trouverons une justification intuitive de cette idée très naturelle dans la section 1.1 du livre de Krylov [41].

Ce principe est fréquemment utilisé en théorie du contrôle pour montrer que la fonction valeur est solution d'une équation aux dérivées partielles (EDP) non-linéaire, appelée équation « *d'Hamilton-Jacobi-Bellman* » (HJB). Cette équation permet de faciliter l'approximation numérique de la fonction valeur V et du processus de contrôle optimal.

Proposition 2.1. La fonction valeur définie en (2.7) satisfait :

$$v(x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} E \left(\int_0^\theta e^{-\lambda t} u(X_t, P_t) dt + e^{-\lambda \theta} v(X_\theta) / X_0 = x \right) \quad (2.13)$$

Pour tout temps d'arrêt θ par rapport à la filtration IF_t .

Ce résultat permet, en particulier, de relier la valeur de v au point x avec ses valeurs en des points voisins, et donc d'établir l'équation satisfaite par v .

Nous nous contentons ici d'expliquer brièvement ce principe et nous référons à [16] pour la démonstration.

Supposons que l'on exerce un contrôle P_t sur l'intervalle de temps $[0, \theta]$. A l'instant θ , l'état du système est X_θ et nous pouvons l'observer. Supposons connue la politique optimale \tilde{P}_t à partir de l'instant θ , autrement dit, supposons connu le contrôle $\tilde{P}_t, t \geq \theta$, tel que

$$v(X_\theta) = E\left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda(t-\theta)} u(X_t, \tilde{P}_t) dt / X_\theta\right)$$

Considérons le contrôle P_t tel que

$$P_t = \begin{cases} P_t & \text{sur } [0, \theta] \\ \tilde{P}_t & \text{pour } t \geq \theta \end{cases} \quad (2.14)$$

Le coût associé à ce contrôle est

$$J(x, P(\cdot)) = E\left(\int_0^\theta e^{-\lambda t} u(X_t, P_t) dt + e^{-\lambda \theta} v(X_\theta)\right) / X_0 = x \quad (2.15)$$

Le principe d'optimalité nous dit que si l'on choisit P_t sur $(0, \theta)$ de manière à minimiser (2.15), on obtient le coût optimal.

II.5. Equations d'Hamilton-Jacobi-Bellman

La fonction valeur est solution d'une équation aux dérivées partielles non-linéaire appelée équation d'Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) ou équation de Bellman ou encore équation de la Programmation Dynamique.

Notons A^P l'opérateur aux dérivées partielles du second ordre qui à une fonction de classe $C^2(\mathbb{R}^n)$ associe :

$$A^P v = b(x, P).Dv(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \sigma \sigma^T(x, P) D^2 v(x) \quad (2.16)$$

$$= \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, P) \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{j=1}^n b_j(x, P) \frac{\partial v}{\partial x_j} \quad (2.17)$$

Où $a = \frac{1}{2} \sigma \sigma^T$, i.e. $a_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^p \sigma_{ik} \sigma_{jk}$

II.5.1 Equation parabolique

Dans le cas d'un horizon fini, sous les hypothèses de régularité (2.3, 2.4, 2.6, 2.8) de b, a, u la fonction valeur v définie par (2.10) est solution de l'équation d'HJB parabolique :

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \min_{P \in P_{ad}} (A^P v(t, x) + u(t, x, P_t)) = 0 & \text{dans } [0, T] \times \mathbb{R}^n \\ v(T, x) = g(x) \end{cases} \quad (2.18)$$

L'existence d'une solution forte n'est là aussi assurée que sous l'hypothèse d'uniforme ellipticité (2.22) ci-dessous.

Si l'espace d'état est un ouvert O de IR^n , la fonction valeur

$$v(t, x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} E \left(\int_t^{\tau \wedge T} u(s, X_s, P_s) ds + f(\tau, X_\tau) \mathbf{1}_{\tau < T} + g(X_T) \mathbf{1}_{\tau < T} / X_t = x \right)$$

Où le coût f est à croissance polynomiale est solution de l'équation d'H.J.B

$$\begin{cases} \frac{\partial v}{\partial t}(t, x) = \min_{P \in P_{ad}} (A^P v(t, x) + u(t, x, P_t)) = 0 & \text{dans } [0, T[\times O \\ v(T, x) = g(x) \end{cases} \quad (2.19)$$

Avec la condition au limite de Dirichlet

$$v(t, x) = f(t, x) \quad \text{sur } [0, T[\times \partial O \quad (2.20)$$

Si le processus est réfléchi sur la frontière, la fonction valeur

$$v(t, x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} E \left(\int_t^T u(s, X_s, P_s) ds + \int_t^T f(s, X_s) + g(X_T) / X_t = x \right)$$

est solution de l'équation d'H.J.B (2.19) avec la condition au limite de Neumann

$$\frac{\partial v(t, x)}{\partial n} = f(t, x) \quad \text{sur } [0, T[\times \partial O \quad (2.21)$$

II.5.2 Equation elliptique

On se place dans le cas d'un horizon infini et on suppose que les fonctions b , σ et u satisfont les hypothèses de régularité (2.3, 2.4, 2.6). On suppose de plus qu'il existe $c > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, P) \eta_i \eta_j \geq c |\eta|^2, \quad \forall x \in O, \mu \in IR^n, P \in P_{ad} \quad (2.22)$$

Alors, la fonction valeur v définie par (2.7) est solution de l'équation d'H.J.B elliptique

$$-\lambda v(x) + \min_{P \in P_{ad}} (A^P v(x) + u(x, P_t)) = 0 \quad \text{dans } IR^n \quad (2.23)$$

Si P_{ad} est compact, le minimum dans (2.23) est toujours atteint. Sinon des conditions supplémentaires sont nécessaires. Si l'espace d'état est un ouvert O de IR^n et que le processus est arrêté sur la frontière, la fonction valeur est définie par

$$v(t, x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} J(t, x, P(\cdot))$$

Avec

$$J(x) = E \left(\int_0^\tau e^{-\lambda t} u(X_t, P_t) dt + e^{-\lambda \tau} f(X_\tau) / X_0 = x \right) \quad (2.24)$$

Où

$$\tau(\omega) = \inf \{t, X_t(\omega) \in O\}$$

Est le premier instant où le processus X_t sort du domaine O et f est le coût d'arrêt.

La fonction $v(x)$ satisfait l'équation d'H.J.B

$$-\lambda v(x) + \min_{P \in P_{ad}} (A^P v(x) + u(x, P)) = 0 \quad \text{dans } O \quad (2.25)$$

avec la condition au limite de Dirichlet

$$v(x) = f(x) \quad \text{sur } \partial O \quad (2.26)$$

Si le processus est réfléchi sur la frontière, l'équation d'évolution du processus s'écrit

$$dX_t = b(X_t, P_t)dt + \sigma(X_t, P_t)dW - n_x d\xi_t \quad (2.27)$$

ξ_t est un processus strictement croissant lorsque $X_t \in \partial O$ et $d\xi_t = 0$ si $X_t \in O$, n_x est la normale extérieure à la frontière ∂O de O en x .

La fonction valeur, définie par

$$v(x) = \min_{P(\cdot) \in P_{ad}} E \left(\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} u(X_t, P_t) dt + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} f(X_t) d\xi_t / X_0 = x \right)$$

où f est le coût associé à la réflexion du processus, satisfait l'équation d'H.J.B (2.25) avec la condition au limite de Neumann

$$\frac{\partial v}{\partial n} = f \quad \text{sur } \partial O \quad (4.28)$$

La condition (2.22) est la condition d'uniforme ellipticité. Elle implique l'existence d'une solution forte de l'équation d'HJB, c'est à dire une fonction de classe D^2 qui vérifie l'équation en tout point. L'unicité de la solution est assurée dans le cas d'un ouvert O borné. Il n'y a pas unicité quand l'équation est définie dans un ouvert non borné. Parmi toutes les solutions, la fonction valeur se trouve alors être celle qui ne croit pas trop rapidement lorsque $|x| \rightarrow \infty$.

Lorsque (2.22) n'est pas vérifiée, l'équation est dite dégénérée et dans ce cas, il n'y a pas de solution forte à l'équation d'HJB. Il faut alors considérer une notion de solution faible comme les solutions de viscosité (voir paragraphe II.6).

La résolution de l'équation d'HJB permet de définir en tout point x un contrôle optimal $P(x)$ qui ne dépend que de x : c'est un contrôle en "feedback", c'est à dire que c'est le contrôle que l'on doit utiliser lorsqu'on se trouve au point x . Il ne dépend donc que de l'état du système et non pas de la variable t . (voir [35]).

II.5.3 Interprétation probabiliste

Donnons ici une dérivation formelle de l'équation d'HJB dans le cas elliptique (2.7). On admet pour cela le Principe d'optimalité de la Programmation dynamique et l'on suppose toute la régularité nécessaire sur la fonction valeur pour pouvoir appliquer la formule d'Itô ordinaire.

D'après la formule de Itô, on a, sachant que X_t évolue selon l'équation (2.1)

$$\begin{aligned} e^{-\lambda \theta} v(X_\theta) &= v(x) + \int_0^\theta \left(-\lambda e^{-\lambda s} v(X_s) + e^{-\lambda s} Dv(X_s) b(X_s, P_s) \right) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^\theta e^{-\lambda s} \text{tr} D^2 v(X_s) \sigma \sigma^T(X_s, P_s) ds \\ &\quad + \int_0^\theta e^{-\lambda s} Dv(X_s) \sigma(X_s, P_s) dW_s \end{aligned}$$

Prenant l'espérance, on obtient, en utilisant que l'espérance de l'intégrale stochastique est nulle :

$$E[e^{-\lambda\theta} v(X_\theta)] = v(x) + E\left(\int_0^\theta (-\lambda e^{-\lambda s} v(X_s) + e^{-\lambda s} Dv(X_s) \cdot b(X_s, P_s)) ds + \frac{1}{2} \int_0^\theta e^{-\lambda s} \text{tr} D^2 v(X_s) \sigma \sigma^T(X_s, P_s) ds\right)$$

On reporte cette expression dans l'équation (2.13), en faisant un développement au premier ordre en θ et en faisant tendre θ vers 0, on fait On obtient :

$$v(x) = \min_{P \in P_{ad}} \left\{ \theta u(x, P) + v(x) + \theta \left(-\lambda v(x) + Dv(x) \cdot b(x, P) + \frac{1}{2} \text{tr} D^2 v(x) \sigma \sigma^T(x, P) \right) \right\}$$

Soit l'équation d'H.J.B :

$$-\lambda v + \min_{P \in P_{ad}} \left\{ b(x, P) Dv(x) + \frac{1}{2} \text{tr} \sigma \sigma^T(x, P) D^2 v(x) + u(x, P) \right\} = 0$$

Dans la pratique, soit l'on démontre le principe d'optimalité (2.13) et on en déduit que la fonction valeur est bien solution de l'équation d'HJB, soit on établit de manière formelle l'équation d'HJB associée au problème et on vérifie par un théorème dit "Théorème de Vérification" qu'une solution v de cette équation, possédant certaines conditions de régularité et un bon comportement à l'infini si l'espace d'état est non borné (par exemple une croissance polynomiale), est bien la fonction valeur du problème de contrôle stochastique. (Voir [15] et [16]). Par exemple dans le cas elliptique, le théorème de vérification s'énonce comme suit

Théorème 2.1. Soit v une solution de l'équation H.J.B (2.24, 2.26) de classe $C^2(O)$ et à croissance polynomiale sur \bar{O} . Alors, $\forall x \in O$

- $v(x) \leq J(x, P)$ pour tout processus de contrôle admissible $P(\cdot)$ tel que

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} E_x 1_{\tau \geq t} v(X(t)) \leq 0 \quad (4.29)$$

- Si $P^*(\cdot)$ est un contrôle admissible tel que pour tout x ,

$$\min_{P \in P_{ad}} (A^P v(x) + u(x, P)) = A^{P^*} v(x) + u(x, P^*(x))$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-\lambda t} E_x 1_{\tau^* \geq t} v(X^*(t)) \leq 0 \quad (2.30)$$

où $X^*(t)$ désigne la trajectoire associée au contrôle P^* , alors $v(x) = J(x, P^*)$ où J est défini en (2.24) et P^* est optimal.

Si v est bornée sur \bar{O} , (en particulier lorsque O est borné et v est continu sur \bar{O} , les conditions (2.29, 2.30) sont automatiquement satisfaites et on a le corollaire :

Corollaire 2.1.

Soit v une solution de l'équation d'H.J.B (2.24, 2.26) de classe $C^2(O)$ et bornée sur \bar{O} . Supposons de plus que $\lambda > 0$ ou $\tau < \infty$ avec une probabilité 1 pour tout contrôle admissible $P(\cdot)$. Alors v est la fonction valeur du problème de contrôle stochastique correspondant.

II.5.4 Inéquation variationnelle associée au problème de temps d'arrêt optimal

Le coût optimal $V(t, x) = \inf_{t \leq \tau \leq T} E \left(\int_t^\tau k(s, X_s) g(\tau, X_\tau) d\xi_t / X_t = x \right)$ satisfait l'inéquation variationnelle

$$\min \left\{ AV + \frac{\partial V}{\partial t} + k(x), g(t, x) - V(t, x) \right\} = 0 \quad \text{dand } [0, T] \times \mathbb{R}^n \quad (2.31)$$

Où A est l'opérateur associé à la diffusion X_t . Soit B_t l'ensemble d'arrêt optimal, i.e. le processus s'arrête dès que B_t est atteint. Alors $V(t, x) \leq g(t, x)$ et $g(t, x) = V(t, x)$ seulement dans B_t . L'ensemble B_t est à déterminer.

Donnons une preuve simple et heuristique de (2.31) basée sur le principe d'optimalité de la Programmation dynamique :

Supposons que le processus soit au point x à l'instant t . On a le choix d'arrêter le système ou de le laisser évoluer.

- si on arrête, le coût que l'on doit payer est $g(t, x)$. Donc

$$V(t, x) \leq g(t, x) \quad (2.32)$$

- le Principe d'optimalité nous permet d'exprimer le prix à payer pour laisser évoluer le système pendant un intervalle de temps δ et utiliser ensuite les décisions optimales

$$E \left(\int_t^{t+\delta} k(X_s) ds + V(t+\delta, X(t+\delta)) \right)$$

Lorsque δ tend vers 0, utilisant la formule d'Itô et la propriété $E(W(t+\delta) - W(t))^2 = \delta$ des processus de Wiener, on obtient que cette quantité tend vers

$$\delta k + \delta AV + \delta \frac{\partial V}{\partial t} + V.$$

Le coût optimal est majorée par cette quantité ce qui conduit à

$$0 \leq AV + \frac{\partial V}{\partial t} + k \quad (2.33)$$

Comme l'une des deux décisions est optimale, l'une des inégalités (2.32) où (2.33) est une égalité, d'où l'équation (2.31). (Voir [72], chapitre 3 section 2) pour une démonstration détaillée.

Le cas actualisé. Si le coût est actualisé :

$$J(t, x, \tau) = E \left(\int_t^\tau e^{-\int_t^s \beta(\theta, X(\theta)) d\theta} k(s, X_s) ds + e^{-\int_t^\tau \beta(\theta, X(\theta)) d\theta} g(\tau, X_\tau) / X_t = x \right)$$

Où $\beta(\cdot)$ est une fonction positive continue et bornée, on obtient la même équation (2.31) pour le coût optimal mais l'opérateur doit être remplacé par $A - \beta I$ où I est l'identité.

Par exemple, le prix d'une option américaine s'écrit

$$V_t = \sup_{t \leq \tau \leq T} E \left(e^{-\int_t^\tau r(s, X_s) ds} f(X_\tau) / IF_t \right)$$

Utilisant tout d'abord la propriété markovienne de X_t , on écrit $V_t = u(t, X_t)$ avec

$$u(t, x) = \sup_{t \leq \tau \leq T} E \left(e^{-\int_t^\tau r(s, X_s) ds} f(X_\tau) / X_t = x \right)$$

La fonction $u(t, x)$ est solution de l'inéquation variationnelle :

$$\begin{cases} \min \left\{ \frac{\partial V}{\partial t} + Au - ru, u(t, x) - V(t, x) \right\} = 0 \\ u(T, x) = f(x) \end{cases} \quad (2.34)$$

On réfère à [16](section 3) pour une démonstration directe. Par exemple dans le modèle de Black et Scholes, le prix de l'option américaine

$$V_t = \sup_{t \leq \tau \leq T} E \left(e^{-\int_t^\tau r(s, X_s) ds} f(X_\tau) \mid X_t \right)$$

est solution de (2.34) avec

$$Au(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} + r x \frac{\partial u}{\partial x}$$

Souvent, la fonction valeur du problème de contrôle étudié n'est pas de classe D^2 et ne vérifie pas l'équation de la Programmation Dynamique au sens classique. Il est alors utile d'introduire le concept de solutions de viscosité qui permet de définir une notion de solution faible particulièrement bien adaptée à ces équations non linéaires souvent dégénérées, comme nous allons le voir dans le paragraphe suivant.

II-6- Solutions de viscosité

II-6-1- Introduction

Pour démontrer le théorème de vérification qui identifie la solution de l'équation d'HJB avec celle du problème de contrôle stochastique, on utilise la formule d'Itô ce qui requiert en général que la solution v de l'équation d'HJB soit de classe D^2 .

Or, il arrive souvent que l'équation d'HJB n'ait pas de solution forte (dans le cas dégénéré par exemple). Dans ce cas, il faut définir une notion de solution faible.

L'approche usuelle, pour les équations elliptiques du deuxième ordre, est l'approche variationnelle. Cette approche est particulièrement bien adaptée aux problèmes linéaires ou aux problèmes où le terme linéaire est dominant.

Une autre approche, plus récente, est l'introduction des solutions de viscosité. Cette notion a été introduite pour résoudre des équations du premier ordre, et elle s'étend de façon naturelle aux équations elliptiques (ou paraboliques) du deuxième ordre (voir [44, 10, 01]). La notion de solution de viscosité est bien adaptée pour des équations fortement non linéaires elliptiques dégénérées ou non.

On montre que si la fonction valeur est continue (pas nécessairement de classe C^2), et satisfait le principe d'optimalité de la programmation dynamique, alors elle est solution de viscosité de l'équation d'HJB correspondante (voir [16]).

II-6-2- Solutions de viscosité d'équations elliptiques du deuxième ordre :

On considère des équations elliptiques du type

$$F(D^2 v, Dv, v, x) \quad \text{dans } O \quad (2.34)$$

Où F est une fonction numérique continue $S^n \times IR^n, IR, O$, S^n est l'espace des matrices symétriques $n \times n$, O est un ouvert de R^n .

Si v est régulière, on note Dv son gradient $\left(Dv = \left(\frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_n} \right) \right)$, et D^2v sa matrice hessienne

$\left(D^2v = \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right)_{i,j} \right)$. L'ellipticité de (2.34) est exprimée par

$$F(A, p, v, x) \geq F(B, p, v, x), A \geq B, \quad A, B \in S^n, p \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}, x \in O, \quad (2.36)$$

On rappelle que

$$A \geq B \iff (Ap, p) \geq (Bp, p) \quad \forall p \in \mathbb{R}^n$$

Où (\cdot, \cdot) désigne le produit scalaire usuel dans \mathbb{R}^n . Un cas particulier de (2.35) est

$$F(X, p, v, x) \max_{P \in P_{ad}} \left\{ \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, P) X_{ij} + \sum_{i,j=1}^n b_i(x, P) p_i - \lambda v + u(x, P) \right\}$$

Où la condition d'ellipticité (2.36) est satisfaite lorsque la matrice $(a_{ij}(x, P))_{i,j}$ est symétrique semi-définie positive dans $O \times P_{ad}$ c'est à dire :

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, P) \eta_i \eta_j \geq 0, \quad \forall x \in O, \eta \in \mathbb{R}^n, P \in P_{ad}$$

S'il existe $c > 0$ tel que

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x, P) \eta_i \eta_j \geq c |\eta|^2, \quad \forall x \in O, \eta \in \mathbb{R}^n, P \in P_{ad} \quad (2.37)$$

L'équation est uniformément elliptique.

Les équations d'HJB elliptiques de type (2.23) rentrent dans ce formalisme.

La notion de solution de viscosité repose sur le théorème suivant qui peut être vu comme une variante du *Principe du Maximum*.

Théorème 2.2 : $v \in D^2(O)$ est solution classique de (2.35) si et seulement si $\forall \phi \in D^2(O)$, si x_0 est un point de maximum local de $v - \phi$, alors :

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), v(x_0), x_0) \geq 0$$

et $\forall \phi \in D^2(O)$, si x_0 est un point de minimum local de $v - \phi$, alors :

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), v(x_0), x_0) \leq 0$$

Ce théorème fournit une définition de la solution classique qui a l'avantage de ne faire intervenir aucune régularité de v et qui va nous permettre de définir les solutions de viscosité. Donnons tout d'abord la preuve de ce théorème.

Preuve : Soit $v \in D^2(O)$ une solution classique de (2.35). Si $\phi \in D^2(O)$; et si x_0 est un point de maximum local de $v - \phi$, on a

$$Dv(x_0) = D\phi(x_0) \text{ et } D^2v(x_0) \leq D^2\phi(x_0)$$

En utilisant l'ellipticité de l'équation, on obtient :

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), v(x_0), x_0) \geq F(D^2v(x_0), Dv(x_0), v(x_0), x_0) = 0$$

Et la première propriété est démontrée. La deuxième s'obtient de manière analogue.

Réciproquement, si v est de classe D^2 , on peut prendre $\phi = v$ dans les deux propriétés et donc, comme tout point x_0 de O est à la fois un point de maximum et de minimum local de $v - v$, $F(D^2v(x_0), Dv(x_0), v(x_0), x_0)$ est à la fois négatif et positif en tout point de O . Donc $F(D^2v(x_0), Dv(x_0), v(x_0), x_0) = 0$ dans O est la preuve set complète. On peut donner à présent la définition de solution de viscosité.

Définition 2.3 : $v \in D(O)$ est solution de viscosité de (2.35) si et seulement si :

$\forall \phi \in D^2(O)$, si x_0 est un point de maximum local de $v - \phi$, alors :

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), v(x_0), x_0) \geq 0 \quad (2.38)$$

et $\forall \phi \in D^2(O)$, si x_0 est un point de minimum local de $v - \phi$, alors :

$$F(D^2\phi(x_0), D\phi(x_0), v(x_0), x_0) \leq 0 \quad (2.39)$$

Si v ne vérifie que (2.38) (resp. (2.39)), on dit que v est une sous-solution de viscosité (resp. sur-solution de viscosité).

Le rôle de l'ellipticité est central dans cette définition. Remarquons que les équations paraboliques sont un cas particulier des équations elliptiques telles que nous les avons définies : on remplace simplement la variable x par la variable (x, t) , Du et D^2u représentant alors le gradient et le hessien par rapport à la nouvelle variable (x, t)

L'espace naturel pour chercher des solutions est l'espace des fonctions continues.

II.7 Application à l'optimisation dynamique de portefeuille

On s'intéresse ici à l'application du contrôle stochastique à l'optimisation dynamique de portefeuilles en temps continu. On considère un modèle de type Black-Scholes pour la modélisation des cours des actifs.

Dans le cas où les transactions sur les actifs financiers sont gratuites, le problème peut être résolu explicitement. Le cas des coûts de transaction proportionnels au montant de la transaction fait appel à la théorie des contrôles singuliers.

Soit un espace de probabilité complet (Ω, F, P) muni d'une filtration $(F_t)_{t \geq 0}$ représentant les informations disponibles à l'instant t .

On considère un investisseur possédant un compte en banque, aussi appelé actif sans risque, (de type "caisse d'épargne") rapportant un intérêt fixe $r > 0$ et n actifs risqués de prix $S_i(t) = 1, \dots, n$ à l'instant t . Les cours des actifs risqués sont modélisés par des processus de diffusion

$$dS_i(t) = S_i(t)(\alpha_i dt + \sigma_i dW_i(t)), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.40)$$

Où α_i et σ_i sont 2 paramètres inconnus représentant respectivement le rendement instantané moyen et la volatilité de l'actif i , et $W_i(t)$ est un mouvement Brownien standard. En général $\alpha_i > r$ et les actions qui ont le meilleur rendement moyen ont également la plus grande volatilité.

On note :- $s_0(t)$: capital détenu dans le compte en banque à l'instant t

- $s_i(t)$: capital investi dans le i^{eme} actif risqué à l'instant t

et $s(t) = (s_0(t), s_1(t), \dots, s_n(t))$ le vecteur de \mathbb{R}^{n+1} représentant la position de l'investisseur à l'instant t .

Nous pourrions considérer des modèles avec ou sans consommation. Dans le premier cas, l'investisseur consomme avec un taux $c(t)$ en retirant de l'argent du compte en banque. Nous supposons que les augmentations du capital proviennent des gains dûs à la variation des cours. En l'absence de transactions entre les comptes, les quantités d'argent dans les comptes évoluent selon les équations :

$$\begin{cases} ds_0(t) = (rs_0(t) - c(t))dt, \\ ds_i(t) = \alpha_i s_i(t)dt + \sigma_i s_i(t)dW_i(t), \quad i = 1, \dots, n \end{cases} \quad (2.41)$$

Avec les valeurs initiales $s_i(0) = x, i = 1, \dots, n$.

Dans le modèle sans consommation, en l'absence de transactions entre les comptes, la quantité d'argent dans le compte en banque évolue donc selon l'équation :

$$ds_0(t) = rs_0(t)dt, \quad (2.42)$$

Nous supposons que l'investisseur a la possibilité d'acheter ou de vendre l'actif risqué i ($i = 1, \dots, n$) à tout instant. Les transactions se font par l'intermédiaire du compte en banque et sont instantanées.

Dans le cas d'un horizon de gestion infini, l'objectif de l'investisseur est de maximiser une fonction d'utilité de la consommation de la forme

$$E \int_0^{\infty} e^{-\delta t} u(c(t)) dt \quad (2.43)$$

Où E représente l'espérance, $\delta > 0$ est le facteur d'actualisation et u est une fonction d'utilité.

Dans ce cas, on peut prendre le taux d'intérêt en investissement sans risque comme taux d'actualisation $\delta = r$, i.e. on actualise par rapport à l'investissement sans risque. Où r peut être estimé facilement à partir de l'équation (2.42).

Dans le cas d'un horizon de gestion fini T , l'objectif est de maximiser une fonction de la valeur finale du portefeuille

$$Eu\rho(T) \quad (2.44)$$

Où $\rho(t)$ est la fortune totale de l'investisseur à l'instant t définie par

$$\rho(t) = s_0(t) + \sum_{i=1}^n s_i(t) \quad (2.45)$$

Les fonctions d'utilité HARA. Les fonctions HARA sont les fonctions d'utilité $u(x)$ définies pour $x \geq 0$ par

$$u(x) = \frac{1}{\gamma} (x + \eta)^\gamma, \quad \gamma < 1, \gamma \neq 0, \eta \geq 0 \quad (2.46)$$

$$u(x) = \log(x + \eta), \quad \eta \geq 0 \quad (2.47)$$

Les fonctions HARA permettent de modéliser le comportement de l'investisseur par rapport au risque. Le coefficient $1 - \gamma$ est l'aversion au risque relative. L'investisseur prend le maximum de risque pour $\gamma = 1$ (tout l'argent est investi dans l'action qui a le meilleur rendement et la plus grande volatilité) et le risque pris décroît avec γ .

La fonction (2.47) est appelée fonction HARA de paramètre 0. En effet elle peut, grâce au théorème asymptotique suivant, s'interpréter comme le cas limite $\gamma = 0$:

Théorème 2.7.1. Pour toute variable aléatoire positive f et pour toute mesure μ , nous avons d'égalité :

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\int f^\gamma d\mu \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \exp \left(\int \log f d\mu \right) \quad (2.48)$$

En particulier
$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\int \rho^\gamma d\mu \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \exp(E \log \rho(T)) \quad (2.49)$$

$$\lim_{\gamma \rightarrow 0} \left(\delta E \int_0^\infty e^{-\delta t} c^\gamma(t) dt \right)^{\frac{1}{\gamma}} = \exp \left(\delta E \int_0^\infty e^{-\delta t} \log c^\gamma(t) dt \right) \quad (2.50)$$

Supposons que les transferts d'argent entre comptes n'entraînent pas de coût de transaction. Ce problème est appelé « *problème de Merton* » car il fut formulé à l'origine par Merton en 1971. Considérons un problème en horizon infini avec consommation, et considérons comme variable d'état la fortune totale $\rho(t)$ de l'investisseur définie en (2.45) et comme variables de contrôle

$c(t)$: le taux de consommation et $y_i(t) = \frac{s_i(t)}{\rho(t)}$, la proportion de capital investi dans l'actif i , $\forall i = 1, \dots, n$.

Plus précisément, une politique d'investissement-consommation est un ensemble $(c(t), y_i(t)_{i=1, \dots, n})$ de processus F_t -adaptés t.q :

$$c(t) \geq 0, \int c(s) ds < \infty \text{ p.p. } t,$$

$|y_i(t)| \leq K$, p.p. t , où K peut varier d'une politique à une autre.

La dynamique du système est donnée par l'équation différentielle stochastique

$$\begin{cases} d\rho(t) = \left(r\rho(t) + \rho(t) \sum_{i=1}^n (\alpha_i - r) y_i(t) - c(t) \right) dt + \rho(t) \sum_{i=1}^n \sigma_i y_i(t) dW_i(t), \\ \rho(0) = \sum_{i=0}^n x_i \equiv \rho \end{cases} \quad (2.51)$$

Soit ρ la fortune initiale ; une politique P est dite admissible si

$$\rho(t) \geq 0, t \geq 0$$

Ce qui signifie que la quantité d'argent totale $\rho(t)$, solution de (2.51) doit rester positive. Les quantités $s_0(t)$ et $s_i(t)$, ($i = 1, \dots, n$) peuvent, elles, prendre des valeurs négatives. Dire que $s_0(t) < 0$ signifie que nous avons emprunté la quantité $|s_0(t)|$ sur le marché des placements sans risques.

Dire que $s_i(t) < 0$ pour un $i > 1$ signifie que : nous avons des dettes libellées en actifs risqués par suite de ventes à découvert.

Notons P_ρ l'ensemble des politiques admissibles pour un état initial ρ . L'objectif est de maximiser sur l'ensemble des politiques admissibles une fonction d'utilité de la consommation de la forme

$$J(\rho, P) = E_\rho \int_0^\infty e^{-\delta t} u(c(t)) dt \quad (2.52)$$

Où E_ρ Représente l'espérance conditionnelle à l'état initial ρ , $\delta > 0$ est le taux d'actualisation. et $u(c)$ est une fonction d'utilité définie par

$$u(c) = \frac{c^\gamma}{\gamma}, \gamma < 1, \gamma \neq 0. \quad (2.53)$$

Définissons la fonction valeur

$$V(\rho) = \sup_{P \in P_\rho} J(\rho, P) \quad (2.54)$$

Remarque 2.7.1 :

Soit $\tau = \inf \{t \geq 0, \rho(t) = 0\}$ le temps de sortie de IR^{+*} . Une politique est admissible si $c(t) = 0$ p.s. (presque sûrement) pour $t \geq \tau$ et donc $\rho(t) = 0, \forall t \geq \tau$. Cela rend compte de l'absence d'opportunité d'arbitrage, c'est à dire l'impossibilité de réaliser un profit sans prendre de risque. Une stratégie d'arbitrage pourrait faire passer une fortune initiale nulle à une valeur non nulle.

Si $\gamma > 0$, nous pouvons écrire

$$V(\rho) = \sup_{P \in P} E_\rho \int_0^\tau e^{-\delta t} u(c(t)) dt \quad (2.55)$$

Où P représente l'ensemble de toutes les politiques. En effet pour toute politique P admissible, nous avons $J(\rho, P) = E_\rho \int_0^\tau e^{-\delta t} u(c(t)) dt$ puisque $u(c(t)) = 0$ pour $t \geq \tau$.

Si P est quelconque, nous pouvons construire une politique admissible P_{ad} qui coïncide avec la politique P jusqu'à τ , qui fait sauter le processus $s(t)$ à l'origine à l'instant τ et telle que $c(t) = 0$ pour $t \geq \tau$.

Si $\gamma < 0$, nous pouvons se restreindre à considérer les politiques telles que $\rho(t) > 0 \forall t$. En effet, s'il existe $\tau \geq 0$ tel que $\rho(\tau) = 0$ alors $c(t) = 0$ pour $t \geq \tau$ et $u(c(t)) = \infty$. Donc si pour une certaine politique P , $\rho(t)$ atteint 0, $J(\rho, P) = -\infty$.

La fonction valeur V définie en (2.54) est croissante ; de plus V est concave car la dynamique est linéaire et la fonction u est concave.

Le problème de Merton peut se résoudre explicitement par la résolution analytique de l'équation d'HJB associée, un fait remarquable pour un problème de contrôle stochastique. Nous avons le théorème :

Théorème 2.7.2 : (voir [35]), Nous supposons

$$\delta > \gamma \left(r + \frac{1}{2(1-\gamma)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i - r}{\sigma_i} \right)^2 \right) \quad (2.56)$$

et notons

$$C = \frac{1}{1-\gamma} \left(\delta - \gamma \left(r + \frac{1}{2(1-\gamma)} \sum_{i=1}^n \left(\frac{\alpha_i - r}{\sigma_i} \right)^2 \right) \right) \quad (2.57)$$

Alors, la fonction valeur V est égale à

$$V(\rho) = \frac{1}{\gamma} c^{\gamma-1} \rho^\gamma \quad (2.58)$$

La consommation optimale est :

$$c^*(\rho) = C_\rho$$

et la politique optimale d'investissement est

$$y_i^*(\rho) \equiv y_i^* = \frac{\alpha_i - r}{\sigma_i^2 (1-\gamma)} \quad (2.59)$$

Preuve : L'équation d'HJB correspondant au problème s'écrit

$$-\delta V(\rho) + \max_{c \geq 0, y_i} \{AV(\rho) + u(c)\} = 0 \text{ pour } \rho > 0 \quad (2.60)$$

Avec

$$AV(\rho) = \left(r\rho + \rho \sum_{i=1}^n (\alpha_i - r)y_i - c \right) V'(\rho) + \frac{1}{2} \rho^2 \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 y_i^2 V''(\rho) \quad (2.61)$$

$$\text{Où } V'(\rho) = \frac{dV}{d\rho} \text{ et } V''(\rho) = \frac{d^2V}{d\rho^2}$$

$$\text{Si } \gamma > 0, \text{ nous avons la condition à la limite : } V(0) = 0 \quad (2.62)$$

Qui s'explique par le fait que si le capital initial est nul, alors la consommation doit être nulle pour tout $t \geq 0$ et donc $u(c(t)) = 0 \forall t \geq 0$

$$\text{Si } \gamma < 0, \quad \lim_{\rho \rightarrow 0} V(\rho) = -\infty \quad (2.63)$$

Nous pouvons séparer les "max" dans l'équation (5.60) qui devient :

$$-\delta V(\rho) + u^*(V'(\rho)) + r\rho V'(\rho) + \rho \sum_{i=1}^n \max_{y_i} (\alpha_i - r)y_i V'(\rho) + \frac{1}{2} \rho \sigma_i^2 y_i^2 V''(\rho) = 0 \quad (2.64)$$

Où u^* est la transformée de Fenchel de u définie par

$$\begin{aligned} u^*(v) &= \max_{c \geq 0} \{-cv + u(c)\} \\ &= \left(\frac{1}{\gamma} - 1 \right) v^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \text{ si } v \geq 0 \end{aligned} \quad (2.65)$$

Si $v < 0$, $u^*(v)$ est égale à $+\infty$.

Pour assurer une consommation finie, il faut donc imposer $V'(\rho) \geq 0, \forall \rho \geq 0$. La consommation optimale vaut alors :

$$c^*(\rho) = V'(\rho)^{\frac{-1}{\gamma-1}}$$

Considérons à présent le maximum en y_i . Si $V'' < 0$, c'est à dire si V est concave, il est atteint pour tout $\rho > 0$ pour

$$y_i^*(\rho) = \frac{-(\alpha_i - r)V'(\rho)}{\rho\sigma_i^2 V''(\rho)}$$

En reportant dans (2.64), nous obtenons

$$-\delta V + r\rho V' - \sum_{i=1}^n \frac{(\alpha_i - r)^2 V'^2}{2\sigma_i^2 V''} + \frac{1-\gamma}{\gamma} (V')^{\frac{-\gamma}{1-\gamma}} = 0 \quad (2.66)$$

Nous cherchons une solution de (2.66) concave, croissante et vérifiant les conditions aux limites (2.62) ou (2.63) selon le signe de γ . Nous la cherchons de la forme :

$$v(\rho) = \lambda \rho^\gamma \quad (2.67)$$

Avec $\lambda \gamma > 0$. En reportant dans (2.66), on obtient

$$\lambda = \frac{1}{\gamma} C^{\gamma-1}$$

Où C est défini en (2.57).

La dernière étape consiste à s'assurer, par le théorème de vérification, que la solution V définie en (2.58) est bien la solution du problème d'optimisation (voir [70] pages 175-176 et [71]). Pour cela, on laisse au soin du lecteur de vérifier, en appliquant la formule d'Itô à $V(x)e^{-\delta t}$ et en regardant séparément les cas $\gamma < 0$ et $0 < \gamma < 1$, les 2 points suivants

- $V(x) \geq J(\rho, P)$ pour toute politique admissible P .
- $V(x) = J(\rho, P^*)$ avec $P^* = (c^*, y_i^*)$.

Analyse des résultats

La politique optimale, donnée par le théorème, consiste à consommer à un taux proportionnel à la fortune totale : $c(t) = C\rho(t) \forall t$, et conserver dans chaque actif risqué une proportion constante de la fortune totale : $\forall t y_i^*(t) = y_i^* = \text{constante}$.

La politique de transaction optimale est donc la suivante : si $y_i < y_i^*$: acheter actif i , si $y_i > y_i^*$: vendre actif i .

La proportion optimale $y_i^* \in [0,1]$ si et seulement si $r < \alpha_i < r + \sigma_i^2(1-\gamma)$.

Si $\alpha_i > r + \sigma_i^2(1-\gamma)$, l'actif i est tellement avantageux que l'on emprunte de l'argent pour en acheter. Par contre si $\alpha_i < r$, c'est le contraire, on vend l'actif i à découvert.

La figure (2.1) illustre le cas $n = 1$, c'est à dire le cas d'un portefeuille composé d'un compte en banque et d'un actif risqué, avec en abscisse le capital x_0 investi dans le compte en banque et en ordonnée le capital x_1 investi dans l'actif risqué. Le domaine admissible se situe au dessus de la droite $x_0 + x_1 = 0$.

La stratégie optimale d'investissement est de maintenir le portefeuille sur "la ligne de Merton" d'équation $x_1 = \frac{y_1^*}{1 - y_1^*} x_0$. Dès que le portefeuille s'en écarte, l'investisseur doit opérer une transaction pour s'y ramener selon les directions indiquées sur le dessin.

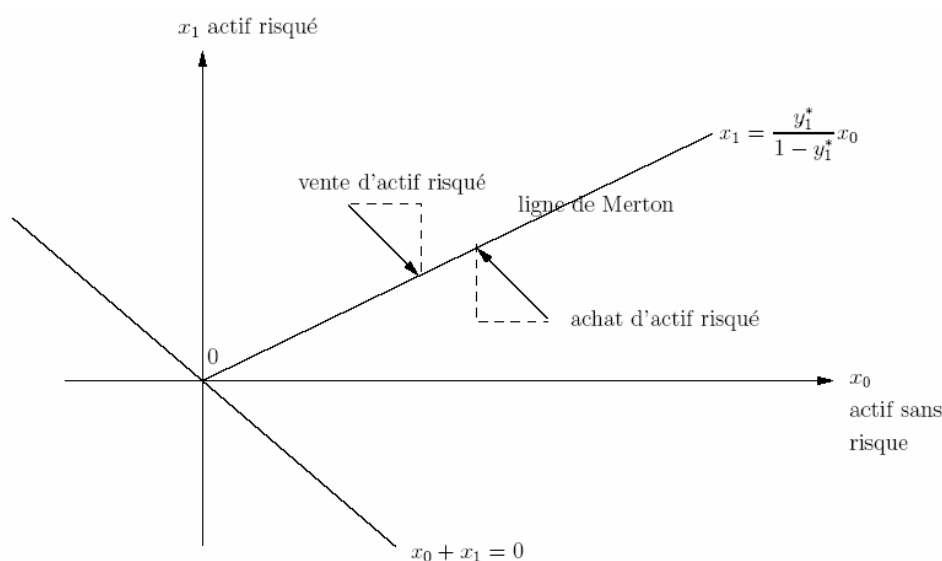


FIG : Espace des positions dans le cas d'un compte en banque et d'un actif risqué montrant la "ligne de Merton "

Remarque :

si $\gamma < 0$, la condition (2.56) est toujours satisfaite. Si $\gamma > 0$ la fonction valeur V est finie si et seulement si (2.56) est satisfaite.

Après avoir donné les concepts du contrôle stochastique des processus de diffusion, nous allons maintenant voir des informations de base en assurance et réassurance dans le chapitre suivant, afin de pouvoir passer au contrôle stochastique des processus de diffusion appliqués en assurance non vie.

CHAPITRE III

Assurances et Réassurance

III-1.Assurance :

III-1.1. Information de base sur l'assurance :

III-1.1.1. Besoin de sécurité

La sécurité est un des besoins fondamentaux de l'être humain. La vie comporte toutefois des risques et des dangers qui peuvent menacer la santé, la vie et les biens que l'on possède. C'est la raison pour laquelle les êtres humains ont, depuis toujours, eu recours à l'assurance pour se protéger contre ce qui pouvait leur arriver. De nos jours, vivre sans assurances dans un pays industrialisé n'est pas concevable. Les Suisses, hommes et femmes, sont très soucieux de leur sécurité. En 2004, chaque habitant de la Suisse a consacré 7'109 francs aux assurances privées (assurances sociales non comprises), ce qui représente le montant le plus élevé au niveau mondial.

III-1.1.2. Solidarité

L'assurance repose sur le principe de la solidarité. Un grand nombre de personnes ou d'entreprises, exposées aux mêmes risques, versent leurs primes à une caisse commune qui doit, en cas de sinistre, fournir la prestation contractuellement convenue à l'assuré qui en est victime. C'est selon ce principe d'assurance, toujours valable de nos jours, que les caravanes babyloniennes se sont « assurées » 1700 ans déjà avant Jésus-Christ. Les marchands itinérants, tous exposés aux mêmes risques, se sont associés. La communauté prenait soin de ceux que le malheur avait frappés. Manquait à cette communauté de risque l'aspect commercial de l'assurance. Les assureurs institutionnels se situant en dehors de la communauté de risque elle-même n'apparurent que plus tard, c'est-à-dire au Moyen Age.

III-1.1.3. Loi des grands nombres

De nos jours, les statistiques fondées sur les mathématiques sont les éléments les plus importants de l'assurance. La théorie des probabilités et le traitement statistique d'un grand nombre de cas particuliers d'assurance permettent d'établir certaines certitudes de régularité, soit la fréquence avec laquelle ils vont se produire. La loi des grands nombres ne dit pas qui sera victime d'un événement bien déterminé, mais seulement combien de membres d'une communauté le seront. Le hasard en tant que facteur provoquant des dommages assurés devient ainsi une valeur moyenne pouvant être chiffrée statistiquement.

III-1.1.4. Contrat d'assurance

Un contrat d'assurance offre une couverture d'assurance. Cette dernière couvre les conséquences financières d'un événement dommageable. La caractéristique de l'événement dommageable est que l'on ne sait en général pas s'il surviendra et quand il se produira. Dans le contrat d'assurance, des choses et des personnes peuvent être assurées contre des événements dommageables (assurance de choses ou de personnes).

III-1.2.Droit des assurances :

III-1.2.1.Surveillance des assurances

La loi sur la surveillance des assurances (LSA) est entrée en vigueur en 1885. La protection des assurés est son objectif principal. Depuis lors, les entreprises privées d'assurances sont placées sous le contrôle de la Confédération qui délivre l'autorisation d'opérer et exerce par ailleurs des contrôles permanents portant sur leurs activités d'assureurs. Les compagnies d'assurance doivent respecter certaines mesures de solvabilité permettant de limiter le risque.

III-1.2.2.Primes et prestations

Toutes les personnes qui font partie d'une communauté de risques s'acquittent de leur contribution afin de pouvoir venir en aide à ceux qui sont victimes d'un dommage. Cette contribution est la prime qui comprend les éléments suivants:

- **Le risque:** cette partie de la prime est calculée sur des bases mathématiques, des statistiques d'assurance, ainsi que des valeurs empiriques. Cette partie de la prime doit suffire à régler tous les sinistres. Elle se fonde sur la moyenne d'une période de longue durée.
- **Les frais:** le conseil à la clientèle, la conclusion de l'assurance et le traitement des sinistres occasionnent des frais qui sont répartis entre la communauté des assurés.
- **L'épargne:** pour les assurances-vie de capitalisation, vient s'ajouter l'objectif de l'épargne. Une part de la prime vient financer la prestation en espèces convenue pour la fin du contrat, les intérêts crédités par la compagnie d'assurances jouant ici un rôle particulièrement important.

Lorsque le cas couvert par l'assurance survient, la compagnie d'assurance doit verser la prestation convenue, à savoir:

- **Prestations en espèces:** versements en capital, rentes, indemnités journalières, dédommagements de toute nature.
- **Prestations de services:** mesures de défense contre les prétentions injustifiées de tiers à l'encontre des assurés (en assurance responsabilité civile notamment), protection juridique, conseil, aide en cas de sinistre, assistance.

III-1.3. Classification de l'assurance

La distinction la plus générale, la plus complémentaire et la plus commode est celle qui est faite au niveau européen entre assurances vie et assurances non-vie. Elle recoupe la distinction traditionnelle entre assurance-vie et assurance dommages (ou Iard pour Incendie Automobile et Risques Divers dont l'équivalent anglo-saxon est " Property Casualty ") qui coïncide elle-même à peu près avec la distinction la plus adéquate entre assurance des personnes et assurance des biens. Il suffit en effet d'ajouter l'assurance santé à l'assurance-vie pour aboutir à l'assurance de personnes.

III-1.3.1. Assurance-vie

L'assurance-vie est une assurance de personnes qui a pour objet de garantir le versement d'une certaine somme d'argent (capital ou rente) lorsque survient un événement lié à la personne assurée : son décès, un accident, une maladie ...

III-1.3.2. Assurance non vie

L'expression "assurance non vie" désigne toutes les assurances autres que l'assurance sur la vie que peuvent souscrire les consommateurs, comme l'assurance incendie, l'assurance familiale, l'assurance domestique, l'assurance vol, l'assurance complémentaire pour maladie, l'assurance automobile, etc.

Dans ce domaine, la législation communautaire offre au consommateur en gros le même schéma de droits que dans le domaine de l'assurance sur la vie. Cependant, certaines des règles diffèrent et certains types d'assurances sont soumises à un statut particulier.

III-1.4. Les formes de l'assurance

III-1.4.1. Choses / patrimoine / personnes

En matière d'assurance, on opère souvent une distinction selon le type du risque assuré.

- *L'assurance de biens matériels (ou de choses)* couvre les dommages dus à la destruction ou au vol de choses comme les biens mobiliers ou immobiliers.
- *L'assurance de patrimoine* couvre les pertes financières dues à la survenance d'un événement assuré. Citons à titre d'exemple les assurances responsabilité civile, protection juridique et pertes d'exploitation, mais aussi l'assurance grêle pour les cultures.
- *L'assurance de personnes* comprend toutes les assurances par lesquelles une personne est couverte pour frais de guérison, incapacité de gain temporaire ou définitive, invalidité, vieillesse ou décès.

III-1.4.2.Dommages / montant assuré

- Lorsque l'événement assuré survient, *l'assurance dommages* paie le dommage effectif, mais au maximum le montant assuré convenu. L'assurance dommages est usuelle en assurance responsabilité civile, de choses et casco notamment.
- Lorsque l'événement assuré survient, *l'assurance de sommes* verse la somme fixée contractuellement. Les assurances de sommes se trouvent dans l'assurance-vie, accidents et maladie.

III-1.4.3.Assurance individuelle / globale / collective

- **Une assurance individuelle** ne concerne qu'une personne particulière (contrairement à l'assurance collective) ou une seule chose (contrairement à l'assurance globale).
- **L'assurance globale** couvre un ensemble d'objets. Ainsi, dans l'assurance de l'inventaire du ménage, l'ensemble des choses mobilières d'un logement est assuré globalement.
- **L'assurance collective** englobe dans un même contrat un groupe de personnes ou une certaine quantité de choses. La caractéristique essentielle de l'assurance collective est que la conclusion, l'encaissement des primes ainsi que la gestion du contrat ne se traitent pas directement avec chaque assuré, mais sont l'affaire du représentant de la collectivité. Les formes les plus fréquentes de l'assurance collective sont les assurances accidents et maladie du personnel d'entreprise ainsi que les assurances-vie collectives / caisses de pension.

III-1.4.4.Facultative / obligatoire

- En matière **d'assurance facultative**, il appartient à chaque particulier de décider s'il veut souscrire une assurance pour un risque donné. Une assurance de responsabilité civile de simple particulier, une assurance protection juridique ou une assurance-vie, par exemple.
- En matière **d'assurance obligatoire**, il y a obligation légale de la souscrire. Les assurances obligatoires veulent atteindre des objectifs socio-politiques (assurance maladie, AVS, etc.) ou assurer la protection des lésés (par exemple assurance responsabilité civile pour véhicules automobiles).

Nous allons donner maintenant un tableau récapitulatif des classes et des formes d'assurance d'après Daniel Collignon, " classification des assurances de personnes ", et Dominique Santini, " tableau des assurances de dommages ", encyclopédie de l'assurance, déjà citée.

Tableau des assurances

Assurance des personnes	Assurance (dommages) de biens et des responsabilités
<p><i>Assurance vie</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · assurances en cas de décès · assurances en cas de vie · assurances mixtes · ou épargne capitalisation (sans assuré parfois) ou " tontinière " (après abus des assurances mixtes) <p><i>Autres assurances de personnes</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · assurance accident · assurance incapacité-invalidité · assurance remboursement des frais médicaux <p><i>Assurances collectives</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · assurances couvrant les emprunteurs (souscrites par les banques) · assurances souscrites par les entreprises (prévoyance et retraite) 	<p><i>Assurance automobiles</i></p> <p><i>Assurances de dommages aux biens :</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · des particuliers (ex : multirisques habitation, avec volet responsabilité) · des professionnels (ex : multirisques commerciales) · agricoles (ex : multirisques avec volet dommage et responsabilité) · protection juridique <p><i>Assistance</i></p> <p><i>Assurances de la construction (branche gérée en capitalisation)</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · dommages à l'ouvrage · responsabilité civile décennale <p><i>Assurances de responsabilité civile</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · hors volet responsabilité de l'assurance dommages, risques professionnels et d'entreprises <p><i>Assurance transport</i></p> <ul style="list-style-type: none"> · maritime · aéronautique · spatial · assurance des marchandises <p><i>Assurance crédit</i></p>

III-1.5. Assurance automobile :

L'assurance automobile peut rassembler dans un document unique la garantie de la responsabilité civile du propriétaire et du conducteur (assurance au tiers ou assurance directe), la garantie des dommages causés au véhicules (assurance tierce et assurance collision), la garantie des blessures ou des décès des passagers (assurance personnes transportées ou familles passagers), la garantie en cas de vol, d'incendie et de bris de glace.

Dans de nombreux pays la loi a rendu obligatoire la souscription d'une assurance d'une responsabilité civile 'RC' pour les possesseurs de véhicules automobiles ou plus généralement de véhicules à moteurs. Il existe aussi différentes primes facultatives qui peuvent être souscrites par l'assuré.

* Responsabilité civile (RC) :

Couramment définie comme l'institution par laquelle une personne est tenue de réparer un dommage causé à autrui, et distinguées de la responsabilité pénale, elle-même traditionnellement conçue comme l'imposition d'un châtement à qui a commis certaines violation des lois. La responsabilité civile se trouve actuellement dans une situation paradoxale : dans la plupart des nations industrialisées, elle occupe une place de premier plan. Le montant de cette garantie est représenté sous forme de code tarif.

* Définition du code tarif :

Codage appliqué par les compagnies d'assurance pour distinguer les différentes classes d'assurés regroupant certaines caractéristiques de l'individu et de son véhicule.

Il est généralement représenté sous forme d'une combinaison de 5 chiffres :

« Genre/région de circulation/usage/puissance »

- **Le code genre**

Le code genre représente les deux premiers chiffres du code tarif. Pour notre cas, nous nous intéressons au code « 00 » qui représente les véhicules particuliers sans remorque.

- **Zone de circulation**

C'est le troisième chiffre du code tarif, il existe deux zones de circulation :

- La zone nord représentée par le chiffre 1 ;
- La zone sud représentée par le chiffre 2.

- **L'usage du véhicule**

Ce code nous donne des informations sur l'utilisation du véhicule et sur la profession du conducteur, c'est le quatrième chiffre du code tarif.

- **Puissance fiscale du véhicule :**

Il s'agit du dernier chiffre du code tarif, il est représentatif de la puissance des véhicules légers, et du tonnage des véhicules dont le poids excède 3.5 tonnes.

Remarque :

Les sociétés d'assurance doivent s'adapter en permanence à la réglementation en vigueur afin de préserver leur statut d'assureur. En particulier, elles doivent respecter certaines mesures de solvabilité permettant de limiter le risque de défaillance, ce dernier étant étroitement lié à la forte volatilité de la « sinistralité ». Cette caractéristique rend nécessaire :

- la constitution de provisions prudentes pour les sinistres à payer qui intègrent la volatilité de la sinistralité
- une réassurance qui permet d'écarter les sinistres graves.
- L'existence de capitaux propres importants qui permettent d'amortir les écarts de sinistralité.

Pour cela nous nous intéressons maintenant à la réassurance, son rôle, et les différentes formes qu'elle peut avoir.

III-2-La Réassurance :

La réassurance est peu connue du grand public, pourtant c'est un secteur de l'économie indispensable à l'activité de l'assurance. De plus elle constitue un instrument de premier plan pour toute organisation soucieuse de la bonne gestion de ses risques. Bien qu'utilisée dans tous les secteurs d'activité de l'assurance, elle demeure fortement orientée vers l'assurance non-vie.

La réassurance est un mécanisme permettant de transférer tout ou une partie du risque accepté par un assureur vers un réassureur afin de limiter ses engagements. A ce titre, la réassurance est familièrement qualifiée d'assurance au deuxième degré dans la mesure où elle consiste en une véritable assurance des assureurs. En conséquence, elle représente un des secteurs d'activité les plus méconnus du public en raison d'une absence de relation directe entre les réassureurs et les assurés.

Contrairement aux sociétés d'assurance dont l'exercice de leurs fonctions est localisé à un niveau régional, provincial ou national, la réassurance se veut essentiellement internationale. Ainsi, le réassureur acceptant en général des risques de faible fréquence mais à un coût très élevé peut améliorer la mutualisation de ses risques en les répartissant à l'échelle mondiale. Cette mutualisation géographique peut même conduire, par exemple, à la couverture des tempêtes européennes, des tremblements de terre au Japon et des ouragans aux Etats-Unis à l'intérieur d'un traité de réassurance unique.

III-2-1-Rôle de la réassurance :

Le recours à la réassurance permet de répondre à deux objectifs précis :

- Protection BILAN : l'assureur transfère des risques aux réassureurs, cette cession se traduisant en quelque sorte par un « un prêt de capitaux propres » à l'assureur. Dans cette optique, l'assureur cherche à déterminer le meilleur équilibre entre son risque consolidé et sa probabilité de défaillance due à une insuffisance de capitaux propres.

- Protection RESULTAT : l'assureur transfère des risques aux réassureurs afin d'assurer une stabilité de son résultat technique dans le temps.

Au-delà de sa contribution financière au bon fonctionnement de la société d'assurance, la réassurance apporte et transmet expérience et compétence à travers une collaboration technique dans l'évaluation des risques, leur souscription et l'élaboration de nouvelles couvertures à savoir :

- compiler et représenter des sources de données de souscription partout dans le monde.
- Evaluer les risques spéciaux et les risques de « pointe ».
- Aider certaines sociétés d'assurance pour investir leurs capitaux, pour trouver des partenaires, etc.....

Leur vision globale du marché permet aux réassureurs d'aider les sociétés d'assurance à développer de nouveaux produits et leur apporter des précieux conseils dans la bonne sélection et gestion de risque.

III-2-2-Les formes de réassurance :

- Les traités: Note de présentation, note de couverture et texte contractuel
- Les facultatives: Note de présentation, note de couverture
- Les contrats dérivés: Les sinistres de marché, les double trigger, l'exemple des Weather Derivatives, les obligations à remboursements aléatoires.

III-2-2-1-Les traités de réassurance :

Dans le cadre des traités de réassurance, la réassurance est à caractère obligatoire pour la cédante et pour le réassureur dans un cadre préalablement établi. Les traités de réassurance s'appliquent à un portefeuille et/ou à une globalité d'affaires.

La réassurance obligatoire consiste à réassurer un ensemble de polices appartenant à une classe prédéterminée par un même traité. C'est un accord automatique entre les deux parties ou toute police respectant entièrement les critères de la classe doit être réassurée. Cette catégorie représente l'approche la plus souvent rencontrée.

III-2-2-2-Les facultatives :

Dans le cadre des facultatives, il s'agit de réassurance à caractère facultatif pour la cédante qui peut être:

- acceptée au cas par cas par le réassureur (et éventuellement refusée)
- acceptée a priori par le réassureur dans un cadre bien spécifiquement défini auparavant

Les facultatives s'appliquent à un risque ou à une affaire au cas par cas.

Elle consiste donc à réassurer individuellement chaque police d'assurance selon ses caractéristiques propres. Ce processus est utilisé notamment pour les grands risques industriels et les risques spéciaux faisant appel à des connaissances particulières ou les risques technologiques, pour les risques exclus de la réassurance obligatoires, et les risques ne rentrant pas dans les normes usuelles de souscription. Le mécanisme se rapproche alors de celui de la souscription en assurance directe avec la prise en charge du risque une seule police.

III-2-3-La nature de la réassurance :

Nous avons 3 types de réassurance :

- La réassurance proportionnelle: En quote-part, en excédent de plein, facultatives et Fac/Ob
- La réassurance non-proportionnelle : En excédent de sinistre (par risque, par événement), en excédent de perte annuelle.
- Les réassurances alternatives ou financières

III-2-3-1-La réassurance proportionnelle

Définition 4.1 :La réassurance est proportionnelle lorsque le réassureur s'engage à prendre une proportion de tout sinistre à la charge de l'assureur, strictement proportionnelle à la part de la prime originale qu'il a reçue de celui-ci, pour réassurer le risque affecté par le sinistre.

Les différentes formes de réassurance proportionnelle :

Au sein de la réassurance proportionnelle, on trouve:

- les traités de réassurance obligatoires en quote-part et en excédents de sinistres
- les cessions facultatives

a- Les traités de réassurance obligatoires en quote-part et en excédents de sinistres :

- Dans un traité en quote-part, l'assureur cède et le réassureur accepte obligatoirement un pourcentage constant de tous les risques protégés par le traité et dans la limite de celui-ci.
 - Dans un traité en excédents de pleins, l'assureur ne réassurera un risque que si le montant de celui-ci dépasse le montant qu'il souhaite conserver, c'est à dire le plein de conservation.
- Ainsi, à la différence du traité en quote-part, dans le traité en excédents de pleins, la portion réassurée de chaque risque est variable en fonction de la somme totale assurée et de la conservation de la cédante.

a-1-L'utilisation des traités proportionnels :

- L'utilisation du traité en quote-part

Le traité en quote-part est d'une gestion très simple et apporte une bonne garantie de réassurance à la cédante. Il est utilisé:

- par les sociétés nouvelles. Celles-ci ont des fonds propres relativement limités et une appréciation difficile des résultats techniques des premières années, elles ont donc besoin de l'appui de leur réassureur, qui pourra notamment connaître des pertes techniques au cours des premières années et qui seront compensées par la suite.
- pour augmenter la marge de solvabilité. Il permet en effet d'améliorer le rapport existant entre l'encaissement conservé qui est diminué de la part cédée en réassurance et les fonds propres de la société.
- comme composante d'un plan de réassurance. La quote-part peut être utilisée dans le cadre d'échanges d'affaires avec d'autres assureurs ou réassureurs pour des affaires présentant les mêmes probabilités de résultats. Elle peut aussi être utilisée pour faciliter le placement d'un plan de réassurance qui par ailleurs présenterait au détriment du réassureur un trop grand déséquilibre ou même une expérience mauvaise.

Il présente cependant l'inconvénient pour l'assureur de ne pas créer de capacité et de céder une part importante de primes au réassureur.

On constate cependant que le recours au traité en quote-part a tendance à diminuer dans un marché de l'assurance en pleine concentration, puisque le rôle de partenaire financier que joue le réassureur de quote-part intéresse de moins en moins des groupes d'assurance puissants financièrement.

a-2- L'utilisation du traité en excédents de pleins

Le traité en excédent de pleins présente un certain nombre d'avantages pour la cédante. L'assureur peut augmenter sa rétention de primes sans pour autant bouleverser l'équilibre du portefeuille qu'il conserve après réassurance en augmentant la valeur de son plein de rétention. Ce mode de réassurance permet à la cédante de disposer d'une capacité maximale pour une cession de primes aussi réduites que possible et facilement contrôlables.

Cependant, il existe un certain nombre d'inconvénients. le principal est que le traité en excédents de pleins peut apparaître superflu aux assureurs, puisque dès qu'un risque a fait l'objet d'une cession au traité, il y aura une répartition du sinistre entre l'assureur et le réassureur, en cas de sinistre si faible soit-il.

A la différence du traité quote-part, le traité en excédent de pleins ne peut être utilisé que dans la mesure où l'assureur connaît précisément son engagement. Ainsi, ce type de traité n'est pas utilisé dans les branches dont les engagements ne sont pas définis à l'avance comme la responsabilité civile générale par exemple.

b-Les cessions facultatives :

Dans le cadre des cessions facultatives, la cédante est libre de céder ou de ne pas céder un risque au réassureur et sa décision est prise individuellement pour chaque affaire. Le réassureur est libre d'accepter ou de refuser l'offre que lui soumet l'assureur.

On parle au sein de la cession facultative:

- de traités facultatifs/obligatoires lorsque l'assureur cède facultativement au réassureur qui a en revanche l'obligation d'accepter le risque si celui-ci fait entre dans les limites du traité.
- de traités facultatifs/facultatifs lorsque le réassureur n'a pas d'obligations d'acceptation.

III-2-3-2- La réassurance non-proportionnelle

Définition 4.2 :

La réassurance non-proportionnelle ne s'intéresse seulement au montant des sinistres, indépendamment de la taille des risques souscrits.

La réassurance non-proportionnelle comprend trois éléments:

- un seuil appelé aussi franchise ou priorité : c'est la limite que s'est fixé la cédante et qu'elle conserve pour compte propre.

- un montant d'engagement ou portée qui est le montant maximum que payera le réassureur en cas de mise en jeu de la réassurance. Le plafond désigne la somme de la priorité et de la portée de toutes les tranches.
- la tarification (taux de prime) qui correspond à la rémunération reçue par le réassureur en contrepartie du transfert de risque effectué lors de la prise d'effet de couverture.

Les différentes formes de réassurance non-proportionnelle :

La réassurance non-proportionnelle se présente sous trois formes principales:

- l'excédent de sinistres (excess of loss) par risque et par événement
- l'excédent de perte annuelle (stop loss)
- l'excédent de sinistres cumulés (aggregate excess)

Il existe aussi d'autres formes moins utilisées comme le spread loss, l'Ecomor et le Cosima.

a- L'excédent de sinistre :

Dans ce cas, l'assureur conserve sur chaque sinistre (par risque ou par événement) le montant de la priorité. Le réassureur prendra en charge l'excédent, avec ou sans limitation.

Un excédent de sinistre par risque va avoir pour objectif d'écrêter les sinistres importants provenant de risques individuels importants. Il se situe à l'intérieur du plein de souscription de la cédante et s'apparente donc aux excédents de pleins de la réassurance proportionnelle, cependant ces derniers partagent risques et sinistres dans la même proportion, y compris les sinistres mineurs affectant les grands risques. Les branches incendie, transport maritime, aviation et crédit sont concernés par cette forme de réassurance.

Un excédent de sinistre par événement joue pour un ou plusieurs risques sinistrés. Lorsqu'il y a plusieurs sinistres, une même cause doit être constatée. L'excédent de sinistre par sinistre ou événement couvre tous les cas de figure: un ou plusieurs risques touchés par une même cause. L'excédent de sinistre catastrophe n'interviendra que lorsque deux risques au moins sont sinistrés par la même cause originelle.

b- L'excédent de perte annuelle ou stop loss :

Le stop loss à l'inverse de l'excédent de sinistre prend en considération la totalité de la sinistralité de la cédante, dans une branche donnée et durant une période donnée. Le but est donc de couvrir une fréquence anormale de sinistres, petits et grands.

La priorité et l'engagement sont constitués d'un rapport sinistres sur primes, le réassureur étant engagé dès que la somme des sinistres dépasse ce rapport sinistres/encaissements des primes jusqu'au plafond prévu.

c- L'excédent de sinistre cumulé ou aggregate excess :

Comme pour le stop loss, la priorité et la portée sont calculées en additionnant les sinistres survenus dans une branche donnée et pendant une période donnée, généralement un an. Cependant, on ne se réfère pas à un encaissement de base, la portée et la priorité sont exprimés en montants absolus et ne donnent lieu à aucun ajustement postérieur.

Très simple dans le fonctionnement de base, ces couvertures sont parfois délicates à tarifier pour le réassureur qui doit rapporter portée et priorité aux chiffres de base de la cédante afin de mesurer sa véritable prise de risque.

Les autres formes de réassurance non-proportionnelle :

- L'Ecomor (excédent du coût moyen relatif)

On isole une variable: le sinistre de rang n des x plus grands dans la statistique. La priorité, la portée et le taux sont exprimés en fonction de ce sinistre ainsi déterminé.

- La Cosima (couverture des sinistres majeurs)

Les n (3 à 5 généralement) plus grands sinistres d'un exercice sont protégés pour un exercice donné au premier franc sans priorité.

- Spread loss et chainer

Ce sont des traités non proportionnels dont la tarification dépend de la statistique des années précédentes : ils sont peu usités sous leur forme classique mais ils ont servi de base à certaines formes de réassurance financière.

III-2-3-3- La réassurance financière

Définition de la réassurance financière :

La réassurance financière est un complément du programme de réassurance classique grâce à des produits impliquant largement la cédante dans les résultats du traité.

Le marché a évolué pour passer de contrat sans risque (qui étaient en fait de purs produits financiers) à de véritables produits de réassurance avec transfert de risque (comprenant à la fois risque de souscription et de déviation des cadences de règlement). A de rares exceptions près, la réassurance financière n'est donc plus un marché de pures transactions financières.

S'il est difficile de la définir, on peut toutefois dire que les éléments la caractérisant sont :

- un engagement limité
- l'expression plus explicite qu'en réassurance traditionnelle de la durée et donc de la prise en compte des revenus financiers
- la plus grande participation du réassuré dans les résultats (auto-réassurance).

La réassurance financière est une façon, pour l'assuré et pour l'assureur de régulariser ses résultats nets (de sa rétention) en créant un fonds permettant de faire face aux irrégularités futures, lorsque les possibilités légales de réserves d'équilibrage sont insuffisantes.

Elle offre également des solutions dans des situations où l'approche traditionnelle n'est pas applicable (couvertures rétrospectives sur des sinistres déjà survenus, alternative partielle au marché traditionnel en cas de manque de capacité ou en période de surtarification, risque non assurable).

La réassurance financière peut être utilisée comme un outil complémentaire de régularisation des résultats du bilan, d'escompte de réserve, ou comme un outil efficace en cas d'acquisition.

La réassurance financière est vendue à la fois par des réassureurs spécialisés et traditionnels. Toutefois, le développement de nouveaux produits et la nécessité d'inclure de plus en plus de risque de souscription exigent des compagnies de réassurance plus capitalisées et les connaissances nécessaires de souscription au risque.

Les réassureurs spécialisés sont généralement situés dans un environnement offshore doté d'une fiscalité mais surtout de possibilités comptables favorables.

Les principales caractéristiques :

Il est difficile d'établir une classification réelle des différents produits regroupés sous le vocable Réassurance financière : ces produits ont en fait constamment évolué au fil des ans pour répondre à la demande du marché.

On peut cependant présenter différentes caractéristiques:

- Produits Prospectifs et Rétrospectifs

A l'instar des produits de réassurance traditionnels, ces produits peuvent protéger des pertes et des engagements futurs : dans ce cas, on parlera de couvertures prospectives.

Si le contrat s'applique rétroactivement à des sinistres déjà survenus, on parlera de couverture rétrospective.

On trouve parfois des contrats mixtes spécifiques, ou protégeant deux portefeuilles différents par un même contrat (Couverture "Cat" prospective et couverture rétrospective sur portefeuille à déroulement long).

- Contrats continus et contrats de durée ferme

Les contrats continus (tels que Spread Loss, Funded Covers etc.) sont spécifiques à la réassurance financière dans la mesure où la perte éventuelle n'est constatée et réalisée que à la résiliation du traité.

Les contrats de durée (tels que finite risk et shared risk) constituent une étape intermédiaire entre la réassurance traditionnelle et non traditionnelle. Ils scindent la prime entre prime de risque réel et auto réassurance mais comprennent un véritable transfert de risque : le résultat du réassureur est directement associé à la survenance d'un sinistre et est connu ou estimé à la fin de la période de couverture.

Dans tous les cas, l'engagement est plafonné et le transfert de risque peut varier considérablement.

CHAPITRE IV

Contrôle stochastique de processus de diffusion en assurance

IV-I- Introduction :

On s'intéresse au problème d'optimisation pour un premier assureur, pour cela on se concentrera, dans ce chapitre, sur les problèmes à horizon de planification infini. La fonction objective principale sera la probabilité de ruine (ou de survie). Cependant la plupart des techniques présentées ici peuvent être utilisées pour d'autres types de fonctions objectives. Comme nous allons le voir dans le chapitre V.

Une tendance récente dans la gestion de risque est de remplacer le capital risque (ou une partie du Capital risque) par un contrôle de risque plus sophistiqué. Pour cela, nous allons tout d'abord voir les définitions mathématiques de base en assurance, comme le processus de risque, la charge de sécurité, etc., puis nous passerons au contrôle stochastique, où nous avons deux cas de figures importants, le premier est le contrôle par une seule variable de contrôle, telle que l'investissement en actifs risqués (marché financier), la réassurance, et les nouveaux commerces. Le deuxième cas de figure est la combinaison de plusieurs variables de contrôle, où nous allons nous restreindre à deux variables de contrôle, qui sont l'investissement et la réassurance, à la fois.

Dans ce sens les outils mathématiques présentés sont une partie de la gestion de responsabilité d'actifs, de l'analyse financière dynamique, et de la gestion du risque holistique dans l'assurance. Le contrôle stochastique a bien évolué dans le monde de la finance depuis l'apparition des documents de Merton ([47] et [48]). Les livres de Fleming & Rishel [15], Fleming & Soner [17] et de Karatzas & Shreve [41], qui couvrent la plupart des problèmes d'aujourd'hui, et les méthodes utilisées dans ce domaine.

IV-2- Analyse du risque

Dans cette partie, nous commençons par décrire le modèle classique de risque pour une compagnie d'assurance. Dans le domaine de l'actuariat, on qualifie de risque la probabilité de banqueroute de la compagnie, c'est-à-dire la probabilité pour que sa réserve devienne nul un jour, du fait d'un mauvais calcul du taux de cotisations des assurés ou de sinistres trop importants à couvrir.

IV-2-1 Présentation du modèle classique de risque

Dans le modèle le plus simple, une compagnie d'assurance dispose d'un capital initial positif u , chiffré dans une unité quelconque. Au cours du temps, le capital de cette compagnie peut évoluer en fonction des cotisations des assurés, de la fréquence des sinistres dont sont victimes les assurés et des montants à rembourser que ces sinistres occasionnent.

On convient de noter $u + X_t$ le capital au temps t . On suppose que

- Les occurrences des sinistres suivent un processus de poisson $\{N_t; t \geq 0\}$ de paramètre $\lambda > 0$;
- Le sinistre k occasionne pour la compagnie une perte aléatoire $Y_k > 0$;
- Les cotisations des assurés sont capitalisées linéairement au cours du temps à un taux constant $c > 0$.

Nous interprétons les paramètres de ce modèle en remarquant que λ représente l'intensité des sinistres et c est appelé le taux de cotisation (de prime). Dans la pratique, les cotisations sont rarement capitalisées continûment au cours du temps, mais en général à des instants discrets. L'hypothèse de linéarité est simplificatrice, et nous supposons donc que les prélèvements des cotisations chez les assurés seront faits de manière homogène et constante dans le temps. Conditionnellement à l'événement $N_t = 0$, la valeur du capital de la compagnie au temps t est donc égal à $u + ct$, ou ct est le revenu de la compagnie.

Ainsi, nous pouvons décrire la réserve de certaine branche de l'assurance non vie comme suit :

$$\text{L'excédent} = \text{Le capital initial} + \text{Le Revenu} - \text{L'Écoulement}$$

Le premier à avoir utilisé ce modèle dans l'assurance non vie est Filip Lundberg en 1903 [44]. Puis son travail a été généralisé, par Harald Cramér en 1930 [06] et [07]. Ainsi le modèle a été appelé **le modèle de Cramér-Lundberg** ou le modèle classique de risque. Où le surplus (processus de réserve) a été modélisé comme suit :

$$\begin{aligned} X(t) &= u + ct - S(t). \\ S(t) &= Y_1 + \dots + Y_{N(t)}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

Comme nous l'avons décrit plus haut : $N(t)$ un processus de Poisson homogène d'intensité constante λ . Les tailles des sinistres Y_1, Y_2, \dots sont iid, de distribution G , qui est indépendante de $N(t), t \geq 0$. u est la réserve de risque initiale; et c est le taux de prime qui est constant. Ce processus est généré par les variables aléatoires $Y_1, Y_2, \dots, W_1, W_2, \dots$ avec $Y_i \sim G$, $W_i \sim \text{Exp}(\lambda)$, ou W_i est le temps d'interarrivée entre le sinistre Y_{i-1} et Y_i . si $i \geq 2$ et W_1 est le temps d'attente jusqu'au premier sinistre. Alors $N(t)$ peut être écrit comme suit : $N(t) = \max\{k : W_1 + \dots + W_k \leq t\}$ Soit : T_i est l'instant d'occurrence du sinistre Y_i , i.e. $T_i = W_1 + \dots + W_i, i \geq 0$.

IV-2-2- Généralisation du modèle de risque classique

D'autres modèles de risque ont été appliqués à l'assurance, par mis eux le modèle de **Sparre-Andersen** ou le processus de **risque de Markov modulé**. Dans les deux modèles, on suppose que les sinistres Y_i sont iid et indépendants du processus des arrivés des sinistres $N(t)$; qui est dans le modèle Sparre-Andersen un processus de renouvellement

$$N(t) = \max\{k : W_1 + \dots + W_k \leq t\}$$

Avec W_i une suite de variables aléatoires positif iid, indépendantes des Y_i .

Pour le modèle de risque de Sparre-Andersen on a les paramètres suivants : s, c, G , et X ou X est la distribution des temps des interarrivées W_i : Dans ce modèle, le processus $X(t)$ n'est plus Markovien; pour obtenir un processus de Markov on doit agrandir l'espace d'état. Si $T(t)$ est le temps écoulé depuis le dernier sinistre, alors $(X(t), T(t))$ est un processus de Markov.

Dans le modèle de risque Markov-modulé, on considère un processus de Markov $M(t)$ homogène et continu dans le temps défini sur l'espace des états $\{1, \dots, I\}$, et d'intensités $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_I$, on utilise le processus $\lambda(t) = \lambda_{M(t)}$ comme intensité stochastique du processus de poisson non homogène $N(t)$: nous avons donc dans ce modèle les paramètres : $s, c, G, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_I, (b_{ij})_{i,j=1, \dots, I}$ où b_{ij} sont les taux (intensités) de transition du processus de Markov $M(t)$, dans ce modèle Aussi, $X(t)$ n'est pas Markovien; par contre le processus $(X(t), \lambda(t))$ est Markovien.

On peut trouver des exemples sur ces modèles de risque, dans ([62], chapitres 6 et 12.3). La généralisation la plus simple du processus de risque de Lundberg est l'implémentation d'un taux d'intérêt constant, qui permet à la réserve de gagner des intérêts à un taux constant r , Dans ce processus, les sauts sont les mêmes que ceux du processus de Lundberg et entre les sinistres le processus se développe avec la dynamique :

$$X(t)' = c + rX(t)$$

IV-2-3- Distribution des tailles des sinistres :

Nous pouvons classifier les distributions des tailles de sinistres en deux classes, la première regroupe les distributions de queue légère « light tailed », la deuxième celle des distributions de queue lourde « heavy tailed ».voir [4].

IV-2-3-1. Les distributions à queue légère:

Les distributions de sinistre à queue légère sont définies comme des distributions dont la fonctions de distribution $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$ satisfait $\bar{G} = O(e^{-ry})$ pour $r > 0$, ou O est le symbole de Landau, le tableau suivant nous donne quelque exemple de distribution à queue légère.

distribution	La queue \bar{G} ou la densité g	paramètres
Exponentielle	$\bar{G} = e^{-\theta y}$	$\theta > 0$
Gamma	$g(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} y^{\alpha-1} e^{-\beta y}$	$\alpha, \beta > 0$
Weibull	$\bar{G}(y) = e^{-cy^\tau}$	$c > 0, \tau \geq 1$
Normal centré réduite	$g(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-y^2/2}$	
Toute distribution de support borné		

Figure IV-1 : distribution des tailles de sinistre à queue légère
Toute distribution ayant un support $(0, \infty)$

IV-2-3-2. Les distributions à queue lourde:

Nous définissons les distributions de sinistre à queue lourde comme une distribution G qui satisfait $M(r) = \infty$ pour tout $r > 0$, ou $M(r) = \int_0^\infty e^{ry} dG(y)$ est la fonction génératrice des moments de Y à r . Nous noterons l'ensemble de toutes les distributions de queue lourde par H . H peut être divisé en plusieurs classes importantes, comme nous pouvons le voir ci-dessous.

Définition 4.1: Soit l une fonction mesurable de Lebesgue positive, définie au voisinage $[a, \infty)$ de l'infini est satisfaisant

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = 1 \quad \forall \lambda > 0$$

Alors nous pouvons dire que l varie lentement (dans le sens de Karamata).

Une fonction mesurable de Lebesgue $f > 0$ satisfaisant :

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{l(\lambda x)}{l(x)} = \lambda^\rho \quad \forall \lambda > 0$$

Pour $\rho \in \mathbb{R}$, f est appelé à variation régulière d'exposant ρ , et on écrit $f \in R_\rho$.

Ainsi, R_0 est la classe des fonctions à variation lente.

Définition 4.2: Soient f et g deux fonctions mesurables de Lebesgue. Alors la convolution de f et g noté par $f * g$ est la fonction

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x-z)g(z)dz$$

Notons par f^{n*} la convolution d'ordre n de f

$$f^{n*}(x) = \underbrace{(f * f * \dots * f)}_{n \text{ fois}}(x)$$

Maintenant nous sommes en mesure de définir les classes de distributions à queue lourde :

- Nous avons en premier la classe sans nom définie comme suit :

$$L = \left\{ Fdf \text{ sur } (0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1, \forall y > 0 \right\}$$

- la classe des distributions sous-exponentielles « subexponential »

$$S = \left\{ Fdf \text{ sur } (0, \infty) : \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F^{n*}}(x)}{\overline{F}(x)} = n, \forall n \geq 2 \right\}$$

- la classe des distributions avec variation régulière

$$R = \left\{ Fdf \text{ sur } (0, \infty) : \overline{F} \in R_{-\rho} = n, \forall \rho \geq 0 \right\}$$

- la classe des distributions avec variation dominante :

$$D = \left\{ Fdf \text{ sur } (0, \infty) : \limsup_{x \rightarrow \infty} \frac{\overline{F}(x/2)}{\overline{F}(x)} < \infty \right\}$$

À partir de là nous avons les relations suivantes :

- (i) $R \subset S \subset L \subset H$ et $R \subset D$
- (ii) $L \cap D \subset S$
- (iii) $D \not\subset S$ et $S \not\subset D$

distribution	La queue \bar{F} ou la densité f	Paramètres	Classe
Lognormal	$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\sqrt{2\pi\sigma y}} e^{-(\ln y - \mu)^2 / (2\sigma^2)}$	$\mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0$	S
Pareto	$\bar{F}(y) = \left(\frac{k}{k+y} \right)^\alpha$	$k, \alpha > 0$	R
Burr	$\bar{F}(y) = \left(\frac{k}{k+y^\tau} \right)^\alpha$	$k, \alpha, \tau > 0$	R
Bektander-type-I	$\bar{F}(y) = (1 + 2(\beta/\alpha)\ln y) e^{-\beta(\ln y)^2 - (\alpha+1)\ln y}$	$\alpha, \beta > 0$	S
Bektander-type-II	$\bar{F}(y) = e^{-\alpha/\beta} y^{-(1-\beta)} e^{-\alpha y^\beta / \beta}$	$\alpha > 0, 0 < \beta < 1$	S
Weibull	$\bar{F}(y) = e^{-c y^\tau}$	$c > 0, 0 < \tau < 1$	S
Loggamma	$f(y) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} (\ln y)^{\alpha-1} y^{-\beta-1}$	$\alpha, \beta > 0$	R
α -stable tronquée	$\bar{F}(y)$, où Y est une variable aléatoire α -stable	$1 < \alpha < 2$	R

Tableau IV-2 : Distributions à queue lourde

IV-2-4- Résultats de base en assurance :

IV-2-4-1-Coefficient relatif de sécurité :

Soit le processus de risque de Cramér-Lundberg défini comme suit :

$$X_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N_t} Y_k$$

Il vient immédiatement de cette définition que le risque moyen pour un intervalle $(0, t]$ est égal à

$$E[X_t] = ct + E[N_t] \alpha = (c - \lambda \alpha) t$$

Où $\alpha = E[Y]$. Nous notons

$$\gamma = (c - \lambda \alpha) / (\lambda \alpha)$$

Nous supposons par la suite que $\gamma > 0$, cela montre que le processus de risque dérive presque sûrement vers $+\infty$. Cette condition garantit bien une couverture parfaite contre le risque de sinistralité.

D'après la loi forte des grand nombres :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{X_t}{t} = c - \lambda \alpha \text{ p.s.}$$

En effet, nous avons

$$\forall t \geq 0, \frac{T_{N_t}}{N_t} \leq \frac{t}{N_t} \leq \frac{T_{N_{t+1}}}{N_t}$$

D'après la loi forte des grands nombres, nous avons

$$\frac{T_{N_t}}{N_t} \rightarrow \frac{1}{\lambda} \text{ p.s.}$$

$$\frac{N_t}{t} \rightarrow \lambda \text{ p.s.}$$

Ceci entraîne

$$\frac{X_t}{t} = c - \frac{\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}{N_t} \frac{N_t}{t} \rightarrow c - \lambda \alpha \text{ p.s.}$$

Puisque $\gamma > 0$, (X_t) devient négatif un nombre fini de fois.

IV-2-4-2 Générateurs infinitésimaux :

Des générateurs infinitésimaux L sont définis pour le processus de Markov $X(t)$ et pour une fonction $f(u)$ (suffisamment lisse) sur l'espace d'état comme suit :

$$L_t f(u) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [f(X(t+h)) - f(t)] / X(t) = u$$

Où la fonction $f(u)$ est limitée (restreinte) au domaine D de L pour lequel cette limite existe. Si le processus de Markov est homogène, alors le générateur infinitésimal ne dépend pas de t . Évidemment, D est linéaire et L_t est un opérateur linéaire.

Dans les exemples suivants, tous les processus sont stationnaires. Les domaines du générateur ne seront pas spécifiés précisément, mais il doit être clair que dans chaque cas il contient l'ensemble de toutes les fonctions $f(u)$ ayant des dérivées bornées de tous ordre.

1. $X(t) = a + bt : Lf(u) = bf'(u)$

2. $dX(t) = a(X(t))dt + b(X(t))dW(t) : Lf(u) = a(u)f'(u) + \frac{1}{2}b^2(u)f''(u)$

3. $X(t) = u + ct - S(t)$, le processus de risque de Lundberg :

$$Lf(u) = \lambda E[f(u - Y) - f(u)] + cf'(u) \tag{4.2}$$

5. $(X(t), M(t))$ le processus de risque de Markov modulé :

$$Lf(u, i) = \lambda_i E[f(u - Y, i) - f(u, i)] + cf_u(u, i) + \sum_{j=1}^I b_{ij} f(u, j)$$

6. $(X(t), T(t))$ le modèle de Sparre-Andersen :

$$Lf(u, t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)} E[f(u - Y, t) - f(u, t)] + cf_u(u, t) + f_t(s, t)$$

IV-2-5 Probabilité de ruine

Une des mesures de risque classique est la probabilité de ruine, qui est donnée par l'expression suivante, pour un horizon finie T :

$$\psi(u, T) = P(\exists t \in [0, T], X(t) < 0 / X_0 = u), \quad T \leq \infty.$$

Que nous pouvons réécrire comme suit:

$$\psi(u, T) = P(\tau \leq T / X_0 = u), \quad T \leq \infty.$$

Où τ est l'instant de ruine du processus de risque, définie par

$$\tau = \inf \{t \geq 0, X(t) < 0\}.$$

Pour un horizon infini elle est de la forme :

$$\psi(u) = P\{\exists t > 0, X(t) < 0 / X_0 = u\}.$$

Qui est égale à 1 tant que $c \leq \lambda E[Y_1]$ (aucune charge de sécurité). Dans le cas d'une charge de sécurité positive, où nous avons $X(t) \rightarrow \infty$. La probabilité de ruine satisfait l'équation intégral-différentielle de premier ordre :

$$0 = \lambda E[\psi(u - Y) - \psi(u)] + c\psi'(u), \quad u \geq 0 \quad (4.3)$$

Qui correspond au générateur infinitésimal définie par (4.2), nous verrons ça plus en détails, un peu plus loin. (Voir Grandell [20]).

Pour des tailles de sinistres exponentielles de densité :

$$f(x) = \theta \exp(-\theta x), \quad x \geq 0.$$

La probabilité de ruine est égale à :

$$\psi(u) = \frac{\lambda \alpha}{c} \exp(-r_0 u), \quad (4.4)$$

Où $\alpha = 1/\theta$ c'est la taille moyenne des sinistres et $r_0 = (c - \lambda \alpha) / (\alpha c)$ est le coefficient d'ajustement du problème, qui est la solution positive r de l'équation de Lundberg

$$\lambda + rc = \lambda E[\exp(r X)]. \quad (4.5)$$

Nous allons voir comment nous pouvons tirer l'équation (4.3) de (4.1). Considérons la probabilité de survie $\delta(u) = 1 - \psi(u)$; telle que :

$$\begin{aligned} \delta(u) &= 0 \text{ pour } u < 0 \\ 0 &= \lambda(q(u) - \delta(u)) + c\delta'(u), \quad u \geq 0, \end{aligned} \quad (4.6)$$

Où

$$q(u) = E[\delta(u - X)] = \int_0^u \delta(u - x) \theta e^{-\theta x} dx = \int_0^u \delta(x) \theta e^{-\theta(u-x)} dx. \quad (4.7)$$

Il est facile de voir que dans l'ensemble $\{u \geq 0\}$, $q(u)$ satisfait l'équation différentielle.

$$q'(u) = \theta(\delta(u) - q(u))$$

Et ainsi, dans l'ensemble $\{u \geq 0\}$ la fonction $\delta(u)$ à une dérivée seconde continue $\delta''(u)$ pour laquelle :

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda(\delta'(u) - q'(u)) + c\delta''(u) \\ &= \lambda\theta(\delta(u) - q(u)) + \lambda\delta'(u) + c\delta''(u) \\ &= c\theta\delta'(u) - \lambda\delta'(u) + c\delta''(u) \end{aligned}$$

Cette équation différentielle à coefficients constants a une solution générale de la forme :

$$\delta(u) = C_1 + C_2 \exp(-r_0 u)$$

Puisque $z = 0$ et $z = -r_0$ sont les solutions de l'équation caractéristique :

$$0 = (c\theta - \lambda)z + cz^2$$

En utilisant $\delta(u) \rightarrow 1$ pour $u \rightarrow \infty$, nous obtenons $C_1 = 1$. De (4.5) au point $u = 0$, nous obtenons $\lambda\delta(0) = c\delta'(0)$, ou $\lambda(1 + C_2) = -cr_0C_2$, ou finalement

$$-C_2 = \frac{\lambda}{cr_0 + \lambda} = \frac{\lambda\alpha}{c}$$

Alors la probabilité de survie a une solution exacte dans ce cas, elle de la forme :

$$\delta(u) = 1 - \frac{\lambda\alpha}{c} e^{-r_0 u} \text{ et } \psi(u) = \frac{\lambda\alpha}{c} e^{-r_0 u}$$

Avec r_0 le coefficient de Lundberg classique qui est égale à $r_0 = (c - \lambda\alpha)/(\alpha c)$

Dans le modèle de Markov modulé, la probabilité de ruine $\psi(u, i)$ dépend de l'excédent initial et de la valeur initiale du processus $\lambda(t)$, qui est $\lambda(0) = \lambda_i$. Et elle satisfait le système d'équations intégral-différentielles itératif de premier ordre défini comme suit :

$$0 = \lambda_i E[\psi(u - X, i) - \psi(u, i)] + c\psi_u(u, i) + \sum_{j=1}^I b_{ij} \psi(u, j), \quad u \geq 0, i = 1, \dots, I.$$

Dans le modèle Sparre-Andersen, la probabilité de ruine $\psi(u) = \psi(u, 0)$ est tirée de la fonction $\psi(u, t)$. Si les temps d'attente W_i ont une densité continue $f(\cdot)$, alors la fonction $\psi(u, t)$ satisfait l'équation intégral-différentielle suivante:

$$0 = \frac{f(t)}{1 - F(t)} E[\psi(u - X, i) - \psi(u, i)] + c\psi_u(u, t) + \psi_t(u, t), \quad u \geq 0, t \geq 0.$$

Pour plus de détails sur le calcul de la probabilité de ruine de ces modèles, voir (Paulsen [51]). Nous rappelons que toutes ces équations intégral-différentielles sont tirées à partir des générateurs infinitésimaux des processus de risque sous-jacents (voir ci-dessus, partie IV-I-2-4-2).

IV-2-6- Majoration de la probabilité de ruine et approximation de Cramér-Lundberg :

L'approche utilisée dans cette partie pour majorer la probabilité, de ruine est fondée sur l'introduction d'une martingale exponentielle M_t , cette approche constitue une démarche courante pour les questions d'atteinte.

Avec l'abus officiel de notation utilisé pour le conditionnement (voir le paragraphe sur les martingales dans le chapitre I sur le mouvement brownien). Nous supposons de plus que les variables M_t sont intégrables.

Un temps d'arrêt pour un processus est un temps aléatoire τ , tel que l'événement $(\tau \leq t)$ ne dépend que du passé du processus au temps t , pour tout $t \geq 0$. Par ailleurs, $\tau_t = \inf(t, \tau)$ est aussi un temps d'arrêt, cette fois nécessairement borné. Dans une version simplifiée, le théorème d'arrêt s'énonce de la manière suivante. Ce résultat est très utile pour estimer des probabilités de ruine.

Proposition 4.1 : (voir [49])

Soit τ un temps d'arrêt borné, i.e, $\tau < t_0 < \infty$. Alors $E[M_\tau] = E[M_0]$

Nous allons introduire le processus aléatoire suivant pour les détails voir ([49], ch. 3 et ch. 5) :

$$M_t = \frac{e^{-r(u+X_t)}}{L_{X_t}(r)}$$

Notons que

$$L_{X_t}(r) = E[e^{-rX_t}] = e^{-crt} E\left[e^{r\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right]$$

En conditionnant selon les valeurs de N_t , nous obtenons

$$E\left[e^{r\sum_{i=1}^{N_t} Y_i}\right] = \sum_{i=0}^{\infty} p(N_t = i) E[e^{rY_i}] = \exp\{\lambda t (E[e^{rY}] - 1)\}$$

Finalement, nous avons

$$L_{X_t}(r) = \exp\{t(\lambda h(r) - rc)\} \equiv e^{t f(r)}$$

Où $h(r) = E[e^{rY}] - 1 = M_Y(r) - 1$ avec $M_Y(\cdot)$ est la fonction génératrice des moments de Y la distribution des tailles des sinistres.

Et
$$f(z) = \frac{\lambda}{c} e^{r_0 z} (1 - G(z)) = \frac{\lambda}{c} e^{r_0 z} \bar{G}(z)$$

est la densité d'une loi de probabilité, pour la démonstration voir [64]

Notons $\tau(u)$ le temps de ruine (atteinte de 0). Il s'agit d'un temps d'arrêt non borné, et nous avons

$$\psi(u) = (\tau(u) < \infty)$$

Proposition 4.2: (voir [49])

Le processus (M_t) est une martingale, aussi appelée martingale de Wald.

Démonstration :

Nous utilisons l'indépendance des accroissements de (X_t) . Cette propriété provient du fait que les (Y_i) sont indépendantes et que le processus (N_t) est lui-même accroissements indépendants. Soit $s < t$, les variables Y_s et $Y_t - Y_s$ sont donc indépendants. D'où :

$$E[e^{-r(u+X_t)} \mid M_{s'}, s' < s] = E[e^{-r(u+X_s)} e^{-r(X_t-X_s)} \mid M_{s'}, s' < s] = M_s L_{X_s}(r) E[e^{-r(X_t-X_s)}]$$

Nous avons donc

$$E[e^{-r(u+X_t)} \mid M_{s'}, s' < s] = M_s L_{X_s}(r) L_{X_t-X_s}(r)$$

Puisque $L_{X_s}(r) L_{X_t-X_s}(r) = L_{X_t}(r)$, nous obtenons le résultat énoncé.

Proposition 4.3:(Inégalité de Lundberg) Nous avons

$$\forall u > 0, \psi(u) < e^{-r_0 u}. \quad (4.8)$$

Où r_0 l'exposant de Lundberg classique

Cette inéquation est appelée l'inégalité de Lundberg.

Démonstration : $\tau_0 = \tau_{t_0}$ soit $t_0 < \infty$, Considérons $\tau = \tau(u)$ (u est fixé pour la démonstration), et $\tau_0 = \tau_{t_0}$, d'après la proposition 4.1, nous avons :

$$E[M_{\tau_0}] = M_0 = e^{-ru}$$

En conditionnant, nous avons

$$E[M_{\tau_0}] = E[M_{\tau_0} \mid \tau \leq t_0]P(\tau \leq t_0) + E[M_{\tau_0} \mid \tau > t_0]P(\tau > t_0)$$

et

$$E[M_{\tau_0}] \geq E[M_{\tau_0} \mid \tau \leq t_0]P(\tau \leq t_0) = E[M_{\tau} \mid \tau \leq t_0]P(\tau \leq t_0)$$

Par ailleurs, nous avons $u + X_{\tau} \leq 0$ si $(\tau \leq t_0)$ est réalisé. Ceci entraîne, en utilisant l'inégalité de Jensen (pour la fonction $1/x$)

$$E[M_{\tau} \mid \tau \leq t_0] \geq \frac{1}{E[L_{X_{\tau}}(r) \mid \tau \leq t_0]} \geq E[e^{-rg(r)} \mid \tau \leq t_0]$$

En prenant le sup sur l'intervalle $(, t_0]$ dans l'espérance, puis en faisant $t_0 \rightarrow \infty$, nous avons

$$\psi(u) \leq e^{-ru} \sup_{t \geq 0} \exp\{t(\lambda h(r) - rc)\}$$

Dans cette dernière inégalité, r est une variable libre quelconque. Un choix possible est évidemment l'exposant de Lundberg tel que

$$\lambda h(r_0) - r_0 c = 0$$

Qui conduit au résultat annoncé (proposition 4.3)

Remarque 4.1: L'inégalité de Lundberg peut être affinée comme suit :

$$a_- e^{-r_0 u} \leq \psi(u) \leq a_+ e^{-r_0 u}. \quad (4.9)$$

Avec

$$a_- = \inf_{0 \leq z < z_0} \frac{e^{r_0 z} \int_z^{\infty} \bar{G}(y) dy}{\int_z^{\infty} e^{r_0 y} \bar{G}(y) dy}, \quad a_+ = \sup_{0 \leq z < z_0} \frac{e^{r_0 z} \int_z^{\infty} \bar{G}(y) dy}{\int_z^{\infty} e^{r_0 y} \bar{G}(y) dy}.$$

Où $\bar{G}(y) = 1 - G(y)$ la distribution queue de Y , et $z_0 = \sup\{z : G(z) < 1\}$ est la borne droite du support de G (voir [13]).

Proposition 4.4 : Le comportement asymptotique de $\psi(u)$ est déterminé par :

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \psi(u) e^{r_0 u} = \frac{c - \lambda \alpha}{\lambda M_Y'(r_0) - c} =: C. \quad (4.10)$$

Si $c \neq 0$, on alors :

$$\psi(u) \approx C e^{-r_0 u} \quad (4.11)$$

Cette approximation est appelée **approximation de Cramér-Lundberg g**

Pour des sinistres de forte intensité avec une distribution de queue lourde (pour laquelle $r_0 = 0$) le comportement est totalement différent.

Pour les sinistres de Pareto de densité $g(x) = ax^{-(a+1)}$, $x > 1$, $a > 1$ nous avons

$$\psi(u) \sim Cu^{-(a-1)}$$

C'est un comportement typique des distributions des tailles de sinistre à queues lourdes G , plus précisément pour toutes les distributions sous-exponentielles, Voir ([13] et [24]), Nous avons

$$\psi(u) \sim c \int_u^\infty G(x, \infty) dx.$$

La différence entre les deux cas apparaît en augmentant l'excédent initial, afin de partager en deux la probabilité de ruine. Dans le cas de sinistre exponentiel l'augmentation de l'excédent initial est de $u_1 = u + \log(2)/r_0$ tandis que dans le cas de sinistre de Pareto $u_1 \sim 2^{1/(a-1)}u$.

Pour une vue générale et plus complète sur les probabilités de ruine sur un horizon infini pour le modèle Lundberg voir (voir [56] et [24])

IV-3- Contrôle stochastique et variables de contrôle

Nous considérons une compagnie d'assurance gérant le risque d'un portefeuille avec des sinistres modélisés par le processus de Lundberg. Pour la gestion de risque (dynamique) de cette compagnie, nous avons différentes possibilités, et ce grâce aux différentes variables de contrôles possible pour un assureur, telles que : l'investissement optimal, réassurance optimale (il y a différentes forme de réassurance), contrôle de prime optimale, nouveau business optimal. Le choix de la variable de contrôle revient à l'assureur (décideur), qui peut choisir un contrôle par une seule variable, comme il peut faire la combinaison de plusieurs variables. Les politiques sont choisies et changées à chaque point dans le temps selon la position du risque de la compagnie. Voir [24],[25],[26],[27],[30],[31]. Nous traiterons dans cette partie seulement des politiques impliquant une seule variable de contrôle et nous essayerons de trouver la stratégie dynamique optimale pour la variable de contrôle choisie, c'est-à-dire pour chaque variable de contrôle nous définissons un problème de contrôle stochastique que nous essayerons de résoudre.

IV-3-1 Variables de contrôle

Dans cette partie, nous allons juste citer quelques variables de contrôle, tout en donnant le processus de richesse contrôlé de la compagnie d'assurance en fonction de la variable de contrôle étudiée.

IV-3-1-1 Investissement optimal :

Ici nous considérons un actif risqué (ou un nombre fini d'actifs risqués) dans lequel l'assureur peut investir et un actif sans risque, un compte bancaire, avec un taux d'intérêt ρ . À chaque instant t l'assureur investira un montant $A(t)$ de la richesse actuelle $U(t)$ dans l'actif risqué, et ce qui reste est investi dans un actif sans risque à un taux d'intérêt ρ (si $U(t) - A(t) > 0$).

Pour simplifier les calculs, nous prenons le modèle classique qui est le mouvement brownien géométrique pour la dynamique des prix d'actif $Z(t)$.

$$dZ(t) = \mu Z(t)dt + \sigma Z(t)dW(t), Z(0) = Z_0$$

Où $W(t)$ est le processus de Wiener standard.

Si $\theta(t) = A(t)/Z(t)$ est la part investie au temps t ; alors la position totale de l'assureur, qui est donc un processus de risque contrôlé, suit la dynamique :

$$\begin{aligned} dU(t) &= cdt - dS(t) + \rho U(t)dt + \theta(t)dZ(t) - \rho\theta(t)Z(t)dt \\ &= dX(t) + \rho U(t)dt + \theta(t)dZ(t) - \rho\theta(t)Z(t)dt \end{aligned}, \quad U(0) = u.$$

Que nous pouvons réécrire comme suit :

$$dU(t) = \rho U(t)dt + cdt - dS(t) + A(t)((\mu - \rho)dt + \sigma dW(t)), \quad U(0) = u. \quad (4.12)$$

Ou $X(t)$: processus de risque de Lundberg et $S(t)$ le processus de sinistralité (4.1).

Pour simplifier les étapes et les notations nous nous limiterons dans cette partie au cas $\rho = 0$. Nous tiendrons compte de toutes les stratégies de commerce possibles $\theta(t)$ qui sont des processus stochastiques IF_{t-1} mesurables (prévisibles), où (IF_t) est la filtration générée par les deux processus $Z(t)$ et $S(t)$, $t \geq 0$. Ainsi pour le choix de $\theta(t)$, nous pouvons utiliser l'information sur tous les prix des actions et des sinistres avant l'instant t ; mais pas l'information au temps t qui pourrait être le coût d'un sinistre qui se produit à l'instant t . Nous n'avons pas de contrainte de budget comme $\theta(t)Z(t) \leq U(t)$. On peut emprunter une somme d'argent arbitraire et l'investir dans l'actif risqué. Nous négligerons aussi le coût des transactions et nous tiendrons compte des sinistres de n'importe quel taille (aussi infinitésimale).

IV-3-1-2 Réassurance proportionnelle optimale :

Dans un contrat de réassurance proportionnelle chaque sinistre individuel de taille Y est divisé entre l'assureur et le réassureur selon un facteur de proportionnalité a .

L'assureur paye aY , le réassureur paye $(1-a)Y$, Pour cela l'assureur paye une prime de réassurance $h(a)$ au réassureur. Nous permettons un ajustement continu du facteur de proportionnalité, avec $a(t)$ prévisible.

Sous la stratégie $a(t)$ le processus de risque contrôlé du premier assureur est de la forme :

$$U(t) = u + ct - \int_0^t h(a(v))dv - \sum_{i=1}^{N_t} a(T_i)Y_i, \quad t \geq 0. \quad (4.13)$$

La règle habituelle pour estimer la prime $h(a)$ est le principe d'espérance :

$$h(a) = a\gamma \lambda E(Y)$$

Avec $\gamma > 1$. Si $c \geq \gamma \lambda E(Y)$, ou γ est la charge relative de sécurité.

L'assureur veut minimiser son risque alors, il peut choisir $a(t) = 0$, i.e. il transférerait tout son risque au réassureur. Pour exclure cette situation non intéressante nous supposons toujours que la réassurance est chère : $c \geq \gamma \lambda E(Y)$

IV-3-1-3- Réassurance XL illimitée optimale

Dans la réassurance des grandes pertes (excess of loss) (XL), chaque sinistre de taille Y est divisé entre l'assureur et le réassureur selon la priorité $0 \leq b \leq \infty$, L'assureur paye le $\min(Y, b)$, le réassureur paye $(Y - b)^+ = \max\{Y - b, 0\}$, pour cela l'assureur paye une prime de réassurance $h(b)$ au réassureur. Nous acceptons un ajustement continu du facteur de proportionnalité, avec $b(t)$ prévisible.

Sous la stratégie $b(t)$ le processus de risque contrôlé de l'assureur est donné par

$$U(t) = u + ct - \int_0^t h(b(v))dv - \sum_{i=1}^{N_t} \min\{b(T_i), Y_i\}, \quad t \geq 0. \quad (4.14)$$

Une des règles possibles pour calculer $h(b)$ est de nouveau le principe d'espérance, comme suit:

$$h(b) = \gamma \lambda E[(Y - b)^+]$$

Avec $\gamma > 1$: nous supposons aussi que la réassurance est chère : $c < \gamma \lambda E(Y)$.

en utilisant le principes de variance pour calculer $h(b)$, nous avons :

$$h(b) = \lambda E[(Y - b)^+] + \beta \lambda E\left[\left((Y - b)^+\right)^2\right]$$

Qui donne plus de poids à la queue de la distribution des tailles des sinistres.

Ou bien, le principe d'écart-type qui nous donne :

$$h(b) = \lambda E[(Y - b)^+] + \beta \sqrt{\lambda E\left[\left((Y - b)^+\right)^2\right]}$$

En général, la réassurance chère est la situation ou on a $c < h(0)$.

IV-3-1-4 – La réassurance XL optimale :

Dans des situations pratiques, les contrats de réassurance XL sont limités par une constante $0 \leq L \leq \infty$, qui mène à la division, ou le partage du coût de sinistre Y : le réassureur paye le $\min\{(Y - b)^+, L\}$, l'assureur paye ce qui reste $f(Y, b, L) = \min\{Y, b\} + (Y - b - L)^+$. Pour cela l'assureur paye une prime de réassurance $h(b, L)$ sous la dynamique d'un contrat de réassurance XL. En fonction de la stratégie $(b(t), L(t))$ le processus de risque de l'assureur est donné par :

$$U(t) = u + ct - \int_0^t h(b(v), L(v))dv - \sum_{i=1}^{N_t} f(b(T_i), L(T_i)) \quad (4.15)$$

La réassurance est chère si $c < h(0, \infty)$: comme précédemment pour la prime, nous avons le principe d'espérance

$$h(b, L) = \gamma \lambda E\left[\min\{(Y - b)^+, L\}\right]$$

Le principe de la variance : $h(b, L) = \lambda E\left[\min\{(Y - b)^+, L\}\right] + \beta \lambda E\left[\min\{(Y - b)^+, L\}^2\right]$

Pour réduire au minimum son risque, un assureur choisira $L(t) = \infty$, s'il pouvait se le permettre.

Ainsi $L(t) < \infty$ sera un choix raisonnable pour la compagnie d'assurance seulement si la queue de la distribution des tailles de sinistres compte pour la prime de réassurance, comme c'est le cas dans le principe de la variance ou celui de l'écart-type.

IV-3-1-5 Contrôle optimal de prime

Un assureur peut contrôler le volume de son chiffre d'affaire en fonction de la prime c , en choisissant un taux de prime le plus grand possible, et un petit nombre de contrat dans son portefeuille, et cela diminuera à son tour l'intensité des sinistres λ . Ceci sera modélisé par une fonction non croissante $\lambda(c)$: si $c(t)$ est le taux de prime instantané, alors $\lambda(c(t))$ sera l'intensité instantanée du processus des sinistres. Dans le modèle réaliste on a $\lambda(\infty) = 0$, afin de ne pas obtenir un problème de minimisation de risque insignifiant, on doit changer un peu la structure autrement l'assureur réduirait son risque à zéro par le choix d'un taux infini de prime. Une des possibilités est l'introduction d'un coût de capitale, c'est-à-dire pour l'excédent initial un taux d'intérêt ρ doit être payé continuellement.

IV-3-1-6-New business optimal

L'assureur contrôle le risque de son portefeuille en choisissant d'investir une proportion appropriée de son commerce dans un second portefeuille indépendant du premier.

Si $X(t)$ et $X_1(t)$ sont les deux portefeuilles (indépendants) de la compagnie d'assurance, tout deux modélisés comme des processus de risque de Lundberg avec les paramètres λ, c, G et λ_1, c_1, G_1 , respectivement, et si $b(t)$ est la proportion donnée au temps t dans le portefeuille $X_1(t)$; alors la position totale de l'assureur est le revenu de prime jusqu'à l'instant t , qui est égale à

$$ct + \int_0^t \lambda_1 b(u) du$$

Et les sinistres payés jusqu'au temps t sont $S(t) = Y_1 + \dots + Y_{N(t)}$ pour le premier portefeuille, avec la distribution de Poisson composé de paramètres λt et G , et $S_1(t)$ pour le second portefeuille avec une intensité de sinistres instantanées $\lambda_1 b(t)$ et une distribution des tailles des sinistres G_1 . Pour des applications pratiques, nous devons supposer $b(t) \geq 0$ et $b(t) \leq 1$ (le volume maximal possible est $X_1(t)$). Pour plus d'informations sur les variables de contrôles voir ([24], [30]).

IV-3-2- Contrôle stochastique :

Un des problèmes classiques les plus étudiés dans les finances est le problème de consommation et d'investissement optimal de Merton, comme nous l'avons vu dans le chapitre II, partie II.7. Nous allons juste le rappeler, dans sa forme la plus simple, il est défini comme suit :

Un investisseur a une richesse initiale r_0 ; il peut dynamiquement consommer une partie de sa richesse, et investir dynamiquement une autre partie dans un actif risqué, dont le processus des prix est modélisé par un mouvement Brownien géométrique. Ce qui reste est laissé dans un compte bancaire avec un taux d'intérêt constant r , si $A(t)$ est le montant investi et $c(t)$ le taux de consommation à l'instant t ; alors la richesse $R(t)$ a la dynamique suivante :

$$dR(t) = A(t)(a dt + b dW(t)) + (R(t) - A(t))r dt - c(t) dt = r_0.$$

Notre objectif est de déterminer la politique optimale $(A(t), c(t))$ parmi l'ensemble de toutes les politiques admissibles qui maximisent une fonction d'utilité de consommation de la forme

$$E \left[\int_0^\tau e^{-\rho t} u(c(t)) dt \right]$$

Où $\tau = \inf \{t : R(t) < 0\}$ est l'instant de ruine de l'investisseur, $\rho > 0$ est un taux d'actualisation et $u(x) = x^\gamma$ est une fonction d'utilité spéciale, avec $\gamma < 1$.

Ce problème est spécifié par la dynamique de l'actif risqué, par les deux variables de contrôle $A(t)$ et $c(t)$, et par la fonction objective à maximiser.

IV-3-2-1 Fonctions Objectives :

Pour définir correctement un problème d'optimisation, nous avons besoins de spécifier l'horizon de planification et la quantité qui doit être maximisée.

Nous avons le cas d'un horizon fini, où l'optimisation est faite sur un intervalle de temps fini $[0, T]$; et Le cas d'horizon infini.

Dans le cas d'horizon fini, une fonction objective peut être généralement écrite comme la somme de deux composants : le coût de fonctionnement est le coût finale.

Si $\sigma(t)$ est la stratégie avec des valeurs dans un espace d'action Σ , alors la fonction objective à maximiser est

$$E \left[\int_0^{\tau \wedge T} u(R(t), \sigma(t), t) dt + U(R(\tau), \sigma(\tau), \tau) \right]$$

Où τ est un temps d'arrêt.

Dans le cas d'horizon infini, la fonction objective est de la forme :

$$E \left[\int_0^{\tau} u(R(t), \sigma(t), t) dt + U(R(\tau), \sigma(\tau), \tau) \right]$$

Où τ est un temps d'arrêt illimité et $U(R(\tau), \sigma(\tau), \tau)$ pourraient être le coût de banqueroute, quand τ est l'instant de ruine. Pour le problème Merton à horizon infini, mentionné ci-dessus, nous avons $U = 0$ et $u(r, \sigma, t) = \exp(-\rho t)(c(t))^\gamma, \gamma < 1$. Si $c(t)$ est le taux de dividende, $U(s)$ est le coût final quand le capitale final est s , alors la valeur de la société sera égale à :

$$E \left[\int_0^{\tau} \exp(-\rho t)(c(t))^\gamma dt + U(R(\tau)) \right]$$

Nous serons principalement intéressé par la probabilité de ruine (ou de survie), i.e, le coût de fonctionnement est zéro, et $U = 1$ si $\tau = \infty, U = 0$ si non.

IV-3-2-2 Générateurs infinitésimaux :

Nous avons déjà vu la notion de générateur infinitésimal dans le chapitre I, et nous avons donné quelques exemples plus haut dans la partie IV-I-2-4-2, Cependant, dans la suite, nous aurons besoin du générateur infinitésimal pour un processus de risque contrôlé, pour ce la nous allons donner d'autres exemples, qui sont nécessaire à la suite de notre travail.

Reprenons le problème de l'investissement optimal, ou la richesse de la compagnie est définie par l'équation (4.12), pour un taux d'intérêt nul $\rho = 0$.

On considère que la stratégie de contrôle est constante. Ainsi, pour un investissement optimal avec montant constante A investi dans l'actif risqué, la position totale de l'assureur $U(t)$ aura la dynamique suivante

$$dU(t) = cdt - dS(t) + A(\mu dt + \sigma dW(t)) \quad (4.16)$$

Et ainsi le générateur infinitésimal pour le processus $(X(t), Z(t))$ (qui est Markovien) est égale à :

$$Lf(u, y) = \underbrace{\lambda E[f(u - Y, y) - f(u, y)]}_{L_x f(u)} + \underbrace{c f_u(u, y) + A \mu f_u(u, y) + \frac{1}{2} A^2 \sigma^2 f''(u)}_{L_z f(u)}$$

Nous pouvons voir que le générateur infinitésimal est indépendant de y (pour un mouvement brownien géométrique $L_Z f(u)$, la valeur initiale n'a aucune influence sur le retour de l'investissement) et ainsi nous utiliserons la notation suivante :

$$Lf(u) = \lambda E[f(u - Y) - f(u)] + cf_u(u) + A\mu f_u(u) + \frac{1}{2} A^2 \sigma^2 f''(u)$$

Pour une réassurance proportionnelle, avec une proportion constante a , le processus de risque contrôlé de l'assureur devient :

$$U(t) = u - (c - h(a))t - a \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i$$

Et le générateur infinitésimal correspondant est

$$Lf(u) = \lambda E[f(u - aY) - f(u)] + (c - h(a))f'(u)$$

Pour la réassurance illimitée XL avec priorité constante $b \in [0, \infty[$, le générateur est égale à

$$Lf(u) = \lambda E[f(u - Y \wedge b) - f(u)] + (c - h(b))f'(u)$$

Et pour un contrat de réassurance général $g(x, a)$ avec une prime de réassurance $h(a)$ et un vecteur de décision fixé a , le générateur est

$$Lf(u) = \lambda E[f(u - g(Y, a)) - f(u)] + (c - h(a))f'(u)$$

Les équations intégréo-différentielles pour la probabilité de ruine $\psi(s)$ sont toutes de la forme :

$$L\psi(u) = 0, \quad u \geq 0$$

Où L est le générateur infinitésimal du processus de risque sous-jacent. Il est évident que la fonction $\psi(u)$ est dans le domaine de L ; cependant ce problème peut être traité en utilisant le théorème de vérification, ci-après.

IV-3-2-3. L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman

Le calcul de la fonction objective à maximiser et de la stratégie optimale correspondante (si elle existe) est une tâche non insignifiante, l'espace des stratégies possibles est très grand (l'ensemble de tous les processus IF_t -prévisibles) pour une recherche complète. Nous utiliserons une méthode indirecte. Le principe de cette dernière méthode pour le cas d'horizon fini est basé sur deux observations : la première est que la stratégie optimale dépend seulement de l'état initial et le temps à la maturité. Et la deuxième est que la stratégie optimale est spécifiée par sa valeur au point de l'instant initial pour chaque état initial (et chaque instant de maturité).

Nous donnerons seulement l'équation HJB sans décrire la façon dont elle a été tirée du problème d'optimisation.

Si A est une action fixée de l'espace des actions, qui est considéré comme une stratégie constante $a(t) \equiv A$ alors le processus contrôlé $R^a(t)$ doit être un processus de Markov homogène, avec le générateur infinitésimal L^a . pour le problème d'optimisation considéré dans ce travail (vue générale), i.e, avec la fonction valeur de la forme :

$$V(u) = \max_{a(t)} E[U(R^a(\tau), a(\tau), \tau)]$$

Où $\tau = \inf \{t : R^a(t) < 0\}$ est l'instant de ruine du processus de contrôle.

L'équation HJB est de la forme :

$$\max_A L^A V(u) = 0, u \geq 0 \quad (4.6)$$

Le maximum $A = A(u)$ dans ce problème définit la stratégie optimale : si le processus contrôlé est dans l'état u , alors la stratégie optimale est $A(u)$.

Considérons comme un premier exemple sans optimisation, un processus de Wiener avec dérive positive a et diffusion constante $b \neq 0$.

$$dR(t) = a dt + b dW(t), t \geq 0, R(0) = s.$$

Nous voulons déterminer la probabilité de ruine

$$\psi(s) = P\{R(t) < 0 / R(0) = s\}, s > 0$$

Le processus $R(t)$ a le générateur infinitésimal

$$Lf(s) = af'(s) + \frac{1}{2} b^2 f''(s) \quad (4.7)$$

Pour un petit intervalle de temps de 0 à dt ; nous pouvons avoir une ruine qui se produit dans $[0, dt]$ avec la probabilité $o(dt)$, ou bien la ruine se produit après dt avec la probabilité $\psi(R(dt))$. En faisant une intégration sur toutes les valeurs possibles pour $R(dt)$, nous obtenons :

$$\psi(s) = E[\psi(R(dt))] + o(dt)$$

Supposons que la fonction $\psi(s)$ est dans le domaine D de L ; nous obtenons l'équation différentielle (qui correspond à notre équation intégral-différentielle pour les probabilités de ruine dans les modèles avec sauts)

$$0 = a\psi'(s) + \frac{1}{2} b^2 \psi''(s)$$

La solution générale de cette équation différentielle linéaire avec des coefficients constants est la suivante :

$$\psi(s) = C_1 + C_2 \exp(-2as/b^2)$$

Pour $s \rightarrow \infty$ nous devons avoir $\psi(s) \rightarrow 0$, ainsi $C_1 = 0$. À $s = 0$, nous sommes immédiatement ruinés à cause des fluctuations du processus de Wiener, et ainsi $C_2 = 0$, et nous obtenons $\psi(s) = \exp(-2as/b^2)$. Bien sûr ce n'est pas une démonstration rigoureuse pour la formule de la probabilité de ruine puisque nous supposons que $\psi(s) \rightarrow 0$. Pour cela nous utiliserons le théorème de vérification ci-dessous, pour montrer que c'est bien la solution.

Considérons maintenant le problème d'investissement optimal de Browne [7], pour une stratégie d'investissement donnée $A(t)$ ($A(t)$ est la somme investie au temps t) le processus de risque d'un investisseur est donné par (on peut réécrire (4.16) comme suit) :

$$dU^A(t) = \underbrace{a dt - b d\tilde{W}(t)}_{(1)} + A(t) \underbrace{(\mu dt + \sigma dW(t))}_{(2)}$$

Où : $\tilde{W}(t), W(t)$ sont deux processus de Wiener standards indépendants.

(1) modélise le retour du portefeuille de la compagnie d'assurance modélisé par un mouvement Brownien avec dérive, i.e. on fait une approximation du processus de poisson composé par un mouvement brownien géométrique. Et (2) représente le retour d'investissement de l'actif risqué, dont le prix est modélisé selon un mouvement Brownien géométrique.

Le problème est de déterminer la stratégie d'investissement optimale $A(t)$ qui maximise la probabilité de survie:

$$\delta(u) = P\{U^A(t) \geq 0 \text{ pour tout } t / U^A(0) = u\}$$

Selon (4.6) l'équation HJB de ce problème est de la forme :

$$0 = \max_A \left\{ aV'(s) + \frac{1}{2}b^2V''(s) + A\mu V'(s) + \frac{1}{2}A^2\sigma^2V''(s) \right\}, \quad s > 0$$

Le maximum A existe seulement si $V''(s) < 0$, et dans ce cas il est donné par

$$A = A(s) = -\frac{\mu V'(s)}{\sigma^2 V''(s)}$$

On obtient :

$$0 = aV'(s) + \frac{1}{2}b^2V''(s) + \frac{1}{2}\frac{\mu^2 V'(s)^2}{\sigma^2 V''(s)}, \quad s > 0.$$

Après la division par $V'(s)$ et le calcul de la solution négative k de l'équation :

$$0 = a + \frac{1}{2}b^2 \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\sigma^2} z$$

Nous obtenons une solution de la forme :

$$A(s) = \frac{\mu}{\sigma^2} k, \quad V(s) = 1 - \exp(-ks), \quad s > 0$$

Ceci veut dire que la somme constante $\mu k / \sigma^2$ est optimale et la probabilité de ruine résultante $\exp(-ks)$ est plus petite que la probabilité de ruine sans investissement ($\exp(-2a/b^2)s$) pour $s > 0$. Notons que la stratégie est anticyclique : si les prix montent alors les parts (les options) sont vendues, et si les prix décroissent alors des parts sont achetées. De nouveau, les calculs ci-dessus ne résolvent pas encore notre problème de maximisation puisque nous ne savons pas si $V(s)$ est la solution unique de l'équation HJB et si elle est la probabilité de survie maximale possible : Pour cela nous utiliserons le théorème de vérification ci-dessous.

IV-3-2-4. Théorème de vérification :

Le théorème de vérification, nous permet de faire le lien entre une solution d'une équation intégral-différentielle ou une équation HJB et le problème donné de calcul de probabilités de ruine ou de maximisation d'une fonction objective. Pour une meilleure vue, reconsidérons la probabilité de ruine $\psi(s)$ du mouvement Brownien avec dérive positive. Nous avons trouvé une solution $V(s) = \exp(-2a/b^2s)$ de l'équation (4.7). Soit τ le temps de ruine du processus $R(t) = at + bW(t)$; et définissons le processus: $Y(t) = V(R(t \wedge \tau))$.

Nous pouvons voir à partir de l'équation (4.7) que $Y(t)$ est une martingale pour laquelle nous avons :

$$E[Y(t)] = Y(0) = V(s)$$

Pour $t \rightarrow \infty$, nous avons $Y(t) \rightarrow 0$ sur l'ensemble $\{\tau < \infty\}$ et $Y(t) \rightarrow 1$ sur l'ensemble $\{\tau = \infty\}$.

Qui montre que $V(s)$ est en effet la probabilité de ruine pour l'excédent initial s .

$$V(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y(t)] = P\{\tau < \infty\} = \psi(s)$$

Comme un deuxième exemple, considérons le problème d'optimisation de Browne [5]. Nous avons vu que l'équation HJB (4.6) a une solution lisse bornée $V(s)$, avec la propriété que pour toutes les stratégies possibles A nous avons :

$$L^A V(s) \geq 0, s > 0. \quad (4.8)$$

Soit $A^*(t) = \mu k / \sigma^2$ la stratégie construite avec l'optimum $A(s)$ l'équation HJB (le montant constant investi) et $A(t)$ n'importe quelle stratégie arbitraire admissible. Soient $R^*(t)$ et $R(t)$ les processus de risque correspondants, τ^* et τ les instants de ruine correspondants, et définissons les processus $Y^*(t) = V(R^*(t \wedge \tau^*))$ et $Y(t) = V(R(t \wedge \tau))$.

De l'équation HJB nous pouvons voir que $Y^*(t)$ est une martingale, et selon (4.8) le processus $Y(t)$ est une sur-martingale et tous deux commencent à la valeur $V(s)$, Ainsi pour tout $t > 0$:

$$V(s) = E[Y^*(t)] \geq E[Y(t)].$$

Pour le nouveau raisonnement nous avons besoin des valeurs aux frontières, qui sont tirés du problème d'optimisation et qui sont satisfaites par la solution $V(s)$. Dans notre problème d'optimisation, nous voulons maximiser la probabilité de survie $\delta(s)$ du processus de risque (contrôlé). Les conditions naturelles aux frontière (aux limites) pour la fonction valeur sont $\delta(\infty) = 0$ (et $\delta(s) = 1$ pour $s < 0$), notre solution $V(s)$ (de 4.6) satisfait les mêmes conditions aux frontières (pour la deuxième condition, nous pouvons observer que $V(s)$ peut être arbitraire pour $s \leq 0$). Pour $t \rightarrow \infty$ nous avons :

$$Y(t) \rightarrow 0 \text{ sur } \{\tau < \infty\} \text{ et } Y^*(t) \rightarrow 0 \text{ sur } \{\tau^* < \infty\}$$

Vu que $R^*(t)$ est un mouvement Brownien avec dérive positive, $Y^*(t) \rightarrow 0$ sur $\{\tau^* = \infty\}$. Ainsi: $V(s) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y^*(t)] = P\{\tau^* < \infty\}$.

Le comportement asymptotique du processus $Y(t)$ quand $t \rightarrow \infty$ est moins clair. Nous présenterons donc pour $\varepsilon > 0$ le processus $R_1(t)$ avec une stratégie d'investissement $A(t) + \varepsilon^2$ et l'excédent initial $s + \varepsilon$; l'instant de ruine τ_1 et le processus $Y_1(t) = V(R_1(t \wedge \tau_1))$.

Nous avons $R_1(t) = \varepsilon + R(t) + \varepsilon^2(at + bW(t))$ et de la $R_1(t) \rightarrow \infty$ dans l'ensemble $\{\tau_1 = \tau = \infty\}$. Comme ci-dessus, nous avons $V(s + \varepsilon) \geq P\{\tau_1 = \tau = \infty\}$, en outre,

$$\begin{aligned} & P\{\tau_1 < \infty \text{ et } \tau = \infty\} \\ & \leq P\{\varepsilon + \varepsilon^2(at + bW(t)) < 0 \text{ pour } t\} \\ & = \exp(-2a\varepsilon^2 / (b^2\varepsilon^4)\varepsilon) \end{aligned}$$

De là, nous obtenons :

$$\begin{aligned} P\{\tau = \infty\} & \leq P\{\tau = \tau_1 = \infty\} \exp(-2a\varepsilon^2 / (b^2\varepsilon^4)\varepsilon) \\ & \leq V(s + \varepsilon) \exp(-2a\varepsilon^2 / (b^2\varepsilon^4)\varepsilon) \end{aligned}$$

Pour $\varepsilon \rightarrow 0$, on obtient $\{\tau = \infty\} \leq V(s)$, ainsi, pour une stratégie d'investissement arbitraire $A(t)$ la probabilité de survie correspondante $\delta(s)$ est bornée par $V(s)$; $\delta(s) \leq V(s)$

Et le maximum est atteint par la stratégie $A^*(t)$.

Voir [24].

Dans les problèmes d'optimisation suivants, le théorème de vérification est semblable à celui du problème de Browne [07], donc nous l'omettons et nous référerons à la littérature à chaque fois qu'il ne suit pas le même modèle (par exemple, dans le cas de réassurance optimale).

IV-3-2-5 Les étapes de la solution :

Pour la solution d'un problème de contrôle stochastique via l'équation HJB nous suivons les étapes suivantes : Soit un processus de risque contrôlé pour un contrôle constant A et son générateur infinitésimal et soit l'équation de HJB. Montrons alors que cette équation a une solution lisse satisfaisant les conditions naturelles aux frontières tirées du problème d'optimisation. Puis il suffit de montrer en utilisant le théorème de vérification que la solution de l'équation HJB est la fonction valeur du problème d'optimisation, et enfin le maximum de l'équation détermine la stratégie optimale. Le plus gros problème est dans la deuxième partie : avoir une solution explicite d'une équation HJB dans la structure considéré n'est jamais possible; la meilleur chose que nous pouvons espérer est une preuve d'existence, qui nous donne en retour une bonne méthode numérique pour l'approximation ou l'estimation.

Maintenant que nous avons défini les étapes du contrôle stochastique et les variables de contrôle possible pour une compagnie d'assurance, et avoir donné le processus de richesse contrôlé de la compagnie pour chaque variable de contrôle, nous pouvons maintenant passer à l'équation de HJB correspondant à chaque problème, ainsi que la variable de contrôle optimal.

IV-4-Investissement Optimal pour l'assureur :

IV-4-1- L'équation HJB et ses différentes formes pratiques

Considérons une stratégie d'investissement $A(t)$ (le montant investi dans l'actif risqué) qui est un processus prévisible par rapport à la filtration naturelle générée par les processus $S(t)$ (les sinistres) et $Z(t)$ (prix de l'actif risqué). Ceci nous permet d'utiliser pour la stratégie toute l'information disponible juste avant t . Ainsi $A(t)$ ne peut pas dépendre de l'information au temps t . L'équation HJB pour le problème de maximisation de la probabilité de survie par l'investissement est

$$\sup_A \left\{ \lambda E[V(u-Y) - V(u)] + (c + \mu A)V'(u) + \frac{1}{2} \sigma^2 A^2 V''(u) \right\} = 0, u > 0$$

La résolution pour A est possible à chaque fois que $V''(u) < 0$, et on obtient

$$A = A(u) = -\frac{\mu V'(u)}{\sigma^2 V''(u)}$$

Si $A(0) = 0$ alors les fluctuations du processus de Wiener mèneraient à une ruine immédiate, i.e. $V(0) = 0$; qui ne peut pas être optimal puisque dans le cas sans investissement nous avons $\delta(0) = 1 - \lambda E[Y]/c > 0$ si $\lambda E[Y] < c$, de là, $A(0) = 0$ ou $V''(0) = -\infty$, si on travaille avec $A(u)$ optimale, on obtient l'équation intégro-différentielle :

$$\lambda E[V(u-Y) - V(u)] + cV'(u) = \frac{1}{2} \frac{\mu^2 V'(u)^2}{\sigma^2 V''(u)}; u \geq 0. \quad (4.9)$$

Sous les conditions naturelles aux frontières qui sont $V(u) = 0$ pour $u < 0$, $V(\infty) = 1$ et $V''(0) = -\infty$.

L'équation (4.9) est du deuxième ordre avec une singularité à $0 (V''(0) = -\infty)$, qui est peut utilisée même pour des solutions numériques, puisque pour le terme intégral $h(u) = E[V(u - Y)]$ nous avons besoin des valeurs de $V(s)$ pour $0 \leq s \leq u$; c'est pour cela que la singularité au point zéro est inquiétante.

Nous remplacerons l'équation par un système réciproque d'équations intégro-différentielles qui mène à un algorithme numérique stable, à une preuve élémentaire pour l'existence d'une solution et à une solution presque explicite pour le cas de sinistres exponentiellement distribués, voir ([24], et [30]).

Pour simplifier les notations nous diviserons d'abord les deux côtés de l'équation par μ^2/σ^2 et notons la nouvelle intensité de sinistres et le nouveau taux de prime de nouveau par λ et c respectivement ($\lambda := \lambda\sigma^2/\mu^2$, $c := c\sigma^2/\mu^2$). Cela mène à l'équation (4.9) avec $\mu = \sigma = 1$. Ensuite nous introduisons la fonction $T(u) = A(u)^2$ et récrivons (4.9) comme suit :

$$\lambda(h(u) - V(u)) + cV'(u) = \frac{1}{2}V'(u)\sqrt{T(u)}, \quad u \geq 0. \quad (4.10)$$

Où $\sqrt{T(u)}$ est la racine positive de $T(u)$, et supposons que Y a une densité continue $g(y)$.

Nous pouvons voir que la fonction $h(u)$ a une dérivée continue pour $u \geq 0$, et ainsi nous pouvons dériver encore une fois et nous obtenons :

$$\lambda(h'(u) - V'(u)) + cV''(u) = \frac{1}{2}V''(u)A(u) - \frac{1}{2}V'(u)A'(u), \quad u \geq 0$$

En utilisant $V''(u)A(u) = -V'(u)$ et en multipliant les deux côtés de l'équation par $A(u)$, nous parvenons à l'équation :

$$\sqrt{T(u)} \left(\left(\lambda + \frac{1}{2} \right) V'(u) - \lambda h'(u) \right) + cV'(u) = \frac{1}{4}T'(u)V'(u), \quad u \geq 0. \quad (4.11)$$

Les conditions aux frontières correspondantes sont $V(u) = 0$ pour $u < 0$, $T(0) = 0$, et $V(\infty) = 1$. Les deux équations différentielles (4.10) et (4.11) sont équivalentes à l'équation (4.9), dans le sens que (4.9) a une solution lisse concave $V(u)$ satisfaisant les conditions naturelles aux frontières si et seulement si le système (4.10) et (4.11) admet une solution $(V(u), T(u))$ avec $V(u)$ concave, $T(u) = (V'(u)/V''(u))^2$ satisfaisant les conditions naturelles aux frontières. Le système d'équations différentielles peut être utilisé pour un calcul numérique et l'algorithme qui en résulte est stable. Voir [24].

On commence par $T_0(u) = 0$ et on calcul la fonction $V_0(u)$ à partir de l'équation (4.10) et les conditions naturelles aux frontières (qui donne la probabilité de survie sans investissement). Avec comme point de départ $(V_0(u), T_0(u))$, définissons l'ordre de fonctions $(V_n(u), T_n(u))$ récursivement par $h_n(u) = E[V_n(u - Y)]$,

$$\frac{\lambda(V_{n+1}(u) - h_n(u))}{c + \frac{1}{2}\sqrt{T_n(u)}} = V'_{n+1}(u), \quad u \geq 0, \quad V_{n+1}(\infty) = 1. \quad (4.12)$$

Et

$$\left[\lambda + \frac{1}{2} - \lambda \frac{h'_n(u)}{V'_n(u)} \right] \sqrt{T_{n+1}(u)} + c = \frac{1}{4}T'_{n+1}(u), \quad u \geq 0, \quad T_{n+1}(0) = 0.$$

La condition $V_{n+1}(\infty) = 1$ peut être satisfaite par l'homogénéité du système : Si $g(y)$ est une solution de (4.12), alors $\alpha g(y)$ est aussi une solution, de là, en commençant par $g(0) = 1$, nous obtenons avec $V_{n+1}(u) = g(u)/g(\infty)$ une solution satisfaisant $V_{n+1}(\infty) = 1$.

L'échantillon des fonctions $(V_n(u), T_n(u))$ converge, et la limite est une solution du système (4.10) et (4.11) satisfaisant les Conditions aux frontières naturelles.

IV-4-2 Existence d'une solution :

Il y a deux documents qui prouvent l'existence de l'équation (4.9), un basé sur des méthodes plus classiques comme dans [65] et [25], et l'autre avec une preuve de monotonie ([26]). Pour la preuve dans [25] on suppose une densité localement bornée $g(y)$ de la distribution des tailles de sinistre, pour la preuve dans [24] nous avons besoin d'une densité continue $g(y)$.

La preuve de monotonie n'est pas seulement utilisée pour le problème d'investissement optimal dans le modèle Lundberg mais elle peut aussi être utile pour le processus de risque de Markov modulés. La preuve de monotonie est comme suit : d'abord on résout le problème pour une fonction donnée fixée $h(u)$ croissante, bornée et continuellement différentiable. L'équation correspondante est l'équation HJB pour le problème d'optimisation suivant : pour une fonction d'utilité donnée $h(u)$, nous maximisons l'espérance de la richesse cumulée escomptée :

$$E \left[\int_0^{\tau} \exp(-\rho t) h(U(t)) dt \right]$$

Par le choix d'une stratégie d'investissement optimale $A(t)$: On peut montrer que l'équation HJB de ce problème a une solution lisse $V_h(u)$, le maximum de l'équation HJB définit la stratégie optimale d'investissement et $V_h(u)$ est la fonction valeur du problème. La preuve d'existence est basée sur un argument de monotonie utilisant un schéma itératif semblable à l'algorithme numérique ci-dessus, Il se sert des inégalités différentielle étudiées dans [64].

Deuxièmement, un échantillon de fonctions monotones est défini, en commençant avec la probabilité de survie sans investissement $V_0(u)$, et résolvant récursivement pour la fonction valeur $V_{n+1}(u)$ du problème d'optimisation ci-dessus avec la fonction d'utilité $h_n(u)$.

Les fonctions $V_n(u)$ sont les fonctions de valeur du problème d'optimisation d'investissement optimal jusqu'au n-ième sinistre. Si $V_{n+1}(u) \geq V_n(u)$ alors il est de même pour les fonctions correspondantes h , et vice versa. Donc nous pouvons montrer que nous avons un échantillon monotone $V_n(u)$ qui converge, et la limite s'avère être une solution du problème d'optimisation original. Comme nous allons le voir ci-dessous.

Donc d'après Hipp & Plum 2000, 2003, voir [25] et [26], nous avons:

Etape 1 : Pour $h(u)$ fixée, croissante, bornée et continuellement différentiable, l'équation de Bellman du problème d'optimisation :

$$\text{On veut avoir } \max \left\{ E \left[\int_0^{\tau} \exp(-\rho t) h(U(t)) dt \right] \right\} \text{ avec } U(t) = ct - dS(t) + A(t)dZ(t), \quad U(0) = u$$

Nous avons le système définis par les équation (4.10) et (4.11) :

$$\lambda(h(u)-V(u))+cV'(u)=\frac{1}{2}V''(u)\sqrt{T(u)}$$

$$\sqrt{T(u)}\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)V'(u)-\lambda h'(u)\right]+cV'(s)=\frac{1}{4}T'(u)V''(u)$$

Avec $U(0)=0$, et $V(\infty)=1$.

Qui est monotone au sens suivant

$$T_1 \leq T_2 \Rightarrow V_1 \leq V_2 \Rightarrow T_1 \leq T_2$$

Nous avons

$$T_0(u)=0$$

$$\lambda(V_{n+1}(u)-h(u))-cV'_{n+1}(u)=\frac{1}{2}\sqrt{T_n(u)}V''_{n+1}(u),$$

$$\sqrt{T_n(u)}\left[\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)V'_n(u)-\lambda h'(u)\right]+cV'_n(u)=\frac{1}{4}T'_n(u)V''_n(u).$$

Convergence monotone

$$0 \leq T_n(u) \leq t(u)$$

$$0 \leq V_n(u) \leq h(\infty)$$

Avec :

$$\frac{1}{4}t'(u)=\sqrt{t(u)}\left(\lambda+\frac{1}{2}\right)+c, \quad t(0)=0$$

Les limites vérifient le système d'équations.

Etape 2 : L'investissement optimal jusqu'au n-ieme sinistre

On définit les fonctions $V_n(u)$ qui sont les fonctions de valeur du problème d'optimisation d'investissement

$$V_n(u)=\max E\left[\lambda\int_0^\tau \exp(-\rho t)h_{n-1}(U(t))dt\right]$$

$V_0(u)$ est la probabilité de survie sans investissement, et elle vérifie l'équation :

$$\lambda E[V_0(u-Y)-V_0(u)]+cV'_0(u)=0$$

$$h_0(u)=E[V_0(u-Y)]$$

Pour $V_0(u), T_0(u)=0, h_0(u)$, nous avons

$$T_0(u) \leq T_1(u), V_0(u) \leq V_1(u), h_0(u) \leq h_1(u), \quad ect$$

Alors $V_n(u) \rightarrow V_\infty(u), h_n(u) \rightarrow h_\infty(u)$ (monotonie)

On veut montrer que

$$V^*(u)=\max E\left[\lambda\int_0^\tau \exp(-\rho t)g_\infty(U(t))dt\right]=V_\infty(u).$$

Nous avons déjà $V^*(u) \leq V_\infty(u)$, il reste à montrer que $V^*(u) \geq V_\infty(u)$.

Nous avons, pour une stratégie arbitraire $A(t)$:

$$V_{\infty}(u) \geq V_n(u) \geq E \left[\lambda \int_0^{\tau} \exp(-\rho t) h_n(U(t)) dt \right]$$

$$\rightarrow E \left[\lambda \int_0^{\tau} \exp(-\rho t) h_{\infty}(U(t)) dt \right]$$

Ainsi : $V^*(u) \leq V_{\infty}(u)$, ce qui implique que $V_{\infty}(u)$ résout bien l'équation H.J.B.

IV-4-3 Taille de sinistre exponentielle

Pour des tailles de sinistre exponentielles de densité $g(y) = \theta \exp(-\theta y)$, $y > 0$, à partir d'un système d'équations différentielles itératif, nous obtenons une seule équation différentielle pour $A(u)$. Ce phénomène est présent non seulement pour les distributions exponentielles, mais aussi pour les distributions arbitraires « phasetype ». Ces distributions ont la propriété agréable que l'opérateur non local $h(u) = E[V(u-Y)]$ peut être remplacé par un opérateur local impliquant les dérivées de $h(u)$ et $V(u)$.

Définition 4.3 :

$g(y)$ est une distribution « phasetype », si elle vérifie l'équation différentielle linéaire :

$$Dg(y) = \sum_{i=1}^l a_i g^{(i)}(y) = 0$$

Exemples :

Pour $Y \approx \text{Exp}(\theta)$, nous avons l'E.D :

$$\theta g(y) + g'(y) = 0$$

Pour $Y \approx \text{Erlang}(2)$, $g(y) = y \exp(-y)$ nous avons l'E.D : $g(y) + 2g'(y) + g''(y) = 0$

Pour simplifier les notations nous supposons que Y à une moyenne égale à 1. Si la densité de Y est e^{-y} , $y > 0$, alors la fonction $h(u)$ satisfait l'équation différentielle :

$$h'(u) = V(u) - h(u), \quad u > 0.$$

Nous pouvons voir à partir de (4.9) que $h'(u)$ peut être représenté avec le facteur $V'(u)$

$$h'(u) = V(u) - h(u) = \frac{1}{\lambda} \left(c + \frac{1}{2} \sqrt{T(u)} \right) V'(u), \quad u \geq 0,$$

Nous obtenons alors une équation différentielle dépendante de $T(u)$ seulement :

$$\sqrt{T(u)} \left\{ \lambda + \frac{1}{2} - c - \frac{1}{2} \sqrt{T(u)} \right\} + c = \frac{1}{4} T'(u), \quad u \geq 0. \quad (4.13)$$

Cette équation est étroitement liée à l'équation de Lundberg ci-dessous, avec laquelle nous pouvons obtenir le coefficient d'ajustement (4.5), comme suit :

$$\lambda + rc + \frac{1}{2} = \lambda E[\exp(rY)].$$

Dans le cas $Y \approx \text{Exp}(1)$, l'équation précédente devient :

$$\lambda + rc + \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{1-r} \quad \text{Où} \quad cr^2 + r\left(\lambda + \frac{1}{2} - c\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

L'équation a deux solutions, $R > 0$ et $-\gamma < 0$, puisque les coefficients de cette équation coïncident avec ceux de (4.13), nous pouvons réécrire (4.13) comme suit :

$$A'(u) = 2cA(u)\left(\frac{1}{A(u)} - R\right)\left(\frac{1}{A(u)} + \gamma\right), \quad u > 0$$

Cette équation différentielle a une solution avec $A(0) = 0$, qui satisfait l'équation suivante

$$\left(\frac{1}{A(u)} - R\right)^\gamma \left(\frac{1}{A(u)} + \gamma^R\right) = \exp(-(R + \gamma)u).$$

La fonction $t(u)$ avec $t(0) = 1$ satisfaisant $-t(u)/t'(u) = A(u)$ est :

$$t(u) = \frac{\exp(-Ru)}{(1 + \gamma A(u))^R}.$$

La fonction $t(u)$ est liée à $V(u)$ et $V'(u)$ via : $V'(u) = \frac{\lambda}{c}V(0)t(u)$, et

$$1 - V(u) = \frac{\lambda \int_u^\infty t(s)ds}{c + \int_0^\infty t(s)ds}. \quad (4.14)$$

Pour une expression explicite de la constante $\int_0^\infty u(s)ds$ voir [28]. Nous montrons dans la figure IV.1, de [25], l'optimum $A(u)$ pour différentes distributions des tailles des sinistres, $\text{Exp}(1)$: la courbe la plus basse, $\text{Erlang}(2)$ (la convolution de deux $\text{Exp}(1)$) la courbe du milieu et $\text{Erlang}(3)$ (convolution de trois $\text{Exp}(1)$) courbe supérieure).

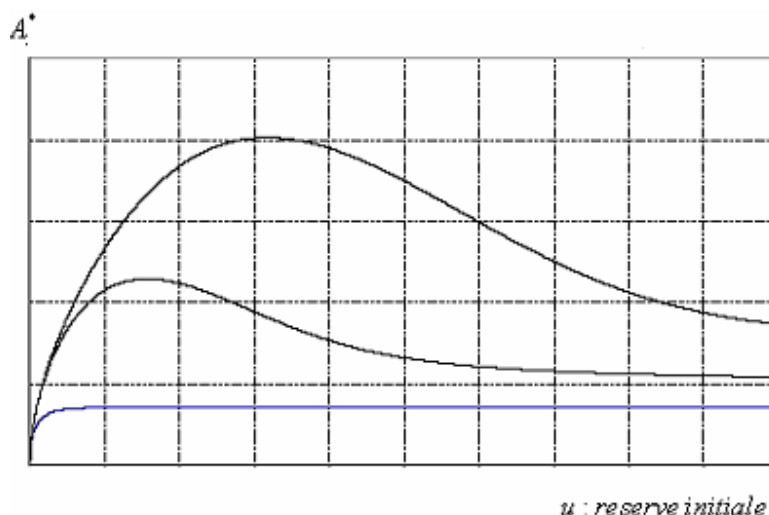


Figure IV.1 : Stratégies d'investissement optimales pour des sinistres d'Erlang

IV-5- Réassurance optimale et new business optimal

Pour la réassurance optimale nous présenterons les étapes générales comme dans [64] et [26]. Soit A l'espace des actions possibles, et pour $a \in A$ soit $f(Y, a)$ la partie du sinistre Y payée par l'assureur et soit $Y - f(Y, a)$ la partie payée par le réassureur.

Nous supposons que $0 \leq f(y, a) \leq y$ et que $y \rightarrow f(y, a)$ est non décroissante pour tout $a \in A$. En outre, A doit être un espace compact topologique pour lequel $a \rightarrow g(y, a)$ est continue pour tous y .

Finalement, nous supposons qu'il y a $a_0 \in A$ pour lequel $f(y, a_0) = y$ pour tout y . La prime de réassurance pour un actif a égale $h(a)$, une fonction continue sur A . Alors le processus de risque de l'assureur sous une stratégie dynamique $a(t)$ se développe comme suit

$$U(t) = u + ct - \int_0^t -h(a(s))ds - \sum_{i=1}^{N(t)} f(Y_i, a(T_i)), \quad t \geq 0.$$

Le problème est de déterminer la stratégie dynamique optimale admissible $a(t), t \geq 0$, pour laquelle la probabilité de survie de l'assureur est maximale. Les stratégies admissibles $a(t)$ sont des processus prévisibles (par rapport à la filtration générée par $S(t)$). L'équation HJB pour ce problème est

$$\sup_{a \in A} \{ \lambda E[V(u - f(Y, a)) - V(u)] + (c - h(a))V'(u) \},$$

Et les conditions naturelles aux frontières sont $V(u) = 0$ pour $u < 0$ et $V(\infty) = 1$. Il n'y a aucun exemple pour lequel cette équation a une solution explicite, pas même pour le maximum $a(u)$. Le but de cette partie est de prouver l'existence d'une solution lisse pour cette équation et déterminer un algorithme numérique pour son calcul. Dans certain cas, nous pouvons donner les propriétés générales de la solution optimale

L'approche générale commence par l'observation que $V' > 0$, et de là, le sup est atteint pour un certain a pour lequel $c - h(a) > 0$. La résolution pour $V'(u)$ nous donne :

$$V'(u) = \inf_{a \in A_0} \left\{ \frac{\lambda E[V(u) - V(u - f(Y, a))]}{c - h(a)} \right\} \quad (4.15)$$

Où $A_0 = \{a \in A : h(a) < c\}$. Cette équation peut être résolue via l'itération :

$$V'_{n+1}(u) = \inf_{a \in A_0} \left\{ \frac{\lambda E[V_n(u) - V_n(u - f(Y, a))]}{c - h(a)} \right\}, \quad u \geq 0,$$

En commençant par $V_0(u)$ la probabilité de survie sans réassurance, i.e. avec la spécification du contrat a_0 . L'échantillon de fonctions $V_n(u)$ est non décroissant, ainsi il converge vers une fonction bornée $V(u)$ qui s'avère être une solution de l'équation (4.15). Donc nous pouvons tirer l'existence d'une solution dans la plupart des structures générale. Pour le calcul numérique, l'équation (4.15) nous donne un algorithme stable. Les conditions aux frontières peuvent de nouveau être vérifiées en utilisant l'homogénéité de l'équation.

Il y a plusieurs règles possible d'estimation de $h(a)$ pour le contrat de réassurance. Comme nous l'avons déjà vu, une des règles possibles est le principe d'espérance :

$$h(a) = \lambda \rho E[Y - f(Y, a)]$$

Avec $\rho > 1$. La réassurance est chère sous cette règle si $\lambda \rho E[Y] > c$.

Avec le principe de la variance, nous avons :

$$h(a) = \lambda E[Y - f(Y, a)] + \rho \lambda E[(Y - f(Y, a))^2]$$

Qui est cher si $\lambda E[Y] + \rho \lambda E[Y^2] > c$.

Pour le new business optimal, nous obtenons une équation HJB plus simple pour laquelle la stratégie optimale est le « bang-bang » (puisque l'équation HJB est linéaire par rapport aux variables de contrôle) : l'équation HJB est la suivante :

$$0 = \sup_{0 \leq b \leq 1} \{ \lambda E[V(u - Y) - V(u)] + c V'(u) + b \lambda_1 E[V(u - Z) - V(u)] + b c_1 V'(u) \}$$

Qui a un optimum $b = b(u)$, qui est égal à zéro si $\lambda_1 E[V(u - Z) - V(u)] + c_1 V'(u) \leq 0$, et est égal à 1 si $\lambda_1 E[V(u - Z) - V(u)] + c_1 V'(u) > 0$, Ceci donne la formule suivante pour la dérivée $V'(u)$:

$$V'(u) = \min \left\{ \frac{\lambda E[V(u) - V(u - Y)]}{c}, \frac{\lambda E[V(u) - V(u - Y)] + \lambda_1 E[V(u) - V(u - Y)]}{c_1 + c_2} \right\}. \quad (4.16)$$

Cette équation peut être résolue via l'itération:

$$V'_{n+1}(u) = \min \left\{ \frac{\lambda E[V_n(u) - V_n(u - Y)]}{c}, \frac{\lambda E[V_n(u) - V_n(u - Y)] + \lambda_1 E[V_n(u) - V_n(u - Y)]}{c_1 + c_2} \right\}.$$

Qui nous donne un échantillon non décroissant des fonctions $V_n(u)$ convergeant vers une fonction $V(u)$ qui est une solution de (4.16). Pour le calcul numérique, la formule (4.16) nous donne un algorithme stable.

IV-5-1 Réassurance proportionnelle optimale :

Ici, $A = [0, 1]$ et $f(y, a) = ay$. Nous considérons la règle suivante de calcul de prime de réassurance :

$h(a) = \lambda \rho (1 - a) E[Y]$ avec $\lambda \rho E[Y] > c$, l'équation HJB dans ce cas est de la forme :

$$V'(u) = \inf_{a \in [0, 1]} \left\{ \frac{\lambda E[V(u) - V(u - aY)]}{c - \lambda \rho (1 - a) E[Y]} \right\}, \quad u \geq 0. \quad (4.17)$$

Nous ne pouvons pas calculer la fonction de valeur ou l'optimum dans leurs formes explicites, pas même dans le cas de taille de sinistre exponentielle.

Cependant pour les distributions exponentielles (ou phasetype), nous pouvons remplacer l'opérateur non local $f(u, a) = E[V(u - aY)]$ par un opérateur local, pour les sinistres de densité $g(y) = \exp(-y)$, $y > 0$, nous avons

$$f_u(u, a) = \frac{1}{a} (V(u) - f(u, a)), \quad u > 0.$$

Nous remarquons que le minimum dans (4.17), est $a \in (a_1, 1]$ avec $a_1 > 0$ pour $\lambda\rho(1-a_1)E[Y] = c$. Ceci implique que pour l'optimum nous avons $a(u) \geq a_1$. De là, pour le processus de risque contrôlé $U^*(t)$ et sous la stratégie optimum, nous avons des sinistres bornés inférieurement par une constante positive. Alors nous pouvons facilement montrer que $U^*(t) \rightarrow \infty$ sur l'ensemble de non ruine $\{\tau^* = \infty\}$. Nous ne pouvons pas faire cette hypothèse de borne inférieure pour une stratégie arbitraires $a(t)$; et de là pour le théorème de vérification, nous avons besoin d'un raisonnement différent. Dans le problème d'investissement optimal nous avons remplacé le processus contrôlé $U(t)$ par un autre avec un léger changement de contrôle et d'excédent initial. Ici nous pouvons remplacer le processus contrôlé $U(t)$ par un processus où le taux de prime c du premier assureur est légèrement changé et utilisant ensuite la continuité de la solution de (4.17) par rapport à c . Pour des détails voir Schmidli [59] Et Vogt [63].

Dans la figure IV.2, de [25], nous montrons une fonction optimum pour le cas de sinistres exponentiels avec des moyennes différentes. Étonnamment, nous voyons différents types de fonctions : Pas de réassurance pour tout $s(a(s) \equiv 1)$ continue, non-croissante et finalement avec saut et ensuite croissante. Nous verrons plus en détail la convergence de $a(s)$ dans chaque cas dans la partie IV.6.3.

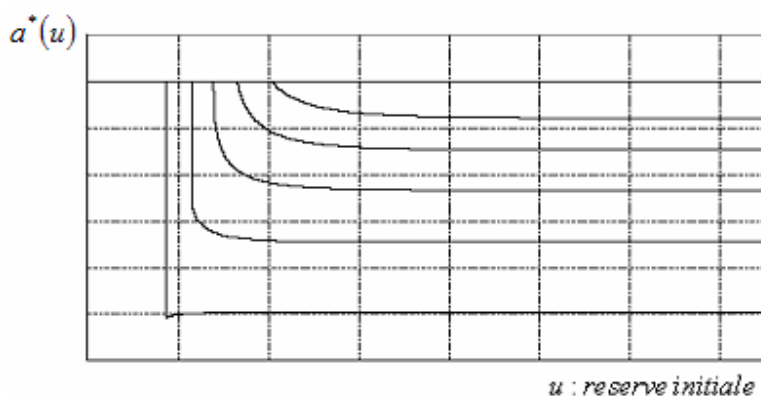


Figure IV.2 : Stratégies de réassurance proportionnelle

IV-5-2 Réassurance XL illimitée optimale

Ici, $A = [0, \infty]$ et $f(u, a) = y \wedge a$. Nous considérons tout d'abord $h(a) = \lambda\rho E[(Y - a)^+]$, le principe d'espérance. L'équation HJB lit La fonction à être réduite au minimum est discontinue :

$$V'(u) = \inf_{0 \leq a \leq \infty} \frac{\lambda E[V(u) - V(u - Y \wedge a)]}{c - h(a)}, \quad (4.18)$$

La fonction à minimiser est discontinue :

$$f(u, a) = E[V(u - Y \wedge a)]$$

Avec un saut à $a = u$: Dans la figure IV.3 nous montrons les fonctions $f(u, a)$ pour des Tailles de sinistre exponentielles. Nous voyons que le maximum est $a = \infty$ chaque fois que le maximum n'est pas dans $[0, u]$ (puisque pour $a > u$ nous avons $E[V(u - Y \wedge a)] = E[V(u - Y)]$ et puisque $h(u)$ est non croissante). Donc le maximum sera $a = \infty$ ou $a = u$ ou dans l'intervalle (a_1, u) où a_1 est tiré de $h(a_1) = c$.

Pour des sinistres exponentiels pour lesquels le calcul numérique de la fonction valeur $V(u)$ peut être simplifié pour $g(y) = \theta e^{-\theta y}$, nous avons

$$\begin{aligned} f(u, a) &= \int_0^a V(u-y)g(y)dy + V(u-a)e^{-\alpha a} \\ &= \int_0^u V(y)g(u-y)dy - e^{-\alpha a} \int_0^{u-a} V(y)g(u-a-y)dy + V(u-a)e^{-\alpha a} \\ &= f(u) - e^{-\alpha a} f(u-a) + V(u-a)e^{-\alpha a} \end{aligned}$$

Où $f(u) = E[V(u-Y)]$. Dans la figure 4, nous montrons le maximum $a(u)$ pour des tailles de sinistre exponentielles, pour s petit, nous avons $a(u) = \infty$, alors $a(u) = u$, ce qui signifie que sous cette réassurance le sinistre suivant ne causera pas de ruine et alors $a(u) = u$ avec convergence de $a(u)$. Pour le théorème de vérification, qui utilise de nouveau la variation de l'intensité la prime et pour d'autres détails techniques voir [29] et [63].

IV-5-3 Optimale XL réassurance :

Pour la réassurance XL avec limite nous avons un problème de contrôle avec deux variables de décision : $A \in [0, \infty] \times (0, \infty]$ où $(b, L) \in A$ représente le vecteur de priorité b et de limite L .

Aucune réassurance ne sera identifiée pour la paire $(0, \infty)$, dans ce cas nous ne pouvons pas dire grand-chose sur la fonction valeur et la stratégie de réassurance optimale, à part de l'existence et du théorème de vérification et les propriétés asymptotiques dans le cas des sinistres faibles. C'est dû à l'estimation coriace des variables de décision bivariées.

On pourrait supposer que l'assureur choisirait toujours $L = \infty$ puisque sa survie sera causée par les événements extrêmement grands et donc il réassurera la queue illimitée de la distribution des tailles de sinistre, tant que la prime de réassurance ne donne pas beaucoup de poids à la queue. Ce serait le cas, par exemple, pour les sinistres de Pareto et pour le principe d'espérance. Cependant, Vogt [63] a montré que $L = \infty$ n'est jamais optimal sous le principe d'espérance et pour des grandes tailles de sinistre de densité $g(y)$, et avec taux de hasard $r(y) = g(y)/(1-G(y))$ pour lequel $r(y) \rightarrow 0$ ou $y \rightarrow \infty$ (qui est vrai pour des sinistres de Pareto). Et pour des sinistres exponentiels et Le principe d'espérance $L = \infty$ est toujours optimal. C'est contre l'intuition, Quoique vrai.

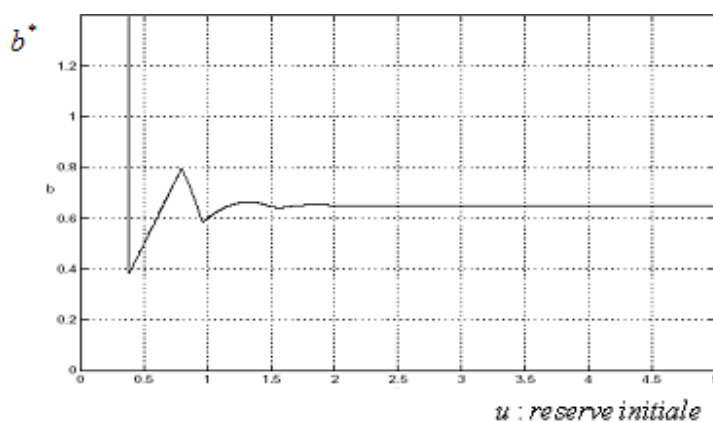


Figure 4 : Stratégies de réassurance XL optimale

IV-5-4 nouveau business optimal :

Ici nous avons $A \in [0,1]$ et l'optimum $a(u)$ est égal à 1 pour $u \leq u_0$ et zéro pour $u > u_0$, où u est le point d'intersection des deux courbes de l'Équation HJB

$$u \rightarrow \frac{\lambda E[V(u) - V(u - Y)]}{c}$$

$$u \rightarrow \frac{\lambda E[V(u) - V(u - Y)] + \lambda_1 E[V(u) - V(u - Z)]}{c + c_1}$$

Au point $u = 0$ le choix $b = 1$ est optimal chaque fois que $c/\lambda < c/\lambda_1$, i.e. même si le business est non-profitable (sans chargement de sécurité). Bien sûr, de telles stratégies peuvent être possible seulement s'il y a un marché sur lequel le business de la compagnie d'assurance peut être vendue (voir [27]).

IV-6-Stratégies et fonctions valeurs le cas asymptotique

IV-6-1 Investissement optimal : sinistres exponentielles

Dans le cas de sinistres exponentiels l'équation suivante caractérise $A(u)$:

$$\left(\frac{1}{A(u)} - R \right)^\gamma \left(\frac{1}{A(u)} - \gamma \right)^R = \exp(-(R + \gamma)u)$$

Où $A(u) \geq 0$.

Cela implique $A(u) \rightarrow 1/R$ pour $u \rightarrow \infty$, Formule (4.14) et la relation asymptotique

$t(u) \sim \exp(-Ru)$ implique tout les deux que la fonction valeur asymptotique $V(u)$ est donnée par $1 - V(u) \sim C \exp(-Ru)$, $u \rightarrow \infty$ où C est une constante positive. La même expression asymptotique peut être obtenue à partir d'une stratégie constante : $A(u) \equiv 1/R$ rapportant une probabilité de survie $V_1(u)$ satisfaisant de $1 - V_1(u) \sim C_1 \exp(-Ru)$, $u \rightarrow \infty$.

IV-6-2 Investissement optimal : sinistres de forte intensité

Pour les grandes sinistres (comme la famille de distributions sous-exponentielles), une théorie générale sur la fonction valeur asymptotique pour les problèmes d'investissement optimal n'est pas disponible. Un cas a récemment été traité et résolu selon la théorie de Karamata pour les fonctions variant régulièrement. C'est le cas de la distribution des tailles de sinistre avec queue variant régulièrement avec l'exposant $\rho < -1$, i.e.

$$P(Y > t) = t^\rho L(t), \quad t \rightarrow \infty$$

Avec une fonction variant lentement $L(t)$. Dans ce cas, l'asymptotique de la probabilité de ruine sans investissement est donné par

$$\psi^0(u) \sim C_0 u^{\rho+1} L_0(u), \quad u \rightarrow \infty$$

Avec une fonction variant lentement différente $L_0(t)$. Gaier et Grandits [68] ont pu prouver qu'avec l'investissement optimal, la probabilité de ruine $\psi(u) = 1 - V(u)$ satisfait :

$$\psi(u) \sim C_1 u^\rho L_1(u), \quad u \rightarrow \infty$$

Et l'optimum $A(u)$ est asymptotiquement linéaire,

$$A(u) \sim \frac{a}{b^2(1-\rho)^u}, \quad u \rightarrow \infty$$

Avec la stratégie tirée de la fonction linéaire $A(u) = (a/(b^2(1-\rho)))$ nous pouvons obtenir presque le même comportement asymptotique de la probabilité de ruine correspondante $\psi^1(u)$:

$$\psi^1(u) \sim C_2 u^\rho L_2(u), \quad u \rightarrow \infty$$

Dans le cas des grands sinistres, on peut améliorer la situation de l'assureur : $u^{\rho+1}$ est remplacé par u^ρ et cela peut être réalisé, au moins au même ordre, ceci peut être prouvé, en utilisant des méthodes de [68], par l'investissement d'une Proportion constante spécifique de richesse actuelle.

IV-6-3 Réassurance optimale

Pour le problème de réassurance général il y a un comportement asymptotique de la fonction valeur et de la stratégie optimale dans cas des petits sinistres : nous pouvons montrer que l'arrangement $f(y, a)$, $a \in A$ satisfaisant les hypothèses :

- A est un espace compact topologique,
- $y \rightarrow f(y, a)$ est continue pour tout $y \in IR$
- $y \rightarrow f(y, a)$ est monotone pour tout $y \in A$
- $|f(y, a) - f(z, a)| \leq |y - z|$ pour tout $y \in A$
- Le coefficient d'ajustement $R = \sup_{a \in A} R(a)$ existe, ou $R(a)$ est la solution positive de l'équation

$$\lambda + (c - h(a))r = \lambda E[\exp(rf(Y, a))],$$

Nous pouvons montrer que pour les distributions de taille de sinistre satisfaisant :

- Y a une densité continue $g(y)$.
- $E[\exp(rY)] > \infty$ pour $r > R$
- $\sup\{E[\exp(R(Y-z))|Y-z]\} > \infty$

La fonction valeur du problème satisfait la relation asymptotique

$$1 - V(u) \sim C \exp(-Ru)$$

Et pour la stratégie optimale nous avons

$$a(u) \rightarrow a^*, \quad t \rightarrow \infty$$

Où a^* est solution pour laquelle $R(a)$ atteint le maximum (voir Vogt [63]).

Pour la probabilité de survie $V_1(u)$ du processus contrôlé avec une stratégie constante $a(t) = a^*$ nous avons

$$1 - V(u) \sim C_1 \exp(-Ru)$$

Le calcul du coefficient d'ajustement :

$$R = \sup\{R(a) : a \in A\}$$

peut être simplifié : R est le paramètre positif pour lequel la fonction $V(u) = 1 - e^{-Ru}$ satisfait l'équation HJB, i.e.

$$0 = \sup_{a \in A} \{\lambda E[1 - \exp(Rf(Y, a))] + R(c - h(a))\},$$

Et un a^* est le maximum de cette équation. Pour voir cela, soit R^* la solution de l'équation ci-dessus, ou nous supposons que le sup est atteint à $a^* \in A$. Observons tout d'abord que pour $a \in A$ arbitraire, nous avons

$$\lambda E[\exp(R^* f(Y, a)) - 1] \geq R^*(c - h(a)),$$

Le coefficient d'ajustement $R(a)$ est défini via

$$\lambda E[\exp(R(a)f(Y, a)) - 1] = R(a)(c - h(a)),$$

Et nous avons

$$\lambda E[\exp(rf(Y, a)) - 1] \geq r(c - h(a))$$

Si et seulement si $r \geq R(a)$, en appliquant cela pour $r = R^*$ nous obtenons $R^* \geq R(a)$ pour tout $a \in A$. Puisque $R^* = R(a^*) \leq R$, nous obtenons l'affirmation $R = R^*$

Pour les nouveaux aspects sur la maximisation du coefficient d'ajustement voir [28].

Pour les sinistres de forte intensité, la situation est moins transparente. Pour la réassurance XL illimitée le processus contrôlé a un coefficient d'ajustement égale à $R = \sup_{a \in A} R(a)$, et avec cette quantité l'inégalité de Lundberg $1 - V(u) \leq \exp(-Ru)$ est vérifiée.

Les expériences numériques confirment l'hypothèse, que dans ce cas aussi, les stratégies convergent vers a^* pour laquelle $R^* = R(a^*)$ (voir Vogt [63]).

Pour la réassurance XL (limitée) le coefficient d'ajustement n'existe pas, mais des expériences numériques semblent toujours indiquer que les stratégies convergent, (voir [66]). Dans ce domaine, il y a beaucoup de questions intéressantes et qui ouvrent des recherches appropriées pour des applications pratiques.

IV-7-Contrôle stochastique par l'investissement et la réassurance

Dans cette partie, on s'intéresse à la minimisation de la probabilité de ruine par l'investissement et la réassurance. On prend en considération un modèle de risque classique, où on suppose que l'investissement en actifs risqués est modélisé selon le modèle de Black et Scholes, il est de même pour la réassurance, comme nous l'avons vu précédemment :

Soit le processus de risque : $X_t^{01} = u + ct - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$

Où $u \geq 0$ est le capital initial, $c > 0$ est le taux de prime, $(N(t))_{t \geq 0}$ est un processus de poisson de taux $\lambda \geq 0$ modélisant le nombre de sinistre sur $[0, t]$, et $(Y_i : i \in \mathbb{N})$ est une suite de variables aléatoires iid et indépendante de N , modélisant la taille des sinistres, et de fonction de distribution $G(y)$ où $G(0) = 0$. Nous notons par T_i l'instant d'occurrence du i -eme sinistre. Nous interprétons ici le processus $\{X_t^{01}\}$ comme une approximation du risque collectif, après escompte par inflation, i.e. la prime et la taille des sinistres augmentent par inflation. Dans le reste de cette partie nous considérerons que toutes les quantités monétaires sont escomptées par inflation.

Nous supposons que le taux de prime est fixé d'avance, et nous n'avons pas besoin de supposer que la charge de sécurité est positive, par ce que cette dernière découle directement de l'investissement, aussitôt qu'un excédent devient assez important.

Comme nous le savons la compagnie d'assurance a plusieurs décisions à prendre, nous considérons dans cette partie que la compagnie à la possibilité d'investir son capital dans un actif risqué et de prendre une réassurance, nous considérons la réassurance proportionnelle, afin d'éviter les problème techniques, et nous supposons que $G(y)$ est continue.

L'actif risqué est décrit selon le mouvement Brownien géométrique :

$$Z_t = \exp\left\{\sigma W_t + \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t\right\}$$

Où W_t est le mouvement brownien standard, les paramètres μ et σ sont supposés strictement positifs et Z_t est la valeur escomptée au temps t d'une unité investie au temps 0.

Soit $\{A_t\}$ la quantité investie dans l'actif risqué au temps t . Admettons que la compagnie d'assurance peut investir plus que son excédent actuel dans l'actif risqué, dans ce cas l'argent doit être emprunté pour une telle stratégie. Cependant, pour un grand capital, le fait d'investir plus que l'excédent dans l'actif risqué ne peut être optimal, rappelons que la probabilité de ruine d'un mouvement brownien décroît très rapidement suivant une loi exponentielle. (voir [37]).

Le niveau de rétention de la réassurance est $b_t \in [0, 1]$, ce qui signifie que pour un sinistre qui se produit au temps t , l'assureur paye $b_t Y$, et le réassureur $(1 - b_t) Y$. Pour cette réassurance le taux de prime est $c(b_t)$ doit être payé. Les stratégies $\{A_t\}$ et $\{b_t\}$ doivent être mesurables et prévisibles par rapport à la plus petite filtration continue $\{F_t\}$, telle que $\{(X_t^{01}, W_t)\}$ soit mesurable. Alors le processus de surplus vérifie l'équation différentielle stochastique suivante :

$$\begin{aligned} dX_t^{AB} &= (c - c(b_t) + uA_t)dt + \sigma A_t dW_t - b_t dS_t \\ X_0^{AB} &= u \end{aligned} \quad (4.19)$$

Où $S_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i = u + ct - X_t^{01}$ est le processus de sinistre.

Afin que $\{X_t^{AB}\}$ soit bien définie, nous supposons que $\{A_t\}$ est localement bornée. Le temps de ruine est défini comme suit :

$$\tau^{AB} = \inf\{t \geq 0 : X_t^{AB} < 0\}$$

C'est un temps d'arrêt par rapport à la filtration $\{IF_t\}$.

La quantité à optimiser est la probabilité de ruine ultime :

$$\psi^{AB}(u) = IP\{\tau^{AB} < \infty\}$$

i.e. nous voulons maximiser la probabilité de survie $\delta^{AB}(u) = 1 - \psi^{AB}(u)$. La fonction valeur correspondante est $\delta(u) = \sup_{A,B} \delta^{AB}(u)$.

Nous faisons les hypothèses suivantes sur la fonction $c(b)$. La fonction est décroissante et continue, $c(1) = 0$, $\lim_{b \uparrow 1} c(b)/(1-b) > 0$, et il existe une valeur $\underline{b} > 0$ telle que $c(b) > c$ pour $b < \underline{b}$ et $c(b) \leq c$ pour $b \geq \underline{b}$. Si $E[Y] = \infty$, nous supposons que $c(0) < \infty$. L'existence de b est nécessaire afin d'empêcher que la totalité du portefeuille ne soit réassuré, rapportant $\delta(u) = 1$ pour tout u .

Le fait que $c(b)$ soit continue n'est pas nécessaire mais simplifiera la suite de notre travail, et le fait que $c(b)$ soit décroissante découle naturellement (en prétendant que la réassurance soit un meilleur marché). Si $c(b)$ n'est pas strictement décroissante au voisinage de 1, nous choisirons toujours une réassurance maximale avec un coût nul, et le problème pourrait être reformuler autrement, avec des sinistres réassurés avec des coût nuls au départ. Dans le cas où $c(b)$ est décroissante au voisinage de 1, nous avons une prime linéaire qui est une condition technique et qui implique que la stratégie de réassurance optimale pour un petit capital n'est pas la réassurance.

Si $E[Y] = \infty$ la condition sur $C(0)$ est nécessaire afin d'éviter la ruine certaine (le portefeuille entier peut être réassuré). Cependant de tels sinistres ne sont pas assurables, mais il y a des compagnies qui prétendent tout assurer.

V-7-1-L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

Supposons que la fonction $\delta(u)$ est deux fois continuellement différentiable, les intégrales stochastiques par rapport au mouvement Brownien sont des martingales bornées. Alors nous pouvons montrer que la fonction $\delta(u)$ satisfait l'équation H.J.B, voir [60]:

$$\sup_{b \in [0,1]} \sup_{A \geq 0} \left\{ \frac{1}{2} \sigma^2 A^2 \delta''(u) + (c - c(b) + \mu A) \delta'(u) + \lambda (E[\delta(u - bY)] - \delta(u)) \right\} = 0 \quad (4.20)$$

Où $\delta(u) = 0$ pour $u < 0$, une des conditions aux frontières est $\delta(\infty) = 1$, une autre condition sera déterminée ci-dessous.

Il s'en suit immédiatement que la fonction $f(u) = k\delta(u)$ résout l'équation (4.20) avec la condition aux frontières $f(\infty) = k$. Au lieu de cela nous allons chercher une solution avec $f(0) = 1$; nous avons $\delta(0) > 0$ qui découle du fait que nous n'avons ni investissement ni réassurance si la charge de sécurité est positive; si cette dernière est négative, nous avons une probabilité positive pour qu'aucun sinistre ne se produit (pas de revendication) avant que le capital ne soit assez important afin d'atteindre une charge de sécurité positive pour l'investissement, à ce niveau la ruine n'est pas certaine.

Nous allons d'abord voir que nous avons deux possibilités : soit la ruine se produit, ou bien X_t^{Ab} tend vers l'infini quand $t \rightarrow \infty$, nous pouvons penser que les résultats sont intuitivement claire et évident, cependant ce type de résultat n'a pas encore été prouvé. Hipp et Plum [23] ont détournés le problème en utilisant une famille de stratégie se rapprochant des stratégies habituellement utilisées (sous certaines considérations).

Lemme 4.1 ([58]) :

Soit $\{(A_t, B_t)\}$ une stratégie arbitraire, alors

Soit la ruine se produit ou bien X_t^{Ab} diverge vers l'infini quand $t \rightarrow \infty$,

Avec une probabilité égale à 1.

Lemme 4.2 ([58]) :

Supposons que la fonction $\delta(u)$ est deux fois continuellement différentiable, et résout l'équation Hamilton-Jacobi-Bellman (4.20), alors :

- i) $\delta(u)$ est strictement croissante.
- ii) $\delta(u)$ est strictement concave.

Remarque 4.1 :

Afin de montrer que $\delta(u)$ est strictement croissante, il n'est pas nécessaire de supposer que $\delta(u)$ résout (4.20), il y a une probabilité positive qu'en utilisation les mêmes stratégies jusqu'à ruine, la ruine se produira pour un capital initial x et le déficit à la ruine est inférieur à $(y - x)/2$. Alors pour un capital initial y , il y a une probabilité strictement positive pour que la ruine n'arrive pas.

Nous allons donc nous restreindre à la solution strictement croissante et strictement concave de (4.20).

Le maximum sur A de (4.20) est atteint pour :

$$A^* = -\frac{\mu\delta'(u)}{\sigma^2\delta''(u)} = -\frac{\mu f'(u)}{\sigma^2 f''(u)} > 0 \quad (4.21)$$

Notons que $A^*(u)$ est mesurable et localement bornée. De la l'équation à résoudre devient :

$$\sup_{b \in [0,1]} -\frac{\mu^2 f'(u)^2}{\sigma^2 f''(u)} + (c - c(b))f'(u) + \lambda(E[f(u - bY)] - f(u)) \quad (4.22)$$

Cette équation est continue en u et en b , il en découle que l'argument $b^*(u)$ (non nécessairement unique) pour lequel le maximum est atteint existe et que $b^*(u)$ peut être choisi mesurable. Nous noterons dans la suite $b(u)$ si nous ne l'interprétons pas comme la stratégie optimale.

Pour u petit, l'équation précédente ne variera pas largement comme b varie. Le maximum de (4.22) sera donc déterminé par le minimum $c(b)$ pour u petit. Ainsi nous pouvons supposer que pour u petit, le maximum est atteint pour $b^*(u) = 1$.

Lemme 4.3 ([58])

Supposons qu'il existe une solution $f(u)$ de l'équation (4.22) sur un certain intervalle $[0, \eta)$ avec $\eta > 0$, alors il existe $\varepsilon > 0$ tel que $b^*(u) = 1$ pour $u < \varepsilon$.

Preuve : Notons que $b(0) = 1$. Soit :

$$H(u, b) = -\frac{\mu^2 f'(u)^2}{\sigma^2 f''(u)} + (c - c(b))f'(u) + \lambda(E[f(u - bY)] - f(u))$$

alors

$$\frac{H(u, 1) - H(u, b)}{1 - b} = -\frac{c(b)}{1 - b} f'(u) + \lambda E\left[\frac{f(u - Y) - f(u - bY)}{1 - b} \mathbb{I}_{Y \leq u/b}\right]$$

Par le théorème de Taylor

$$f(u - bY) = f(u - Y) + (1 - b)Yf'(\xi(Y))$$

Où $\xi(Y) \in (0, u)$, car $f'(x)$ est bornée sur $[0, \eta/2]$, nous avons par la convergence limite :

$$\lim_{b \uparrow 1} E\left[\frac{f(u - Y) - f(u - bY)}{1 - b}\right] = -E[Yf'(u - Y) \mathbb{I}_{Y \leq u}]$$

Pour $u < \eta/2$, la valeur absolue de ce terme peut être choisie arbitrairement petite en choisissant u assez petit. D'un autre côté $\lim_{b \uparrow 1} c(b)/(1 - b) > 0$. Ainsi pour u assez petit $H(u, b)$ est strictement décroissante en b pour b au voisinage de 1. Ainsi $b(u) < 1$ pour $0 < u < \varepsilon$, ceci est possible seulement si $\overline{\lim}_{u \uparrow 0} b(u) < 1$, ceci est possible seulement si $H(0, b) = H(0, 1) = 0$ pour $b < 1$ car $H(u, b)$ est continue en u et en b , puisque $H(0, b)$ est strictement décroissante en b pour b au voisinage de 1, ceci n'est pas possible.

En principe, l'équation (4.22) pourrait être résolue numériquement et ne doit pas être examinée plus loin. Cependant, nous voulons trouver la présentation alternative pour déterminer $f'(0)$.

cette représentation alternative donnera une occasion de montrer qu'une solution de (4.22) existe. De plus, il sera possible de trouver une solution en itérant l'équation (4.22). Cela se trouve être utile pour déterminer les stratégies optimales. Cette approche a été choisie par Hipp et Plum [25]. Nous pouvons écrire l'équation (4.22) comme suit :

$$-\frac{f''(u)}{\sigma^2 f'(u)^2} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \frac{1}{\inf_{b \in [0, 1]} \lambda(f(u) - E[f(u - bY)]) - (c - c(b))f'(u)}$$

Nous pouvons observer que le dénominateur doit être strictement positif pour $u > 0$, en intégrant de u_0 à u , nous obtenons :

$$\frac{1}{f'(u)} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_{u_0}^u \frac{1}{\inf_{b \in [0, 1]} \lambda(f(x) - E[f(x - bY)]) - (c - c(b))f'(x)} dx + \frac{1}{f'(u_0)}$$

Puisque $f'(u_0)$ est décroissante en u_0 , il est possible de faire tendre u_0 vers zéro ($u_0 \rightarrow 0$), qui donne :

$$\frac{1}{f'(u)} = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_0^u \frac{1}{\inf_{b \in [0, 1]} \lambda(f(x) - E[f(x - bY)]) - (c - c(b))f'(x)} dx + \frac{1}{f'(0)} \quad (4.23)$$

Où $1/\infty = 0$. Nous savons d'après [18] que $A^*(u)$ tend vers zéro quand $u \rightarrow 0+$. En effet $\overline{\lim}_{u \rightarrow 0} A^*(u) > 0$, qui implique $\delta(0) = 0$, parce que pour tout petit intervalle l'infimum du retour d'investissement est strictement négatif.

Pour $c(b^*(u)) \rightarrow 0$ et $A^*(u) \rightarrow 0$, nous pouvons conclure de (4.20) que $f(0+) = \lambda/c$, en prenant la dérivé dans (4.23), ou en posant $u \rightarrow 0$ dans (4.21), nous obtenons $f''(0+) = -\infty$.

Posons $g(u) = f(u)$, et donnons l'équation :

$$g(u) = \frac{1}{\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \int_0^u \inf_{b \in [0,1]} \lambda \left((1 - G(x/b)) + \int_0^x (1 - G((x-z)/b)) g(z) dz \right) - (c - c(b))g(x)} dx + \frac{c}{\lambda} \quad (4.24)$$

V-7-3 Théorème de vérification ([58])

Nous allons juste citer le théorème qui montre que l'approche de Hamilton-Jacobi-Bellman mène à la solution correcte, pourvu que les valeurs initiales soient correctement choisies. Notons que, par similitude avec la preuve de Hipp et Plum [25], nous n'avons pas besoin de supposer que $f(u)$ est bornée.

Théorème 4.1 : ([58])

Soit $f(x): IR_+ \rightarrow IR_+$ une fonction strictement décroissante et deux fois continuellement différentiable résolvant l'équation H.J.B (4.20) ou (4.22). Ce sera le cas pour $f(x) = 1 + \int_0^x g(z) dz$, à condition que $g(x)$ soit une solution décroissante de (4.24), alors $f(x)$ est bornée et $\delta(u) = f(u)/f(\infty)$.

De plus les stratégies optimales sont $A^*(X_{t-})$ et $b^*(X_{t-})$, ou $A^*(x)$ est donnée par (4.21) et $b^*(x)$ est l'argument qui maximise le coté gauche de l'équation H.J.B. Particulièrement il y a au maximum une solution strictement décroissante deux fois continuellement différentiable de (4.2) avec $f(0) = 1$.

Pour plus détails sur l'existence de la solution, ainsi que sa convergence et sur la majoration de la probabilité de ruine et le coefficient de Lundberg, nous renvoyons le lecteur à [58], [59],[61], et [25].

CHAPITRE V

Contrôle Stochastique Par Investissement Optimal Et Applications Numériques

V-1-Introduction :

Ce chapitre est consacré au contrôle par l'investissement, L'objectif du problème de contrôle résultant est de déterminer la stratégie d'investissement optimale pour une compagnie d'assurance selon des critères différents. Dans ce chapitre nous allons reconsidérer le cas d'une compagnie d'assurance qui investit tout son capital (la réserve) dans un Portefeuille se composant d'un actif non risqué (actif sans risque) et un actif risqué. Dans la première partie nous allons revoir la détermination de la stratégie d'investissement optimale qui réduit au minimum la probabilité de ruine en temps infini, nous déterminerons aussi la probabilité de survie optimale (voir[67]), pour des sinistres exponentiels, et ce en utilisant la méthode des différence finies pour la discrétisation de l'équation H.J.B, nous terminerons cette partie par l'étude de l'influence des paramètres du modèle sur la stratégie d'investissement optimale, ainsi que sur la probabilité de survie correspondante. Dans la deuxième partie, notre problème de contrôle reposera sur la maximisation de l'utilité de la richesse de la compagnie d'assurance, pour une utilité exponentielle de type CARA (voir [14],[18],[19],[77]), où nous déterminerons aussi la borne supérieur de la probabilité de ruine, grâce à l'inégalité de Lundberg, et au coefficient d'ajustement(voir [14],[18],[19]). Nous présenterons dans la troisième partie, l'approximation de diffusion, où le processus de Cramer Lundberg est approximé par un mouvement brownien avec dérive (voir [7] et [11]), nous déterminerons aussi la stratégie d'investissement optimale qui maximise l'utilité de la richesse de la compagnie, ainsi que la probabilité de ruine correspondante(voir [7]). Et nous terminerons par une comparaison des trois approches, qui nous permettra à la fin d'avoir une stratégie qui maximise l'utilité de la richesse, et minimise à la fois la probabilité de ruine, grâce au coefficient d'ajustement (Lundberg), qui peut être considéré comme la meilleur estimation du paramètres d'aversion au risque.

V-2 – Contrôle par minimisation de la probabilité de ruine :

Comme précédemment, on modélise le processus de réserve d'une compagnie d'assurance dont le risque $\{X(t), t \geq 0\}$ suit un processus de Cramér-Lundberg, avec un processus de sinistre $\{S(t), t \geq 0\}$ d'intensité λ , et un montant de sinistre Y de distribution $G(y)$ et de densité $g(y)$. La prime est collectée avec un taux c par unité de temps. Ainsi, le processus de risque est déterminé par :

$$dX(t) = cdt - dS(t), \quad X(0) = u. \quad (5.1)$$

Avec :

$$S(t) = Y_1 + \dots + Y_{N(t)}.$$

La compagnie veut choisir une stratégie d'investissement qui minimise au mieux la probabilité de ruine en temps infini.

Le portefeuille d'investissement se compose d'actif sans risque dont la valeur $B(t)$ suit :

$$\frac{dB(t)}{B(t)} = \rho dt, \quad \rho \geq 0.$$

Et un actif risqué dont le prix $Z(t)$ suit un mouvement Brownien géométrique :

$$\frac{dZ(t)}{Z(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad \text{et} \quad Z(0) = z, \quad \mu \geq 0, \sigma \geq 0.$$

La compagnie d'assurance suit la politique d'investissement suivante :

- le surplus de la compagnie $U(t)$ sera investi à tout moment t .
- $A(t)$ sera investie à l'instant t dans l'actif risqué, et la partie restante $U(t) - A(t)$ dans l'actif sans risque.

Notons par $\{I(t), t \geq 0\}$ le processus de retour d'investissement, il est défini par :

$$dI(t) = [U(t) - A(t)]\rho dt + A(t)\mu dt + A(t)\sigma dW(t) \quad (5.2)$$

Et le processus de surplus $\{U(t), t \geq 0\}$ de cette compagnie peut être défini comme suit :

$$\begin{aligned} dU(t) &= dX(t) + dI(t), & U(0) &= u \\ dU(t) &= c dt - dS(t) + [U(t) - A(t)]\rho dt + A(t)\mu dt + A(t)\sigma dW(t), & U(0) &= u \end{aligned} \quad (5.2)$$

V-2-1.L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman du problème de control :

Le problème de contrôle peut être décrit comme suit :

$$\min_A \{ \psi(u) = \Pr(\exists t > 0, U(t) < 0 \mid U(0) = u) \}$$

D'où les contraintes suivantes :

$$\begin{aligned} dU(t) &= dX(t) + dI(t), & t &\geq 0 \\ U(0) &= u \end{aligned}$$

On définit la probabilité de survie $\delta(u)$ comme suit :

$$\delta(u) = 1 - \psi(u)$$

De là, on peut définir le problème équivalent, et qui est la détermination de la stratégie d'investissement optimale qui maximise la probabilité de survie :

$$\sup_A \{ \delta(u) = \Pr\{U^A(t) < 0 \text{ pour tout } t \geq 0 \mid U^A(0) = u\} \} \quad (5.3)$$

L'équation HJB de ce problème est de la forme :

$$0 = \sup_A \left[\frac{1}{2} \sigma^2 A^2 \delta''(u) + [c + \rho u + (\mu - \rho)A] \delta'(u) + \lambda [E[\delta(u - Y) - \delta(u)]] \right] \quad (5.4)$$

La stratégie d'investissement optimale est alors de la forme

$$A^*(u) = - \frac{(\mu - \rho) \delta'(u)}{\sigma^2 \delta''(u)} \quad (5.5)$$

Pour que la solution existe, il faut que $\delta''(u) < 0$. On suppose aussi que $\mu > \rho$ (si $\mu \leq \rho$, la solution est triviale et elle donnée par $A^*(u) = 0$). Sous ces hypothèses la stratégie $A^*(u)$ donnée par (5.5) est positive. En la remplaçant dans l'équation de HJB (5.4), nous obtenons pour $u > 0$:

$$\lambda E[\delta(u-Y) - \delta(u)] + (c + \rho u)\delta'(u) = \frac{1}{2} \frac{(\mu - \rho)^2}{\sigma^2} \frac{\delta'(u)^2}{\delta''(u)}$$

Nous rappelons que cette équation ne se prête pas toujours à une résolution analytique exacte, alors nous allons procéder à la résolution par la méthode des différences finie comme nous allons le voir dans les paragraphes ci-après. (Voir [67]).

V-2-2.Solution numérique de l'équation HJB :

Soit $G(y)$ la fonction de répartition de Y , nous pouvons alors réécrire l'équation HJB sous sa forme intégro-différentielle (voir [67]). comme suit :

$$\lambda \int_0^\infty [\delta(u-y) - \delta(u)] dG + (c + u\rho)\delta'(u) = \frac{1}{2} \frac{[\delta'(u)]^2}{\delta''(u)} \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \quad (5.7)$$

Pour alléger l'écriture, notons $\left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2$ par Γ , $\frac{\lambda}{\Gamma}$ par λ' , $\frac{\rho}{\Gamma}$ par ρ' , et $\frac{c}{\Gamma}$ par c' , nous aurons alors :

$$\lambda' \int_0^\infty [\delta(u-y) - \delta(u)] dG + (c' + u\rho')\delta'(u) = \frac{1}{2} \frac{[\delta'(u)]^2}{\delta''(u)}$$

Soit : $H(t) = 1 - G(t)$, en intégrant par partie, nous aurons :

$$\int_0^\infty [\delta(u-y) - \delta(u)] dG = -\delta(u)H(u) - \int_0^u \delta'(u-y)H(y)dy$$

Alors l'équation devient :

$$-\lambda' \delta(0)H(u) - \lambda' \int_0^u \delta'(u-y)H(y)dy + (c' + u\rho')\delta'(u) = \frac{1}{2} \frac{[\delta'(u)]^2}{\delta''(u)} \quad (5.8)$$

Soit $q(u) = \delta'(u)$, et à partie de la condition initiale $c + a\rho = \lambda\delta(0)$, nous avons :

$$-\lambda' \int_0^u q(u-y)H(y)dy + (c' + u\rho')q(u) - c'H(u) = \frac{1}{2} \frac{[q(u)]^2}{q'(u)} \quad (5.9)$$

V-2-3.Résolution pour des sinistres exponentiels :

Nous allons voir une résolution numérique pour des sinistres exponentiels, pour une vue plus générale, concernant d'autre distribution de sinistre, nous renvoyons le lecteur à [65], ou on peut retrouver un algorithme numérique pour la résolution de l'équation HJB en fonction de la distribution des tailles des sinistres.

Soient : $g(y) = \theta e^{-\theta y}$, $G(y) = 1 - e^{-\theta y}$, $H(y) = e^{-\theta y}$. Posons : $v(y) = q(y)e^{\theta y}$, alors :

$$v'(y) = q'(y)e^{\theta y} - \theta v(y), \quad \frac{q'(y)}{q(y)} = \frac{v'(y) - \theta v(y)}{v(y)}$$

En remplaçant dans l'équation (5.9), nous obtenons :

$$-\lambda' \int_0^u v(y) dy + (c'+u\rho')v(u) - c' = \frac{1}{2} \frac{[v(u)]^2}{v'(u) - \theta v(u)} \quad (5.10)$$

Soit : $w(u) = \left(\frac{v(u)}{v'(u) - \theta v(u)} \right)^2$; Puisque $q'(y) = \delta''(y) < 0$ et $\delta'(y) > 0$, nous avons alors :

$$v'(y) = q'(y) e^{\theta y} - \theta v(y) < \theta v(y)$$

Ainsi :

$$\frac{1}{\sqrt{w(u)}} = \frac{\theta v(u) - v'(u)}{v(u)} = \theta - \frac{v'(u)}{v(u)} \quad (5.11)$$

L'équation HJB (5.10) devient alors :

$$-\lambda' \int_0^u v(y) dy + (c'+u\rho')v(u) - c' = -\frac{1}{2} v(u) \sqrt{w(u)}$$

En dérivant par rapport à u , puis en divisant par $v(u)$ les deux côtés de l'équation ci-dessus, nous obtenons :

$$(-\lambda' + \rho') + (c'+u\rho') \frac{v'(u)}{v(u)} = -\frac{1}{2} \frac{v'(u)}{v(u)} \sqrt{w(u)} - \frac{1}{4} \frac{w'(u)}{\sqrt{w(u)}}$$

En utilisant (5.11), nous aboutissons à

$$w'(u) = -2\theta w(u) - 4 \left((-\lambda' + \rho') + \theta(c'+u\rho') - \frac{1}{2} \right) \sqrt{w(u)} + 4(c'+u\rho')$$

Qui est une équation différentielle ordinaire non linéaire, il nous reste à déterminer la condition initiale

$$\sqrt{w(u)} = \frac{v(u)}{\theta v(u) - v'(u)} = -\frac{q(u)}{q'(u)} = -\frac{\delta(u)}{\delta''(u)} = \frac{\sigma^2}{\mu - \rho} A^*(u) \quad (5.12)$$

Nous avons alors pour $u = 0$:

$$w(0) = 0.$$

Nous proposons de résoudre cette équation par la méthode des différences finies.

Soit : h la longueur de l'intervalle utilisé dans le schéma numérique, notons $w(nh)$ par w_n , et nous discrétisons l'équation comme suit :

$$w_{n+1} = w_n + h \left\{ -2\theta w_n - 4 \left((-\lambda' + \rho') + \theta(c'+nh\rho') - \frac{1}{2} \right) \sqrt{w_n} + 4(c'+nh\rho') \right\} \quad (5.13)$$

Grâce au schéma récursif et à la condition initiale, nous pouvons obtenir la solution numérique de $w(u)$, à partir de là, nous pouvons avoir la stratégie d'investissement optimale, comme suit

$$\text{Pour } n, \text{ on a : } A_n^* = \frac{(\rho - \mu)}{\sigma^2} \sqrt{w_n} \quad (5.14)$$

V-2-4-Application numérique :

Soit une compagnie d'assurance, dont le processus de réserve a l'instant t vérifie l'équation (5.2). La compagnie a la possibilité d'investir dans un actif sans risque de taux ρ

Pour le modèle étudié, nous avons les valeurs des paramètres suivants : $\mu = 0.1$, $\sigma = 0.3$, $\theta = 1$, $\lambda = 3$ et $h = 0.01$.

Les graphes ci-dessous, nous donnent la stratégie d'investissement optimale en fonction du capital initial, pour un taux d'intérêt non nul $\rho = 0.04$ dans la figure V.1.1, puis pour un taux d'intérêt nul (pas d'investissement dans l'actif sans risque) dans la figure V.1.2.

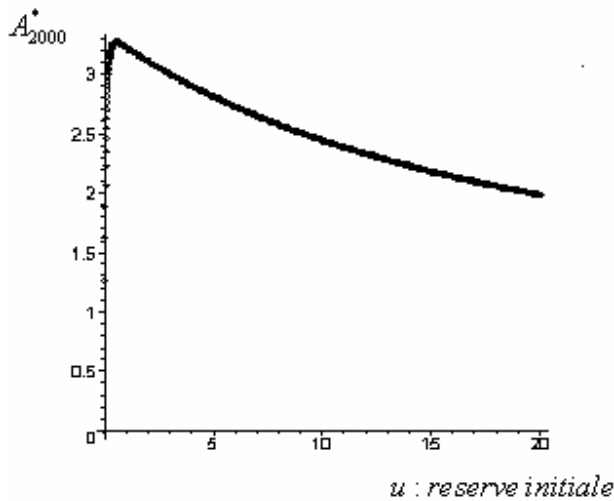


Fig.V.1 Stratégie d'investissement Optinale pour $\rho = 0.04$

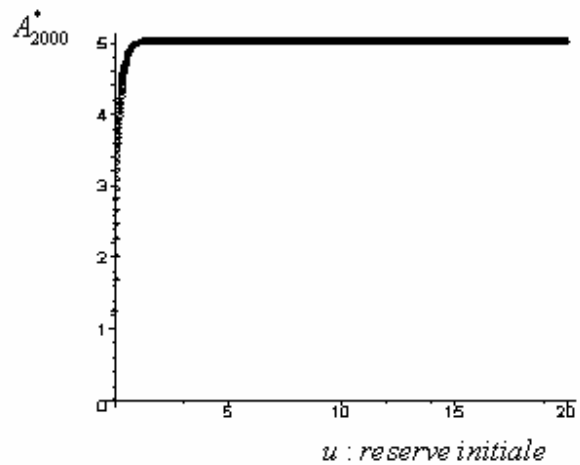


Fig. V.2 stratégie d'investissement optimale pour $\rho = 0$

D'après la figure V.1, on peut intuitivement penser que la stratégie d'investissement optimale décroît quand le capital initial augmente et le taux d'intérêt est important à la fois. Ce qui est une tendance logique. La compagnie préfère ne pas prendre trop de risque en investissant dans l'actif risqué, vu que le taux d'intérêt de l'investissement sans risque est important, la compagnie préfère ce qui est sûr et ne pas prendre de risque. Tandis que dans la fig.V.2 ($\rho = 0$), on remarque clairement que pour un capital initial assez grand, on retrouve une stratégie d'investissement constante. On peut penser que dans ce cas l'assureur favorise la stabilité, et préfère ne pas prendre trop de risque.

Après la détermination de la stratégie d'investissement optimale, nous pouvons déterminer les probabilités de survie optimales. Voir [67]

V-2-4.Probabilité de survie optimale :

Nous réécrivons l'équation HJB comme suit :

$$\lambda \int_0^u \delta(u) e^{\theta(x-u)} dx - \lambda' \delta(u) + (c' + u\rho') \delta'(u) = -\frac{1}{2} \delta''(u) \sqrt{w(u)}$$

Soit : $q(u) = \int_0^u \delta(x) e^{\theta(x-u)} dx$, alors nous aurons

$$\lambda'q(u) - \lambda'\delta(u) + (c' + u\rho')\delta'(u) = -\frac{1}{2}\delta'(u)\sqrt{w(u)}$$

$$q'(u) = -\theta \int_0^u \delta(x) e^{\theta(x-u)} dx + \delta(u) = -\theta q(u) + \delta(u) \quad (5.16)$$

$$q(0) = 0 \quad (5.17)$$

En discrétisant le système d'équation, comme précédemment, on note $\delta_n = \delta(nh)$ et $q_n = q(nh)$, et nous avons

$$\lambda'q_{n+1} - \lambda'\delta_{n+1} + (c' + (n+1)h\rho') \frac{[\delta_{n+1} - \delta_n]}{h} = -\frac{1}{2} \frac{[\delta_{n+1} - \delta_n]}{h} \sqrt{w_{n+1}}$$

$$\delta_{n+1} = \frac{\left((n+1)h\rho' + c' + \frac{1}{2}\sqrt{w_{n+1}} \right) \delta_n - \lambda'hq_{n+1}}{(n+1)h\rho' + c' + \frac{1}{2}\sqrt{w_{n+1}} - \lambda'h} \quad (5.18)$$

$$q_{n+1} = q_n + h(-\theta q_n + \delta_n) \quad (5.19)$$

À partir de cette équation, et de la condition initiale, nous pouvons calculer la valeur numérique de $\delta(u)$, il restera à multiplier $\delta(u)$ par une constante appropriée afin de satisfaire la condition au bord $\delta(\infty) = 1$. Voir [67].

La probabilité de ruine (survie) en fonction du capital initial de notre modèle pour $\rho = 0.04$ est donnée par le graphe suivant :

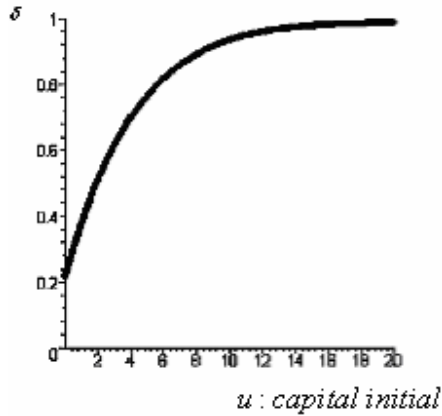


Fig.V.3 probabilité de survie

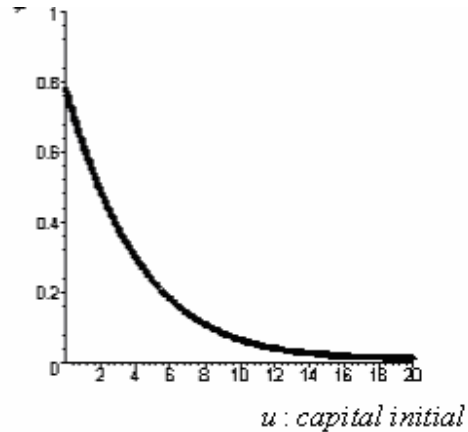


Fig.V.4 probabilité de ruine

Les graphes ci-dessus, nous permettent de vérifier que sous la stratégie d'investissement optimale que nous avons déterminée, la probabilité de ruine (de survie) diminue (augmente) asymptotiquement. Cependant, il est plus intéressant de voir l'influence des paramètres sur la probabilité de ruine, ainsi que sur la stratégie d'investissement optimale.

V-2-5-Influences des différents paramètres :

V-2-5-1-Influence du taux d'intérêt :

Les graphes suivant vont nous aider à comprendre l'influence du paramètre ρ (taux d'intérêt) sur la stratégie d'investissement optimale, ainsi que sur la probabilité de survie correspondante.

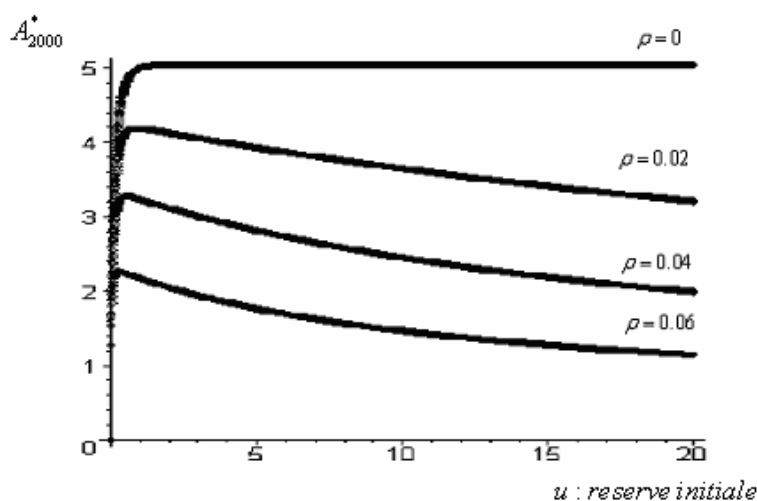


Fig.V.5 Stratégie d'investissement optimale pour différentes valeurs de ρ

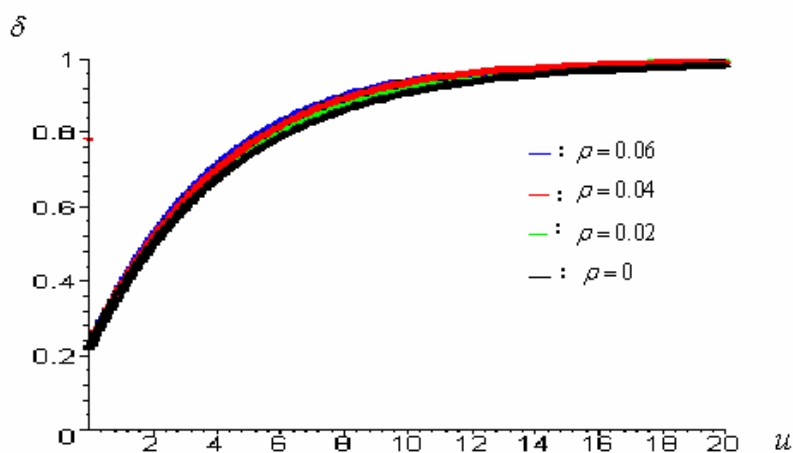


Fig.V.6 probabilité de survie pour différentes valeurs de ρ

La figure V.5, nous permet de confirmer notre intuition, on voit clairement que plus le taux d'intérêt augmente, plus l'investissement en actif risqué diminue. Il est clair que l'assureur préfère ne pas prendre trop de risque, et investir plus dans l'actif sans risque à chaque fois que le taux d'intérêt augmente. Cela se justifie dans la figure V.6, où l'on voit clairement que la probabilité de survie augmente quand ρ augmente.

V-2-5-2-Influence du rendement moyen instantané μ :

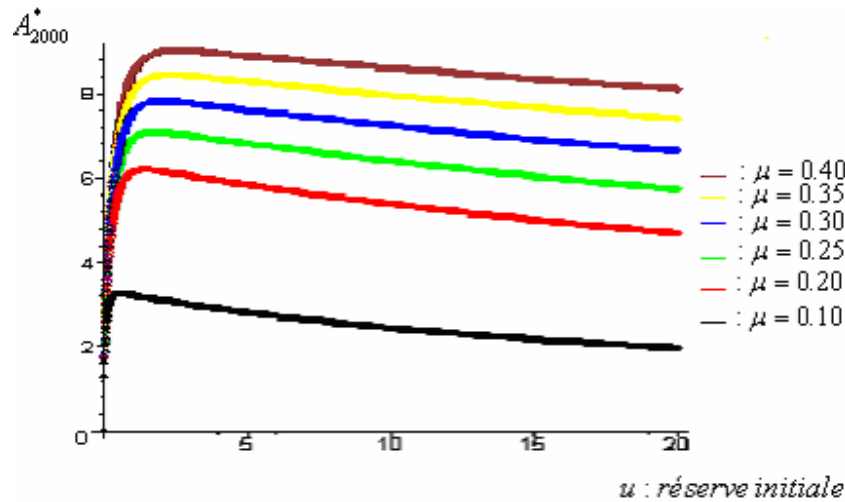


Fig.V.7 Stratégie d'investissement optimale pour différentes valeurs de μ

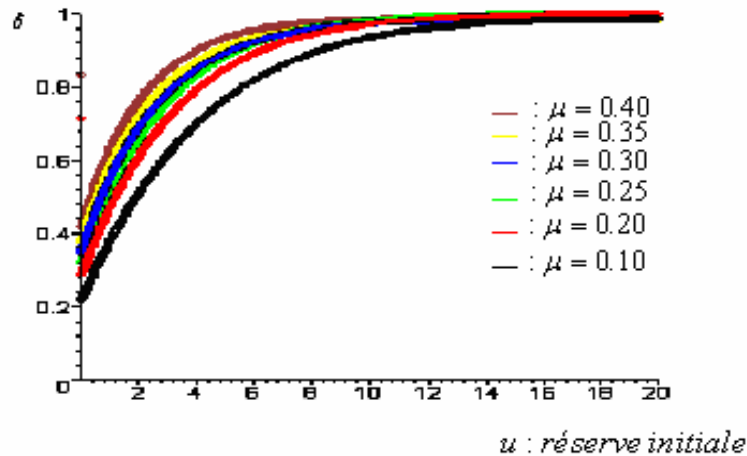


Fig.V.8 probabilité de survie pour différentes valeurs de μ

D'après le graphe V.7, la stratégie d'investissement optimale augmente quand le rendement moyen instantané de l'actif risqué μ augmente, et la probabilité de survie augmente également, comme on peut le voir dans la figure V.8. Donc il est plus judicieux d'investir dans l'actif risqué quand μ augmente, qui justifie la condition $\mu > \rho$ imposée au modèle.

V-2-5-3-Influence de la volatilité σ :

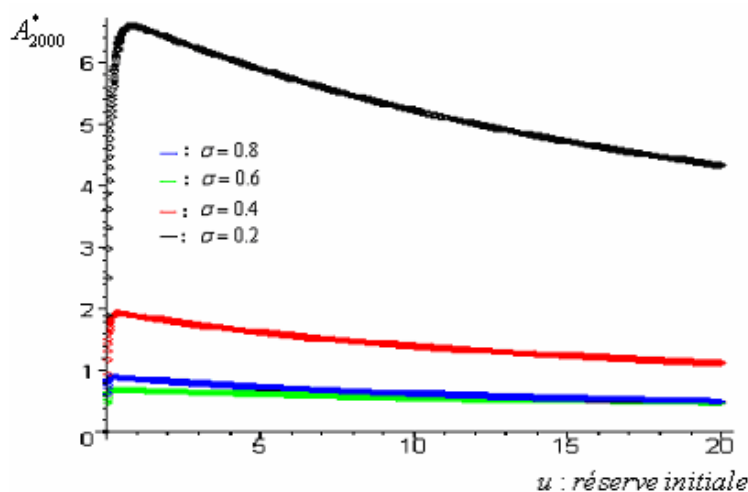


Fig.V.9 Stratégie d'investissement optimale pour différentes valeurs de σ

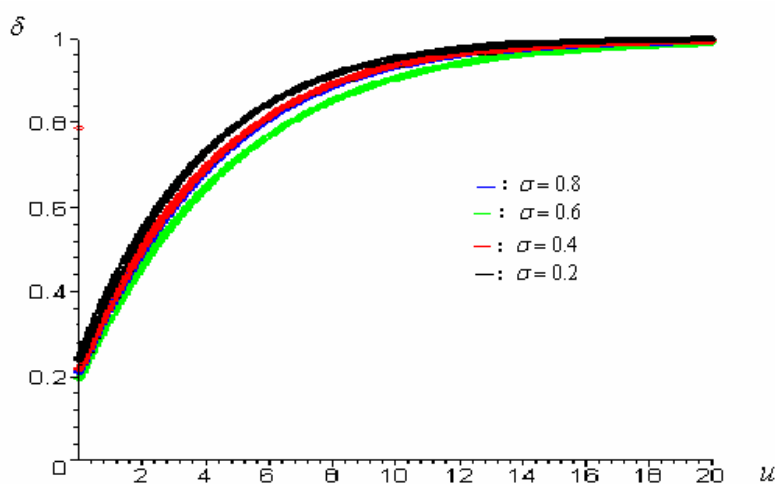


Fig.V.10 probabilité de survie pour différentes valeurs de σ

La figure V.9, nous permet de voir que plus la volatilité augmente, moins on investit dans l'actif risqué, l'assureur préfère investir plus dans l'actif sans risque. Et dans la figure V.10, on voit bien que la probabilité de survie diminue quand la volatilité augmente, donc le choix d'investir plus dans l'actif sans risque et moins dans l'actif risqué est plus raisonnable, car la volatilité mesure la rapidité de l'amplitude des variations de cours de l'actif risqué, et un cours a forte volatilité fluctue souvent avec des grandes amplitudes. Donc plus la volatilité augmente, plus le risque augmente. La volatilité freine l'investissement dans l'actif risqué. Cette approche est probabiliste, il existe d'autres qui se basent sur l'utilité de la compagnie, plutôt économiste. Nous allons traiter dans le paragraphe suivant le cas d'une utilité exponentielle.

V-3- Contrôle par maximisation de l'espérance de l'utilité de la richesse

On se propose de travailler sur un horizon fini T fixé, (voir Begona Fernandez [14], J Gaier, P.Grandits et W.Schachermayer [18]), nous supposons que la richesse de la compagnie d'assurance a une fonction d'utilité exponentielle, de la forme :

$$h(u) = -\frac{1}{\phi} e^{-\phi u}, u \geq 0$$

V-3-1- L'équation Hamilton-Jacobi-Bellman :

Pour déterminer la stratégie d'investissement qui maximise l'utilité exponentielle de l'excédent à un instant fixé, avec réserve initiale u , Nous définissons la fonction de valeur :

$$V(t, u) = \sup_{A(t)} E^{t, u} [h(U(T))] \quad (5.21)$$

Et l'équation H.J.B du problème de contrôle est donnée par :

$$0 = \sup_A \left[V_t + \frac{1}{2} \sigma^2 A^2 V_{uu} + [c + \rho u + (\mu - \rho)A] V_u \right] dt \quad (5.22)$$

$$V(T, u) = h(u)$$

Le max est donné par :

$$A(t) = -\frac{(\mu - \rho)V_u}{\sigma^2 V_{uu}} \quad (5.23)$$

En remplace $b(t)$ dans (5.23) par sa valeur de (5.22), il en résulte l'équation différentielle :

$$V_t + (c + u\rho)V_u - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \frac{(V_u)^2}{V_{uu}} = 0 \quad (5.24)$$

$$V(T, u) = h(u)$$

V-3-2- Stratégie d'investissement optimale :

Supposons maintenant que la solution de (5.23) est de la forme

$$V(t, u) = -\frac{1}{\phi} e^{-\phi(t)u + \beta(t)} \quad (5.25)$$

Avec $\beta(T) = 0$ et $\phi(T) = \phi$, qui assure la condition initiale $V(T, u) = h(u)$, nous déterminons l'équation HJB (5.24) qui en résulte :

$$u\phi_t - \beta_t + (c + u\rho)\phi + \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 = 0$$

Cette équation doit être résolue pour tout u et pour tout t , pour des détails sur les étape du calcul voir Begona Fernandez [14].

La fonction valeur sera de la forme :

$$V(t, u) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \frac{(\mu - \rho)^2}{\sigma^2} (T - t) + \frac{c\phi}{\rho} (1 - e^{\rho(T-t)}) + \lambda \int_t^T W_s ds \right\} \cdot \exp \left\{ -\phi e^{-\rho(T-t)} \right\}$$

Où $\{W_s, s \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard, et la stratégie optimale est la suivante

$$A^*(t, u) = \frac{(\mu - \rho)}{\sigma^2 \phi} e^{-\rho(T-t)} \quad (5.26)$$

En particulier pour $\rho=0$ (pas d'investissement dans l'actif sans risque), nous aurons :

$$V(t,u) = \exp\left\{-\frac{1}{2}\frac{\mu^2}{\sigma^2}(T-t) + c\phi(T-t) + \lambda W(T-t)\right\}.e^{-\phi u}$$

et

$$A^*(t,u) = \frac{\mu}{\sigma^2\phi} \tag{5.27}$$

Le graphe suivant, nous donne la stratégie d'investissement en fonction du paramètre d'aversion au risque pour $\rho=0$

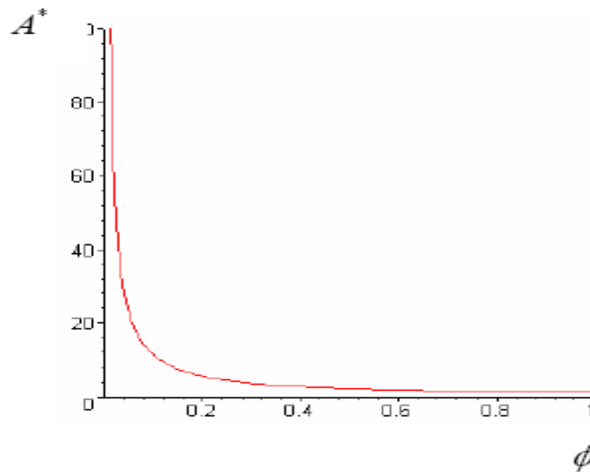


Fig.V.11 : stratégie d'investissement optimale en fonction du paramètre d'aversion au risque $\phi \in (0,1)$

La figure V.11, nous montre que la stratégie d'investissement varie par rapport au paramètre d'aversion au risque ϕ est décroît quand il diminue ; plus on est averse au risque, moins on investie dans l'actif risqué.

V-3-3--Probabilité de ruine :

Dans cette partie, nous allons voir comment on peut approximer au mieux la probabilité de ruine au moyen de l'équation de HJB, sous forme de théorèmes, le lecteur pourra les retrouver dans [14]. Nous finirons par déterminer le meilleur estimateur pour l'aversion au risque, qui nous permettra d'avoir la stratégie d'investissement qui maximise la richesse et qui donne la probabilité de ruine minimale

Revenons au modèle donné dans la partie (V-3-3-2), alors le processus de réserve (la richesse), associé à la stratégie d'investissement optimale sous sa forme intégro-différentielle est donné par :

$$U_t^* = u + cdt - S(t) + \int_0^t \frac{(\mu - \rho)^2}{\phi\sigma^2} e^{-\rho(T-s)} ds + \int_0^t \rho U_s^* ds + \int_0^t \frac{(\mu - \rho)}{\phi\sigma} e^{-\rho(T-s)} dW_s, \quad U(0) = u \quad \rho > 0 \tag{5.28}$$

$$U_t^* = u + cdt - S(t) + \int_0^t \frac{\mu^2}{\phi\sigma^2} ds + \int_0^t \frac{\mu}{\phi\sigma} dW_s \quad \text{pour } \rho = 0 \tag{5.29}$$

Théorème 5.1 (voir [12]):

Soit $\alpha = E(Y_1)$, et supposons que :

- (a) la distribution de Y_i admet une transformé de Laplace (finie) $L(r)$ pour $0 < r < k \leq \infty$,
- (b) si $k < \infty$, alors $\lim_{r \rightarrow k} = \infty$.
- (c) la condition suivante sur la charge de sécurité est vérifiée :

$$\left[e^{-\rho T} \left(c + \frac{(\mu - \rho)^2}{\phi \sigma^2} \right) \right] - \lambda \theta > 0, \quad \text{si } \rho > 0$$

$$c + \frac{\mu^2}{\phi \sigma^2} - \lambda \theta > 0, \quad \text{si } \rho = 0$$

Alors la probabilité de ruine satisfait l'inégalité suivante :

$$P \left[\sup_{0 \leq s \leq T} -Y_s^* \geq 0 \right] \leq e^{-\delta^* z}$$

Ou :

- (i) si $\rho > 0$, alors pour tout $\phi > 0$, δ^* est la solution positive de l'équation :

$$l(\delta, \phi) = -\delta \left\{ e^{-\rho T} \left(c + \frac{(\mu - \rho)^2}{\phi \sigma^2} \right) \right\} + \frac{\sigma^2 (\mu - \rho)^2}{2 \phi^2 \sigma^2} e^{-2\rho T} + \lambda(L(\delta) - 1) = 0 \quad (5.30)$$

- (ii) si $\rho = 0$ alors pour tout $\phi > 0$, δ^* est la solution positive de l'équation :

$$l^0(\delta, \phi) = -\delta \left(c + \frac{\mu^2}{\phi \sigma^2} \right) + \frac{\sigma^2 \mu^2}{2 \phi^2 \sigma^2} + \lambda(L(\delta) - 1) = 0 \quad (5.31)$$

On voit clairement que pour $\rho = 0$, et $\mu = \sigma = 0$ (pas d'investissement), on retrouve l'équation de Cramér-Lundberg.

Soit δ^1 , la solution de l'équation de Cramér-Lundberg

$$l^1(\delta) = -\delta c + \lambda(L(\delta) - 1) = 0 \quad (5.32)$$

si $\rho = 0$ et $\frac{\delta^1}{2} < \phi$, alors :

$$\delta^1 < \delta^*$$

Pour la démonstration (Voir [14]) nous devons utiliser la version simplifiée du lemme 5-1, défini ci-dessous, nous allons juste le citer. (Lemme 3.1 dans [12])

Lemme 5.1 (Voir [14]) : Soit

$$L_t = z - S(t) + \int_0^t b_s ds + \int_0^t d_s dW_s$$

Où tout est définis de la même manière que précédemment, avec $(b_s)_{s \geq 0}$ est un processus intégrable adapté, $(d_s)_{s \geq 0}$ est prévisible, et $E\left[\int d_s^2 ds\right] < \infty$

(i) la distribution des variables aléatoires $(Y_i)_{i \geq 1}$ admet une transformé de Laplace finie $L(r)$ pour $0 < r < k \leq \infty$,

(ii) il existe $\delta \in (0, k)$ et une constante $l_T(\delta) \geq 0$, tels que, pour tout $s \in [0, T]$,

$$\delta \int_0^s b_u du + \frac{\delta^2}{2} \int_0^s d_u^2 du + \lambda s(L(\delta) - 1) \leq h_T(\delta)$$

Alors pour $m \geq z$

$$P\left[\sup_{0 \leq s \leq T} L_s > m\right] \leq \exp\{\delta(z - m) + l_T(\delta)\}$$

La preuve de ce lemme est basée sur l'inégalité maximale des martingales, voir [10].

Pour estimer

$$P\left[\sup_{0 \leq s \leq T} -Y_s^* \geq 0\right]$$

Nous ne pouvons pas appliquer directement le lemme 5.1, nous pouvons observer que :

$$P\left[\sup_{0 \leq s \leq T} -Y_s^* \geq 0\right] = P\left[\sup_{0 \leq s \leq T} -Z_s \geq 0\right]$$

Où $Z_t = Y_t^* e^{-\rho t}$

$$Z_t = z + \int_0^t c e^{-\rho r} dr - \sum_{i=1}^{N_t} e^{-\rho r_i} Y_i + \int_0^t \frac{(\mu - \rho)^2}{\phi \sigma^2} e^{-\rho r} dr + \int_0^t \frac{(\mu - \rho)}{\phi \sigma} e^{-\rho r} dW_r$$

Soit : $-Z^1$ définie comme suit

$$-Z_t^1 = -z - c t e^{-\rho t} - \sum_{i=1}^{N_t} Y_i - t \frac{(\mu - \rho)^2}{\phi \sigma^2} e^{-\rho t} - \int_0^t \frac{(\mu - \rho)}{\phi \sigma} e^{-\rho r} dW_r$$

Alors, il est claire que

$$-Z_s^1 \geq -Z_s = -X_t^* e^{-\rho t}$$

et

$$P\left[\sup_{0 \leq s \leq T} -Z_s \geq 0\right] = P\left[\sup_{0 \leq s \leq T} -Z_s^1 \geq 0\right]$$

Nous appliquerons alors le lemme à $-Z_s^1$ avec $l_T(\delta) = Tl(\delta)$, l'existence de la solution positive est garantie, grâce à la condition de la charge de sécurité.

Proposition 5.1:

Supposons que les variables aléatoires sont exponentiellement distribuées de moyenne α , et

$$0 < \phi < \frac{e^{-\rho T}}{\alpha} \quad (5.33)$$

Alors la fonction valeur définie par l'équation (5.21) a la forme suivante

$$V(t, u) = -\exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\mu - \rho}{\sigma^2} (T - t) + \frac{c\phi}{\rho} [1 - e^{\rho(T-t)}] - \frac{\lambda}{\rho} \log\left(\frac{1 - \phi\alpha}{1 - \phi\alpha e^{\rho(T-t)}}\right)\right\} \cdot \exp\{\phi u e^{\rho(T-t)}\}$$

En particulier, pour $\rho = 0$: $0 < \phi < \frac{1}{\alpha}$

et

$$V(t, u) = -\exp\left\{-\frac{1}{2} \frac{\mu}{\sigma^2} (T - t) + c\phi(T - t) - \lambda \frac{\phi\alpha}{1 - \phi\alpha} (T - t)\right\} e^{-\phi u}$$

Comparons maintenant avec les travaux de Gaier, Grandits, Schachermayer [25].

Remarque 5.1: Gaier, Grandits et Schachermayer, voir [17], ont montré que la stratégie d'investissement optimale, quand $\rho = 0$ est :

$$A^* = \mu / \hat{r} \sigma^2$$

Où \hat{r} est le coefficient de Lundberg, pour la démonstration, qui repose sur la théorie des martingales, nous renvoyons le lecteur à [18] et Begona Fernandez [14]. Nous verrons plus loin les caractéristiques du coefficient de Lundberg et la façon de le déterminer.

Pour chaque ϕ , nous obtenons une solution positive δ_ϕ de l , en utilisant le théorème implicite, nous pouvons montrer que δ_ϕ est maximum pour $\delta_\phi = \phi$. Gaier, Grandits, Schachermayer, voir [18] et [19], ont obtenu une stratégie A_t qui garantit l'optimalité de la probabilité de ruine $A_t = \frac{\mu}{\hat{r} \sigma^2}$, où \hat{r} est solution de l'équation suivante :

$$\lambda(L(r) - 1) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + cr \quad (5.34)$$

Il est facile de montrer que $\delta_{\hat{r}} = \hat{r}$. Ainsi si nous choisissons $\phi = \hat{r}$, nous obtiendrons la stratégie optimale pour une fonction d'utilité exponentielle et qui donne la probabilité de ruine minimale. Alors, pour des sinistres exponentiellement distribués et $\rho = 0$, Begona Fernandez [14] a montré que la fonction $l(\delta, \phi)$ définie par (5.36) devient :

$$l(\delta, \phi) = \frac{\alpha\mu^2}{2\phi^2\sigma^2} \delta^2 - \left(\left(c + \frac{\mu^2}{\phi\sigma^2} \right) \alpha + \frac{\mu^2}{2\phi^2\sigma^2} \right) \delta + \left(c + \frac{\mu^2}{\phi^2\sigma^2} - \lambda\alpha \right) \quad (5.35)$$

et pour chaque $\phi \in (0, 1/\alpha)$, la solution positive δ_ϕ de l est de la forme :

$$\delta_\phi = \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{c + A^*\mu}{A^{*2}\sigma^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{c + A^*\mu}{A^{*2}\sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{c + A^*\mu - 2\lambda\alpha}{\alpha A^{*2}\sigma^2}} \quad (5.36)$$

Pour des sinistres exponentiels l'équation (5.31) devient :

$$f(r) = c\alpha r^2 \left(\frac{\mu^2}{2\sigma^2} \alpha + \lambda \alpha - c \right) r - \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \quad (5.37)$$

Où la solution est satisfaite par : $\delta_{\hat{r}} = \hat{r}$.

Nous allons voir maintenant comment on peut déterminer le coefficient de Lundberg, i.e., nous allons voir comment on a eu l'équation (5.30).

VI-3-4-Coefficient d'ajustement :

Théorème 5.2 : Pour le modèle décrit précédemment, et pour des sinistres exponentiels supposons que $\sigma \neq 0$, alors la probabilité de ruine minimale $\psi^*(u)$ pour un assureur, investissant dans un marché financier, peut être bornée comme suit :

$$\psi^*(u) \leq e^{-\hat{r}u}$$

i.e. pour des sinistres exponentiels la probabilité de ruine décroît exponentiellement.

Intuitivement, on peut penser que la meilleure approximation de r est celle qui réalise le minimum de la fonction $f(u) = \exp(-ru)$, et donc le sup sur r pour une stratégie d'investissement optimale donnée.

Donc, il suffit de résoudre $\sup_A \{L f(u)\} = 0$

$$\psi(u) \leq \inf_A \psi^A(u) \leq \inf_A \exp(-r(A)u) = \exp(-r^*u)$$

$$r^* = \sup_A r(A)$$

Caractéristiques :

$L^A f(u) = 0$ Avec $f(u) = \exp(-ru)$, $r := r(A)$, à résoudre pour $r(A)$. (A stratégie constante)

Où $L^A f(u)$ est le générateur infinitésimal du processus de réserve pour la fonction $f(u)$, donné comme suit :

$$L^A f(u) = \left[\frac{1}{2} \sigma^2 A^2 f''(u) + \{c + u\rho + (\mu - \rho)A\} f'(u) + \lambda [E[f[u - Y]] - f(u)] \right]$$

Nous avons : $f(u) = \exp(-ru)$, $f'(u) = -r \exp(-ru)$, $f''(u) = r^2 \exp(-ru)$

En remplaçant dans l'équation ci-dessus, on obtient alors :

$$\frac{1}{2} \sigma^2 A^2 r^2 e^{-ru} - \{c + u\rho + (\mu - \rho)A\} r e^{-ru} + \lambda [E[e^{-r(u-x)}] - e^{-ru}] = 0$$

$$\frac{1}{2} \sigma^2 A^2 r^2 - \{c + u\rho + (\mu - \rho)A\} r + \lambda [E[e^{rx}] - 1] = 0 \quad (5.38)$$

Posons : $h(r) = E[e^{rx}] - 1 = M_x(r) - 1$, où $M_x(r)$ est la fonction génératrice des moments de la distribution des tailles des sinistres.

Nous avons déjà vu dans le chapitre IV, la probabilité de ruine pour le processus de Cramèr-Lundberg, ainsi que le coefficient de Lundberg correspondant, nous allons juste les rappeler, ou la probabilité de ruine est définie comme suit :

$$\psi(u) = \frac{\lambda\alpha}{c} \exp(-\hat{r}_0 u), \quad (5.39)$$

Où $\alpha = 1/g$ c'est la taille moyenne des sinistres et \hat{r}_0 est le coefficient d'ajustement du problème, donné par

$$\hat{r}_0 = (c - \lambda\alpha)/(c\alpha) \quad (5.40)$$

Nous rappelons qu'il est la solution positive r de l'équation de Lundberg

$$\lambda + rc = \lambda E[\exp(rY)]. \quad (5.41)$$

Maintenant nous allons voir le coefficient de Lundberg pour $\rho = 0$, ou l'équation (5.39) devient :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \hat{r}^2 - (c + \mu A)\hat{r} + \lambda h(\hat{r}) = 0 \quad (5.42)$$

Pour un paramètre d'aversion au risque ϕ , notons le coefficient de Lundberg par \hat{r}_ϕ , qui est solution de l'équation :

$$\frac{1}{2}\sigma^2 A^2 \hat{r}_\phi^2 - (c + \mu A)\hat{r}_\phi + \lambda h(\hat{r}_\phi) = 0$$

En remplaçant $A^*(t, u) = \mu/\phi\sigma^2$ dans l'équation précédente, nous aboutissons à

$$\frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\phi^2 \sigma^2} \hat{r}_\phi^2 - \left(c + \frac{\mu^2}{\phi\sigma^2} \right) \hat{r}_\phi + \lambda h(\hat{r}_\phi) = 0$$

Pour des sinistres exponentiels :

$$h(\hat{r}_\phi) = \frac{\hat{r}_\phi}{\theta - \hat{r}_\phi} = \frac{\alpha \hat{r}_\phi}{1 - \alpha \hat{r}_\phi}$$

et notre équation devient :

$$\left(\frac{1}{2} \frac{\mu^2 \alpha}{\phi^2 \sigma^2} \right) \hat{r}_\phi^2 - \left[\left(c + \frac{\mu^2}{\phi\sigma^2} \right) \alpha + \frac{1}{2} \frac{\mu^2}{\phi^2 \sigma^2} \right] \hat{r}_\phi + \left(c + \frac{\mu^2}{\phi\sigma^2} - \lambda \alpha \right) = 0 \quad (5.43)$$

qui n'est que l'équation (5.35), ou \hat{r} est la plus grande solution positive de cette équation, qui est un polynôme de second degré, après résolution on trouve :

$$\hat{r}_\phi = \left(\frac{1}{2\alpha} + \phi + c \frac{\phi^2 \sigma^2}{\mu^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha} + \phi + c \frac{\phi^2 \sigma^2}{\mu^2} \right)^2 - 2 \left(\frac{\phi}{\alpha} + c \frac{\phi^2 \sigma^2}{\alpha \mu^2} - \lambda \frac{\phi^2 \sigma^2}{\mu^2} \right)}$$

Après quelque modification, on retrouve la solution (5.36) donnée par Begona Fernandez [12]

$$\hat{r}_\phi = \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{c + A^* \mu}{A^{*2} \sigma^2} \right) - \sqrt{\left(\frac{c + A^* \mu}{A^{*2} \sigma^2} \right)^2 + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{c + A^* \mu - 2\lambda\alpha}{\alpha A^{*2} \sigma^2}} \quad (5.44)$$

Nous passons maintenant au calcul du coefficient de Lundberg pour $\phi = \hat{r}$, alors en remplaçant $A^*(t,u) = \mu/\hat{r}\sigma^2$ dans l'équation (5.41), nous aboutissons à :

$$\lambda h(\hat{r}) = \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + c\hat{r} \quad (5.45)$$

En remplaçant $h(\hat{r})$ par sa valeur, l'équation précédente devient :

$$c\alpha \hat{r}^2 - \left(\alpha \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \lambda\alpha - c \right) \hat{r} + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = 0$$

La solution positive de cette équation est

$$\hat{r} = \sqrt{\left(\frac{\alpha\mu^2 + 2\sigma^2(\lambda\alpha - c)}{4c\alpha\sigma^2} \right)^2 + \frac{\mu^2}{2\alpha c\lambda}} - \left(\frac{\alpha\mu^2 + 2\sigma^2(\lambda\alpha - c)}{4c\alpha\sigma^2} \right)$$

Que nous pouvons réécrire sous cette forme :

$$\hat{r} = \hat{r}_0 + \sqrt{\left(\frac{1}{2} \left(\hat{r}_0 + \frac{\mu^2}{2c\sigma^2} \right) \right)^2 + \frac{\mu^2}{2c\sigma^2} \left(\frac{1}{\alpha} - \hat{r}_0 \right) - \frac{1}{2} \left(\hat{r}_0 + \frac{\mu^2}{2c\sigma^2} \right)} \quad (5.46)$$

Ou \hat{r}_0 est le coefficient d'ajustement dans le cas sans investissement, définie par l'équation (5.40). nous pouvons retrouver cette solution dans [18].

Nous allons maintenant voir graphiquement le coefficient d'ajustement en fonction du paramètre d'aversion au risque $0 < \phi < \frac{1}{\alpha} = 1$, toujours pour le modèle étudié précédemment.

Après calcul \hat{r}_ϕ est donné par

$$\frac{0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2}{-\sqrt{(0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2)^2 - 2.000000000 \phi - 10.80000000 \phi^2}}$$

Ou le maximum de cette fonction est donné par le coefficient de Lundberg $\hat{r}_\phi = \hat{r}$ et $\phi = \hat{r}$, et son comportement est représenté par le graphe suivant .

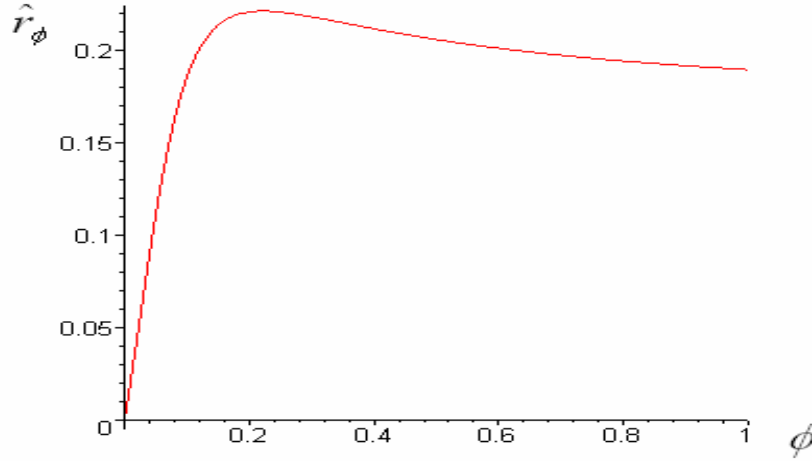


Fig.V.12 : Coefficient d'ajustement en fonction du paramètre d'aversion au risque $\phi \in (0,1)$

On voit bien graphiquement que le coefficient d'ajustement augmente pour $0 < \phi \leq \hat{r}$, puis diminue pour $\hat{r} \leq \phi < 1$, le sup de \hat{r}_ϕ est atteint pour $\phi = \hat{r}$, donc la meilleure approximation de la borne sup de la probabilité de ruine ($e^{-\hat{r}u}$) est donnée par le coefficient de Lundberg comme paramètre d'aversion au risque, nous pouvons donc conclure qu'il nous permet de maximiser la richesse de la compagnie, tout en minimisant sa probabilité de ruine.

VI-4-Approximation de diffusion :

VI-4-1-maximisation de la richesse :

Dans cette partie, nous allons approximer le processus de Lundberg par un mouvement brownien avec dérive, et nous allons déterminer la stratégie d'investissement optimale qui maximise l'utilité exponentielle de la richesse terminale de la compagnie, pour ce problème.

Le processus de risque est donc de la forme :

$$dR(t) = \eta dt + \xi d\tilde{W}(t) \quad (5.47)$$

Où

$$\eta = c - \lambda E[X] \quad \text{Et} \quad \xi^2 = \lambda E[X^2]$$

$\{\tilde{W}(t), t \geq 0\}$ est un mouvement brownien standard.

Ainsi le processus de réserve peut être réécrit comme suit :

$$\begin{aligned} dU^A(t) &= \eta dt + \xi d\tilde{W}(t) + [U^A(t) - A(t)]\rho dt + A(t)\mu dt + A(t)\sigma dW(t) \\ &= (\eta + [U^A(t) - A(t)]\rho + A(t)\mu) dt + A(t)\sigma dW(t) + \xi d\tilde{W}(t) \end{aligned} \quad (5.48)$$

Et l'équation H.J.B de ce problème est

$$\sup_A \left\{ V_t + [A(\mu - \rho) + \rho u + \eta] V_u + \frac{1}{2} (A^2 \sigma^2 + \xi^2 + 2\nu \sigma \xi A) V_{uu} \right\} = 0 \quad (5.49)$$

Nous suivrons les même étape de la partie V-3, pour la même fonction d'utilité $h(u)$, nous rappelons la fonction valeur donnée par l'équation (5.21), comme suit :

$$V(t, u) = \sup_{A(t)} E^{t, u} [h(U(T))]$$

Avec la condition : $V(T, u) = h(u)$,

Où h est la fonction d'utilité exponentielle de la forme $h(u) = k - \frac{\pi}{\phi} e^{-\phi u}$, $u \geq 0$ et $-\left(\frac{h''(u)}{h'(u)}\right) = \phi$,

La solution de ce problème est de la forme :

$$A^*(t) = \frac{(\mu - \rho) V_u}{\sigma^2} - \frac{v\eta}{\sigma} \quad (5.50)$$

En remplaçant A^* par sa valeur dans (5.49), l'équation H.J.B devient :

$$V_t + \left[\rho u + \eta - \frac{v\eta}{\sigma} (\mu - \rho) \right] V_u - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \frac{V_u^2}{V_{uu}} + \frac{1}{2} \xi^2 (1 - v^2) V_{uu} = 0, \text{ pour } t < T \quad (5.51)$$

$$V(T, u) = h(u)$$

Le problème a été résolu pour $\eta = \xi = 0$ par Pliska [54], i.e. pas de processus de risque, ce qui n'ai pas vraiment intéressant, mais il nous permet d'avoir une idée sur la fonction valeur du problème. Effectivement Brown [07] a détourné ce problème, avec quelques modification de la fonction valeur comme nous allons le voie ci-dessous, puis nous citerons le théorème qui nous donne la stratégie d'investissement optimale de notre problème.

Pour $\eta = \xi = 0$, Pliska [54], a montrer que la fonction valeur est de la forme suivante :

$$V(t, u) = k - \frac{\pi}{\phi} \exp \left\{ -\phi u e^{\rho(t-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right) (T - t) \right\}$$

Et la stratégie d'investissement optimale en actif risqué est donnée par :

$$A^*(t) = \frac{(\mu - \rho)}{\phi \sigma^2} e^{-\rho(T-t)}$$

En utilisant ce résultat comme une première hypothèse, pour résoudre l'équation (5.51), Browne a essayé d'adapter une solution de la forme :

$$V(t, u) = k - \frac{\pi}{\phi} \exp \left\{ -\phi u e^{\rho(T-t)} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right) (T - t) + g(T - t) \right\} \quad (5.52)$$

Où $g(\cdot)$ une fonction appropriée.

La condition $V(T, u) = h(u) = k - \frac{\pi}{\phi} e^{-\phi u}$ devient $g(0) = 0$, en insérant la solution (5.52) dans

l'équation (5.51), nous avons :

$$g'(T - t) = -\phi \left(\eta - \frac{v\xi(\mu - \rho)}{\sigma} \right) e^{\rho(T-t)} + \frac{1}{2} \phi^2 \xi^2 (1 - v^2) e^{2\rho(T-t)}$$

En intégrant, avec la condition $g(0) = 0$, nous aboutissons à la fonction suivante :

$$g(T - t) = -\phi \left(\eta - \frac{v\xi(\mu - \rho)}{\sigma} \right) \left(\frac{e^{\rho(T-t)} - 1}{\rho} \right) + \frac{1}{2} \phi^2 \xi^2 (1 - v^2) \left(\frac{e^{2\rho(T-t)} - 1}{2\rho} \right) \quad (5.53)$$

Notons que la fonction (5.52) satisfait :

$$V_u(t, u) = [V(t, u) - \lambda](-\phi e^{\rho(T-t)}) \quad (5.54)$$

$$V_{uu}(t, u) = [V(t, u) - \lambda](\phi^2 e^{2\rho(T-t)}) \quad (5.55)$$

Nous pouvons maintenant remplacer la valeur de V_u et V_{uu} de l'équation (5.54) et (5.55) dans l'équation (5.50) afin d'obtenir le contrôle optimal, qui est donné par :

$$A^*(t) = \frac{(\mu - \rho)}{\phi\sigma^2} e^{-\rho(T-t)} - \frac{v\eta}{\sigma} \quad (5.56)$$

En remplaçant $A^*(t)$ de (5.56) dans l'équation (5.48), le processus de richesse optimal satisfait l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dU^*(t) = (\rho U^*(t) + \gamma_1 + \phi\gamma_2 e^{-\rho(T-t)})dt + \sqrt{\gamma_2 e^{-2\rho(T-t)} + \gamma_3} dW(t) \quad (5.57)$$

Avec $\gamma_1 = \eta - \frac{v\eta}{\sigma}(\mu - \rho)$, $\gamma_2 = \left(\frac{\mu - \rho}{\phi\sigma}\right)^2$, $\gamma_3 = \eta^2(1 - v^2)$, et $W(t)$ est un mouvement brownien standard.

L'équation (5.57) est une équation linéaire, voir ([36], pg. 354), et admet une unique solution :

$$U^*(t) = U(0)e^{\rho t} + \frac{\gamma_1}{\rho}(e^{\rho t} - 1) + \phi\gamma_2 t e^{-\rho(T-t)} + e^{\rho t} \int_0^t \sqrt{\gamma_2 e^{-2\rho s} + \gamma_3} e^{-2\rho s} dW(s) \quad , \text{ pour } t < T \quad (5.58)$$

Nous pouvons maintenant citer le théorème suivant qui nous donne la stratégie d'investissement optimale qui maximise l'utilité de la richesse, pour une classe d'utilité, dans le cas de l'approximation de diffusion.

Théorème 5.3 : Voir [07]

Si on veut maximiser l'utilité de la richesse terminale, sur un horizon fini T , pour un taux d'intérêt positif ρ , et une fonction d'utilité de la forme :

$$h(T, u) = k - \frac{\pi}{\phi} e^{-\phi u},$$

Alors la fonction valeur est de la forme

$$V(t, u) = k - \frac{\pi}{\phi} \exp\left\{-\phi u e^{\rho(T-t)} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu - \rho}{\sigma}\right)(T-t) + g(T-t)\right\} \quad (5.59)$$

Où la fonction $g(T-t)$ est donnée par l'équation (5.53), et la stratégie d'investissement optimale à l'instant t est :

$$A^*(t) = \frac{(\mu - \rho)}{\phi\sigma^2} e^{-\rho(T-t)} - \frac{v\eta}{\sigma} \quad (5.60)$$

Remarque 5.2 : il est important de noter que le contrôle optimal donné ci-dessus se réduit au contrôle optimal dans le cas le plus simple d'un marché complet ($\eta = \xi = 0$), comme décrit dans

[26], plus une autre constante $\frac{-v\eta}{\sigma}$, qui est indépendante du taux auquel des fonds externes accumulés de la compagnie (i.e. indépendante de η). De la, il reste une question ouverte, si on peut avoir pour d'autres fonctions d'utilité, des décompositions semblables dans un marché incomplet.

Remarque 5.3 :

Brown a montré [07], qu'il est beaucoup plus facile de déterminer la stratégie d'investissement optimale, qui minimise la probabilité de ruine, dans le cas d'une approximation de diffusion (par un mouvement brownien avec dérive), que dans le cas des processus de risque classique. Et ce, en appliquant les résultats de Pestien et Sudderth [51].

Il a noté, que spécialement pour un taux d'intérêt $\rho > 0$, le processus de richesse se développe comme un processus de diffusion, avec une dérive infinitésimale $\mu(A) = \rho u + A(\mu - \rho) + \eta$, et un paramètre de diffusion $\sigma^2(A) = A^2\sigma^2 + \xi^2 + 2v\sigma\xi A$. En choisissant A^* qui maximise $\mu(A)/\sigma^2(A)$, nous obtenons la stratégie d'investissement optimale, ce qui est logique, car comme nous l'avons déjà vu dans le chapitre IV, la probabilité de ruine d'un mouvement brownien décroît exponentiellement en fonction de la dérive divisée par le paramètre de diffusion. Et nous avons donc le théorème suivant :

Théorème 5.4: Voir [07]

Le contrôle optimal, qui maximise $P_u[U_{T^A} \geq b]$, (et qui minimise la probabilité de ruine) est la fonction :

$$A^*(t) = \frac{1}{\mu - \rho} \left[\sqrt{\left(\rho u + \eta - \frac{v\xi(\mu - \rho)}{\sigma} \right)^2 + (1 - v^2)\xi^2 \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2} - (\rho u + \eta) \right] \quad (5.61)$$

Remarque 5.3:

Il est clair, que cette politique qui dépend du capital initial, n'est pas équivalente à celle donnée par (5.56), pour n'importe quelle valeur du paramètre d'aversion pour le risque ϕ .

Il est aussi, intéressant de noter que le contrôle donné par (5.61) est décroissant par rapport à la réserve u , avec $A^*(0) = c$ et $A^*_{u \rightarrow \infty}(u) = 0$. Intuitivement, nous pouvons dire que si le but de l'assureur est de minimiser sa probabilité de ruine, il est plus commode d'investir plus dans l'actif sans risque avec un taux d'intérêt positif et moins dans l'actif risqué.

Nous passons maintenant à la minimisation de la probabilité de ruine, qui va nous donner une idée sur le paramètre d'aversion au risque qui nous permettra d'avoir une équivalence entre l'équation (5.60) et (5.61).

VI-4-2-Minimisation de la probabilité de ruine :

On commence toujours par de déterminer la stratégie d'investissement optimale qui minimise la probabilité de ruine comme suit :

$$\begin{aligned} \psi(u) &= P\{U(t) < 0, \text{ pour } t \geq 0\} \\ &= P\{\tau < \infty \mid U(0) = u\} \end{aligned}$$

Où la fonction valeur du problème est donnée par

$$V(u, z) = \inf P\{\tau < \infty \mid U(0) = u, Z(0) = z\}$$

Qui ne dépend pas de z , et τ est l'instant de ruine.

L'équation de H.J.B de notre problème est de la forme :

$$0 = \inf_A \left\{ V_t + [A(\mu - \rho) + \rho u + \eta] V_u + \frac{1}{2} (A^2 \sigma^2 + \xi^2 + 2v\sigma\xi A) V_{uu} \right\}, u > 0 \quad (5.62)$$

$$V(0) = 1, V(\infty) = 0$$

La stratégie d'investissement optimale est de la forme

$$A^* = \frac{(\mu - \rho) V_u}{\phi \sigma^2 V_{uu}} - \frac{v\eta}{\sigma} \quad (5.63)$$

Pour $v = 0$ et $\rho = 0$, nous avons donc

$$0 = \inf_A \left\{ V_t + [A\mu + \eta] V_u + \frac{1}{2} (A^2 \sigma^2 + \xi^2) V_{uu} \right\}, u > 0 \quad (5.64)$$

$$V(0) = 1, V(\infty) = 0$$

Nous savons que la stratégie d'investissement optimale est de la forme :

$$A^* = \frac{\mu V_u}{\sigma^2 V_{uu}}$$

Notons V_u par $V'(u)$ et V_{uu} par $V''(u)$, et en remplaçant dans l'équation (5.53), on a alors

$$0 = \eta V'(u) + \frac{1}{2} \left(\xi^2 V''(u) - \frac{\mu V'(u)}{\sigma^2 V''(u)} \right)$$

$$2\eta = \frac{\mu V'(u)}{\sigma^2 V''(u)} - \xi^2 \frac{V''(u)}{V'(u)}$$

$$2\eta = -\frac{\mu}{\sigma^2 s} + \xi^2 s, \quad \text{ou} \quad \frac{V''(u)}{V'(u)} = s$$

$$A = -\frac{\mu}{\sigma^2 s} \quad \text{avec} \quad V(u) = \exp(-su)$$

Maintenant il reste à vérifier que $V(u) = \exp(-su)$ est bien une solution de l'équation H.J.B, i.e., il faut montrer que c'est la fonction valeur. Pour ce la, nous allons juste citer le théorème de vérification, sans la démonstration, voir [30].

V-4-2-1-Théorème de vérification :

Soit A_t Une stratégie arbitraire, prévisible.

$$dU(t) = \eta dt + \xi d\tilde{W}(t) + A(t)(\mu dt + \sigma dW(t)), \quad U(0) = u$$

$$\tau = \inf \{t, U(t) < 0\}$$

$$\text{Soit } Y(t) = V(U(t \wedge \tau))$$

D'après le lemme d'Itô, voir [30], nous avons :

$$dY(t) = V'(U(t))(\eta dt + \xi d\tilde{W}(t)) + V'(U(t))A(t)(\mu dt + \sigma dW(t)) + \frac{1}{2} V''(U(t))(\xi^2 + A^2(t)\sigma^2)$$

Avec

$$0 \leq [A\mu + \eta] V'(u) + \frac{1}{2} (A^2 \sigma^2 + \xi^2) V''(u), \quad u > 0$$

Pour A une stratégie arbitraire (Voir [30]) :

$Y(t)$ est une sur-martingale : $E[Y(t)] \geq E[Y(0)] = V(u)$

$$V(u) \leq \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y(t)] = P\{\tau < \infty \mid U(0) = u\}$$

Puisque $V(0) = 1$, $V(\infty) = 0$ et $U(\tau) = 0$ et $U(t) \rightarrow \infty$ dans l'ensemble $\{\tau = \infty\}$.

Pour l'optimum de l'équation de Bellman, on obtient une martingale :

$$V(u) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[Y(t)] = P\{\tau < \infty \mid U(0) = u\}$$

Alors $V(u)$ est bien la fonction valeur.

Maintenant nous allons juste présenter les étapes intermédiaire pour le calcul de la probabilité de ruine quand $v \neq 0$ et $\rho \neq 0$:

A partir de (5.63) et de (5.61), nous avons :

$$\psi'(u) = \psi'(0) \exp \left[- \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \int_0^u \frac{dt}{\sqrt{(\rho t + J)^2 + K^2 - (\rho t + \eta)}} \right] \quad (5.65)$$

Avec $J = \eta - \frac{v\xi(\mu - \rho)}{\sigma}$ et $K = \sqrt{(1 - v^2)}\xi \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)$

Il s'en suit

$$\begin{aligned} \psi'(u) &= 1 + \int_0^u \psi''(t) dt \\ &= 1 + \psi'(0) \int_0^u \exp \left[- \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(\rho t + J)^2 + K^2 - (\rho t + \eta)}} \right] ds \end{aligned} \quad (5.66)$$

Pour calculer $\psi'(0)$ il suffit d'utiliser la condition à la limite $\lim_{u \rightarrow \infty} \psi'(0) = 0$, nous avons alors

$$0 = 1 + \psi'(0) \int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(\rho t + J)^2 + K^2 - (\rho t + \eta)}} \right] ds \quad (5.67)$$

Ainsi nous avons le théorème suivant, voir [11]

Théorème 6.4 : voir [11]

La probabilité de ruine minimale du problème définie par l'équation (6.62) est donnée par :

$$\psi(u) = 1 - \frac{\int_0^u \exp \left[- \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \int_0^s \frac{dt}{\sqrt{(\rho t + J)^2 + K^2 - (\rho t + \eta)}} \right] ds}{\int_0^{\infty} \exp \left[- \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)^2 \int_0^s \frac{ds}{\sqrt{(\rho t + J)^2 + K^2 - (\rho t + \eta)}} \right] ds} \quad (5.68)$$

Avec $J = \eta - \frac{v\xi(\mu - \rho)}{\sigma}$ et $K = \sqrt{(1 - v^2)}\xi \left(\frac{\mu - \rho}{\sigma} \right)$

V-4-2-2-coefficient d'ajustement :

Nous allons maintenant calculer le coefficient d'ajustement qui nous permet d'avoir la stratégie d'investissement optimale qui maximise l'utilité de la richesse et qui minimise la probabilité de ruine, i.e. qui nous permettra d'avoir une équivalence entre l'équation (5.61) et (5.60) pour $\rho = 0$.

Comme nous l'avons déjà vu dans la partie V-3-4, pour déterminer le coefficient d'ajustement, il suffit de résoudre :

$$L^A f(u) = 0$$

Avec $f(u) = \exp(-ru)$, $r := r(A)$, à résoudre pour $r(A)$. (A stratégie constante)

Où $L^A f(u)$ est le générateur infinitésimal du processus de réserve pour la fonction $f(u)$, alors en remplaçant la fonction valeur $V(t, u)$ par $f(u)$ dans l'équation (5.62), le coefficient d'ajustement \hat{r} est la solution de l'équation suivante :

$$\frac{1}{2}(A^2\sigma^2 + \xi^2 + 2v\sigma\xi A)\hat{r}^2 - (A(\mu - \rho) + \rho u + \eta)\hat{r} + \lambda h(\hat{r}) = 0$$

Plus précisément pour $\rho = 0$, nous avons

$$\frac{1}{2}(A^2\sigma^2 + \xi^2 + 2v\sigma\xi A)\hat{r}^2 - (A\mu + \eta)\hat{r} + \lambda h(\hat{r}) = 0 \quad (5.69)$$

En remplaçant A par sa valeur donnée par l'équation (5.60), pour $\phi = \hat{r}$ dans l'équation (5.69), on trouve :

$$\frac{1}{2}\xi^2(1-v^2)\hat{r}^2 - \left(\eta - \frac{v\xi\mu}{\sigma}\right)\hat{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + \lambda h(\hat{r}) = 0 \quad (5.70)$$

Browne [07] a montré que le coefficient qui donne l'équivalence entre l'équation (5.61) et (5.60) pour $\rho = 0$ est la solution positive du polynôme suivant :

$$Q(\hat{r}) = \frac{1}{2}\xi^2(1-v^2)\hat{r}^2 - \left(\eta - \frac{v\xi\mu}{\sigma}\right)\hat{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 \quad (5.71)$$

Et ce, grâce au développement de $h(\hat{r})$ en série de Taylor.

Nous avons $h(\hat{r}) = \frac{\alpha r}{1-\alpha r}$ et $\frac{1}{1-\alpha r} = 1 + \alpha r + (\alpha r)^2 + 0((\alpha r)^2)$, alors dans ce cas

$$\frac{1}{2}\xi^2(1-v^2)\hat{r}^2 - \left(\eta - \frac{v\xi\mu}{\sigma}\right)\hat{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + \lambda h(\hat{r}) = 0$$

\Leftrightarrow

$$Q(\hat{r}) = \frac{1}{2}\xi^2(1-v^2)\hat{r}^2 - \left(\eta - \frac{v\xi\mu}{\sigma}\right)\hat{r} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 = 0$$

i.e. résoudre (5.70) se simplifie à la résolution de (5.71), et la solution est donnée par :

$$\hat{r} \equiv \frac{\left(\eta - \frac{v\xi\mu}{\sigma}\right) + \sqrt{\Delta}}{\xi^2(1-v^2)} \quad (5.72)$$

Avec $\sqrt{\Delta} = \left(\eta - \frac{v\xi\mu}{\sigma}\right)^2 + \xi^2(1-v^2)\left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2$

Dans la partie V-3-2-nous avons calculer la stratégie d'investissement qui maximise la richesse de la compagnie pour $\rho = 0$ et qui est donnée par l'équation (5.27), nous pouvons remarquer qu'elle est équivalente à la solution du problème de maximisation de la richesse pour l'approximation de diffusion pour $v = 0$ et $\rho = 0$, qui est donnée par l'équation (5.60), nous avons aussi vu dans la partie V-3-3, que la meilleur estimation du paramètre d'aversion au risque est le coefficient de Lundberg \hat{r} , maintenant nous allons le calculer pour l'approximation de diffusion, à partir de l'équation (5.72), puis nous allons constater qu'en prenant $\phi = \hat{r}$, on retrouve bien la solution donnée par le théorème 5.2.

Alors, pour $v = 0$ et $\rho = 0$, la stratégie d'investissement de ce problème a été calculée explicitement, dans la partie V-3-3, voir théorème 5.3. C'est une constante indépendante du surplus initial, de la forme :

$$A^* = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{\xi^2}{\eta} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\xi}{\eta\sigma}\right)^2}} \quad (5.73)$$

Et la probabilité de ruine minimale, comme une fonction de la réserve initiale est une fonction exponentielle définie comme suit :

$$\bar{\psi}^*(u) = \exp\left\{-\frac{\eta + \sqrt{\eta^2 + \xi^2 \mu^2 / \sigma^2}}{\xi^2} u\right\} \quad (5.74)$$

Comparant maintenant A^* (5.73), avec le résultat précédent :

$$A^* = \mu / \hat{r} \sigma^2 .$$

$$\frac{1}{2} \xi^2 \hat{r}^2 - \eta \hat{r} - \frac{1}{2} \left(\frac{\mu}{\sigma}\right)^2 + \lambda h(\hat{r}) = 0$$

En développant $h = \frac{\alpha \hat{r}}{1 - \alpha \hat{r}}$ en séries de Taylor, nous obtenons : $\eta \hat{r} - \frac{\xi^2}{2} \hat{r}^2 + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} \sim 0$

La solution positive de cette équation quadratique est

$$\hat{r} \equiv \frac{\eta}{\xi^2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{\xi}\right)^2 + \frac{\mu^2}{\sigma^2 \xi^2}} \quad (5.75)$$

En remplaçant dans $A^* = \mu / \hat{r} \sigma^2$, on trouve exactement $A^* = \frac{\mu}{\sigma^2} \frac{\xi^2}{\eta} \frac{1}{1 + \sqrt{1 + \left(\frac{\mu\xi}{\eta\sigma}\right)^2}}$

Donc, pour $\phi = \hat{r}$, on a bien la stratégie d'investissement optimale, qui maximise l'utilité de la richesse et qui réduit au minimum la probabilité de ruine.

V-5- comparaison des probabilités de survie :

Pour une comparaison numérique, nous reprenons notre modèle défini dans la partie V-2-4, avec les mêmes paramètres et $\rho = 0$, à partir de l'équation (5.42), nous obtenons $\hat{r} = 0.2210479285$, la stratégie d'investissement correspondante est $A^* = 5.026561971$, et la probabilité de ruine décroît exponentiellement, nous allons représenter dans le même graphe l'approximation de la probabilité de survie du problème de maximisation de la richesse avec le coefficient de Lundberg $\hat{r} = 0.2210479285$ comme paramètre d'aversion au risque et la probabilité de survie déterminé par la méthode des différence finie dans la partie V.1, pour $\rho = 0$:

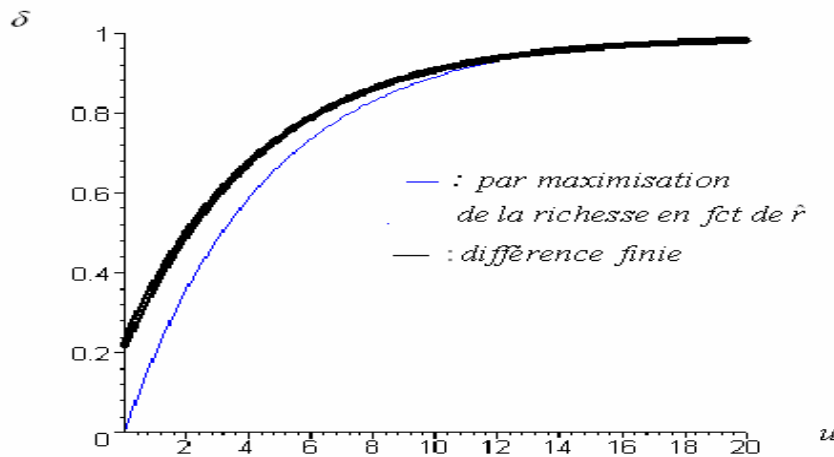


Fig.V.13 comparaison des probabilités de survie

Comme nous l'avons déjà vu dans la figure V.13, quand le capital initial augmente, la stratégie d'investissement est asymptotiquement constante, tel que nous avons $A^* \approx 5$ qui coïncide avec la stratégie d'investissement optimale $A^* = 5.026561971$ qui maximise l'utilité exponentielle de la richesse de la compagnie, avec l'exposant de Lundberg comme paramètre de l'aversion au risque. Donc ce dernier, nous permet vraiment d'avoir la stratégie d'investissement optimale qui maximise la richesse de la compagnie et qui minimise à la fois la probabilité de ruine. Et la figure 4.1.1, nous permet de voir que les probabilités de survie pour les deux approches ont le même comportement asymptotiquement (quand le capital initial est assez important).

En remplaçant \hat{r} donné par l'équation (5.75) dans $A^* = \mu/\hat{r}\sigma^2$, nous obtenons A^* , qui est la solution optimale du problème de diffusion obtenue par Brown [07], donc, en prenant le coefficient de Lundberg comme paramètres d'aversion au risque ($\phi \equiv \hat{r}$), la stratégie d'investissement optimale vérifie les deux théorème de Browne (5.2) et (5.3). Ainsi, le coefficient de Lundberg nous permet donc de déterminer la stratégie d'investissement optimale qui à la fois maximise l'espérance de l'utilité exponentielle de la compagnie et donne la probabilité de ruine minimale.

Revenant à notre exemple, ou dans ce cas, nous obtenons $\bar{A}^* = 4.13246$ et $\hat{r} = 0.26887$, et maintenant, nous allons représenter la probabilité de survie graphiquement et la comparer avec la probabilité de ruine obtenue par la méthode des différences finies pour $\rho = 0$.

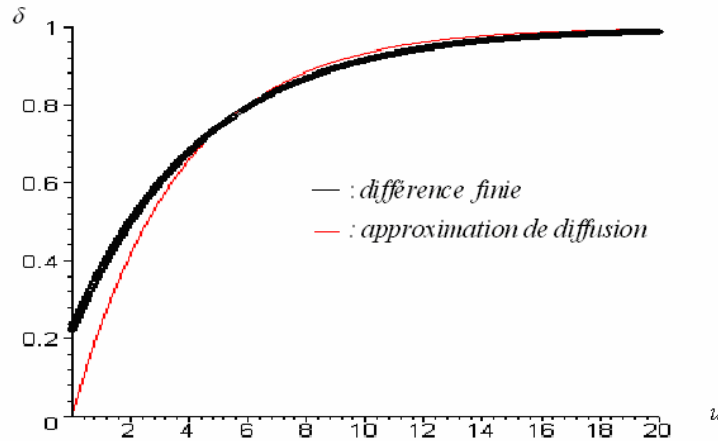


Fig.V.14 comparaison de la probabilité de survie pour la méthode des différences finies avec l'approximation de diffusion

Le graphe nous montre clairement que le comportement asymptotique de probabilité issue de l'approximation de diffusion se confond avec la probabilité de survies obtenue à partir de la discrétisation (asymptotiquement identique).

VI- Conclusion :

Nous avons vu plus haut, que la stratégie d'investissement par minimisation de la probabilité de ruine devient constante $A \approx 5$, pour un capital initial assez important, et elle est approximativement égal à $A^* = 5.026561971$, qui est la stratégie d'investissement qui maximise la richesse pour une utilité exponentielle, avec le coefficient de Lundberg comme paramètre d'aversion au risque. Nous pouvons donc constater que le coefficient de Lundberg est le meilleur choix de paramètre d'aversion au risque, car il nous permet à la fois de maximiser la richesse de la compagnie, ainsi que de minimiser la probabilité de ruine, tout en nous évitant de nous encombrer par des méthodes de discrétisation de l'équation HJB, qui sont plus coûteuses.

Avec la simulation par la diffusion, nous avons obtenu $\hat{r} = 0.26887$ qui est supérieur au coefficient de Lundberg déterminé par l'équation (5.34) $\hat{r} = 0.2211$, donc il nous donne une meilleure borne pour la probabilité de ruine.

Ainsi, nous avons fini par établir un lien entre les différentes approches, qui nous a permit de faire une comparaison entre les différentes stratégies d'investissements obtenues, et de déterminer une stratégie d'investissement optimale qui maximise la richesse de la compagnie et minimise à la fois sa probabilité de ruine, et ce en choisissant un paramètre d'aversion au risque très particulier, appelé coefficient de Lundberg.

Conclusion générale

L'objet de notre travail a été de mettre en évidence les méthodes du contrôle stochastique dans la gestion du portefeuille d'une compagnie d'assurance ; Ces méthodes sont issues des développements de la théorie financière (Merton), et constituent un instrument véritablement indispensable aux assureurs voulant se couvrir de tout le spectre de leurs attitudes face au risque.

Nous avons considéré le cas d'une compagnie d'assurance, à laquelle, on associe un processus de risque modélisé par le processus de Cramér-Lundberg, où le processus des sinistres est représenté par un processus de poisson composé. Cette compagnie, a plusieurs choix possibles pour gérer son risque. Nous avons étudié l'une d'entre elles qui est le contrôle stochastique du processus de richesse de la compagnie, ce dernier peut être modélisé comme un processus de diffusion contrôlé. Nous avons choisi l'investissement optimal comme variable de contrôle, où nous considérons que la compagnie peut investir dans un actif sans risque et dans un actif risqué selon le modèle de Black & Scholes, qui est sans doute le plus célèbre dans le monde de la finance et dans les milieux professionnels et qui considère que le temps est une variable aléatoire continue où le coût de l'actif est modélisé selon un mouvement Brownien Géométrique. Ceci nous a contraint à exposer un outil mathématique qui nous semble incontournable qui est calcul stochastique (processus de diffusion, contrôle de processus de diffusion,...). Ce dernier a été utilisé et appliqué tout au long de notre travail.

Le but de notre travail est de déterminer la stratégie d'investissement optimale pour une compagnie d'assurance, qui peut avoir plusieurs critères de choix pour la détermination de la politique optimale. Nous avons le principe de l'utilité espérée, où l'on cherche à maximiser une certaine fonction d'utilité de la richesse de la compagnie en question, et le principe de la théorie de ruine. Notre principal objectif dans ce cas est la minimisation de la probabilité de ruine. Nous avons aussi combiné entre les deux approches, afin d'avoir une politique qui maximise l'utilité de la richesse de la compagnie et qui minimise la probabilité de ruine.

Pour pouvoir appliquer de manière concrète cette théorie, nous avons eu recours à des approximations et à l'estimation d'un paramètre très important qui est le coefficient de Lundberg. L'approximation par différences finies sera pour nous un outil précieux, car elle nous permet de discrétiser l'équation H.J.B de notre problème afin de déterminer directement la stratégie d'investissement optimale qui minimise la probabilité de ruine.

Ce qui nous a permis aussi d'établir une comparaison graphique avec la politique obtenue par la maximisation d'une utilité exponentielle de la richesse, où nous avons une solution explicite de la stratégie d'investissement optimale.

Ainsi, ce travail permettra de donner au lecteur une idée générale sur le contrôle stochastique des processus de risque par l'investissement, les différentes approches avec lesquelles on peut considérer le problème (selon le choix du décideur) et le lien qui peut y avoir entre elles, afin d'avoir le meilleur résultat possible (la stratégie d'investissement optimale) en combinant entre la gestion dynamique du portefeuille et la théorie de ruine.

ANNEXES
Résolution avec Maple 10

*Détermination de la stratégie d'investissement optimale
par la minimisation de la probabilité de ruine*

le taux d'intérêt fixe nul

```

> restart:
with(plots):
F:=-2*theta*w-4*(
(-lambda+rho)+theta*(c+u*rho)-1/2)*sqrt(w)+4*(c+u*rho);
G:=-theta*y+phi;
mu:=0.1:
sigma:=0.3:
theta:=1.00:
lambda1:=3.00:
rho1:=0.000:
c1:=3.60:
R:=(mu-rho1)/sigma^2:
lambda:=lambda1/R:
rho:=rho1/R:
c:=c1/R:
alpha:=(mu-rho1)/sigma^2:
w := 0:
y:=0:
phi:=(lambda1/c1):
u := 0:
h:=0.01;
alist := [u,w]:
blist:=[u,alpha*sqrt(w)]:
clist:=[u,y]:
dlist :=[u,phi]:
elist:=[u,1-(phi/3.76)]: flist :=[u,phi/3.76] :
for i from 1 to 2000 do
w := w + F*h:
y:=y+G*h:
phi:=(((u+h)*rho+c+(1/2)*sqrt(w))*phi-lambda*h*y)/(((u+h)*rho
+c+1/2*sqrt(w))-lambda*h):
u := u + h:
alist := alist,[u,w]:
blist:=blist,[u,alpha*sqrt(w)]:
clist := clist,[u,y]:
dlist := dlist,[u,phi]:
elist:=elist,[u,1-(phi/3.76)]: flist := flist,[u,phi/3.76]:
p1 := plots[pointplot]([ alist ]):
p2 := plots[pointplot]([ blist ]):
p3 := plots[pointplot]([ dlist ]):
p4 := plots[pointplot]([ elist ],color=red): p5 :=
plots[pointplot]([ flist ],view = [0..20,0..1],color=red):
od:

```

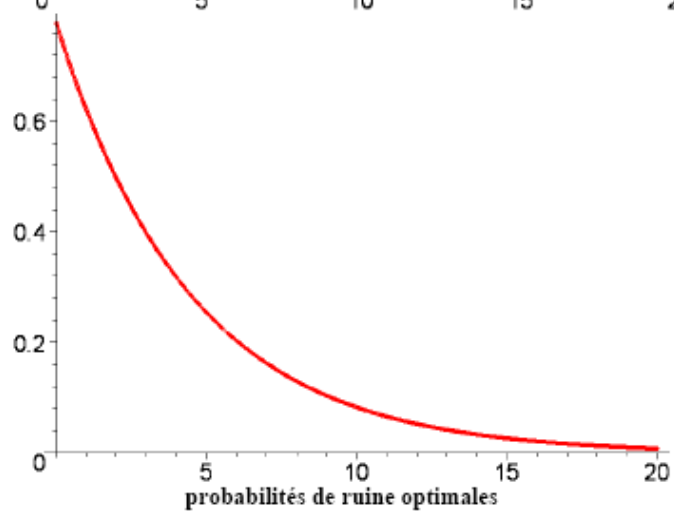
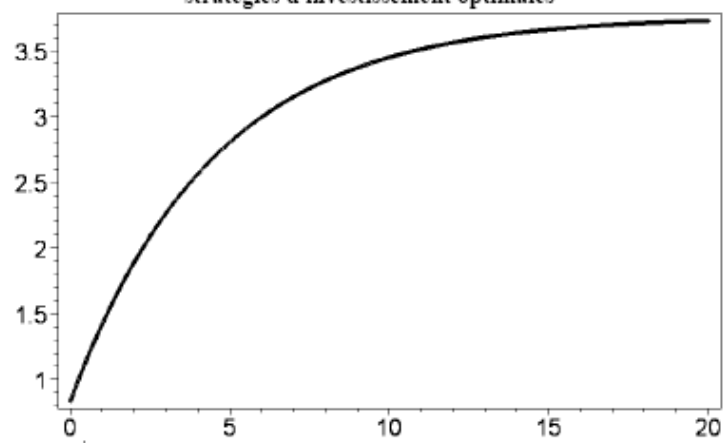
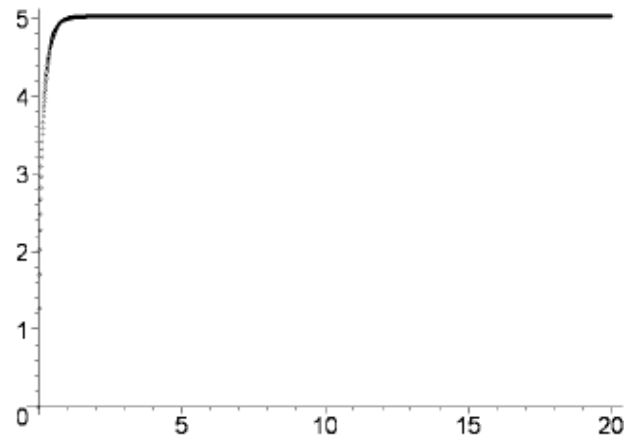
p2; p3; p4; p5 ;

Warning, the name changecoords has been redefined

$$F := -2\theta w - 4 \left(-\lambda + \rho + \theta(c + u\rho) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{w + 4c + 4u\rho}$$

$$G := -\theta y + \phi$$

$$h := 0.01$$



*détermination de la stratégie d'investissement optimale
par la minimisation de la probabilité de ruine
en utilisant dsolve*

- pour un taux d'intérêt nul :

```
> restart:
with(DEtools):
with(plots):
with(linalg):
interface(rtablesize=2100):
mu:=0.1:
sigma:=0.3:
theta:=1.00:
lambda1:=3.00:
rho1:=0.000:
c1:=3.60:
R:=(mu-rho1)/sigma^2:
lambda:=lambda1/R:
rho:=rho1/R:
c:=c1/R:
alpha:=(mu-rho1)/sigma^2:
ode:=diff(y(x),x)=-2*theta*y(x)-4*((rho-lambda)+theta*(c+x*rho)
1/2)*sqrt(y(x))+4*(c+x*rho);
ic:=y(0)=0;
x0:=0:
h:=0.01:
N:=2000:
x_list:=Array( 1..N+1, i -> x0+(i-1)*h):
dsolve({ode,ic},y(x),type=numeric,method=classical[rk2],
stepsize=h, output=x_list):
sol:=dsolve({ode,ic},y(x),type=numeric,method=classical[rk2],
stepsize=h):
odeplot(sol,[x,y(x)],0...20,title="figure 2.1"):
odeplot(sol,[x,alpha*sqrt(y(x))],0...20,title="figure 1.2
:Stratégie d'investissement optimale");
```

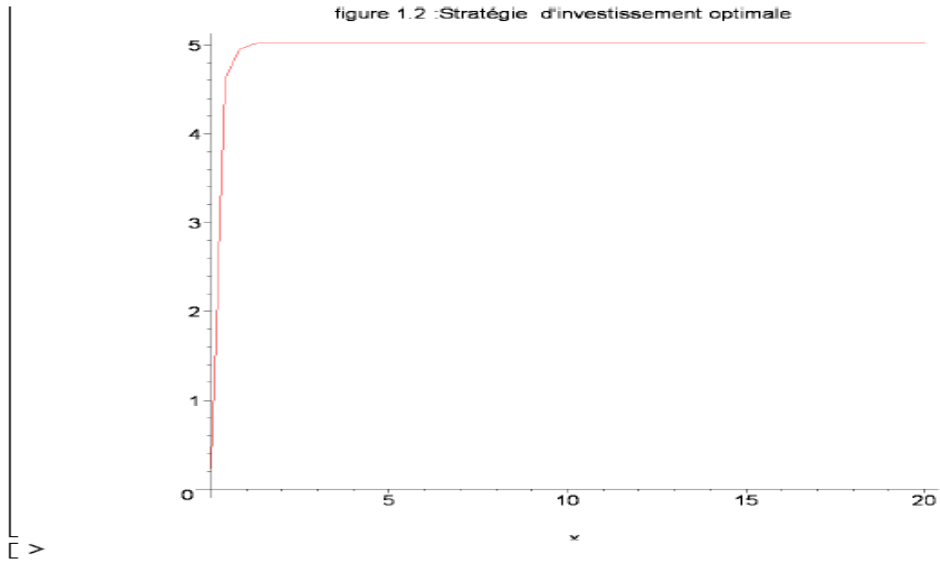
Warning, the name changecoords has been redefined

Warning, the assigned name adjoint now has a global binding

Warning, the protected names norm and trace have been redefined and unprotected

$$ode := \frac{d}{dx} y(x) = -2.00 y(x) - 19.60000000 \sqrt{y(x)} + 129.6000000$$

$$ic := y(0) = 0$$



effet du taux d'intérêt

```

[
> restart:
with(plots):
1- taux d'intérêt nul
F:=-2*theta*w-4*(
(-lambda+rho)+theta*(c+u*rho)-1/2)*sqrt(w)+4*(c+u*rho):
G:=-theta*y+phi:
mu:=0.1:
sigma:=0.3:
theta:=1.00:
lambda1:=3.00:
rho1:=0.000:
c1:=3.60:
R:=(mu-rho1)/sigma^2:
lambda:=lambda1/R:
rho:=rho1/R:
c:=c1/R:
alpha:=(mu-rho1)/sigma^2:
w := 0:
y:=0:
phi:=(lambda1/c1):
u := 0:
h:=0.01:
alist := [u,w]:
blist:=[u,alpha*sqrt(w)]:
clist:=[u,y]:
dlist :=[u,phi]:
flist :=[u,phi/3.80]: elist:=[u,1-(phi/3.80)]:
for i from 1 to 2000 do
w := w + F*h:
y:=y+G*h:
phi:=(((u+h)*rho+c+(1/2)*sqrt(w))*phi-lambda*h*y)/(((u+h)*rho+c+
1/2*sqrt(w))-lambda*h):
u := u + h:
alist := alist,[u,w]:
blist:=blist,[u,alpha*sqrt(w)]:
clist := clist,[u,y]:
dlist := dlist,[u,phi]:
flist := flist,[u,phi/3.80]:
elist:=elist,[u,1-(phi/3.80)]:
p1 := plots[pointplot]([ alist ]):
p2 := plots[pointplot]([ blist ]):
p3 := plots[pointplot]([ dlist ]):
p4 := plots[pointplot]([ elist ],view = [0..20,0..1]):
p5 := plots[pointplot]([ flist ],view = [0..20,0..1]):
od:
p2: p3:p4: p5:

```

2- taux d'interêt rho = 0.02

```

F2:= -2*theta2*w2-4*(
(-lambda4+rho4)+theta2*(c4+u2*rho4)-1/2)*sqrt(w2)+4*(c4+u2*rho4)
;      G2:=-theta2*y2+phi2:
mu2:=0.1:
sigma2:=0.3:
theta2:=1.00:
lambda5:=3.00:
rho5:=0.020:
c5:=3.60:
R2:=(mu2-rho5)/sigma2^2:
lambda4:=lambda5/R2:
rho4:=rho5/R2:
c4:=c5/R2:
alpha2:=(mu2-rho5)/sigma2^2:
w2:= 0:
y2:=0:
phi2:=(lambda5/c5):
u2 := 0:
h2:=0.01:
a2list := [u2,w2]:
b2list:=[u2,alpha2*sqrt(w2)]:
c2list:=[u2,y2]:
d2list :=[u2,phi2]:
f2list :=[u2,phi2/3.80]:
e2list:=[u2,1-(phi2/3.80)]:
for i from 1 to 2000 do
w2 := w2 + F2*h2:
y2:=y2+G2*h2:
phi2:=(((u2+h2)*rho4+c4+(1/2)*sqrt(w2))*phi2-lambda4*h2*y2)/(((u
2+h2)*rho4+c4+1/2*sqrt(w2))-lambda4*h2):
u2 := u2 + h2:
a2list := a2list,[u2,w2]:
b2list:=b2list,[u2,alpha2*sqrt(w2)]:
c2list := c2list,[u2,y2]:
d2list := d2list,[u2,phi2]:
f2list := f2list,[u2,phi2/3.80]:
e2list:=e2list,[u2,1-(phi2/3.80)]:
p21 := plots[pointplot]([ a2list ]):
p22 := plots[pointplot]([ b2list ], color=green):
p23 := plots[pointplot]([ d2list ]):
p24 := plots[pointplot]([ e2list ],view = [0..20,0..1]):
p25 := plots[pointplot]([ f2list ],view = [0..20,0..1],
color=green):
od:
p22: p23:p24: p25:

```

3- taux d'intérêt rho = 0.04

```

f:=-2*t*W-4*( (-1+r)+t*(C+U*r)-1/2)*sqrt(W)+4*(C+U*r):
g:=-t*Y+p:
m:=0.1:
s:=0.3:
t:=1.00:
l1:=3.00:
r1:=0.040:
C1:=3.60:
K:=(m-r1)/s^2:
l:=l1/K:
r:=r1/K:
C:=C1/K:
a:=(m-r1)/s^2:
W := 0:
Y:=0:
p:=(l1/C1):
U := 0:
H:=0.01:
Alist := [U,W]:
Blist:=[U,a*sqrt(W)]:
Clist:=[U,Y]:
Dlist :=[U,p]:
Elist :=[U,p/3.80]:
Flist:=[U,1-(p/3.80)]:
for j from 1 to 2000 do
W := W + f*H:
Y:=Y+g*H:
p:=(((U+H)*r+C+(1/2)*sqrt(W))*p-l*H*Y)/(((U+H)*r+C+1/2*sqrt(W))
l*H):
U := U + H:
Alist := Alist, [U,W]:
Blist:=Blist, [U,a*sqrt(W)]:
Clist := Clist, [U,Y]:
Dlist := Dlist, [U,p]:
Flist := Flist, [U,p/3.80]:
Elist:=Elist, [U,1-(p/3.80)]:
P1 := plots[pointplot]([ Alist ]):
P2 := plots[pointplot]([ Blist ], color=red):
P3 := plots[pointplot]([ Dlist ]):
P4 := plots[pointplot]([ Elist ],view = [0..20,0..1]):
P5 := plots[pointplot]([ Flist ],view = [0..20,0..1],
color=red):
od:
P2: P3:P4: P5:

```

3- taux d'interêt rho = 0.06

```

F1:=-2*theta1*w1-4*(
(-lambda2+rho2)+theta1*(c2+u1*rho2)-1/2)*sqrt(w1)+4*(c2+u1*rho2);
G1:=-theta1*y1+phi1:
mu1:=0.1:
sigma1:=0.3:
theta1:=1.00:
lambda3:=3.00:
rho3:=0.060:
c3:=3.60:
R1:=(mu1-rho3)/sigma1^2:
lambda2:=lambda3/R1:
rho2:=rho3/R1:
c2:=c3/R1:
alpha1:=(mu1-rho3)/sigma1^2:
w1:= 0:
y1:=0:
phi1:=(lambda3/c3):
u1 := 0:
h1:=0.01:
allist := [u1,w1]:
bllist:=[u1,alpha1*sqrt(w1)]:
cllist:=[u1,y1]:
dllist :=[u1,phi1]:
fllist :=[u1,phi1/3.78]: ellist:=[u1,1-(phi1/3.78)]:
for i from 1 to 2000 do
w1 := w1 + F1*h1:
y1:=y1+G1*h1:
phi1:=(((u1+h1)*rho2+c2+(1/2)*sqrt(w1))*phi1-lambda2*h1*y1)/(((u1+h1)*rho2+c2+1/2*sqrt(w1))-lambda2*h1):
u1 := u1 + h1:
allist := allist,[u1,w1]:
bllist:=bllist,[u1,alpha1*sqrt(w1)]:
cllist := cllist,[u1,y1]:
dllist := dllist,[u1,phi1]:
fllist := fllist,[u1,phi1/3.78]:
ellist:=ellist,[u1,1-(phi1/3.78)]:
p11 := plots[pointplot]([ allist ]):
p12 := plots[pointplot]([ bllist ], color=blue):
p13 := plots[pointplot]([ dllist ]):
p14 := plots[pointplot]([ ellist ],view = [0..20,0..1]):
p15 := plots[pointplot]([ fllist ],view = [0..20,0..1],
color=blue):
od:
p12: p13:p14: p15:
plots[display] ([p2,P2,p12,p22]); nous permet d'avoir les stratégies d'investissement
optimale en fonctions des différentes

```

valeurs du taux d'intérêt sur le même graphe

```
plots[display]([p5,P5,p15,p25],view = [0..20,0..1]);
```

Warning, the name changecoords has been redefined

$$F2 := -2 \theta_2 w_2 - 4 \left(-\lambda_4 + \rho_4 + \theta_2 (c_4 + u_2 \rho_4) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{w_2 + 4 c_4 + 4 u_2 \rho_4}$$

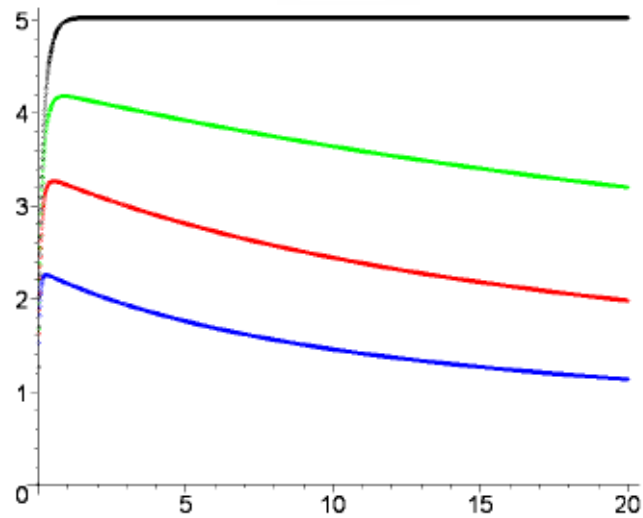
$$F1 := -2 \theta_1 w_1 - 4 \left(-\lambda_2 + \rho_2 + \theta_1 (c_2 + u_1 \rho_2) - \frac{1}{2} \right) \sqrt{w_1 + 4 c_2 + 4 u_1 \rho_2}$$

— : $\rho = 0.06$

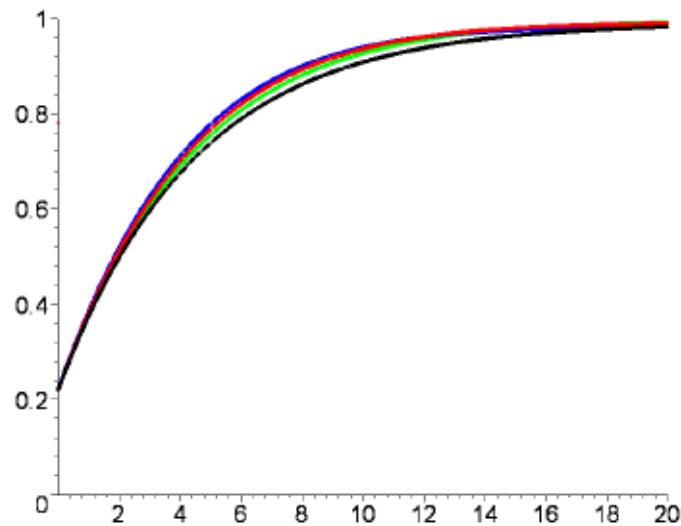
— : $\rho = 0.04$

— : $\rho = 0.02$

— : $\rho = 0$



stratégies d'investissement optimales pour différentes valeur du taux d'interé



probabilités de ruine optimales pour différentes valeur du taux d'interé

Coefficient d'ajustement ou de Lundberg

1-Calcul du coefficient de Lundberg dans le cas sans investissement :

$$\hat{r}_0 = (c - \lambda \alpha) / (c \alpha) \quad (1)$$

```
> restart;
with(plots):
r[0]:=(c-lambda*alpha)/(c*alpha);
Warning, the name changecoords has been redefined
```

$$r_0 := \frac{c - \lambda \alpha}{c \alpha}$$

```
> mu:=0.1:
sigma:=0.3:
alpha:=1.00:
lambda:=3.00:
c:=3.60:
r[0];
```

0.1666666667

2-Calcul du coefficient de Lundberg pour $A^*(t,u) = \mu/\hat{r}\sigma^2$

$$\hat{r} = \hat{r}_0 + \sqrt{\left(\frac{1}{2}\left(\hat{r}_0 + \frac{\mu^2}{2c\sigma^2}\right)\right)^2 + \frac{\mu^2}{2c\sigma^2}\left(\frac{1}{\alpha} - \hat{r}_0\right) - \frac{1}{2}\left(\hat{r}_0 + \frac{\mu^2}{2c\sigma^2}\right)} \quad (2)$$

```
> restart:
r:=r0+sqrt(((r0+(mu^2/(2*c*sigma^2)))/2)^2+(mu^2/(2*c*sigma^2))
)*(1/alpha-r0))-((r0+(mu^2/(2*c*sigma^2)))/2);
```

$$r := \frac{r_0}{2} + \frac{\sqrt{4\left(\frac{r_0}{2} + \frac{\mu^2}{4c\sigma^2}\right)^2 + \frac{2\mu^2\left(\frac{1}{\alpha} - r_0\right)}{c\sigma^2}}}{2} - \frac{\mu^2}{4c\sigma^2}$$

```
> r0:=(c-lambda*alpha)/(c*alpha);
mu:=0.1:
sigma:=0.3:
alpha:=1.00:
lambda:=3.00:
c:=3.60:
r0; nous allons calculer  $\hat{r}_0$ , définie par l'équation (1), qui est le coefficient de Lundberg classique, i.e., le cas sans investissement.
```

r0 := 0.1666666667

```

>
> r:=r0+sqrt(((r0+(mu^2/(2*c*sigma^2)))/2)^2+(mu^2/(2*c*sigma^2))
  *(1/alpha-r0))-((r0+(mu^2/(2*c*sigma^2)))/2); nous allons calculer
  le coefficient de Lundberg pour  $\phi = \hat{r}$  à partir de l'équation (2), dans le cas ou nous avons
  seulement l'investissement en actif risqué, i.e.  $\rho = 0$ 
      r := 0.2210479286
>

```

3- calcul du coefficient à partir du polynome $c\alpha r^2 - \left(\alpha \frac{\mu^2}{2\sigma^2} + \lambda\alpha - c\right)r + \frac{\mu^2}{2\sigma^2} = 0$

nous allons calculer le coefficient à partir du polynome directement, juste pour confirmer que la solution positive est celle donnée par l'équation (2) et calculée précédemment.

```

> restart:
  with (plots):
  f:=c*alpha*r^2+((mu^2*alpha/(2*sigma^2))+lambda*alpha-c)*r-(m
    u^2/(2*sigma^2));
  Warning, the name changecoords has been redefined

      f:=c\alpha r^2+\left(\frac{\mu^2\alpha}{2\sigma^2}+\lambda\alpha-c\right)r-\frac{\mu^2}{2\sigma^2}

> mu:=0.1:
  sigma:=0.3:
  alpha:=1.00:
  lambda:=3.00:
  c:=3.60:
  fsolve(f,r); nous permet d'avoir les racine de l'équation précédente f, qui n'est que le
  polynome qui nous permet d'avoir le coefficient de Lundberg
      -0.06981336070, 0.2210479285

```

on voit bien que la solution positive est bien la solution donnée dans 2.

4- calcul du coefficient de Lundberg en fonction du paramètre d'aversion au risque

$$\hat{r}_\phi = \left(\frac{1}{2\alpha} + \phi + c \frac{\phi^2 \sigma^2}{\mu^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha} + \phi + c \frac{\phi^2 \sigma^2}{\mu^2}\right)^2 - 2\left(\frac{\phi}{\alpha} + c \frac{\phi^2 \sigma^2}{\alpha \mu^2} - \lambda \frac{\phi^2 \sigma^2}{\mu^2}\right)} \quad (3)$$

$$\hat{r}_\phi = \left(\frac{1}{2\alpha} + \frac{c + A^* \mu}{A^{*2} \sigma^2}\right) - \sqrt{\left(\frac{c + A^* \mu}{A^{*2} \sigma^2}\right)^2 + \frac{1}{2\alpha^2} - \frac{c + A^* \mu - 2\lambda\alpha}{\alpha A^{*2} \sigma^2}}$$

```

> restart:
> R:=1/(2*alpha)+phi+c*(phi^2*sigma^2/mu^2)-sqrt((1/(2*alpha)+p
  hi+c*(phi^2*sigma^2/mu^2))^2-2*(phi/alpha+c*phi^2*sigma^2/(al
  pha*mu^2)-lambda*phi^2*sigma^2/mu^2));

```

$$R := \frac{1}{2\alpha} + \phi + \frac{c\phi^2\sigma^2}{\mu^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha} + \phi + \frac{c\phi^2\sigma^2}{\mu^2}\right)^2 - \frac{2\phi}{\alpha} - \frac{2c\phi^2\sigma^2}{\alpha\mu^2} + \frac{2\lambda\phi^2\sigma^2}{\mu^2}}$$

```

> with(plots):
mu:=0.1:
sigma:=0.3:
alpha:=1.00:
lambda:=3.00:
c:=3.60: R;
Warning, the name changecoords has been redefined

0.5000000000 + phi + 32.40000000 phi^2
- sqrt((0.5000000000 + phi + 32.40000000 phi^2)^2 - 2.000000000 phi - 10.80000000 phi^2)
> plot(R,phi=0.00...1.00); nous allons représenter lgraphiquement le coefficient
d'ajustement en fonction du paramètre d'aversion au risque phi in (0,1).

```

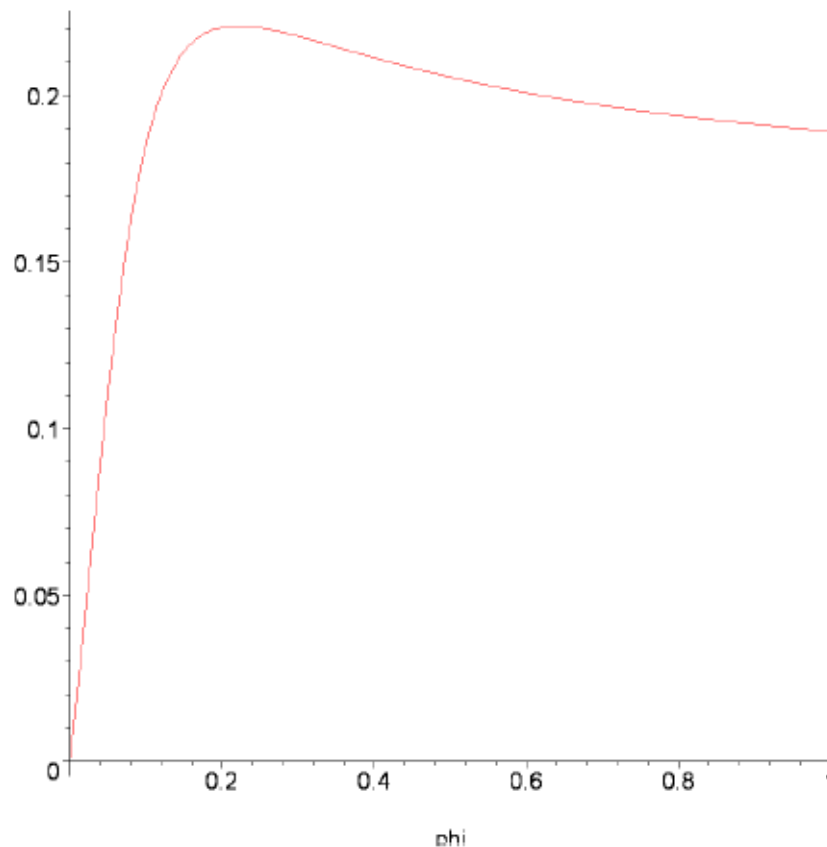


Fig.1 : Coefficient d'ajustement en fonction du paramètre d'aversion au risque

On voit bien graphiquement que le coefficient d'ajustement augmente pour $0 < \phi \leq \hat{r}$, puis

diminue pour $\hat{r} \leq \phi < 1$, le sup de \hat{r}_ϕ est atteint pour $\phi = \hat{r}$, nous allons comme meme calculer le Sup de cette fonction (du coefficient d'ajustement en fonction de ϕ), pour confirmer que c'est bien le coefficient de Lundberg \hat{r} le sup et qui est atteint pour $\phi = \hat{r}$

```
> R:=0.5000000000+phi+32.40000000*phi^2-((.5000000000+phi+32.40000000*phi^2)^2-2.000000000*phi-10.80000000*phi^2)^(1/2);
> maximize(R);
```

0.2210479290

le maximum est bien le coefficient de lundberg $\hat{r} = 0.2210479290$

```
> phi:=0.2210479286;R;
```

$\phi := 0.2210479286$

0.221047929

on voit bien que $\hat{r}_\phi = \hat{r}$, i.e., pour $\phi = \hat{r}$ nous avons $\hat{r}_\phi = \hat{r}$

nous venons de montrer que la meilleur approximation pour le paramètre d'aversion au risque n'est que le coefficient de Lundberg. Pour mieux le voir nous allons représenter graphiquement l'approximation de la probabilité de ruine, ou plus précisément, de la borne supérieure de la probabilité de ruine pour différentes valeurs de ϕ

```
> restart:R:=1/(2*alpha)+phi+c*(phi^2*sigma^2/mu^2)-sqrt((1/(2*alpha)+phi+c*(phi^2*sigma^2/mu^2))^2-2*(phi/alpha+c*phi^2*sigma^2/(alpha*mu^2)-lambda*phi^2*sigma^2/mu^2));
```

$$R := \frac{1}{2\alpha} + \phi + \frac{c\phi^2\sigma^2}{\mu^2} - \sqrt{\left(\frac{1}{2\alpha} + \phi + \frac{c\phi^2\sigma^2}{\mu^2}\right)^2 - \frac{2\phi}{\alpha} - \frac{2c\phi^2\sigma^2}{\alpha\mu^2} + \frac{2\lambda\phi^2\sigma^2}{\mu^2}}$$

```
> mu:=0.1:
sigma:=0.3:
alpha:=1.00:
lambda:=3.00:
c:=3.60:
psi:=exp(-R*u);
```

probabilité de ruine

$\psi :=$

$$e^{\left(-\left(\left(0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2 - \sqrt{\left(0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2\right)^2 - 2.000000000 \phi - 10.80000000 \phi^2}\right)\right)u\right)}$$

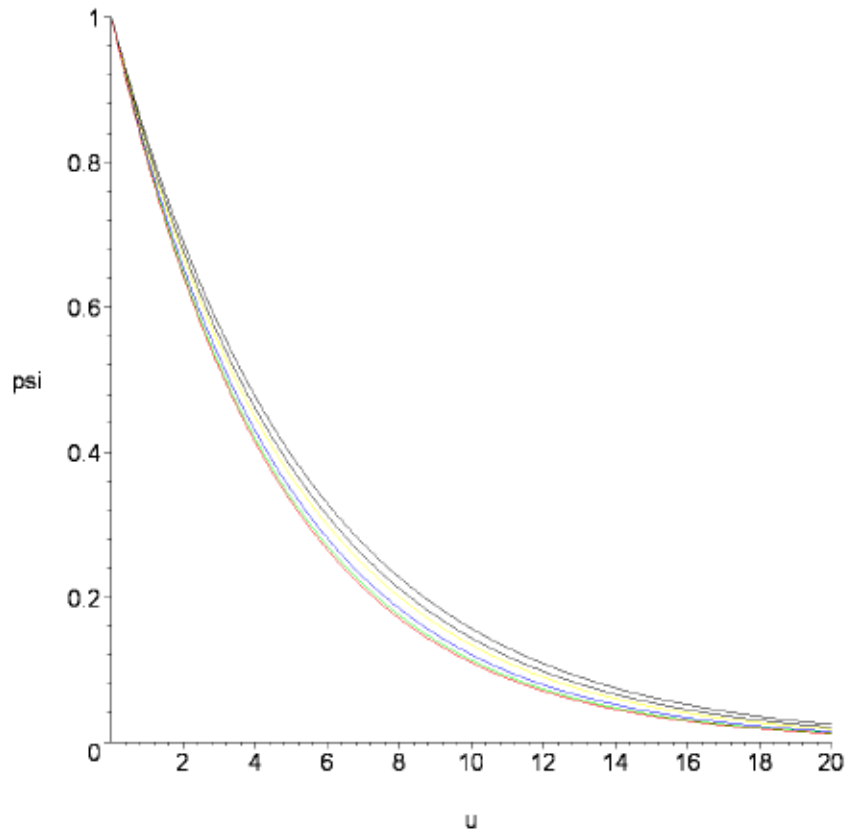
nous avons donc l'expression de la probabilité de ruine en fonction du paramètre d'aversion au risque .

```
> psi:=u->exp(-(.5000000000+phi+32.40000000*phi^2-((.5000000000+phi+32.40000000*phi^2)^2-2.000000000*phi-10.80000000*phi^2)^(1/2))*u);
listephi:=[0.100,0.221047929,0.300,0.400,0.600,0.800]:
liste:=seq(psi(u),phi=listephi):
plot([liste],u=0...20,psi=0.00...1.00,color=[black, red,
```

```
green,blue,yellow,black]);
```

```
ψ := u →
```

$$e^{-\left(\left(-0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2 - \sqrt{\left(0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2\right)^2 - 2.000000000 \phi - 10.80000000 \phi^2}\right) u\right)}$$



```
> delta:=u->1-exp(-(.5000000000+phi+32.40000000*phi^2-((.5000000000+phi+32.40000000*phi^2)^2-2.000000000*phi-10.80000000*phi^2)^(1/2))*u);
```

```
listephi:=[0.100,0.221047929,0.300,0.400,0.600,0.800];
```

```
liste:=seq(delta(u),phi=listephi):
```

```
plot([liste],u=0...20,delta=0.00...1.00,color=[black, red, green,blue,yellow,black]);
```

```
δ := u → 1
```

$$-e^{-\left(\left(-0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2 - \sqrt{\left(0.5000000000 + \phi + 32.40000000 \phi^2\right)^2 - 2.000000000 \phi - 10.80000000 \phi^2}\right) u\right)}$$

BIBLIOGRAPHIE



- [01] **Barles G.** Solutions de viscosité des équations d'Hamilton-Jacobi-Bellman, volume 17 de Mathématiques et Applications. Édition ellipses, 1994.
- [02] **Bellman. R.** Dynamic programming. Princeton University Press ,1957.
- [03] **Bladt. M and Rydberg. T. H.** (December 1997), An actuarial approach to option pricing under the physical measure and without market assumptions. (Insurance: Mathematics and Economics 22, 65-73, 1998).
- [04] **Boukhetala.K, Necir. A .** (COMPSTAT 2004). *Estimating the risk-adjusted premium for the largest claims reinsurance covers.* Proceedings in Computational Statistics, 1577--1584, Physica, Heidelberg, 2004. *Database Expansion Item*
- [05] **Boukhetala.K, Brodeau.F,** 'Rapport de recherche'. Alger-Grenoble, (1984).
- [06] **Brémaud, P.** (1981). Point Processes and Queues. Springer, New York.
- [07] **Browne. S.** Optimal Investment Policies for a Firm with a Random Risk Process: Exponential Utility and Minimizing the Probability of Ruin.Mathematics of operations research 20, 4,p. 937-958, November1995.
- [08] **Cramér. H.** Collected Works,Vol I. Springer 1994, edited by Martin Löf.
- [09] **Cramér. H.** Collected Works,Vol II. Springer 1994, edited by Martin Löf.
- [10] **Crandall M.G., Ishii H., and Lions P.L.** User's guide to viscosity solutions of second order partial differential equations. Bull. Amer. Math. Soc., 27 : 1-67, 1992.
- [11] **David Promislow and Virginia R.Young.** Minimizing the ruin probability of ruin when claims follow Brownian motion with drift.
- [12] **Denis. L, Fernandez. B et Meda. A,** Estimation of Value at Risk for Processes with Stochastic Volatility and Jumps and Application to Ruin Probabilities. Preprint.
- [13] **Embrechts, P, Kluppelberg, C. and Mikosch, T.** (2001) Modelling extremal events for insurance and finance. 3rd ed. Springer, Berlin.
- [14] **Fernandez. B.** Optimal investment and ruin probability for insurers.
- [15] **Fleming, W.H. and Rishel, R.W.** (1975) Deterministic and stochastic optimal control. Springer, New York.

-
- [16] **Fleming W.H. and Soner H.M.** Controlled Markov Processes and Viscosity Solutions. Springer Verlag, New York, 1993.
- [17] **Fleming. W.H and Skorokhod. A.V.** Controlled Markov processes and viscosity solutions. Application of mathematics 25, Springer Verlag, New York, 1992.
- [18] **Gaier. J, Grandits. P et Schachermayer. W.** (2002). Asymptotic ruin probabilities and optimal investment, Preprint, to appear in the annals of applied probability.
- [19] **Gaier. J, Grandits. P et Schachermayer. W.** (2003). Asymptotic ruin probabilities and optimal investment. To appear in: Annals of Applied Probability.
- [20] **Grandell, J.** (1991) Aspects of Risk Theory. Springer, New York.
- [21] **Gauthier. G,** 'Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion'. (2003).
- [22] **Guikhman, A.Skorokhod.** 'Introduction à la théorie des processus aléatoires', Mir (1980).
- [23] **Hackbusch W. and Trottenberg U.** eds. Multigrid methods, volume 960 of Lecture notes in mathematics. Springer Verlag, 1981.
- [24] **Hipp, C.** Stochastic Control with application in insurance.
- [25] **Hipp, C. and Plum, M.** (2000). Optimal investment for insurers. Insurance: Math. Econom. 27, 215–228.
- [26] **Hipp, C. and Plum, M.** (2003) Optimal investment for investors with state dependent income, and for insurers. Finance and Stochastics 7, 299-321.
- [27] **Hipp, C., and Taksar, M.** (2000) Stochastic Control for Optimal New Business. Insurance: Mathematics and Economics 26, 185-192.
- [28] **Hipp, C. and Schmidli, H.** (2003) Asymptotics of the ruin probability for the controlled risk process: the small claims case. To appear in: Scandinavian Actuarial J.
- [29] **Hipp, C. and Vogt, M.** (2003) Optimal dynamic XL reinsurance. To appear in ASTIN Bulletin.
- [30] **Hipp.C.** Application of stochastic methods in finance to the field of insurance in particular stochastic control. Summer school Dimitiana September 22-27, 2003 Christian Hipp University of Karlsruhe.
- [31] **Højgaard, B. and M. Taksar** (1998) Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models. Scand. Actuarial J. 166-180.
- [32] **Højgaard, B. and Taksar, M.** (1998). Optimal proportional reinsurance policies for diffusion models with transaction costs. Insurance Math. Econom.
- [33] **Honoré. P** (November 1997), Modelling Interest Rate Dynamics in a Corridor with Jump Processes.
- [34] **Jaillet. P, Lambertson. D, and B. Lapeyre.** Variationnal inequalities and the pricing of american options. Acta Applicandae Mathematicae, 21 :263-289, 1990.
- [35] **Jean-Philippe Chancelier et Agnyes Sulem,** 'Méthodes numériques en contrôle stochastique'.

- [36] **Jensen, J. L., Pedersen, J.** (December 1997), A note on models for stock prices.
- [37] **Kalashnikov, V et Norberg, R.** (1999). Power tailed ruin probabilities in the present of risky investments. Working paper 159, Laboratory of actuarial mathematics, University of Copenhagen.
- [38] **Karatzas, I. and Shreve** (1988). Brownian Motion and Stochastic Calculus, Springer-Verlag, NY.
- [39] **Karatzas, I., Shreve, S.** (1997). Methods of mathematical finance. Springer, Heidelberg.
- [40] **Karlin, S.** A first course in stochastic process, second edition. Academic Press (1975), New York
- [41] **Krylov, N.V.**. Controlled diffusion processes. Springer Verlag, Berlin, 1980
- [42] **Lamberton, D et Lapeyre, B.** 'Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance', Ellipses. (1991).
- [43] **Laouar, A et Lebtahi, R.**, thèse d'ingénieur en statistique 'étude exploratoire des modèles d'options en finance'. Encadré par **K. Boukhetala**. USTHB. (2003).
- [44] **Lions P.L.** Optimal control of diffusion processes and Hamilton-Jacobi-Bellman equations, part 2 : Viscosity solutions and uniqueness. Comm. in Partial Diff. Equ., 8(11) :1229-1276, 1983.
- [45] **Lundberg, F.** (1903) Approximerad framställning av sannolikhetsfunktionen. Aterforsakring av lilektivrisiker. Akad. Afhandling. Almqvist & Wiksell, Upsalla.
- [46] **Martin- Löf, A.** (1994) Lectures on the use of control theory in insurance. Scand. Actuarial J. 1-25.
- [47] **Merton, R.C.** (1969) Lifetime portfolio selection under uncertainty: The continuous-time case. Review of Economics and Statistics, 51, 247-257.
- [48] **Merton, R.C.** (1971) Optimum consumption and portfolio rules in a continuous-time model. Journal of Economic Theory, 3, 373-413.
- [49] **Olivier François.** Notes de cours de Processus Aléatoires
- [50] **Paulsen, J.** (1998) Ruin theory with compounding assets - a survey. Insurance: Mathematics and Economics, 22, 3-16.
- [51] **Pestien, V.C., and Sudderth, W.D.** (1985). Continuous-Time Red and Black: How to control a diffusion to a goal," Math. of Oper. Res., 10, 4, 599-611.
- [52] **Peskir, G.** (December 1997), Designing Options Given the Risk: The Optimal Skorokhod-Embedding Problem. (Stochastic Process. Appl. 81 pp. 25-38, 1999).
- [53] **Peskir, G.** (November 1997), The Concept of Risk in the Theory of Option Pricing. (Expanded version appears under the title 'A true buyer's risk and classification of options' in Inform. Technol. Econom. Management 1, 2001, 1-20).
- [54] **Pliska, S.R.** (1986). A Stochastic Calculus Model of Continuous Trading: Optimal Portfolios.
- [55] **Pratt, J. W.**. (1964). Risk Aversion in the Small and in the large.
- [56] **Rolski, T. Schmidli, H. Schmidt, V. Teugels, J.** (1998) Stochastic Processes for Insurance and Finance. Wiley Series in Probability and Statistics
- [57] **Rozanov, Y.** (1975). 'Processus aléatoire'. Moscou.

-
- [58] **Schmidli, H.** (2002) On minimizing the ruin probability by investment and reinsurance, *The Annals of Applied Probability*, Vol. 12, No. 3, 890–907
- [59] **Schmidli, H.** (2001). Optimal proportional reinsurance policies in a dynamic setting. *Scand. Actuarial J.*, 55–68.
- [60] **Schmidli, H.** (1999). Perturbed risk processes: A review. *Theory of Stochastic Processes* 5 145–165.
- [61] **Schmidli, H.**, Asymptotics of ruin probabilities for risk processes under optimal reinsurance policies: the large claim case, *Laboratory of Actuarial Mathematics, University of Copenhagen, Universitetsparken 5, DK-2100 Copenhagen, Denmark*
- [62] **Schmidli, Cramér and Lundberg** (1995). Approximations for ruin probabilities of risk processes perturbed by diffusion. *Insurance Math. Econom.* 16 135–149.
- [63] **Vogt, M** (2003) *Optimale dynamische Rückversicherung - ein kontrolltheoretischer Ansatz.* Thesis, University of Karlsruhe.
- [64] **Walter, W.** (1998) *Ordinary Differential Equations. Readings in Mathematics*, Springer, New York.
- [65] **Walter, W.** (1970) *Differential and Integral Inequalities*, Springer, New York.
- [66] **Waters, H. R.** (1983) Some Mathematical Aspects of Reinsurance. *Insurance, Mathematics and Economics* 2, 17-26.
- [67] **Yang, H.** *Optimal Strategies for Insurance Portfolios.* The University of Hong Kong
- [68] **Gaier, J. and Grandits, P.** (2001) Ruin probabilities in the presence of regularly varying tails and optimal investment. Preprint, University of Vienna.
- [69] **Ethier, S.N and Kurtz, T. G.** (1986). *Markov processes.* Wiley, New York..
- [70] **Kato, T.** (1966). *Perturbation of linear operators.* Springer-Verlag.
- [71] **Hastings W.K.** *Monte Carlo sampling methods using Markov chains and their applications.* Number 57. 1970.
- [72] **Bensoussan A , Lions.J.L.** (1978) *Applications des inéquations variationnelles en contrôle stochastique.* Dunod,.
- [73] **REVUZ, D, YOR. M.** (1991). *Continuous Martingale and Brownian Motion*, Springer-Verlag, New York.
- [74] **Gerschenfeld, A et Nadal, C.** (2006). *Lois indéfiniment divisibles et processus de Lévy*, DMA, Ecole Normale Supérieure
- [75] **Ken-Iti Sato,** (1999) *Indefinitely divisible laws and Lévy processes*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 68, Cambridge University Press.
- [76] **Gauthier, G.** (2003) ‘Les méthodes stochastiques dans les sciences de la gestion’.
- [76] **Jaimungal, S and Nayak, S.** *On Valuing Equity-Linked Insurance and Reinsurance Contracts.*